

一、填空题：（本大题共 12 小题，每题 5 分，共 60 分）

1. 下列各式正确的是_____.

$$\textcircled{1} \arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4} \quad \textcircled{2} \arcsin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \textcircled{3} \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$$

$$\textcircled{4} \sin\left(\arcsin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3} \quad \textcircled{5} \sin\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. 方程 $\sin x = \lg x$ 的实根有_____个.

3. 满足 $\arccos 2x < \arccos(1-x)$ 的 x 的取值集合_____.

4. 已知 $A(0,3)$ 、 $B(2,0)$ 、 $C(-1,3)$ 与 $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ 方向相反的单位向量是_____.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=5, b=8, C=60^\circ$, 则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$ 的值为_____.

6. 设函数 $y = \arctan x$ 的图象沿 x 轴正方向平移 2 个单位, 所得图象为 C_1 , 又设图象 C_2 与 C_1 关于原点对称, 那么 C_2 所对应的函数是_____.

7. 函数 $y = 2\arcsin 3x (0 < x \leq \frac{1}{3})$ 的值域为_____.

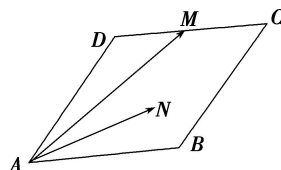
8. 方程 $\sin 3x - \sin x = 0$ 的解集是_____.

9. 函数 $y = \sin x, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 的反函数为_____.

10. 方程 $\sqrt{5\cos x + \cos 2x} + \sin x = 0$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的解集是_____.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2, BC=3, \angle ABC=60^\circ$, AD 为 BC 边上的高, O 为 AD 的中点, 若 $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BC}$, 其中 $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, 则 $\lambda + \mu$ 等于_____.

12. 如图, 菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD=60^\circ$, M 为 DC 的中点, 若 N 为菱形内任意一点(含边界), 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的最大值为_____.



二、解答题：（12+14+14=40 分）

13. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos^2 x + \sin x \cos x$, $x \in [0, \pi]$

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 如果关于 x 的方程 $|f(x)| = m$, 在区间 $(0, \pi)$ 上有两个不同的实根, 求实数 m 的取值范围

14. 甲船在 A 处观察到乙船在它的北偏东 60° 方向的 B 处, 两船相距 a 海里, 乙船正向北行驶,

若甲船是乙船速度的 $\sqrt{3}$ 倍, 问甲船应取什么方向前进才能在最短时间内追上乙船? 此时乙船行驶多少海里?

15. 已知 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\vec{b} = (\cos \beta, \sin \beta)$, 其中 $0 < \alpha < \beta < \pi$.

(1) 求证: $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 互相垂直;

(2) 若 $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - k\vec{b}$ 的长度相等, 求 $\beta - \alpha$ 的值 (k 为非零的常数).

附加题 (10 分)

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = 2$.

(1) 求 $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2$ 的值; (2) 当 $\triangle ABC$ 的面积最大时, 求 $\angle A$ 的大小.