13 函数综合'（难题）

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 12 月 15 日

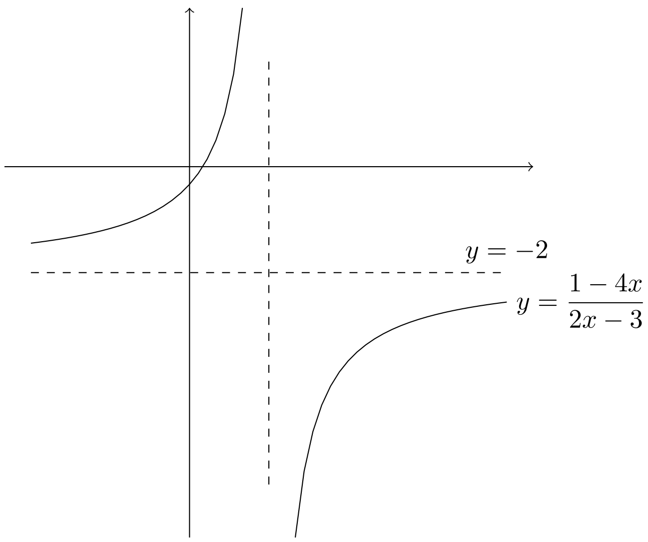
1. 称满足以下条件的函数 $f(x)$ 为 P_k 函数: 从定义域 D 中任取 x, 总存在唯一的 $y_0 \in D$ 满足 $f(x)+f(y_0)=2k(k\in\mathbb{R})$. 根据该定义, 以下命题中所有真命题的序号为?.

   (1) 若 $f(x), x\in D$ 是 P_0 函数, 则 $\forall x \in D : -x \in D$.

   错误. 考虑 $f(x)=0, x\in\{1\}$. 显然 $f(x)$ 是 P_0 函数, 但 $1\in D, -1 \notin D$. 事实上, P 性质与定义域无必然联系, 但和值域 R 有必然联系: $\forall x \in R : 2k - x \in R$ 是函数 $y=f(x), x\in D$ 为 P_k 函数的必要条件.

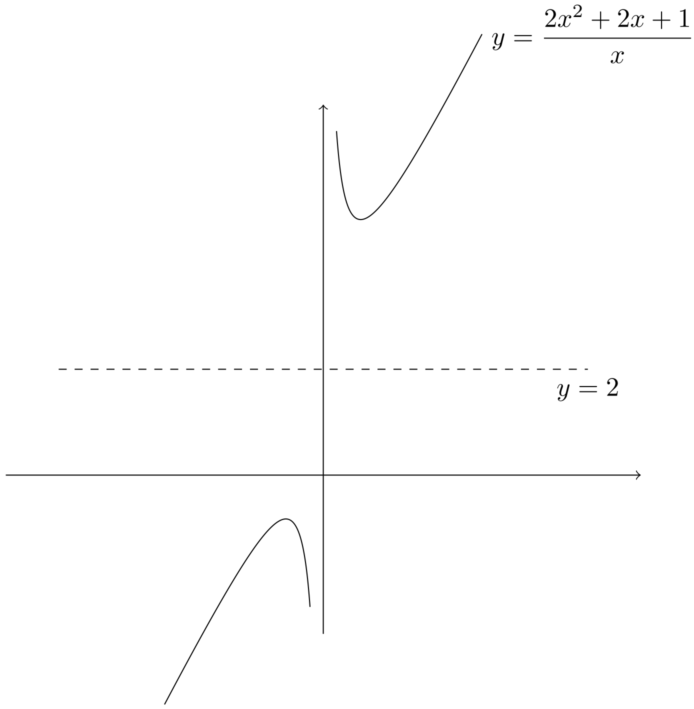
   (2) $y=\dfrac{1-4x}{2x-3}$ 是 P_{-2} 函数.

   正确.



   (3) $y=\dfrac{2x^2+2x+1}{x}$ 是 P_2 函数.

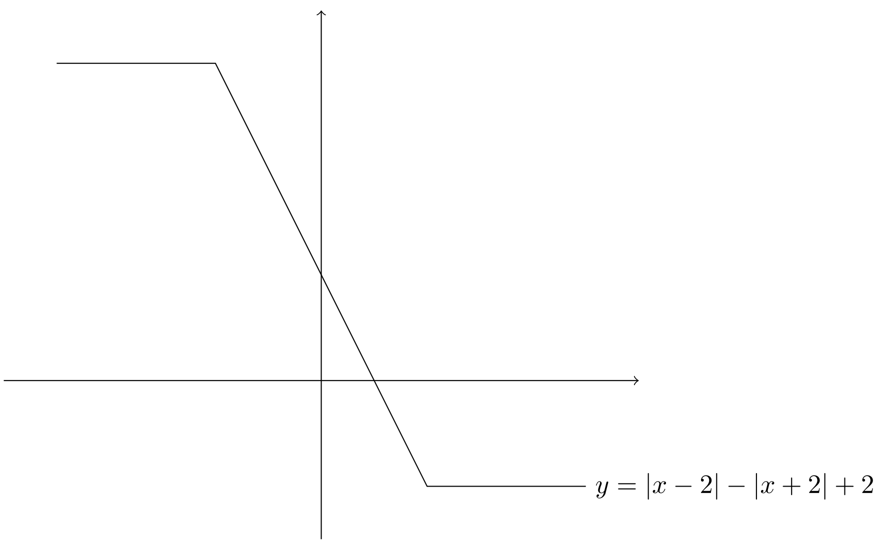
   错误. 显然可化简为 $y=2x+2+\dfrac{1}{x}$,



显然存在一个 y 对应两个 x, 故不存在唯一的 y_0.

(4) $y = |x-2| - |x+2| + 2$ 是 P_1 函数.

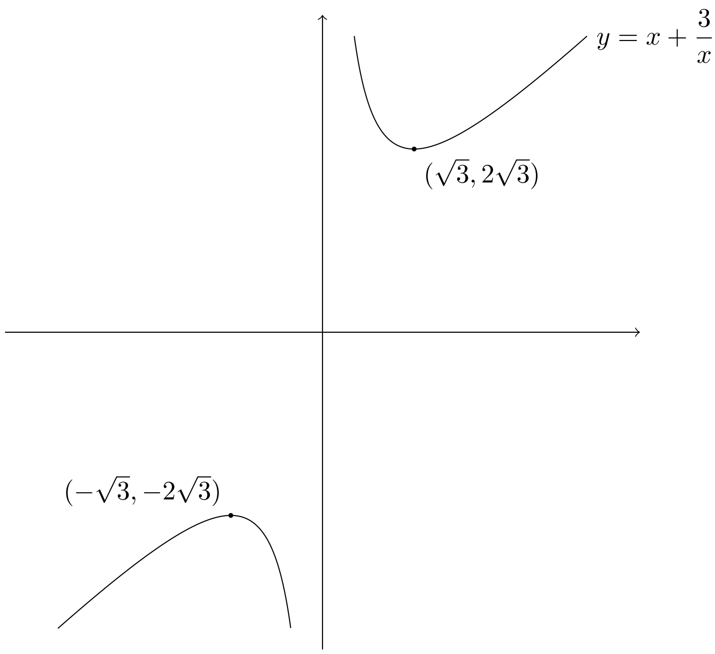
错误.



显然存在一个 y 对应多个 x, 故不存在唯一的 y_0.

(5) 若 $y = x + \dfrac{3}{x}, x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ 为 P_0 函数, 则 $a \geq \sqrt{3}$.

正确.



事实上, 函数 $y = f(x), x \in D$ 为 P_k 函数的充要条件是 $f(D)$ 关于 k 对称且 $y = f(x)$ 在 D 上存在反函数.

2. 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0, \\ x^2 + \dfrac{1}{2}x, & x \geq 0, \end{cases}$$

讨论方程 $f(f(x)) = t(t \in \mathbb{R})$ 的解的个数.

法一: 暴力复合

考虑 $x < -2 < 0$, 有 $f(x) = x + 2 < 0$, 故 $f(f(x)) = f(x+2) = x + 4$.

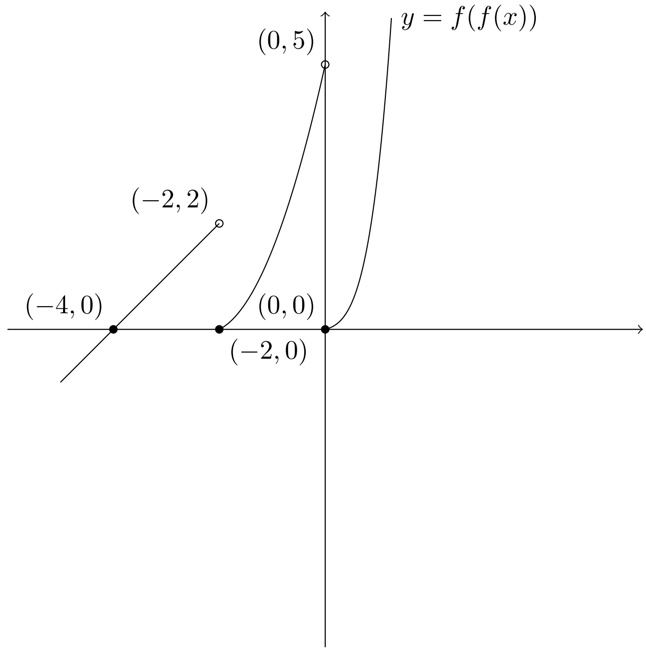
考虑 $-2 \leq x < 0$, 有 $f(x) = x + 2 \geq 0$, 故 $f(f(x)) = f(x+2) = x^2 + \dfrac{9}{2}x + 5$.

考虑 $-2 < 0 \leq x$, 有 $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{2}x > 0$, 故 $f(f(x)) = f\left(x^2 + \dfrac{1}{2}x\right) = x^4 + x^3 + \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}x = x^4 + x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}x$.

故有

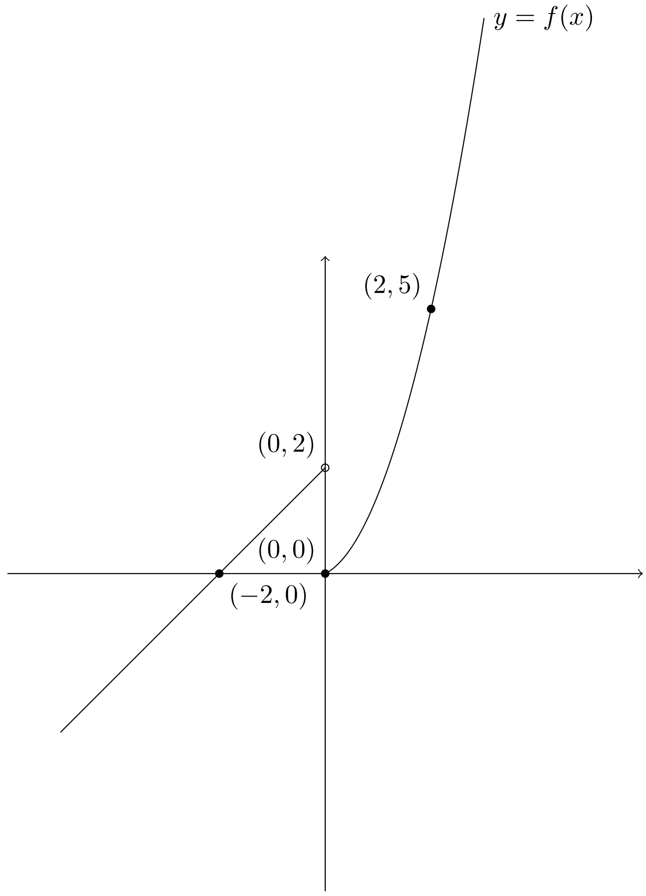
$$f(f(x)) = \begin{cases} x+4, & x < -2, \\ x^2 + \dfrac{9}{2}x + 5, & -2 \leq x < 0, \\ x^4 + x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}x, & x \geq 0. \end{cases}$$

绘制 $y = f(f(x))$ 的图像如下图:



故 $t\in(-\infty,0)\cup[5,+\infty)$, 1 解; $t\in[2,5)$, 2 解; $t\in[0,2)$, 3 解.

法二：先考虑外函数的解，后考虑内函数的解



考虑外函数 $f(g)=t$ 的解.

1° $t \geq 5$, $f(g) = t$ 有唯一解 g 且 $g \geq 2$, 则方程 $f(x) = g$ 同样也具有唯一解.

2° $2 \leq t < 5$, $f(g) = t$ 有唯一解 g 且 $0 < g < 2$, 则方程 $f(x) = g$ 有两解.

3° $0 \leq t < 2$, $f(g) = t$ 有两解 g_1, g_2 且 $0 \leq g_1 < 2, -2 \leq g_2 < 0$, 则方程 $f(x) = g_1$ 有两解, 方程 $f(x) = g_2$ 有唯一解, 共三解.

4° $t < 0$, $f(g) = t$ 有唯一解 g 且 $g < -2$, 则方程 $f(x) = g$ 同样也具有唯一解.

故 $t \in (-\infty, 0) \cup [5, +\infty)$, 1 解; $t \in [2, 5)$, 2 解; $t \in [0, 2)$, 3 解.