220525 复数 题目选解

Eason S.

Contents

Section 1 填空题

Problem 1.1

已知 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $(1+i)z = 2$, 则 $\Im(z) = ?$.

Solution to Problem 1.1

-1. 复数的实部和虚部.

Problem 1.2

若复数 $2+i$ 是 $\mathbb{R}[x]$ 上的多项式 x^2+px+q 的一个虚数根, 则 $pq = ?$.

Solution to Problem 1.2

-20. $\mathbb{P}_2[x]$ 上的多项式的根; $\mathbb{P}[x]$ 上的多项式的根的 Vieta 定理.

Problem 1.3

关于 x 的方程 $x^2+4x+k=0$ 有一个根为 $-2+3i$, 则实数 $k=$?.

Solution to Problem 1.3

13. $\mathbb{P}_2[x]$ 上的多项式的根.

Problem 1.4

复数 $z=\left(1-\sqrt{3}i\right)^5$, 则 $\arg z=$?.

Solution to Problem 1.4

$\frac{\pi}{3}$. 复数的辐角; 复数的指数表示.

$$\begin{aligned} z &= \left(1-\sqrt{3}i\right)^5 && (1)\\ &= \left[2\exp\left(5i\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right]^5 && (2)\\ &= 32\exp\left(25i\cdot\frac{\pi}{3}\right) && (3)\\ &= 32\exp\left(i\cdot\frac{\pi}{3}\right). && (4)\end{aligned}$$

于是有 $|z|=32, \arg z=\frac{\pi}{3}$.

Problem 1.5

计算

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\div\left[4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right].$$

Solution to Problem 1.5

$\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{8}i$. 复数的指数表示.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\div\left[4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right] &= \exp\left(i\cdot\frac{\pi}{3}\right)\div 4\exp\left(i\cdot\frac{\pi}{12}\right) && (5)\\ &= \frac{1}{4}\exp\left(i\cdot\pi/4\right) && (6)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{8}i. && (7)\end{aligned}$$

Problem 1.6

若复数 $(1+ai)^2 \in \mathbb{I} \setminus \{0\}$, 则 $|1+ai| =?$.

Solution to Problem 1.6

$\sqrt{2}$. 复数的模.

Problem 1.7

设 $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z^n (n \in \mathbb{N}^*)$, $f(1+i)$ 取最小正整数时, $n =?$.

Solution to Problem 1.7

8. 复数的整数指数幂.

Problem 1.8

已知 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $z \cdot \overline{z} + 2iz = 9 + 2i$, 则 $z =?$.

Solution to Problem 1.8

$1-2i$ **or** $1+4i$. 复数的共轭关系.

Problem 1.9

下列命题中, 正确的是:

(1) 任意两个确定的复数都不能比较大小;

(2) 若 $|z| \leq 1$, 则 $-1 \leq z \leq 1$;

(3) 若 $z_1^2 + z_2^2 = 0$, 则 $z_1 = z_2 = 0$;

(4) $z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{I} \setminus \{0\}$;

(5) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Solution to Problem 1.9

(5). 复数的模; 复数的共轭关系.

作者的话. 作者将原题中的"纯虚数"翻译为了 $\mathbb{I}\setminus\{0\}$. 但是, 有部分书籍定义**纯虚数 (pure imaginary / complex number)**为集合 $\mathbb{I} = \{z|\Re(z) = 0\}$.[1]

Problem 1.10

设关于 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $\arg z \in \left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right)$, 则 $\frac{2021}{z^2}$ 对应复平面上的点位于第? 象限.

Solution to Problem 1.10

四. 复数的辐角; 复数的共轭关系; 复平面.

$$\begin{aligned}
\arg z \in \left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right) &\Rightarrow \arg \overline{z} \in \left(-\pi, -\frac{3}{4}\pi\right) &(8)\\
&\Rightarrow \arg \overline{z} \in \left(\pi, \frac{5}{4}\pi\right) &(9)\\
&\Rightarrow \arg \overline{z}^2 \in \left(2\pi, \frac{5}{2}\pi\right) &(10)\\
&\Rightarrow \arg \overline{z}^2 \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right) &(11)\\
&\Rightarrow \arg \overline{z}^{-2} \in \left(-\frac{1}{2}\pi, 0\right) &(12)\\
&\Rightarrow \arg \frac{2021}{z^2} \in \left(-\frac{1}{2}\pi, 0\right). &(13)
\end{aligned}$$

Problem 1.11

若在 $\mathbb{R}_2[x]$ 上的多项式 $x^2 - |z| \cdot x + 1, z \in \mathbb{C}$ 有实数根, 则 $|z - 1 + i|$ 的最小值为?,

Solution to Problem 1.11

$2 - \sqrt{2}$. $\mathbb{P}_2[x]$ 上的多项式的根; 复数的模; 一元二次方程根的判别式; 三角不等式.

由题意有 $\Delta = |z|^2 - 4 \geq 0$ 解得 $|z| \geq 2$.

再由 $|z - 1 + i| \geq |z| - |-1 + i| = 2 - \sqrt{2}$ 可知最小值.

Problem 1.12

若关于 x 的方程 $2x^2 + 3ax + a^2 - a = 0$ 至少有一个根的模为 1, 则实数 $a =$?.

Solution to Problem 1.12

$2 \pm \sqrt{2}$ **or** -1. $\mathbb{P}_2[x]$ 上的多项式的根; 一元二次方程根的判别式; 复数的模.

考虑 $\Delta \geq 0$, 不妨设 $|x_1| = 1$. 若 $x_1 = 1$, 则 $a^2 + 2a + 2 = 0$, $a \notin \mathbb{R}$; 若 $x_1 = -1$, 则 $a^2 - 4a + 2 = 0$, $a = 2 \pm \sqrt{2}$.

考虑 $\Delta < 0$, 有 $x_1 = \overline{x_2}, x_1 \cdot x_2 = |x_1|^2 = 1$, 即 $\frac{a^2 - a}{2} = 1$, 有 $a = 2$ or $a = -1$, 又 $\Delta < 0$ 有 $a = -1$.

Section 2 解答题

Problem 2.1

已知 $z = bi, b \in \mathbb{R}, \dfrac{z-2}{1+i} \in \mathbb{R}$,

(1) 求 z;

(2) 若 $(m+z)^2$ 在第一象限, 求 m.

Solution to Problem 2.1

$z = -2i; m \in (-\infty, -2)$. 复数的实部和虚部; 复平面.

Problem 2.2

已知 α, β 是 $\mathbb{R}_2[x]$ 上的多项式 $x^2 + 2x + p$ 的两根,

(1) 若 $|\alpha - \beta| = 3$, 求 p;

(2) 求 $|\alpha| + |\beta|$.

Solution to Problem 2.2

$p = -\dfrac{5}{4}$ **or** $\dfrac{13}{4}$; **第二问见过程.** 复数的实部和虚部; $\mathbb{P}_2[x]$ 上的多项式的根; $\mathbb{P}[x]$ 上的多项式的根的 Vieta 定理.

(1) $\Delta = 4 - 4p$,

(1.1) $\Delta \geq 0, p \leq 1$, 此时有

$$\sqrt{4-4p} = 3 \Rightarrow p = -\frac{5}{4}.$$

(1.2) $\Delta < 0, p > 1$, 此时有

$$\left|\sqrt{4p-4}i\right| = 3 \Rightarrow p = \frac{13}{4}.$$

(2) $\Delta = 4 - 4p$,

(2.1) $\Delta \geq 0, p \leq 1$, 此时有

$$|\alpha| + |\beta| = \left|-1 + \sqrt{1-p}\right| + \left|-1 - \sqrt{1-p}\right|.$$

(2.1.1) $\sqrt{1-p} \in [0,1], p \in [0,1]$, 此时有

$$|\alpha| + |\beta| = 1 - \sqrt{1-p} + 1 + \sqrt{1-p} = 2;$$

(2.1.2) $\sqrt{1-p} \in (1,+\infty), p \in (-\infty, 0)$, 此时有

$$|\alpha|+|\beta| = -1+\sqrt{1-p}+1+\sqrt{1-p} = 2\sqrt{1-p}.$$

(2.2) $\Delta < 0, p > 1$, 此时设 $\alpha = x+yi, \beta = x-yi, x, y \in \mathbb{R}$, 于是有

$$|\alpha|+|\beta| = 2\sqrt{m^2+n^2},$$

又有 $p = \alpha \cdot \beta = m^2+n^2$, 有

$$|\alpha+\beta| = 2\sqrt{p}.$$

综上所述,

$$|\alpha|+|\beta| = \begin{cases} 2\sqrt{p} & \text{for} \quad p \in (1,+\infty) \\ 2 & \text{for} \quad p \in [0,1] \\ 2\sqrt{1-p} & \text{for} \quad p \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Problem 2.3

设虚数 z 满足 $|2z+3| = \sqrt{3}\,|\bar{z}+2|$,

(1) 求证: $|z|$ 是定值;

(2) 是否存在实数 k, 使 $\dfrac{z}{k}+\dfrac{k}{z}$ 为实数?

Solution to Problem 2.3

略; 存在, $k = \pm\sqrt{3}$. 复数的实部和虚部; 复数的共轭关系; 复数的模.

(1) 设 $z = x+yi, x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$, 于是有 $|(2x+3)+2yi| = \sqrt{3}\,|(x+2)-yi|$, 故有 $x^2+y^2 = 3$, 即 $|z| = \sqrt{3}$.

(2)

$$\begin{aligned} \frac{z}{k}+\frac{k}{z} &= \frac{x+yi}{k}+\frac{k}{x+yi} && (14) \\ &= \frac{x+yi}{k}+\frac{k(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)} && (15) \\ &= \frac{x+yi}{k}+\frac{k(x-yi)}{3} && (16) \\ &= \left(\frac{x}{k}+\frac{kx}{3}\right)+\left(\frac{y}{k}-\frac{ky}{3}\right)i \in \mathbb{R}, && (17) \end{aligned}$$

故有

$$\frac{y}{k}-\frac{ky}{3} = 0,$$

于是有 $k = \pm\sqrt{3}$.

Section 3 附加题

Problem 3.1

设 $z \in \mathbb{C}, |z| = 1, \frac{5}{2}z^2 - 2z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$, 求 z.

Solution to Problem 3.1

$z = \frac{3}{5} \pm \frac{4}{5}i$ **or** $z = \pm 1$. 复数的实部和虚部; 复数的模; 复数的整数指数幂.

设 $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, 显然有 $a^2 + b^2 = 1$, 于是有

$$5ab - 2b - \frac{b}{a^2 + b^2} = 0,$$

于是有

$$5ab - 3b = 0,$$

联立 $a^2 + b^2 = 1$, 解得 $(a, b) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ or $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ or $(1, 0)$ or $(-1, 0)$, 即 $z = \frac{3}{5} \pm \frac{4}{5}i$ or $z = \pm 1$.

References

[1] K.C.Sinha. *A Text Book of Mathematics XI*, volume 11.2. Rastogi Publications, 2018.