

4 不等式测验 (难题)

高一 (6) 班 邵亦成 26 号

2021 年 09 月 29 日

1. 解关于 x 的不等式 $[(a-1)x - (a-2)](x-2) > 0$. ($a \in \mathbb{R}$)

1° $a = 1$ 时,

原不等式可化简为 $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ 即 $x \in (2, +\infty)$.

2° $a \neq 1$ 时,

有: 方程 $[(a-1)x - (a-2)](x-2) = 0$ 的两根为 $x_1 = \frac{a-2}{a-1} = 1 + \frac{1}{1-a}$, $x_2 = 2$.

(i) $a > 1$ 时,

恒有 $x_1 < x_2$,

于是有 $x \in \left(-\infty, 1 + \frac{1}{1-a}\right) \cup (2, +\infty)$.

(ii) $a < 1$ 时,

原不等式可化为 $[(1-a)x - (2-a)](x-2) < 0$.

a. $x_1 < x_2$ 即 $a < 0$ 时, $x \in \left(1 + \frac{1}{1-a}, 2\right)$.

b. $x_1 = x_2$ 即 $a = 0$ 时, $x \in \emptyset$.

c. $x_1 > x_2$ 即 $0 < a < 1$ 时, $x \in \left(2, 1 + \frac{1}{1-a}\right)$.

综上所述, 原不等式的解集 =

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left(1 + \frac{1}{1-a}, 2\right) & , \quad a \in (-\infty, 0) \\ \emptyset & , \quad a = 0 \\ \left(2, 1 + \frac{1}{1-a}\right) & , \quad a \in (0, 1) \\ (2, +\infty) & , \quad a = 1 \\ \left(-\infty, 1 + \frac{1}{1-a}\right) \cup (2, +\infty) & , \quad a \in (0, +\infty) \end{array} \right. .$$

这种写法是错误的, 综上所述应该按照如下格式:

综上: 当 $a \in (-\infty, 0)$ 时, 原不等式解集为 $\left(1 + \frac{1}{1-a}, 2\right)$; 当 $a = 0$ 时, 原不等式解集为 \emptyset ; 当 $a \in (0, 1)$ 时, 原不等式解集为 $\left(2, 1 + \frac{1}{1-a}\right)$; 当 $a = 1$ 时, 原不等式解集为 $(2, +\infty)$; 当 $a \in (0, +\infty)$ 时, 原不等式解集为 $\left(-\infty, 1 + \frac{1}{1-a}\right) \cup (2, +\infty)$.