

### 3 集合测验” (难题)

高一 (6) 班 邵亦成 26 号

2021 年 09 月 22 日

1. 有限集  $S$  的全部元素的乘积, 称为这个数集  $S$  的积数, 例如集合  $\{2\}$  的积数是 2, 集合  $\{2, 3\}$  的积数是 6.

(1) 求集合  $M = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\}$  的所有非空子集的积数之和.

(2) 求集合  $M = \{x | x = \frac{1}{n}, 2 \leq n \leq 100, n \in \mathbb{N}\}$  的所有非空子集的积数之和.

下证引理: 集合  $M$  的积数 =

$$\prod_{x \in M} (1+x) - 1.$$

令  $|M| = n$ , 构造方程

$$f(x) = \prod_{k \in M} (x - k) = 0.$$

展开, 得

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

由高次方程的 Vieta 定理, 有:

$$\begin{cases} \sum_{1 \leq i \leq n} x_i &= -a_1 \\ \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j &= a_2 \\ &\vdots \\ \prod_{1 \leq i \leq n} x_i &= (-1)^n a_n \end{cases}.$$

易得, 所求式  $= -a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$ .

若  $n$  是偶数, 所求式  $= f(-1) - 1$ ; 若  $n$  是奇数, 所求式  $= -f(-1) - 1$ .

代入化简, 得集合  $M$  的积数  $= g(M) =$

$$\prod_{x \in M} (1+x) - 1.$$

将  $M = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\}$  代入得  $g(M) = 2$ .

将  $M = \{x | x = \frac{1}{n}, 2 \leq n \leq 100, n \in \mathbb{N}\}$  代入得  $g(M) = \frac{99}{2}$ .