9 函数的奇偶性（难题）

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 11 月 17 日

(1) 设 $a_1 > -1, a_1 \neq \sqrt{2}, a_2 = 1 + \dfrac{1}{1+a_1}$.

(1) 证明: $\sqrt{2}$ 介于 a_1, a_2 之间.

总体思路: 证明数 a 在数 b 和数 c 中间 $\Leftrightarrow (a-b)(a-c) < 0$.

即证

$$\left(\sqrt{2} - a_1\right)\left(\sqrt{2} - a_2\right) < 0.$$

而

$$\left(\sqrt{2} - a_1\right)\left(\sqrt{2} - a_2\right) = \frac{\left(\sqrt{2} - a_1\right)^2 \left(1 - \sqrt{2}\right)}{1 + a_1} < 0,$$

故 $\sqrt{2}$ 介于 a_1, a_2 之间, 得证.

(2) a_1, a_2 中哪一个更接近 $\sqrt{2}$.

总体思路: 数 a 距离数 b 的距离 $= |a-b|$.

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{2} - a_2\right| &= \left|\frac{\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - a_1\right)}{1 + a_1}\right| \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{1 + a_1}\left|a_1 - \sqrt{2}\right| \\ &< \left|a_1 - \sqrt{2}\right| \end{aligned}$$

故 a_2 更接近.

(3) 根据以上事实, 设计一种求 $\sqrt{2}$ 近似值的方案, 并说明理由.

令 $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+a_n} (n \in \mathbf{N})$, 则有 $|\sqrt{2} - a_n| = \dfrac{\sqrt{2}-1}{1+a_{n-1}}|\sqrt{2} - a_{n-1}| < \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}|\sqrt{2} - a_{n-1}| < \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 |\sqrt{2} - a_{n-2}| < \cdots < \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{n-1} |\sqrt{2} - a_1|$.
有 $|\sqrt{2} - a_n| < |\sqrt{2} - a_{n-1}| < \cdots < |\sqrt{2} - a_2| < |\sqrt{2} - a_1|$,
故 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 依次更接近于 $\sqrt{2}$, 且有 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sqrt{2}$.

(2) 设 $f(x)=x^2+a$. 记 $f^1(x)=f(x), f^n(x)=f(f^{n-1}(x)), n=2,3,\cdots, M=\{a\in\mathbf{R}|\forall n\in\mathbf{N}^*:|f^n(0)|\le 2\}$. 证明: $M=\left[-2,\frac{1}{4}\right]$.

下证: $(-\infty,-2)\nsubseteq M$, **即证** $\forall a\in(-\infty,-2)\exists n\in\mathbf{N}^*:|f^n(0)|>2$.

令 $n=1$ 有 $|f^1(0)|=|a|>2$, 故 $(-\infty,-2)\notin M$.

下证: $[-2,0)\subseteq M$**, 只需证** $\forall n\ge 1:|f^n(0)|\le|a|$.

考虑 $n=1$ 有 $|f^1(0)|\le|a|$.

设 $n=k-1$ 时成立, 则对 $n=k$ 有 $|f^k(0)|=|f^{k-1}(0)^2+a|\ge f^{k-1}(0)^2+a\ge a=-|a|, |f^k(0)|=|f^{k-1}(0)^2+a|\le|a^2+a|\le|a|$,

于是 $[-2,0)\subseteq M$.

下证: $\left[0,\frac{1}{4}\right]\subseteq M$**, 只需证** $\forall n\ge 1:|f^n(0)|\le\frac{1}{2}$.

考虑 $n=1$ 有 $|f^1(0)|=|a|\le\frac{1}{2}$.

设 $n=k-1$ 时成立, 则对 $n=k$ 有 $|f^k(0)|=|f^{k-1}(0)|^2+a\le\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

于是 $\left[0,\frac{1}{4}\right]\subseteq M$.

下证: $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)\nsubseteq M$**, 只需证** $\forall a\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)\exists n\in\mathbf{N}^*:f^n(0)>2$.

记 $a_n=f^n(0)$, 则 $\forall n\ge 1, a_n>a>\frac{1}{4}$ 且 $a_{n+1}=f^{n+1}(0)=f(f^n(0))=f(a_n)=a_n^2+a$.

$\forall n\ge 1, a_{n+1}-a_n=a_n^2-a_n+a=\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}\ge a-\frac{1}{4}$.

所以有 $a_{n+1}-a=a_{n+1}-a_1\ge n\left(a-\frac{1}{4}\right)$.

当 $n>\dfrac{2-a}{a-\frac{1}{4}}$ 时, $a_{n+1}>n\left(a-\frac{1}{4}\right)+a>2-a+1=2$, 即 $f^{n+1}(0)>2$.

于是有 $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)\notin M$.

综上, $M=\left[-2,\frac{1}{4}\right]$.