12 函数综合（简单题）

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 12 月 8 日

1. 若函数 $f(x)=(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)+3$, 则它的严格单调递增区间为?.

   令 $g(x)=x^2-6x+3, h(x)=x^2-2x$, 则有 $f(x)=g(h(x))$.

   $h(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上严格减, 在 $[1,+\infty)$ 上严格增.

   $g(x)$ 在 $(-\infty,3]$ 上严格减, 在 $[3,+\infty)$ 上严格增.

   解方程 $h(x)=3$ 有 $x_1=3, x_2=-1$.

   故 $g(x)$ 在 $h(x)\in(-\infty,3]$ 即 $x\in[-1,3]$ 上严格减, 在 $h(x)\in[3,+\infty)$ 即 $x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$ 上严格增.

   故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上严格减, 在 $[-1,1]$ 上严格增, 在 $[1,3]$ 上严格减, 在 $[3,+\infty)$ 上严格增.

   故答案为 $[-1,1]$ 和 $[3,+\infty)$.

2. 已知 $f(x)=-x^2-2(t-1)x+3$, 当 $x\in[-1,3]$ 时, 则 $f(x)$ 的最大值 $M(t)=$?.

   对称轴为直线 $x=-t+1$, 开口向下, 分三类讨论.

   1° $-t+1<-1$ 即 $t>2$,
   $$f(x)_{\max}=f(-1)=2t.$$

   2° $-1\le -t+1\le 3$ 即 $-2\le t\le 2$,
   $$f(x)_{\max}=f(-t+1)=t^2-2t+4.$$

   3° $-t+1>3$ 即 $t<-2$,
   $$f(x)_{\max}=f(3)=-6t.$$

   故有
   $$M(t)=\begin{cases} -6t, & t<-2, \\ t^2-2t+4, & -2\le t\le 2 \\ 2t, & t>2. \end{cases}$$

3. 某工地留有一堵旧 12 米, 现准备重新围造一个新工地, 平面图形是矩形, 面积 112 平方米. 工程条件是: 修 1 米旧墙的费用是建 1 米新墙费用的 25%, 拆去 1 米旧墙用来建 1 米新墙的费用是建一米新墙费用的 50%. 问: 矩形中旧墙所在一边的长为多少时, 施工费用最少?

设保留旧墙 x 米, 即拆去旧墙 $12-x$ 米以用来改造新墙. 设建 1 米的新墙的费用为 a 元, 则修旧墙的费用 $y_1=\dfrac{a}{4}x$, 拆旧墙的费用 $y_2=\dfrac{a}{2}(12-x)$.
矩形一边长 x 米, 另一边长为 $\dfrac{112}{x}$ 米, 周长为 $\dfrac{224}{x}+2x$ 米, 新墙长为 $\dfrac{224}{x}+2x-12$ 米, 建新墙的费用 $y_3=\left(\dfrac{224}{x}+2x-12\right)a$.
总费用 y 有:

$$\begin{aligned}
y&=y_1+y_2+y_3\\
&=\left[\left(\frac{7}{4}x+\frac{224}{x}\right)-6\right]a\\
&\geq\left(2\sqrt{\frac{7}{4}x\cdot\frac{224}{x}}-7\right)a\\
&=(28\sqrt{2}-7)a, x\in[0,12],
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $\dfrac{7}{4}x=\dfrac{224}{x}$ 即 $x=8\sqrt{2}<12$ 时造价最低.
故保留旧墙 $8\sqrt{2}$ 米, 并拆去 $12-8\sqrt{2}$ 米旧墙以用来改造新墙, 可使得造价最低.