2 集合测验'（难题）

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 09 月 15 日

1. 集合 $M=\left\{66,-14,2333,10,911,-1,0,\pi,3.1415,\sqrt{7}\right\}$ 有 10 个元素，设 M 的所有非空子集为 $M_i\,(i\le 1023, i\in\mathbb{N}^*)$，每一个 M_i 中所有元素的乘积为 m_i，则 $\sum_{i=1}^{1023} m_i=?$.

考虑构造方程

$$\prod_{i\in M}(x-i)=0.$$

易得，此方程的解集合为集合 M.

展开，得

$$a_1x^{10}+a_2x^9+a_3x^8+\cdots+a_{10}x+a_{11}=0$$

由高次方程的 $Viète$ 定理有:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{10}x_i = & -\dfrac{a_2}{a_1}\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1,j\neq i}^{10}x_ix_j = & \dfrac{a_3}{a_1}\\ \vdots & \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{10}x_i = & \dfrac{a_{11}}{a_1}\end{cases}$$

显然，所求内容即为 $\frac{-a_2+a_3-a_4+a_5-\cdots-a_{10}+a_{11}}{a_1}$

易得，$a_1=1$，所求内容即为 $-a_2+a_3-a_4+a_5-\cdots-a_{10}+a_{11}$.

将 $x=-1$ 代入展开后的方程左边，即为 $a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-\cdots-a_{10}+a_{11}$.

由于 $x=-1\in M$，等式右边即为 0，即所求内容为 -1.

2. 称正整数集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(1\le a_1<a_2<\cdots<a_n,n\ge 2)$ 具有性质 P，若它满足 $\forall 1\le i\le j\le n: a_ia_j\in A\vee\frac{a_j}{a_i}\in A$.

(1) 分别判断集合 $\{1,3,6\}$ 与 $\{1,3,4,12\}$ 是否具有性质 P.

（过程略），$\{1,3,6\}$ 不具有，$\{1,3,4,12\}$ 具有.

(2) 设正整数集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(1\le a_1<a_2<\cdots<a_n,n\ge 2)$ 具有性质 P, 证明: $\forall i\in\mathbb{N}^*,i\le n,a_i|a_n$.

反证法：假设 $\exists i\in\mathbb{N}^*,i\le n,a_i\nmid a_n$.

可知 $a_i\ne 1$.

考虑 $a_ia_n>a_n$ 与 a_n 最大性矛盾.

考虑 $\frac{a_n}{a_i}\notin\mathbb{N}^*$ 于是 $\frac{a_n}{a_i}\notin A$.

与集合 A 具有性质 P 矛盾.

于是 $\forall i\in\mathbb{N}^*,i\le n,a_i|a_n$.