§6 不等式测验"（简单题）

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 10 月 20 日

(1) 已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$. 若 $x + 9y = 1$，则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为~~$10+2\sqrt{9}$~~ **16**.

$\because x, y \in \mathbf{R}^+ \therefore \frac{x}{y}, \frac{9y}{x} \in \mathbf{R}^+$, 有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x + 9y) \\
&= 10 + \frac{9y}{x} + \frac{x}{y} \\
&\geq 10 + 2\sqrt{\frac{9y}{x} \cdot \frac{x}{y}} \\
&= 10 + 2\sqrt{9} \\
&= 16.
\end{aligned}$$

$\sqrt{9}$ 要化简成 3 不能保留 $\sqrt{9}$.

(2) 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$ 满足 $(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 < 0$ 恒成立的所有实数 a 构成集合 A, 使不等式 $|x+1| - |x+2| \leq a$ 的解集为空集的所有实数 a 构成集合 B. 则 $U = \mathbf{R}$ 时，$A \cap \overline{B} =$~~$(-2,2)$~~ $[-1, 2]$.

考虑 $(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 < 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 分两类讨论:

1° $a = 2, -4 < 0$ 符合题意.

2° $a \neq 2$, 有

$$\left\{\begin{array}{rcccrcccccc}
a-2 & < & 0 & \Rightarrow & a & < & 2 & & & & \\
\Delta & < & 0 & \Rightarrow & 4a^2 - 16a + 16 + 16a - 32 & < & 0 & \Rightarrow & a & \in & (-2,2)
\end{array}\right. \Rightarrow a \in (-2, 2).$$

于是有 $A = (-2, 2]$.

不等式 $|x+1| - |x+2| \leq a$ 的解集为空集, 有 $a < (|x+1| - |x+2|)_{\min} = -1$.

于是有 $B = (-\infty, -1)$.

$A \cap \overline{B} = (-2, 2] \cap [-1, +\infty) = [-1, 2]$.