7 幂指对测验（难题）

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 10 月 27 日

(1) 已知 $a>1, b>1$, 求 $\dfrac{b^2}{a-1}+\dfrac{a^2}{b-1}$ 的最小值.

我也不知道为什么我最后一步就是卡住了.

法一 (基本不等式 轮换求和):

$$\begin{aligned}
a>1, b>1 &\Rightarrow a-1>0, b-1>0 \\
&\Rightarrow \frac{b^2}{a-1}+4(a-1)\geq 4b, \frac{a^2}{b-1}+4(b-1)\geq 4a \\
&\Rightarrow \frac{b^2}{a-1}+4(a-1)+\frac{a^2}{b-1}+4(b-1)\geq 4a+4b \\
&\Rightarrow \frac{b^2}{a-1}+\frac{a^2}{b-1}\geq 8,
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $\dfrac{b^2}{a-1}=4(a-1), \dfrac{a^2}{b-1}=4(b-1)$ 即 $a=b=2$.

法二 (基本不等式 换元): 令 $a-1=m, b-1=n(m>0, n>0)$, 则有:

$$\begin{aligned}
\frac{b^2}{a-1}+\frac{a^2}{b-1} &= \frac{(n+1)^2}{m}+\frac{(m+1)^2}{n} \\
&= \frac{n^3+2n^2+n+m^3+2m^2+m}{mn} \\
&= \frac{(m+n)(m^2+n^2-mn)+2(m^2+n^2)+m+n}{mn} \\
&\geq \frac{2\sqrt{mn}(2mn-mn)+2\times 2mn+2\sqrt{mn}}{mn} \\
&= 2\sqrt{mn}+4+\frac{8}{\sqrt{mn}} \\
&\geq 8,
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当

$$\begin{cases} m = n \\ 2\sqrt{mn} = \dfrac{8}{\sqrt{mn}} \end{cases}$$

即 $m=n=2$ 即 $a=b=1$.

法三 (基本不等式 暴力):

$$\begin{aligned}
\frac{b^2}{a-1}+\frac{a^2}{b-1} &= \frac{\left(\frac{b^2}{a-1}+\frac{a^2}{b-1}\right)\cdot[(a-1)+(b-1)]}{a+b-2} \\
&= \frac{b^2+\frac{b^2(b-1)}{a-1}+\frac{a^2(a-1)}{b-1}+a^2}{a+b-2} \\
&\geq \frac{a^2+b^2+2\sqrt{\frac{b^2(b-1)}{a-1}\cdot\frac{a^2(a-1)}{b-1}}}{a+b-2} \\
&= \frac{a^2+b^2+2ab}{a+b-2} \\
&= \frac{(a+b)^2}{a+b-2} \\
&= \frac{[(a+b)^2]-4+4}{a+b-2} \\
&= \frac{(a+b+2)(a+b-2)+4}{a+b-2} \\
&= a+b+2+\frac{4}{a+b-2} \\
&= a+b-2+\frac{4}{a+b-2}+4 \\
&\geq 4+2\sqrt{4} \\
&= 8,
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当

$$\begin{cases}
\dfrac{b^2(b-1)}{a-1} = \dfrac{a^2(a-1)}{b-1} \\[2ex]
a+b-2 = \dfrac{4}{a+b-2}
\end{cases}$$

即 $a=b=1$.

法四 (Cauchy–Schwarz 不等式):

$$
\begin{aligned}
\frac{b^2}{a-1}+\frac{a^2}{b-1} &\geq \frac{(a+b)^2}{a+b-2} \\
&= \frac{[(a+b)^2]-4+4}{a+b-2} \\
&= \frac{(a+b+2)(a+b-2)+4}{a+b-2} \\
&= a+b+2+\frac{4}{a+b-2} \\
&= a+b-2+\frac{4}{a+b-2}+4 \\
&\geq 4+2\sqrt{4} \\
&= 8,
\end{aligned}
$$

等号成立当且仅当

$$
\begin{cases}
\dfrac{b}{a-1} = \dfrac{a}{b-1} \\
a+b-2 = \dfrac{4}{a+b-2}
\end{cases}
$$

即 $a=b=1$.

Cauchy–Schwarz 不等式的 Sedrakyan 表述: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{u^2}{v} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} u\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} v}$, 等号成立当且仅当 $\dfrac{u_1}{v_1}=\dfrac{u_2}{v_2}=\cdots=\dfrac{u_n}{v_n}$.

Cauchy–Schwarz 不等式: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2$, 等号成立当且仅当 $\dfrac{u_1}{v_1}=\dfrac{u_2}{v_2}=\cdots=\dfrac{u_n}{v_n}$.