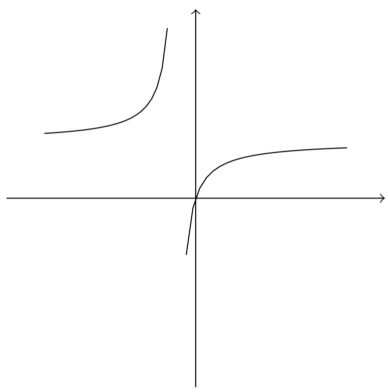
10 奇偶性、单调性（简单题）

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 11 月 24 日

1. 函数 $y=\dfrac{3x}{2x+1}$ 的单调减区间为? .



故其单调减区间不存在.

2. 函数 $y=g(x)=f(x)-8$, 其中 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数. 若 $x>0$ 时 $g(x)=\sqrt{x^3+3}$, 则 $g(-2)=$? .

有

$$\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=g(x)+8,$$

故

$$\forall x>0: f(x)=\sqrt{x^3+3}+8,$$

故

$$\forall x<0: f(x)=-f(-x)=-\left(\sqrt{x^3+3}+8\right),$$

故

$$\forall x < 0 : g(x) = f(x) - 8 = -\sqrt{x^3+3} - 16,$$

故

$$g(-2) = -\sqrt{11} - 16.$$

3. 若 $y = ax^2 + (a-2)x$ 在 $(-1, +\infty)$ 上是严格减函数, 则实数 a 的取值范围是? .

1° $a = 0, y = -2x$ 在 $\mathbb{R}$ 上为严格减函数, 符合条件.

2° $a \neq 0$, 有:

$$\begin{cases} a & < & 0 \\ -\dfrac{a-2}{2a} & \leq & -1 \end{cases} \Rightarrow a \in [-2, 0).$$

综上, $a \in [-2, 0]$.

4. 若函数 $y = \dfrac{a^x + b}{2^x - 1}(a > 0 且 a \neq 1, b \in \mathbb{R})$ 为奇函数, 求 a, b 的值.

$$f(x) \xlongequal{\text{def}} \frac{a^x + b}{2^x - 1},$$

则有

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | 2^x - 1 \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

又由 $f(x)$ 在定义域上是奇函数, 有

$$\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) : f(x) + f(-x) = 0,$$

有

$$\begin{aligned} \frac{a^x + b}{2^x - 1} + \frac{a^{-x} + b}{2^{-x} - 1} &= \frac{a^x + b - 2^x \cdot (a^{-x} + b)}{2^x - 1} \\ &= -b + \frac{a^x - 2^x \cdot a^{-x}}{2^x - 1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

考虑 $x = 1$ 有

$$-b + a - 2 \cdot a^{-1} = 0,$$

考虑 $x=2$ 有

$$-b+\frac{a^2-4\cdot a^{-2}}{3}=0,$$

联立, 解得

$$a=2, b=1 \textbf{ or } a=\sqrt{2}, b=0.$$

考虑 $a=2, b=1$ 有

$$f(x)=\frac{2^x+1}{2^x-1},$$

$$f(x)+f(-x)=-b+\frac{a^x-2^x\cdot a^{-x}}{2^x-1}=-1+\frac{2^x-2^x\cdot 2^{-x}}{2^x-1}=0.$$

考虑 $a=\sqrt{2}, b=0$ 有

$$f(x)\frac{\sqrt{2}^x}{2^x-1},$$

$$f(x)+f(-x)=-b+\frac{a^x-2^x\cdot a^{-x}}{2^x-1}=\frac{(\sqrt{2})^x-2^x\cdot(\sqrt{2})^{-x}}{2^x-1}=0.$$

综上, $(a,b)=(2,1)$ or $(a,b)=(\sqrt{2},0)$.

5. 某工厂生产一种抗疫应急物资, 年固定成本为 200 万元, 每件物资的售价固定为 0.05 万元, 且受产能所限, 年产量不超过 100 千件. 假设年产量为 x(千件), 当产量不超过 80 千件时, 需要额外投入的成本 $C(x)=\frac{1}{3}x^2+10x$(万元), 而当年产量超过 80 千件时, $C(x)=57.2x+\frac{24200}{1.1x-22}-2144$(万元), 且政府为了鼓励抗疫, 对超出 80 千件的部分, 每件为给予售价 10% 的补贴. 已知该工厂生产的所有物资都能够售完.

(1) 求该工厂的年利润 L(万元) 与 x(千件) 之间的函数关系式.

$$L=\text{售价}+\text{补贴}-\text{年固定成本}-\text{额外成本}$$

分两类讨论.

1° $x\le 80$, 有:

$$\begin{aligned}L&=50x+0-200-\left(\frac{1}{3}x^2+10x\right)\\&=-\frac{1}{3}x^2+40x-200.\end{aligned}$$

2° $80 < x \le 100$, 有:

$$\begin{aligned}L &= 50x + (x-80)\cdot 5 - 200 - \left(57.2x + \frac{24200}{1.1x-22} - 2144\right)\\ &= -2.2x - \frac{24200}{1.1x-22} + 1544.\end{aligned}$$

综上,

$$L = \begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^2 + 40x - 200, & x \le 80, \\ -2.2x - \dfrac{24200}{1.1x-22} + 1544, & 80 < x \le 100. \end{cases}$$

(2) 该工厂年产量为多少时将获得最大利润? 最大利润是多少?

分两类讨论.

1° $x \le 80$, $L = -\dfrac{1}{3}x^2 + 40x - 200$,

$$L_{\max}\text{当}x = 60, L = 1000.$$

2° $80 < x \le 100$, $L = -2.2x - \dfrac{24200}{1.1x-22} + 1544$,

$$L = -\left[2(1.1x-22) + \frac{24200}{1.1x-22}\right] + 1500.$$

$f(x) \xlongequal{\text{def}} 1.1x - 22$, 有 $66 < f(x) \le 88$,

$$L = -\left[2f(x) + \frac{24200}{f(x)}\right] + 1500,$$

$$L_{\max}\text{当}x = 100, L = 1049.$$

综上, 当工厂年产量为 100(千件) 时有最大利润 1049(万元).