8 综合练习（简单题）

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 11 月 03 日

(1) 对于以下三个命题: (1) 若正实数 x, y 满足 $y - xy = 2$, 则 $\dfrac{y}{x}$ 的最小值为 8; (2) 若 $x, y \in \mathbf{R}^+$ 且 $x + 2y - xy = 0$, 则当且仅当 $x = y = 3$ 时, xy 有最小值 9; (3) 若 $bc > ad$, $\dfrac{c}{a} > \dfrac{d}{b}$, 则 $ab > 0$, 其中所有真命题的序号为 (1) (3).

考虑命题 (1):

$y - xy = 2 \Rightarrow y = \dfrac{2}{1-x} \Rightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{x(1-x)} \geq \dfrac{2}{\frac{(x+1-x)^2}{4}} = 8$, 等号成立当且仅当 $x = 1 - x$ 即 $x = \dfrac{1}{2}$ 且 $y = 4$.

考虑命题 (2):

$x + 2y - xy = 0 \Rightarrow y = \dfrac{x}{x-2} \Rightarrow x - 2 > 0, xy = \dfrac{x^2}{x-2}$.

令 $t = x - 2$ 则有 $x = t + 2$, $xy = \dfrac{t^2 + 4t + 4}{t} = t + \dfrac{4}{t} + 4 \geq 2\sqrt{t \cdot \dfrac{4}{t}} + 4 = 8$, 等号成立当且仅当 $t = \dfrac{4}{t}$ 即 $t = 2$ 即 $x = 4$ 且 $y = 2$.

考虑命题 (3):

假设 $ab < 0 \Rightarrow bc < ad$ 与已知条件矛盾, 于是 $ab > 0$.

(2) 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$,

(1) 证明: $a^a b^b \geq (ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

(2) 证明: $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

法一: 变量在指数上, 考虑两边取对数.

(1) 证明: $a^a b^b \geq (ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

即证 $\ln(a^a b^b) \geq \ln\left[(ab)^{\frac{a+b}{2}}\right]$,

即证 $a \ln a + b \ln b \geq \dfrac{a+b}{2} \ln(ab)$,

即证 $a \ln a + b \ln b \geq \dfrac{a+b}{2} \ln a + \dfrac{a+b}{2} \ln b$,

即证 $\dfrac{a-b}{2} \ln a + \dfrac{b-a}{2} \ln b \geq 0$,

即证 $(a-b)(\ln a - \ln b) \geq 0$.

由对称性, 不妨设 $a \geq b$, 有 $a - b \geq 0, \ln a - \ln b \geq 0$,

于是 $(a-b)(\ln a - \ln b) \geq 0$,

即原不等式成立.

(2) 证明: $a^a+b^b+c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

即证 $\ln\left(a^a b^b c^c\right) \geq \ln\left[(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\right]$,

即证 $a\ln a+b\ln b+c\ln c \geq \dfrac{a+b+c}{3}\ln(abc)$,

即证 $a\ln a+b\ln b+c\ln c \geq \dfrac{a+b+c}{3}\ln a+\dfrac{a+b+c}{3}\ln b+\dfrac{a+b+c}{3}\ln c$,

即证 $(2a-b-c)\ln a+(2b-a-c)\ln b+(2c-a-b)\ln c \geq 0$,

即证 $(a-b)(\ln a-\ln b)+(b-c)(\ln b-\ln c)+(a-c)(\ln a-\ln c) \geq 0$.

由对称性, 不妨设 $a \geq b \geq c$, 有 $a-b \geq 0, \ln a-\ln b \geq 0, b-c \geq 0, \ln b-\ln c \geq 0, c-a \geq 0, \ln c-\ln a \geq 0$,

于是 $(a-b)(\ln a-\ln b)+(b-c)(\ln b-\ln c)+(a-c)(\ln a-\ln c) \geq 0$,

即原不等式成立.

法二: 两边均为正且带指数, 考虑作商.

(1) 证明: $a^a b^b \geq (ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

两边作商, 有 $\dfrac{a^a b^b}{(ab)^{\frac{a+b}{2}}}=a^{\frac{a-b}{2}}b^{\frac{b-a}{2}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}$.

由对称性, 不妨设 $a \geq b$, 有 $\dfrac{a}{b}>1, \dfrac{a-b}{2}>0$, 由幂的基本不等式有 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}} \geq 1$.

于是有 $a^a b^b \geq (ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

(2) 证明: $a^a+b^b+c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

两边作商, 有 $\dfrac{a^a b^b c^c}{(ab)^{\frac{a+b+c}{3}}}=a^{\frac{2a-b-c}{3}}b^{\frac{2b-a-c}{3}}c^{\frac{2c-a-b}{3}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\left(\dfrac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}\left(\dfrac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}$.

由对称性, 不妨设 $a \geq b \geq c$, 有 $\dfrac{a}{b}>1, \dfrac{a-b}{3}>0, \dfrac{b}{c}>1, \dfrac{b-c}{3}>0, \dfrac{a}{c}>1, \dfrac{a-c}{3}>0$, 由幂的基本不等式有 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}} \geq 1, \left(\dfrac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{2}} \geq 1, \left(\dfrac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{2}} \geq 1$.

于是有 $a^a+b^b+c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.