220427 反三角与向量 题目选解

Eason S.

Section 1 填空题

1. 下列各式正确的是 **(1) (3)**.

(1) $\arcsin\left(\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$;

(2) $\arcsin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

(3) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{5\pi}{6}$;

(4) $\sin\left(\arcsin\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}$;

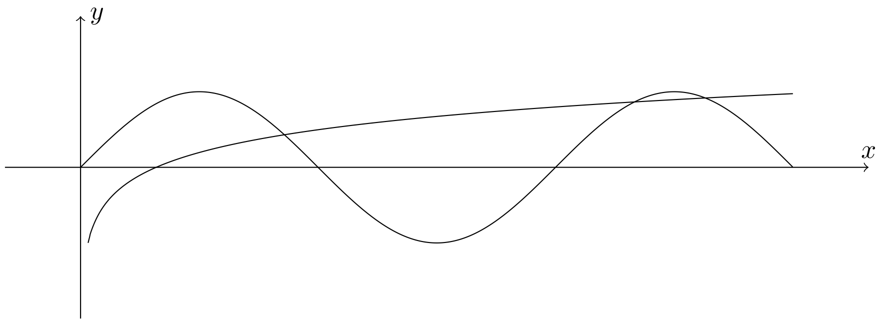
(5) $\sin\left[\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

解析. 反三角函数.

2. 方程 $\sin x=\lg x$ 的实根有 **3** 个.

解析. 可通过函数图像判断方程解的个数的超越方程.

$\lg x = 1$ iff. $x=10>3\pi$,



3. 满足 $\arccos 2x<\arccos(1-x)$ 的 x 的取值集合为 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$.

解析. 可化为代数不等式的三角不等式.

4. 已知 $A(0,3),B(2,0),C(-1,3)$ 与 $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ 方向相反的单位向量是 $(0,1)$.

解析. 向量的基本运算.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=5,b=8,C=60°$, 则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$ 的值为 -20.

解析. 向量的基本运算, 三角形.

6. 设函数 $y=\arctan x$ 的图像沿 x 轴正方向平移 2 个单位, 所得图像为 C_1, 又设图像 C_2 与 C_1 关于原点对称, 那么 C_2 所对应的函数是 $y=\arctan(x+2)$.

解析. 函数的变换.

$$\begin{aligned} y=\arctan x &\xrightarrow{\text{向右平移 2 个单位}} & y=\arctan(x-2) \\ &\xrightarrow{\text{关于原点对称}} & -y=\arctan(-x-2) \\ &\Rightarrow & y=\arctan(x+2). \end{aligned}$$

7. 函数 $y=2\arcsin 3x\left(0<x\leq\dfrac{1}{3}\right)$ 的值域为 $(0,\pi]$.

解析. 反三角函数.

8. 方程 $\sin 3x-\sin x=0$ 的解集是 $\left\{x|x=k\pi\ \mathbf{or}\ x=\dfrac{2k+1}{4}\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

解析. 可化为代数方程的三角方程.

$$\begin{aligned} \sin 3x-\sin x=0 &\Rightarrow \sin 3x=\sin x \\ &\Rightarrow 3x=x+2k\pi \text{ or } 3x=\pi-x+2k\pi,k\in\mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x=k\pi \text{ or } 4x=\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x=k\pi \text{ or } x=\frac{2k+1}{4}\pi,k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

9. 函数 $y=\sin x,x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 的反函数为 $y=\pi-\arcsin x,x\in[-1,1]$.

解析. 反三角函数.

10. 方程 $\sqrt{5\cos x+\cos 2x}+\sin x=0$ 在 $[0,2\pi]$ 上的解集是 $\left\{2\pi-\arccos\dfrac{1}{3}\right\}$.

解析. 三角方程.

$$\begin{aligned} \sqrt{5\cos x+\cos 2x}+\sin x=0,x\in[0,2\pi] &\Rightarrow 5\cos x+\cos 2x=\sin^2 x \text{ and } \sin x\leq 0 \text{ and } x\in[0,2\pi] \\ &\Rightarrow 5\cos x+2\cos^2 x-1=1-\cos^2 x,x\in[\pi,2\pi] \\ &\Rightarrow 2\cos^2 x+5\cos x-2=0,x\in[\pi,2\pi] \\ &\Rightarrow (3\cos x-1)(\cos x+2)=0,x\in[\pi,2\pi] \\ &\Rightarrow \cos x=\frac{1}{3} \text{ or } \cos x=-2,x\in[\pi,2\pi] \\ &\Rightarrow x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z} \text{ and } x\in[\pi,2\pi] \\ &\Rightarrow x=2\pi-\arccos\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2,BC=3,\angle ABC=60°,AD$ 为 BC 边上的高, O 为 AD 的中点, 若 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BC}$, 其中 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 则 $\lambda+\mu$ 等于 $\dfrac{2}{3}$.

解析. 向量的线性组合.

显然有

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC},$$

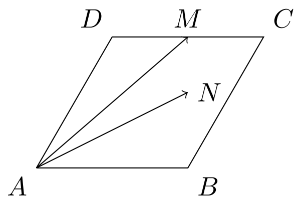
又 O 为 AD 中点, 有

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC},$$

于是有 $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{6}, \lambda + \mu = \frac{2}{3}$.

12. 如图, 菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD = 60°$, M 为 DC 的中点, 若 N 为菱形内任意一点 (含边界), 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的最大值为 9.

解析. 向量几何综合.



由向量的内积的定义, 有

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \left|\overrightarrow{AM}\right| \mathrm{Prj}_{\overrightarrow{AM}} \overrightarrow{AN},$$

于是有

$$\begin{aligned} \max\left(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}\right) &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= 9. \end{aligned}$$

Section 2 解答题

13. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\cos^2 x + \sin x \cos x, x \in [0, \pi]$,

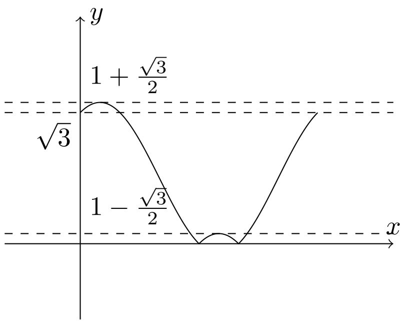
(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间. $\left[0, \frac{\pi}{12}\right], \left[\frac{7\pi}{12}, \pi\right]$.

解析. 三角函数的单调性.

$$f(x) = \sqrt{3}\cos^2 x + \sin x \cos x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) 如果关于 x 的方程 $|f(x)| = m$, 在区间 $(0, \pi)$ 上有两个不同的实根, 求实数 m 的取值范围. $m \in \{0\} \cup \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

解析. 利用图像解方程.



14. 甲船在 A 处观察到乙船在它的北偏东 60° 方向的 B 处, 两船相距 a 海里, 乙船正向北行驶, 若甲船是乙船速度的 $\sqrt{3}$ 倍, 问甲船应取什么方向前进才能在最短时间内追上乙船? 此时乙船行驶多少海里? **北偏东 30°; a 海里**.

解析. 太水了, 不写.

15. 已知 $\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)\,,\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$, 其中 $0<\alpha<\beta<\pi$,

(1) 求证: $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 互相垂直.

解析. 向量垂直 (正交) $\Leftrightarrow$ 内积为 0.

(2) 若 $k\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-k\vec{b}$ 的长度相等, 求 $\beta-\alpha$ 的值, 其中 $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $\frac{\pi}{2}$.

解析. 向量的模相等 $\Leftrightarrow$ 向量的模的平方相等 $\Leftrightarrow$ 向量与自身的内积相等.

$$
\begin{aligned}
\left|k\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-k\vec{b}\right| &\Rightarrow \left|k\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}-k\vec{b}\right|^2\\
&\Rightarrow \left(k\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(a-k\vec{b}\right)^2\\
&\Rightarrow k^2\left|\vec{a}\right|^2+2k\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2\left|\vec{b}\right|^2.
\end{aligned}
$$

有 $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=1$, 有

$$k^2+2k\vec{a}\cdot\vec{b}+1=1-2k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2,$$

有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$$

即

$$(\cos\alpha,\sin\alpha)\cdot(\cos\beta,\sin\beta)=0,$$

即

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=4\cos(\beta-\alpha)=0.$$

因为有 $0<\alpha<\beta<\pi$, 有 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Section 3 附加题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = 2$.

(1) 求 $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2$ 的值. 8.

解析. 向量的基础应用.

显然有

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4,$$

即

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 4,$$

又 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$, 有

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 8.$$

(2) 当 $\triangle ABC$ 的面积最大时, 求 $\angle A$ 的大小. $\frac{\pi}{3}$.

解析. 三角形面积公式, 同角三角比.

由向量的内积的定义, 有 $\cos\angle BAC = \dfrac{2}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}$, 有

$$\sin\angle BAC = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)^2} = \frac{\sqrt{\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|\right)^2 - 4}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}.$$

由三角形正弦面积公式

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \sin\angle BAC \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|\right)^2 - 4} \\ &\le \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right|}{2}\right)^4 - 4}, \end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = 2$, 即 $\cos\angle BAC = \frac{1}{2}$, 即 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$.