1 集合

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 10 月 17 日

1 集合

1.1 集合初步

1.1.1 集合的关系

集合：一些确定对象的全体.

集合中元素的特征：确定性，互异性，无序性.

集合符号：大写字母 $A, B, C, \ldots$.

元素符号：小写字母 $a, b, c, \ldots$.

二元逻辑符号：元素 a 在集合 S 中：$a \in S$；元素 a 不在集合 S 中：$a \notin S$；集合 A 与集合 B 相同：$A = B$；集合 A 与集合 B 不同：$A \neq B$.

集合的分类：空集，有限集，无限集.

空集：不含任何元素的集合，记作 $\emptyset$.

全集：所有研究对象组成的集合，用符号 U 来表示.

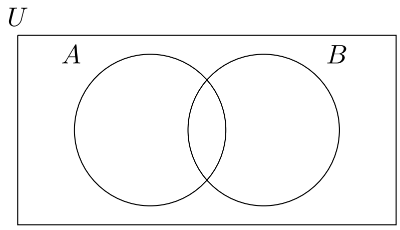
特殊数集：有理数集 $\mathbf{N}$，正整数集 $\mathbf{N}^*$，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$. 在 $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 后加一上标 $+$ 或 $-$ 表示对应的正数/负数集合.

集合表示形式：列举法、描述法、图示法.

列举法：$A = \{a, b, c, \ldots\}$.

描述法：$A = \{x | x\text{满足性质}p\}$. 表示 A 为所有满足性质 p 的 x 组成的集合.

图示法：即文氏图法.



子集：对 A 中的任意元素 x 都有 $x \in B$，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$. 规定 $\emptyset \subseteq A$，其中 A 为任意集合.

真子集：对 A 中的任意元素 x 都有 $x \in B$，且 $A \neq B$，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 规定 $\emptyset \subset A$，其中 A 为任意非空集合.

（真）子集的性质：（真）子集同大于/小于号，具有相同方向的传递性；$A = B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

子集的个数：若 $|S| = n$，则 $\sum\limits_{A \subseteq S} 1 = 2^n, \sum\limits_{A \subset S} 1 = 2^n - 1$.

空集的连接符号：$\emptyset \in \{\emptyset\}, \emptyset \subseteq \{\emptyset\}, \emptyset \subset \{\emptyset\}, \emptyset \neq \{\emptyset\}$.

区间：$[a,b]=\{x|a\leq x\leq b\},(a,b)=\{x|a<x<b\}(a<b)$，半开半闭区间同理，一侧为 $\pm\infty$ 即表示无该端点限制.

例一：已知：$A=\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\},B=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{Z}\}$. 求证：$A=B$.

1° 证明 $A\subseteq B$

$\forall x\in A: x=2n+1=2(n+1)-1.$

$\because n\in\mathbf{Z}\therefore n+1\in\mathbf{Z}.$

$\therefore x\in B\therefore A\subseteq B.$

2° 证明 $B\subseteq A$

$\forall x\in B: x=2n-1=2(n-1)+1.$

$\because n\in\mathbf{Z}\therefore n-1\in\mathbf{Z}.$

$\therefore x\in A\therefore B\subseteq A.$

综上，$A=B$.

总结：证明 $A=B$ 可以使用 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，两者等价.

例二：已知：$A=\{x,x^2,xy\},B=\{1,x,y\},A=B$. 求：$x,y$.

分两种对应情况讨论.

$1^\circ\ \begin{cases} xy &= y \\ x^2 &= 1 \end{cases}$

$\because x\neq x^2\therefore x=-1.$

$\because xy=y\therefore y=0.$

$2^\circ\ \begin{cases} xy &= 1 \\ x^2 &= y \end{cases}$

解得 $x=1$（舍）.

综上，$x=-1,y=0$.

总结：求解 $A=B$ 使用对应元素相等分类讨论列方程并通过集合元素的互异性进行检验.

例三：已知：$A=\{x,xy,x+y\},B=\{0,|x|,y\},A=B$. 求：$A$.

$\because B=\{0,|x|,y\}$

$\therefore |x|\neq 0,y\neq 0$

$\therefore x\neq 0,xy\neq 0$

$\therefore x+y\neq 0.$

分两种对应情况讨论.

1° $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & |x| \\ xy & = & y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & -1 \end{array}\right.$

此时 $A = \{1, -1, 0\}, B = \{0, 1, -1\}$，符合.

2° $\left\{\begin{array}{rcl} xy & = & |x| \\ x & = & y \end{array}\right. \xRightarrow{|x|^2=x^2} \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$

此时 $A = \{1, 1, 2\}$（舍）.

综上，$A = \{1, -1, 0\}$.

总结：求解 $A = B$ 对应形式若过多可使用互异性等首先排除部分对应条件后进行讨论.

例四：已知：$M = \{x|ax + 1 = 0\}, N = \{x|x^2 - 5x + 6 = 0\}, M \subset N$. 求：$a$.

$N = \{2, 3\}$.

分两类讨论.

1° $M = \emptyset$ 即 $ax + 1 = 0$ 无解 $\Rightarrow a = 0$.

2° $M \neq \emptyset$ 即 $a \neq 0$

$ax + 1 = 0$ 的根为 $x = -\frac{1}{a}$.

$\because M \subset N$

$\therefore -\frac{1}{a} = 2$ or $-\frac{1}{a} = 3$

$\therefore a = -\frac{1}{2}$ or $-\frac{1}{3}$.

综上，$a \in \left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$

总结：$A \subset B$ 及 $A \subseteq B$ 类题勿忘考虑 $A = \emptyset$.

例五：已知：$A = \{x| -3 \leq x \leq 4\}, B = \{x|2m - 1 \leq x \leq m + 1\}, B \subseteq A$. 求：$m$.

分两类讨论.

1° $B = \emptyset$

即 $2m - 1 > m + 1 \Rightarrow m > 2$.

2° $B \neq \emptyset \Rightarrow m \leq 2$

$\left\{\begin{array}{rcl} 2m - 1 & \geq & 3 \\ m + 1 & \leq & 4 \end{array}\right. \Rightarrow m \in [-1, 3]$.

$\because m \leq 2$

$\therefore m \in [-1, 2]$.

综上，$m \geq -1$.

总结：分类讨论每个类的结论都应该在这个类的大前提之下.

例六：已知：$S \subset \mathbf{N}, S \neq \emptyset, \forall x \in S : 1 + \frac{11}{x-1} \in S$.

(1) S 能否为单元素集? 为什么?

(2) 求出只含两个元素的集合 S.

(3) 满足条件的 S 一共有几个? 为什么? 并列举它们.

(1) S 能否为单元素集? 为什么?

$\because \forall x \in S: 1+\frac{11}{x-1} \in S$

$\therefore$ 若 S 为单元素集，则有 $x \in \mathbf{N}$ 且 $x = 1+\frac{12}{x-1}$

解得 $x = 1 \pm 2\frac{3}{\notin}\mathbf{N}$.

$\therefore S$ 不能为单元素集.

(2) 求出只含两个元素的集合 S.

$\because x \in \mathbf{N}, 1+\frac{12}{x-1} \in \mathbf{N}$

$\therefore x-1 \in \{1,2,3,4,6,12\}$ 即 x 可取 $2,3,4,5,7,13$.

$x=2 \Rightarrow 1+\frac{12}{x-1}=13$.

$x=13 \Rightarrow 1+\frac{12}{x-1}=2$.

$x=3 \Rightarrow 1+\frac{12}{x-1}=7$.

$x=7 \Rightarrow 1+\frac{12}{x-1}=3$.

$x=4 \Rightarrow 1+\frac{12}{x-1}=5$.

$x=5 \Rightarrow 1+\frac{12}{x-1}=4$.

即 $S=\{2,13\}$ or $\{3,7\}$ or $\{4,5\}$.

(3) 满足条件的 S 一共有几个? 为什么? 并列举它们.

$2^3-1=7$.

$\{2,13\},\{3,7\},\{4,5\},\{2,3,7,13\},\{2,4,5,13\},\{3,4,5,7\},\{2,3,4,5,7,13\}$.

总结：突破口在于 $S \subset N$，随后根据条件中的分式考虑分子的因数代入计算检验.

例七：已知：$A=\{x|0<ax+1 \leq 5\}, B=\{x|\frac{1}{2}<x \leq 2\}$.

(1) 若 $A \subseteq B$，求 a.

(2) 若 $A \supseteq B$，求 a.

(3) A, B 能否相等? 求出 a 并说明理由.

1° $a=0 \Rightarrow 0<1 \leq 5 \Rightarrow A=\mathbf{R}$.

2° $a>0 \Rightarrow A=\left(-\frac{1}{a}, \frac{4}{a}\right]$.

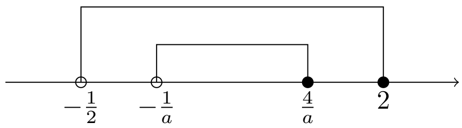
3° $a<0 \Rightarrow A=\left[\frac{4}{a}, -\frac{1}{a}\right)$.

(1) 若 $A\subseteq B$，求 a.

$\because A\subseteq B$

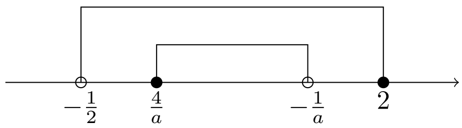
$\therefore$ 分两类讨论.

1° $a>0$



$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \le -\frac{1}{a} \\ \frac{4}{a} \le 2 \end{cases} \Rightarrow a\ge 2.$$

2° $a<0$



$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < \frac{4}{a} \\ -\frac{1}{a} \le 2 \end{cases} \Rightarrow a<-8.$$

综上，$a\in(-\infty,-8)\cup[2,+\infty)$.

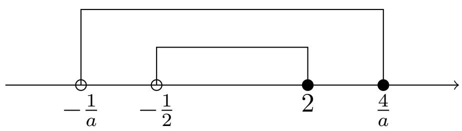
(2) 若 $A\supseteq B$，求 a.

$\because A\supseteq B$

$\therefore$ 分三类讨论.

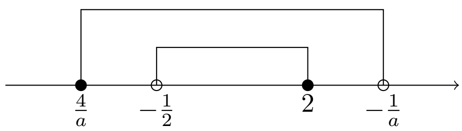
1° $a=0\Rightarrow A=\mathbf{R}\supseteq B$ 符合题意.

2° $a>0$



$$\begin{cases} 2 \le \frac{4}{a} \\ -\frac{1}{a} \le -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 0<a\le 2.$$

3° $a<0$



$$\begin{cases} -\frac{1}{a} > 2 \\ \frac{4}{a} \le -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}<a<0.$$

综上，$a\in\left(-\frac{1}{2},2\right]$.

(3) A,B 能否相等？求出 a 并说明理由.

能. 即 $A\subseteq B, B\subseteq A$

即 $a\in((-\infty,-8)\cup[2,+\infty))\cap\left(-\frac{1}{2},2\right]$

即 $a=2$.

总结：区间的子集的分析可借助数轴，注意空心点与实心点的区别及端点是否能取到问题.

1.1.2 集合的运算（交集、并集）

交集：集合 A 与集合 B 的交集为所有在集合 A 中**且**在集合 B 中的元素组成的集合．记作 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ and } x \in B\}$.

并集：集合 A 与集合 B 的并集为所有在集合 A 中**或**在集合 B 中的元素组成的集合．记作 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ or } x \in B\}$.

交换律：$A \cap B = B \cap A$；$A \cup B = B \cup A$.

结合律：$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

同一律：$A \cup \emptyset = A$；$A \cap U = A$.

零一律：$A \cup U = U$；$A \cap \emptyset = \emptyset$.

等幂律：$A \cup A = A$；$A \cap A = A$.

子集与交、并运算的关系：$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

吸收律：$A \cup (A \cap B) = A$；$A \cap (A \cup B) = A$.

例一：

(1) 已知：$A = \{y | y = x^2 - 2x + 3, x \in \mathbf{R}\}, B = \{y | y = -x^2 + 2x + 10, x \in \mathbf{R}\}$. 求：$A \cap B$.

$A = [2, +\infty), B = (-\infty, 11] \Rightarrow A \cap B = [2, 11]$.

(2) 已知：$A = \{(x, y) | y = x + 1, x \in \mathbf{R}\}, B = \{(x, y) | y = -x^2 + 2x + \frac{3}{4}, x \in \mathbf{R}\}$. 求：$A \cap B$.

$$x + 1 = -x^2 + 2x + \frac{3}{4} \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow A \cap B = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}.$$

总结：注意集合的元素类型是数还是点，以及数/点的实际含义.

例二：已知：$A = \{x | -2 \le x \le 4\}, B = \{x | x > a\}$.

(1) 若 $A \cap B \ne \emptyset$，求：a.

(2) 若 $A \cap B \ne A$，求：a.

(1) 若 $A \cap B \ne \emptyset$，求 a.

考虑 $A \cap B = \emptyset$ 有 $a \ge 4$.

于是 $a < 4$.

(2) 若 $A \cap B \ne A$，求 a.

考虑 $A \cap B = A$ 即 $A \subseteq B$ 有 $a < -2$.

于是 $A \cap B \ne A$ 时，$a \ge -2$.

总结：考虑一个问题比较复杂时，可以考虑它的反面（补集运算的排中律）.

例三：已知：$A = \{x | x^2 + 4x = 0\}, B = \{x | x^2 + 2(a + 1)x + a^2 - 1 = 0\}$.

(1) 若 $A \cap B = B$，求：a.

(2) 若 $A \cup B = B$，求：a.

(1) 若 $A \cap B = B$，求：a.

即 $B \subseteq A$，分两类讨论：

1° $B = \emptyset$

有 $x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$ 无解，

$$\begin{aligned} \therefore \Delta &= 4(a+1)^2 - 4a^2 + 4 \\ &= 8a + 8 \\ &< 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a < -1$.

2° $B \neq \emptyset$，即 $a \geq -1$.

$A = \{0, -4\}$.

分两类讨论.

2.1° $a = -1$，$B = \{0\}$ 符合题意.

2.2° $a > -1$，有：$\begin{cases} 0 + (-4) = -2(a+1) \\ 0 \times (-4) = a^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1$.

综上，$a \in (-\infty, -1] \cup \{1\}$.

(2) 若 $A \cup B = B$，求：a.

即 $A \subseteq B$.

于是有 $\begin{cases} 0 + (-4) = -2(a+1) \\ 0 \times (-4) = a^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1$.

即 $a = 1$.

总结：(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$ (2) 遇到二次方程的解集可根据 Δ 分类讨论集合元素个数情况.

例四：已知：$A = \{x | x^2 - ax + 15 = 0, x \in \mathbf{Z}\}, B = \{x | x^2 - 5x + b = 0, x \in \mathbf{Z}\}, A \cup B = \{2, 3, 5\}$. 求：$a, b$.

由已知，$x^2 - ax + 15 = 0, x^2 - 5x + b = 0$ 均有整数根.
设方程 $x^2 - ax + 15 = 0$ 的两根是 x_1, x_2，方程 $x^2 - 5x + b = 0$ 的两根是 x_3, x_4，
由 Vieta 定理有 $x_1 x_2 = 15, x_3 + x_4 = 5$.
又因为 $A \cup B = \{2, 3, 5\}$ 可得 $A = \{3, 5\}, B = \{2, 3\}$.
于是 $a = 3 + 5 = 8, b = 2 \times 3 = 6$.
即 $a = 8, b = 6$.
总结：遇到二次方程的解集，使用 Vieta 定理求解相较于代入求解在变量较少的情况下更为简便.

例五：已知：$A = \{x | x^2 - 1 = 0\}, B = \{x | x^2 + ax + b = 0\}, A \cup B = A$. 求：$a, b$.

$\because A \cup B = A \therefore B \subseteq A$ 分两类讨论.

1° $B=\emptyset$ 于是有 $\Delta=4a^2-4b<0$ 即 $a^2<b$.

2° $B\neq\emptyset$ 即 $a^2\geq b$

2.1° $a^2=b$

$x^2-2ax+b=0\Rightarrow x_1=x_2=a$，有 $a=\pm1, b=1$.

2.2° $a^2>b$

$$\left\{\begin{array}{rcl}1-2a+b&=&0\\a+2a+b&=&0\end{array}\right.\Rightarrow(a,b)=(0,-1)\text{，符合 } a^2\geq b.$$

综上，$(a,b)\in\{(x,y)|x^2<y\}\cup\{(1,1),(-1,1),(0,-1)\}$.

总结：(1) 并集转换为子集处理 (2) 勿忘空集 (3) 二次方程考虑 Δ.

1.1.3 集合的运算（补集）

补集：集合 A 的补集为所有属于全集 U 但不属于集合 A 的元素组成的集合. 记作 $\overline{A}=\complement_U A=\{x|x\in U\ \textbf{and}\ x\notin A\}$. 规定 $\overline{U}=\emptyset, \overline{\emptyset}=U$.

求补律：$A\cup\overline{A}=U, A\cap\overline{A}=\emptyset$.

对合律：$\overline{\overline{A}}=A$.

de Morgan 反演律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

证明 de Morgan 反演律：

(1) $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$

1° 证明 $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$

令 $x\in\overline{A\cup B}$,

则有 $x\notin A\cup B$,

则有 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,

则有 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$,

则有 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$.

于是有 $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.

2° 证明 $\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$

令 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$,

则有 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$,

则有 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,

则有 $x\notin A\cup B$,

则有 $x\in\overline{A\cup B}$,

于是有 $\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$.

综上，$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$.

(2) $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$

1° 证明 $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$

令 $x\in\overline{A\cap B}$,

则有 $x\notin A\cap B$,

则有 $x\notin A$ 或 $x\notin B$,

则有 $x\in\overline{A}$ 或 $x\in\overline{B}$,

则有 $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$.

于是有 $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$.

2° 证明 $\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cap B}$

令 $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$,

则有 $x\in\overline{A}$ 或 $x\in\overline{B}$,

则有 $x\notin A$ 或 $x\notin B$,

则有 $x\notin A\cap B$,

则有 $x\in\overline{A\cap B}$,

于是有 $\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cap B}$.

综上，$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$.

总结：de Morgan 反演律的证明再次表现了集合相等可用子集关系证明的优势. 同时也可以使用文氏图进行演示，此处不多赘述.

例一：已知：$A=\{x|x^2+px+12=0\},B=\{x^2-5x+q=0\}$. 若 $\overline{A}\cap B=\{2\},U=\mathbf{R}$，求：$p+q$.

$\because\overline{A}\cap B=\{2\}$
$\therefore 2\notin A,2\in B$
$\therefore q=6,B=\{2,3\}$.
$\because 3\notin\overline{A}\cap B$
$\therefore 3\in A$
$\therefore p=-7$
$\therefore p+q=-1$.

总结：(1) 二次方程解集集合问题可以使用 Vieta 定理进行求解 (2) $\overline{A}\cap B$ 表示的是所有不在 A 中且在 B 中的元素组成的集合，因此可以使用这个条件来判断在这个集合中的元素和不在这个集合中的元素在 A,B 中的存在性.

例二：已知：$A=\{x|x^2-3x+2=0\},B=\{x|x^2+2(a+1)x+(a^2-5)=0\}$.

(1) 若 $A\cap B=\{2\}$，求 a.

(2) 若 $A\cup B=A$，求 a.

(3) 若 $A=B$，求 a.

(1) 若 $A\cap B=\{2\}$，求 a.

有 $2\in B, 1\notin B$,

将 $2\in B$ 代入得 $a=-1\text{or}3$.

当 $a=-1$ 时，$B=\{2,-2\}$ 符合题意.

当 $a=3$ 时，$B=\{2\}$ 符合题意.

(2) 若 $A\cup B=A$，求 a.

即 $B\subseteq A$，分两类讨论.

1° $B=\emptyset$，有:

$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-5)<0\Rightarrow a<-3$.

2° $B\neq\emptyset$，有 $a\geq -3$.

2.1° $\Delta=0, a=-3,\ B=\{2\}$

2.2° $\Delta>0, a>-3,\ B=\{1,2\},\ a\in\emptyset$.

综上，$a\in(-\infty,-3]$.

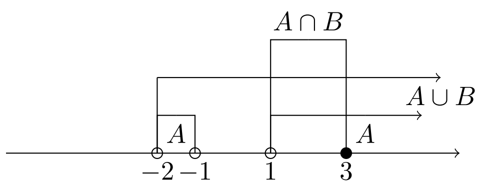
(3) 若 $A=B$，求 a.

即 $B=\{1,2\}$，同 (2) 2.1° 无解.

总结：（我不是很明白这题和补集有啥关系）(1) 涉及到二次方程解集问题可以使用 Vieta 定理进行解决（这个真的很重要）(2) $A=B$ 是 $B\subseteq A$ 的一种特殊情况.

例三：已知：$A=\{x|-2<x<-1 \text{ or } x>1\}, B=\{x|a\leq x\leq b\}, A\cup B=\{x|x>-2\}, A\cap B=\{1<x\leq 3\}$. 求：$a,b$.

本题可绘制数轴进行求解.



于是可得 $B=[a,3], a\leq 3, b=3$.
又有 $A=(-2,-1)\cup(1,+\infty), A\cap B=(1,3]$ 有 $[-1,1]\subseteq B, \forall x\in(-2,-1): x\notin B$.
于是 $a=-1, b=3, B=[-1,3]$.

总结：（我也不是很明白这题和补集有啥关系）(1) 涉及到区间的题目要善于使用数轴（这个真的很重要）(2) 区间的交、并、补题型中，新数往往是题目的突破口（例如本题为 3）.

1.2 常用逻辑用语

1.2.1 命题

命题：可以判断真假的语句．可表示为"若 α，则 β"的形式，其中 α 称为条件，β 称为结论．

真命题：含义判断为真的命题，指**所有**满足条件 α 的对象都满足结论 β，即 $\{x|x\text{ 满足}\alpha\} \subseteq \{x|x\text{ 满足}\beta\}$．考虑到 $\forall x$，证明真命题需要**具体证明**．

假命题：含义判断为假的命题，指**存在**满足条件 α 的对象不满足结论 β，即 $\{x|x\text{ 满足}\alpha\} \nsubseteq \{x|x\text{ 满足}\beta\}$．考虑到 $\exists x$，证明假命题只需**举一反例**．

推出：如果命题"若 α，则 β"是真命题，那么就称 α 推出 β，记作 $\alpha \Rightarrow \beta$ 或 $\beta \Leftarrow \alpha$．

等价：如果 $\alpha \Rightarrow \beta$ 且 $\beta \Rightarrow \alpha$，则称 α 与 β 等价，记作 $\alpha \Leftrightarrow \beta$．

范围与推出：由真命题的定义，易得 **小范围** $\Rightarrow$ **大范围**．

传递性：子集关系具有同向的传递性，因此推出关系也具有同向的**传递性**．

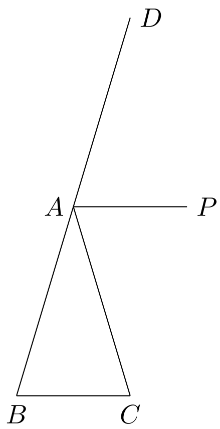
逆命题：若 α，则 $\beta \xleftrightarrow{\text{互为逆命题}}$ 若 β，则 α．真假没有必然联系．

否命题：若 α，则 $\beta \xleftrightarrow{\text{互为否命题}}$ 若 $\overline{\alpha}$，则 $\overline{\beta}$．真假没有必然联系．

逆否命题：若 α，则 $\beta \xleftrightarrow{\text{互为逆否命题}}$ 若 $\overline{\beta}$，则 $\overline{\alpha}$．同真同假，即一个命题与其逆否命题等价（逆命题与否命题互为逆否命题）．

部分逻辑关系的反面：是 $\xleftrightarrow{\text{否}}$ 不是．都是 $\xleftrightarrow{\text{否}}$ 不都是．至少一个 $\xleftrightarrow{\text{否}}$ 一个也没有．至多一个 $\xleftrightarrow{\text{否}}$ 至少两个．且 $\xleftrightarrow{\text{否}}$ 或．

例：等腰 ΔABC 中，$AB = AC$．已知 $\angle DAP \neq \angle PAC$，求证：$AP \nparallel BC$．



本题逆否命题是：等腰 ΔABC 中，$AB = AC$．已知 $AP \parallel BC$，则 $\angle DAP = \angle PAC$．

$\because AB = AP$

$\therefore \angle B = \angle C$

$\because AP \parallel BC$

$\therefore \angle DAP = \angle B, \angle PAC = \angle C$

$\because \angle B = \angle C$

$\therefore \angle DAP = \angle PAC.$

逆否命题为真命题，则原命题也为真．

总结：当直接证明一个命题为真不容易时，可以利用逆否命题与原命题的等价性，证明其逆否命题为真．

1.2.2 条件

	p 是 q 的	命题"若 p，则 q"	$P=\{x\|x满足性质p\}, Q=\{x\|x满足性质q\}$
$p\Rightarrow q$	充分条件	原命题**真**	$P\subseteq Q$
$q\Rightarrow p$	必要条件	逆命题**真**	$P\supseteq Q$
$p\Leftrightarrow q$	充要条件	原命题**真**且逆命题**真**	$P=Q$
$p\Rightarrow q$ **and** $q\nRightarrow p$	充分不必要条件	原命题**真**且逆命题**假**	$P\subset Q$
$q\Rightarrow p$ **and** $p\nRightarrow q$	必要不充分条件	原命题**假**且逆命题**真**	$P\supset Q$
$p\nRightarrow q$ **and** $q\nRightarrow p$	既不充分也不必要条件	原命题**假**且逆命题**假**	$P\nsubseteq Q$ **and** $P\nsupseteq Q$

例：$P=[-2,10], Q=\{x|1-m\le x\le 1+m\}(m>0)$. 若 命题$\alpha: x\in P$ 是 命题$\beta: x\in Q$ 的充分不必要条件，求 m.

即 $P\subset Q$.
$\because m>0 \therefore m+1>1-m \therefore Q\neq\emptyset$.
分三类讨论.

$$1^\circ \begin{cases} 1-m & < & -2 \\ 1+m & > & 10 \end{cases} \Rightarrow m>9.$$

2° $1-m=-2$ 即 $m=3$, $Q=[-2,4]$ 舍.

3° $1+m=10$ 即 $m=9$, $Q=[-8,10]$ 符合条件.

综上，$m\in[9,+\infty)$.

总结：(1) 已知条件的充要关系，求解使用集合的子集关系求解 (2) 真子集的关系分类讨论：空集（本题的小集合为定集合，无需讨论）、两端都取不到、一端取得到带入检验.

1.2.3 反证法

反证法：通过否定结论，推出矛盾，进而证明命题成立的方法.

例：设 $n\in\mathbf{Z}$. 证明：若 n^2 是偶数，则 n 也是偶数.

假设结论 n 是偶数不成立，即假设 n 是奇数. 令 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$，有：

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1,$$

说明 n^2 是奇数，与已知条件 n^2 是偶数矛盾.
于是假设不成立，即 n 是偶数.
总结：反证法是否定结论推出矛盾，与使用逆否命题证明不同.