220309 三角恒等式 (1) 题目选解

高一 (4) 班 邵亦成 48 号

Section 1 填空题

§1.1 Q6

6. 将下列化为 $A\sin(\omega x+\varphi)\,(A>0,\omega>0,\varphi\in[0,2\pi))$ 的形式: $-2\sin x+2\sqrt{3}\cos x, -\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$.

*作者注: 这样的函数的形式可以理解为**正弦波**, 在学习三角函数的图像时会有 $A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的形式, 可以进行预习, 了解不同变量的含义. 这样的式子会在物理中的**简谐振动**中频繁出现.*

§1.2 Q9

9. 已知 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2+3\sqrt{3}x-2=0$ 的两个根, $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 求 $\alpha+\beta$.

计算器: 解方程 $x^2+3\sqrt{3}x-2=0$, 解为 x_1,x_2 输入 $\tan^{-1}x_1(\arctan x_1)+\tan^{-1}x_2(\arctan x_2)$ 即可.

§1.3 Q10

10. 若在 x 轴正半轴上的一点 P 绕着坐标原点 O 逆时针旋转, 已知 P 点在 1 秒内转过的角度为 $\theta\in(0^\circ,180^\circ)$, 经过 2 秒钟到达第三象限, 经过 14 秒钟恰又恰好回到出发点, 求 θ.

$$\theta\in(0^\circ,180^\circ)\Rightarrow 2\theta\in(0^\circ,360^\circ),2\theta\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right)\Rightarrow 2\theta\in(180^\circ,270^\circ)\Rightarrow\theta\in(90^\circ,135^\circ).$$

$$\theta\in(90^\circ,135^\circ)\Rightarrow 14\theta\in\left(7\pi,\frac{21}{2}\pi\right),14\theta=2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow 14\theta=8\pi,10\pi\Rightarrow\theta\in\left\{\frac{4}{7}\pi,\frac{5}{7}\pi\right\}.$$

Section 2 解答题

§2.1 Q14

14. 求:

$$\left(\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{\sec\alpha+1}{\sec\alpha-1}}-\sqrt{\frac{\sec\alpha-1}{\sec\alpha+1}}\right).$$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \left(\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}}-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{(\sec\alpha+1)^2}{(\sec\alpha-1)(\sec\alpha+1)}}-\sqrt{\frac{(\sec\alpha-1)^2}{(\sec\alpha+1)(\sec\alpha-1)}}\right)\\
&= \left(\frac{|1+\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}-\frac{|1-\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}\right)\cdot\left(\frac{|\sec\alpha+1|}{|\tan\alpha|}-\frac{|\sec\alpha-1|}{|\tan\alpha|}\right) && \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha\\
&= \frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}\cdot\frac{|\sec\alpha+1|-|\sec\alpha-1|}{|\tan\alpha|} && \sin\alpha\in(-1,1)\\
&= \mathrm{sgn}(\sec\alpha)2\tan\alpha\cdot\mathrm{sgn}(\tan\alpha)\frac{|\sec\alpha+1|-|\sec\alpha-1|}{\tan\alpha} && \mathrm{sgn}(\sec\alpha)=\mathrm{sgn}(\cos\alpha)\\
&= 2\mathrm{sgn}(\sec\alpha)\mathrm{sgn}(\tan\alpha)(|\sec\alpha+1|-|\sec\alpha-1|)\\
&= 2\mathrm{sgn}(\tan\alpha)\cdot 2 && \sec\alpha\in[1,+\infty)\Rightarrow\mathrm{sgn}(\sec\alpha)=1, |\sec\alpha+1|-|\sec\alpha-1|=2\\
&= \pm 4. && \sec\alpha\in(-\infty,-1]\Rightarrow\mathrm{sgn}(\sec\alpha)=-1, |\sec\alpha+1|-|\sec\alpha-1|=-2
\end{aligned}
$$

Section 3 附加题

§3.1 Q15

15.

1. 若 $\lg(\sin x-\cos x)=\lg\sin x+\lg\cos x$, 求 $\tan x$.
2. 若 $\sec x+\tan x=\dfrac{22}{7}, \csc x+\cot x=\dfrac{m}{n}, \gcd(m,n)=1$, 求 $m+n$.

1. 若 $\lg(\sin x-\cos x)=\lg\sin x+\lg\cos x$, 求 $\tan x$.

由已知, 显然有$\sin x>\cos x>0$ (lg 对数函数定义域), $\sin x-\cos x=\sin x\cos x$ (对数函数的性质), 故有

$$\sin^2 x\cos^2 x=1-2\sin x\cos x,$$

即

$$\sin x\cos x=\sqrt{2}-1(\text{舍负}).$$

由

$$(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x, (\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x$$

有

$$(\sin x+\cos x)^2=2\sqrt{2}-1, (\sin x-\cos x)^2=3-\sqrt{2},$$

即

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2\sqrt{2}-1},\sin x-\cos x=\sqrt{2}-1.$$

显然, 有

$$\sin x=\frac{(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)}{2},\cos x=\frac{(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)}{2},$$

即

$$\tan x=\frac{(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)}{(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

2. 若 $\sec x+\tan x=\frac{22}{7},\csc x+\cot x=\frac{m}{n},\gcd(m,n)=1$, 求 $m+n$.

为了方便起见, 我们记 $p\xlongequal{\text{def}}\frac{22}{7}$
由

$$\sec^2 x-\tan^2 x=(\sec x+\tan x)(\sec x-\tan x)=1$$

有

$$\sec x-\tan x=\frac{1}{p}.$$

考虑 $\sec x,\tan x$ 有

$$\sec x=\frac{p+\frac{1}{p}}{2}>0,\tan x=\frac{p-\frac{1}{p}}{2}>0\Rightarrow x\in\mathrm{I}.$$

对 $\cot x$ 取倒数, 有

$$\cot x=\frac{2}{p-\frac{1}{p}}=\frac{2p}{p^2-1},$$

考虑 $\csc x$ 有

$$\csc x=\sqrt{1+\cot^2 x}=\sqrt{1+\frac{4}{p^2+\frac{1}{p^2}-2}}=\sqrt{\frac{p^2+\frac{1}{p^2}+2}{p^2+\frac{1}{p^2}-2}}=\frac{p+\frac{1}{p}}{p-\frac{1}{p}}=\frac{p^2+1}{p^2-1}.$$

故

$$\csc x+\cot x=\frac{p^2+2p+1}{p^2-1}=\frac{p+1}{p-1}=\frac{29}{15},m+n=44.$$

另解. 利用**半角公式** $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\cos x-\cot x$ **和** $\cot\left(\frac{x}{2}\right)=\csc x+\cot x$有

$$
\begin{aligned}
\frac{22}{7} &= \sec x + \tan x \\
&= \csc\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - \cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \\
&= \tan\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right) \\
&= \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right),
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
\frac{m}{n} &= \csc x + \cot x \\
&= \csc\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - \cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \\
&= \tan\left(\frac{3\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right) \\
&= \tan\left(\frac{3\pi}{4} - \arctan\frac{22}{7}\right) \\
&= \frac{-1-\frac{22}{7}}{1-\frac{22}{7}} \\
&= \frac{29}{15}, m+n = 44.
\end{aligned}
$$

Section 4 特别致谢

stOOrz-Mathematical-Modelling-Group/MathxStudio: 提供排版模版.