1 集合测验（难题）

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 09 月 08 日

1. 设 $[m]$ 表示不超过实数 m 的最大整数，则集合 $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| 9x^2 - 30\left[x\right] + 20 = 0\right\}$ 中所有元素的和为？ .

   (a) 思路：

      i. 限定 $[x]$ 的范围（$[x]$ 是有限个，方便求解）.

      ii. 代入原式进行求解.

   (b) 解答：

   将 $[x] \le x$ 代入原方程得：

$$9x^2 + 20 = 30[x] \le 30x.$$

   解不等式，得 $x \in \left[\frac{5-\sqrt{5}}{3}, \frac{5+\sqrt{5}}{3}\right]$.

   $\frac{5-\sqrt{5}}{3} \approx 0.92, \frac{5+\sqrt{5}}{3} \approx 2.41 \Rightarrow [x] \in \{0, 1, 2\}$.

   分类讨论：

   1° $[x] = 0 \Rightarrow x \in [0, 1)$ 代入得：

$$9x^2 + 20 = 0$$

   无实数解.

   2° $[x] = 1 \Rightarrow x \in [1, 2)$ 代入得：

$$9x^2 - 10 = 0$$

   解得 $x_1 = \sqrt{\frac{10}{9}}, x_2 = -\sqrt{\frac{10}{9}}$.

   $\because x \in [1, 2) \therefore x = \sqrt{\frac{10}{9}}$.

   3° $[x] = 2 \Rightarrow x \in [2, 3)$ 代入得：

$$9x^2 - 40 = 0$$

   解得 $x_1 = \sqrt{\frac{40}{9}}, x_2 = -\sqrt{\frac{40}{9}}$

   $\because x \in [2, 3) \therefore x = \sqrt{\frac{40}{9}}$.

   综上所述，$x = \sqrt{\frac{10}{9}}$ 或 $x = \sqrt{\frac{40}{9}}$，$\sum x = \sqrt{10}$.

2. 设 S 为有限集合，$A_1, A_2, \cdots A_{2019}$ 为 S 的子集，$|X|$ 表示集合 X 中元素的个数. 已知对每个正整数 $i \in [1, 2019]$ 都有 $|A_i| \ge \frac{1}{5}|S|$. 若对于任意集合 S 总是存在 $x \in S$ 在至少 k 个集合 A_i 中出现，则 k 的最大值是多少？并加以证明.

   $k_{\max} = 404$.

   下证：$k_{\max} \ge 404$.

定义元素 t 在 S 的子集 A_i 出现的次数为 f_t（$t \in S, i \in [1, 2019] \cap \mathbb{Z}$）.

易证

$$\sum_{t \in S} f_t = \sum_{i=1}^{2019} |A_i| \geq \frac{2019}{5}|S| = 403.8|S|.$$

于是

$$\exists t \in S : f_t \geq \lceil 403.8 \rceil = 404.$$

于是 $k_{\max} \geq 404$.

下证：$k \ngeq 405$.

构造

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$A_1 = A_2 = \cdots A_{404} = \{1\},$$

$$A_{405} = A_{406} = \cdots A_{808} = \{2\},$$

$$A_{809} = A_{810} = \cdots A_{1212} = \{3\},$$

$$A_{1213} = A_{1214} = \cdots A_{1616} = \{4\},$$

$$A_{1617} = A_{1618} = \cdots A_{2019} = \{5\}.$$

此时, $k = 404$.

综上所述, $404 \leq k_{\max} < 405$, $k_{\max} = 404$.