

220413 三角与向量 题目选解

Eason S.

作者的话. 这次测验还有点难度, 做得不好不要垂头丧气, 不要冲动, 不要愤怒. 认真总结教训, 积累经验, 学习方法.

Section 1 填空题

1. 以下与 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ 相等的有: (1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$, (2) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, (3) $\cos(\alpha + 15\pi)$. **(1) (3)**.

解析. 三角变换.

2. 设 $\tan \alpha = m (m \neq 0)$, $\sin \alpha = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$, 则 α 可能为第**一、四**象限角.

解析. 三角变换.

3. 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\log_{\cos \alpha} (1 + \tan^2 \alpha) = -2$.

解析. 三角变换.

4. 若扇形的弧长和面积均为 4, 则该扇形的弦心距长度为 **$2 \cos 1$** .

解析. 初中几何.

5. 函数 $y = 2 \tan\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$ 的单调**减**(增/减) 区间为 $\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right), k \in \mathbb{Z}$.

解析. 三角函数的单调性.

答案不唯一.

6. 若把函数 $y = \cos x - \sin x$ 的图像做适当的变换后能得到 $y = \sqrt{2} \sin 2x$ 的图像, 这样的移动可以是: 先将图像上所有点的横坐标**除以 2**, 再将图像向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位.

解析. 三角函数图像的变换; 三角变换.

答案不唯一.

作者的话. 自己选的时候请先伸缩后平移, 反过来比较容易脑抽. 考虑实际平移情况的时候应当将平移量给予 x, y .

7. 将 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right)$ 化为和差的形式 $\frac{1}{2} \left[\cos(\beta + \alpha) + \sin\left(\beta - \alpha - \frac{\pi}{6}\right) \right]$.

解析. 三角变换.

答案不唯一.

8. 若 $|\vec{a} + \vec{b}| = 3, |\vec{a} - \vec{b}| = 7$, 则 $|\vec{a}|$ 的取值范围是 $[2, 5]$.

解析. 向量的基本运算.

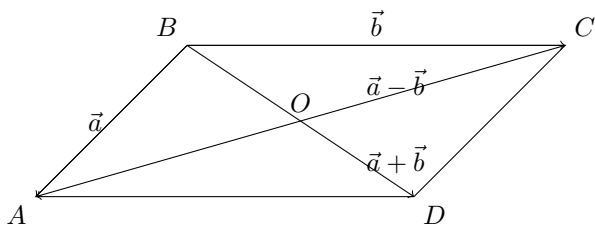
作者的话. 此后所有出现的所谓“空间向量”“平面向量”等统一使用 \vec{v} 表示 (相对而言比较简洁明了), 仅在明确指明属于线性代数学科讨论范围 (e.g. 与矩阵进行运算) 时使用 \mathbf{M} 表示 (保持与矩阵运算样式的统一性). 物理文档中一般向量统一使用 \mathbf{v} 表示, 如遇到单位向量使用 \hat{e} (使用 \hat{x} 强调单位, \mathbf{x} 强调向量).

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 记 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 已知 $|\vec{b}| = \sqrt{10}, |\vec{a} + \vec{b}| = 6, |\vec{a} - \vec{b}| = 4, \langle \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \arccos -\frac{\sqrt{10}}{8}$ (用反三角表示).

解析. 向量的基本运算.

法一. 利用向量的基本运算的平行四边形法则进行计算/利用向量的和的模长推出向量的差的模长所在的中线进行计算.

如图所示, 作向量 $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$, 令 $\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{b}$, AC 交 BD 于 O ,



显然有

$$\langle \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \pi - \angle ACB.$$

由于给出了 BD, AC, AB, BC 的长度以及平行四边形的对角线相互平分, 显然有 $OB = 3, OC = 2, BC = \sqrt{10}$, 由余弦定理可知 $\angle ACB = \arccos \frac{\sqrt{10}}{8}$, 则有 $\langle \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \arccos -\frac{\sqrt{10}}{8}$.

法二. 利用向量的内积及相关量进行计算.

由向量的内积运算, 显然有

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= |\vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = 4\sqrt{10} \cdot \cos \langle \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b} - 10, \\ |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + 10 = 36, \\ |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + 10 = 16, \end{aligned}$$

则有

$$\cos \langle \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b} - 10}{4\sqrt{10}} = -\frac{5}{4\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{8},$$

即

$$\langle \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \arccos -\frac{\sqrt{10}}{8}$$

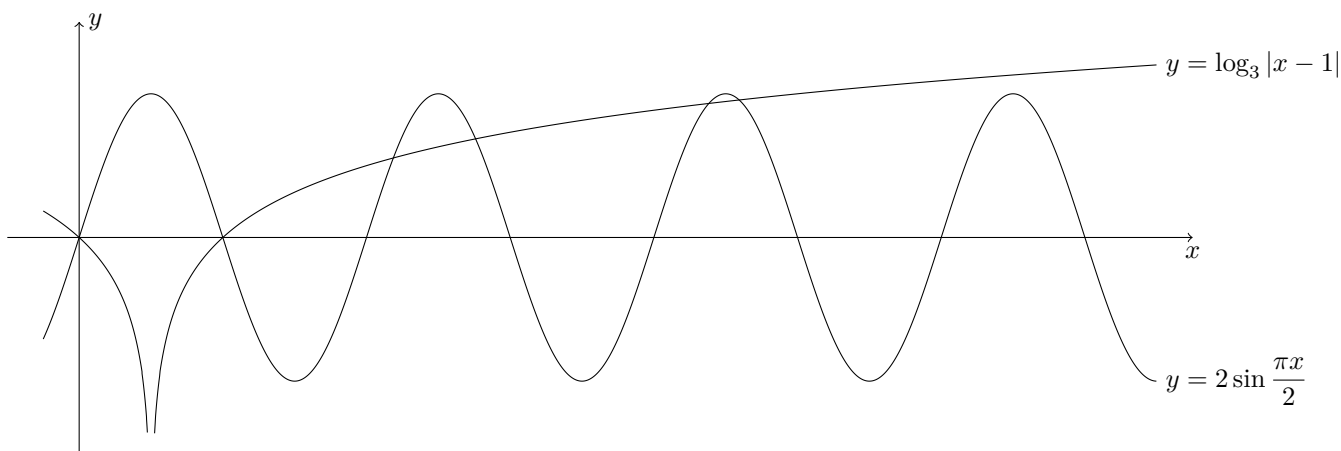
10. 设 $f(x) = 2 \sin \frac{\pi x}{2}$, $g(x) = \log_3 |x - 1|$, 则 $\sum_{\substack{f(x)=g(x) \\ x \in \mathbb{R}}} x = 10$.

解析. 三角函数; 对数函数.

显然, $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图像均关于直线 $x = 1$ 对称, 且 $x = 1$ 是 $g(x)$ 的一个无穷间断点, 故 $\forall x, f(x) = g(x) : f(2-x) = g(2-x)$, 考虑 $(1, +\infty)$ 或 $(-\infty, 1)$ 上的解即可. 同时有:

$$\sum_{\substack{f(x)=g(x) \\ x \in \mathbb{R}}} x = 2 \sum_{\substack{f(x)=g(x) \\ x \in (1, +\infty)}} 1 = 2 \sum_{\substack{f(x)=g(x) \\ x \in (-\infty, 1)}} 1$$

绘制 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图像, 考虑 $f(x) = g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的解. 注意到题目已经将 $f(x)$ 的特殊点 (i.e. 极值点, 零点) 作了有理化, 故绘制图像是一个比较好的解决方法.



Section 2 解答题

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $b = 1, c = 5, S_{\triangle ABC} = 2$, 求边 a 的长度. $a = 4\sqrt{2}$ or $2\sqrt{5}$.

解析. 解三角形. 过程略.

12. 解三角方程.

(1)

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4},$$

$$\text{其中 } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]. \quad x \in \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right), \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \right\}.$$

解析. 利用复合函数可化为最简三角方程的三角方程.

$$x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right],$$

$$\begin{aligned}
 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{4} \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right), k \in \mathbb{Z} \\
 &\Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \\
 &\Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right), \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \right\}.
 \end{aligned}$$

(2)

$$\sin 3x = \cos 2x.$$

$$x \in \left\{ x \mid x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

解析. 利用简单三角变换可化为最简三角方程的三角方程.

$$\begin{aligned}
 \sin 3x = \cos 2x &\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos 2x \\
 &\Rightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x \\
 &\Rightarrow 3x - \frac{\pi}{2} = 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ or } 3x - \frac{\pi}{2} + 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 &\Rightarrow x \in \left\{ x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ or } x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \right\} \\
 &\Rightarrow x \in \left\{ x \mid x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}, k \in \mathbb{Z} \right\}.
 \end{aligned}$$

13. 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\tan \beta = -\frac{1}{7}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\beta \in (0, \pi)$,

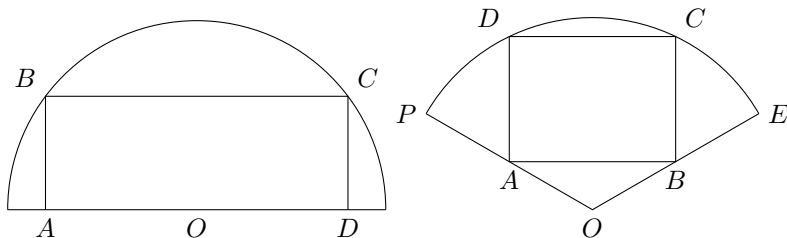
(1) 求 $\sin(2\alpha - \beta)$. $\sin(2\alpha - \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解析. 三角变换. 过程略.

(2) 求 $2\alpha - \beta$. $2\alpha - \beta = -\frac{3\pi}{4}$.

解析. 反三角函数的基本运用. 过程略.

14. 为建设方舱医院, 某区政府考察了甲、乙两块空地, 其中甲地是一半径 2 千米的半圆, 乙地是一圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形, 其半径可视情况开辟. 受条件限制, 方舱必须建设为空地的内接矩形, 如图所示.



- (1) 若选定在甲地建设, 求方舱面积的最大值. 4km^2

解析. 三角函数的极值性; 三角变换.

连接 OB , 设 $\angle AOB = \theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 有 $OB = 2\text{km}, \angle BAO = \frac{\pi}{2}$, 显然有 $OA = 2\cos\theta\text{km}, AB = 2\sin\theta\text{km}$, 有

$$\begin{aligned} \max_{\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)} S &= \max_{\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)} (2 \cdot OA \cdot AB) \\ &= \max_{\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)} (8 \sin\theta \cos\theta) \text{km}^2 \\ &= \max_{\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)} (4 \sin 2\theta) \text{km}^2 \\ &= 4 \sin 2\theta \Big|_{\theta = \frac{\pi}{4}} \text{km}^2 \\ &= 4\text{km}^2. \end{aligned}$$

- (2) 若选定在乙地建设, 那么为了使乙地方舱的最大面积不小于甲地的, 则至少需要开辟多少长度的半径? $2\sqrt[4]{3}\text{km}$.

解析. 三角函数的极值性; 三角变换.

连接 OD, OC , 设 $\angle AOD = \theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), OP = OE = r$. 有 $\angle OAD = \frac{2\pi}{3}$, 有

$$\frac{r}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{AD}{\sin \theta} - \frac{OA}{\sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} \Rightarrow AD = \frac{2}{\sqrt{3}} r \sin \theta, OA = \frac{2}{\sqrt{3}} r \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right).$$

在 $\triangle AOB$ 中有 $OA = OB, \angle AOB = \frac{2\pi}{3}$, 有 $\angle OBA = \frac{\pi}{6}, AB = \sqrt{3}OA$. 于是有 $AB = 2r \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$.

$$\begin{aligned} S &= S(r, \theta) \\ &= AD \cdot AB \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} r^2 \sin \theta \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} r^2 \left[\cos \left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \cos \frac{\pi}{3} \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} r^2 \left[\cos \left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \right], r \in (0, +\infty), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

二元函数 $S = S(r, \theta)$ 在定义域内连续且对 r, θ 的偏导数均存在. 下求 S 关于 θ 的偏导:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \theta} = S_{\theta} &= \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{S(r, \theta + \Delta \theta) - S(r, \theta)}{\Delta \theta} \\ &= -\frac{4\sqrt{3}r^2 \sin \left(\frac{6\theta - \pi}{3}\right)}{3}. \end{aligned}$$

考虑 $\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0$, 有 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 且对 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right): \frac{\partial S}{\partial \theta} > 0$, 对 $\theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right): \frac{\partial S}{\partial \theta} < 0$.

故 $S(r, \theta)$ 在 r 恒定的时候, 在 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 取到极大值 $\frac{1}{\sqrt{3}}r^2 \geq 4\text{km}^2$. 因此至少开辟 $2\sqrt[3]{3}\text{km}$.

Section 3 附加题

15. 设 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{5\pi}{6}\right) + 2\cos^2 \frac{\omega x}{2} (\omega > 0)$,

(1) 若 $f(x)$ 的图像在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 中有且只有一个对称中心, 求 ω 的取值范围. $\omega \in [1, 4)$.

解析. 三角函数图像的广义奇偶性; 三角变换.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\left(\omega x + \frac{5\pi}{6}\right) + 1 + \cos \omega x \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x + \frac{1}{2} \cos \omega x + \cos \omega x + 1 \\ &= \frac{3}{2} \cos \omega x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x + 1 \\ &= \sqrt{3} \sin\left(\omega x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1. \end{aligned}$$

由 $\omega > 0, x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 显然有 $\omega x + \frac{2\pi}{3} \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\omega + \frac{2\pi}{3}\right]$. 则有

$$\begin{cases} \pi \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\omega + \frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow \pi \leq \frac{\pi}{3}\omega + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 1 \leq \omega \\ 2\pi \notin \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\omega + \frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow 2\pi > \frac{\pi}{3}\omega + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 4 > \omega \end{cases} \Rightarrow \omega \in [1, 4).$$

(2) 若 $\exists a \in \mathbb{R} : f(x)$ 在 $\left[a - \frac{\pi}{6}, a + \frac{\pi}{6}\right]$ 上能同时取到最大值和最小值, 且方程 $2f(x) = 5$ 在 $[0, 2\pi]$ 内至多有 7 个实数解, 求该方程在 $[0, 2\pi]$ 内所有解之和的取值范围. $\left[6\pi, \frac{23\pi}{3}\right]$.

解析. 三角函数的最值性, 三角方程.

$$\begin{aligned} 2f(x) = 5 &\Rightarrow \sin\left(\omega x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Rightarrow \omega x + \frac{2\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ or } \omega x + \frac{2\pi}{3} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \omega x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \text{ or } \omega x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\exists a \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{T}{2} \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{\omega} \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega \geq 3.$$

ωx 所对应的值为 $\left\{0, \frac{5\pi}{3}, 2\pi, \frac{11\pi}{3}, 4\pi, \frac{17\pi}{3}, 6\pi\right\}$, 注意到

$$\omega x \in [0, 2\omega\pi] \supseteq [0, 6\pi],$$

因此有

$$6\pi \leq 2\omega\pi \leq \frac{23\pi}{3} \Rightarrow \omega \in \left[3, \frac{23}{6}\right].$$

解的和为 $\frac{23\pi}{\omega}$, 即解的取的取值范围为 $\left[6\pi, \frac{23\pi}{3}\right]$.

Section 4 特别致谢

鸭鸭, stOOrz_OwenXu, stOOrz_BubbleTea, Anthan and stOOrz_Jacky_Chen. 提供初版答案参考.

stOOrz_AFOer_xrh and stOOrz_Jasonying. 指出预览版中出现的逻辑错误.