1 补充题

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 10 月 11 日

(1) 已知 $x>0, a>0$. 求 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 的 $f_{\min}(x)$ 并求出对应的值.

$\because x>0, a>0 \therefore \frac{a}{x}>0$.

由基本不等式，有

$$f(x)=x+\frac{a}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{a}{x}}=2\sqrt{a}.$$

取等当且仅当 $x=\frac{a}{x}$ 即 $x=\pm\sqrt{a}$（舍负）.

于是有 $f_{\min}(x)=f(\sqrt{a})=2\sqrt{a}$.

(2) 已知 $a>0$. 求 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 的值域.

易得 $x \neq 0$.

分两类讨论.

1° $x>0$,

由 (1) 有 $f_{\min}(x)=f(\sqrt{a})=2\sqrt{a}$.

2° $x<0$,

$\because x<0, a>0 \therefore \frac{a}{x}<0$.

由基本不等式，有

$$f(x)=x+\frac{a}{x} \leq -2\sqrt{x \cdot \frac{a}{x}}=-2\sqrt{a}.$$

取等当且仅当 $x=\frac{a}{x}$ 即 $x=\pm\sqrt{a}$（舍正）.

于是有 $f_{\max}(x)=f(-\sqrt{a})=-2\sqrt{a}$.

综上，$f(x)$ 的值域为 $(-\infty,-2\sqrt{a}] \cup [2\sqrt{a},+\infty)$.

(3) 已知 $x>1$. 求 $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$ 的最小值.

$\because x>1 \therefore x>1>0, \frac{1}{x-1}>0$.

由基本不等式，有

$$f(x)-1=x+\frac{a}{x-1}-1=(x-1)+\frac{1}{x-1}\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}=2.$$

取等当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$ 即 $x-1=\pm 1$ 即 $x=\pm 1+1=2$ 或 0（舍）.

于是有 $f_{\min}(x)=f(2)=3$.

(4) 求 $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$ 的值域.

$f(x)=x+\frac{1}{x+1}$.

易得 $x\neq -1$.

分两类讨论.

1° $x>-1$,

$\because x>-1 \therefore x+1>0, \frac{1}{x+1}>0$.

由基本不等式，有

$$f(x)+1=x+\frac{1}{x+1}+1=(x+1)+\frac{1}{x+1}\geq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}=2.$$

取等当且仅当 $x+1=\frac{1}{x+1}$ 即 $x+1=\pm 1$ 即 $x=0$ 或 -2（舍）.

于是有 $f_{\min}(x)=f(0)=1$.

2° $x<-1$,

$\because x<-1 \therefore x+1<0, \frac{1}{x+1}<0$.

由基本不等式，有

$$f(x)+1=x+\frac{1}{x+1}+1=(x+1)+\frac{1}{x+1}\leq -2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}=-2.$$

取等当且仅当 $x+1=\frac{1}{x+1}$ 即 $x+1=\pm 1$ 即 $x=-2$ 或 0（舍）.

于是有 $f_{\max}(x)=f(-2)=-3$.

综上，$f(x)$ 的值域为 $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

(5) 求 $f(x)=\frac{2x}{x^2+x+1}$ 的值域.

分两类讨论.

1° $x=0$,

$f(0)=0$

2° $x\neq 0$,

$f(x)=\frac{2}{x+1+\frac{1}{x}}$.

由 (2) 有 $g(x)=x+\frac{1}{x}$ 的值域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

$\therefore g(x)+1$ 的值域为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

$\therefore \frac{1}{g(x)+1}$ 的值域为 $[-1,0)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right]$.

$\therefore \frac{2}{g(x)+1}=f(x)$ 的值域为 $[-2,0)\cup\left(0,\frac{2}{3}\right]$.

综上，$f(x)$ 的值域为 $\left[-2,\frac{2}{3}\right]$.