220413 三角与向量 题目选解

Eason S.

作者的话. 这次测验还有点难度, 做得不好不要垂头丧气, 不要冲动, 不要愤怒. 认真总结教训, 积累经验, 学习方法.

Section 1 填空题

1. 以下与 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ 相等的有: (1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$, (2) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$, (3) $\cos\left(\alpha+15\pi\right)$. **(1) (3)**.
解析. 三角变换.

2. 设 $\tan\alpha=m(m\neq 0), \sin\alpha=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$, 则 α 可能为第一、四象限角.
解析. 三角变换.

3. 若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\log_{\cos\alpha}\left(1+\tan^2\alpha\right)=-2$.
解析. 三角变换.

4. 若扇形的弧长和面积均为 4, 则该扇形的弦心距长度为$2\cos 1$.
解析. 初中几何.

5. 函数 $y=2\tan\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$ 的单调减(增/减) 区间为$\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3},\frac{2\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}\right), k\in\mathbb{Z}$.
解析. 三角函数的单调性.
答案不唯一.

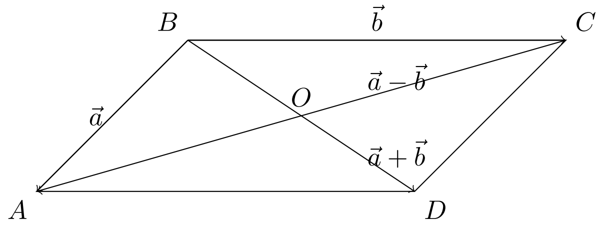
6. 若把函数 $y=\cos x-\sin x$ 的图像做适当的变换后能得到 $y=\sqrt{2}\sin 2x$ 的图像, 这样的移动可以是: 先将图像上所有点的横坐标除以 2, 再将图像向右平移$\frac{3\pi}{8}$个单位.
解析. 三角函数图像的变换; 三角变换.
答案不唯一.
作者的话. 自己选的时候请先伸缩后平移, 反过来比较容易脑抽. 考虑实际平移情况的时候应当将平移量给予 x, y.

7. 将 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)$ 化为和差的形式$\frac{1}{2}\left[\cos\left(\beta+\alpha\right)+\sin\left(\beta-\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

解析. 三角变换.
答案不唯一.

8. 若 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=3,\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=7$, 则 $|\vec{a}|$ 的取值范围是$[2,5]$.
解析. 向量的基本运算.
作者的话. 此后所有出现的所谓"空间向量""平面向量"等统一使用 $\vec{v}$ 表示 (相对而言比较简洁明了), 仅在明确指明属于线性代数学科讨论范围 (e.g. 与矩阵进行运算) 时使用 $\boldsymbol{M}$ 表示 (保持与矩阵运算样式的统一性). 物理文档中一般向量统一使用 $\boldsymbol{v}$ 表示, 如遇到单位向量使用 $\hat{\boldsymbol{e}}$ (使用 $\hat{x}$ 强调单位, $\boldsymbol{x}$ 强调向量).

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 记 $\overrightarrow{BA}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, 已知 $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{10},\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=6,\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=4,\left\langle\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right\rangle=\arccos-\dfrac{\sqrt{10}}{8}$ (用反三角表示).
解析. 向量的基本运算.
法一. 利用向量的基本运算的平行四边形法则进行计算/利用向量的和的模长推出向量的差的模长所在的边的中线进行计算.
如图所示, 作向量 $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$, 令 $\overrightarrow{BD}=\vec{a}+\vec{b},AC$ 交 BD 于 O,



显然有

$$\left\langle\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right\rangle=\pi-\angle ACB.$$

由于给出了 BD,AC,AB,BC 的长度以及平行四边形的对角线相互平分, 显然有 $OB=3,OC=2,BC=\sqrt{10}$, 由余弦定理可知 $\angle ACB=\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{8}$, 则有$\left\langle\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right\rangle=\arccos-\dfrac{\sqrt{10}}{8}$.

法二. 利用向量的内积及相关量进行计算.
由向量的内积运算, 显然有

$$\vec{b}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\cdot\cos\left\langle\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right\rangle=4\sqrt{10}\cdot\cos\left\langle\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right\rangle=\vec{a}\cdot\vec{b}-\left|\vec{b}\right|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}-10,$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+10=36,$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=|\vec{a}|^2-2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2-2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+10=16,$$

则有

$$\cos\left\langle\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}-10}{4\sqrt{10}}=-\frac{5}{4\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{8},$$

即

$$\left\langle\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right\rangle=\arccos-\frac{\sqrt{10}}{8}$$

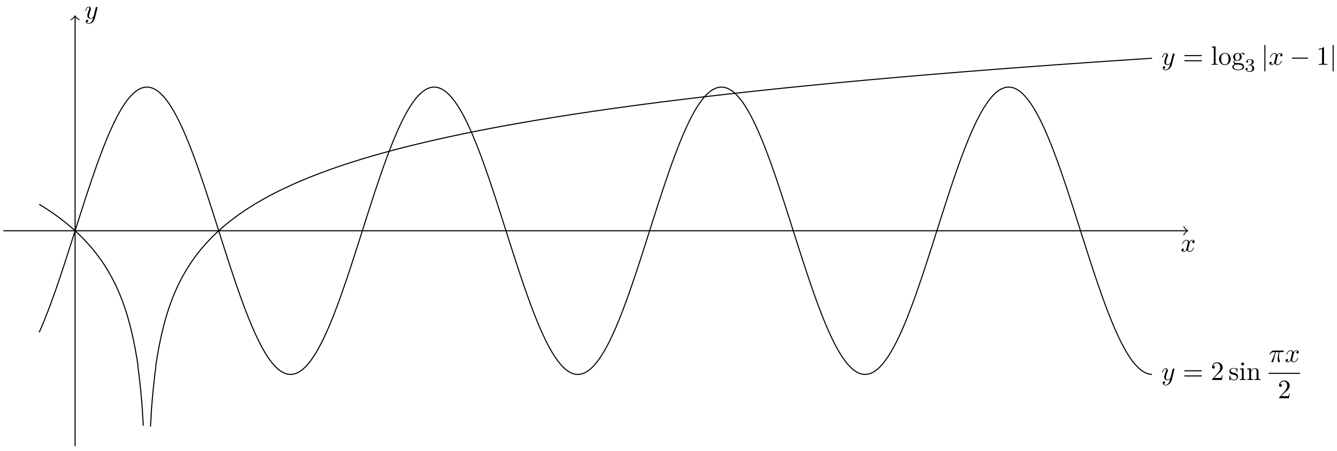
10. 设 $f(x)=2\sin\dfrac{\pi x}{2}, g(x)=\log_3|x-1|$, 则 $\displaystyle\sum_{\substack{f(x)=g(x)\\x\in\mathbb{R}}} x = 10$.

解析. 三角函数; 对数函数.

显然, $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图像均关于直线 $x=1$ 对称, 且 $x=1$ 是 $g(x)$ 的一个无穷间断点, 故 $\forall x, f(x)=g(x): f(2-x)=g(2-x)$, 考虑 $(1,+\infty)$ 或 $(-\infty,1)$ 上的解即可. 同时有:

$$\sum_{\substack{f(x)=g(x)\\x\in\mathbb{R}}} x = 2\sum_{\substack{f(x)=g(x)\\x\in(1,+\infty)}} 1 = 2\sum_{\substack{f(x)=g(x)\\x\in(-\infty,1)}} 1$$

绘制 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图像, 考虑 $f(x)=g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的解. 注意到题目已经将 $f(x)$ 的特殊点 (i.e. 极值点, 零点) 作了有理化, 故绘制图像是一个比较好的解决方法.



Section 2 解答题

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $b=1, c=5, S_{\triangle ABC}=2$, 求边 a 的长度. $a=4\sqrt{2}$ **or** $2\sqrt{5}$.

解析. 解三角形. 过程略.

12. 解三角方程.

(1)

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{4},$$

其中 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$. $x\in\left\{\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right), \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right\}$.

解析. 利用复合函数可化为最简三角方程的三角方程.

$$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right],$$

$$\begin{aligned}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{4} &\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi\pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right), k\in\mathbb{Z}\\ &\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=\pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\\ &\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right),\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}.\end{aligned}$$

(2)

$$\sin 3x=\cos 2x.$$

$x\in\left\{x|x=\dfrac{2k\pi}{5}+\dfrac{\pi}{10},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

解析. 利用简单三角变换可化为最简三角方程的三角方程.

$$\begin{aligned}\sin 3x=\cos 2x &\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\cos 2x\\ &\Rightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x\\ &\Rightarrow 3x-\frac{\pi}{2}=2x+2k\pi, k\in\mathbb{Z},\ \text{or}\ 3x-\frac{\pi}{2}+2x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ &\Rightarrow x\in\left\{x|x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ \text{or}\ x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\right\}\\ &\Rightarrow x\in\left\{x|x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{10},k\in\mathbb{Z}\right\}.\end{aligned}$$

13. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10},\tan\beta=-\dfrac{1}{7},\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right),\beta\in(0,\pi)$,

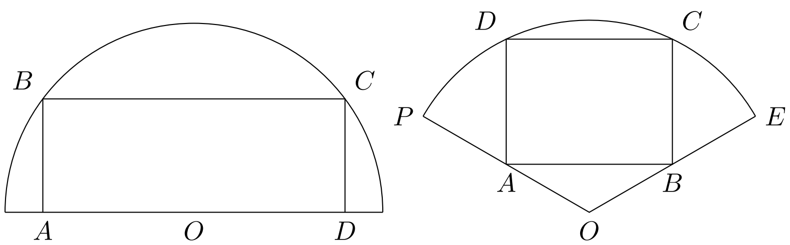
(1) 求 $\sin(2\alpha-\beta)$. $\sin(2\alpha-\beta)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

解析. 三角变换. 过程略.

(2) 求 $2\alpha-\beta$. $2\alpha-\beta=-\dfrac{3\pi}{4}$.

解析. 反三角函数的基本运用. 过程略.

14. 为建设方舱医院, 某区政府考察了甲, 乙两块空地, 其中甲地是一半径 2 千米的半圆, 乙地是一圆心角为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的扇形, 其半径可视情况开辟. 受条件限制, 方舱必须建设为空地的内接矩形, 如图所示.



(1) 若选定在甲地建设, 求方舱面积的最大值. 4km^2

解析. 三角函数的极值性; 三角变换.

连接 OB, 设 $\angle AOB=\theta,\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 有 $OB=2\text{km},\angle BAO=\dfrac{\pi}{2}$, 显然有 $OA=2\cos\theta\text{km},AB=2\sin\theta\text{km}$, 有

$$\begin{aligned}\max_{\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} S&=\max_{\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}(2\cdot OA\cdot AB)\\&=\max_{\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}(8\sin\theta\cos\theta)\,\text{km}^2\\&=\max_{\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}(4\sin 2\theta)\text{km}^2\\&=4\sin 2\theta\big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}\text{km}^2\\&=4\text{km}^2.\end{aligned}$$

(2) 若选定在乙地建设, 那么为了使乙地方舱的最大面积不小于甲地的, 则至少需要开辟多少长度的半径? $2\sqrt[4]{3}$km.

解析. 三角函数的极值性; 三角变换.

连接 OD,OC, 设 $\angle AOD=\theta,\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right),OP=OE=r$. 有 $\angle OAD=\dfrac{2\pi}{3}$, 有

$$\frac{r}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{AD}{\sin\theta}-\frac{OA}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}\Rightarrow AD=\frac{2}{\sqrt{3}}r\sin\theta,OA=\frac{2}{\sqrt{3}}r\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right).$$

在 $\triangle AOB$ 中有 $OA=OB,\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$, 有 $\angle OBA=\dfrac{\pi}{6},AB=\sqrt{3}OA$. 于是有 $AB=2r\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$.

$$\begin{aligned}S&=S(r,\theta)\\&=AD\cdot AB\\&=\frac{4}{\sqrt{3}}r^2\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}r^2\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\frac{\pi}{3}\right]\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}r^2\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\right],r\in(0,+\infty),\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

二元函数 $S=S(r,\theta)$ 在定义域内连续且对 r,θ 的偏导数均存在. 下求 S 关于 θ 的偏导:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial\theta}=S_\theta&==\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{S(r,\theta+\Delta\theta)-S(r,\theta)}{\Delta\theta}\\&=-\frac{4\sqrt{3}r^2\sin\left(\frac{6\theta-\pi}{3}\right)}{3}.\end{aligned}$$

考虑 $\dfrac{\partial S}{\partial\theta}=0$, 有 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$, 且对 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right):\dfrac{\partial S}{\partial\theta}>0$, 对 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right):\dfrac{\partial S}{\partial\theta}<0$.

故 $S(r,\theta)$ 在 r 恒定的时候, 在 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 取到极大值 $\frac{1}{\sqrt{3}}r^2\geq 4\mathrm{km}^2$. 因此至少开辟$2\sqrt[4]{3}\mathrm{km}$.

Section 3 附加题

15. 设 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{5\pi}{6}\right)+2\cos^2\frac{\omega x}{2}(\omega>0)$,

(1) 若 $f(x)$ 的图像在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 中有且只有一个对称中心, 求 ω 的取值范围. $\omega\in[1,4)$.

解析. 三角函数图像的广义奇偶性; 三角变换.

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin\left(\omega x+\frac{5\pi}{6}\right)+1+\cos\omega x\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\frac{1}{2}\cos\omega x+\cos\omega x+1\\&=\frac{3}{2}\cos\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+1\\&=\sqrt{3}\sin\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)+1.\end{aligned}$$

由 $\omega>0,x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 显然有 $\omega x+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\omega+\frac{2\pi}{3}\right]$. 则有

$$\begin{cases}\pi\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\omega+\frac{2\pi}{3}\right]\Rightarrow\pi\leq\frac{\pi}{3}\omega+\frac{2\pi}{3}\Rightarrow 1\leq\omega\\[2ex] 2\pi\notin\left[\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\omega+\frac{2\pi}{3}\right]\Rightarrow 2\pi>\frac{\pi}{3}\omega+\frac{2\pi}{3}\Rightarrow 4>\omega\end{cases}\Rightarrow\omega\in[1,4).$$

(2) 若 $\exists a\in\mathbb{R}:f(x)$ 在 $\left[a-\frac{\pi}{6},a+\frac{\pi}{6}\right]$ 上能同时取到最大值和最小值, 且方程 $2f(x)=5$ 在 $[0,2\pi]$ 内至多有 7 个实数解, 求该方程在 $[0,2\pi]$ 内所有解之和的取值范围. $\left[6\pi,\frac{23\pi}{3}\right]$.

解析. 三角函数的最值性, 三角方程.

$$\begin{aligned}2f(x)=5\Rightarrow\sin\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)&=\frac{\sqrt{3}}{2}\\&\Rightarrow\omega x+\frac{2\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{3}\text{ or }\omega+\frac{2\pi}{3}=2k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\\&\Rightarrow\omega x=2k\pi-\frac{\pi}{3}\text{ or }\omega x=2k\pi,k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\exists a\in\mathbb{R}\Rightarrow\frac{T}{2}\leq\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{\pi}{\omega}\leq\frac{\pi}{3}\Rightarrow\omega\geq 3.$$

ωx 所对应的值为 $\left\{0,\frac{5\pi}{3},2\pi,\frac{11\pi}{3},4\pi,\frac{17\pi}{3},6\pi\right\}$, 注意到

$$\omega x\in[0,2\omega\pi]\supseteq[0,6\pi],$$

因此有

$$6\pi \le 2\omega\pi \le \frac{23\pi}{3} \Rightarrow \omega \in \left[3, \frac{23}{6}\right].$$

解的和为 $\frac{23\pi}{\omega}$, 即解的和的取值范围为 $\left[6\pi, \frac{23\pi}{3}\right]$.

Section 4 特别致谢

鸭鸭, **stOOrz__OwenXu**, **stOOrz__BubbleTea**, **Anthan** and **stOOrz__Jacky__Chen.** 提供初版答案参考.

stOOrz__AFOer__xrh and **stOOrz__Jasonying.** 指出预览版中出现的逻辑错误.