220421 阶段测试 题目选解

Eason S.

Section 1 填空题

1. 若扇形的圆心角为 30°, 半径为 1, 则扇形的面积为$\frac{\pi}{12}$.
解析. 扇形的面积公式.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $c=10\sqrt{2}$, $C=60^\circ$, $a=\frac{20\sqrt{3}}{3}$, 则 $A=45^\circ$.
解析. 解三角形 (正弦定理).

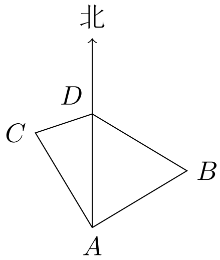
3. 已知 $\tan\theta=\sqrt{2}$, 则 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)=-\frac{1}{3}$.
解析. 三角变换 (诱导公式, 正切半角公式).

4. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角为 45°, 且 $|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=3\sqrt{2}$, 则 $\vec{a}\cdot\left(4\vec{a}-\vec{b}\right)=1$.
解析. 向量的基本运算.

5. 已知 $\tan\theta=\frac{1}{2}$, 则 $\sin 2\theta-2\cos^2\theta=-\frac{4}{5}$.
解析. 三角变换 (正切半角公式).

6. 已知函数 $f(x)=\sin(3x+\varphi)\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称, 则 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$.
解析. 三角函数 (图像).

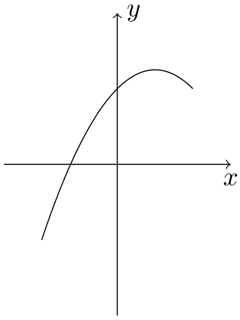
7. 如图，海上某货轮在 A 处看灯塔 B 在货轮的北偏东 75°, 距离为 $12\sqrt{6}$ 海里; 在 A 处看灯塔 C 在货轮的北偏西 30°，距离为 $8\sqrt{3}$ 海里，货轮向正北由 A 处行驶到 D 处时，若灯塔 B 在方位角 120° 的方向上, 则灯塔 C 与 D 处之间的距离为$8\sqrt{3}$海里.



解析. 解三角形应用题.

8. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(-\pi.-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\sin\alpha=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$, $\cos\beta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $\alpha+2\beta=-\dfrac{5}{4}\pi$.
解析. 基本三角方程.

9. 关于 x 的方程 $\cos^2x+\sin x-a=0$ 有实数解, 则实数 a 的取值范围是$\left[-1,\dfrac{5}{4}\right]$.
解析. 三角方程, 二次函数.
$h(x)\overset{\text{def}}{=\!=}\cos^2x+\sin x, f(x)\overset{\text{def}}{=\!=}-x^2+x+1, g(x)\overset{\text{def}}{=\!=}\sin x$, 有 $h(x)=f(g(x))$, $a\in\{h(x)|x\in\mathbb{R}\}=\{f(x)|x\in[-1,1]\}$ 绘制 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的图像.



有 $a\in\{f(x)|x\in[-1,1]\}=\left[f(-1),f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]=\left[-1,\dfrac{5}{4}\right]$.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\left(\tan^2A-3\right)\sin 2C$ 的最小值为$-6+4\sqrt{2}$.
解析. 基本三角方程, 三角变换, 基本不等式.
$\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow B=\dfrac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned}\left(\tan^2A-3\right)\sin 2C&=\left(\tan^2A-3\right)\sin\left[2\left(\pi-A-B\right)\right]\\&=\frac{\sin^2A-3\cos^2A}{\cos^2A}\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{2}-2A\right)\\&=\frac{\sin^2A-3\cos^2A}{\cos^2A}\left(-\cos 2A\right)\\&=\frac{\frac{1-\cos 2A}{2}-3\cdot\frac{1+\cos 2A}{2}}{\frac{1+\cos 2A}{2}}\left(-\cos 2A\right)\\&=\frac{\frac{1-\cos 2A-3-3\cos 2A}{2}}{\frac{1+\cos 2A}{2}}\left(-\cos 2A\right)\\&=\frac{\frac{-2-4\cos 2A}{2}}{\frac{1+\cos 2A}{2}}\left(-\cos 2A\right)\\&=\frac{2\left(1+2\cos 2A\right)}{1+\cos 2A}\cos 2A.\end{aligned}$$

令 $\cos 2A+1=t\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1,2\right)$, 有

$$\begin{aligned}\frac{2\left[1+2(t-1)\right](t-1)}{t} &= \frac{2(t-1)(2t-1)}{t}\\ &= \frac{2(2t^2-3t+1)}{t}\\ &= 4t-6+\frac{2}{t}\\ &\geq 2\sqrt{4t\cdot\frac{2}{t}}-6\\ &= -6+4\sqrt{2}\left(\text{eq. iff } t=\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Section 2　选择题

11. 已知非零向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, 则 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ 是 $\vec{a}=\vec{b}$ 的**B**.

A. 充分不必要条件;

B. 必要不充分条件;

C. 充分必要条件;

D. 既不充分也不必要条件.

解析. 向量的基本运算.

12. 对任意向量 $\vec{a},\vec{b}$, 下列关系式中不恒成立的是**D**.

A. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2$;

B. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2$;

C. $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\leq|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|$;

D. $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\leq\left||\vec{a}|-\left|\vec{b}\right|\right|$.

解析. 向量的基本运算.

13. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$, 则**B**.

A. $f(x)$ 是偶函数, 最大值为 1;

B. $f(x)$ 是偶函数, 最大值为 2;

C. $f(x)$ 是奇函数, 最大值为 1;

D. $f(x)$ 是奇函数, 最大值为 2.

解析. 三角函数.

14. 对于函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 下列命题

1. 函数图像关于直线 $x=-\frac{\pi}{12}$ 对称;

2. 函数图像关于点 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$ 对称;

3. 函数图像可看作是把 $y=\sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位而得到;

4. 函数图像可看作是把 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变而得到.

其中正确的个数是: **C (2, 4)**.

A. 0;

B. 1;

C. 2;

D. 3.

解析. 三角函数.

Section 3 解答题

15. 已知 $|\vec{a}| = 6, \left|\vec{b}\right| = 4, \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) = -72.$

(1) 求 $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$; $120°$.

解析. 向量的基本运算, 三角方程.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= |\vec{a}|^2 - 6\left|\vec{b}\right|^2 + |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\theta \\ &= 36 - 96 + 24 \cdot \cos\theta \\ &= -72. \end{aligned}$$

于是有 $\cos\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \cos\theta = -\dfrac{1}{2}$, 又 $\theta \in (0°, 180°)$, 有$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = 120°$.

(2) 求 $\left|\vec{a} + 3\vec{b}\right|$. $6\sqrt{3}$.

解析. 向量的基本运算. 过程略.

16. 请完成以下题目:

(1) 已知角 α 的终边经过点 $P(x, 6)$, 且 $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$, 求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值. $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$,

解析. 三角函数. 过程略.

(2) 已知 $\cos\alpha = \dfrac{1}{7}, \cos(\alpha - \beta) = \dfrac{13}{14}, 0 < \beta < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, 求 β. $\dfrac{\pi}{3}$.

解析. 反三角函数, 反三角恒等式. 过程略.

17. 已知函数 $f(x) = 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 5\cos^2 x$,

(1) 若 $f(\alpha) = 5$, 求 $\tan\alpha$ 的值; $\tan\alpha = 0$ **iff** $\sin\alpha = 0, \tan\alpha = \sqrt{3}$ **iff** $\sin\alpha \neq 0$.

解析. 三角函数, 三角方程.

有

$$f(x) = 3 + 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x,$$

于是有

$$2\cos^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha=2,$$

即

$$\cos^2\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha=1,$$

有

$$\sqrt{3}\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin^2\alpha.$$

若 $\sin\alpha=0$, 则 $\tan\alpha=0$; 若 $\sin\alpha\neq 0$, 则 $\tan\alpha=\sqrt{3}$.

(2) 设 $\triangle ABC$ 三内角 A,B,C 所对边分别为 a,b,c, 且 $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}=\dfrac{c}{2a-c}$, 求 $f(x)$ 在 $(0,B]$ 上的值域. $[5,6]$.

解析. 解三角形, 三角函数.

显然有

$$\frac{2ac\cos B}{2ab\cos C}=\frac{c}{2a-c},$$

有

$$\frac{\cos B}{b\cos C}=\frac{1}{2a-c},$$

得

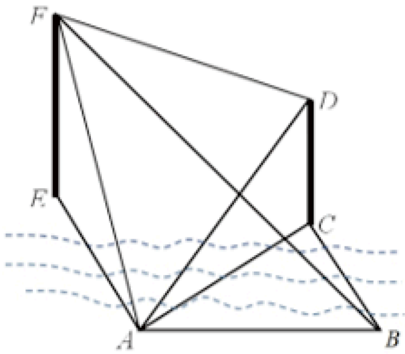
$$\frac{\cos B}{\sin B\cos C}=\frac{1}{2\sin A-\sin C},$$

有 $\cos B=\dfrac{1}{2}, B=\dfrac{\pi}{3}$. 又

$$\begin{aligned} f(x)&=3\sin^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+5\cos^2x\\ &=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+4\\ &=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+4. \end{aligned}$$

由 $0<x\leq\dfrac{\pi}{3}$, 有 $\dfrac{1}{2}\leq\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\leq 1$, 则有值域为$[5,6]$.

18. 如图所示, 在河对岸有两座垂直于地面的高塔 CD 和 EF, 小明在只有量角器 (可以测量从测量人出发的两条射线的夹角), 直尺 (可测量步行可抵达的两点之间的直线距离) 且不渡过河的条件下, 为了计算塔 CD 的高度，他在点 A 测得点 D 的仰角为 $30°$, $\angle CAB=75°$, 又选择了相距 100 米的 B 点, 测得 $\angle ABC=60°$.



(1) 请你根据小明的测量数据求出塔 CD 高度; $50\sqrt{2}$ 米.

解析. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 180° - \angle CAB - \angle CBA = 180° - 75° - 60° = 45°$. 由正弦定理, 有

$$\frac{AC}{\sin\angle CBA} = \frac{AB}{\sin\angle ACB},$$

所以有 $AC = \dfrac{100 \times \sin 60°}{\sin 45°} = 50\sqrt{6}$ 米.

又有题意有, $DC \perp AC, \angle DAC = 30°$, 所以有 $CD = AC \cdot \tan\angle DAC = 50\sqrt{6} \times 30° = 50\sqrt{2}$米.

(2) 在完成(1)的任务后, 小明想要计算两塔顶之间的距离 DF. 在测得 $\angle BAE = 90°$ 之后, 小明并且准备再测量两个角的大小, 并为此准备了如下三个方案:

方案 1. 测量 $\angle ABF$ 和 $\angle DAF$;

方案 2. 测量 $\angle ABE$ 和 $\angle EAF$;

方案 3. 测量 $\angle ABE$ 和 $\angle ECF$;

方案 4. 测量 $\angle ABF$ 和 $\angle AFB$.

请问: 小明的备选方案中有哪些是可行的? 写出所有可行方案的序号. **(1), (2).**

解析. 解三角形.

方案 3, 4 不可行. 角的顶点 C, F 位于河对岸, 题干描述中提到了" 不渡过河的条件下".

方案 1 可行. 已知 $\angle ABF, \angle DAF$, 则 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 可解, $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 可解.

方案 2 可行. 已知 $\angle ABE, \angle EAF$, 则 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 可解, 则 $\triangle EAC$ 可解, $\triangle AEF$ 可解, 在 EF 上截取 $EG = CD$, 有 $\triangle DGF$ 可解.

(3) 选择(2)中的一种方案, 并结合以下数据, 计算出两塔顶 DF 之间的距离, 精确到米.

$\angle ABF = 58.0°, \angle ABE = 50.2°, \angle DAF = 16.7°, \angle EAF = 41.5°, \angle ECF = 53.8°, \angle AFB = 32.0°$.

解析. 解三角形.

由(1)有, $AD = \dfrac{CD}{\sin 30°} = 100\sqrt{2}$ 米.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中, $AF = AB \cdot \tan\angle ABF = 100 \cdot \tan 58.0° = 160.03$ 米,

在 $\triangle ADF$ 中, 由余弦定理有

$$
\begin{aligned}
DF &= \sqrt{AD^2 + AF^2 - 2AD \cdot AF \cdot \cos\angle DAF} \\
&= \sqrt{\left(100\sqrt{2}\right)^2 + 160.03^2 - 2 \times 100\sqrt{2} \times 16 \times \cos 16.7^\circ} \\
&\approx 47,
\end{aligned}
$$

故两塔顶 DF 之间的距离为 47 米.

Section 4 特别致谢

stOOrz_zyz34. 提供答案参考.