10 奇偶性、单调性（难题）

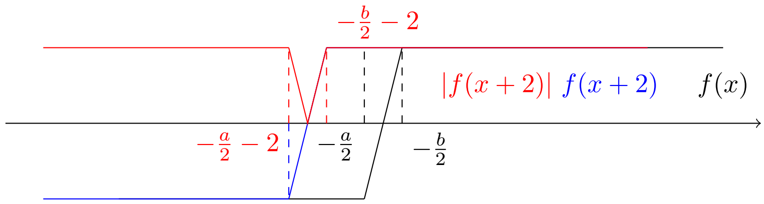
高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 11 月 24 日

1. 已知实数 $a \neq b$, 记函数 $y = f(x) = |2x+a| - |2x+b|$. 若函数 $y = |f(x+2)|$ 为偶函数, 则代数式 $ab + a + 2b$ 的最大值为?.

$$g(x) \xlongequal{\text{def}} |f(x+2)|,$$

$$f(x) \xrightarrow{\text{向左平移 2 单位}} \xrightarrow{\text{将 } x \text{ 轴下方的部分翻折至 } x \text{ 轴上方}} g(x).$$



故有

$$-\frac{a}{2} - 2 - \frac{b}{2} - 2 = 0 \Rightarrow a + b = -8 \Rightarrow b = -a - 8,$$

$$\begin{aligned} ab + a + 2b &= a(-a-8) + a + 2(-a-8) \\ &= -a^2 - 8a + a - 2a - 16 \\ &= -a^2 - 9a - 16 \\ &\leq \frac{17}{4}, \end{aligned}$$

等号成立条件

$$(a, b) = \left(-\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right).$$

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq 1, \\ x + \dfrac{2}{x}, & x > 1. \end{cases}$ 设 $a \in \mathbb{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq \left|\dfrac{x}{2} + a\right|$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

考虑 $x \leq 1$, 有

$$x^2 - x + 3 \geq \left|\frac{x}{2} + a\right|,$$

即

$$-x^2 + x - 3 \leq \frac{x}{2} + a \leq x^2 - x + 3,$$

即

$$-x^2 + \frac{1}{2}x - 3 \leq a \leq x^2 - \frac{3}{2}x + 3.$$

而

$$\max_{x\leq 1}\left(-x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right) = -\frac{47}{16}, \min_{x\leq 1}\left(x^2 - \frac{3}{2}x + 3\right) = \frac{39}{16},$$

得

$$a \in \left[-\frac{47}{16}, \frac{39}{16}\right].$$

考虑 $x > 1$, 有

$$x + \frac{2}{x} \geq \left|\frac{x}{2} + a\right|,$$

即

$$-x - \frac{2}{x} \leq \frac{x}{2} + a \leq x + \frac{2}{x},$$

即

$$-\frac{2}{x} - \frac{3x}{2} \leq a \leq \frac{x}{2} + \frac{2}{x},$$

而

$$\max_{x>1}\left(-\frac{2}{x} - \frac{3x}{2}\right) = -2\sqrt{3}, \min_{x>1}\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) = 2,$$

得

$$a \in \left[-2\sqrt{3}, 2\right].$$

综上,

$$a \in \left[-\frac{47}{16}, 2\right].$$