2 等式与不等式

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 10 月 21 日

2 等式与不等式

2.1 等式与不等式的性质

等式：用符号 $=$ 连接起来的两个式子.

等式的性质：传递性，加法性质，乘法性质.

等式的加法性质：$a=b \Leftrightarrow a+c=b+c$.

等式的乘法性质：$a=b \Rightarrow ac=bc$，$ac=bc$ **and** $c \neq 0 \Rightarrow a=b$.

方程：含有未知数的等式.

方程的解：使等式成立的未知数的值.

根：一元方程的解.

重根：一元整式方程的相等的根.

方程的解集：以方程的所有解为元素组成的集合. 重根在解集中只出现一次.

不等式：用不等号连接的式子.

不等号：$<, >, \leq, \geq$.

不等式的基本性质：$b>a \Leftrightarrow b-a>0$，$b<a \Leftrightarrow b-a<0$，$b=a \Leftrightarrow b-a=0$.

不等式的方向改变：$a>b \Leftrightarrow b<a$.

不等式的性质：传递性，加法性质，乘法性质.

不等式的加法性质：$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$.

不等式的乘法性质：$c>0, a>b \Leftrightarrow ac>bc$；$c<0, a>b \Leftrightarrow ac<bc$.

不等式的常用性质：

(1) $a>b$ and $c>d \Rightarrow a+c>b+d$.

(2) $a>b>0 \Leftrightarrow \frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0$.

(3) $a<b<0 \Leftrightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$.

(4) $a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd>0$.

(5) $n \in \mathbf{N}^*, a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n>0$.

(6) $n \in \mathbf{N}^*, a>0, b>0, a^n>b^n>0 \Rightarrow a>b>0$.

不等式的解：使不等式成立的未知数的值.

不等式的解集：以不等式的所有解为元素组成的集合.

例一：若 $30 < x < 42, 16 < y < 24$，求 $x+y, x-2y, \frac{x}{y}$ 的范围.

$30+16 < x+y < 42+24 \Rightarrow 46 < x+y < 66.$

$-48 < -2y < -32 \Rightarrow -18 < x-2y < 10.$

$\dfrac{1}{24} < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{16} \Rightarrow \dfrac{5}{4} < \dfrac{x}{y} < \dfrac{21}{8}.$

总结：不等式具有简单加、减、乘、除的规律，但应注意运算数的符号.

例二：$2 < x+y < 4, 1 < x-y < 2$. 求 $x, y, 4x-2y$ 的范围.

$3 < 2x < 6 \Rightarrow \dfrac{3}{2} < x < 3.$

$0 < 2y < 3 \Rightarrow 0 < y < \dfrac{3}{2}.$

$6 < 4x < 12, -3 < -2y < 0 \Rightarrow 3 < 4x-2y < 12.$ **错误!**

$4x-2y = 1 \times (x+y) + 3 \times (x-y) \Rightarrow 5 < 4x-2y < 10.$

总结：不能使用中间结论推出，因为 x 与 y 取到极值的条件不同．应直接使用原条件（两个不相干的，能同时取到极值的代数式）进行计算.

2.2 不等式的求解

2.2.1 一元一次不等式的求解

例一：解关于 x 的不等式 $m(x+2) > x+m$.

$(m-1)x > -m$，分三类讨论.

1° $m-1=0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow x \in \mathbf{R}$.

2° $m-1>0 \Rightarrow m>1 \Rightarrow x \in \left(\dfrac{m}{1-m}, +\infty\right)$

3° $m-1<0 \Rightarrow m<1 \Rightarrow x \in \left(-\infty, \dfrac{m}{1-m}\right)$

综上，当 $m \in (-\infty, 1)$ 时，解集为 $\left(-\infty, \dfrac{m}{1-m}\right)$；当 $m=1$ 时，解集为 $\mathbf{R}$；当 $m \in (1, +\infty)$ 时，解集为 $\left(\dfrac{m}{1-m}, +\infty\right)$.

总结：解含参不等式应对参数进行正、负的讨论（不等式的乘法性质）.

2.2.2 一元二次不等式的求解

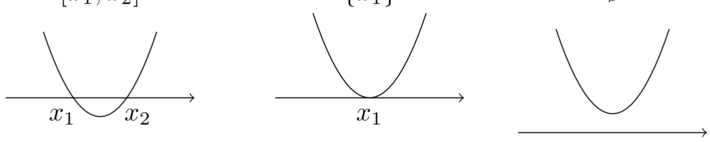
一元二次不等式：设 $a,b,c \in \mathbf{R}, a \neq 0$. 形如 $ax^2+bx+c>0(<0, \geq 0, \leq 0)$ 的不等式.

一元二次不等式的求解：(1) 化为二次项系数 >0 的一元二次不等式 (2) 解对应一元二次方程 (3) 根据图像写解集：大于取两边，小于取中间.

一元二次不等式的解集：假设 $a>0, \Delta = b^2-4ac$，则有：

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$ax^2+bx+c=0$	$\{x_1, x_2\}(x_1 < x_2)$	$\{x_1\}$	$\emptyset$
$ax^2+bx+c>0$	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$	$(-\infty, x_1) \cup (x_1, +\infty)$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c\geq 0$	$(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0$	(x_1, x_2)	$\emptyset$	$\emptyset$
$ax^2+bx+c\leq 0$	$[x_1, x_2]$	$\{x_1\}$	$\emptyset$

$y=ax^2+bx+c$



例一：设 $k \in \mathbf{R}$，解关于 x 的不等式 $kx^2-(1-k^2)x+k>0$.

1° $k=0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$.

2° $k \neq 0$, $(kx-1)(x-k)>0$, 对应二次方程两根为 $\dfrac{1}{k}, k$. $\dfrac{1}{k}-k=\dfrac{1-k^2}{k}$.

2.1° $k>0$

$2.1.1^\circ$ $k>1$, $\dfrac{1}{k}<k, x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{k}\right) \cup (k, +\infty)$.

$2.1.2^\circ$ $k=1$, $\dfrac{1}{k}=k, x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2.1.3° $0<k<1$, $\frac{1}{k}=k, x\in(-\infty,k)\cup\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$.

2.2° $k<0$

2.2.1° $-1<k<0$, $\frac{1}{k}<k, x\in\left(\frac{1}{k},k\right)$.

2.2.2° $k=-1$, $\frac{1}{k}=k, x\in\emptyset$.

2.2.3° $k<-1$, $\frac{1}{k}=k, x\in\left(k,\frac{1}{k}\right)$.

综上，当 $k\in(-\infty,-1)$ 时，解集为 $\left(k,\frac{1}{k}\right)$；当 $k=-1$ 时，解集为 $\emptyset$；当 $k\in(-1,0)$ 时，解集为 $\left(\frac{1}{k},k\right)$；当 $k=0$ 时，解集为 $(-\infty,0)$；当 $k\in(0,1)$ 时，解集为 $(-\infty,k)\cup\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$；当 $k=1$ 时，解集为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$；当 $k\in(1,+\infty)$ 时，解集为 $\left(-\infty,\frac{1}{k}\right)\cup(k,+\infty)$.

总结：(1) 解含参一元二次不等式首先对二次项的-，0，+ 进行讨论 (2) 0 化为含参一次不等式，-化为 + (3) 分类讨论两根大小，分段写解集.

例二：一元二次不等式组 $\begin{cases} 2x^2-x-1 > 0 & ① \\ 2x^2+(2a+5)x+5a < 0 & ② \end{cases}$ 整数解的集合为 $\{-2,-1\}$. 求 a 的范围.

由①: $(2x+1)(x-1)>0\Rightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

由②: $(2x+5)(x+a)<0$,

当 $a<\frac{5}{2}$, $x\in\left(-\frac{5}{2},-a\right)$；当 $a=\frac{5}{2}$, $x\in\emptyset$；当 $a>\frac{5}{2}$, $x\in\left(-a,-\frac{5}{2}\right)$.

$\because$ 整数解的集合为 $\{-2,-1\}$

$\therefore a<\frac{5}{2}$

$\therefore -a>-1$ **and** $-a\le 2$

$\therefore a\in[-2,1)$.

总结：整数解的集合即为解集交整数集，端点情况单独考虑，绘制数轴求解.

例三：已知 $\forall x\in\mathbf{R}: \dfrac{ax^2+2ax+2}{x^2+2x+3}<2$ 恒成立，求 a 的范围.

$\because x^2+2x+3=(x+1)^2+1\ge 1>0$

$\therefore ax^2+2ax+2<2(x^2+2x+3)$

$\therefore (a-2)x^2+(2a-4)x-4<0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

1° $a-2=0, a=2, -4<0$ 符合题意.

2° $a-2\neq 0, a\neq 2$, 有: $\begin{cases} a-2 < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow a\in(-2,2)$.

综上，$a\in(-2,2]$.

总结：不等式恒成立问题首先分析参数并分类讨论，结合二次方程解集为 R 的情况进行考虑.

例四：$f(x)=ax^2+bx+c$, 若 $f(1)=\dfrac{7}{2}$, 问是否存在 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 使不等式 $x^2+\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 2x^2+2x+\dfrac{3}{2}$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 都成立？并加以证明.

解不等式 $x^2+\dfrac{1}{2}\le 2x^2+2x+\dfrac{3}{2}$ 得 $x\in\mathbf{R}$.
解方程 $x^2+\dfrac{1}{2}=2x^2+2x+\dfrac{3}{2}$ 得 $x=-1$.
令 $x=-1$，有 $f(-1)=\frac{3}{2}$.
$x^2+\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 2x^2+2x+\dfrac{3}{2}$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，有：

$$\left\{\begin{array}{rcllcl} x^2+\dfrac{1}{2} & \le & ax^2+x+\frac{5}{2}-a & \Rightarrow & (a-1)x^2+x+2-a & \ge & 0 \\ ax^2+x+\dfrac{5}{2}-a & \le & 2x^2+2x+\frac{3}{2} & \Rightarrow & (a-2)x^2-x+1-a & \le & 0 \end{array}\right.$$

恒成立.
显然有 $a\notin\{1,2\}$，于是有：

$$\left\{\begin{array}{rclcrcl} a-1 & > & 0 & \Rightarrow & a & > & 1 \\ \Delta_1 & \le & 0 & \Rightarrow & (2a-3)^2 & \le & 0 \\ a-2 & < & 0 & \Rightarrow & a & < & 2 \\ \Delta_2 & \le & 0 & \Rightarrow & (2a-3)^2 & \le & 0 \\ f(1) & = & \frac{7}{2} & \Rightarrow & a+b+c & = & \frac{7}{2} \\ f(-1) & = & \frac{3}{2} & \Rightarrow & a-b+c & = & \frac{3}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{3}{2} \\ b & = & 1 \\ c & = & 1 \end{array}\right..$$

于是有 $a=\dfrac{3}{2},b=1,c=1$.

总结：两边夹类恒成立 (1) 验证两遍是否恒成立 (2) 代入两边夹一个点出方程 (3) 两边两个不等式恒成立问题求解.

2.2.3 分式不等式的求解

分式不等式的变形基础：$\dfrac{a}{b}>0\Leftrightarrow ab>0,\dfrac{a}{b}<0\Leftrightarrow ab<0$.
分式不等式一般步骤：(1) 移项同分，将不等式的一边化为 0；(2) 商化积：

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\ge 0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} f(x)\cdot g(x) & \ge & 0 \\ g(x) & \ne & 0 \end{array}\right.,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\le 0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} f(x)\cdot g(x) & \le & 0 \\ g(x) & \ne & 0 \end{array}\right..$$

特殊地，当 $g(x)$ 符号确定时，可以直接利用乘法性质乘到不等式另一边.
由于分式不等式的题较为基础，一般伴随着其它不等式一同出现，因此此处不多做赘述.

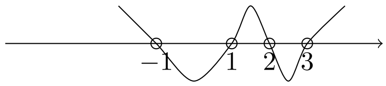
2.2.4 高次不等式的求解

口诀：右上方开始，奇穿偶不穿，注意空实心.

一般步骤：(1) 化简：$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)<0/>0/\leq 0/\geq 0$ 的形式 (2) 标根：将 $f(x)=0$ 的根标上数轴，注意空心实心点 (3) 穿线：右上方开始，奇穿偶不穿 (4) 根据图像写解集.

例一：解不等式 $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}<0$.

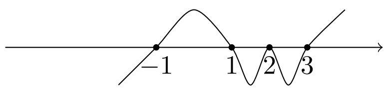
变形得 $(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)<0$.
与 x 轴交点为 $x_1=-1, x_2=1, x_3=2, x_4=3$.



因此解集为 $(-1,1)\cup(2,3)$.
总结：图像不一定要完全精确，与 x 轴的关系正确即可.

例二：解不等式 $(x-3)^3(x-2)^2(x-1)(x+1)\geq 0$.

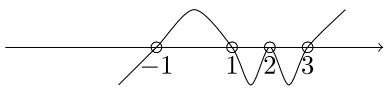
与 x 轴交点为 $x_1=-1, x_2=1, x_3=x_4=2, x_5=x_6=x_7=3$.



因此解集为 $[-1,1]\cup\{2\}\cup[3,+\infty)$.
总结：(1) 奇穿偶不穿 (2) 注意数轴上 0 的点是否取.

例三：解不等式 $(x-3)^3(x-2)^2(x-1)(x+1)\geq 0$.

与 x 轴交点为 $x_1=-1, x_2=1, x_3=x_4=2, x_5=x_6=x_7=3$.



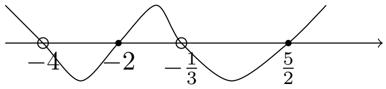
因此解集为 $(-\infty,-1)\cup(1,2)\cup(2,3)$.
总结：$\geq 0, \leq 0$ 类使用实心点，$>0, <0$ 使用实心点. 空心都不取，实心都取.

例四：解不等式 $\dfrac{5x^2+12x-6}{3x^2+13x+4}\leq 1$.

化简，有 $\dfrac{2x^2-x-10}{3x^2+13x+4}\leq 0$.
于是有

$$\begin{cases} (x+2)(2x-5)(x+4)(3x+1) & \leq & 0 \\ (3x+1)(x+4) & \neq & 0 \end{cases},$$

与 x 轴交点为 $x_1 = -4, x_2 = -2, x_3 = -\frac{1}{3}, x_4 = \frac{5}{2}$.



解集为 $(-4,-2] \cup \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right]$.

总结：分母不为 0，使用空心点.

例五：$\dfrac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1} > n$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 成立，$n \in \mathbf{N}^*$，求 n.

$\because x^2+x+1>0$

$\therefore 3x^2+2x+2 > n(x^2+x+1)$

$\therefore (3-n)x^2+(2-n)x+2-n>0$

$n=3$ 显然不成立，于是有：

$$\begin{cases} 3-n & > & 0 \\ \Delta & < & 0 \end{cases} \Rightarrow n = 1 \text{ or } 2.$$

综上，$n \in \{1,2\}$.

总结：当分母的正负性确定时，可直接利用乘法性质乘到不等式另一侧化为整式处理.

2.2.5 绝对值不等式的求解

绝对值的运算：

$$|x| = \begin{cases} x & \text{for} & x>0 \\ 0 & \text{for} & x=0 \\ -x & \text{for} & x<0 \end{cases}.$$

绝对值的基本运算法则：$|a+b| \neq |a|+|b|, |ab| = |a|\cdot|b|, \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

$|f(x)|$</>/$\leq$/$\geq a$ **类不等式的求解**：

	$\lvert f(x)\rvert < a$	$\lvert f(x)\rvert > a$	$\lvert f(x)\rvert \leq a$	$\lvert f(x)\rvert \geq a$
$a>0$	$f(x)\in(-a,a)$	$f(x)\in(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$	$f(x)\in[-a,a]$	$f(x)\in(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$
$a=0$	$f(x)\in\emptyset$	$f(x)\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$f(x)\in\{0\}$	$f(x)\in\mathbf{R}$
$a<0$	$f(x)\in\emptyset$	$f(x)\in\mathbf{R}$	$f(x)\in\emptyset$	$f(x)\in\mathbf{R}$

例一：$\dfrac{1}{|2x-3|} \geq 2$.

$$\begin{cases} 2x-3 & \neq & 0 & \Rightarrow & x & & \neq & & \frac{3}{2} \\ |2x-3| & \leq & \frac{1}{2} & \Rightarrow & -\frac{1}{2} & \leq & 2x-3 & \leq & \frac{1}{2} & \Rightarrow & \frac{5}{4} & \leq & x & \leq & \frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right].$$

总结：(1) 切记分式的分母不等于 0 (2) 绝对值恒大于等于零.

$|f(x)|</\leq|g(x)|$ **类不等式的求解**:

$$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \Leftrightarrow [f(x)+g(x)]\cdot[f(x)-g(x)] < 0,$$

$$|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \leq g^2(x) \Leftrightarrow [f(x)+g(x)]\cdot[f(x)-g(x)] \leq 0.$$

例二: $|2x-1| > |x+2|$.

$(2x-1+x+2)(2x-1-x-2) > 0 \Rightarrow (3x+1)(x-3) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$.

总结：这题没啥好总结的，正常计算即可.

例三: $|x+2| > \dfrac{3x+14}{5}$.

法一: 分两类讨论.

$$1^\circ \begin{cases} x+2 & > & 0 \\ x+2 & > & \dfrac{3x+4}{5} \end{cases} \Rightarrow x > 2.$$

$$2^\circ \begin{cases} x+2 & \leq & 0 \\ -x-2 & > & \dfrac{3x+4}{5} \end{cases} \Rightarrow x < -3.$$

于是有 $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.

$|f(x)|</>/\leq/\geq g(x)$ **类不等式的求解**:

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x), |f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow -g(x) \leq f(x) \leq g(x),$$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow g(x) < f(x) \text{ or } f(x) < -g(x), |f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow g(x) \leq f(x) \text{ or } f(x) \leq -g(x).$$

例三（续）: $|x+2| > \dfrac{3x+14}{5}$.

法二: $x+2 > \dfrac{3x+14}{5}$ or $x+2 < -\dfrac{3x+14}{5} \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.

总结：特法能更直接得到结论，通法对能用特法做的题同样适用.

通法：零点分段，去绝对值．**不等式、方程、函数均适用．**

例四：$|2x-1|-x<|x+3|+1$．

分三类讨论．

$$1^\circ\ \begin{cases} x<-3 \\ 1-2x-x<-3-x+1 \end{cases} \Rightarrow x\in\emptyset.$$

$$2^\circ\ \begin{cases} -3\le x<\dfrac{1}{2} \\ 1-2x-x<x+3+1 \end{cases} \Rightarrow x\in\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right).$$

$$3^\circ\ \begin{cases} x\ge\dfrac{1}{2} \\ 2x-1-x<x+3+1 \end{cases} \Rightarrow x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right).$$

综上，$x\in\left(-\dfrac{3}{4},+\infty\right)$．

总结：通法的适用性更广，利用的是绝对值的定义．

2.2.6 补充：无理不等式的求解

$\sqrt{f(x)}</>/\le/\ge a$ **类不等式的求解**：

	$\sqrt{f(x)}<a$	$\sqrt{f(x)}>a$	$\sqrt{f(x)}\le a$	$\sqrt{f(x)}\ge a$
$a>0$	$f(x)\in[0,a^2)$	$f(x)\in(a^2,+\infty)$	$f(x)\in[0,a^2]$	$f(x)\in[a^2,+\infty)$
$a=0$	$f(x)\in\emptyset$	$f(x)\in(0,+\infty)$	$f(x)\in\{0\}$	$f(x)\in[0,+\infty)$
$a<0$	$f(x)\in\emptyset$	$f(x)\in[0,+\infty)$	$f(x)\in\emptyset$	$f(x)\in[0,+\infty)$

$\sqrt{f(x)}</>/\le/\ge g(x)$ **类不等式的求解**：

$$\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g^2(x) \end{cases},\ \sqrt{f(x)}\le g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \\ f(x)\le g^2(x) \end{cases},$$

$$\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f(x)>g^2(x) \end{cases}\ \text{or}\ \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)<0 \end{cases},$$

$$\sqrt{f(x)}\ge g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} g(x)>0 \\ f(x)\ge g^2(x) \end{cases}\ \text{or}\ \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\le 0 \end{cases}.$$

$\sqrt{f(x)}</\le\sqrt{g(x)}$ **类不等式的求解**：

$$\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f(x)<g(x) \end{cases},\ \sqrt{f(x)}\le\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f(x)\le g(x) \end{cases}.$$

2.3 恒成立不等式及应用

2.3.1 三角不等式

三角不等式：$|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$，左边等号成立当且仅当 $ab\le 0$，右边等号成立当且仅当 $ab\ge 0$，两边等号均成立当且仅当 $ab=0$.

证明三角不等式.

$\because -|a|\le a\le|a|,-|b|\le b\le|b|$

$\therefore -(|a|+|b|)\le a+b\le|a|+|b|$

$\therefore |a+b|\le|a|+|b|$, 等号成立当且仅当 $ab\ge 0$.

$\because a=a+b-b$

$\therefore |a|=|(a+b)+(-b)|\le|a+b|+|b|$

$\therefore |a|\le|a+b|+|b|$

$\therefore |a|-|b|\le|a+b|$, 等号成立当且仅当 $ab\le 0$.

三角不等式在多元上的推广：$\left|\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right|\le\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|(n\in\mathbf{N},n\ge 2)$.

三角不等式的推论：$|a|-|b|\le|a-b|\le|a|+|b|$.

三角不等式的严格化推论：$||a|-|b||\le|a+b|\le|a|+|b|,||a|-|b||\le|a-b|\le|a|-|b|$.

三角不等式的取等条件：运算符号相同，$ab\ge 0$；运算符号相反，$ab\le 0$；两边都要取到，$ab=0$.

例一：求 $f(x)=|x-1|+|x-2|$ 的最小值.

$|x-1|+|x-2|=|x-1|+|2-x|\ge|(x-1)+(2-x)|=1$,

当 $(x-1)(2-x)\ge 0$ 即 $1\le 2\le 2$ 时取等.

$\therefore$ 当 $x\in[1,2]$ 时，$f_{\min}(x)=1$.

总结：形如 $f(x)=|x-a|+|x-b|(a>b)$ 的函数在 $x\in[b,a]$ 时取到 $f_{\min}(x)=a-b$.

例二：求 $f(x)=|x-1|-|x+2|$ 的最大值.

$|x-1|-|x+2|\le|(x-1)-(x+2)|=3$,

当 $(x-1)(x+2)\ge 0$ 且 $|x-1|\ge|x+2|$ 时取等.

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,-2]$ 时，$f_{\max}(x)=3$.

总结：形如 $f(x)=|x-a|-|x-b|(a>b)$ 的函数在 $x\in(-\infty,b]$ 时取到 $f_{\max}(x)=a-b$.

2.3.2 基本不等式

基本不等式 1：$\forall a,b\in\mathbf{R}:a^2+b^2\ge 2ab$，等号成立当且仅当 $a=b$.

基本不等式 2：$\forall a,b\in\mathbf{R}^+:\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，等号成立当且仅当 $a=b$.

基本不等式 2 的推广：$\forall a,b\in\mathbf{R}^+:\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$，等号成立当且仅当 $a=b$.（调和 $\le$ 几何 $\le$ 算术 $\le$ 平方）

基本不等式 2 的推广的推广:$\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+:\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leq\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$，等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

基本不等式 2 在负数上的推广：$\forall a,b\in\mathbf{R}^-:\dfrac{a+b}{2}\leq-\sqrt{ab}$，等号成立当且仅当 $a=b$.

基本不等式的应用：(1) 一正：$a>0,b>0$ (2) 二定：积定和有最小值：$a+b\geq2\sqrt{ab}$；和定积有最大值：$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (3) 三相等：考虑 = 能否取到.

例一：已知 $x>0,a>0$. 求 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 的 $f_{\min}(x)$ 并求出对应的 x.

$\because x>0,a>0\therefore\frac{a}{x}>0$.
由基本不等式，有

$$f(x)=x+\frac{a}{x}\geq2\sqrt{x\cdot\frac{a}{x}}=2\sqrt{a}.$$

取等当且仅当 $x=\frac{a}{x}$ 即 $x=\pm\sqrt{a}$（舍负）.
于是有 $f_{\min}(x)=f(\sqrt{a})=2\sqrt{a}$.
总结：最基本的积定的直接应用.

例二：已知 $a>0$. 求 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 的值域.

易得 $x\neq0$.
分两类讨论.

1° $x>0$,

由例一有 $f_{\min}(x)=f(\sqrt{a})=2\sqrt{a}$.

2° $x<0$,

$\because x<0,a>0\therefore\frac{a}{x}<0$.

由基本不等式，有

$$f(x)=x+\frac{a}{x}\leq-2\sqrt{x\cdot\frac{a}{x}}=-2\sqrt{a}.$$

取等当且仅当 $x=\frac{a}{x}$ 即 $x=\pm\sqrt{a}$（舍正）.

于是有 $f_{\max}(x)=f(-\sqrt{a})=-2\sqrt{a}$.

综上，$f(x)$ 的值域为 $(-\infty,-2\sqrt{a}]\cup[2\sqrt{a},+\infty)$.
总结：注意讨论 x 的正负号，利用基本不等式 2 及其在负数上的推广求值域.

例三：已知 $x>1$. 求 $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$ 的最小值.

$\because x>1\therefore x>1>0,\frac{1}{x-1}>0$.

由基本不等式，有

$$f(x)-1=x+\frac{a}{x-1}-1=(x-1)+\frac{1}{x-1}\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}=2.$$

取等当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$ 即 $x-1=\pm1$ 即 $x=\pm1+1=2$ 或 0（舍）.
于是有 $f_{\min}(x)=f(2)=3$.
总结：构造积定，变为基本不等式的形式.

例四：求 $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ 的值域.

$f(x)=x+\frac{1}{x+1}$.
易得 $x\neq-1$.
分两类讨论.

1° $x>-1$,

$\because x>-1\ \therefore x+1>0, \frac{1}{x+1}>0$.

由基本不等式，有

$$f(x)+1=x+\frac{1}{x+1}+1=(x+1)+\frac{1}{x+1}\geq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}=2.$$

取等当且仅当 $x+1=\frac{1}{x+1}$ 即 $x+1=\pm1$ 即 $x=0$ 或 -2（舍）.

于是有 $f_{\min}(x)=f(0)=1$.

2° $x<-1$,

$\because x<-1\ \therefore x+1<0, \frac{1}{x+1}<0$.

由基本不等式，有

$$f(x)+1=x+\frac{1}{x+1}+1=(x+1)+\frac{1}{x+1}\leq -2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}=-2.$$

取等当且仅当 $x+1=\frac{1}{x+1}$ 即 $x+1=\pm1$ 即 $x=-2$ 或 0（舍）.

于是有 $f_{\max}(x)=f(-2)=-3$.

综上，$f(x)$ 的值域为 $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.
总结：分子次数比分母高（常见为二次和一次），分子可选择换元进行求解.

例五：求 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+x+1}$ 的值域.

分两类讨论.

1° $x=0$,

$f(0)=0$

2° $x\neq 0$,

$f(x)=\dfrac{2}{x+1+\frac{1}{x}}$.

由 (2) 有 $g(x)=x+\frac{1}{x}$ 的值域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

$\therefore g(x)+1$ 的值域为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

$\therefore \frac{1}{g(x)+1}$ 的值域为 $[-1,0)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right]$.

$\therefore \frac{2}{g(x)+1}=f(x)$ 的值域为 $[-2,0)\cup\left(0,\frac{2}{3}\right]$.

综上，$f(x)$ 的值域为 $\left[-2,\frac{2}{3}\right]$.

总结：分母次数比分子高（常见为一次和二次），勿忘讨论分子为 0，分子除到分母上.

例六：求 $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x+1}$ 的值域.

$\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x+1}=1+\dfrac{2x}{x^2+x+1}$.

由例五有 $f(x)$ 的值域为 $\left[-1,\frac{5}{3}\right]$.

总结：分母次数与分子相同（常见为二次和二次），分子滚分母，分离整系数.

例七：求 $f(x)=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$ 的值域.

令 $t=x^2(t\geq 0)$，则有 $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+1}=\dfrac{t^2+t+1}{t+1}$.

由例四有 $f(x)$ 的值域为 $[1,+\infty)$.

总结：分母分子高次，换元降次.

例八：已知 $0<x<1$，求函数 $f(x)=x(1-x)$ 的最大值.

$\because 0<x<1$

$\therefore 0<1-x<1$

$\therefore f(x)=x(1-x)\leq\left(\dfrac{x+1-x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，等号成立当且仅当 $x=1-x$ 即 $x=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore f_{\max}(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$.

总结：最基本的和定的直接应用.

例九：已知 $0<x<\dfrac{1}{2}$，求函数 $f(x)=x(1-2x)$ 的最大值.

$\because 0<x<\dfrac{1}{2}$

$\therefore 0<1-2x<1$

$\therefore f(x)=x(1-2x)=\dfrac{1}{2}\cdot\cdot 2x(1-2x)\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x+1-2x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{8}$，等号成立当且仅当 $2x=1-2x$ 即 $x=\frac{1}{4}$.

$\therefore f_{\max}(x) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$.

总结：构造和定，变为基本不等式的形式.

例十：已知 $a, b, x, y \in \mathbf{R}^+, \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$.

(1) $a = 2, b = 1$, 求 $(x+y)_{\min}$.

(2) 若 $a + b = 5$ 且 $(x+y)_{\min} = 9$, 求 a, b.

(1) $a = 2, b = 1$, 求 $(x+y)_{\min}$.

典型错误：$1 = \frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{y}} \Rightarrow xy \geq 8 \Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy} \geq 4\sqrt{2}$.

两次使用基本不等式一定要注意等号成立条件是否能同时取到!

$\because x, y \in \mathbf{R}^+$

$\therefore x + y = (x+y)\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right) = 3 + \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} \geq 3 + \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} = 3 + 2\sqrt{2}$,

等号成立当且仅当 $\frac{2y}{x} = \frac{x}{y}$ and $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$ 即 $x = 2 + \sqrt{2}, y = 1 + \sqrt{2}$.

$\therefore x = 2 + \sqrt{2}, y = \sqrt{2} + 1$ 时，$(x+y)_{\min} = 3 + 2\sqrt{2}$.

(2) 若 $a + b = 5$ 且 $(x+y)_{\min} = 9$, 求 a, b.

$(x+y)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right) = a + b + \frac{ay}{x} + \frac{bx}{y} \geq a + b + 2\sqrt{ab} = 5 + 2\sqrt{ab} = 9$,

等号成立当且仅当 $bx^2 = ay^2$ 时取等.

$$\begin{cases} \sqrt{ab} &= 2 \\ a + b &= 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 4 \end{cases} \text{or} \begin{cases} a &= 4 \\ b &= 1 \end{cases}.$$

验证等号成立条件，对应即为 $y = 2x$ 或 $x = 2y$ 时等号成立.

$\therefore (a, b) = (1, 4)$ or $(4, 1)$.

总结：在无法直接转换为基本不等式时，可考虑使用“1”进行代换.

例十一：$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{a}{y}\right) \geq 9$ 对任意正实数 x, y 恒成立，求正实数 a 的最小值.

即 左边$_{\min} \geq 9$.

$a + 1 + \frac{y}{x} + \frac{xa}{y} \geq a + 1 + 2\sqrt{a} \geq 9$，等号成立当且仅当 $ax^2 = y^2$.

有 $(\sqrt{a} + 1)^2 \geq 9 \Rightarrow \sqrt{a} \geq 2 \Rightarrow a \geq 4$.

当 $a = 4$ 时，验证等号成立条件即为 $x = 2y$.

于是 $a_{\min} = 4$.

总结：恒大于等于/小于等于问题考虑最小值/最大值恒大于等于/小于等于，可以考虑使用基本不等式求解.

例十二：$(k^2 + k + 1)x^2 - 2(a+k)^2 x + k^2 + 3ak + b = 0$ 对任意实数 k 恒有根 1. 求：

(1) a, b

(2) k 变化时，另一根的变化范围.

(1) a, b

代入 $x=1$ 有: $(1-a)k+1-2a^2+b=0$ 对 $k\in\mathbf{R}$ 恒成立，有:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1-a & = & 0 \\ 1-2a^2+b & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 1 \end{array}\right. .$$

(2) k 变化时，另一根的变化范围.

设另一根为 x_2，由 Vieta 定理，有:

$x_2\cdot 1=\dfrac{k^2+3k+1}{k^2+k+1}=1+\dfrac{2k}{k^2+k+1}$.

由例五有 $x_2\in\left[-1,\dfrac{5}{3}\right]$.

总结: (1) 对什么变量恒成立，什么就是主元 (2) "$0=0$"类问题，主元的每个系数均对应相同 (3) Vieta 定理可用来确定根的范围.

例十三: $(kx-k^2-4)(x-4)>0, k\in\mathbf{R}$.

(1) k 变化时，求解集 A.

(2) 若 $A\cap\mathbf{Z}=B$, 探究 B 能否为有限集? 若能，求 B 中元素最少的 k 的取值并用列举法表示 B.

(1) k 变化时，求解集 A.

$\dfrac{k^2+4}{k}=k+\dfrac{4}{k}\in(-\infty,4]\cup[4,+\infty)$.

1° $k=0, A=(-\infty,4)$.

2° $k>0, \dfrac{k^2+4}{k}\geq 4, A=(-\infty,4)\cup\left(\dfrac{k^2+4}{k},+\infty\right)$.

3° $k<0, \dfrac{k^2+4}{k}\leq -4<4, A=\left(\dfrac{k^2+4}{k},4\right)$.

综上，当 $k\in(-\infty,0), A=\left(\dfrac{k^2+4}{k},4\right)$; 当 $k=0, A=(-\infty,4)$; 当 $k\in(0,+\infty), A=(-\infty,4)\cup\left(\dfrac{k^2+4}{k},+\infty\right)$.

(2) 若 $A\cap\mathbf{Z}=B$, 探究 B 能否为有限集? 若能，求 B 中元素最少的 k 的取值并用列举法表示 B.

由 (1) 有 $k\geq 0, B$ 为无限集; 当 $k<0, B$ 为有限集.

$\therefore k<0, A=\left(\dfrac{k^2+4}{k},4\right)$.

$k+\dfrac{4}{k}\leq -2\sqrt{k\cdot\dfrac{4}{k}}=-4$，等号成立当且仅当 $k=-2$.

当 $k=-2$，$A=(-4,4)$ 最短.

此时 B 中元素最少，$B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

总结: (1) 基本不等式可帮助确定二次方程两根大小关系和最值相关问题 (2) "探究"问题无论结果如何均需写出过程.

2.4 不等式的证明

2.4.1 比较法

比较法一般步骤：(1) 作差（商）(2) 变形 (3) 判断.

例一：求证 $a^2+b^2 \geq ab+a+b-1$.

法一：作差.

$$\begin{aligned} & (a^2+b^2)-(ab+a+b-1) \\ = & \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\right] \\ \geq & 0. \end{aligned}$$

即 $a^2+b^2 \geq ab+a+b-1$.

法二：构造二次函数.

记 $f(a)=a^2-(b+1)a+b^2-b+1$.

$\Delta=(b+1)^2-4(b^2-b+1)=-3(b-1)^3 \leq 0$.

又二次项系数为 1 恒为正，有 $f(a) \geq 0$，即 $a^2+b^2 \geq ab+a+b-1$.

总结：(1) 作差法是万！能！的！(2) 构造二次函数，利用二次函数的最小值同样也是常见的求最值/证明不等式恒成立的方法.

例二：已知 $a,b,m \in \mathbf{R}^+, a<b$, 求证：$\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$.

$\dfrac{a+m}{b+m}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{(b-a)m}{b(b+m)}$.

$\because b>0, b+m>0, b-a>0, m>0$

$\therefore \dfrac{(b-a)m}{b(b+m)}>0$

$\therefore \dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$.

总结：作差法一般变形为平方、绝对值、根式（恒成立）或多个代数式的乘积，根据每项的正负性证明差的正负性.

2.4.2 综合法

综合法：由条件分析.

例：已知 a,b,c 为不全相等的正数. 求证：$\dfrac{b+c-a}{a}+\dfrac{c-a-b}{b}+\dfrac{a+b-c}{c}>3$.

左边 $=\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)+\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right)-3$.

$\because a,b,c$ 为不全相等的正数

$\therefore \frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geq 2, \frac{c}{b}+\frac{b}{c} \geq 2, \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geq 2$，等号不能同时取到.

$\therefore$ 左边 >3.

总结：(1) 综合法一般用在一步步化简方法比较明显的题目上 (2) 基本不等式的等号不同时取到是去除等号的很重要的一种方法.

2.4.3 分析法

分析法：从结论推到已知. **注意格式.**

例：已知 $a>b>0$，求证：$\dfrac{(a-b)^2}{8a}<\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\dfrac{(a-b)^2}{8b}$.

欲证 $\dfrac{(a-b)^2}{8a}<\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\dfrac{(a-b)^2}{8b}$

只需证 $\dfrac{(a-b)^2}{4a}<a+b-2\sqrt{ab}<\dfrac{(a-b)^2}{4b}$

只需证 $\left(\dfrac{a-b}{2\sqrt{a}}\right)^2<\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2<\left(\dfrac{a-b}{2\sqrt{b}}\right)^2$

只需证 $\dfrac{a-b}{2\sqrt{a}}<\sqrt{a}-\sqrt{b}<\dfrac{a-b}{2\sqrt{b}}$

即证 $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}<1<\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$

即证 $1+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}<2<1+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

即证 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}<1<\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\because a>b>0$

$\therefore \sqrt{a}>\sqrt{b}>0$

$\therefore \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}<1<\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 成立

故原不等式成立.

总结：分析法一般用在一步步化简方法不明显，从结论分析会比较容易的难题上，现阶段很少出现，主要为后面的函数综合题作准备.

2.4.4 反证法

例：$f(x)=x^2+px+q$. 证明 $|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ 至少一个不小于 $\dfrac{1}{2}$.

假设三者均小于 $\dfrac{1}{2}$

$|f(1)|=|p+q+1|,|f(2)|=|2p+q+4|,|f(3)|=|3p+q+9|$.

法一：$\because f(1)=p+q+1,f(2)=2p+q+4$

$\therefore p=f(2)-f(1)-3,q=2f(1)-f(2)+2$

$\therefore |f(3)|=|2f(2)-f(1)+2|\geq 2f(2)-f(1)+2>-2\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{1}{2}$ 与假设矛盾.

于是 $|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ 至少一个不小于 $\dfrac{1}{2}$.

法二：$f(1)+f(3)-2f(2)=2$.

但 $|f(1)+f(3)-2f(2)|\leq|f(1)|+|f(3)|+2|f(2)|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=2$ 与之矛盾.

于是 $|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ 至少一个不小于 $\dfrac{1}{2}$.

总结：反证法一般用在求证内容带有"存在"等词的题，一般正面证明较为困难，使用反证法即为"都不"，推出矛盾较为容易.

2.4.5 放缩法

例：求证：$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

1° $|a+b|=0$ 显然成立.

2° $|a+b|\neq 0,\ 0<|a+b|\leq |a|+|b| \Rightarrow \dfrac{1}{|a+b|}\geq \dfrac{1}{|a|+|b|}$.

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \frac{|a+b|}{1+|a+b|}\\
&= \frac{1}{\frac{1}{|a+b|}+1}\\
&\leq \frac{1}{\frac{1}{|a|+|b|}+1}\\
&= \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\\
&= \frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\
&\leq \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.
\end{aligned}$$

于是得证.

总结：放缩法常见于其它证明方法当中，且需要适当的技巧和熟练度.