8 综合练习（简单题）

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 11 月 03 日

(1) 若关于 y 的不等式 $(c+1)y^2+(c+1)y-c\leq 0$ 无解, 则实数 c 的取值范围是 $\cancel{\left(-1,-\frac{1}{5}\right)}$ $\left[-1,-\frac{1}{5}\right)$.

注意考虑二次项系数.

(2) 若正实数 a,b 满足 $2a+b=2$, 则 $\dfrac{2}{3a+b}+\dfrac{1}{b+2}$ 的最小值为 $\dfrac{9}{8}$.

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3a+b}+\frac{1}{b+2}\\
=\ &\frac{2}{a+2}+\frac{1}{b+2}\\
=\ &\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}\\
\leq\ &\frac{9}{a+2+a+2+b+2}\\
=\ &\frac{9}{8},
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a+2=a+2=b+2>0$ 且 $2a+b=2$ 即 $a=b=\dfrac{2}{3}$.

(3) 已知不等式 $p:|2x-4|-|2x+1|\geq a^2+6a$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 时恒成立.

(1) 求实数 a 的取值范围. $[-5,-1]$.

(2) 当 $a=-1$ 时, 记使不等式 p 能够取得等号的全体实数 x 构成的集合为 A. 若 $b\in A$ 是 $y>\dfrac{1}{3}$ 时, $\dfrac{6by^2-(4b-3)y+2b-1}{3y-1}>m$ 恒成立的充分条件, 求实数 m 的取值范围.

$a=-1\Rightarrow A=\{x||2x-4|-|2x+1|=a^2+6a=-5\}=[2,+\infty)$.

于是即为 $\forall b\in[2,+\infty)\forall y\in\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right):\dfrac{6by^2-(4b-3)y+2b-1}{3y-1}>m$,

即为 $\forall b \in [2,+\infty) \forall y \in \left(\dfrac{1}{3},+\infty\right) : (6y^2-4y+4)b+(3y-3my-1+m)>0$,

即为 $\forall y \in \left(\dfrac{1}{3},+\infty\right) :$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6y^2-4y+2 & > & 0 \\ -\dfrac{3y-3my-1+m}{6y^2-4y+2} & < & 2 \end{array}\right.,$$

即为 $\forall y \in \left(\dfrac{1}{3},+\infty\right) : 12y^2-(3m+5)y+(m+3)>0$,

于是有

$$\Delta<0 \text{ or } \left\{\begin{array}{rcl} \Delta & \geq & 0 \\ 12\cdot\dfrac{1}{9}-(3m+5)\cdot\dfrac{1}{3}+m+3 & \geq & 0 \\ \dfrac{3m+5}{24} & \leq & \dfrac{1}{3} \end{array}\right.,$$

于是有 $m \in \left(-\infty,\dfrac{3+8\sqrt{2}}{3}\right]$.

注意恒成立的 Δ 分类取等问题.