

220511 向量 题目选解

Eason S.

Contents

1 填空题	1
2 解答题	6
3 附加题	10

Section 1 填空题

Problem 1.1

设 \vec{a} 与单位向量 \vec{b} 的数量积为 -2 , 则 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上的数量投影为?.

Solution to Problem 1.1

-2 . 利用 $\text{Prj}_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{a} \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ (向量的数量积与向量的数量投影之间的联系) [4].

Problem 1.2

平面直角坐标系中 O 为坐标原点, $M(3, 4), B(3, 1), \overrightarrow{AC} = (-1, 1)$, 且 \overrightarrow{OM} 为 \overrightarrow{AB} 的位置向量, 则点 C 的坐标为?.

Solution to Problem 1.2

$(-1, -2)$. 向量的坐标表示.

Problem 1.3

与非零向量 $\vec{a} = (m, n)$ 垂直且模长为 2 的向量可表示为? (用坐标表示).

Solution to Problem 1.3

$\left(\pm \frac{2n}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \mp \frac{2m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \right) = \left(\pm \frac{2n\sqrt{m^2 + n^2}}{m^2 + n^2}, \mp \frac{2m\sqrt{m^2 + n^2}}{m^2 + n^2} \right)$. 向量的坐标表示下的内积; 向量的内积的取值范围与向量之间位置关系的联系.

Problem 1.4

$\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_2}{x_2} = 0$ 是 $(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) \perp (x_2\vec{i} + y_2\vec{j})$ 的? 条件. 作者认为此处应该补充条件: \vec{i}, \vec{j} 为 \mathbb{R}^2 上的一个标准正交基更为合适. [3]

Solution to Problem 1.4

充分非必要. 向量的内积的取值范围与向量之间位置关系的联系; 向量的内积对向量的线性组合的分配律.

Problem 1.5

设 $|\vec{a}| = 3, |\vec{a} - \vec{b}| = 9$, 则 $|\vec{b}|$ 的取值范围为?.

Solution to Problem 1.5

[5, 11]. 向量的三角不等式 $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} \pm \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Problem 1.6

$\vec{a} = (3m - 2, 1), \vec{b} = (m^2 + 1, 2)$, 若 $9\vec{a} + 3\vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 共线, 则实数 m 的值为?.

Solution to Problem 1.6

1 or 5. 向量的坐标表示下的共线.

Problem 1.7

已知 A, B, C 坐标依次为 $(1, 2), (2, 3), (5, 10)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为?.

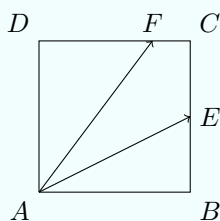
Solution to Problem 1.7

2. 行列式视角下的三角形面积公式. [1]

$$\begin{aligned}
 S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\underline{\underline{c_3 - 2c_1}}} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow[\text{按 } c_3 \text{ 展开}]{\underline{\underline{c_3 \div (-4)}}} \frac{1}{2} (-4) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

Problem 1.8

如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, E 为边 BC 的中点, F 为边 CD 上一点, 若 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}^2$, 则 $|\overrightarrow{AF}|$ 为?.

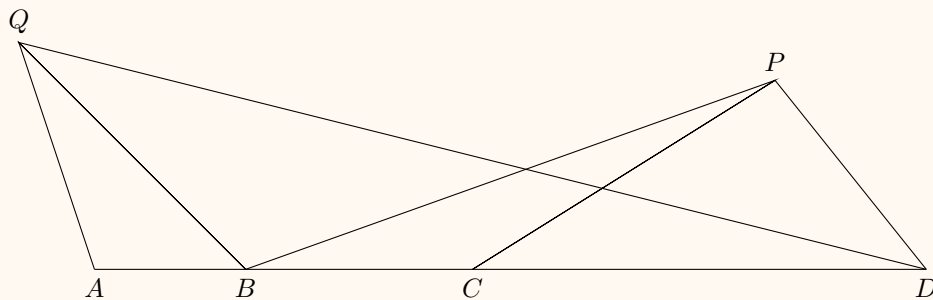


Solution to Problem 1.8

$\frac{5}{4}$. 向量的内积对向量的线性组合的分配律; 向量的内积的取值范围与向量之间位置关系的联系; 一线三等角.

Problem 1.9

如图, A, B, C, D 四点共线, P, Q 为直线外两点, 已知 $AB : BC = 2 : 3$, $\overrightarrow{PB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PD}$, 若 $\overrightarrow{QB} = \lambda\overrightarrow{QA} + \mu\overrightarrow{QD}$, 则 $\lambda - \mu$ 的值为?.



Solution to Problem 1.9

$\frac{7}{11}$. 向量的线性组合.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PB} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{PC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB} \Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PD} \\
 &\Rightarrow \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD} + 2\overrightarrow{CB} \\
 &\Rightarrow \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{CB} \\
 &\Rightarrow AB : BC : CD = 2 : 3 : 6.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{QB} &= \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AB} \\
 &= \lambda\overrightarrow{QA} + \mu\overrightarrow{QD} \\
 &= \lambda\overrightarrow{QA} + \mu\left(\overrightarrow{QA} + \frac{11}{2}\overrightarrow{AB}\right)
 \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1, \\ \frac{11}{2}\mu = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{9}{11}, \\ \mu = \frac{2}{11}. \end{cases}$$

Problem 1.10

以下命题中, 所有真命题的序号为?.

- (1) 若 \vec{a} 与 \vec{b} 可作为平面向量的一组基, 则 $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$.
- (2) 若 \vec{a} 和 \vec{b} 非共线, 则平面上任意向量 \vec{c} 关于 $2\vec{a} + \vec{b}$ 和 $\vec{a} + \vec{b}$ 的分解均存在且唯一.
- (3) 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\vec{a} + \vec{b} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ 的充要条件为 $\lambda = \mu = 1$.
- (4) 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 且 \vec{c} 与 \vec{a}, \vec{b} 均不共线, 则 \vec{c} 关于 \vec{a} 与 \vec{b} 的分解不存在.

Solution to Problem 1.10

(1) (2) (4). 向量的线性组合.

- (1) 在同构于 \mathbb{R}^n 的向量空间 (即 n 维向量空间) 中的一组基 $A: \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 必然有 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \neq \mathbf{0}$ (因为 $r(\mathbf{A}) = n$). 本题中, \vec{a}, \vec{b} 为平面 \mathbb{R}^2 (即 2 维向量空间) 上的一组基, 则必然有 $r(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2$, 有 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. [4]
- (2) 显然有 $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) \sim (\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) \sim (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, 即向量组 \mathbf{a}, \mathbf{b} 与向量组 $2\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}$ 等价. 同时有 $r(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2 = r(2\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b})$ (非共线, 线性无关), 则向量组 $2\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}$ 是线性空间 \mathbb{R}^2 上的一个基. [2]
- (3) 考虑 $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$, 则 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \vec{a} + \vec{b} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$.
- (4) 假设 $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 由已知有 \mathbf{a}, \mathbf{b} 线性相关, 则必然有 $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ 可由 \mathbf{a}, \mathbf{b} 线性表示, 继而有 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 线性相关, 与条件矛盾.

Section 2 解答题

Problem 2.1

设 $\vec{a} = (3, -4)$, $\vec{b} = (2, -1)$,

- (1) 求 \vec{a} 与 $2\vec{b} - \vec{a}$ 的夹角.
 (2) 求 \vec{a} 在 $(2\vec{b} - \vec{a})$ 方向上的投影向量 (用坐标表示).

Solution to Problem 2.1

$\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$; $(-1, -2)$. 向量的投影. [5]

Problem 2.2

同一平面上的 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 2\sqrt{7}$, 且有 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 6$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{2\pi}{3}$, 选取适当的方式建立直角坐标系, 求 $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

Solution to Problem 2.2

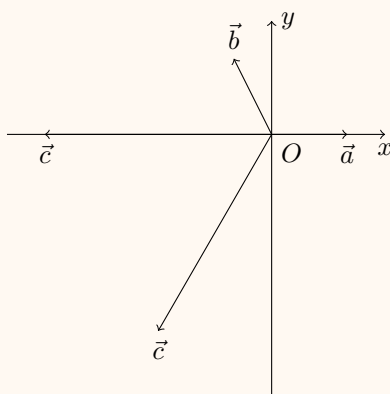
$\frac{\pi}{3}$ or $\frac{2\pi}{3}$. 向量的坐标表示. [3]

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 &= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= 4 + 4 + 36 + 2 \times 2 \times 2 \times \cos \frac{2\pi}{3} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= 40 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c}, \end{aligned}$$

于是有

$$2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} = -12.$$

设 $\vec{a} = (2, 0)$, $\vec{b} = (-1, \sqrt{3})$, $\vec{c} = (x, y)$, 建立如图的坐标系, 有



$$\begin{cases} 2(-x + \sqrt{3}y) + 2(2x) = -12 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-6, 0) \text{ or } (3, -3\sqrt{3}) \Rightarrow \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = \frac{\pi}{3} \text{ or } \frac{2\pi}{3}.$$

Problem 2.3

记 $\triangle ABC$ 的重心为 G , D, E 分别为射线 AB, AC 上的动点 (不包括 A 点本身), 满足 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \mu \overrightarrow{AC}$, 且 G 恒位于线段 DE 上,

(1) 若 $\triangle ABC$ 位于平面直角坐标系中, $\mu = \frac{3}{4}$, $A(1, 4)$, $B(-1, -1)$, $C(5, 0)$, 求:

(1.1) 点 C 分 \overrightarrow{AE} 所成的比;

(1.2) 点 E 的坐标;

(1.3) $\triangle ABC$ 垂心 H 的坐标.

(2) 将 μ 表示为 λ 的函数 $f(\lambda)$, 并写出其定义域.

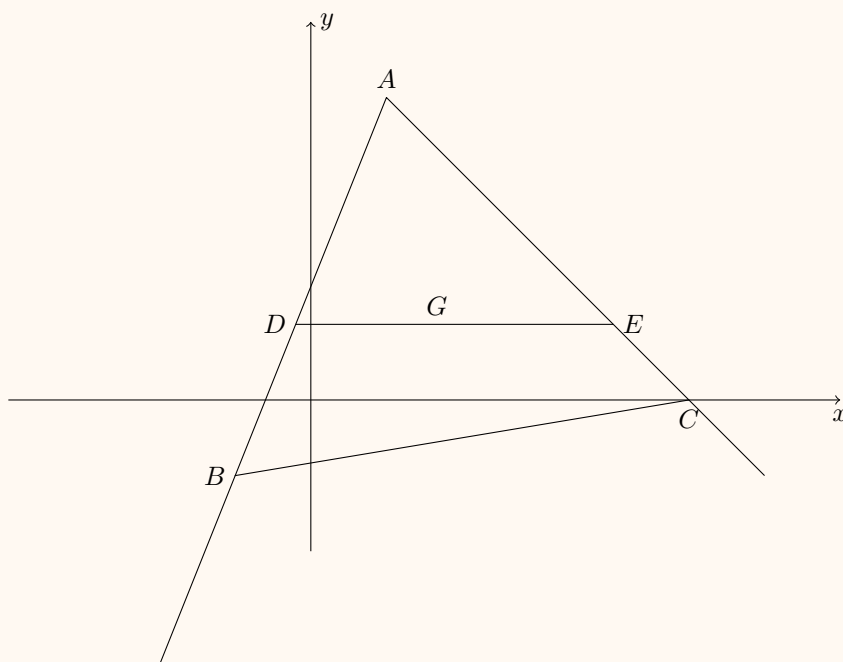
(3) 求 $2\lambda + \mu$ 的最小值.

Solution to Problem 2.3

$-4, E(4, 1), H\left(\frac{10}{7}, \frac{10}{7}\right); \mu = f(\lambda) = \frac{\lambda}{3\lambda - 1}, \lambda \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right); \min(2\lambda + \mu) = \frac{2\sqrt{2} + 3}{3}$. 向量综合.

[3]

(1) 显然有 $G = \left(\frac{5}{3}, 1\right)$,



又 $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} = (4, -4)$, 故 $\overrightarrow{AE} = (3, -3)$, $E(4, 1)$.

(1.1) 令 $\overrightarrow{AC} = p\overrightarrow{CE}$ 有 $p = 4$.

(1.2) $E(4, 1)$.

(1.3) 设 $H(x, y)$, 由 $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ 有 $(x-1, y-4) \cdot (6, 1) = 0$; 由 $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ 有 $(x+1, y+1) \cdot (4, -4) = 0$.
解得 $H\left(\frac{10}{7}, \frac{10}{7}\right)$.

(2) 显然有

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3\lambda}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3\mu}\overrightarrow{AC},$$

又 $\frac{1}{3\lambda} + \frac{1}{3\mu} = 1$, 可知

$$\mu + \lambda = 3\lambda\mu,$$

解得

$$\mu(\lambda) = f(\lambda) = \frac{\lambda}{3\lambda - 1}, \lambda \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right).$$

(3)

$$\begin{aligned} \min(2\lambda + \mu) &= \min\left(2\lambda + \frac{\lambda}{3\lambda - 1}\right) \\ &\stackrel{t=3\lambda-1}{=} \min\left(\frac{2t}{3} + \frac{1}{3t} + 1\right) \\ &\geq \frac{2\sqrt{2} + 3}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{等号成立} \iff \frac{2t}{3} = \frac{1}{3t} \iff 2t^2 = 1 \iff t = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

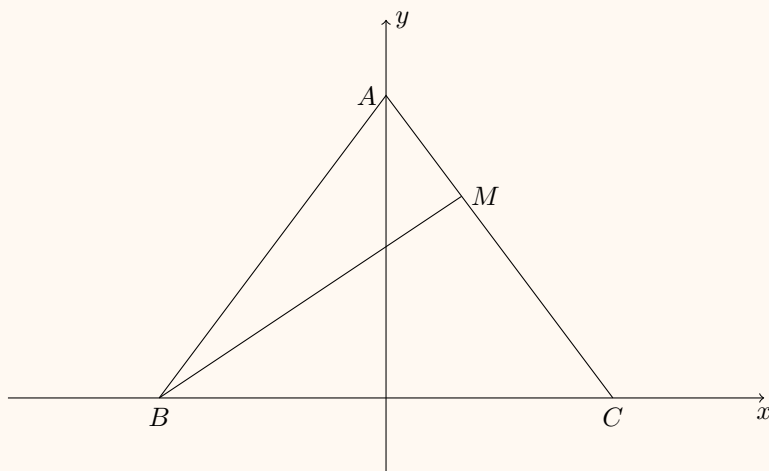
Section 3 附加题

Problem 3.1

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5, BC = 6$, M 是边 AC 上距 A 较近的三等分点, 试研究在线段 BM 上是否存在点 P , 满足 $PC \perp BM$? 若存在, 求出 BP 的长度; 若不存在, 则说明理由.

Solution to Problem 3.1

不存在. 向量综合.[5] [3]



显然有 $\overrightarrow{AC} = (3, -4)$, 可知 $\overrightarrow{AM} = \left(1, -\frac{4}{3}\right)$, 即 $M\left(1, \frac{8}{3}\right)$, 于是有 $\overrightarrow{BM} = \left(4, \frac{8}{3}\right)$.

设 $P = \left(x, \frac{2}{3}x + 2\right)$, $x \in (-3, 1)$, 可知 $\overrightarrow{PC} = \left(3 - x, -\frac{2}{3}x - 2\right)$.

注意到 $PC \perp BM$, 有 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{BM} = 4(3 - x) + \frac{8}{3} \left(-\frac{2}{3}x - 2\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5} \notin x \in (-3, 1)$

References

- [1] Cuemath. Area of triangle in determinant form, May 2022.
- [2] Steven J. Leon. *Linear Algebra with Applications*. Pearson, Pearson Education Limited, Edinburgh Gate, Harlow, Essex CM20 2JE, England, ninth edition, 2015.
- [3] OwenXu. 220511 测验作答. 未批改, May 2022.
- [4] 同济大学数学系. 工程数学线性代数. 高等教育出版社, 北京市西城区德外大街 4 号, sixth edition, June 2014.
- [5] 鸭鸭. 220511 测验作答. 未批改, May 2022.