14 幂函数、指数函数（难题）

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 12 月 22 日

1. 已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数, 且 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称, 当 $x\in[-1,0]$ 时, $f(x)=-x$, 则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2015)=?$.

$f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称, 即

$$f(1-x)=f(1+x),$$

又 $f(x)$ 是奇函数, 有

$$-f(x-1)=f(x+1),$$

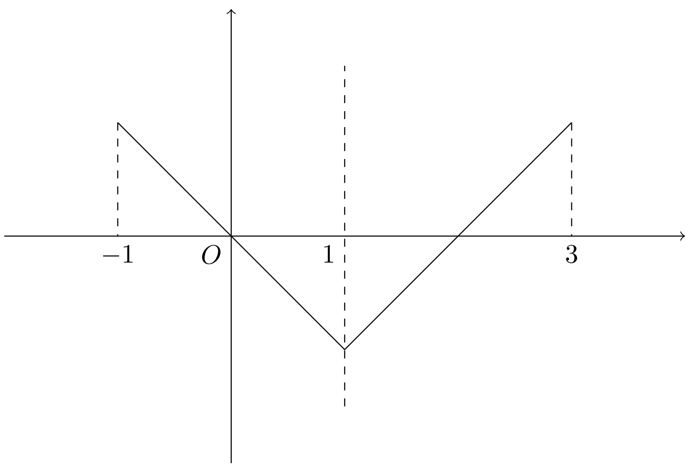
即

$$f(x)=-f(x+2),$$

即

$$f(x)=f(x+4).$$

绘制 $y=f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上的图像如图所示:



故有 $f(1)=-f(-1)=-1, f(2)=f(0)=0, f(3)=1, f(4)=f(0)=0,$

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2015)=503\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)+f(3)=0.$$

2. 已知 $f(x)=\dfrac{2x-m}{x^2+1}$ 是定义在实数集 $\mathbb{R}$ 上的函数, 把方程 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 称为函数 $f(x)$ 的特征方程, 特征方程的两个实根 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$ 称为 $f(x)$ 的特征根.

   (1) 讨论函数的奇偶性, 并说明理由.

   略, $m=0$ 为奇函数, $m\neq 0$ 为非奇非偶函数.

   (2) 求 $\alpha f(\beta)+\beta f(\alpha)$ 的值.

   方程

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

   的根即为方程

$$x^2-mx-1=0$$

   的非零根, 即为该方程的根.

   于是有

$$\Delta=m^2+4>0.$$

   由韦达定理, 有

$$\alpha+\beta=m,\alpha\beta=-1.$$

   故

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\alpha f(\beta)+\beta f(\alpha)\\
&=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\\
&=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}\\
&=-m^2-2.
\end{aligned}$$

(3) 判断函数 $y=f(x), x\in[\alpha,\beta]$ 的单调性, 并证明.

考虑 $\alpha\le x_1<x_2\le\beta$,

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=\frac{2x_1-m}{x_1^2+1}-\frac{2x_2-m}{x_2^2+1}\\&=\frac{(x_2-x_1)[2x_1x_2-m(x_1+x_2)-2]}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}.\end{aligned}$$

$\alpha\le x_1<x_2\le\beta\Rightarrow x_2-x_1>0, x_1^2+1>0, x_2^2+1>0, x_1^2-mx_1-1<0, x_2^2-mx_2-1<0, 2x_1x_2-m(x_1+x_2)<0,$

故

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{(x_2-x_1)[2x_1x_2-m(x_1+x_2)-2]}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}<0,$$

即 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 内严格增.