$$P(A) = A\text{ 中所含点数 }/6$$

若骰子非均匀,则每面的出现概率 $p_1,\cdots,p_6$ 可不同.这时,先定出上面这6个数,然后对每个 A,把其中所含点相应的 p 值加起来作为 $P(A)$.例如,若 $A=\{2,3,5\}$,则 $P(A)=p_2+p_3+p_5$.

由这个例子我们也看出:柯氏公理只是介定了概率这个概念所必须满足的一些一般性质,它没有也不可能解决在特定场合下如何定出概率的问题.拿后一例子而言,如何以足够的精确度定出 $p_1,\cdots,p_6$,那是要作大量艰苦的工作的.柯氏公理的意义在于它为一种普遍而严格的数学化概率理论奠定了基础.例如,刚才讨论过的这个例子可用于任何一个只有6个基本结果的试验,而无须过问这试验是掷骰子或其他.这就是数学的抽象化.正如我们可说 $1+2=3$,而不必要去讨论一只牛加二只牛等于三只牛之类的东西.

特别，若 $n=r$，由(2.1)得

$$P_r^r = r(r-1)\cdots 1 = r! \tag{2.2}$$

$r!$ 读为"r 阶乘"，是前 r 个自然数之积. 人们常约定把 $0!$ 作为 1. 当 r 不是非负整数时，记号 $r!$ 没有意义.

2. n 个相异物件取 r 个($1\leqslant r\leqslant n$)的不同组合总数，为

$$C_r^n = P_r^n/r! = n!/(r!(n-r)!) \tag{2.3}$$

因为，每一个包含 r 物件的组合，可以产生 $r!$ 个不同的排列. 故排列数应为组合数的 $r!$ 倍，由此得出公式(2.3). C_r^n 常称为组合系数.

例如，从 a,b,c,d 这 4 个文字中取 2 个作组合. 有 $4!/(2!\ 2!)=6$ 种，即 ab,ac,ad,bc,bd,cd.

在有些书籍中把记号 C_r^n 写为 C_n^r. C_r^n 的一个更通用的记号是 $\binom{n}{r}$. 我们今后将用 $\binom{n}{r}$ 取代 C_r^n. 当 $r=0$ 时，按 $0!=1$ 之约定，由(2.3)算出 $\binom{n}{0}=1$，这可看作一个约定. 对组合系数另一常用的约定是：按公式

$$\binom{n}{r} = n(n-1)\cdots(n-r+1)/r!$$

只要 r 为非负整数，n 不论为任何实数，都有意义. 故 n 可不必限制为自然数. 例如，按上式，有

$$\binom{-1}{r} = (-1)(-2)\cdots(-r)/r! = (-1)^r$$

3. 与二项式展开的关系

组合系数 $\binom{n}{r}$ 又常称为二项式系数，因为它出现在下面熟知的二项式展开的公式中：

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i} \tag{2.4}$$

这个公式的证明很简单：因为，$(a+b)^n=(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+$

b). 为了产生 $a^i b^{n-i}$ 这一项,在这 n 个 $(a+b)$ 中,要从其中的 i 个取出 a,另 $n-i$ 个取出 b. 从 n 个中取出 i 个的不同取法为 $\binom{n}{i}$,这也就是 $a^i b^{n-i}$ 这一项的系数.

利用关系(2.4)可得出许多有用的组合公式. 例如,在(2.4)中令 $a=b=1$,得

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

令 $a=-1, b=1$,则得

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

另一个有用的公式是

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i} \tag{2.5}$$

它是由恒等式 $(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n$ 即

$$\sum_{j=0}^{m+n}\binom{m+n}{j}x^j=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j$$

比较两边的 x^k 项的系数得到的.

4. n 个相异物件分成 k 堆,各堆物件数分别为 $r_1,\cdots,r_k$ 的分法是

$$n!/(r_1!\cdots r_k!) \tag{2.6}$$

此处 $r_1,\cdots,r_k$ 都是非负整数,其和为 n,又这里要计较堆的次序. 就是说,若有 5 个物体 a,b,c,d,e 分成 3 堆,则 $(ac),(d),(be)$ 和 $(be),(ac),(d)$ 是算作两种不同分法.

证明很简单:先从 n 个中取出 r_1 个作为第 1 堆,取法有 $\binom{n}{r_1}$ 种. 在余下的 $n-r_1$ 个中取出 r_2 个作为第 2 堆,取法有 $\binom{n-r_1}{r_2}$ 种,以此类推,得到全部不同的分法为

$$\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-1}}{r_k}$$

利用公式(2.3)并注意 $n-r_1-\cdots-r_{k-1}=r_k$,即得(2.6)

(2.6)常称为多项式系数,因为它是$(x_1+\cdots+x_k)^n$ 的展开式中,$x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k}$ 这一项的系数.

1.2.2 古典概率计算举例

例 2.1 一批产品共 N 个,其中废品有 M 个.现从中随机(或说随意)取出 n 个,问"其中恰好 m 个废品"这个事件 E 的概率是多少?

按 1.2.1 所述,从 N 个产品中取出 n 个,不同的取法有 $\binom{N}{n}$ 种.所谓"随机"或"随意"取,是指这 $\binom{N}{n}$ 种取法有等可能性.这是古典概率定义可以使用的前提.所以,从实际的角度言,问题在于怎样保证抽取的方法能满足等可能性这个要求.以下各例中"随机"一词也都是作这种理解.

使事件 E 发生的取法,或者说"有利"于事件 E 的取法,计算如下:从 M 个废品中取 m 个,取法有 $\binom{M}{m}$ 种.从其余 $N-M$ 个合格品中取 $n-m$ 个,取法有 $\binom{N-M}{n-m}$ 种.故有利于事件 E 的取法,共有 $\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}$ 种.按公式(1.1),得事件 E 的概率为

$$P(E)=\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}\Big/\binom{N}{n} \tag{2.7}$$

这里要求 $m\leqslant M, n-m\leqslant N-M$,否则概率为 0(因 E 为不可能事件).

例 2.2 n 双相异的鞋共 $2n$ 只,随机地分成 n 堆,每堆 2 只.问"各堆都自成一双鞋"这个事件 E 的概率是多少?

把 $2n$ 只鞋分成 n 堆每堆 2 只的分法,按公式(2.6),有 $N=$

$(2n)!\ /2^n$ 种.有利于事件 E 的分法可计算如下:把每双鞋各自绑在一起看成一个物体,然后把这相异的 n 个物体分成 n 堆,每堆 1 件.按公式(2.6),分法有 $M=n!$ 种.于是

$$P(E)=M/N=n!2^n/(2n)!=1/(2n-1)!!$$

$a!!$ 这个记号对奇自然数定义:$a!!=1\cdot3\cdot5\cdots a$,即所有不超过 a 的奇数之积.

另一种算法如下:把这 $2n$ 只鞋自左至右排成一列(排法有 $(2n)!$ 种),然后,把处在 1,2 位置的作为一堆,3,4 位置的作为一堆,等等.为计算使事件 E 发生的排列法,注意第 1 位置可以是这 $2n$ 只鞋中的任一只,其取法有 $2n$ 种.第 1 位置取定后,第 2 位置只有一种取法,即必须取与第 1 位置的鞋配成一双的那一只.依此类推,知奇数位置依次有 $2n,2n-2,2n-4,\cdots,2$ 种取法,而偶数位置则都只有 1 种取法.所以,有利于事件 E 的排列总数为 $2n(2n-2)\cdots2=2^nn!$,而

$$P(E)=2^nn!/(2n)!$$

与前面用另外的方法算出的相同.

例 2.3 n 个男孩,m 个女孩($m\leqslant n+1$)随机地排成一列.问"任意两个女孩都不相邻"这个事件 E 的概率是什么?

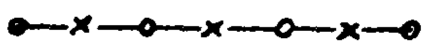

图 1.2

把 $n+m$ 个孩子随意排列,总共有 $N=(n+m)!$ 种不同的排法.有利于事件 E 发生的排法可计算如下:先把 n 个男孩子随意排成一列,总共有 $n!$ 种方法.排定以后,每两个相邻男孩之间有一位置,共有 $n-1$ 个;加上头尾两个位置,共 $n+1$ 个位置(图 1.2 画出了 $n=3$ 的情况,"×"表示男孩,4 个"○"表示刚才所指出的 $n+1=4$ 个位置).为了使两个女孩都不相邻,必须从这 $n+1$ 个位置中取出 m 个放女孩,取法有 $\binom{n+1}{m}$ 种.取定位置后,m 个女孩子尚可在这 m 个取定位置上随意排列,方法有 $m!$ 种.由此推出,

有利于事件 E 发生的排列数为 $M = n!\binom{n+1}{m}m!$，因此，

$$P(E) = n!\binom{n+1}{m}m!/(n+m)! = \binom{n+1}{m}\Big/\binom{n+m}{m}$$

如果这 $n+m$ 个孩子不是排成一直线而是排在一圆圈上，则同一事件 E 的概率是多少？初一看以为无所区别，其实不然. 看图 1.2，若以"×"和"○"分别表男、女孩，则在一直线上首尾两女孩并不相邻. 但若把这直线弯成一个圆圈，则首尾两女孩成为相邻了，因此算法略有不同. 我们留给读者去证明：答案为 $\binom{n}{m}\Big/\binom{n+m-1}{m}$.

例 2.4 一个人在口袋里放 2 盒火柴，每盒 n 支. 每次抽烟时从口袋中随机拿出一盒(即每次每盒有同等机会被拿出)并用掉一支. 到某次他迟早会发现：取出的那一盒已空了. 问："这时另一盒中恰好有 m 支火柴"的概率是多少？

解法 1 我们来考察最初 $2n+1-m$ 次抽用的情况，每次抽用时有 2 种方法(抽出甲盒或乙盒). 故总的不同抽法，有 2^{2n+1-m} 种. 有利于所述事件的抽法可计算如下：先看"最后一次(即第 $2n+1-m$ 次)是抽出甲盒"的情况. 为使所述事件发生，在前 $2n-m$ 次中，必须有 n 次抽用甲盒，实现这一点不同的抽法为 $\binom{2n-m}{n}$. 类似地，"最后一次是抽出乙盒"的抽法也有这么多，

故有利于所述事件的全部抽法为 $2\binom{2n-m}{n}$，而事件的概率为

$$2\binom{2n-m}{n}\Big/2^{2n+1-m} = \binom{2n-m}{n}\Big/2^{2n-m} \qquad (2.8)$$

解法 2 因每盒中只有 n 支，最晚到第 $2n+1$ 次抽取时，或在此之前，必发现抽出的盒子已空. 故我们不管结果如何，总把试验做到抽完第 $2n+1$ 次为止，不同的抽法有 2^{2n+1} 种.

现在计算有利于所述事件的抽法. 仍如前，先考虑"先发现甲

盒为空”的抽法有多少.这必然是对某个 $r, r=0,1,\cdots,n-m$,以下情况同时出现:

1° 第 $n+r$ 次抽取时抽出甲盒,而这时甲盒已是第 n 次被抽出;

2° 前 $n+r-1$ 次抽取时,乙盒被抽出 r 次(这不同的抽法有 $\binom{n+r-1}{r}$ 种);

3° 紧接着的 $n-m-r$ 次全是抽出乙盒;

4° 第 $2n-m+1$ 次抽取时抽出甲盒(这时发现它已空,且乙盒恰有 m 支);

5° 最后 m 次抽取结果可以任意(这不同的抽法有 2^m 种).

综合上述,对固定的 r,抽法有 $\binom{n-1+r}{r}2^m$ 种.因此,“有利于事件发生,且先发现甲盒为空”的抽法,有

$$a=\sum_{r=0}^{n-m}\binom{n-1+r}{r}2^m$$

种.类似地,“有利于事件发生,且先发现乙盒为空”的抽法,也有 a 种,故总数为 $2a$,概率为

$$2a/2^{2n+1}=\sum_{r=0}^{n-m}\binom{n-1+r}{r}\Big/2^{2n-m} \tag{2.9}$$

两种方法算出的结果,只能有一个.故比较(2.8)和(2.9),我们得到一个组合恒等式

$$\sum_{r=0}^{n-m}\binom{n-1+r}{r}=\binom{2n-m}{n}$$

当然,你也可以怀疑,这两个解法中有一个不对,因而上式也可能错了.但此式可另行证明.为方便计,将式中的 m 改为 $n-m$,而将该式写为

$$\sum_{r=0}^{m}\binom{n-1+r}{r}=\binom{n+m}{n}=\binom{n+m}{m}$$

而因式易用数学归纳法证明:当 $m=0,1$ 时,直接计算可知其成

立，然后用易证之等式

$$\binom{n+m}{m}+\binom{n+m}{m+1}=\binom{n+m+1}{m+1}$$

去完成归纳证明.

这个例子给人的启发是：适当的考虑得出的简洁解法.第二种解法，把试验做到必然能见分晓的地步，较为自然易懂，但结果则繁复：要不是有(2.8)对照，我们可能停留在(2.9)，而得出不理想的形式.前一解法抓住了这一点：要使所设事件发生，抽取必然是 $2n+1-m$ 次.这一简单的观察导致了远为简洁的解(2.8).

例 2.5 有 21 本不同的书，随机地分给 17 个人.问“有 6 人得 0 本，5 人得 1 本，2 人得 2 本，4 人得 3 本”这个事件 E 的概率是多少？

因为每本书都有 17 种可能的分法，故总的不同分法，有 17^{21} 种.为计算有利于事件 E 的分法，得分两步分析：①按得书本数不同把 17 人分成 4 堆，各堆分别含 6(0 本)、5(1 本)、2(2 本)、4(3 本)人.这不同的分法按公式(2.6)，有 $17!/(6!\,5!\,2!\,4!)$ 种.②把 21 本书按 17 人得书数情况分为 17 堆，各堆数目依次为

$$0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,2,2,3,3,3,3$$

不同分法有

$$21!/(0!^6 1!^5 2!^2 3!^4)=21!/(2!^2 3!^4)$$

二者相乘，得出有利于事件 E 的分法总数，进而得出 E 的概率为

$$17!\,21!/(17^{21}2!^3 3!^4 4!\,5!\,6!)$$

以上举的例子都有一定的代表性.古典概率计算实质上就是排列组合计算.但在分析问题时，怎样去选定一个适当的实现随机化的机制(如例 2.4，例 2.5)，怎样去正确计算公式(1.1)中的 M，N，以保证既不重算也不漏算，则需要细心.尤其是：你所设想的机制是否真的实现了等可能性？有时表面上看想当然对，其实是似是而非的.如例 2.3 中，圆圈的情况和直线有所不同——在直线上正确地体现了等可能的做法，在圆圈上却没有.再看下例.

例 2.6 n 本书随机给分甲、乙二人，问“甲、乙各至少得到 1

本”这事件 E 的概率是多少？

n 本书随机地分给 2 人，甲得的本数无非是 $0,1,\cdots,n$，一共有 $n+1$ 种可能性，其中 0 和 n 两种是“全归一人”，剩下 $n-1$ 种有利于 E，故 $P(E)=(n-1)/(n+1)$.

这个解法是否对？不对.问题在于：$0,1,\cdots,n$ 这 $n+1$ 种结果不具有等可能性.凭常识可以推想：若 n 较大，则甲得 $n/2$ 本左右的机会，应比他全得或全不得的机会大一些.正确的解法如下：n 本书分给 2 人，不同的分法有 2^n 种.其中仅有两种是使事件 E 不发生的，故 $P(E)$ 应为 $(2^n-2)/2^n=1-1/2^{n-1}$.