

220316 三角恒等式 (2) 参考答案与题目选解

高一 (4) 班 邵亦成 48 号

Section 1 填空题

1. 在 $(-1080^\circ, -360^\circ)$ 中与 -35° 终边相同的角的集合是 $\{-395^\circ, -755^\circ\}$.

解析. 角的终边.

2. 已知 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{13}$, 则 $\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \alpha\right) = -\frac{5}{13}$.

解析. 诱导公式.

3. 已知 $f(\cos x) = \cos 3x$, 则 $f(\sin 30^\circ) = -1$.

解析. 诱导公式.

4. 若 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{2}$.

解析. 两倍角公式, 诱导公式.

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha - \cos \alpha) \Rightarrow \text{原式} = -\sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha) \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

5. 已知 $\frac{\tan \theta}{\tan \theta - 1} = -1$, 则 $\frac{\sin(\pi - \theta) - 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\theta - \frac{5\pi}{2}\right) - \cos(-3\pi + \theta)} = -\frac{5}{3}$.

解析. 诱导公式.

6. 把下式化为 $A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的形式: $-\frac{5}{3} \sin 2x - \frac{5}{3} \cos 2x = \frac{5}{3} \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{5}{4}\pi\right)$;

$$6 \cos 3x - 2\sqrt{3} \sin 3x = 4\sqrt{3} \sin\left(3x + \frac{2}{3}\pi\right).$$

解析. 辅助角公式, 诱导公式.

7. 若 $\frac{|\sin \alpha|}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{|\cos \alpha|} = 0$, 试判断 $\cot(\sin \alpha) \cdot \tan(\cos \alpha)$ 的符号. 负.

解析. 象限角三角比正负性.

8. 已知 $\alpha, \beta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$, $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$, $\sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{12}{13}$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{56}{65}$.

解析. 差角公式.

9. 已知 $\tan \frac{\alpha}{2} = -2$, 则 $\sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{9}{10}$.

解析. 同角三角比.

10. 写出正确的序号. (1).

$$(1) \sin 5\theta + \sin 3\theta = 2 \sin 4\theta \cos \theta.$$

$$(2) \cos 3\theta - \cos 5\theta = -2 \sin 4\theta \sin \theta. \quad 2 \sin 4\theta \sin \theta.$$

$$(3) \sin 3\theta - \sin 5\theta = -\frac{1}{2} \cos 4\theta \cos \theta. \quad -2 \cos 4\theta \sin \theta.$$

$$(4) \sin 5\theta + \cos 3\theta = 2 \sin 4\theta \cos \theta. \quad 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(4\theta - \frac{\pi}{4} \right).$$

解析. 和差化积公式, 诱导公式.

Section 2 解答题

11. 化简:

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} \cdot \left[\frac{\sin 2x}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)} - \frac{\sin \left(-\frac{3\pi}{2} + x \right)}{1 + \cos \left(-\frac{\pi}{2} + x \right)} \right].$$

解析. 诱导公式, 两倍角公式, 半角公式.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1 + \sin x}{\cos x} \cdot \left[\frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right] \\ &= \frac{1 + \sin x}{\cos x} \cdot \left[\frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right] \\ &= 2 \sin x - 1. \end{aligned}$$

12. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ 有 $3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha = 1$, 求 $\tan \alpha$.

解析. 辅助角公式, 同角三角比, 和角公式.

$$\begin{aligned} 3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha &= 5 \sin \left(\alpha - \arctan \frac{4}{3} \right) = 1 \Rightarrow \sin \left(\alpha - \arctan \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{5}, \alpha - \arctan \frac{4}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \\ \Rightarrow \tan \alpha &= \frac{\tan \left(\alpha - \arctan \frac{4}{3} \right) \cdot \frac{4}{3}}{1 - \tan \left(\alpha - \arctan \frac{4}{3} \right) \cdot \frac{4}{3}} = \frac{6 + \sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

13. 已知 $\cos \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right)$, 求 $\tan \frac{\alpha}{2} (\sin \alpha + \tan \alpha)$ 的最大值.

解析. 半角公式, 同角三角比, 函数在区间上的极值.

$$\begin{aligned}
 \max_{\cos \alpha \in [\frac{1}{2}, 1)} \tan \frac{\alpha}{2} (\sin \alpha + \tan \alpha) &= \max_{\cos \alpha \in [\frac{1}{2}, 1)} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \left(\sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \\
 &= \max_{\cos \alpha \in [\frac{1}{2}, 1)} 1 - \cos \alpha + \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \\
 &= \max_{\cos \alpha \in [\frac{1}{2}, 1)} \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \\
 &= \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \Big|_{\cos \alpha = \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

14. 利用两倍角公式及三倍角公式 $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$, $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$ 求 $\sin 18^\circ$.

解析. 同角三角比, 两倍角公式, 三倍角公式.

考虑 $\cos 54^\circ$ ($90^\circ - 3 \times 18^\circ = 2 \times 18^\circ$), 有

$$\cos 54^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ = \sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ$$

即

$$4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ.$$

两边同时除以 $\cos 18^\circ$, 带入 $\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ}$, 有

$$4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3 = 2\sin 18^\circ$$

即

$$4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ + 1 = 0$$

有

$$\sin 18^\circ = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} (\text{舍负}).$$

综上, $\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Section 3 附加题

15. 已知 $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = p$, $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = q$, $|p| \neq 1, q \neq 0$, 用 p, q 表达 $\tan \alpha \cdot \tan \beta$.

解析. 同角三角比.

由已知, 显然有

$$\sin \alpha = p \sin \beta \tag{1}$$

和

$$\cos \alpha = q \cos \beta \quad (2).$$

考虑 (1)/(2) 得

$$\tan \alpha = \frac{p}{q} \tan \beta.$$

两边同时乘以 $\tan \beta$ 得

$$\tan \alpha \tan \beta = \frac{p}{q} \tan^2 \beta.$$

考虑 $(1)^2 + (2)^2$ 得

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 = p^2 \sin^2 \beta + q^2 \cos^2 \beta,$$

即

$$\sin^2 \beta (p^2 - 1) = \cos^2 (1 - q^2),$$

即

$$\tan^2 \beta = \frac{1 - q^2}{p^2 - 1}.$$

故原式 = $\frac{p(1 - q^2)}{q(1 - p^2)}$.

Section 4 特别致谢

MathxStudio/LaTeX-Templates: 提供排版模版的模版.