§6 不等式测验”（难题）

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 10 月 20 日

(1) 下列说法正确的序号是: **③, ④**.

① $\forall x \in \mathbf{R} : x + \dfrac{1}{x} > 2$.

② 若正实数 $2x + y = 1$, 则 $\sqrt{2x} + \sqrt{y}$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

③ 若 a, b 为正实数, 则 $\dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{4}{ab}$ 的最小值为 2.

④ 若正实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 1 + xy$, 则 $1 < x + y \leq 2$.

① 考虑 $x = -1$, $x + \frac{1}{x} = -2 \not> 2$. 错误.

② 考虑 $x = 0.02, y = 0.96$, $\sqrt{2x} + \sqrt{y} = \sqrt{0.04} + \sqrt{0.96} \approx 1.180 < 1.2 < 1.414 < \sqrt{2}$. 错误.

③ $\dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{4}{ab} = \dfrac{a}{8} + \dfrac{a}{8} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{4}{ab} \geq 4\sqrt[4]{\dfrac{a}{8} \cdot \dfrac{a}{8} \cdot \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{4}{ab}} = 4\sqrt[4]{\dfrac{4}{64}} = 2$, 当且仅当 $a = 4, b = 2$ 时取等. 正确.

④ 整理, 有 $(x + y)^2 = 1 + 3xy \Rightarrow 1 + xy \geq 2xy, 0 < xy \leq 1 \Rightarrow 1 < (x + y)^2 \leq 4$ 当且仅当 $x = y = 1$ 等号成立. 又因为 x, y 是正数, 有 $1 < x + y \leq 2$. 正确.

(2) 已知集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中的元素都是正整数, 且 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. 集合 A 具有性质 M: $\forall x, y \in A \text{ and } x \neq y : |x - y| \geq \dfrac{xy}{25}$.

(1) 判断集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 是否具有性质 M.

(2) 求证: $\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_n} \geq \dfrac{n-1}{25}$.

(3) 求集合 A 中元素个数的最大值, 并说明理由.

(1) 判断集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 是否具有性质 M.

具有. 过程略.

(2) 求证: $\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_n}\geq\dfrac{n-1}{25}$.

由题意, 有: $a_{i+1}-a_i\geq\dfrac{a_ia_{i+1}}{25}(i=1,2,3,\cdots,n-1)\Rightarrow\dfrac{1}{a_i}-\dfrac{1}{a_{i+1}}\geq\dfrac{1}{25}$.

于是有 $\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_{n-1}}-\dfrac{1}{a_n}\geq\dfrac{n-1}{25}$, 即 $\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_n}\geq\dfrac{n-1}{25}$.

得证.

(3) 求集合 A 中元素个数的最大值, 并说明理由.

$\dfrac{1}{a_i}-\dfrac{1}{a_n}\geq\dfrac{n-i}{25}\Rightarrow\dfrac{1}{a_i}>\dfrac{n-i}{25}\Rightarrow\dfrac{1}{i}>\dfrac{n-i}{25}\Rightarrow 25>i(n-i)$对$i=1,2,3,\cdots,n-1$均成立.

考虑 $i=5,n\geq 10,i(n-i)=5(n-5)>25$ 均成立.

考虑 $n\leq 10,i(n-i)\leq\left(\dfrac{i+n-i}{2}\right)^2=\dfrac{n^2}{4}<25$, 有 $n\leq 9$.

在 $n=9$ 时有 $A=\{1,2,3,4,5,7,10,17,54\}$ 符合条件.