# 11 函数的基本性质（简单题）

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 12 月 1 日

1. $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数, 它们的定义域都是 $\{x|x \neq \pm 1, x \in \mathbb{R}\}$ 且满足 $f(x) + g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, 则 $f(x) = ?$, $g(x) = ?$.

   答案为 $\dfrac{1}{x^2-1}$; $\dfrac{x}{x^2-1}$ 并不难求出, 但本题的价值在可以根据此题写出一个定理.

   **定理** 对于一个定义在 $D$ 上的函数 $h(x)$, 如果有 $\forall x \in D : -x \in D$, 则 $h(x)$ 能被写为同样定义在 $D$ 上的两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的和, 且 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数. 其中,

$$f(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2}, g(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{2}.$$

2. 若函数 $f(x) = a|x-b| + 2$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上为减函数, 则实数 $a, b$ 的取值范围是?.

   1° $a = 0$, 有 $f(x) = 2$, 符合.

   2° $a \neq 0$, 有

$$f(x) = \begin{cases} ax - ab + 2, & x \geq b, \\ -ax + ab - 2, & x < b. \end{cases}$$

   故有 $a > 0, b \leq 0$.

   综上, $(a, b) \in \{(x, y)|x = 0, y \in \mathbb{R} \text{ or } x > 0, y \leq 0\}$.

3. 设 $T = x^2 - (m+1)x - m$,

   (1) 当 $x \in [0, 2]$ 时, 恒有 $T > 0$, 求 $m$ 的取值范围.

   记

$$f(x) = T = x^2 - (m+1)x - m, \Delta = [-(m+1)]^2 - 4(-m) = m^2 + 6m + 1$$

   **法一**: 二次函数的判别式法

   有

$$\Delta < 0 \text{ or } \begin{cases} \Delta = 0 \\ \dfrac{m+1}{2} < 0 \quad \text{or} \quad \dfrac{m+1}{2} > 2 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} \Delta > 0 \\ \dfrac{m+1}{2} < 0 \quad \text{or} \quad \dfrac{m+1}{2} > 2 \\ f(0) > 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$$

即

$$m \in \left(-\infty, -3+2\sqrt{2}\right).$$

**法二:** 二次函数的极值问题

有

$$\min_{x\in[0,2]} f(x) > 0,$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{m+1}{2} < 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} \dfrac{m+1}{2} > 2 \\ f(2) > 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} \dfrac{m+1}{2} \in [0,2] \\ f\left(\dfrac{m+1}{2}\right) > 0 \end{cases}$$

即

$$m \in \left(-\infty, -3+2\sqrt{2}\right).$$

**法三:** 参变分离

有

$$m < \frac{x^2-x}{x+1},$$

即

$$m < \min_{x\in[0,2]} \frac{x^2-x}{x+1},$$

而

$$\begin{aligned} \frac{x^2-x}{x+1} &= x-2+\frac{2}{x+1} \\ &= (x+1)+\frac{2}{x+1}-3 \\ &\geq -3+2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $x+1=\sqrt{2}$ 即 $x=\sqrt{2}-1\in[0,2]$,

故

$$m \in \left(-\infty, -3+2\sqrt{2}\right).$$

(2) 当 $m \in [0,2]$ 时, 恒有 $T > 0$, 求 $x$ 的取值范围.

记

$$g(m) = T = x^2 - (m+1)x - m = m(-x-1) + x^2 - x$$

**一次函数的图像**:

有

$$\begin{cases} g(0) & > & 0 \\ g(2) & > & 0 \end{cases}$$

即

$$x \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right).$$