

220406 三角函数 (2) 题目选解

高一 (4) 班 邵亦成 48 号

Section 1 填空题

1. $y = \tan\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域为 $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-5 + 6k, 1 + 6k)$.

解析. 三角函数的定义域.

2. 命题 $\alpha: b = 0$ 是命题 β : 函数 $y = a \sin x + b \cos x$ 是奇函数的充分必要条件.

解析. 三角函数的广义奇偶性; 三角变换.

3. $y = \tan x - \cot x$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

解析. 三角函数的周期性; 三角变换.

4. $\max_{x \in [0, \frac{\pi}{3}]} 2 \sin \frac{3}{4}x = \sqrt{2}$.

解析. 三角函数的极值性.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$, 则 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

解析. 解三角形, 三角变换.

6. 下列命题中正确的序号是: (1) 函数 $y = \sin x$ 在第一象限递增; (2) 函数 $y = |\tan 2x|$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{4}$; (3) 函数 $y = \sin |x|$ 的值域为 $[0, 1]$; (4) 函数 $y = \cos(\pi - \sin x)$ 是偶函数. (4).

解析. 三角函数的性质.

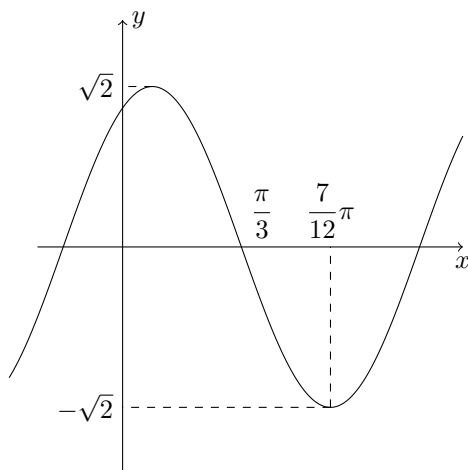
7. 函数 $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$ 的递增区间是 $\left[-\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$.

解析. 三角函数的单调性.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle A = 120^\circ$, $AB = 5$, $BC = 7$, 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$.

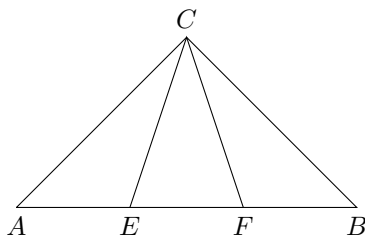
解析. 解三角形.

9. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 是常数, $A > 0, \omega > 0$) 的部分图像如图所示, 则 $f(0) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.



解析. 形如 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ 的函数图像的性质.

10. E, F 是等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的三等分点, 则 $\tan \angle ECF = \frac{3}{4}$.



解析. 解三角形.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc$, $\sin C = 2\sqrt{3}\sin B$, 则 $A = \frac{\pi}{6}$.

解析. 解三角形, 三角变换.

$$\sin C = 2\sqrt{3}\sin B \Rightarrow c = 2\sqrt{3}b,$$

有

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{c^2 - \sqrt{3}bc}{2bc} \\ &= \frac{c - \sqrt{3}b}{2b} \\ &= \frac{2\sqrt{3}b - \sqrt{3}b}{2b} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

故有 $A = \frac{\pi}{6}$.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $a^2 - c^2 = 2b$, $\sin A \cos C = 3 \cos A \sin C$, 则 $b = 4$.

解析. 解三角形, 三角变换.

$$\begin{aligned}
 \sin A \cos C &= 3 \cos A \sin C \Rightarrow a \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 3c \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\
 &\Rightarrow 2(a^2 - c^2) = b^2 \\
 &\Rightarrow 4b = b^2 \\
 &\Rightarrow b = 4.
 \end{aligned}$$

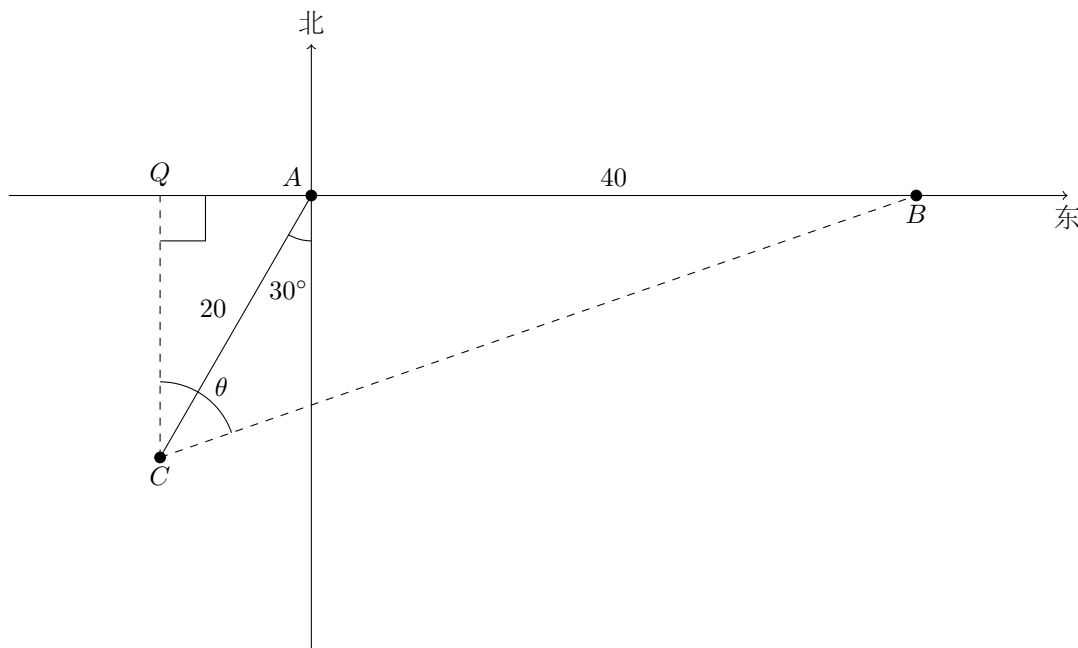
Section 2 解答题

13. 研究与函数 $f(x) = \tan x$ 相关的问题并填写结论.

- (1) 求 $f\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ 的定义域. $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{3} - \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- (2) 求 $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 之间的值域. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
- (3) 求函数 $f\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ 与 $|f(x)|$ 的周期. $T \in \left\{T \mid T = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\right\}, T \in \{T \mid T = k\pi, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$.
- (4) 写出函数 $f\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ 的单调区间并指明增减. 单调减: $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{5}{12}\pi, \frac{k\pi}{2} + \frac{11}{12}\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.
- (5) 写出 $f(2x)$ 图像的所有对称中心. $P\left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}, 0\right), k \in \mathbb{Z}$.

解析. 三角函数的性质.

14. 如图, 位于 A 处的信息中心获悉: 在其正东方向相距 40 海里的 B 处有一艘渔船遇险, 在原地等待营救. 信息中心立即把消息告知在其南偏西 30° , 相距 20 海里的 C 处的乙船, 现乙船向北偏东 θ 的地方沿直线 CB 前往 B 处救援, 求 $\cos \theta$.



解析. 初中数学.

联结 CB , 作 $CQ \perp BA$ 于 Q . 显然有 $QA = 10(\text{nm})$, $QC = 10\sqrt{3}(\text{nm})$, $\angle QCB = \theta$. 有 $\cos \theta = \frac{CQ}{CB}$, 而 $CQ = 10\sqrt{3}$, $CB = \sqrt{(40+10)^2 + (10\sqrt{3})^2}$, 则有 $\cos \theta = \frac{\sqrt{21}}{14}$

15. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 为三内角, $f(B) = 4 \cos B \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) + \sqrt{3} \cos 2B - 2 \cos B$,

(1) 若 $f(B) = 2$, 求 B .

解析. 三角方程, 三角变换.

$$\begin{aligned} f(B) &= 4 \cos B \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) + \sqrt{3} \cos 2B - 2 \cos B \\ &= 2 \cos B \sin B + \sqrt{3} \cos 2B \\ &= 2 \sin \left(2B + \frac{\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

$$f(B) = 2 \Rightarrow 2 \sin \left(2B + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \Rightarrow B = \frac{\pi}{12}.$$

(2) 若 $f(B) - m > 2$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

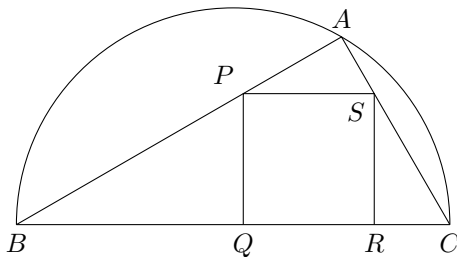
解析. 三角不等式, 三角变换.

$$f(B) - m > 2 \text{ iff } 2 \sin \left(2B + \frac{\pi}{3} \right) > 2 + m,$$

$$\begin{aligned} 0 < B < \pi &\Rightarrow -2 \leq 2 \sin \left(2B + \frac{\pi}{3} \right) \leq 2 \\ &\Rightarrow 2 + m < -2 \\ &\Rightarrow m < -4. \end{aligned}$$

Section 3 附加题

16. 如图, 某园林单位准备绿化一块直径为 BC 的半圆形空地, $\triangle ABC$ 外的地方种草, $\triangle ABC$ 的内接正方形 $PQRS$ 为一水池, 其余的地方种花. 若 $BC = a$, $\angle ABC = \theta$. 设 $S_{\triangle ABC} = S_1$, $S_{PQRS} = S_2$,



(1) 用 a, θ 表示 S_1 和 S_2 .

解析. 初中数学.

$$S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} a \sin \theta a \cos \theta = \frac{1}{2} a^2 \sin \theta \cos \theta. PS = \frac{a \sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta \cos \theta},$$

$$S_2 = PS^2 = \frac{a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1 + \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}.$$

(2) 当 a 固定, θ 变化时, 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 取最小值的 θ .

解析. 三角函数的极值; 三角变换, 基本不等式.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + \sin \theta \cos \theta)^2}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin 2\theta} + \frac{1}{4} \sin 2\theta + 1.$$

$t \stackrel{\text{def}}{=} \sin 2\theta$, 又 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 有 $t \in (0, 1]$,

$$\min \frac{S_1}{S_2} = \min_{t \in (0, 1]} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4}t + 1 \right) = \frac{9}{4}, \text{ iff } \sin 2\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$