220330 三角函数 题目选解

高一 (4) 班 邵亦成 48 号

Section 1 填空题

1. $\max\limits_{x\in\mathbb{R}}(2\sin x-1)=1$, 此时 $x\in\left\{x|x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.
解析. 三角函数的极值性.

2. $\min\limits_{x\in\mathbb{R}}(-3\cos x+5)=2$, 此时 $x\in\{x|x=2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.
解析. 三角函数的极值性.

3. 函数 $y=3\cos\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的周期是 $T=4k\pi,k\in\mathbb{Z},k\neq 0$.
解析. 三角函数的周期性.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=12,A=45^\circ,C=60^\circ$, 则 $b=6+6\sqrt{3}$.
解析. 解三角形.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=4,b=5,S_\triangle=5\sqrt{3}$, 则 $c=\sqrt{21}$ or $\sqrt{61}$.
解析. 解三角形.

6. 函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi-\dfrac{5\pi}{12},k\pi+\dfrac{\pi}{12}\right],k\in\mathbb{Z}$.
解析. 三角函数的单调性.

7. 函数 $y=5\sin x+\cos 2x$ 的值域是 $[-6,4]$.
解析. 三角变换, 二次函数.

8. 函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x,x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 的值域是 $[1,2]$.
解析. 三角函数的值域; 三角变换.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=\sqrt{3},BC=3,AC=4$, 则 AC 边上的中线 $BD=\sqrt{2}$.
解析. 解三角形.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$, $S_{\triangle ABC}=15\sqrt{3}$, 则最长的边长为 14.
解析. 解三角形; 海伦 · 秦九韶公式.

11. 设函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的奇函数, 且 $f\left(-\dfrac{2}{5}\right)=7$. 若 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $f(4\cos 2\alpha)=-7$.

解析. 三角变换, 函数的基本性质.

12. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}|\sin x-\cos x|$, 则 $f(x)$ 的值域是 $\left[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

解析. 三角函数的值域; 分段函数.

Section 2 解答题

13. 在 $\triangle ABC$ 中, a,b,c 分别是三个内角 A,B,C 的对边. 若 $a=2,C=\frac{\pi}{4},\cos\frac{B}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 求 $S_{\triangle ABC}$.

解析. 解三角形. 过程略. $S_{\triangle ABC}=\frac{8}{7}$.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A,B,C 所对的边长分别是 a,b,c.

(1) 若 $c=2,C=\frac{\pi}{3},S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$, 求 a,b.

解析. 解三角形. 过程略. $a=b=2$.

(2) 若 $\sin C+\sin(B-A)=\sin 2A$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解析. 解三角形, 三角变换.

$$
\begin{aligned}
A+B+C=\pi &\Rightarrow \sin C=\sin(A+B)\\
&\Rightarrow \sin(A+B)+\sin(B-A)=2\sin A\cos A\\
&\Rightarrow 2\sin B\cos A=2\sin A\cos A\\
&\Rightarrow \cos A=0 \text{ or } \sin B=\sin A\\
&\Rightarrow A=\frac{\pi}{2} \text{ or } A=B\\
&\Rightarrow \triangle ABC\text{是}\mathrm{Rt}\triangle \text{ or 等腰}\triangle.
\end{aligned}
$$

15. 已知函数 $f(x)=2-\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-2\sin^2 x,x\in\mathbb{R}$,

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期.

解析. 三角函数的周期性; 三角变换. 过程略. $\min\limits_{T>0} T=\pi$.

(2) 求 $f(x)$ 单调递增区间.

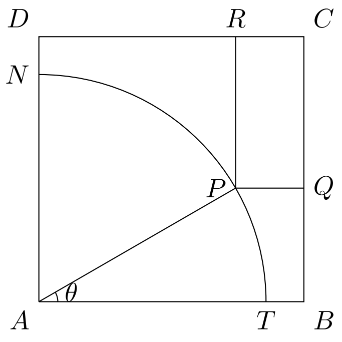
解析. 三角函数的单调性. 过程略. $\left[k\pi-\frac{2}{3}\pi,k\pi-\frac{\pi}{6}\right],k\in\mathbb{Z}$.

(3) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边长分别为 a,b,c, 若 $f\left(\frac{B}{2}\right)=1, b=1, c=\sqrt{3}$, 求 a 的值.

解析. 解三角形, 三角方程.
由 $f\left(\frac{B}{2}\right)=1$ 可知 $B=\frac{\pi}{6}$.
考虑到 $b=1, c=\sqrt{3}$, 又由正弦定理有 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, 可知 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故可知 $C=\frac{\pi}{3}$ or $\frac{2\pi}{3}$.
当 $C=\frac{\pi}{3}, A=\frac{\pi}{2}, a=\sqrt{b^2+c^2}=2$.
当 $C=\frac{2\pi}{3}, A=\frac{\pi}{6}, B=\frac{\pi}{6}, a=b=1$.
于是有 $a=1$ or 2.

Section 3 附加题

16. 如图所示, $ABCD$ 是一块边长为 7 米的正方形铁皮, 其中 ATN 是一半径为 6 米的扇形, 已经被腐蚀不能使用, 其余部分完好可利用. 工人师傅想在未被腐蚀部分截下一个有边落在 BC 与 CD 上的长方形铁皮 $PQCR$, 其中 P 是 $\overset{\frown}{TN}$ 上一点. 设 $\angle TAP=\theta$, 长方形 $PQCR$ 的面积为 S 平方米.



(1) 求 S 关于 θ 的函数解析式.

解析. 三角比. 过程略. $S=49-42(\sin\theta+\cos\theta)+36\sin\theta\cos\theta, \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(2) 求 S 的最大值及此时 θ 的值.

解析. 三角变换; 二次函数.
令 $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right), \sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$, 于是有 $S=49-42t+18\left(t^2-1\right)=18t^2-42t+31$.
注意到 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 可知 $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$, 有 $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in[1,\sqrt{2}]$.
于是有 $S=S(t)=18t^2-42t+31=18\left(t-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{13}{2}, t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$,
故 $\max\limits_{t\in[1,\sqrt{2}]} S=S|_{t=\sqrt{2}}=67-42\sqrt{2}$, 此时 $\theta=\frac{\pi}{4}$.