GNT Lernzettel

Conrad Klaus

1 Verteilungen

ADV: Amplituden Dichteverteilung / Wahrscheinlichkeitsdichte

1. $p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. stetig
3. $\int_x p(x)dx = 1$

VDF: Verteilungsdichtefunktion/ Dichtefunktion (PDF: Probability density function):

$$p_X(x) - \text{(klein Buchstabe)} \tag{1}$$

PMF: Wahrscheinlichkeitsmassenverteilung (Probability Mass function):

$$P_X(x) - \text{(groß Buchstabe)} \tag{2}$$

Zufallsvariable (Großbuchstabe):

$$X - \text{(z.B. Ereignis Würfelwurf)} \tag{3}$$

Realisierung (Kleinbuchstabe):

$$x - \text{(z.B. } x \epsilon \{1,2,3,4,5,6\} \text{ oder x:} 1,2,3,4,5,6) \tag{4}$$

Kolmogorov-Axiome:

- Nicht-Negativität: $P(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{F}$
- Normierung: $P(\Omega) = 1$
- σ-Additivität: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$, disjunktiv

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(A \cap B) = P(A, B) = P(A|B) \cdot P(B) \tag{5}$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \sum_K P(A|B_K)P(B_K) \tag{6}$$

Beziehung für die Vereinigung von Ereignissen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{7}$$

Bedingung für statistische Unabhängigkeit:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{8}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung: $X \sim P$

Gaußsche Zufallsvariable:

$$p_{X \sim N(\mu,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{9}$$

Momente für: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$\mathbb{E}[X] = \mu \tag{10}$$
$$\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2 + \mu^2 \tag{11}$$
$$\mathbb{E}[X^3] = \mu^3 + 3\mu\sigma^2 \tag{12}$$
$$\mathbb{E}[X^4] = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4 \tag{13}$$

Weißes Rauschen:

$$R_{WW}(k) = \sigma_W^2 \cdot \delta(k) \tag{14}$$

Eigenschaften:

- Unkorreliert für Zeitpunkte $k \neq 0$, bei $k = 0$ ist die Korrelation gleich der Varianz
- Mittelwert frei: $\mathbb{E}[W(n)] = 0$
- Konstantes Leistungsdichtespektrum: $S_{WW}(\Omega) = \sigma_W^2$

2 Definitionen

Dichtefunktion:

$$f_X(x) = p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \tag{15}$$

f(x) und p(x) sind beide gebräuchlich

Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)\, dt \tag{16}$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = x) = p_X(x) \tag{17}$$

Randdichte:

$$f_X(x) = \int_y p_{X,Y}(x, y)\, dy \tag{18}$$

Erwartungswert (Erstes Moment):

$$\mu_X = \mathbb{E}_{X \sim P}[X] = \mathbb{E}[X] = \int_x x \cdot p_X(x)\, dx \tag{19}$$

Gemeinsamer Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \int_x \int_y g(x, y) \cdot p_{X,Y}(x, y)\, dy\, dx \tag{20}$$

Mittelwert (diskret):

$$\bar{y}(m, n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} y_k(m, n) \tag{21}$$

Leistung des Signals (Zweites Moment):

$$P_X = \mathbb{E}[X^2] = \int_x x^2 \cdot p_X(x)\, dx = \sigma_X^2 + \mu_X^2 = R_{XX}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(\Omega)\, d\Omega \tag{22}$$

Charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen X:

$$\varphi_X(t) = \mathcal{F}\{f_X(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\, dx = \mathbb{E}[e^{itX}] \tag{23}$$

Ableitung der Momente aus der charakteristischen Funktion:

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{dt^n} \varphi_X(t) \Big|_{t=0} \tag{24}$$

Varianz/ Dispersion (zweites zentrales Moment):

$$\sigma_X^2 = D^2(X) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = P_X - \mu_X^2 \tag{25}$$

erstes zentrales Moment:

$$\mathbb{E}[X - \mu_X] = 0 \tag{26}$$

Transformationsformel für Dichtefunktion:

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x)}{|g'(x)|}|_{x=g^{-1}(y)} = \frac{p_X(g^{-1}(y))}{\left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|}; \quad g(x) = 4x - 3 \Leftrightarrow g^{-1}(y) = \frac{y+3}{4} \tag{27}$$

3 Korrelation

Zusammenfassung der Korrelationseigenschaften:

- **Unkorreliert (Nicht korreliert):** Prozesse haben keine lineare Abhängigkeit.

$$C_{XY} = 0 \text{ oder } R_{XY}(0) = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] \tag{28}$$

- **Orthogonal:** Prozesse haben kein gemeinsames Leistungsspektrum.

$$R_{XY}(0) = 0 \tag{29}$$

- **Statistisch unabhängig:** Stärkste Form der Unabhängigkeit. Stochastische Prozesse beeinflussen sich gegenseitig in keiner Weise.

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \tag{30}$$

- **Wichtige Zusammenhänge:**

$$\text{Orthogonal} \Leftrightarrow \text{Unkorreliert} + \text{mittelwertfrei} \tag{31}$$

$$\text{Orthogonal (z.B.} Y = X^2 \text{für mittelwertfreies, symmetrisches X)} \not\Rightarrow \text{Statistisch unabhängig} \tag{32}$$

$$\text{Statistisch unabhängig} \Rightarrow \text{Nicht korreliert} \tag{33}$$

$$\text{Aus statistischer Unabhängigkeit folgt keine Aussage über Orthogonalität} \tag{34}$$

Merksatz: Die Korrelation erfasst nur lineare Zusammenhänge zwischen stochastischen Prozessen. Für nichtlineare Abhängigkeiten ist sie kein geeignetes Maß.

Korrelation:

$$C_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mu_X \mu_Y \tag{35}$$

Korrelationskoeffizient:

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \tag{36}$$

Kreuzkorrelation:

$$R_{XY}(k) = \mathbb{E}[X(n)Y(n+k)] \tag{37}$$

$$R_{XY}(0) = \mathbb{E}[XY] \tag{38}$$

$$R_{XY}(k) = R_{YX}(-k) \tag{39}$$

Autokorrelationsfunktion:

$$R_{XX}(k) = \mathcal{F}^{-1}[S_{XX}(\Omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(\Omega)e^{jk\Omega}d\Omega \tag{40}$$

$$R_{XX}(0) = E[X^2(n)] = P_X(\Omega) \neq P_X \tag{41}$$

normierte AKF:

$$\rho_{XX}(k) = \frac{R_{XX}(k)}{R_{XX}(0)} \tag{42}$$

Leistungsdichtespektrum:

$$R_{XX}(k) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} S_{XX}(\Omega) \tag{43}$$

$$S_{XX}(\Omega) = \mathcal{F}\{R_{XX}(k)\}; R_{XX}(k) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{XX}(\Omega)\} \tag{44}$$

$$R_{XX}(0) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{XX}(\Omega)\}|_{\tau=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(\Omega)\, d\Omega \tag{45}$$

Gibt an, wie die Leistung eines stochastischen Signals über verschiedene Frequenzen verteilt ist. Die Gesamtleistung durch Integration berechenbar.

$$\mathcal{F}\{\delta(k)\} = 1 \tag{46}$$

$$\mathcal{F}\{\delta(k+1)\} = e^{j\Omega} \tag{47}$$

$$\mathcal{F}\{\delta(k-1)\} = e^{-j\Omega} \tag{48}$$

Kreisfrequenz im kontinuierlichen Fall: $\Omega = 2\pi f$

$$e^{jk\Omega} = \cos(k\Omega) + j \cdot \sin(k\Omega) \tag{49}$$

Für symmetrisches Intervall

$$\int_{-a}^{a} e^{jk\Omega} d\Omega = \int_{-a}^{a} \cos(k\Omega) d\Omega \tag{50}$$

Signal Noise Ratio (SNR):

$$\text{SNR} = \frac{P_X}{P_N} = \frac{R_{XX}(0)}{R_{NN}(0)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(\Omega)\, d\Omega}{\int_{-\pi}^{\pi} S_{NN}(\Omega)\, d\Omega} \tag{51}$$

$$\tag{52}$$

4 Wiener Kolmogorov Filter

Verwendung (SNT_04_Stoerreduktion, S. 38):

- reine Rauschbefreiung
- reine Entzerrung
- lineare Prädiktion

Bei gemeinsam normalverteilten Zufallsvariablen sind lineare Filter optimal.

Ursprüngliches Signal:

$$X(n) \tag{53}$$

Signal nach Übertragung:

$$Y(n) \tag{54}$$

Schätzung des Signals:

$$Z(n) \tag{55}$$

Fehler (Differenz/ Deviation)/ Residuum:

$$d(n) = R(n) = X(n) - Z(n) \tag{56}$$

Deviation bei Prädiktion, Residuum bei Rauschbefreiung

Filtereinstellung:

$$H_{opt}(\Omega) = \frac{S_{XY}(\Omega)}{S_{YY}(\Omega)} \tag{57}$$

Orthogonalitätsprinzip:

Bei einer optimalen Schätzung ist der Fehler orthogonal (senkrecht) zur Schätzung.

$$\begin{aligned} R_{DZ_{opt}}(0) &= \mathbb{E}[d(n)Z_{\text{opt}}(n)] = 0 &(58)\\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}[Z_{\text{opt}}(n)^2] = \mathbb{E}[X(n)Z_{\text{opt}}(n)] &(59) \end{aligned}$$

Besteht das Eingangssignal aus gemeinsam normalverteilten Zufallsvariablen, sind Fehler und Ausgabe dann statistisch unabhängig.

Beispielrechnung:

$$\begin{aligned} \sigma_d^2 &= \mathbb{E}[(X(n) - Z_{\text{opt}}(n))^2] = \mathbb{E}[X(n)^2 - 2X(n)Z_{\text{opt}}(n) + Z_{\text{opt}}(n)^2] &(60)\\ &= \mathbb{E}[X(n)^2 - X(n)Z_{\text{opt}}(n)] \quad \text{—Orthogonalitätsprinzip} &(61)\\ &= \sigma_X^2 - \sum_{k=1}^{N} h_{k,\text{opt}} R_{XX}(k) \quad \text{— wenn } \mu_X = 0 &(62)\\ &= \sigma_X^2 - \mathbf{h}_{\text{opt}}^T \mathbf{r}_{XX} &(63)\\ &= \sigma_X^2 - \mathbf{r}_{XX}^T \mathbf{R}_{XX}^{-1} \mathbf{r}_{XX} &(64) \end{aligned}$$

Rauschbefreiungsfilter:

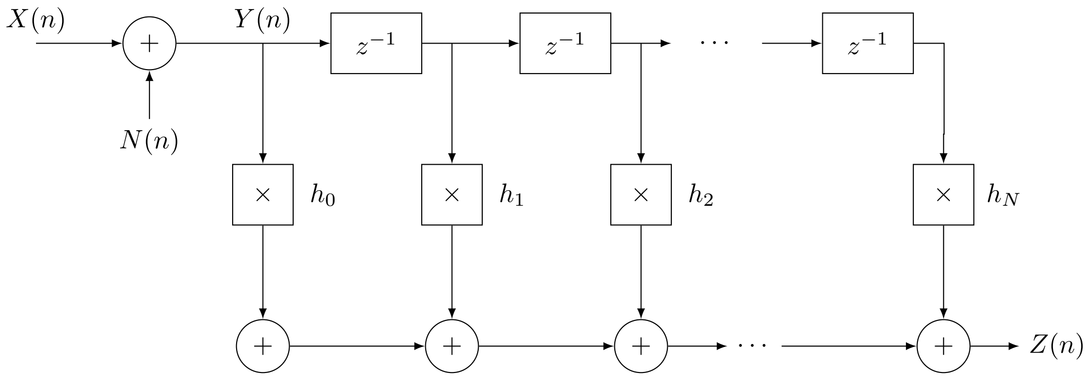


Figure 1: Rauschbefreiungsfilter

$$Z(n) = \sum_{k=0}^{N} h_k Y(n-k) \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
\min\{MSE\} \Rightarrow 0 \overset{!}{=} \frac{\partial MSE}{\partial h_i} &= \frac{\partial \mathbb{E}[(X(n)-Z(n))^2]}{\partial h_i} && (66)\\
&= \frac{\partial \mathbb{E}[u(v(n))]}{\partial h_i} = \mathbb{E}[u'(v(n)) \cdot v'(n)] = \mathbb{E}[2 \cdot (X(n)-Z(n)) \cdot \frac{\partial v(n)}{\partial h_i}] && (67)\\
&= \mathbb{E}[2 \cdot (X(n)-Z(n)) \cdot -Y(n-i)] = -2 \cdot \mathbb{E}[(X(n)-Z(n)) \cdot Y(n-i)] && (68)\\
\Rightarrow 0 &= \mathbb{E}[X(n) \cdot Y(n-i)] - \mathbb{E}[Z(n) \cdot Y(n-i)] && (69)\\
\Leftrightarrow \mathbb{E}[X(n) \cdot Y(n-i)] &= \mathbb{E}[Z(n) \cdot Y(n-i)] && (70)\\
\Leftrightarrow R_{XY}(i) &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{N} h_k Y(n-k) \cdot Y(n-i)\right] = \sum_{k=0}^{N} h_k \cdot \mathbb{E}[Y(n-k) \cdot Y(n-i)] && (71)\\
&= \sum_{k=0}^{N} h_k \cdot R_{YY}(i-k) && (72)\\
(\text{da, } R_{YY}(-i) &= R_{YY}(i)) && (73)\\
\Rightarrow \mathbf{R_{YY}} \cdot \mathbf{h}_{\text{opt}} &= \mathbf{R_{XY}} && (74)
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} R_{YY}(0) & R_{YY}(1) \\ R_{YY}(1) & R_{YY}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{0,\text{opt}} \\ h_{1,\text{opt}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{XY}(0) \\ R_{XY}(1) \end{bmatrix} \tag{75}$$

Filtereinstellung:

$$H_{opt}(\Omega) = \frac{S_{XY}(\Omega)}{S_{YY}(\Omega)} = \frac{S_{XX}(\Omega)}{S_{XX}(\Omega) + S_{NN}(\Omega)} \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
& S_{XY}(\Omega) = \mathcal{F}\{\mathbb{E}[X(n) \cdot Y(n+m)]\} = \mathcal{F}\{\mathbb{E}[X(n) \cdot (X(n+m) + N(n+m))]\} && (77)\\
R_{XN}(k) = 0 \Rightarrow \quad & S_{XY}(\Omega) = \mathcal{F}\{\mathbb{E}[X(n) \cdot X(n+m)]\} = S_{XX}(\Omega) && (78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& S_{YY}(\Omega) = \mathcal{F}\{\mathbb{E}[Y(n) \cdot Y(n+m)]\} = \mathcal{F}\{\mathbb{E}[(X(n)+N(n)) \cdot (X(n+m)+N(n+m))]\} && (79)\\
R_{XN}(k) = 0 \Rightarrow\ & S_{YY}(\Omega) = \mathcal{F}\{\mathbb{E}[X(n) \cdot X(n+m)] + \mathbb{E}[N(n) \cdot N(n+m)]\} = S_{XX}(\Omega) + S_{NN}(\Omega) && (80)
\end{aligned}$$

Prädiktionsfilter:

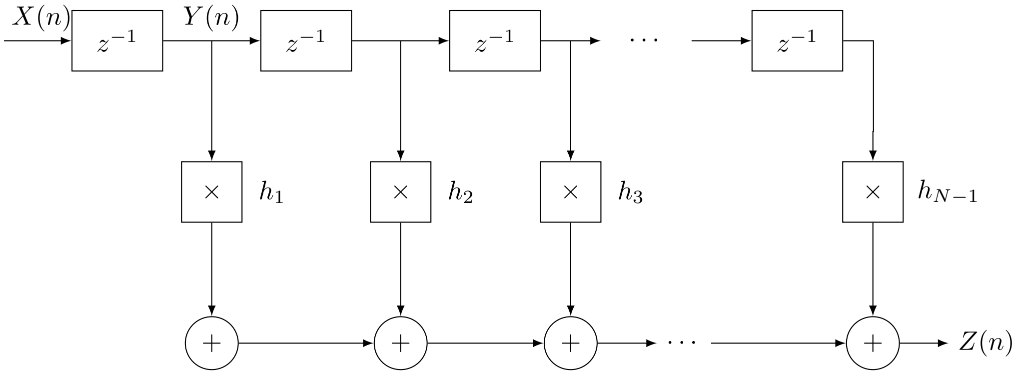


Figure 2: Prädiktionsfilter

$$Z(n) = \sum_{k=1}^{N} h_k X(n-k) \tag{81}$$

$$\begin{bmatrix} R_{XX}(0) & R_{XX}(1) \\ R_{XX}(1) & R_{XX}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1,\text{opt}} \\ h_{2,\text{opt}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{XX}(1) \\ R_{XX}(2) \end{bmatrix} \tag{82}$$

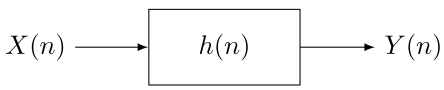
$$\mathbf{R_{XX}} \cdot \mathbf{h}_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} R_{XX}(1) \\ R_{XX}(2) \end{bmatrix} \tag{83}$$

Bei optimaler Filterung:

$$\min\{\sigma_d^2\} = \sigma_x^2 - \sum_k h_k R_{XX}(k) \tag{84}$$

$$R_{DD}(k) = \sigma_d^2 \cdot \delta(k) \tag{85}$$

LTI System:



Frequenzbereich - Multiplikation:

$$Y(n) = X(n) * h(n) = h(n) * X(n); Y(j\Omega) = X(j\Omega) \cdot H(j\Omega) \tag{86}$$

Leistungsdichtespektrum:

$$S_{YY}(\Omega) = S_{XX}(\Omega) \cdot |H(j\Omega)|^2 \tag{87}$$

Zusammenhang durch Fourier-Transformation: Darstellung des Fourier-Transformation:

$$h(n) \circ\!\!\xrightarrow{\mathcal{F}}\!\!\bullet\, H(j\Omega) \tag{88}$$

$$H(j\Omega) = \mathcal{F}\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\Omega n} \tag{89}$$

$$h(n) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(j\Omega) e^{j\Omega n} \, d\Omega \tag{90}$$

Faltungsrechenregeln:

$$X(n) * \delta(n) = X(n) \tag{91}$$

$$X(n) * \delta(n-m) = X(n-m) \tag{92}$$

$$X(n) * [a \cdot h(n)] = a \cdot [X(n) * h(n)] \tag{93}$$

$$X(j\Omega) \cdot [a \cdot H(j\Omega)] = a \cdot [X(j\Omega) \cdot H(j\Omega)] \tag{94}$$

Beispiele:

$$\mathcal{F}^{-1}\{a\} = a \cdot \delta(n) \tag{95}$$

5 Wahrscheinlichkeiten bei Überlagerung

AWGN-Kanal
Additives weißes Rauschen, mittelwertfrei

Nutzsignal (useful signal):

$$p_U(u) \tag{96}$$

Rauschsignal (noise signal):

$$p_N(n) \tag{97}$$

Empfangssignal (received signal):

$$p_Y(y) \tag{98}$$

Überlagerung wird zur Faltung:
Addition von Nutzsignal und Rauschen:

$$y = u + n \Rightarrow p_Y(y) = \int p_U(u) \cdot p_N(y-u)\, du = (p_U * p_N)(y) \tag{99}$$

Die Addition zweier Zufallsvariablen wird zur Faltung ihrer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen.

Fehlerwahrscheinlichkeit:

$$P_{\text{Fehler}} = \int p_E(e)\, de \tag{100}$$