

13 函数综合' (简单题)

高一 (6) 班 邵亦成 26 号

2021 年 12 月 15 日

1. 设定义在 \mathbb{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = -f(2-x)$, $f(0) = 2$, 则 $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2020) + f(2021) = ?$.

$$f(x) = -f(2-x), f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x) = -f(x-2) \Rightarrow f(x) = -f(x+2) \Rightarrow f(x) = f(x+4).$$

$$f(1) = -f(1) \Rightarrow f(1) = 0, f(2) = -f(0) = -2, f(3) = -f(1) = 0, f(4) = f(0) = 2.$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2020) + f(2021) \\ &= [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] + \cdots + [f(2016) + f(2017) + f(2018) + f(2019)] + f(2020) + f(2021) \\ &= 0 + \cdots + 0 + 2 + 0 \\ &= 2. \end{aligned}$$

2. 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & x \in (-2, 2], \\ 2-|x-3|, & x \in (2, 4], \end{cases}$$

$$\text{且 } f(x-3) = f(x+3),$$

- (1) 求 $f(-8)$, 并求 $x \in [-8, -2]$ 时 $f(x)$ 的解析式.

易得 $f(x) = f(x+6)$, 有 $f(-8) = f(-2) = f(4) = 1$.

考虑 $x \in (-8, -4]$, $x+6 \in (-2, 2]$, $f(x) = f(x+6) = \sqrt{-x^2-12x-34}$;

考虑 $x \in (-4, -2]$, $x+6 \in (2, 4]$, $f(x) = f(x+6) = 2-|x+6-3| = 2-|x+3|$;

故

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = -8, \\ \sqrt{-x^2-12x-34}, & x \in (-8, -4], \\ x+5, & x \in (-4, -3], \\ -x-1, & x \in (-3, -2]. \end{cases}$$

- (2) 函数 $y = f(x) - k, x \in [-8, 4]$ 的零点个数是否可能为奇数? 若可能, 则求出此时零点个数, 并指出相应的实数 k 的取值范围; 若不可能, 则说明理由.

$x \in (-8, -2]$ 的图像由 $x \in (-2, 4]$ 的图像平移得来, 故直线 $y = k$ 与 $y = f(x), x \in (-8, 4]$ 的图像交点必为偶数个.

故若交点为奇数, 必有 $y = k = f(-8) = 1$.

此时共有 7 个零点: $x = -8$, 1 个; $x \in (-8, -4]$, 2 个; $x \in (-4, -3]$, 0 个; $x \in (-3, -2]$, 1 个; $x \in (-2, 2]$, 2 个; $x \in (2, 3]$, 0 个; $x \in (3, 4]$, 1 个.