220518 向量与复数 题目选解

Eason S.

Contents

Section 1 复数

虚数的定义: 虚数可看作**实数与虚数单位** i的乘积, 其中规定 $i^2=-1$. 因此, 0 可同时视为虚数和实数.

虚数单位: 虚数单位一般排版为 i 或 i, 本作者的系列作品将以前者 i 进行排版. 若遇到有 i 作为变量的情景, 会选用 j 对虚数单位进行代替, 但会补充说明.

虚数和负数算数平方根: 我们可以说 $i=\sqrt{-1},-i=-\sqrt{-1}$, 但是 $i=-\sqrt{-1},-i=\sqrt{-1}$ 的对应也未尝不可. 换而言之, **对于负数的开根号对应的虚数并没有自然的定义**. [3]

虚数的性质: 可以在虚数用 ki 中的 k 定义序, 但是虚数上定义的序和复数的运算是不相容的. 即, 虚部和实部均不为 0 的数**不可进行简单的大小比较** (无法定义与加法和乘法相融的序). [3]

虚数集的表示: 虚数集**没有公认的单字母表达方式**, 可选的有 $i\mathbb{R},\mathbb{I},\operatorname{Im}$,$\Im$, 本作者的系列作品将以 $\mathbb{I}$ 的方式进行排版.

复数的定义: 复数为实数的延伸, **可以一般的表达为** $z=a+bi,a,b\in\mathbb{R}$.

复数的虚部与实部: 我们定义 z 的**实部**为 $\Re(z)=\operatorname{Re}z=a$, **虚部**为 $\Im(z)=\operatorname{Im}z=b$. 本作者的系列作品将以前者排版.

复数集的表示: 记复数集 (域) 为 $\mathbb{C}$.

复数域上的序: 简而言之, 在 $\mathbb{C}$ 上**不可建立与其加法和乘法相融的全序关系**, 即不存在全序 $\preceq$, 使得 $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}:0\preceq z_1,z_2\Rightarrow 0\preceq z_1,z_2,0\preceq z_1,z_2$. [2]

复平面: 绘制笛卡尔坐标系, 横轴称之为**实数轴**, 纵轴称之为**虚数轴**, 则该平面上的点与 $\mathbb{C}$ 中的元素**一一对应**.

复数与极坐标: 定义复数的**模长/绝对值**为 $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}>0$, 辐角 $\varphi=\arg z\in(-\pi,\pi]$, 有 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$. 此即为**极坐标**.

复数的三角形式: 有 $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, 此即为**三角形式**.

复数的指数形式: 由**欧拉公式**$e^{ix}=\cos x+i\sin x$, 有 $z=re^{i\varphi}$, 此即为**指数形式**. [2]

共轭复数: 复数 $z=a+bi$ 的**共轭复数**$\overline{z}=a-bi$, $z=re^{i\theta}\Rightarrow\overline{z}=re^{-i\theta}$. 显然有对于复数 z 与 w 有 $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}, \overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}$. 同时有**在复数域上的函数 ϕ 若能表达成实系数幂级数**, 有 $\phi(z)=\overline{\phi}(z)$. [1]

复数的距离: 定义复数 z,w 的**距离**为 $d(z,w)=|z-w|=|w-z|$. 这使复数域变为了**度量空间**, 我们亦可以谈极限和连续. 加法, 乘法和除法都是连续的运算. [2] [4]

实数的复指数幂: 定义**实数的复指数幂** $a^z=e^{z\cdot\ln a}$.

复数与矩阵: 复数可看作**旋转及缩放二维位置矢量的 2×2 实矩阵**, 即

$$a+bi\leftrightarrow\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}=r\exp\left(\varphi\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right).$$

复数的绝对值即为对应矩阵 $\mathbf{Z}$ 的行列式的值的平方根 $\sqrt{\det\mathbf{Z}}$.

代数学基本定理, 复数域的代数封闭性: 满足 $p(z)=0$ 的复数 z 是多项式 p 的**根**, 而**代数学基本定理**指出, 所有 n 次多项式, 无论实数或复数系数, 都恰好有 n 个复数根. 该定理等价于**复数域是代数闭域**.

通过环与理想定义复数域: 复数域是实数域的**代数闭包**, 是**多项式环**$\mathbb{R}[X]$ 经由**理想**$\langle X^2+1\rangle$ 显生出的**商环**: [2]

$$\mathbb{C}=\mathbb{R}[X]/\left(X^2+1\right).$$

多项式 X^2+1 是一个**不可约多项式**, 使得复数环是一**域**, X 在商环内对应着虚数单位 i.

Section 2 填空题

Problem 2.1

已知三点 $A(2,3),B(4,3),C\left(5.\dfrac{m}{2}\right)$ 在同一直线上, 则 m 的值为?.

Solution to Problem 2.1

12. 直线的方程.

Problem 2.2

设 $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_2$ 是两个不共线的向量, 已知 $\overrightarrow{AB}=2\vec{e}_1+k\vec{e}_2, \overrightarrow{CB}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2, \overrightarrow{CD}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$, 则当 A,B,C 三点共线时, k 的值为?.

Solution to Problem 2.2

-8. 向量的平行.

Problem 2.3

已知 $z \in \mathbb{I}, \dfrac{z+2}{1-i} \in \mathbb{R}$, 则 z 的值为?.

Solution to Problem 2.3

$-2i$. 复数的运算.

Problem 2.4

计算:

$$\left\{\left[i^100 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5\right] + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}^2\right)\right\}(1+2i).$$

Solution to Problem 2.4

$-3+4i$. 复数的运算.

Problem 2.5

在复数范围内分解因式:

$$x^6 + 2x^4 - x^2 - 2.$$

Solution to Problem 2.5

$(x+1)(x-1)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)(x-i)(x+i)$. 复数下的因式分解, 实系数方程的复根.

Problem 2.6

已知关于 x 的方程 $x^2 - (2i-1)x + m - i = 0$ 有实根, 则实数 m 的值为?.

Solution to Problem 2.6

$\dfrac{1}{4}$. 实数运算的封闭性.

Problem 2.7

已知 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$, 以下四个关系式中能够成立的有?.

(1) $|z_1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq z_1 \leq 1$;

(2) $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$;

(3) $|z_1| + |z_2| = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2 = 0$;

(4) $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow z_1 = \pm z_2$.

Solution to Problem 2.7

(2)(3). 复数的模.

Problem 2.8

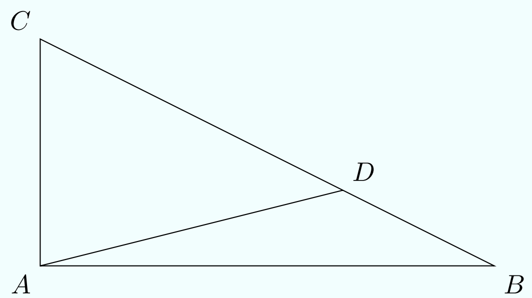
设 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $\dfrac{1-z}{1+z} = i$, 则 $|1+z|$ 的值为?.

Solution to Problem 2.8

$\sqrt{2}$. 复数的运算, 复数的模.

Problem 2.9

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ, AB = 6, D$ 在斜边 BC 上, $CD = 2DB$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ 的值为?.



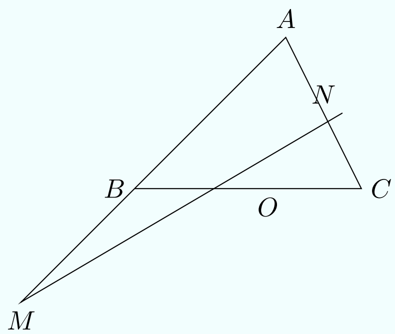
Solution to Problem 2.9

27. 向量的运算.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\right) \tag{1}$$
$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB} \tag{2}$$
$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right) \tag{3}$$
$$=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\right) \tag{4}$$
$$=\frac{2}{3}(0+36)\left(\text{注意到}AC\perp BC,\overrightarrow{AB}^2=AB^2=6^2=36\right) \tag{5}$$
$$=\frac{2}{3}\times 36 \tag{6}$$
$$=24. \tag{7}$$

Problem 2.10

如图所示: $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 BC 中点. 过点 O 的直线分别交直线 AB,AC 于不同两点 M,N. 若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$, 则 $m+n$ 的值为?.



Solution to Problem 2.10

2. Menelaus 定理.

由 Menelaus 定理显然有

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BO}{OC}\cdot\frac{CN}{NA}=1,$$

代入 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN},BO=OC$ 有

$$\frac{1}{1-m}\cdot\frac{n-1}{1}=1,$$

即

$$m+n=2$$

Problem 2.11

设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是平面内互不平行的三个向量, $x\in\mathbb{R}$, 有下列命题:

(1) 方程 $\vec{a}x^2+\vec{b}x+\vec{c}=\vec{0}(a\neq\vec{0})$ 不可能有两个不同的实数解;

(2) 方程 $\vec{a}x^2+\vec{b}x+\vec{c}=\vec{0}(a\neq\vec{0})$ 有实数解的充要条件是 $\vec{b}^2-4\vec{a}\cdot\vec{c}\geq 0$;

(3) 方程 $\vec{a}^2x^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}x+\vec{b}^2=0$ 有唯一的实数解 $x=-\dfrac{\vec{b}}{\vec{a}}$;

(4) 方程 $\vec{a}^2x^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}x+\vec{b}^2=0$ 没有实数解.

Solution to Problem 2.11

(1)(4). 向量的运算, 一元二次方程.

(1) 对方程 $\vec{a}x^2+\vec{b}x+\vec{c}=\vec{0}(a\neq\vec{0})$ 进行变形, 有

$$\vec{c}=-x^2\vec{a}-x\vec{b},$$

由平面向量分析基本定理可得, 该方程至多一解.

(2) 该方程是向量的方程, 不能按实系数一元二次方程的判别式进行判断 (此处不作证明).

(3) 该方程为实系数一元二次方程, 有判别式

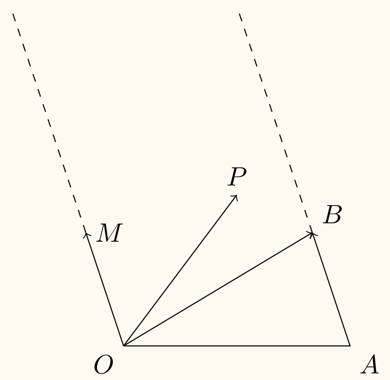
$$\Delta=4\vec{a}\cdot\vec{b}^2-4\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2<0,$$

则方程没有实数解.

(4) 正确.

Problem 2.12

如图, $OM\parallel AB$, 点 P 在由射线 OM, 线段 OB 及 AB 的延长线围成的区域内 (不含边界) 运动, 且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, 则 x 的取值范围是?; 当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时, y 的取值范围是?.



Solution to Problem 2.12

$(-\infty,0)$; $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$. 向量的运算.

由向量加法的平行四边形法则, OP 为平行四边形的对角线, 该四边形是以 OB 和 OA 的反向延长线为两邻边, 故 $x\in(-\infty,0)$.

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时, 要使 P 点落在指定区域内, 作 $\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, 作共线三点的 ODC 所在直线 $\parallel OB$, 交 OM 于 D, 交 AB 于 E.

显然有 $CD=\frac{1}{2}OB, CE=\frac{3}{2}OB$, 则 $y\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Section 3 解答题

Problem 3.1

已知复数 z_1 满足 $(z_1-2)(1+i)=1-i$, 复数 z_2 有 $\Im z_2=2$, 且 $z_1\cdot z_2\in\mathbb{R}$, 求 z_2.

Solution to Problem 3.1

$z_2=4+2i$. 复数的运算.

Problem 3.2

已知 $|\vec{a}|=\sqrt{2}, \left|\vec{b}\right|=2, \left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=45°$, 求使向量 $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角是锐角时的 λ 的取值范围.

Solution to Problem 3.2

$\lambda\in\left(-\infty,\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$. 向量的位置关系.

不妨设 $\vec{a}=(1,1),\vec{b}=(2,0)$, 则有 $\vec{a}+\lambda\vec{b}=(2\lambda+1,1),\lambda\vec{a}+\vec{b}=(\lambda+2,\lambda)$, 于是有 $\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)\left(\lambda\vec{a}+\vec{b}\right)=2\lambda^2+6\lambda+2$, 于是有

$$\begin{cases}2\lambda^2+6\lambda+2 > 0\\ 2\lambda+1\neq\frac{\lambda+2}{\lambda}\end{cases}$$

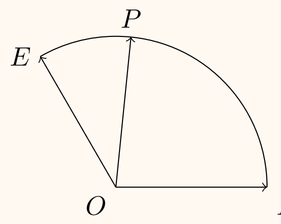
即可解出答案.

Problem 3.3

已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是两个不共线的非零向量,

(1) 设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=t\vec{b},t\in\mathbb{R},\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, 当 A,B,C 三点共线时, 求 t 的值.

(2) 如图, 若 $\vec{a}=\overrightarrow{OD},\vec{b}=\overrightarrow{OE},\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=120^\circ,|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=1$, 点 P 是以 O 为圆心的圆弧 $\widehat{DE}$ 上一动点, 设 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OD}+y\overrightarrow{OE},x,y\in\mathbb{R}$, 求 $x+y$ 的最大值.



Solution to Problem 3.3

$t=\frac{1}{2}$; $\max(x+y)=2$. 向量的运算, 向量的坐标表示.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b},\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\vec{A}+t\vec{b}$, 于是有 $-\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=-1:t\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

不妨令 $\overrightarrow{OD}=(1,0)$ 则有 $\overrightarrow{OE}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{OP}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, 其中 $\alpha\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$, 故

$$\left\{\begin{array}{rcl}x-\frac{y}{2}&=&\cos\alpha\\\frac{\sqrt{3}y}{2}&=&\sin\alpha\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcccl}y&=&\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{3}}&=&\frac{2\sqrt{3}\sin\alpha}{3}\\x&=&\frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}}+\cos\alpha&=&\frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{3}+\cos\alpha\end{array}\right.$$

于是有

$$x+y=\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right),$$

当且仅当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 即 $\overrightarrow{OP}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $x+y$ 取到最大值 2.

Section 4 附加题

Problem 4.1

已知 $\vec{a}=(3,0),\vec{b}=(-2,0),|\vec{c}|=1$, 求 $\min\left\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\right\rangle$.

Solution to Problem 4.1

$\arccos\frac{-2\sqrt{6}}{7}=\pi-\arcsin\frac{5}{7}$. 解析几何综合.

设 $\vec{c}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$, 则

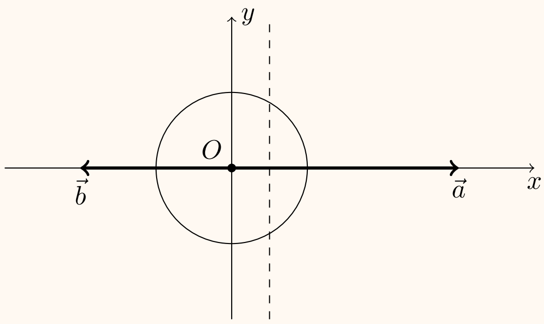
$$
\begin{aligned}
(\vec{a}-\vec{c})\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right) &= \vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c} & (8)\\
&= (3,0)\cdot(-2,0)-(3,0)\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi)-(\cos\varphi,\sin\varphi)\cdot(-2,0)+(\cos\varphi,\sin\varphi)^2 & (9)\\
&= -6-3\cos\varphi+2\cos\varphi+1 & (10)\\
&= -\cos\varphi-5. & (11)
\end{aligned}
$$

又有

$$
\begin{aligned}
\cos\left\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\right\rangle &= \frac{(\vec{a}-\vec{c})\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)}{|\vec{a}-\vec{c}|\cdot\left|\vec{b}-\vec{c}\right|} & (12)\\
&= \frac{-\cos\varphi-5}{|(3,0)-(\cos\varphi,\sin\varphi)|\cdot|(-2,0)-(\cos\varphi,\sin\varphi)|} & (13)\\
&= \frac{-\cos\varphi-5}{|(3-\cos\varphi,-\sin\varphi)|\cdot|(-2-\cos\varphi,-\sin\varphi)|} & (14)\\
&= \frac{-\cos\varphi-5}{\sqrt{(3-\cos\varphi)^2+(-\sin\varphi)^2}\cdot\sqrt{(-2-\cos\varphi)^2+(-\sin\varphi)^2}} & (15)\\
&= \frac{-\cos\varphi-5}{\sqrt{10-6\cos\varphi}\cdot\sqrt{5+4\cos\varphi}} & (16)\\
&= \frac{-\cos\varphi-5}{\sqrt{50+10\cos\varphi-24\cos^2\varphi}} & (17)\\
&\xlongequal{t\xlongequal{\text{def}}\cos\varphi\in[-1,1]} -\sqrt{\frac{(t+5)^2}{-24t^2+10t+50}} & (18)\\
&\xlongequal{p\xlongequal{\text{def}}t+5\in[5,6]} -\sqrt{\frac{p^2}{-24p^2+250p-600}} & (19)\\
&= -\sqrt{\frac{1}{-\frac{600}{p^2}+\frac{250}{p}-24}} & (20)\\
&= -\sqrt{\frac{1}{-600\left(\frac{1}{p}-\frac{5}{24}\right)^2+\frac{49}{24}}} & (21)\\
&\xlongequal{s=\frac{1}{p}\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{4}\right]} -\sqrt{\frac{1}{-600\left(s-\frac{5}{24}\right)^2+\frac{49}{24}}} & (22)\\
&\xlongequal{f=-600\left(s-\frac{5}{24}\right)^2+\frac{49}{24}\in\left[1,\frac{49}{24}\right]} -\sqrt{\frac{1}{f}} & (23)\\
&\in\left[-1,-\frac{2\sqrt{6}}{7}\right], & (24)
\end{aligned}
$$

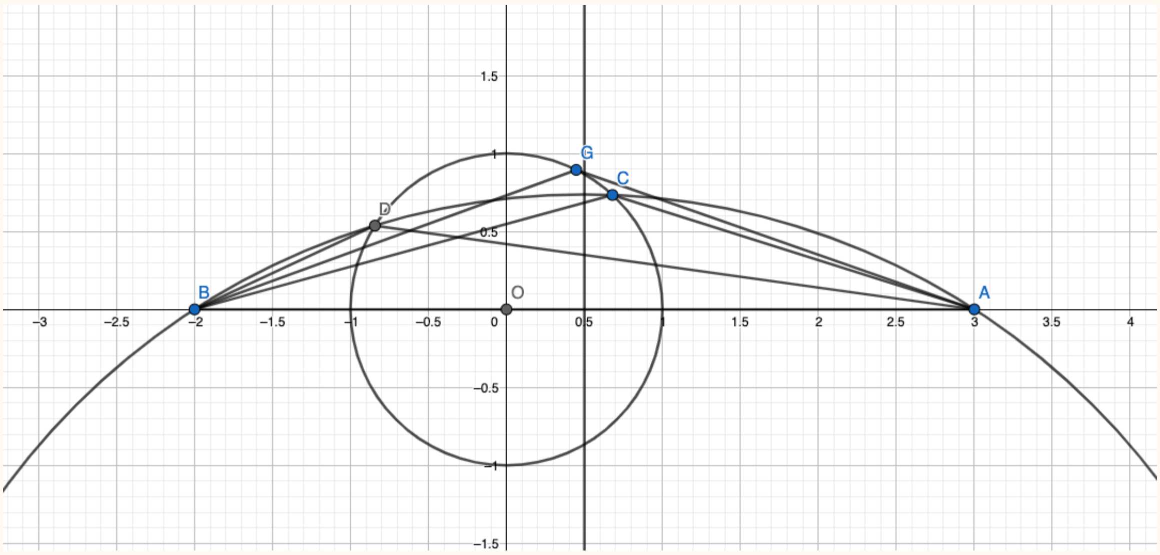
于是有

$$
\left\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\right\rangle\in\left[\arccos\left(-\frac{2\sqrt{6}}{7}\right),\pi\right].
$$



另解. 设 $O(0,0),A(3,0),B(-2,0),C(\cos\varphi,\sin\varphi)$. 我们首先考虑 $C\in x$ 的情况, 此时夹角为 π, 显然并非最小值. 因此, $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}t\right)$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆圆心, $\odot P$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆.

若 $\odot P$ 与单位圆 $\odot O$ (点 C 的轨迹) 相交于两点 C,D (下图), 则对于 $\odot O$ 的 $\overset{\frown}{CD}$ 上的任何一点 G, 都会有



$$\angle BCA=\angle BDA>\angle BGA,$$

因此当 $\angle BCA$ 取到最小值的时候, $\odot P$ 必然与 $\odot O$ 相切, 于是有

$$|OP|=\frac{1}{2}\sqrt{1+t^2}=|CP|-1=|AP|-1=\frac{1}{2}\sqrt{25+t^2}-1$$

显然有

$$\sqrt{1+t^2}+2=\sqrt{25+t^2},$$

有 $t=-2\sqrt{6}$, 外接圆半径即为 $R=\frac{7}{2}$.
由正弦定理

$$\frac{AB}{\sin\angle BCA}=\frac{5}{\sin\angle BCA}=2R=7,$$

有 $\sin\angle BCA=\frac{5}{7}$, 即 $\angle BCA=\pi-\arcsin\frac{5}{7}$.

References

[1] Wikipedia. Complex conjugate, May 2022.

[2] Wikipedia. Complex number, May 2022.

[3] Wikipedia. Imaginary number, May 2022.

[4] Wikipedia. Metric space, May 2022.