3 幂、指数与对数

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 10 月 28 日

3 幂、指数与对数

3.1 幂与指数

正整数指数幂的定义：$a^n=\prod_{i=1}^{n} a(a\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*)$，读作 a 的 n 次幂.

零和负整数指数幂的定义：$a^0=1,a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\ (a\in\mathbf{R}\setminus\{0\},n\in\mathbf{N}^*)$.

根式概念的拓展：对 $n\in\mathbf{Z}\cap[2,+\infty),x^n=a$: x 是 a 的 n 次方根. 当 n 是奇数时，$x=\sqrt[n]{a}$；当 n 是偶数时，$x=\pm\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a}>0,a>0$. 定义 $\sqrt[n]{0}=0$. 式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫作 a 的 n 次根式，n 叫作根指数，a 叫作被开方数.

根式的运算性质：$\sqrt[n]{a^n}=a$, 当 n 为奇数；$\sqrt[n]{a^n}=|a|$, 当 n 为偶数.

有理数整数幂的定义：对于所有使 $\sqrt[n]{a^m}$ 有意义的实数 a 可定义 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. 特殊地，$a^{\frac{1}{n}}$ 在 $a>0$ 时总是可以被定义，在 $a<0$ 且 n 是正奇数时同样可以被定义，在 $a>0$ 且 n 是正偶数时不可被定义（因为 $\nexists x\in\mathbf{R}:x^n=a<0$），在 $a=0$ 可定义 $0^{\frac{1}{n}}=0$.

指数幂的运算性质：(1) $a^sa^t=a^{s+t}$ (2) $(a^s)^t=a^{st}$ (3) $(ab)^t=a^tb^t$ $(a,b\in\mathbf{R}^+,s,t\in\mathbf{Q})$.

幂的基本不等式：$a>1,s>0\Rightarrow a^s>1$.

3.2 对数

3.2.1 对数的定义与基础运算性质

对数的定义：在 $a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}, N \in \mathbf{R}^+$ 的条件下，唯一满足 $a^x = N$ 的数 x 称为 N 以 a 为底的对数，称 N 为真数，用符号记作 $x = \log_a N$. 即：$a^b = N \Leftrightarrow \log_a N = b(a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}, N \in \mathbf{R}^+)$.

常用对数：通常以 10 为底的对数，叫作常用对数，用符号记作 $\lg N = \log_{10} N$.

自然对数：通常以自然常数 $\mathrm{e} \approx 2.718$ 为底的对数，叫作自然对数，用符号记作 $\ln N = \log_{\mathrm{e}} N$.

对数的运算性质 (1)：$a^{\log_a N} = N(a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}, N \in \mathbf{R}^+)$.

对数的运算性质 (2) (3)：$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1(a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\})$.

例一：求 $27^{\frac{2}{3}+\log_3 2}$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 27^{\frac{2}{3}} \times \left(3^3\right)^{\log_3 2} \\ &= 9 \times \left(3^{\log_3 2}\right)^3 \\ &= 9 \times 2^3 \\ &= 72. \end{aligned}$$

总结：一道带有指数与对数的计算题，需要注意每一步的计算依据.

例二：求 $a^{\log_a b \cdot \log_b N}$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= b^{\log_b N} \\ &= N. \end{aligned}$$

总结：本题在后续有更简便的计算方法（先化简指数）.

3.2.2 对数与真数运算的关系与换底公式

真数的乘法，对数的加法：$\forall a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}, N, M \in \mathbf{R}^+ : \log_a (MN) = \log_a M + \log_b N$.

真数的除法，对数的减法：$\forall a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}, N, M \in \mathbf{R}^+ : \log_a \left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_b N$.

真数的指数幂，对数的积：$\forall a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}, N, M \in \mathbf{R}^+, c \in \mathbf{R} : \log_a N^c = c \log_a N$.

对数换底公式：$\forall a, n \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}, b \in \mathbf{R}^+ : \log_a b = \dfrac{\log_n b}{\log_n a}$.

对数换底公式的推论 (1)：$\forall a, b \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\} : \log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$.

对数换底公式的推论 (2) (3)：$\forall a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}, b \in \mathbf{R}^+, n \in \mathbf{R} \setminus \{0\} : \log_{a^n} b = \dfrac{\log_a b}{n}, \log_{\sqrt[n]{a}} b = n \log_a b$.

对数换底公式的推论 (2) (3) 的一般化：$\forall a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}, b \in \mathbf{R}^+, n \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, m \in \mathbf{R} : \log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n} \log_a b$. 特殊地，在 $n = m \neq 0$ 时有 $\log_{a^n} b^n = \log_a b$；在 $a = b \neq 1$ 时有 $\log_{a^n} a^m = \dfrac{m}{n}$.

对数换底公式的推论的应用：$\forall n \in \mathbf{Z} \cap [2, +\infty), a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$，定义$a_{n+1} = a_1 : \prod_{i=1}^{n} \log_{a_i} a_{i+1} = \log_{a_1} a_n$.

例一：$\dfrac{1}{\log_2 3}+\dfrac{1}{\log_{13.5} 3}$.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \log_3 2+\log_3 13.5\\ &= \log_3 27\\ &= 3.\end{aligned}$$

总结：利用 $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$ 与 $\log_a(MN)=\log_a M+\log_b N$ 进行化简，随后由定义计算出结果.

例二：$\dfrac{1}{\log_2 32}+\dfrac{1}{5\log_4 2}+\dfrac{1}{1+\log_8 4}$.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{5}+\frac{\log_2 4}{5}+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}\\ &= \frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\\ &= \frac{6}{5}.\end{aligned}$$

总结：利用 $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$ 与 $\log_{a^n} a^m=\frac{m}{n}$ 进行化简，随后计算出结果.

例三：$2^{\frac{1}{\lg 2}}+3^{\frac{1}{\lg 3}}+5^{\frac{1}{\lg 5}}$.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 2^{\log_2 10}+3^{\log_3 10}+5^{\log_5 10}\\ &= 30.\end{aligned}$$

总结：利用 $\log_a b=\dfrac{\log_n b}{\log_n a}$ 与 $a^{\log_a N}=N$ 进行化简，随后计算出结果.

例四：已知 $\log_{18} 3=a$，试用 a 表示 $\log_2 3$.

$$\frac{1}{a}=\log_3 18=2+\log_3 2\Rightarrow \log_3 2=\frac{1}{a}-2\Rightarrow \log_2 3=\frac{1}{\frac{1}{a}-2}=\frac{a}{1-2a}.$$

总结：18 是合数，放在对数的真数上比放在底数上方便.

例五：$5^{\log_{25}(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}-7^{\log_{49}(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}$.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 5^{\log_5|\sqrt{3}-\sqrt{5}|}-7^{\log_7|\sqrt{5}+\sqrt{3}|}\\ &= |\sqrt{3}-\sqrt{5}|-|\sqrt{5}+\sqrt{3}|\\ &= \sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{3}\\ &= -2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

总结：使用运算定律 $a^{\log_a N}=N$ 与 $\log_{a^n} b^n=\log_a b$.

例六：已知 $2^{6a}=3^{3b}=6^{2c}$. 试建立 a,b,c 间的关系式.

对等式取自然对数，有 $\ln 2^{6a}=\ln 3^{3b}=\ln 6^{2c}$.
令 $6a\cdot\ln 2=3b\cdot\ln 3=2c\cdot\ln b=k$,
则有 $\ln 2=\dfrac{k}{6a},\ln 3=\dfrac{k}{3b},\ln 6=\dfrac{k}{2c}$.
由 $\ln 2+\ln 3=\ln 6$ 有 $\dfrac{1}{6a}+\dfrac{1}{3b}=\dfrac{1}{2c}$,
即 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=\dfrac{3}{c}$.

总结：(1) 在满足对数运算的定义域的前提下，等式两边取同底对数（一般选用 $\lg$ 或 $\ln$），等式仍然成立 (2) 观察到满足 $a\times b=c$ 的情况下考虑凑 $\ln a+\ln b=\ln c$.

例七：若 $\lg x=a,\lg y=b,\lg z=c$ 且 $a+b+c=0$, 求 $M=x^{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\cdot y^{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}\cdot z^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

$a+b+c=\lg xyz=0\Rightarrow xyz=1$.

$$\begin{aligned}M &= (xz)^{\frac{1}{b}}\cdot(xy)^{\frac{1}{c}}\cdot(yz)^{\frac{1}{a}}\\ &= \left(y^{-1}\right)^{\log_y 10}\cdot\left(z^{-1}\right)^{\log_z 10}\cdot\left(x^{-1}\right)^{\log_x 10}\\ &= \left(10^{-1}\right)^3\\ &= \frac{1}{1000}.\end{aligned}$$

总结：$a+b+c=0$ 的代入要熟悉对数的基本运算定律 $\log_a(MN)=\log_a M+\log_b N$，随后拆指数运算即可.