一些数学练习题（高一期中知识点）

By 小E

涉及知识点：集合、不等式、函数

1. 若关于x的不等式$x^2+36+|x^3-6x^2|\geq ax$在$[2,10]$上恒成立，则a的取值范围是？.

   将x移至不等式左侧，得

   $$\frac{x^2+36+|x^3-6x^2|}{x}\geq a$$

   在$[2,10]$上恒成立，即

   $$a\in\left(-\infty,\min_{x\in[2,10]}\frac{x^2+36+|x^3-6x^2|}{x}\right],$$

   即

   $$a\in\left(-\infty,\min_{x\in[2,10]}\left(x+\frac{36}{x}+|x^2-6x|\right)\right].$$

   考场做法：使用$\mathrm{Casio\ fx\text{-}991CN\ X}$中文版的**7:表格功能**，输入$f(x)=x+\dfrac{36}{x}+|x^2-6x|,g(x)=x$，表格范围开始值$2$，终止值$10$，步长$1$，得到以下数据：

	x	$f(x)$	$g(x)$
1	2	28	2
2	3	24	3
3	4	21	4
4	5	17.2	5
5	6	12	6
6	7	19.142	7
7	8	28.5	8
8	9	40	9
9	10	53.6	10

   猜测在$x\in[4,7]$时取到最小值. 输入表格范围开始值4，终止值7，步长0.25，得到以下数据：

	x	$f(x)$	$g(x)$
1	4	21	4
2	4.25	20.158	4.25
3	4.5	19.25	4.5
4	4.75	18.266	4.75
5	5	17.2	5
6	5.25	16.044	5.25
7	5.5	14.795	5.5
8	5.75	13.448	5.75
9	6	12	6
10	6.25	13.572	6.25
11	6.5	15.288	6.5
12	6.75	17.145	6.75
13	7	19.142	7

因此考虑 $\min\limits_{x\in[2,10]} f(x) = f(5) = 12,$ 即$a \in (-\infty, 12]$.

严格做法：

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{36}{x} + |x^2 - 6x| \\ &= x + \frac{36}{x} + |x(x-6)| \\ &\geq 2\sqrt{x \cdot \frac{36}{x}} + 0. && \text{基本不等式 及 绝对值基本性质} \end{aligned}$$

等号成立条件：$x = \dfrac{36}{x}$ and $x(x-6) = 0$即$x = 6$.

于是 $\min\limits_{x\in[2,10]} f(x) = f(5) = 12,$ 即$a \in (-\infty, 12]$.

2. 若$a, b \in \mathbb{R}$，且$4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$，则$a^2 - ab + b^2$的最大值与最小值之和是？.

   不等式：由基本不等式，有

$$-(a^2 + b^2) \leq 2ab \leq (a^2 + b^2),$$

即

$$-\frac{a^2 + b^2}{2} \leq -ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2},$$

有

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \leq a^2 - ab + b^2 \leq \frac{3(a^2 + b^2)}{2},$$

即

$$a^2-ab+b^2\in\left[2,\frac{27}{2}\right].$$

左侧等号成立条件：$a=b$，即$a=b=\pm\sqrt{2}$取最小值2；右侧等号成立条件：$a=-b$，即$a=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2},b=\mp\frac{3\sqrt{2}}{2}$取最大值$\frac{27}{2}$.

故两者之和为$\frac{31}{2}$.

三角变换：设$a=r\cos\alpha,b=r\sin\alpha\ (r>0,若r<0可令\alpha=\pi+\alpha,r=-r)$，由$4\le a^2+b^2=r^2\le 9$有$2\le r\le 3$.

$$\begin{aligned}a^2-ab+b^2=a^2+b^2-ab&=r^2\cos^2\alpha+r^2\sin^2\alpha+r^2\sin\alpha\cos\alpha\\&=r^2\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right).\end{aligned}$$

$$\sin x\in[-1,1]\Rightarrow\sin 2\alpha\in[-1,1]\Rightarrow\frac{1}{2}\sin 2\alpha\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\Rightarrow 1+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right].$$

于是有

$$a^2-ab+b^2\in\left[2,\frac{27}{2}\right].$$

左侧等号成立条件：$r=2,\alpha\in\left\{x|x=\frac{3}{4}\pi+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$即$a=b=\pm\sqrt{2}$取最小值2；右侧等号成立条件：$r=3,\alpha\in\left\{x|x=\frac{1}{4}\pi+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$即$a=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2},b=\mp\frac{3\sqrt{2}}{2}$取最大值$\frac{27}{2}$.

3. 已知$a,b,c\in\mathbb{R},a>b>c$.
   1. 求证：

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}>0;$$

   由$a>b>c$有$a-b>0,b-c>0,a-c>0$.

   观察到$\frac{1}{c-a}$为“相反”项，考虑移项至等式另一侧，即证：

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}>\frac{1}{a-c}.$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}&=\frac{(a-c)\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)}{a-c}\\&=\frac{[(a-b)+(b-c)]\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)}{a-c}\\&=1+1+\frac{a-b}{b-c}+\frac{b-c}{a-b}\\&\ge\frac{2+2\sqrt{\frac{a-b}{b-c}\cdot\frac{b-c}{a-b}}}{a-c}\\&=\frac{4}{a-c}\\&>\frac{1}{a-c}.\end{aligned}$$

   于是

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}>\frac{1}{a-c},$$

原不等式成立.

2. 现推广：把$\dfrac{1}{c-a}$的分子改为另一个大于1的正整数p，试写出一个p，并证明之；

   由1中的推导，$p<4$即可，即$p\in\{2,3\}$，证略.

3. 现换个角度推广：正整数m,n,p满足什么条件时，不等式

$$\frac{m}{a-b}+\frac{n}{b-c}+\frac{p}{c-a}>0$$

   对任意$a>b>c$恒成立，试写出条件并证明之.

   原不等式等价于

$$\frac{m}{a-b}+\frac{n}{b-c}>\frac{p}{a-c}.$$

$$\begin{aligned}\frac{m}{a-b}+\frac{n}{b-c}&=\frac{(a-c)\left(\frac{m}{a-b}+\frac{n}{b-c}\right)}{a-c}\\&=\frac{[(a-b)+(b-c)]\left(\frac{m}{a-b}+\frac{n}{b-c}\right)}{a-c}\\&=m+n+\frac{m(a-b)}{b-c}+\frac{n(b-c)}{a-b}\\&\geq\frac{m+n+2\sqrt{\frac{m(a-b)}{b-c}\cdot\frac{n(b-c)}{a-b}}}{a-c}\\&=\frac{m+n+\sqrt{mn}}{a-c}\\&>\frac{p}{a-c}.\end{aligned}$$

   等号成立条件：$\dfrac{m(a-b)}{b-c}=\dfrac{n(b-c)}{a-b}$即$m(a-b)^2=n(b-c)^2$即$\sqrt{m}(a-b)=\sqrt{n}(b-c)$.

   即$p<m+n+\sqrt{mn}$，即$\sqrt{p}<\sqrt{m}+\sqrt{n}$.

4. 对于正整数集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},n\in\mathbb{N},n\geq 3$，如果去掉其中任意一个元素$a_i(i=1,2,\cdots,n)$之后，剩余的所有元素组成的集合都能分为两个交集为空集的集合，且这两个集合的所有元素之和祖等，就称集合A为“和谐集”.

   1. 判断集合$\{1,2,3,4,5\}$是否为“和谐集”，并说明理由；
      否. 去掉元素2时，剩余元素为$1,3,4,5$，和为13，不能分为两个交集为空集且所有元素之和相等的集合，即集合$\{1,2,3,4,5\}$不是“和谐集”.

   2. 求证：集合$\{1,3,5,7,9,11,13\}$是“和谐集”；
      设$A=\{1,3,5,7,9,11,13\}$,

      去掉元素1，有$3+5+7+9=11+13$；

      去掉元素3，有$1+9+13=5+7+11$；

      去掉元素5，有$9+13=1+3+7+11$；

      去掉元素7，有$1+9+11=3+5+13$；

      去掉元素9，有$1+3+5+11=7+13$；

      去掉元素11，有$3+7+9=1+5+13$；

      去掉元素13，有$1+3+5+9=7+11$.

      故集合$\{1,3,5,7,9,11,13\}$是“和谐集”.

   3. 求证：若集合A是“和谐集”，则集合A中元素个数为奇效.

      设“和谐集”$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$M=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$,

      由题可知，$\forall i=1,2,\cdots,n:M-a_i$均为偶数.

因此$a_1, a_2, \cdots, a_n$的奇偶性相同.

分两类讨论.

若M为奇数，则$a_1, a_2, \cdots, a_n$均为奇数，又$M = \sum_{i=1}^{n} a_i$，有n为奇数.

若M为偶数，则$a_1, a_2, \cdots, a_n$均为偶数. 考虑$a_i = 2b_i$，则集合$A' = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$也是“和谐集”.重复该操作有限次即可得到$M$为奇数.

故集合A中元素个数为奇数.

5. 设$a, b, c, d \in \mathbb{R}^+, a+b+c+d=4$，求证：

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a} \geq 4+(a-b)^2.$$

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a} &= \frac{a^2}{b}+\left(\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a}\right) \\
&\geq \frac{a^2}{b}+\frac{(b+c+d)^2}{c+d+a} && \text{Cauchy-Schwarz不等式} \\
&= \frac{a^2}{b}+\frac{(4-a)^2}{4-b} \\
&= \frac{a^2(4-b)+b(4-a)^2}{b(4-b)} \\
&= \frac{4a^2+16b-8ab}{b(4-b)} \\
&= \frac{(16b-4b^2)+(4a^2-8ab+4b^2)}{b(4-b)} \\
&= 4+\frac{4(a-b)^2}{b(4-b)}.
\end{aligned}$$

$$b(4-b) \leq \left(\frac{b+(4-b)}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow \frac{4}{b(4-b)} \geq 1 \Rightarrow \frac{4(a-b)^2}{b(4-b)} \geq (a-b)^2,$$

即原式$\geq 4+(a-b)^2$，得证.