# TET Lernzettel

Conrad Klaus
github.com/EagleEyeElite/TET-Lernzettel
overleaf.com/read/nczbsvtfhhtx#5f73ee

*Hinweis: Ich garantiere nicht für Vollständigkeit oder Richtigkeit, mir persönlich hat die Übersicht aber sehr geholfen. Die Formeln sollten alle richtig sein.*

## 1 Symbole

**Dach-Symbol ( $\hat{}$ ):**

- Mit Dach: $\hat{\Phi}$ – Konstante
- Ohne Dach: $\Phi(x)$ – Funktion

**Komplexe Größen:**

- $\underline{Z}$ – Komplexe Größe
- $Z' = \mathrm{Re}(\underline{Z})$ – Realteil (ein Strich)
- $Z'' = \mathrm{Im}(\underline{Z})$ – Imaginärteil (zwei Striche)
- $\underline{Z}^* = Z' - jZ''$ – Komplex konjugiert

**Phasor:**

- $Z = Z(t) = Z_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \underline{Z} = Z_0 e^{j\varphi}$ – Phasor, für feste Kreisfrequenz $\omega$
- $Z(t) = \mathrm{Re}\{\underline{Z} e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{Z_0 e^{j\varphi + j\omega t}\}$ – Rücktransformation (physikalische Größe)

Der Phasor beschreibt nur Amplitude und Phase bei einer festen Frequenz.

**Balken-Symbol ( $\bar{}$ ):**

- $\overline{X}$ – zeitlicher Mittelwert von X
- $\overline{|\vec{J}|^2} = \overline{|\vec{J}(t)|^2} = \overline{J_0^2 \cos^2(\omega t)} = \frac{1}{2} J_0^2 = \frac{1}{2} \underline{\vec{J}} \cdot \underline{\vec{J}}^*$ – zeitlicher Mittelwert des Quadrats der Stromdichte
- $I_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\overline{I^2(t)}} = \sqrt{\overline{I_0^2 \cos^2(\omega t)}} = \sqrt{\frac{1}{2} I_0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$ – Effektivstrom (RMS-Wert)
- $\overline{\vec{S}} = \overline{\vec{E} \times \vec{H}} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\}$ – zeitlicher Mittelwert des Poynting-Vektors
- $\overline{p_V} = \frac{1}{2} \kappa_{\text{äq}} |\underline{\vec{E}}|^2$ – zeitgemittelte Volumenverlustleistungsdichte

**Hierarchie verschiedene Bezugsgrößen:**

- $P_V = \int\limits_V p_V \, dV$ – Gesamte Verlustleistung $\qquad [P_V] = \mathrm{W}$
- $P'_V = \int\limits_A p_V \, d\vec{A}$ – Verlustleistung pro Längeneinheit $\qquad [P'_V] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}$
- $P''_V = \int\limits_s p_V \, d\vec{s}$ – Verlustleistung pro Flächeneinheit $\qquad [P''_V] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$
- $p_V = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{|\vec{J}|^2}{\kappa}$ – Volumenverlustleistungsdichte $\qquad [p_V] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}$

**Maxwell-Gleichungen:**

$$\text{div } \vec{D} = \varrho \quad \text{(Gaußsches Gesetz)} \tag{1}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{(Quellenfreiheit des Magnetfeldes)} \tag{2}$$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{(Faradaysches Induktionsgesetz)} \tag{3}$$

$$\text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad \text{(Ampèresches Gesetz/ Durchflutungsgesetz)} \tag{4}$$

Fourier-Transformation Beispiele:

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \text{rot } \underline{\vec{E}} + j\omega \underline{\vec{B}} = 0 \tag{5}$$

$$\text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \text{rot } \underline{\vec{H}} - j\omega \underline{\vec{D}} = \underline{\vec{J}} \tag{6}$$

Integralform Beispiele:

$$\oint\limits_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int\limits_{V} \varrho \, dV \tag{7}$$

$$\oint\limits_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} - \int\limits_{A} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = \int\limits_{A} \vec{J} \cdot d\vec{A} \tag{8}$$

**Andere Gleichungen:**

- Poisson-Gleichung $\rightarrow$ Herleitung: div $\vec{D} = \varrho$

$$\Delta \Phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon} \tag{9}$$

- Laplace-Gleichung ($\varrho = 0$)

$$\Delta \Phi = 0 \tag{10}$$

- Allgemeine Helmholtz-Gleichung (beliebige Felder $\underline{\vec{A}}$)

$$\Delta \underline{\vec{A}} + \underline{k}^2 \underline{\vec{A}} = 0 \quad \text{mit } \underline{k} = \beta - j\alpha \tag{11}$$

  $\rightarrow \beta$ Phasenkonstante, $\alpha$ Dämpfungskonstante

  Allgemeine Lösung (1D-Fall):

$$\underline{A}(x) = \underline{C}_1 e^{\underline{k} \cdot x} + \underline{C}_2 e^{-\underline{k} \cdot x} \tag{12}$$

$$\underline{A}(x) = \underline{K}_1 \cosh(\underline{k} \cdot x) + \underline{K}_2 \sinh(\underline{k} \cdot x) \tag{13}$$

  *Hinweis:* Bei Helmholtz-Gleichung immer 1D-Abhängigkeit (Bsp.: d/dy = d/dz = 0), sonst müsste man rot() mitbeachten.

- Inhomogen oder Quellterm ??? in dieser Sektion gibt es noch Probleme :((:

$$\Delta \underline{\vec{A}} + k^2(\vec{r}) \underline{\vec{A}} = \vec{Q} \tag{14}$$

  Inhomogen ($\varepsilon(\vec{r})$), Quellterm ($\vec{J}_e \neq 0$):

$$\Delta \vec{H} + k^2(\vec{r}) \vec{H} = -\text{rot } \vec{J} \quad \text{mit } k(\vec{r}) = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon(\vec{r})} \tag{15}$$

**Elektrodynamik:**

- $\Phi = k_c \frac{Q}{|\vec{r}|}$ – Elektrisches Potential $[\Phi] = \text{V}$

- $\vec{E} = -\text{grad}\,\Phi$ – Elektrisches Feld (elektrostatischer Fall) $[\vec{E}] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$
- $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ – Elektrische Flussdichte (Verschiebungsdichte/ Verschiebungsfeld) $[\vec{D}] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2}$
- $\vec{J} = \kappa\vec{E}$ – elektrische Stromdichte (Volumenstromdichte) $[\vec{J}] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$
- $\vec{K} = \vec{J} \cdot d$ – Oberflächenstromdichte $[\vec{K}] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$
- $\vec{H}$ – Magnetisches Feld $[\vec{H}] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$
- $\vec{A}$ – Vektorpotential (magnetisches Wirbelpotential) $[\vec{A}] = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}}$
- $\vec{B} = \mu\vec{H} = \text{ rot } \vec{A}$ – Magnetische Flussdichte $[\vec{B}] = \mathrm{T} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$
- $\psi$ oder $\Psi$ oder $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ – Magnetischer Fluss $[\psi] = \mathrm{Wb} = \mathrm{Vs}$
- $M = \frac{\psi}{I}$ – Gegeninduktivität $[M] = \mathrm{H} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}$
- $\varrho$ oder $\rho$ – Raumladungsdichte $[\varrho] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^3}$
- $\sigma$ – Flächenladungsdichte $[\sigma] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2}$
- $\lambda$ – Linienladungsdichte $[\lambda] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}}$
- $\omega = 2\pi f$ – Kreisfrequenz $[\omega] = \frac{1}{\mathrm{s}}$
- $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ – Wellenzahl (verlustfreie Medien) $[k] = \frac{1}{\mathrm{m}}$
- $\underline{p} = \sqrt{j\omega\kappa\mu} = \sqrt{\frac{\omega\kappa\mu}{2}}(1+j) = \frac{1+j}{\delta}$ – Propagationskonstante (MQS, verlustbehaftete Medien) $[\underline{p}] = \frac{1}{\mathrm{m}}$
- $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu}}$ – Eindringtiefe/ Skintiefe (Tiefe bei $e^{-1} \approx 37\%$ Amplitude) $[\delta] = \mathrm{m}$
- $p_V = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{|\vec{J}|^2}{\kappa}$ – Volumenverlustleistungsdichte $[p_V] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{AV}}{\mathrm{m}^3}$
- $P_V = \int_V p_V \, dV$ – Gesamte Verlustleistung (V für Verlust) $[P_V] = \mathrm{W} = \mathrm{AV}$
- $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ – Poynting-Vektor (Energieflussdichte) $[\vec{S}] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{AV}}{\mathrm{m}^2}$
- $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ – Wellenimpedanz $[Z] = \Omega = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$

**Materialparameter:**

- $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ – Permittivität (Dielektrizitätskonstante) $[\varepsilon] = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$
- $\mu = \mu_0\mu_r$ – Permeabilität (Magnetische Durchlässigkeit) $[\mu] = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$
- $\kappa$ oder $\sigma$ – Elektrische Leitfähigkeit $[\kappa] = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vm}}$
- $\kappa_{\text{äq}} = \omega\varepsilon'' \tan(\delta)$ – äquivalente Leitfähigkeit $[\kappa_{\text{äq}}] = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vm}}$

**Elektromagnetische Energien:**

- $w_e = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}$ – Elektrische Energiedichte $[w_e] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{m}^3}$
- $W_e = \int\limits_V w_e \, dV$ – Elektrische Energie $[W_e] = \mathrm{J} = \mathrm{Ws}$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_V \varrho\Phi \, dV - \oint\limits_{\partial V} \Phi\vec{D} \cdot d\vec{A}\right) \xrightarrow[\partial V \to \infty]{\text{lok. } \varrho} \frac{1}{2}\int\limits_V \varrho\Phi \, dV \quad \text{(bei Elektrostatik)}$$

- $w_m = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}$ – Magnetische Energiedichte $[w_m] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{m}^3}$
- $W_m = \int\limits_V w_m \, dV$ – Magnetische Energie $[W_m] = \mathrm{J} = \mathrm{Ws}$
- $w_{em} = w_e + w_m$ – Gesamte Energiedichte $[w_{em}] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{m}^3}$
- $W_{em} = W_e + W_m$ – Gesamte Energie $[W_{em}] = \mathrm{J} = \mathrm{Ws}$

**Stichwörter:**

- Lineare, Isotrope und Homogene Materie
- Isotrop: Materialkonstanten richtungsunabhängig (über Materialgleichungen verknüpfte Größen haben dieselbe Richtung)
- homogenes, verlustfreies Medium $\Leftrightarrow \epsilon$, $\mu$ konst.; $\kappa = 0$
- Transversal: quer zur Ausbreitungsrichtung

**Kräfte:**

- $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ – Lorentz-Kraft $\qquad [\vec{F}] = \mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}^2}$
- $\vec{F_C} = Q\vec{E}$ – Coulomb-Kraft ($|\vec{v}| = 0$)
- $\vec{F_L} = Q(\vec{v} \times \vec{B})$ – Magnetische Lorentz-Kraft

**Konstanten:**

- $c = \sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}}$; $c_0 = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ – Lichtgeschwindigkeit $\qquad [c] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- $k_c$ oder $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ – Coulomb-Konstante (für Vakuum) $\qquad [k] = \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C}^2} = \frac{\mathrm{Vm}}{\mathrm{As}}$
- $k_{medium} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}$ – Coulomb-Konstante (für Medium) $\qquad [k] = \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C}^2} = \frac{\mathrm{Vm}}{\mathrm{As}}$

**Mathematische Identitäten:**

- div rot $\vec{A} = 0$
- rot grad $\Phi = 0$ – Merksatz: Rot kraut ist tief rot, beide sind null
- rot rot $\vec{A} =$ grad div $\vec{A} - \nabla^2\vec{A} =$ grad div $\vec{A} - \Delta\vec{A}$
- rot$(\vec{A} - \vec{B}) =$ rot $\vec{A} -$ rot $\vec{B}$
- $\mathrm{rot}(A(\vec{r}) \cdot \vec{B}) = (\mathrm{grad}\, A(\vec{r})) \times \vec{B} + A(\vec{r}) \cdot \mathrm{rot}\, \vec{B}$
- $\nabla \times (A(\vec{r})\vec{B}) = (\nabla A(\vec{r})) \times \vec{B} + A(\vec{r})(\nabla \times \vec{B})$
- $\nabla \cdot (A(\vec{r})\vec{B}) = (\nabla A(\vec{r})) \cdot \vec{B} + A(\vec{r})(\nabla \cdot \vec{B})$
- $\int\limits_A \mathrm{rot}\ \vec{v} \cdot d\vec{A} = \oint\limits_{\partial A} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ – Stokes'scher Integralsatz
- $\int\limits_V \mathrm{div}\ \vec{v}\, dV = \oint\limits_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{A}$ – Gaußscher Integralsatz
- $j = \frac{(1+j)^2}{2}$ oder $\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$
- $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ – Eulersche Formel
- $x^2 + y^2 = r^2$ – Kreisgleichung
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ – Trigonometrische Identität
- $x^2 - y^2 = r^2$ – HyperbelGleichung
- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ – Hyperbolische Identität
- $\cosh(\underline{z}) = \cos(j\underline{z})$
- $\sinh(\underline{z}) = -j\sin(j\underline{z})$
- $e^x - e^{-x} = 2\sinh(x)$
- $e^x + e^{-x} = 2\cosh(x)$
- $(1+p)^q \approx 1 + pq \quad$ für $p \ll 1$
- div $\vec{A} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho A_\varrho)}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ – Zylinder koo.
- grad $\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}\vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z$ – Zylinder koo.

- $\int \frac{1}{1+ax}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{a}\ln|u| + C = \frac{1}{a}\ln|1+ax| + C$ (Substitution: $u = 1+ax \Rightarrow du = a\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{a}du$)
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}[\ln|x|] = \frac{1}{x}$

**Koordinaten:**

- $\rho$ oder $\varrho$ – Radiale Koordinate (Abstand von z-Achse), $\rho \geq 0$
- $\varphi$ oder $\phi$ – Azimutwinkel in x-y-Ebene, $0 \leq \varphi < 2\pi$
- $\vartheta$ oder $\theta$ – Polarwinkel oder Zenitwinkel, $0 \leq \vartheta \leq \pi$

Kugelvolumen:

- $V = \int\limits_V dV = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \cdot 2\pi \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\pi} = \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi R^3}{3}$
- $A = \oint\limits_{\partial V} d\vec{A} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi r^2$

**Nabla-Operator:**

- $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
- $\nabla\Phi = \text{grad}\ \Phi$ – Gradient (Nabla auf Skalarfeld)
- $\text{div grad}\ \Phi = \nabla \cdot (\nabla\Phi) = \nabla^2\Phi = \Delta\Phi$ – Laplace-Operator (Dreieck auf dem Kopf)

**Rot-Operator:**

- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}$
- $\text{rot}\ \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$

**Matrixschreibweise für Basisfunktionen:**

Die geschweifte Klammer-Notation $\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$ steht für eine **Linearkombination** der Basisfunktionen:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \equiv A \cdot f_1 + B \cdot f_2 \tag{16}$$

Beispiele:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ \ln\rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \varphi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \rho^n \\ \rho^{-n} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{Bmatrix} = (A_0 + B_0 \ln\rho)(C_0 + D_0\varphi) \tag{17}$$

$$+ (A_1\rho^n + B_1\rho^{-n})(C_1\cos(n\varphi) + D_1\sin(n\varphi)) \tag{18}$$

## 2 Statik

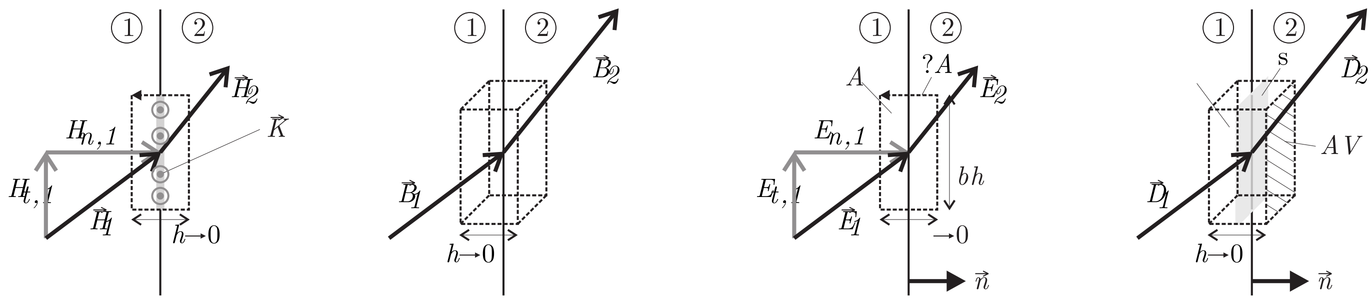
Vereinfachte Maxwell-Gleichungen ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$):

- $\text{div}\ \vec{D} = \rho$
- $\text{rot}\ \vec{H} = \vec{J}$

Hier aufpassen: keine poission Gleichung lösen (da keine Ladung im Inneren des Raums ist, selbst Flächenladung braucht keine Poisson-Gleichung)

Randwertproblem/ Integral kommt auf jeden Fall als Rechenaufgabe in Klausur -¿ Also Potenzialproblem auf jeden Fall!

## 2.1 Stetigkeitsbedingungen




- $D_{n2} - D_{n1} = \sigma$
- $B_{n2} - B_{n1} = 0$
- $E_{t2} - E_{t1} = 0$
- $H_{t2} - H_{t1} = \vec{K}$

## 2.2 Elektrostatik

### 2.2.1 Laplace-Operator Bedeutung

**Physikalisch:**

$$\Delta\Phi = \nabla \cdot (\nabla\Phi) = \nabla \cdot \vec{E} \tag{19}$$

$\Delta\Phi = 0$ bedeutet: Keine Quellen/Senken, harmonischer Verlauf, ladungsfreies Gebiet

**Elektrostatik:**

$$\text{Ladungsfrei:} \quad \Delta\Phi = 0 \quad \text{(Laplace)} \tag{20}$$

$$\text{Mit Ladungen:} \quad \Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{(Poisson)} \tag{21}$$

$$\text{Stationäre Strömung:} \quad \text{div } \vec{J} = 0 \quad \text{(Potentialgleichung)} \tag{22}$$

### 2.2.2 Laplace-Gleichung

Allgemeine Form:

$$\Delta\Phi(x,y,z) = \text{div grad } \Phi(x,y,z) = 0 \qquad (\text{div } \vec{D} = \varrho, \text{ mit } \varrho = 0) \tag{23}$$

Kartesische Koordinaten $(x, y, z)$:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{24}$$

Zylinderkoordinaten $(\rho, \varphi, z)$:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{25}$$

### 2.2.3 Separationsansatz

Grundidee: Die Lösung einer partiellen Differentialgleichung wird als Produkt von Funktionen einzelner Variablen angesetzt:

$$\Phi(x,y,z) = f(x) \cdot g(y) \cdot h(z) \tag{26}$$

$$\Delta\Phi(x,y,z) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}g(y)h(z) + f(x)\frac{d^2g(y)}{dy^2}h(z) + f(x)g(y)\frac{d^2h(z)}{dz^2} = 0 \tag{27}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{f}\frac{d^2f}{dx^2}}_{K_x} + \underbrace{\frac{1}{g}\frac{d^2g}{dy^2}}_{K_y} + \underbrace{\frac{1}{h}\frac{d^2h}{dz^2}}_{K_z} = 0 \tag{28}$$

Einzellösungen:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} \quad \text{mit } K_x = 0 \tag{3.43}$$

$$f(x) = \begin{Bmatrix} e^{k_x x} \\ e^{-k_x x} \end{Bmatrix} \quad \text{mit } K_x = k_x^2 > 0 \tag{3.44}$$

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \sin(k_x x) \\ \cos(k_x x) \end{Bmatrix} \quad \text{mit } K_x = -k_x^2 < 0 \tag{3.45}$$

Notation:

- Die Konstanten $K$: Separationskonstante, als Quotient $f''/f$ definiert.
- Die Konstanten $k$: Skalierungsfaktor (ähnlich wie später die Wellenzahl $k$). Man beachte, dass je nach Funktion $K_x = \pm k_x^2$ gilt.
- Die Separationsgleichung: $K_x + K_y + K_z = 0$.

**Flächenladung:**

Integration des Gaußschen Gesetzes:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{D}\, dV = \oint_{\partial V} \vec{D} \cdot \hat{n}\, dA = \int_V \rho\, dV = Q_{\text{eingeschlossen}} \tag{29}$$

Mantelbeiträge (Höhe $h \to 0$):

$$D_y(y = 0^+) \cdot dA - D_y(y = 0^-) \cdot dA = \sigma(x, z) \cdot dA \tag{30}$$

$$\Leftrightarrow D_y(y = 0^+) - D_y(y = 0^-) = \sigma(x, z) \tag{31}$$

### 2.2.4 Separationsansatz

? (Bernoulli-Ansatz), ist das der Bernoulli Ansatz? - oder ist der eigentlich nur später für die Wellen?

$$\Phi(\rho, \varphi) = f(\rho) \cdot g(\varphi) \tag{32}$$

**Separationsbedingung für 2D-Zylinderkoordinaten:** Einsetzen von $\Phi(\rho, \varphi) = f(\rho) \cdot g(\varphi)$ in die Laplace-Gleichung und Umformung in die Standardform für das Separationsprinzip:

$$\underbrace{\rho^2 \cdot \frac{f''(\rho)}{f(\rho)} + \rho \cdot \frac{f'(\rho)}{f(\rho)}}_{\text{nur von } \rho \text{ abhängig}} + \underbrace{\frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)}}_{\text{nur von } \varphi \text{ abhängig}} = 0 \tag{33}$$

Da beide Terme konstant sein müssen, setzen wir:

$$\rho^2 \cdot \frac{f''(\rho)}{f(\rho)} + \rho \cdot \frac{f'(\rho)}{f(\rho)} = +k_\rho^2 \tag{34}$$

$$\frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)} = -k_\varphi^2 \tag{35}$$

mit der Bedingung $k_\rho^2 + k_\varphi^2 = 0$ bzw. $k_\rho^2 = -k_\varphi^2$.

Dies führt zu den separierten Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} - \frac{k_\rho^2}{\rho^2} f = 0 \quad \text{(Radiale DGL)} \tag{36}$$

$$\frac{d^2 g}{d\varphi^2} + k_\varphi^2 g = 0 \quad \text{(Azimutale DGL)} \tag{37}$$

mit den Separationskonstanten $k_\rho$ und $k_\varphi$.

**Lösung der azimutalen Gleichung:**

$$\frac{d^2g}{d\varphi^2} + k_\varphi^2 g = 0 \tag{38}$$

**Fall 1:** $k_\varphi^2 > 0$ (d.h. $k_\varphi = n$ reell)

$$g(\varphi) = \begin{Bmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{Bmatrix} \tag{39}$$

Periodizitätsbedingung: $g(\varphi + 2\pi) = g(\varphi) \Rightarrow n \in \mathbb{Z}$

**Fall 2:** $k_\varphi^2 = 0$

$$g(\varphi) = \begin{Bmatrix} 1 \\ \varphi \end{Bmatrix} \tag{40}$$

Für Periodizität muss der $\varphi$-Term wegfallen $\Rightarrow g(\varphi) = \text{const}$

**Fall 3:** $k_\varphi^2 < 0$ (d.h. $k_\varphi = i\kappa$ imaginär)

$$g(\varphi) = \begin{Bmatrix} e^{\kappa\varphi} \\ e^{-\kappa\varphi} \end{Bmatrix} \tag{41}$$

Diese Lösung ist **nicht periodisch** und wird daher bei Zylinderkoordinaten **verworfen**.

**Lösung der radialen Gleichung:** Mit $k_\rho^2 = -k_\varphi^2$ erhalten wir:

**Fall 1:** $n \neq 0$ (d.h. $k_\rho^2 = -n^2 < 0$)

$$\frac{d^2f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} + \frac{n^2}{\rho^2}f = 0 \tag{42}$$

Lösung: $f(\rho) = \begin{Bmatrix} \rho^n \\ \rho^{-n} \end{Bmatrix}$

**Fall 2:** $n = 0$ (d.h. $k_\rho^2 = 0$)

$$\frac{d^2f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} = 0 \tag{43}$$

Lösung: $f(\rho) = \begin{Bmatrix} 1 \\ \ln\rho \end{Bmatrix}$

**Allgemeine Lösung:**

$$\Phi(\rho, \varphi) = \begin{Bmatrix} 1 \\ \ln\rho \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ \varphi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \rho^n \\ \rho^{-n} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{Bmatrix} \tag{44}$$

## 2.3 Magnetostatik

**Hochpermeable Materialien:**
Für $\mu \gg \mu_0$ wird die magnetische Feldstärke stark reduziert, da das Material die magnetischen Feldlinien effizient führt.

$$\mu \to \infty \quad \Rightarrow \quad \vec{H} \to 0 \quad \text{(bei endlichem } \vec{B}\text{)} \tag{45}$$

**Biot-Savart:**
Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r}_p)$ erzeugt durch stromdurchflossenen Leiter.

$$\vec{H}(\vec{r}_p) = \frac{I}{4\pi} \int\limits_C \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_d}{|\vec{r}_d|^3} \tag{46}$$

Aufbau des Magnetfeld-Problems:

- $\vec{r}_p$ – Ortsvektor zum Aufpunkt P (wo wir das Magnetfeld berechnen wollen)
- $\vec{r}_q$ oder $\vec{r}'$ – Ortsvektor zum Quellpunkt Q (Punkt auf dem stromdurchflossenen Leiter)
- $d\vec{l} = d\vec{r}_q$ – Leiterelement, infinitesimales Vektorelement entlang des Leiters, zeigt in Richtung des Stroms
- $\vec{r}_d = \vec{r}_p - \vec{r}_q$ – Abstandsvektor vom Quellpunkt Q zum Aufpunkt P
- $d\vec{l} \times \vec{r}_d$ – Kreuzprodukt: Bestimmt die Richtung des Magnetfeldbeitrags (senkrecht zu beiden Vektoren)
- $|\vec{r}_d|^3$ – Abstand im Nenner: Sorgt für die $1/r^2$-Abhängigkeit des Magnetfelds (mal ein zusätzlicher Faktor $r$ aus der Vektornormierung)
- $C$ – Integrationspfad entlang des stromdurchflossenen Leiters

Beispiel Segment: Von $(a, 0, 0)$ bis $(a, a, 0)$:

$$d\vec{r}_q(t) = (a, t, 0) \quad \text{mit } t \in [0, a] \text{ parametrisiert } C \tag{47}$$

$$d\vec{l} = \frac{d\vec{r}_q}{dt}\, dt \tag{48}$$

**Gegeninduktivität:**
Die Gegeninduktivität $M$ beschreibt die magnetische Kopplung zwischen zwei Stromschleifen.

$$M = \frac{\Psi}{I} \tag{49}$$

Dabei ist:

- Induzierte Spannung: $U_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$ (Faraday'sches Induktionsgesetz)

# 3 Magnetoquasistik MQS

Vereinfachte Maxwell-Gleichungen ($\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ll \vec{J}$):

- rot $\underline{\vec{E}} + j\omega \underline{\vec{B}} = 0$
- rot $\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}}$

Bedingung: $\frac{\omega\varepsilon}{\kappa} \ll 1$
$\rightarrow$ Herleitung: $j\omega\underline{\vec{D}} \ll \underline{\vec{J}}$

**Diffusionsgleichung:** (MQS; $\kappa$, $\mu$ konst.; div $\vec{E}$ = div $\vec{H} = 0$) $\rightarrow$ Herleitung: rot $\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ und rot $\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}$

Zeitbereich, z.B. 1D-Funktion $H(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \kappa\mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{50}$$

Fourier-Transformation (Frequenzbereich):

$$\frac{d^2 \underline{H}}{dx^2} - \underline{p}^2 \underline{H} = 0 \quad \text{mit } \underline{p}^2 = j\omega\kappa\mu \tag{51}$$

$$\Delta\underline{\vec{H}} - \underline{p}^2 \underline{\vec{H}} = 0 \tag{52}$$

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \underline{p}^2 \underline{\vec{E}} = 0 \tag{53}$$

Laplace-Transformation $\underline{H}(x,\underline{s})$ (Anfangsbedingung $H(x,t=0)=0$):

$$\frac{\partial^2 \underline{H}(x,\underline{s})}{\partial x^2} - \underline{p}^2 \underline{H}(x,\underline{s}) = 0 \quad \text{mit } \underline{p}^2 = \kappa\mu\underline{s} \tag{54}$$

Allgemeine Lösung (für Fourier- und Laplace-Transformation mit Anfangsbedingung $H(x,t=0)=0$):

$\rightarrow$ siehe allgemeine Helmholtz-Gleichung

**Feldabfall (bei MQS):**

Exponentieller Abfall im quasistatischen Fall:

$$|\underline{H}(d)| = H_0 e^{-\frac{d}{\delta}} \tag{55}$$

Feldverhältnis der Ränder:

$$\frac{H(d)}{H(0)} \tag{56}$$

**Poyntingscher Satz:**

$$-\frac{\partial w_{em}}{\partial t} = \operatorname{div}(\vec{S}) + p_V \tag{57}$$

# 4 Wellen

**Ausbreitung:**
Welle mit Ausbreitungsrichtung $\vec{e}_k = \vec{e}_z$. Daher nur $E_x$ und $H_y$ Komponente.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_x H_y \end{pmatrix} \tag{58}$$

**Komplexe Felddarstellung:**

$$\begin{aligned} H(z,t) &= \operatorname{Re}\{\underline{H}(z) \cdot e^{j\omega t}\} && (59)\\ &= \operatorname{Re}\{\underline{H}_0 e^{-z/\delta} e^{-jz/\delta} e^{j\omega t}\} && (60)\\ &= \operatorname{Re}\{\underline{H}_0 e^{-z/\delta} e^{j(\omega t - z/\delta)}\} && (61)\\ &= H_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) && (62) \end{aligned}$$

**Wellengleichung:**($\epsilon$, $\mu$ konst.; $\kappa = 0$; $\vec{J} = 0$; div $\vec{E}$ = div $\vec{H} = 0$) $\rightarrow$ Herleitung: rot $\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ und rot $\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}$

Für eine 1D-Funktion $f(x,t)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{63}$$

Fourier-Transformation (Frequenzbereich):

$$\Delta \underline{\vec{E}} + k^2 \underline{\vec{E}} = 0 \quad \text{mit } k^2 = \omega^2 \epsilon\mu \tag{64}$$

$$\Delta \underline{\vec{H}} + k^2 \underline{\vec{H}} = 0 \tag{65}$$

D'Alembert'sche Lösung:

$$f(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct), \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \tag{66}$$

Allgemeine Lösung:

→ siehe allgemeine Helmholtz-Gleichung

**Komplexe Permittivität (verlustbehaftete Medien):**
In verlustbehafteten Dielektrika wird die Permittivität komplex:

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon_0(\varepsilon_r' - j\varepsilon_r'') \tag{67}$$
$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon'(1 - j\tan\delta) \tag{68}$$

- $\varepsilon'$: Realteil (Energiespeicherung, Polarisation)
- $\varepsilon''$: Imaginärteil (Verluste, Dissipation)

**Verlustwinkel (nicht die Eindringtiefe):**

$$\tan(\delta) = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \tag{69}$$

Für kleine Verluste gilt: $\delta \ll 1$ (guter Isolator)

**Wellenimpedanz**

- $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ – Wellenimpedanz im Vakuum (Freiraumimpedanz) $[Z_0] = \Omega$
- $Z = \frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ – Verhältnis von E- zu H-Feld (Wellenimpedanz) $[Z] = \Omega$
- $\vec{H} = \frac{1}{Z}\vec{k} \times \vec{E}$ bzw. $H_y = \frac{E_x}{Z}$ – E-H-Beziehung für ebene Wellen $[H] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$
- $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\underline{\varepsilon}}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}$ – Wellenimpedanz im verlustbehafteten Medium (reell für kleine Verluste) $[Z] = \Omega$

**Äquivalente Leitfähigkeit:**

$$\kappa = \omega\varepsilon'' = \omega\varepsilon' \tan(\delta) \tag{70}$$

$$\varepsilon'' = \frac{\kappa}{\omega} \tag{71}$$

**Komplexe Wellenzahl:**

$$k = \beta - j\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} \tag{72}$$

- $\beta$: Phasenkonstante (bestimmt Wellenlänge)
- $\alpha$: Dämpfungskonstante (bestimmt Absorption)

Für kleine Verluste ($\tan\delta \ll 1$):

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\underline{\varepsilon}} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'(1 - j\tan\delta)} \approx \beta - j\alpha \tag{73}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r} \tag{74}$$
$$\alpha = \frac{\beta\tan\delta}{2} = \frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'}\tan\delta}{2} \tag{75}$$

Für kleine Verluste ($(1+p)^q \approx 1 + pq \quad$ für $p = \tan\delta \ll 1$):

$$\sqrt{1 - j\tan\delta} \approx 1 - j\frac{\tan\delta}{2} \tag{76}$$

**Gedämpfte Wellenausbreitung:**

$$\underline{E}(z) = E_0 e^{-jkz} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \tag{77}$$

Leistungsflussdichte nimmt exponentiell ab:

$$S_z(z) = S_0 e^{-2\alpha z} \tag{78}$$

**Dämpfungsstrecke** ($-3$ dB, d.h. Halbierung der Leistung):

$$d = \frac{\ln(2)}{2\alpha} = \frac{\ln(2)}{2\kappa} \tag{79}$$

**Poyntingscher Satz**

$$\operatorname{div} \overline{\vec{S}} = -\overline{p_V} \tag{80}$$

Die linke Seite beschreibt die **Änderung der Leistungsflussdichte** entlang der Ausbreitungsrichtung, die rechte Seite die **dissipierte Leistung** im Medium.

differentielle Form im Frequenzbereich:

$$\operatorname{div} \underline{\vec{S}} = -\frac{1}{2}\underline{\vec{J}}^* \cdot \underline{\vec{E}} - j\omega\left(\overline{w_m} - \overline{w_e}\right) \tag{81}$$

Verknüpfung von $p$ und $k$:

$$p = jk \tag{82}$$

# 5 Klausur

- Klausurdauer: 2,5 h
- Keine Hilfsmittel: Nur Stift, kein Taschenrechner, kein Hilfszettel, keine Formelsammlung etc.
- 2. Termin: 07.10.25, 8:30-11:00 HE101
- Format: 1) kurze unabhängige Aufgaben (wie HA5)
  2) 3) 4) Rechenaufgaben (drei von den 5 Themen zu rechnen - halbe Stunde pro Aufgabe)
- Besselfunktion kommt nicht ran (nicht lernen)
- Wellen: wahrscheinlich keine komplette Rechenaufgabe, aber ein, zwei Teilaufgaben in 1) - z.B. Polarisation/Dipol, gehört haben, aber nicht zum Rechnen $\rightarrow$ Wenn in der Aufgabe: ohne Rechnung $\rightarrow$ Dann auch wirklich nur Ergebnis.
- Meiste kommt aus der Übung. Wenn die Übung alle verstanden haben, dann gut für Klausur.
- Altklausuren, die 10 Jahre alt sind, sind noch einigermaßen okay aktuell (reicht zum Lernen).
- konstaten auswendig lernen nicht notwendig (außer höchstens C). Z.B.: Lösung 4 $\epsilon_0$ reicht aus
- Einheitscheck immer ganz gut
- Maxwell wird immer abgefragt: wie 1. Aufgabe in der Problekalusur, oder auch in Frequenz, oder Integralform
- Herleitung für Bedingung für MQS könnte abgefragt werden: $\frac{\omega\varepsilon}{\kappa} \ll 1$
- rot H = dD/dt + J -¿ (d/dt zu jw) - Trafo der Maxwell-Gleichung mit Fourier könnte auch abgefragt werden
- Biot-Savart müssen wir nicht auswendig kennen für die Klausur, auch nicht herleiten können, aber anwenden können. Integrallösung üben muss nicht geübt werden. Nur aufschreiben, verstehen und anwenden.
- div A = 0 – Coulomb-Eichung