220406 三角函数 (2) 题目选解

高一 (4) 班 邵亦成 48 号

Section 1 填空题

1. $y=\tan\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域为$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(-5+6k,1+6k)$.

解析. 三角函数的定义域.

2. 命题 $\alpha: b=0$ 是命题 β : 函数 $y=a\sin x+b\cos x$ 是奇函数的**充分必要**条件.

解析. 三角函数的广义奇偶性; 三角变换.

3. $y=\tan x-\cot x$ 的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$.

解析. 三角函数的周期性; 三角变换.

4. $\max\limits_{x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]} 2\sin\frac{3}{4}x=\sqrt{2}$.

解析. 三角函数的极值性.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$, 则 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

解析. 解三角形, 三角变换.

6. 下列命题中正确的序号是: (1) 函数 $y=\sin x$ 在第一象限递增; (2) 函数 $y=|\tan 2x|$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{4}$; (3) 函数 $y=\sin|x|$ 的值域为 $[0,1]$; (4) 函数 $y=\cos(\pi-\sin x)$ 是偶函数. (4).

解析. 三角函数的性质.

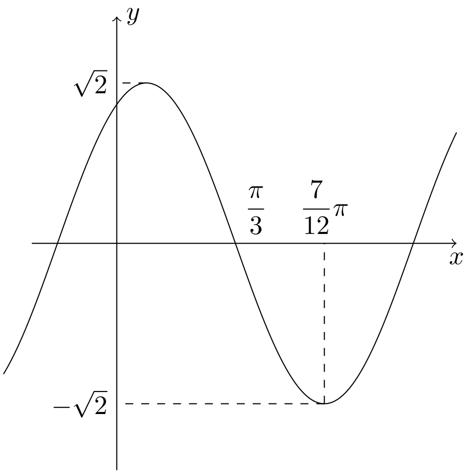
7. 函数 $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right), x\in[-2\pi,2\pi]$ 的递增区间是$\left[-\frac{3}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi\right]$.

解析. 三角函数的单调性.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle A=120^\circ, AB=5, BC=7$, 则 $S_{\triangle ABC}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

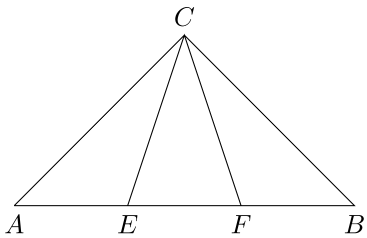
解析. 解三角形.

9. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A,\omega,\varphi$ 是常数 $, A>0,\omega>0)$ 的部分图像如图所示, 则 $f(0)=\frac{\sqrt{6}}{2}$.



解析. 形如 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B$ 的函数图像的性质.

10. E, F 是等腰 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AB 上的三等分点, 则 $\tan\angle ECF = \frac{3}{4}$.



解析. 解三角形.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc$, $\sin C = 2\sqrt{3}\sin B$, 则 $A = \frac{\pi}{6}$.
解析. 解三角形, 三角变换.

$$\sin C = 2\sqrt{3}\sin B \Rightarrow c = 2\sqrt{3}b,$$

有

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{c^2 - \sqrt{3}bc}{2bc} \\ &= \frac{c - \sqrt{3}b}{2b} \\ &= \frac{2\sqrt{3}b - \sqrt{3}b}{2b} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2},\end{aligned}$$

故有 $A = \frac{\pi}{6}$.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $a^2 - c^2 = 2b$, $\sin A\cos C = 3\cos A\sin C$, 则 $b = 4$.
解析. 解三角形, 三角变换.

$$\begin{aligned}\sin A\cos C = 3\cos A\sin C &\Rightarrow a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 3c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ &\Rightarrow 2(a^2-c^2)=b^2\\ &\Rightarrow 4b=b^2\\ &\Rightarrow b=4.\end{aligned}$$

Section 2 解答题

13. 研究与函数 $f(x)=\tan x$ 相关的问题并填写结论.

(1) 求 $f\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ 的定义域. $\left\{x|x\neq\frac{\pi}{3}-\frac{k}{2}\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(2) 求 $f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 之间的值域. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

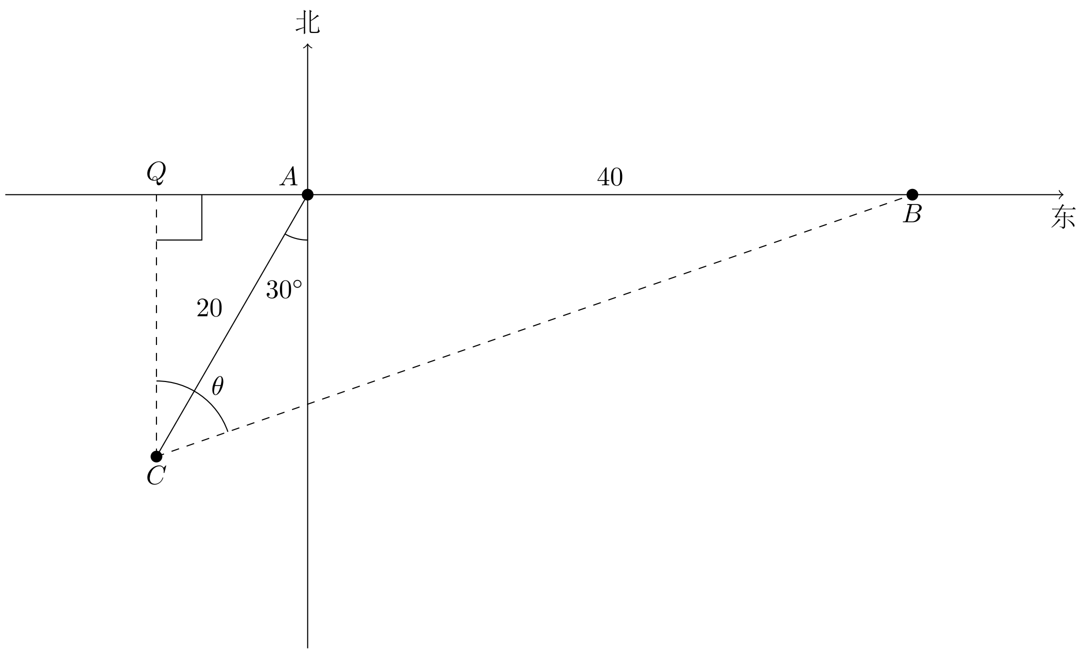
(3) 求函数 $f\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ 与 $|f(x)|$ 的周期. $T\in\left\{T|T=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z},k\neq 0\right\}$, $T\in\{T|T=k\pi,k\in\mathbb{Z},k\neq 0\}$.

(4) 写出函数 $f\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ 的单调区间并指明增减. **单调减:** $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{5}{12}\pi,\frac{k\pi}{2}+\frac{11}{12}\pi\right)$.

(5) 写出 $f(2x)$ 图像的所有对称中心. $\left\{P|P\left(\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{4},0\right),k\in\mathbb{Z}\right\}$.

解析. 三角函数的性质.

14. 如图, 位于 A 处的信息中心获悉: 在其正东方向相聚 40 海里的 B 处有一艘渔船遇险, 在原地等待营救. 信息中心立即把消息告知在其南偏西 $30°$, 相距 20 海里的 C 处的乙船, 现乙船向北偏东 θ 的地方沿直线 CB 前往 B 处救援, 求 $\cos\theta$.



解析. 初中数学.

联结 CB, 作 $CQ \perp BA$ 于 Q. 显然有 $QA = 10(\text{nm}), QC = 10\sqrt{3}(\text{nm}), \angle QCB = \theta$. 有 $\cos\theta = \dfrac{CQ}{CB}$, 而 $CQ = 10\sqrt{3}, CB = \sqrt{(40+10)^2 + (10\sqrt{3})^2}$, 则有 $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$

15. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 为三内角, $f(B) = 4\cos B \sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{B}{2}\right) + \sqrt{3}\cos 2B - 2\cos B$,

(1) 若 $f(B) = 2$, 求 B.

解析. 三角方程, 三角变换.

$$\begin{aligned} f(B) &= 4\cos B \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}\right) + \sqrt{3}\cos 2B - 2\cos B \\ &= 2\cos B \sin B + \sqrt{3}\cos 2B \\ &= 2\sin\left(2B + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

$$f(B) = 2 \Rightarrow 2\sin\left(2B + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \Rightarrow B = \frac{\pi}{12}.$$

(2) 若 $f(B) - m > 2$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

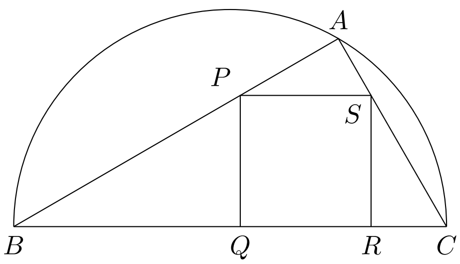
解析. 三角不等式, 三角变换.

$$f(B) - m > 2 \text{ iff } 2\sin\left(2B + \frac{\pi}{3}\right) > 2 + m,$$

$$\begin{aligned} 0 < B < \pi &\Rightarrow -2 \le 2\sin\left(2B + \frac{\pi}{3}\right) \le 2 \\ &\Rightarrow 2 + m < -2 \\ &\Rightarrow m < -4. \end{aligned}$$

Section 3　附加题

16. 如图, 某园林单位准备绿化一块直径为 BC 的半圆形空地, $\triangle ABC$ 外的地方种草, $\triangle ABC$ 的内接正方形 $PQRS$ 为一水池, 其余的地方种花. 若 $BC = a, \angle ABC = \theta$. 设 $S_{\triangle ABC} = S_1, S_{PQRS} = S_2$,



(1) 用 a, θ 表示 S_1 和 S_2.

解析. 初中数学.

$S_1 = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}a\sin\theta a\cos\theta = \frac{1}{2}a^2\sin\theta\cos\theta . PS = \frac{a\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta\cos\theta}$,

$S_2 = PS^2 = \frac{a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sin^2\theta\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta}$.

(2) 当 a 固定, θ 变化时, 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 取最小值的 θ.

解析. 三角函数的极值; 三角变换, 基本不等式.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+\sin\theta\cos\theta)^2}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin 2\theta} + \frac{1}{4}\sin 2\theta + 1.$$

$t \xlongequal{\text{def}} \sin 2\theta$, 又 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 有 $t \in (0, 1]$,

$$\min \frac{S_1}{S_2} = \min_{t\in(0,1]} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4}t + 1\right) = \frac{9}{4}, \text{ iff } \sin 2\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$