220511 向量 题目选解

Eason S.

Contents

Section 1 填空题

Problem 1.1

设 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{b}$ 的数量积为 -2, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的数量投影为?.

Solution to Problem 1.1

-2. 利用 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{a}\cos\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$ (向量的数量积与向量的数量投影之间的联系) [4].

Problem 1.2

平面直角坐标系中 O 为坐标原点, $M(3,4), B(3,1), \overrightarrow{AC} = (-1,1)$, 且 $\overrightarrow{OM}$ 为 $\overrightarrow{AB}$ 的位置向量, 则点 C 的坐标为?.

Solution to Problem 1.2

$(-1,-2)$. 向量的坐标表示.

Problem 1.3

与非零向量 $\vec{a}=(m,n)$ 垂直且模长为 2 的向量可表示为? (用坐标表示).

Solution to Problem 1.3

$\left(\pm\frac{2n}{\sqrt{m^2+n^2}},\mp\frac{2m}{\sqrt{m^2+n^2}}\right)=\left(\pm\frac{2n\sqrt{m^2+n^2}}{m^2+n^2},\mp\frac{2m\sqrt{m^2+n^2}}{m^2+n^2}\right)$. 向量的坐标表示下的内积; 向量的内积的取值范围与向量之间位置关系的联系.

Problem 1.4

$\frac{x_1}{y_1}+\frac{y_2}{x_2}=0$ 是 $\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}\right)\perp\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}\right)$ 的? 条件. **作者认为此处应该补充条件: $\vec{i},\vec{j}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的一个标准正交基更为合适.** [3]

Solution to Problem 1.4

充分非必要. 向量的内积的取值范围与向量之间位置关系的联系; 向量的内积对向量的线性组合的分配律.

Problem 1.5

设 $|\vec{a}|=3,\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=9$, 则 $\left|\vec{b}\right|$ 的取值范围为?.

Solution to Problem 1.5

$[5,11]$**.** 向量的三角不等式 $\left||\vec{a}|-\left|\vec{b}\right|\right|\leq\left|\vec{a}\pm\vec{b}\right|\leq\left||\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|\right|$.

Problem 1.6

$\vec{a}=(3m-2,1),\vec{b}=(m^2+1,2)$, 若 $9\vec{a}+3\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 共线, 则实数 m 的值为?.

Solution to Problem 1.6

1 or 5. 向量的坐标表示下的共线.

Problem 1.7

已知 A,B,C 坐标依次为 $(1,2),(2,3),(5,10)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为?.

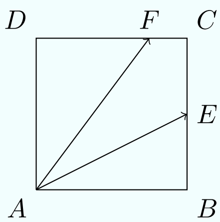
Solution to Problem 1.7

2. 行列式视角下的三角形面积公式. [1]

$$
\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| \\
&= \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| \\
&\xlongequal{c_3-2c_1} \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{matrix}\right\| \\
&\xlongequal[\text{按}c_3\text{展开}]{c_3\div(-4)} \frac{1}{2}\left|(-4)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right| \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

Problem 1.8

如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, E 为边 BC 的中点, F 为边 CD 上一点, 若 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}^2$, 则 $\left|\overrightarrow{AF}\right|$ 为?.

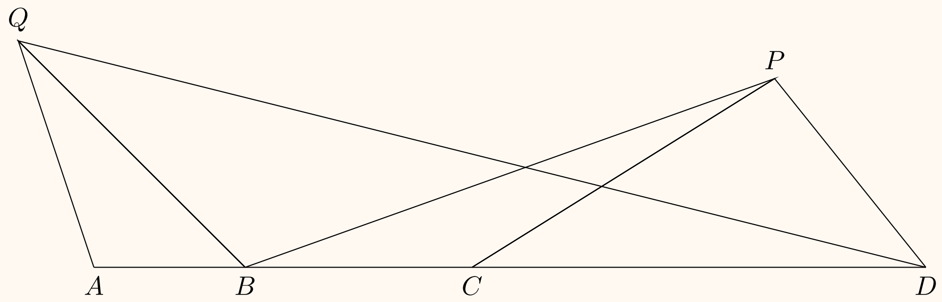


Solution to Problem 1.8

$\frac{5}{4}$. 向量的内积对向量的线性组合的分配律; 向量的内积的取值范围与向量之间位置关系的联系; 一线三等角.

Problem 1.9

如图, A,B,C,D 四点共线, P,Q 为直线外两点, 已知 $AB:BC=2:3$, $\overrightarrow{PB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PD}$, 若 $\overrightarrow{QB}=\lambda\overrightarrow{QA}+\mu\overrightarrow{QD}$, 则 $\lambda-\mu$ 的值为?.



Solution to Problem 1.9

$\frac{7}{11}$. 向量的线性组合.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}&\Rightarrow\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PD}\\&\Rightarrow\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}+2\overrightarrow{CB}\\&\Rightarrow\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{CB}\\&\Rightarrow AB:BC:CD=2:3:6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QB}&=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AB}\\&=\lambda\overrightarrow{QA}+\mu\overrightarrow{QD}\\&=\lambda\overrightarrow{QA}+\mu\left(\overrightarrow{QA}+\frac{11}{2}\overrightarrow{AB}\right)\end{aligned}$$

于是有

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda+\mu&=&1,\\\frac{11}{2}\mu&=&1,\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\lambda&=&\frac{9}{11},\\\mu&=&\frac{2}{11}.\end{array}\right.$$

Problem 1.10

以下命题中, 所有真命题的序号为?.

(1) 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 可作为平面向量的一组基, 则 $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$.

(2) 若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 非共线, 则平面上任意向量 $\vec{c}$ 关于 $2\vec{a}+\vec{b}$ 和 $\vec{a}+\vec{b}$ 的分解均存在且唯一.

(3) 若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$, 则 $\vec{a}+\vec{b}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ 的充要条件为 $\lambda=\mu=1$.

(4) 若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$, 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{a},\vec{b}$ 均不共线, 则 $\vec{c}$ 关于 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的分解不存在.

Solution to Problem 1.10

(1) (2) (4). 向量的线性组合.

(1) 在同构于 $\mathbb{R}^n$ 的向量空间 (即 n 维向量空间) 中的一组基 $A : \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ 必然有 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n \neq \mathbf{0}$ (因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$). 本题中, $\vec{a}, \vec{b}$ 为平面 $\mathbb{R}^2$ (即 2 维向量空间) 上的一组基, 则必然有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2$, 有 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$. [4]

(2) 显然有 $(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \sim (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \sim (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, 即向量组 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 与向量组 $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 等价. 同时有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2 = \mathrm{r}(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ (非共线, 线性无关), 则向量组 $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 是线性空间 $\mathbb{R}^2$ 上的一个基. [2]

(3) 考虑 $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$, 则 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \vec{a} + \vec{b} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$.

(4) 假设 $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 由已知有 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 线性相关, 则必然有 $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 线性表示, 继而有 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性相关, 与条件矛盾.

Section 2 解答题

Problem 2.1

设 $\vec{a}=(3,-4),\vec{b}=(2,-1)$,

(1) 求 $\vec{a}$ 与 $2\vec{b}-\vec{a}$ 的夹角.

(2) 求 $\vec{a}$ 在 $\left(2\vec{b}-\vec{a}\right)$ 方向上的投影向量 (用坐标表示).

Solution to Problem 2.1

$\pi-\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$**;** $(-1,-2)$**.** 向量的投影. [5]

Problem 2.2

同一平面上的 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=2\sqrt{7}$, 且有 $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=2,|\vec{c}|=6,\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{2\pi}{3}$, 选取适当的方式建立直角坐标系, 求 $\left\langle\vec{b},\vec{c}\right\rangle$.

Solution to Problem 2.2

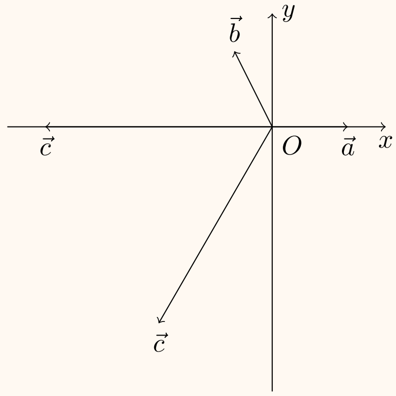
$\frac{\pi}{3}$ **or** $\frac{2\pi}{3}$**.** 向量的坐标表示. [3]

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2&=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}\\&=4+4+36+2\times2\times2\times\cos\frac{2\pi}{3}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c}\\&=40+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c},\end{aligned}$$

于是有

$$2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c}=-12.$$

设 $\vec{a}=(2,0),\vec{b}=\left(-1,\sqrt{3}\right),\vec{c}=(x,y)$, 建立如图的坐标系, 有



$$\left\{\begin{array}{rcl} 2(-x+\sqrt{3}y)+2(2x) & = & -12 \\ x^2+y^2 & = & 36 \end{array}\right. \Rightarrow (x,y)=(-6,0) \text{ or } \left(3,-3\sqrt{3}\right) \Rightarrow \left\langle \vec{b},\vec{c}\right\rangle = \frac{\pi}{3} \text{ or } \frac{2\pi}{3}.$$

Problem 2.3

记 $\triangle ABC$ 的重心为 G, D,E 分别为射线 AB,AC 上的动点 (不包括 A 点本身), 满足 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}=\mu\overrightarrow{AC}$, 且 G 恒位于线段 DE 上,

(1) 若 $\triangle ABC$ 位于平面直角坐标系中, $\mu=\dfrac{3}{4}, A(1,4), B(-1,-1), C(5,0)$, 求:

  (1.1) 点 C 分 $\overrightarrow{AE}$ 所成的比;

  (1.2) 点 E 的坐标;

  (1.3) $\triangle ABC$ 垂心 H 的坐标.

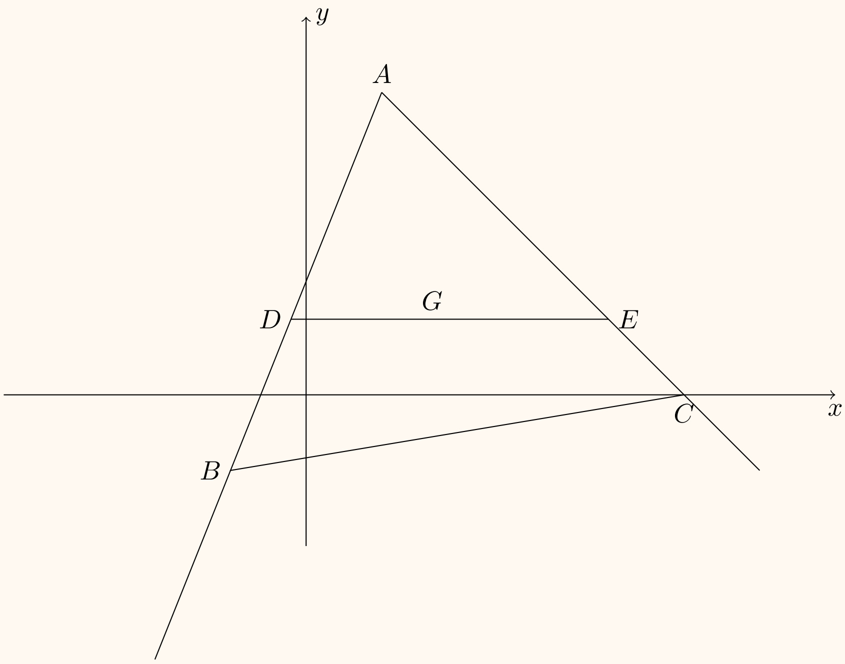
(2) 将 μ 表示为 λ 的函数 $f(\lambda)$, 并写出其定义域.

(3) 求 $2\lambda+\mu$ 的最小值.

Solution to Problem 2.3

$-4, E(4,1), H\left(\dfrac{10}{7},\dfrac{10}{7}\right)$; $\mu=f(\lambda)=\dfrac{\lambda}{3\lambda-1}, \lambda\in\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$; $\min\left(2\lambda+\mu\right)=\dfrac{2\sqrt{2}+3}{3}$. 向量综合. [3]

(1) 显然有 $G=\left(\frac{5}{3},1\right)$,



又 $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}=(4,-4)$, 故 $\overrightarrow{AE}=(3,-3)$, $E(4,1)$.

(1.1) 令 $\overrightarrow{AC}=p\overrightarrow{CE}$ 有 $p=-4$.

(1.2) $E(4,1)$.

(1.3) 设 $H(x,y)$, 由 $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ 有 $(x-1,y-4)\cdot(6,1)=0$; 由 $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$ 有 $(x+1,y+1)\cdot(4,-4)=0$. 解得 $H\left(\frac{10}{7},\frac{10}{7}\right)$.

(2) 显然有

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3\lambda}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3\mu}\overrightarrow{AC},$$

又 $\frac{1}{3\lambda}+\frac{1}{3\mu}=1$, 可知

$$\mu+\lambda=3\lambda\mu,$$

解得

$$\mu\left(\lambda\right)=f\left(\lambda\right)=\frac{\lambda}{3\lambda-1},\lambda\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right).$$

(3)

$$\begin{aligned}\min\left(2\lambda+\mu\right)&=\min\left(2\lambda+\frac{\lambda}{3\lambda-1}\right)\\&\xlongequal{t=3\lambda-1}\min\left(\frac{2t}{3}+\frac{1}{3t}+1\right)\\&\geq\frac{2\sqrt{2}+3}{3},\end{aligned}$$

等号成立 iff. $\dfrac{2t}{3}=\dfrac{1}{3t}$ iff. $2t^2=1$ iff. $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

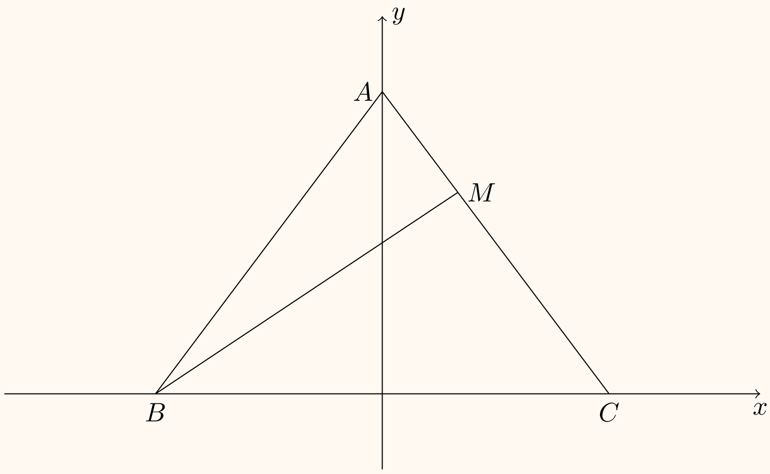
Section 3 附加题

Problem 3.1

在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=5, BC=6, M$ 是边 AC 上距 A 较近的三等分点, 试研究在线段 BM 上是否存在点 P, 满足 $PC\perp BM$? 若存在, 求出 BP 的长度; 若不存在, 则说明理由.

Solution to Problem 3.1

不存在. 向量综合.[5] [3]



显然有 $\overrightarrow{AC}=(3,-4)$, 可知 $\overrightarrow{AM}=\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$, 即 $M\left(1,\dfrac{8}{3}\right)$, 于是有 $\overrightarrow{BM}=\left(4,\dfrac{8}{3}\right)$.

设 $P=\left(x,\dfrac{2}{3}x+2\right), x\in(-3,1)$, 可知 $\overrightarrow{PC}=\left(3-x,-\dfrac{2}{3}x-2\right)$.

注意到 $PC\perp BM$, 有 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{BM}=4(3-x)+\dfrac{8}{3}\left(-\dfrac{2}{3}x-2\right)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{5}\notin x\in(-3,1)$

References

[1] Cuemath. Area of triangle in determinant form, May 2022.

[2] Steven J. Leon. *Linear Algebra with Applications*. Pearson, Pearson Education Limited, Edinburgh Gate, Harlow, Essex CM20 2JE, England, ninth edition, 2015.

[3] OwenXu. 220511 测验作答. 未批改, May 2022.

[4] 同济大学数学系. *工程数学线性代数*. 高等教育出版社, 北京市西城区德外大街 4 号, sixth edition, June 2014.

[5] 鸭鸭. 220511 测验作答. 未批改, May 2022.