

220323 三角恒等式与正余弦定理 题目选解

高一 (4) 班 邵亦成 48 号

Section 1 填空题

1. 若 $\operatorname{div} \operatorname{curl} \tan(\pi + \alpha) = 2$, 则 $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$.

解析. 诱导公式, 两倍角公式; 计算器的使用.

计算器. $\sin[2(\arctan 2 - 180)]$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 5 : 6$, 则最大内角的余弦值为 $\frac{1}{8}$.

解析. 正弦定理, 余弦定理.

3. 等腰 $\triangle ABC$ 的底边长为 2, 面积为 3, 则其外接圆半径为 $\frac{5}{3}$.

解析. 正弦定理.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 3\sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{3}$, $B = \frac{\pi}{3}$, 则 $A = \frac{\pi}{4}$.

解析. 正弦定理.

5. α 为第四象限角, $\tan \alpha = -\frac{7}{24}$, 则 $\tan \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{7}$.

解析. 半角公式; 计算器的使用.

计算器. $\tan \left[\frac{\arctan \left(-\frac{7}{24} \right)}{2} \right]$.

6. 若 $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = 3$, 则 $\cos x + \cot \frac{x}{2} = -\frac{7}{15}$.

解析. 同角三角比, 半角公式; 计算器的使用.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin(A - B) + \sin C = \sin 2B$, $C = 40^\circ$, 则 $B = 70^\circ$ or 90° .

解析. 差角公式, 两倍角公式; 计算器的使用.

计算器. $\text{SOLVE} \sin(140 - 2x) + \sin(40) = \sin(2x)$.

8. 在 $\triangle ABC$ 中 $b = 2a \cos C$, 则当 $3 \tan \frac{B}{2} + \cot \frac{B}{2}$ 取得最小值时, 三角形的形状为等边三角形.

解析. 同角三角比, 两倍角公式. 基本不等式.

9. 使 $\triangle ABC$ 有唯一解的有 (1), (4).

(1) $a = 8, c = 6, B = 131^\circ$.

$$(2) A = 12^\circ, \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}, a = 1.$$

$$(3) a = 7, b = 12, A = \frac{\pi}{6}.$$

$$(4) A = 95^\circ, a = 24, c = 21.$$

解析. 正余弦定理.

10. 设 $f(\tan \alpha) = \cos 2\alpha, g(\tan \alpha) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$. 当 $x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, $5f(\cos x) = g(\cos 2x)$ 的解集为 $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi \right\}$.

解析. 将映射 $f(x)$ 化简为有理多项式的形式. 注意到正切半角公式

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}\alpha},$$

带入 $\alpha = 2\alpha$ 即可知

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

将 $g(x)$ 化简为有理多项式的形式. 考虑差角公式显然有

$$g(x) = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

原方程即可化为

$$5 \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}.$$

将两倍角公式代入, 考虑同角三角比的关系, 有

$$\cos x = \pm \frac{1}{2},$$

即

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi \right\}.$$

Section 2 解答题

11. 以 $a = 10, A = \frac{\pi}{3}$ 和一个给定的 b 作为一组条件, 当该三角形

(1) 有唯一解;

(2) 有两解;

(3) 无解;

求 b 的取值范围.

解析. 余弦定理. 二次函数的零点.

由余弦定理显然有

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

整理, 得

$$c^2 - bc + b^2 - 100 = 0, \Delta = b^2 - 4b^2 + 400 = -3b^2 + 400.$$

二次函数 $f(c) = c^2 - bc + b^2 - 100$ 的对称轴为直线 $x = \frac{b}{2} > 0$, $f(0) = b^2 - 100$.

$$(1) \text{ 有唯一解} \Leftrightarrow \Delta = 0 \text{ or } f(0) \leq 0 \text{ iff } b \in \left\{ \frac{20\sqrt{3}}{3} \right\} \cup (0, 10].$$

$$(2) \text{ 有两解} \Leftrightarrow \Delta > 0 \text{ and } f(0) > 0 \text{ iff } b \in \left(10, \frac{20\sqrt{3}}{3} \right).$$

$$(3) \text{ 无解} \Leftrightarrow \Delta < 0 \text{ iff } b \in \left(\frac{20\sqrt{3}}{3}, +\infty \right).$$

12. 若关于 x 的方程 $\sin 2x + \cos 2x - 2\sin^2 x = \left(\frac{1}{5}\right)^a - 1$ 有解, 求 a 的取值范围.

解析. 两倍角公式. 可化简为代数不等式的超越不等式.

整理, 原方程有解当且仅当方程

$$\sin 2x + 2 \cos 2x = \left(\frac{1}{5}\right)^a$$

有解,

$$\begin{aligned} \sum_{\sin 2x + 2 \cos 2x = \left(\frac{1}{5}\right)^a} &> 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^a \in R(f)|_{f(x)=\sin 2x + \cos 2x} = R(g)|_{g(x)=\sin x + 2 \cos x = \sqrt{5} \sin(x + \arctan 2)} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^a \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \\ &\Rightarrow a \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right). \end{aligned}$$

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = \sqrt{7}$, $b = 3$, $\sin A + \sqrt{7} \sin B = 2\sqrt{3}$, 求 A 的大小. 若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 求 $S_{\triangle ABC}$.

解析. 正弦定理, 三角形面积公式.

$$\begin{aligned}
 \triangle ABC &\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \\
 &\Rightarrow \sqrt{7} \sin B = 3 \sin A \\
 &\Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &\Rightarrow A \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}.
 \end{aligned}$$

注意到 $a = \sqrt{7} < b = 3$, 由大边对大角有 $A = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}
 \triangle ABC &\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\
 &\Rightarrow c^2 - 3c + 2 = 0 \\
 &\Rightarrow c \in \{1, 2\}.
 \end{aligned}$$

考虑 $c = 1, \cos B = -\frac{1}{2\sqrt{7}} < 0$ 符合题意.

考虑 $c = 2, \cos B = \frac{1}{2\sqrt{7}} > 0$ 不符题意, 舍去.

于是 $c = 1$,

$$\begin{aligned}
 S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} bc \sin A \\
 &= \frac{1}{2} \times 3 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{4}.
 \end{aligned}$$

14. $\triangle ABC$ 中 $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{2}}{4} ab \sin 2C$, 求该三角形面积的最大值.

解析. 三角形面积公式, 半角公式, 诱导公式, 和差化积公式. 基本不等式.

$$\begin{aligned}
 S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{2}}{4} ab \sin 2C \Rightarrow 2 \sin C = \sqrt{2} \sin 2C = 2\sqrt{2} \sin C \cos C \\
 &\Rightarrow \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &\Rightarrow C = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

由正弦定理及条件有

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 1 \Rightarrow a = \sin A, b = \sin B.$$

$$\begin{aligned}
\max S_{\triangle ABC} &= \max \left(\frac{1}{2} ab \sin C \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \max(ab) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \max(\sin A \sin B) \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{(\sin A + \sin B)^2}{4} && \text{iff } A = B \text{ or } A + B = \pi \\
&= \frac{\sqrt{2}}{16} \left(2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\sin \frac{A+B}{2} \right)^2 && \text{iff } A = B \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1 - \cos(A+B)}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} (1 + \cos C) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{8}.
\end{aligned}$$

Section 3 附加题

15. 若 $\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sec \beta + \cos \frac{\alpha}{2} \sec \beta = 0$, $\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \tan \beta - \sin \frac{\alpha}{2} \tan \beta = 0$, 求 $\sin \alpha$.

解析. 同角三角比.

$$\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sec \beta + \cos \frac{\alpha}{2} \sec \beta = \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sec \beta \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 0,$$

$$\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \tan \beta - \sin \frac{\alpha}{2} \tan \beta = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \tan \beta \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 0,$$

相减, 有

$$\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\sqrt{2} + \sec \beta - \tan \beta \right) = 0,$$

故有

$$\tan \beta - \sec \beta = \sqrt{2} \text{ or } \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}.$$

考虑 $\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}$, 等式成立 iff $\cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \alpha \in \emptyset$.

故有 $\tan \beta - \sec \beta = \sqrt{2}$. 又考虑到 $\tan^2 \beta - \sec^2 \beta = (\tan \beta + \sec \beta)(\tan \beta - \sec \beta) = -1$, 可得出

$$\tan \beta + \sec \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故有

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{2}}{4}, \sec \beta = -\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

代入, 有 $3 \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = 0$, 解得

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \frac{\alpha}{2} = \mp \frac{\sqrt{10}}{10},$$

于是

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{5}.$$

Section 4 特别致谢

MathxStudio/LaTeX-Templates: 提供排版模版的模版.