

GNT Lernzettel

Conrad Klaus

1 Verteilungen

ADV: Amplituden Dichteverteilung / Wahrscheinlichkeitsdichte

1. $p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. stetig
3. $\int_x p(x) dx = 1$

VDF: Verteilungsdichtefunktion/ Dichtefunktion (PDF: Probability density function):

$$p_X(x) - (\text{klein Buchstabe}) \quad (1)$$

PMF: Wahrscheinlichkeitsmassenverteilung (Probability Mass function):

$$P_X(x) - (\text{groß Buchstabe}) \quad (2)$$

Zufallsvariable (Großbuchstabe):

$$X - (\text{z.B. Ereignis Würfelwurf}) \quad (3)$$

Realisierung (Kleinbuchstabe):

$$x - (\text{z.B. } x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ oder } x: 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (4)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(A \cap B) = P(A, B) = P(A|B) \cdot P(B) \quad (5)$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \sum_K P(B_K) P(A|B_K) \quad (6)$$

Beziehung für die Vereinigung von Ereignissen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (7)$$

Bedingung für statistische Unabhängigkeit:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (8)$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung: $X \sim P$

Gaußsche Zufallsvariable:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (9)$$

Momente für: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$\mathbb{E}[X] = \mu \quad (10)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2 + \mu^2 \quad (11)$$

$$\mathbb{E}[X^3] = \mu^3 + 3\mu\sigma^2 \quad (12)$$

$$\mathbb{E}[X^4] = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4 \quad (13)$$

Weißes Rauschen:

$$R_{WW}(k) = \sigma_W^2 \cdot \delta(k) \quad (14)$$

Eigenschaften:

- Unkorreliert für Zeitpunkte $k \neq 0$, bei $k = 0$ ist die Korrelation gleich der Varianz
- Mittelwert frei: $\mathbb{E}[W(n)] = 0$
- Konstantes Leistungsdichtespektrum: $S_{WW}(\Omega) = \sigma_W^2$

2 Definitionen

Dichtefunktion:

$$f_X(x) = p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (15)$$

$f(x)$ und $p(x)$ sind beide gebräuchlich

Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt \quad (16)$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = x) = p_X(x) \quad (17)$$

Randdichte:

$$f_X(x) = \int_y p_{X,Y}(x, y) dy \quad (18)$$

Erwartungswert (Erstes Moment):

$$\mu_X = \mathbb{E}_{X \sim P}[X] = \mathbb{E}[X] = \int_x x \cdot p_X(x) dx \quad (19)$$

Gemeinsamer Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \int_x \int_y g(x, y) \cdot p_{X,Y}(x, y) dy dx \quad (20)$$

Mittelwert (diskret):

$$\bar{y}(m, n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k(m, n) \quad (21)$$

Zweites Moment (Leistung des Signals):

$$P_X = \mathbb{E}[X^2] = \int_x x^2 \cdot p_X(x) dx = R_{XX}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(\Omega) d\Omega \quad (22)$$

Charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen X:

$$\varphi_X(t) = \mathcal{F}\{f_X(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx = \mathbb{E}[e^{itX}] \quad (23)$$

Ableitung der Momente aus der charakteristischen Funktion:

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{dt^n} \varphi_X(t) \Big|_{t=0} \quad (24)$$

Varianz/ Dispersion:

$$\sigma_X^2 = D^2(X) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = P_X - \mu_X^2 \quad (25)$$

Transformationsformel für Dichtefunktion:

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x)}{|g'(x)|} \Big|_{x=g^{-1}(y)} = \frac{p_X(g^{-1}(y))}{\left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|}; \quad g(x) = 4x - 3 \Leftrightarrow g^{-1}(y) = \frac{y+3}{4} \quad (26)$$

3 Korrelation

Zusammenfassung der Korrelationseigenschaften:

- **Unkorreliert (Nicht korreliert):** Prozesse haben keine lineare Abhängigkeit.

$$C_{XY} = 0 \text{ oder } R_{XY}(0) = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] \quad (27)$$

- **Orthogonal:** Prozesse haben kein gemeinsames Leistungsspektrum.

$$R_{XY}(0) = 0 \quad (28)$$

- **Statistisch unabhängig:** Stärkste Form der Unabhängigkeit. Stochastische Prozesse beeinflussen sich gegenseitig in keiner Weise.

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \quad (29)$$

- **Wichtige Zusammenhänge:**

$$\text{Orthogonal} \Leftrightarrow \text{Unkorreliert} + \text{mittelwertfrei} \quad (30)$$

$$\text{Orthogonal (z.B. } Y = X^2 \text{ für mittelwertfreies, symmetrisches } X) \not\Leftrightarrow \text{Statistisch unabhängig} \quad (31)$$

$$\text{Statistisch unabhängig} \Rightarrow \text{Nicht korreliert} \quad (32)$$

$$\text{Aus statistischer Unabhängigkeit folgt keine Aussage über Orthogonalität} \quad (33)$$

Merksatz: Die Korrelation erfasst nur lineare Zusammenhänge zwischen stochastischen Prozessen. Für nicht-lineare Abhängigkeiten ist sie kein geeignetes Maß.

Korrelation:

$$C_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mu_X \mu_Y \quad (34)$$

Korrelationskoeffizient:

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (35)$$

Kreuzkorrelation:

$$R_{XY}(k) = \mathbb{E}[X(n)Y(n+k)] \quad (36)$$

$$R_{XY}(0) = \mathbb{E}[XY] \quad (37)$$

$$R_{XY}(k) = R_{YX}(-k) \quad (38)$$

Autokorrelationsfunktion:

$$R_{XX}(k) = \mathcal{F}^{-1}[S_{XX}(\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(\Omega) e^{jk\Omega} d\Omega \quad (39)$$

$$R_{XX}(0) = E[X^2(n)] = P_X(\Omega) \neq P_X \quad (40)$$

Leistungsdichtespektrum:

$$R_{XX}(k) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S_{XX}(\Omega) \quad (41)$$

$$S_{XX}(\Omega) = \mathcal{F}\{R_{XX}(k)\}; R_{XX}(k) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{XX}(\Omega)\} \quad (42)$$

$$R_{XX}(0) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{XX}(\Omega)\}|_{\tau=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(\Omega) d\Omega \quad (43)$$

Gibt an, wie die Leistung eines stochastischen Signals über verschiedene Frequenzen verteilt ist. Die Gesamtleistung durch Integration berechenbar.

$$\mathcal{F}\{\delta(k)\} = 1 \quad (44)$$

$$\mathcal{F}\{\delta(k+1)\} = e^{j\Omega} \quad (45)$$

$$\mathcal{F}\{\delta(k-1)\} = e^{-j\Omega} \quad (46)$$

Kreisfrequenz im kontinuierlichen Fall: $\Omega = 2\pi f$

$$e^{jk\Omega} = \cos(k\Omega) + j \cdot \sin(k\Omega) \quad (47)$$

Für symmetrisches Intervall

$$\int_{-a}^a e^{jk\Omega} d\Omega = \int_{-a}^a \cos(k\Omega) d\Omega \quad (48)$$

Signal Noise Ratio (SNR):

$$\text{SNR} = \frac{P_X}{P_N} = \frac{R_{XX}(0)}{R_{NN}(0)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(\Omega) d\Omega}{\int_{-\pi}^{\pi} S_{NN}(\Omega) d\Omega} \quad (49)$$

$$(50)$$

4 Wiener Kolmogorov Filter

Verwendung (SNT_04.Stoerreduktion, S. 38):

- reine Rauschbefreiung
- reine Entzerrung
- lineare Prädiktion

Bei gemeinsam normalverteilten Zufallsvariablen sind lineare Filter optimal.

Ursprüngliches Signal:

$$X(n) \quad (51)$$

Signal nach Übertragung:

$$Y(n) \quad (52)$$

Schätzung des Signals:

$$Z(n) \quad (53)$$

Fehler (Differenz):

$$d(n) = X(n) - Z(n) \quad (54)$$

Filtereinstellung:

$$H_{opt}(\Omega) = \frac{S_{XX}(\Omega)}{S_{XX}(\Omega) + S_{NN}(\Omega)} \quad (55)$$

Orthogonalitätsprinzip:

Bei einer optimalen Schätzung ist der Fehler orthogonal (senkrecht) zur Schätzung.

$$R_{DZ_{opt}}(0) = \mathbb{E}[d(n)Z_{opt}(n)] = 0 \quad (56)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[Z_{opt}(n)^2] = \mathbb{E}[X(n)Z_{opt}(n)] \quad (57)$$

Besteht das Eingangssignal aus gemeinsam normalverteilten Zufallsvariablen, sind Fehler und Ausgabe dann statistisch unabhängig.

Beispielrechnung:

$$\sigma_d^2 = \mathbb{E}[(X(n) - Z_{opt}(n))^2] = \mathbb{E}[X(n)^2 - 2X(n)Z_{opt}(n) + Z_{opt}(n)^2] \quad (58)$$

$$= \mathbb{E}[X(n)^2 - X(n)Z_{opt}(n)] \quad \text{—Orthogonalitätsprinzip} \quad (59)$$

$$= \sigma_X^2 - \sum_{k=1}^N h_{k,opt} R_{XX}(k) \quad \text{— wenn } \mu_X = 0 \quad (60)$$

$$= \sigma_X^2 - \mathbf{h}_{opt}^T \mathbf{r}_{XX} \quad (61)$$

$$= \sigma_X^2 - \mathbf{r}_{XX}^T \mathbf{R}_{XX}^{-1} \mathbf{r}_{XX} \quad (62)$$

Rauschbefeigungsfiler:

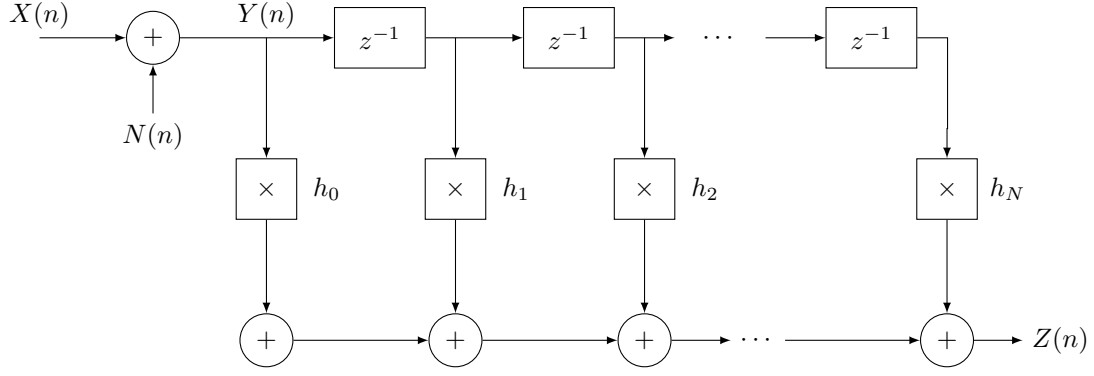


Figure 1: Rauschbefreiungsfilter

$$Z(n) = \sum_{k=0}^N h_k Y(n-k) \quad (63)$$

$$\min\{MSE\} \Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial MSE}{\partial h_i} = \frac{\partial \mathbb{E}[(X(n) - Z(n))^2]}{\partial h_i} \quad (64)$$

$$= \frac{\partial \mathbb{E}[u(v(n))]}{\partial h_i} = \mathbb{E}[u'(v(n)) \cdot v'(n)] = \mathbb{E}[2 \cdot (X(n) - Z(n)) \cdot \frac{\partial v(n)}{\partial h_i}] \quad (65)$$

$$= \mathbb{E}[2 \cdot (X(n) - Z(n)) \cdot -Y(n-i)] = -2 \cdot \mathbb{E}[(X(n) - Z(n)) \cdot Y(n-i)] \quad (66)$$

$$\Rightarrow 0 = \mathbb{E}[X(n) \cdot Y(n-i)] - \mathbb{E}[Z(n) \cdot Y(n-i)] \quad (67)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[X(n) \cdot Y(n-i)] = \mathbb{E}[Z(n) \cdot Y(n-i)] \quad (68)$$

$$\Leftrightarrow R_{XY}(i) = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^N h_k Y(n-k) \cdot Y(n-i) \right] = \sum_{k=0}^N h_k \cdot \mathbb{E}[Y(n-k) \cdot Y(n-i)] \quad (69)$$

$$= \sum_{k=0}^N h_k \cdot R_{YY}(i-k) \quad (70)$$

$$(\text{da, } R_{YY}(-i) = R_{YY}(i)) \quad (71)$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}_{YY} \cdot \mathbf{h}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{XY} \quad (72)$$

$$\begin{bmatrix} R_{YY}(0) & R_{YY}(1) \\ R_{YY}(1) & R_{YY}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{0,\text{opt}} \\ h_{1,\text{opt}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{XY}(0) \\ R_{XY}(1) \end{bmatrix} \quad (73)$$

Prädiktionsfilter:

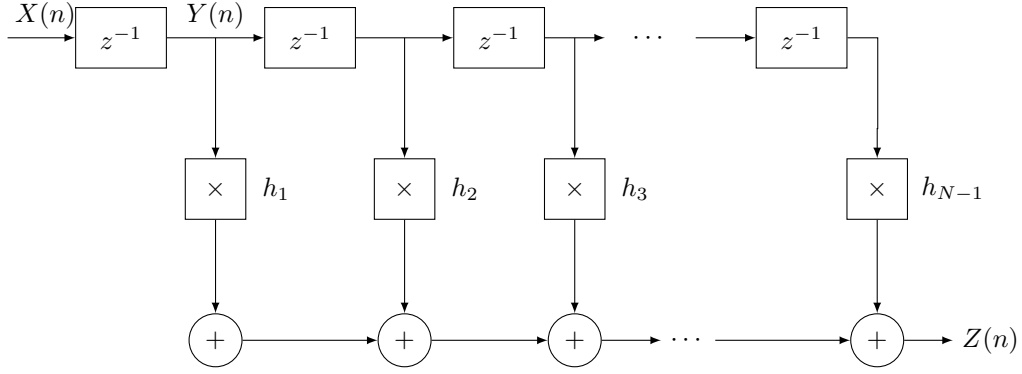


Figure 2: Prädiktionsfilter

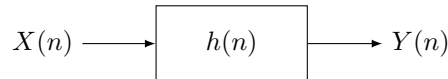
$$Z(n) = \sum_{k=1}^N h_k X(n-k) \quad (74)$$

$$\begin{bmatrix} R_{XX}(0) & R_{XX}(1) \\ R_{XX}(1) & R_{XX}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1,\text{opt}} \\ h_{2,\text{opt}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{XX}(1) \\ R_{XX}(2) \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{XX}} \cdot \mathbf{h}_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} R_{XX}(1) \\ R_{XX}(2) \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$\min\{\sigma_d^2\} = \sigma_x^2 - \sum_k h_k R_{XX}(k) \quad (77)$$

LTI System:



Frequenzbereich - Multiplikation:

$$Y(n) = X(n) * h(n) = h(n) * X(n); Y(j\Omega) = X(j\Omega) \cdot H(j\Omega) \quad (78)$$

Leistungsdichtespektrum:

$$S_{YY}(\Omega) = S_{XX}(\Omega) \cdot |H(j\Omega)|^2 \quad (79)$$

Zusammenhang durch Fourier-Transformation: Darstellung des Fourier-Transformation:

$$h(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\Omega) \quad (80)$$

$$H(j\Omega) = \mathcal{F}\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\Omega n} \quad (81)$$

$$h(n) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (82)$$

Faltungsrechenregeln:

$$X(n) * \delta(n) = X(n) \quad (83)$$

$$X(n) * \delta(n - m) = X(n - m) \quad (84)$$

$$X(n) * [a \cdot h(n)] = a \cdot [X(n) * h(n)] \quad (85)$$

$$X(j\Omega) \cdot [a \cdot H(j\Omega)] = a \cdot [X(j\Omega) \cdot H(j\Omega)] \quad (86)$$

5 Wahrscheinlichkeiten bei Überlagerung

AWGN-Kanal

Additives weißes Rauschen, mittelwertfrei

Nutzsignal (useful signal):

$$p_U(u) \quad (87)$$

Rauschsignal (noise signal):

$$p_N(n) \quad (88)$$

Empfangssignal (received signal):

$$p_Y(y) \quad (89)$$

Überlagerung wird zur Faltung:

Addition von Nutzsignal und Rauschen:

$$y = u + n \Rightarrow p_Y(y) = \int p_U(u) \cdot p_N(y - u) du = (p_U * p_N)(y) \quad (90)$$

Die Addition zweier Zufallsvariablen wird zur Faltung ihrer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen.

Fehlerwahrscheinlichkeit:

$$P_{\text{Fehler}} = \int p_E(e) de \quad (91)$$