12 函数综合（难题）

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 12 月 8 日

1. 设区间 $[a,b]$ 是函数 $f(x)$ 的定义域 D 的子集, 定义在 $[a,b]$ 上的函数 $g(x)=|f(x)-f(x_0)|(x_0\in[a,b])$ 记为 $g_{[a,b]}(x,x_0)=|f(x)-f(x_0)|$. 若 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ \frac{1}{x}, & x\ge 1.\end{cases}$

   (1) 求 $f(x)$ 的值域.

   考虑 $x\in[0,2)$, $f(x)=2\sqrt{x}\in[0,2)$.
   考虑 $x\in[1,+\infty)$, $f(x)=\dfrac{1}{x}\in(0,1]$.
   故 $f(x)$ 的值域为 $[0,2)$.

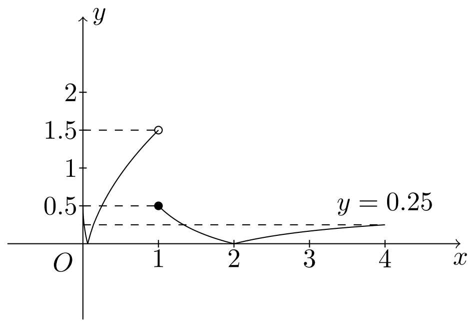
   (2) 关于 x 的方程 $g_{[0,4]}(x,2)-t=0$ 恰有 3 个不同的解时, 求实数 t 的取值范围.

$$g_{[0,4]}(x,2)-t=0\Leftrightarrow\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=t,x\in[0,4].$$

   令

$$\begin{aligned}F(x)&=\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-2\sqrt{x}, & 0\le x\le\dfrac{1}{16},\\[2ex] 2\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{16}<x<1,\\[2ex] \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}, & 1\le x\le 2,\\[2ex] \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}, & 2<x\le 4.\end{cases}\end{aligned}$$

   绘制函数 $y=F(x)$ 的图像, 如下图:



故有 $t \in \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$.

2. 设 n 为正整数, 规定: $f_n(x) = \underbrace{f\{f[\cdots f(x)\cdots]\}}_{n\text{个}f}$. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 \le x \le 1, \\ x-1, & 1 < x \le 2. \end{cases}$

(1) 解不等式: $f(x) \le x$.

考虑 $0 \le x \le 1$, $2(1-x) \le x \Rightarrow x \ge \frac{2}{3}$, 即 $x \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$.
考虑 $1 < x \le 2$, 不等式恒成立, 即 $x \in (1, 2]$.
故 $x \in \left[\dfrac{2}{3}, 2\right]$.

(2) 设集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 对任意 $x \in A$, 证明: $f_3(x) = x$.

考虑 $x = 0$, $f_3(0) = f(f(f(0))) = f(f(2)) = f(1) = 0$.
考虑 $x = 1$, $f_3(1) = f(f(f(1))) = f(f(0)) = f(2) = 1$.
考虑 $x = 2$, $f_3(2) = f(f(f(2))) = f(f(1)) = f(0) = 2$.

(3) 求 $f_{2021}\left(\dfrac{8}{9}\right)$ 的值.

$$
\begin{aligned}
f_1\left(\frac{8}{9}\right) &= 2\left(1 - \frac{8}{9}\right) = \frac{2}{9}, \\
f_2\left(\frac{8}{9}\right) &= f\left(f\left(\frac{9}{9}\right)\right) = f\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{14}{9}, \\
f_3\left(\frac{8}{9}\right) &= f\left(f_2\left(\frac{9}{9}\right)\right) = f\left(\frac{14}{9}\right) = \frac{5}{9}, \\
f_4\left(\frac{8}{9}\right) &= f\left(f_3\left(\frac{9}{9}\right)\right) = f\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{8}{9}.
\end{aligned}
$$

一般的, $\forall k, r \in \mathbb{N}$,

$$f_{4k+r}\left(\frac{8}{9}\right) = f_r\left(\frac{8}{9}\right).$$

故有

$$f_{2010}\left(\frac{8}{9}\right) = f_2\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{14}{9}.$$