15 幂函数、指数函数'（难题）

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 12 月 29 日

1. 函数 $y = f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 且对于任意实数 x 都有 $f(x+1) = f(x-1)$ 成立. 当 $x \in [1,2]$ 时, $f(x) = 2^x$, 求 $x \in [2k-1, 2k+1]$(k为整数) 时 $y = f(x)$ 的解析式为?.

   有 $f(x+1) = f(x-1)$, 即 $f(x) = f(x+2)$, 故有

$$\forall x \in [2k-1, 2k+1](k \in \mathbb{Z}), f(x) = f(x-2k), x - 2k \in [-1, 1].$$

   考虑 $x \in [-1, 0]$, 有 $x + 2 \in [1, 2]$, $f(x) = f(x+2) = 2^{x+2}$.

   考虑 $x \in (0, 1]$, 有 $-x \in [-1, 0)$, $f(x) = f(-x) = 2^{-x+2}$.

   考虑 $x \in [2k-1, 2k]$, 有 $x - 2k \in [-1, 0]$, $f(x) = f(x-2k) = 2^{x-2k+2}$.

   考虑 $x \in (2k, 2k+1]$, 有 $x - 2k \in (0, 1]$, $f(x) = f(x-2k) = 2^{-x+2k+2}$.

   故

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x-2k+2}, & x \in [2k-1, 2k], \\ 2^{-x+2k+2}, & x \in (2k, 2k+1]. \end{cases}$$

2. 已知 $a > 0, a \neq 1$, 试求使方程

$$\log_a(x - ak) = \log_{a^2}(x^2 - a^2)$$

   有解的 k 的取值范围.

   由对数函数的性质, 易得

$$(x - ak)^2 = x^2 - a^2 \qquad (2-1)$$
$$x - ak > 0 \qquad (2-2)$$
$$x^2 - a^2 > 0 \qquad (2-3)$$

   显然, $(2-1)$ $(2-2)$ $\Rightarrow$ $(2-3)$, 故只需解 $(2-1)$ $(2-2)$ 即可.

   $(2-1)$ 等价于

$$2kx = a(1+k^2). \tag{2-4}$$

当 $k=0$, $(2-4)$ 显然无解, 即原方程无解.

故 $k \neq 0$, $(2-4)$ 的解为

$$x = \frac{a(1+k^2)}{2k}. \tag{2-5}$$

$(2-5)$ $(2-2)$ 联立, 有

$$\frac{1+k^2}{2k} > k \Rightarrow k \in (-\infty, -1) \cup (0, 1).$$