220316 三角恒等式 (2) 参考答案与题目选解

高一 (4) 班 邵亦成 48 号

Section 1 填空题

1. 在 $(-1080°, -360°)$ 中与 $-35°$ 终边相同的角的集合是 $\{-395°, -755°\}$.
解析. 角的终边.

2. 已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{13}$, 则 $\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\alpha\right)=-\frac{5}{13}$.
解析. 诱导公式.

3. 已知 $f(\cos x)=\cos 3x$, 则 $f(\sin 30°)=-1$.
解析. 诱导公式.

4. 若 $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{1}{2}$.
解析. 两倍角公式, 诱导公式.

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha, \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)\Rightarrow \text{原式}=-\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)\Rightarrow\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}.$$

5. 已知 $\dfrac{\tan\theta}{\tan\theta-1}=-1$, 则 $\dfrac{\sin(\pi-\theta)-3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos\left(\theta-\frac{5\pi}{2}\right)-\cos(-3\pi+\theta)}=-\frac{5}{3}$.

解析. 诱导公式.

6. 把下式化为 $A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的形式: $-\frac{5}{3}\sin 2x-\frac{5}{3}\cos 2x=\frac{5}{3}\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{5}{4}\pi\right)$; $6\cos 3x-2\sqrt{3}\sin 3x=4\sqrt{3}\sin\left(3x+\frac{2}{3}\pi\right)$.
解析. 辅助角公式, 诱导公式.

7. 若 $\dfrac{|\sin\alpha|}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|}=0$, 试判断 $\cot(\sin\alpha)\cdot\tan(\cos\alpha)$ 的符号. 负.
解析. 象限角三角比正负性.

8. 已知 $\alpha,\beta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$, $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$, $\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{12}{13}$, 则 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{56}{65}$.
解析. 差角公式.

9. 已知 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=-2$, 则 $\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=$ $\dfrac{9}{10}$.
解析. 同角三角比.

10. 写出正确的序号. **(1)** .

(1) $\sin 5\theta+\sin 3\theta=2\sin 4\theta\cos\theta$.

(2) $\cos 3\theta-\cos 5\theta=-2\sin 4\theta\sin\theta$. $2\sin 4\theta\sin\theta$.

(3) $\sin 3\theta-\sin 5\theta=-\dfrac{1}{2}\cos 4\theta\cos\theta$. $-2\cos 4\theta\sin\theta$.

(4) $\sin 5\theta+\cos 3\theta=2\sin 4\theta\cos\theta$. $2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(4\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

解析. 和差化积公式, 诱导公式.

Section 2 解答题

11. 化简:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}\cdot\left[\frac{\sin 2x}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}-\frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{2}+x\right)}{1+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)}\right].$$

解析. 诱导公式, 两倍角公式, 半角公式.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{1+\sin x}{\cos x}\cdot\left[\frac{2\sin x\cos x}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}-\frac{\cos x}{1+\sin x}\right]\\&=\frac{1+\sin x}{\cos x}\cdot\left[\frac{2\sin x\cos x}{1+\sin x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}\right]\\&=2\sin x-1\ .\end{aligned}$$

12. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 有 $3\sin\alpha-4\cos\alpha=1$, 求 $\tan\alpha$.
解析. 辅助角公式, 同角三角比, 和角公式.

$$3\sin\alpha-4\cos\alpha=5\sin\left(\alpha-\arctan\frac{4}{3}\right)=1\Rightarrow\sin\left(\alpha-\arctan\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{5},\alpha-\arctan\frac{4}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\tan\alpha=\frac{\tan\left(\alpha-\arctan\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}}{1-\tan\left(\alpha-\arctan\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}}=\frac{6+\sqrt{6}}{4}\ .$$

13. 已知 $\cos\alpha\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$, 求 $\tan\dfrac{\alpha}{2}(\sin\alpha+\tan\alpha)$ 的最大值.

解析. 半角公式, 同角三角比, 函数在区间上的极值.

$$\begin{aligned}\max_{\cos\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right)}\tan\frac{\alpha}{2}(\sin\alpha+\tan\alpha) &= \max_{\cos\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right)}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\sin\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\\ &= \max_{\cos\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right)} 1-\cos\alpha+\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\\ &= \max_{\cos\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right)}\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha\\ &= \left.\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right|_{\cos\alpha=\frac{1}{2}}\\ &= \frac{3}{2}\ .\end{aligned}$$

14. 利用两倍角公式及三倍角公式 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta, \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 求 $\sin 18^\circ$.

解析. 同角三角比, 两倍角公式, 三倍角公式.

考虑 $\cos 54^\circ$ $(90^\circ - 3\times 18^\circ = 2\times 18^\circ)$, 有

$$\cos 54^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ = \sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ\cos 18^\circ$$

即

$$4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ = 2\sin 18^\circ\cos 18^\circ.$$

两边同时除以 $\cos 18^\circ$, 带入 $\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ}$, 有

$$4(1-\sin^2 18^\circ) - 3 = 2\sin 18^\circ$$

即

$$4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$$

有

$$\sin 18^\circ = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}(\text{舍负}).$$

综上, $\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Section 3 附加题

15. 已知 $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = p, \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = q, |p|\neq 1, q\neq 0$, 用 p, q 表达 $\tan\alpha\cdot\tan\beta$.

解析. 同角三角比.

由已知, 显然有

$$\sin\alpha = p\sin\beta \tag{1}$$

和

$$\cos\alpha = q\cos\beta \qquad (2).$$

考虑 (1)/(2) 得

$$\tan\alpha = \frac{p}{q}\tan\beta.$$

两边同时乘以 $\tan\beta$ 得

$$\tan\alpha\tan\beta = \frac{p}{q}\tan^2\beta.$$

考虑 $(1)^2 + (2)^2$ 得

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 = p^2\sin^2\beta + q^2\cos^2\beta,$$

即

$$\sin^2\beta(p^2-1) = \cos^2(1-q^2),$$

即

$$\tan^2\beta = \frac{1-q^2}{p^2-1}.$$

故原式 $= \dfrac{p(1-q^2)}{q(p^2-1)}$.

Section 4 特别致谢

MathxStudio/LaTeX-Templates: 提供排版模版的模版.