2 补充题

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 10 月 31 日

函数 $f(x)$ 对于任意实数 $f(x)$ 满足条件:

$$f(x+2)=\frac{1}{f(x)},$$

且有 $f(0)=1, f(1)=-5$.

(1) 计算 $f(2), f(4), f(6), f(8)$ 的值, 并猜想 $f(2n)$ 的结果, 其中 $n \in \mathbf{N}$.

(2) 计算 $f(3), f(5), f(7), f(9)$ 的值, 并猜想 $f(2n-1)$ 的结果, 其中 $n \in \mathbf{N}$.

(3) 试证明 (1), (2) 所猜想的结果.

(1) 计算 $f(2), f(4), f(6), f(8)$ 的值, 并猜想 $f(2n)$ 的结果, 其中 $n \in \mathbf{N}$.

$$f(2)=\frac{1}{f(2-2)}=\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{1}=1,$$

$$f(4)=\frac{1}{f(4-2)}=\frac{1}{f(2)}=\frac{1}{1}=1,$$

$$f(6)=\frac{1}{f(6-2)}=\frac{1}{f(4)}=\frac{1}{1}=1,$$

$$f(8)=\frac{1}{f(8-2)}=\frac{1}{f(6)}=\frac{1}{1}=1,$$

猜想:

$$f(2n)=1, n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

(2) 计算 $f(3), f(5), f(7), f(9)$ 的值, 并猜想 $f(2n-1)$ 的结果, 其中 $n \in \mathbf{N}$.

$$f(3)=\frac{1}{f(3-2)}=\frac{1}{f(1)}=\frac{1}{-5}=-\frac{1}{5},$$

$$f(5)=\frac{1}{f(5-2)}=\frac{1}{f(3)}=\frac{1}{-\frac{1}{5}}=-5,$$

$$f(7)=\frac{1}{f(7-2)}=\frac{1}{f(5)}=\frac{1}{-5}=-\frac{1}{5},$$

$$f(9)=\frac{1}{f(9-2)}=\frac{1}{f(7)}=\frac{1}{-\frac{1}{5}}=-5,$$

猜想:

$$f(2n-1)=\begin{cases}-5, & n\text{是奇数},\\ -\dfrac{1}{5}, & n\text{是偶数}.\end{cases}\tag{2}$$

(3) 试证明 (1), (2) 所猜想的结果.

下证 (1) 式成立:

考虑 $n=0$，有

$$f(2\times 0)=f(0)=1$$

符合 (1) 式.

假设 (1) 式对 $n=k$ 成立, 下证其对 $n=k+1$ 成立.

$$f[2(k+1)]=f(2k+2)=\frac{1}{f(2k+2-2)}=\frac{1}{f(2k)}=\frac{1}{1}=1$$

成立.

由第一数学归纳法, (1) 式成立.

下证 (2) 式成立:

考虑 $n=0$, 有

$$f(1)=\frac{1}{f(1-2)}=\frac{1}{f(-1)}=\frac{1}{f(2\times 0-1)}=-5\Rightarrow f(2\times 0-1)=f(-1)=-\frac{1}{5}$$

符合 (2) 式.

考虑 $n=1$, 有

$$f(2\times 1-1)=f(1)=-5$$

符合 (2) 式.

假设 (2) 式对 $n=2k$ 成立, 下证其对 $n=2k+2$ 成立.

$$f[2(2k+2)-1]=f(4k+3)=\frac{1}{f(4k+3-2)}=\frac{1}{f(4k+1)}=\frac{1}{\frac{1}{f(4k+1-2)}}=\frac{1}{\frac{1}{f(4k-1)}}=f(4k-1)=f[2(2k)-1]=-\frac{1}{5}$$

成立.

假设 (2) 式对 $n=2k+1$ 成立, 下证其对 $n=2k+3$ 成立.

$$f[2(2k+3)-1]=f(4k+5)=\frac{1}{f(4k+5-2)}=\frac{1}{f(4k+3)}=\frac{1}{\frac{1}{f(4k+3-2)}}=\frac{1}{\frac{1}{f(4k+1)}}=f(4k+1)=f[2(2k+1)-1]=-5$$

成立.

由第一数学归纳法, (2) 式成立.