220323 三角恒等式与正余弦定理 题目选解

高一 (4) 班 邵亦成 48 号

Section 1 填空题

1. 若 $\tan(\pi+\alpha)=2$, 则 $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$.
解析. 诱导公式, 两倍角公式; 计算器的使用.
计算器. $\sin[2(\arctan 2-180)]$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A:\sin B:\sin C=4:5:6$, 则最大内角的余弦值为 $\frac{1}{8}$.
解析. 正弦定理, 余弦定理.

3. 等腰 $\triangle ABC$ 的底边长为 2, 面积为 3, 则其外接圆半径为 $\frac{5}{3}$.
解析. 正弦定理.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=3\sqrt{2}, b=3\sqrt{3}, B=\frac{\pi}{3}$, 则 $A=\frac{\pi}{4}$.
解析. 正弦定理.

5. α 为第四象限角, $\tan\alpha=-\frac{7}{24}$, 则 $\tan\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{7}$.
解析. 半角公式; 计算器的使用.
计算器. $\tan\left[\dfrac{\arctan\left(-\frac{7}{24}\right)}{2}\right]$.

6. 若 $\frac{1-\cos x}{\sin x}=3$, 则 $\cos x+\cot\frac{x}{2}=-\frac{7}{15}$.
解析. 同角三角比, 半角公式; 计算器的使用.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin(A-B)+\sin C=\sin 2B$, $C=40°$, 则 $B=70°$ **or** $90°$.
解析. 差角公式, 两倍角公式; 计算器的使用.
计算器. SOLVE $\sin(140-2x)+\sin(40)=\sin(2x)$.

8. 在 $\triangle ABC$ 中 $b=2a\cos C$, 则当 $3\tan\frac{B}{2}+\cot\frac{B}{2}$ 取得最小值时, 三角形的形状为等边三角形.
解析. 同角三角比, 两倍角公式. 基本不等式.

9. 使 $\triangle ABC$ 有唯一解的有 **(1), (4)**.

(1) $a=8, c=6, B=131°$.

(2) $A=12^\circ, \sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, a=1$.

(3) $a=7, b=12, A=\dfrac{\pi}{6}$.

(4) $A=95^\circ, a=24, c=21$.

解析. 正余弦定理.

10. 设 $f(\tan\alpha)=\cos 2\alpha, g(\tan\alpha)=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$. 当 $x\neq\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$, $5f(\cos x)=g(\cos 2x)$ 的解集为 $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\dfrac{\pi}{3}+k\pi, \dfrac{2\pi}{3}+k\pi\right\}$.

解析. 将映射 $f(x)$ 化简为有理多项式的形式. 注意到正切半角公式

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{1}{2}\alpha}{1+\tan^2\frac{1}{2}\alpha},$$

带入 $\alpha=2\alpha$ 即可知

$$f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

将 $g(x)$ 化简为有理多项式的形式. 考虑差角公式显然有

$$g(x)=\frac{1-x}{1+x}.$$

原方程即可化为

$$5\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}.$$

将两倍角公式代入, 考虑同角三角比的关系, 有

$$\cos x=\pm\frac{1}{2},$$

即

$$x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi, \frac{2\pi}{3}+k\pi\right\}.$$

Section 2 解答题

11. 以 $a=10, A=\dfrac{\pi}{3}$ 和一个给定的 b 作为一组条件, 当该三角形

(1) 有唯一解;

(2) 有两解;

(3) 无解;

求 b 的取值范围.
解析. 余弦定理. 二次函数的零点.
由余弦定理显然有

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

整理, 得

$$c^2 - bc + b^2 - 100 = 0, \Delta = b^2 - 4b^2 + 400 = -3b^2 + 400.$$

二次函数 $f(c) = c^2 - bc + b^2 - 100$ 的对称轴为直线 $x = \dfrac{b}{2} > 0$, $f(0) = b^2 - 100$.

(1) 有唯一解 $\Leftrightarrow \Delta = 0$ or $f(0) \le 0$ iff $b \in \left\{\dfrac{20\sqrt{3}}{3}\right\} \cup (0, 10]$.

(2) 有两解 $\Leftrightarrow \Delta > 0$ and $f(0) > 0$ iff $b \in \left(10, \dfrac{20\sqrt{3}}{3}\right)$.

(3) 无解 $\Leftrightarrow \Delta < 0$ iff $b \in \left(\dfrac{20\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

12. 若关于 x 的方程 $\sin 2x + \cos 2x - 2\sin^2 x = \left(\dfrac{1}{5}\right)^a - 1$ 有解, 求 a 的取值范围.
解析. 两倍角公式. 可化简为代数不等式的超越不等式.
整理, 原方程有解当且仅当方程

$$\sin 2x + 2\cos 2x = \left(\frac{1}{5}\right)^a$$

有解,

$$\begin{aligned}\sum_{\sin 2x + 2\cos 2x = \left(\frac{1}{5}\right)^a} > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^a &\in R(f)|_{f(x)=\sin 2x + \cos 2x} = R(g)|_{g(x)=\sin x + 2\cos x = \sqrt{5}\sin(x+\arctan 2)} \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^a &\in \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right] \\ \Rightarrow a &\in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right).\end{aligned}$$

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = \sqrt{7}, b = 3, \sin A + \sqrt{7}\sin B = 2\sqrt{3}$, 求 A 的大小. 若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 求 $S_{\triangle ABC}$.
解析. 正余弦定理, 三角形面积公式.

$$\begin{aligned}\triangle ABC &\Rightarrow \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\\ &\Rightarrow \sqrt{7}\sin B=3\sin A\\ &\Rightarrow \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\Rightarrow A\in\left\{\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right\}.\end{aligned}$$

注意到 $a=\sqrt{7}<b=3$, 由大边对大角有 $A=\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}\triangle ABC &\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ &\Rightarrow c^2-3c+2=0\\ &\Rightarrow c\in\{1,2\}.\end{aligned}$$

考虑 $c=1,\cos B=-\frac{1}{2\sqrt{7}}<0$ 符合题意.
考虑 $c=2,\cos B=\frac{1}{2\sqrt{7}}>0$ 不符题意, 舍去.
于是 $c=1$,

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}bc\sin A\\ &=\frac{1}{2}\times 3\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &=\frac{3\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

14. $\triangle ABC$ 中 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{2}}{4}ab\sin 2C$, 求该三角形面积的最大值.
解析. 三角形面积公式, 半角公式, 诱导公式, 和差化积公式. 基本不等式.

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{2}}{4}ab\sin 2C &\Rightarrow 2\sin C=\sqrt{2}\sin 2C=2\sqrt{2}\sin C\cos C\\ &\Rightarrow \cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\Rightarrow C=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

由正弦定理及条件有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=1\Rightarrow a=\sin A,b=\sin B.$$

$$\begin{aligned}
\max S_{\triangle ABC} &= \max\left(\frac{1}{2}ab\sin C\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\max(ab) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\max(\sin A\sin B) \\
&\le \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{(\sin A+\sin B)^2}{4} && \text{iff } A=B \text{ or } A+B=\pi \\
&= \frac{\sqrt{2}}{16}\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2 \\
&\le \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sin\frac{A+B}{2}\right)^2 && \text{iff } A=B \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1-\cos(A+B)}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}(1+\cos C) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{8}.
\end{aligned}$$

Section 3 附加题

15. 若 $\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sec\beta+\cos\frac{\alpha}{2}\sec\beta=0$, $\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\tan\beta-\sin\frac{\alpha}{2}\tan\beta=0$, 求 $\sin\alpha$.
解析. 同角三角比.

$$\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sec\beta+\cos\frac{\alpha}{2}\sec\beta=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sec\beta\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)=0,$$

$$\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\tan\beta-\sin\frac{\alpha}{2}\tan\beta=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\tan\beta\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)=0,$$

相减, 有

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sqrt{2}+\sec\beta-\tan\beta\right)=0,$$

故有

$$\tan\beta-\sec\beta=\sqrt{2} \text{ or } \sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}.$$

考虑 $\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}$, 等式成立 iff $\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}=0\Rightarrow\alpha\in\emptyset$.
故有 $\tan\beta-\sec\beta=\sqrt{2}$. 又考虑到 $\tan^2\beta-\sec^2\beta=(\tan\beta+\sec\beta)(\tan\beta-\sec\beta)=-1$, 可得出

$$\tan\beta+\sec\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故有

$$\tan\beta=\frac{\sqrt{2}}{4},\sec\beta=-\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

代入, 有 $3\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}=0$, 解得

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\sqrt{10}}{10},\cos\frac{\alpha}{2}=\mp\frac{\sqrt{10}}{10},$$

于是

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{5}.$$

Section 4 特别致谢

MathxStudio/LaTeX-Templates: 提供排版模版的模版.