15 幂函数、指数函数'

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 12 月 29 日

1. 已知函数 $f(x)=|2^x-1|-|2^x+1|-a-1$ 恒有零点, 则 a 的取值范围为?.

即方程

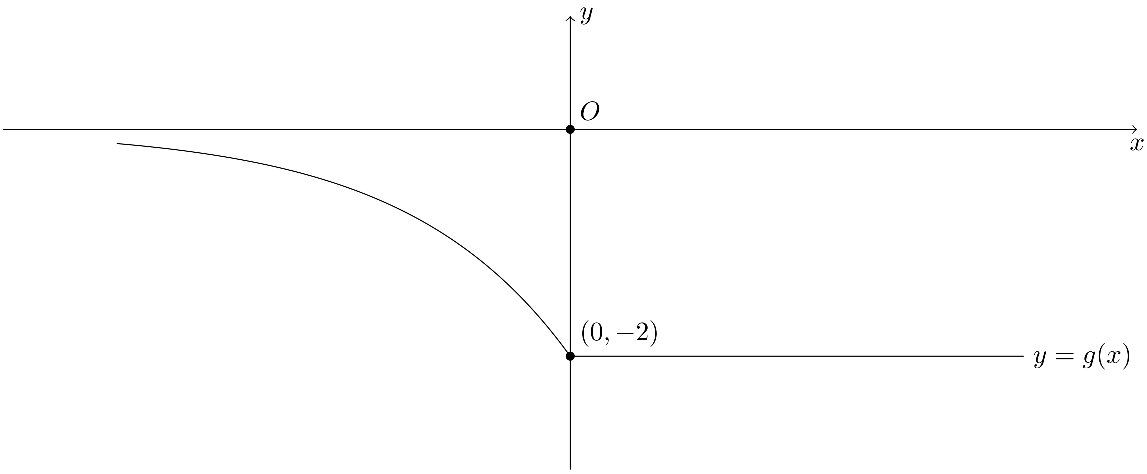
$$|2^x-1|-|2^x+1|=a+1$$

有解.

令 $g(x)=|2^x-1|-|2^x+1|$, 化简 $g(x)$, 有

$$g(x)=|2^x-1|-2^x-1=\begin{cases}-2\cdot 2^x, & x<0,\\ -2, & x\geq 0.\end{cases}$$

绘制 $y=g(x)$ 的图像,



显然有

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=0, -2\leq g(x)<0.$$

故

$$a+1\in[-2,0),$$

故

$$a\in[-3,-1).$$

2. 已知定义域为 $[0,1]$ 的函数 $f(x)$ 同时满足: (1) $\forall x\in[0,1], f(x)\geq 0$. (2) $f(1)=1$. (3) $\forall x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_1+x_2\leq 1, f(x_1+x_2)\geq f(x_1)+f(x_2)$.

(1) 求 $f(0)$ 的值.

令 $x_1=1, x_2=0$, 有

$$f(1)\geq f(1)+f(0), f(0)\leq 0.$$

又

$$\forall x\in[0,1], f(x)\geq 0,$$

有

$$f(0)=0$$

(2) 求 $f(x)$ 的最大值.

下证: $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上为增函数.
$\forall 0\leq x_1<x_2\leq 1$,

$$f(x_2)-f(x_1)\geq f(x_2-x_1)\geq 0, f(x_2)\geq f(x_1),$$

故有

$$\max_{x\in[0,1]} f(x)=f(1)=1.$$

(3) 若 $\forall x\in[0,1)$, $4f^2(x)-4(2-a)f(x)+5-4a\geq 0$, 求 a 的取值范围.

$x\in[0,1), f(x)\in[0,1]$.
令 $g(x)=4x^2-4(2-a)x+5-4a$, $y=g(x)$ 对称轴为直线 $x=\dfrac{2-a}{2}$.

原命题等价于

$$\min_{x\in[0,1]} g(x) \geq 0.$$

分三类讨论.

1° $\dfrac{2-a}{2} \leq 0$, $a \geq 2$,

$$\min_{x\in[0,1]} g(x) = g(0) = 5 - 4a \geq 0,$$

$a \leq \dfrac{5}{4}$, 故 $a \in \emptyset$.

2° $0 < \dfrac{2-a}{2} \leq 1$, $0 \leq a < 2$,

$$\min_{x\in[0,1]} g(x) = g\left(\frac{2-a}{2}\right) \geq 0,$$

$a \in [-1,1]$, 故 $a \in [0,1]$.

3° $1 < \dfrac{2-a}{2}$, $a < 0$,

$$\min_{x\in[0,1]} g(x) = g(1) = 1 \geq 0,$$

$a \in \mathbb{R}$, 故 $a \in (-\infty, 0)$.

综上所述, $a \in (-\infty, 1]$.