1) $T(n) = 3T(n-1) - 1 \quad , \quad T(1) = 1$

1. $T(n) = 3\left(3T(n-2) - 1\right) - 1$

$= 3^2 T(n-2) - 3 - 1$

2. $T(n) = 3^2\left(3T(n-3) - 1\right) - 3 - 1$

$= 3^3 T(n-3) - 3^2 - 3^1 - 1$

3. $T(n) = 3^3\left(3T(n-4) - 1\right) - 3^2 - 3^1 - 1$

$= 3^4 T(n-4) - 3^3 - 3^2 - 3^1 - 1$

$\vdots$

$$T(n) = 3^i T(n-i) - \sum_{j=0}^{i-1} 3^j$$

Cuando $i = n-1$

$$T(n) = 3^{n-1} T(n-(n-1)) - \sum_{j=0}^{n-2} 3^j$$

$$\frac{1 \cdot 3^{n-1} - 1}{3-1}$$

$$= 3^{n-1} - \sum_{j=0}^{n-2} 3^j$$

$$= 3^{n-1} - \left(\frac{3^{n-1}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} a \cdot r^j = \begin{cases} \dfrac{ar^{n+1} - a}{r-1}, & r \neq 1 \\ (n+1)a, & r = 1 \end{cases}}$$

$$= 3^{n-1} - \frac{3^{n-1}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3^{n-1}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3^{n-1} + 1\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{2}\left(3^{n-1} + 1\right)}{3^n}$$

$$\frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n-1} + 1}{3^n}$$

$$\frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n-1}}{3^n} + \frac{1}{3^n}$$

$$\frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{1}{6} \neq \infty \wedge \frac{1}{6} \neq 0\right) \Rightarrow 3^{n-1} = \Theta(3^n)$$

---

2) $T(n) = 28T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3$

note que $f(n) = n^3$

$a = 28$ $\quad\quad$ $p = \log_3 28 \approx 3.033$

$b = 3$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{3-p} = \lim_{n\to\infty} n^{-(p-3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p-3}} = 0$$

$(0 \neq \infty) \Rightarrow f(n) = O(n^p)$ y podríamos restar un $\varepsilon > 0$ y aún se da que $f(n) = O(n^{p-\varepsilon})$

Siendo así, sabemos que estamos en el caso 1 del teorema maestro. :O

Entonces

$$T(n) = \Theta(n^p), \quad p = \log_3 28$$

---

3)

3. **[3 pts.]** Simule la ejecución del algoritmo de ordenamiento por mezcla sobre el arreglo $A = \langle$A, V, I, N, R, O, P, U, L, G, J$\rangle$. Muestre el estado de los subarreglos al finalizar las mezclas.