

5 不等式测验' (难题)

高一(6)班 邵亦成 26 号

2021 年 10 月 13 日

1. 当 $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ 时, 记函数 $y_n = |x-1| + |x-2| + \cdots + |x-n|, x \in \mathbb{R}$.

(1) 分别求 y_2, y_3, y_4 的最小值, 并指出 x 为何值时能取到该最小值.

(2) 求 y_n 的最小值, 并指出 x 为何值时能取到该最小值.

(1) 分别求 y_2, y_3, y_4 的最小值, 并指出 x 为何值时能取到该最小值.

$$\begin{aligned} y_2 &= |x-1| + |x-2| \\ &\geq |2-1| \\ &= 1. \end{aligned}$$

当 $x \in [1, 2]$ 时取到.

$$\begin{aligned} y_3 &= |x-1| + |x-2| + |x-3| \\ &\geq |3-1| + |x-2| \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

当 $x = 2$ 时取到.

$$\begin{aligned} y_4 &= |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| \\ &\geq |4-1| + |3-2| \\ &= 4. \end{aligned}$$

当 $x \in [2, 3]$ 时取到.

(2) 求 y_n 的最小值, 并指出 x 为何值时能取到该最小值.

根据 (1) 的分析, 分两大类: $n = 2k$ 与 $n = 2k+1 (k \in \mathbb{N}^*)$.

1° $n = 2k$,

当 $x \in [k, k+1]$ 取到

$$\begin{aligned} y_{\min} &= |2k-1| + |2k-1-2| + \cdots + |k+1-k| \\ &= k^2 \\ &= \frac{n^2}{4}. \end{aligned}$$

2° $n = 2k+1$,

当 $x = k+1$ 取到

$$\begin{aligned}
y_{\min} &= |2k+1-1| + |2k-2| + \cdots + |x-k-1| \\
&= |2k+1-1| + |2k-2| + \cdots + |k+1-k-1| \\
&= k^2 + k \\
&= \frac{n^2-1}{4}.
\end{aligned}$$

综上,

$$y_{\min} = \begin{cases} \frac{n^2}{4} & , \quad x \in \left[\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right] \\ \frac{n^2-1}{4} & , \quad x = \frac{n+1}{2} \end{cases}.$$