220507 向量 题目选解

Eason S.

Section 1 填空题

Problem 1.1

已知作用在坐标原点的三个力 $\vec{F_1}=(3,4), \vec{F_2}=(2,-5), \vec{F_3}=(3,1)$, 则它们的合力大小为?.

Solution to Problem 1.1

8. 向量的坐标表达, 向量的和, 向量的模.

Problem 1.2

已知向量 $\vec{a}=(2,1), A(1,2)$, 若向量 $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{a}$, 且 $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\sqrt{5}$, 则 B 的坐标为?.

Solution to Problem 1.2

$(5,4)$ **or** $(-3,0)$. 向量的平行的等价命题.

Problem 1.3

已知 $P_1(4,-3), P_2(-2,6)$, 若点 P 在线段 P_2P_1 的延长线上, $\left|\overrightarrow{P_1P}\right| = \frac{4}{5}\left|\overrightarrow{PP_2}\right|$, 则点 P 的坐标是?.

Solution to Problem 1.3

$(28,-39)$. 定比分点定理.

Problem 1.4

若非零向量 $\vec{a}=(x,2x),\vec{b}=(-3x,2)$, 且 $\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, 则 x 的取值范围是?.

Solution to Problem 1.4

$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3},0\right)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$. 向量内积取值范围与夹角的联系 (注意钝角的条件为: 内积为负且**不共线**).

Problem 1.5

设向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ, 且 $\vec{a}=(3,3),2\vec{b}-\vec{a}=(-1,1)$, 则 $\cos\theta=$?.

Solution to Problem 1.5

$\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 向量的坐标运算, 向量的内积.

Problem 1.6

已知 $|\vec{a}|=6,\left|\vec{b}\right|=4,\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60°, 则 $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)=$?, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$?.

Solution to Problem 1.6

$-72; 2\sqrt{19}$. 向量乘法对加法的分配律, 向量加法的平行四边形法则, 三角形中的余弦定理.

Problem 1.7

若 $\vec{a}=(2,3),\vec{b}=(-4,7),\vec{a}+\vec{c}=0$, 则 $\vec{c}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为?.

Solution to Problem 1.7

$-\frac{\sqrt{65}}{5}$. 利用 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=\vec{a}\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$ (投影与内积的联系).

Problem 1.8

若 $\overrightarrow{OA}=(2,3),\overrightarrow{OB}=(-4,7),\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OA}$. 若 P,A,B 三点共线, 则 $\overrightarrow{OP}=?$.

Solution to Problem 1.8

$\left(0,\frac{13}{3}\right)$. 点共线与线性组合系数之间的联系.

Problem 1.9

在 $\triangle OAB$ 中, $\overrightarrow{OA}=(2\cos\alpha,2\sin\alpha)$, $\overrightarrow{OB}=(5cos\beta,5\sin\beta)$, 若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=8$, 则 $S_{\triangle OAB}=?$.

Solution to Problem 1.9

3. 向量的内积的定义. 本题直接使用 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\left\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right\rangle$ 随后解三角形较直接使用坐标内积更为简便.

Section 2 解答题

Problem 2.1

已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的直角坐标分别为 $A(3,4),B(0,0),C(c,0)$,

(1) 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, 求 c 的值.

(2) 若 $c=5$, 求 $\sin A$ 的值.

Solution to Problem 2.1

$\frac{25}{3};\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 向量的坐标内积, 过程略.

Problem 2.2

已知 $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=1$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b},\vec{y}=3\vec{b}-\vec{a}$, 求 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 的夹角.

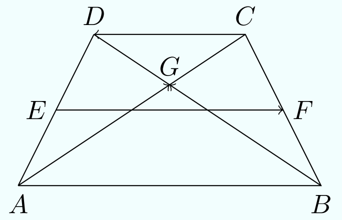
Solution to Problem 2.2

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{21}}{14}\right)$. 向量的内积.

$$\begin{aligned}
\cos\langle\vec{x},\vec{y}\rangle &= \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|}\\
&= \frac{-2\vec{a}^2+7\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}^2}{\sqrt{\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)^2\left(3\vec{b}-\vec{a}\right)^2}}\\
&= \frac{-2|\vec{a}|^2+5|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{\pi}{3}-3\left|\vec{b}\right|^2}{\sqrt{\left(4\vec{a}^2+\vec{b}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\left(9\vec{b}^2+\vec{a}^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}}\\
&= \frac{-2+\frac{7}{2}-3}{\sqrt{3\times 7}}\\
&= -\frac{\sqrt{21}}{14}.
\end{aligned}$$

Problem 2.3

如图, 在梯形 $ABCD$ 中 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\vec{a}$, G 为对角线 AC,BD 的交点, E,F 分别是腰 AD,BC 的中点, 求向量 $\overrightarrow{EF}$ 和 $\overrightarrow{AG}$.



Solution to Problem 2.3

$\overrightarrow{EF}=\frac{3}{4}\vec{a},\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$. 向量的线性组合.

Problem 2.4

已知向量 $\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(-3,2)$, 向量 $\vec{x}=k\vec{a}+\vec{b},\vec{y}=\vec{a}-3\vec{b}$.

(1) 当 k 为何值时, 向量 $\vec{x}\perp\vec{y}$.

(2) 若向量 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 的夹角为钝角, 求实数 k 的取值范围.

Solution to Problem 2.4

$k=19; k\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3},19\right)$. 向量内积取值范围与夹角的联系.

Problem 2.5

已知向量 $\vec{a}=(\sin x,\cos x),\vec{b}=(\sin x,\sin x),\vec{c}=(-1,0)$.

(1) 若 $x=\frac{\pi}{3}$, 求向量 $\vec{a},\vec{c}$ 的夹角 θ.

(2) 若 $x\in\left[-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right]$, 函数 $f(x)=\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$, 求实数 λ 的值.

Solution to Problem 2.5

$\theta=\frac{5\pi}{6};\lambda=\frac{1}{2}$ **or** $\lambda=-\sqrt{2}-1$. 向量的内积的定义; 三角函数的极值.

(1) $\vec{a}=\left(\sin\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6}\right),\vec{c}=(-1,0)=(\cos\pi,\sin\pi)\Rightarrow\theta=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

(2) $f(x)=\lambda\left(\sin^2x+\sin x\cos x\right)=\lambda\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\right]$.

$x\in\left[-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\pi,\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

考虑 $\lambda>0$, 有 $x=\frac{\pi}{4}$ 时 $f_{\max}(x)=\lambda=\frac{1}{2}$, 即 $\lambda=\frac{1}{2}$;

考虑 $\lambda<0$, 有 $x=-\frac{\pi}{8}$ 时 $f_{\max}(x)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}\lambda=\frac{1}{2}$, 即 $\lambda=-\sqrt{2}-1$.

Section 3 附加题

Problem 3.1

已知向量 $\vec{m}=(\sqrt{3},1)$, 向量 $\vec{n}$ 是与向量 $\vec{m}$ 夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的单位向量.

(1) 求向量 $\vec{n}$.

(2) 若向量 $\vec{n}$ 与向量 $\vec{q}=\left(-\sqrt{3},1\right)$ 平行, 与向量 $\vec{p}=\left(\sqrt{3}x^2,x-y^2\right)$ 垂直, 求 $t=y^2+5x+4$ 的最大值.

Solution to Problem 3.1

$\vec{n}=(0,1)$ **or** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$; $t_{\max}=\frac{17}{3}$. 向量内积取值范围与夹角的联系 / 变换矩阵; 二次函数最值.

(1) **法一:** $\vec{m}=\left(2\cos\frac{\pi}{6},2\sin\frac{\pi}{6}\right)$, 又 $\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\pi}{3}$, 有 $\vec{n}=\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right),\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\right)=(0,1)$ 或 $\vec{n}=\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right),\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

法二:

$$k\boldsymbol{n}=\boldsymbol{m}\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}(\text{顺时针旋转}\varphi),$$

其中 $\varphi=\pm\frac{\pi}{3},k\in\mathbb{R}$, 于是有

$$\begin{aligned}k\boldsymbol{n}&=\boldsymbol{m}\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\\&=\left[\sqrt{3},1\right]\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}\\&=\left[\sqrt{3},1\right]\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\\&=\left[\sqrt{3},-1\right],k=2,\boldsymbol{n}=\left[\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right].\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}k\boldsymbol{n}&=\boldsymbol{m}\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\\&=\left[\sqrt{3},1\right]\begin{bmatrix}\cos-\frac{\pi}{3} & -\sin-\frac{\pi}{3}\\ \sin-\frac{\pi}{3} & \cos-\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}\\&=\left[\sqrt{3},1\right]\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\\&=[0,2],k=2,\boldsymbol{n}=[0,1].\end{aligned}$$

(2)

$$\vec{n}\parallel\left(-\sqrt{3},1\right)\Rightarrow\vec{n}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}\vec{n}\perp\left(\sqrt{3}x^2,x-y^2\right)&\Rightarrow\frac{3}{2}x^2-\frac{x}{2}+\frac{y^2}{2}=0\\&\Rightarrow y^2=x-3x^2\geq 0\\&\Rightarrow x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]\\&\Rightarrow t=-3x^2+6x+4=-3(x-1)^2+7.\end{aligned}$$

$$t_{\max} = \frac{17}{3} \text{ iff. } (x, y) = \left(\frac{1}{3}, 0\right).$$