4 幂函数、指数函数与对数函数

高一（6）班 邵亦成 26 号

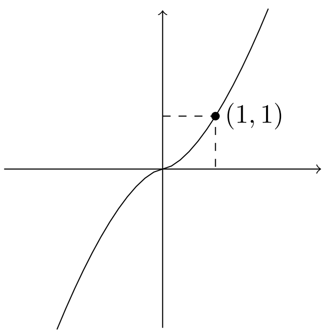
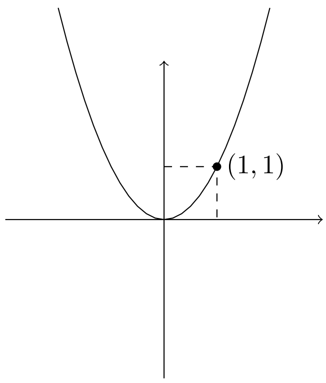
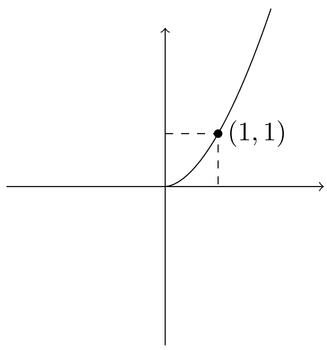
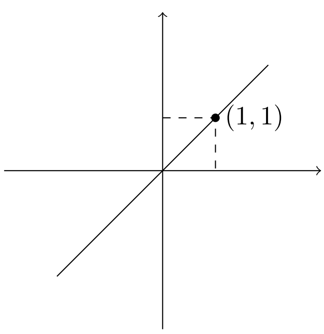
2021 年 12 月 28 日

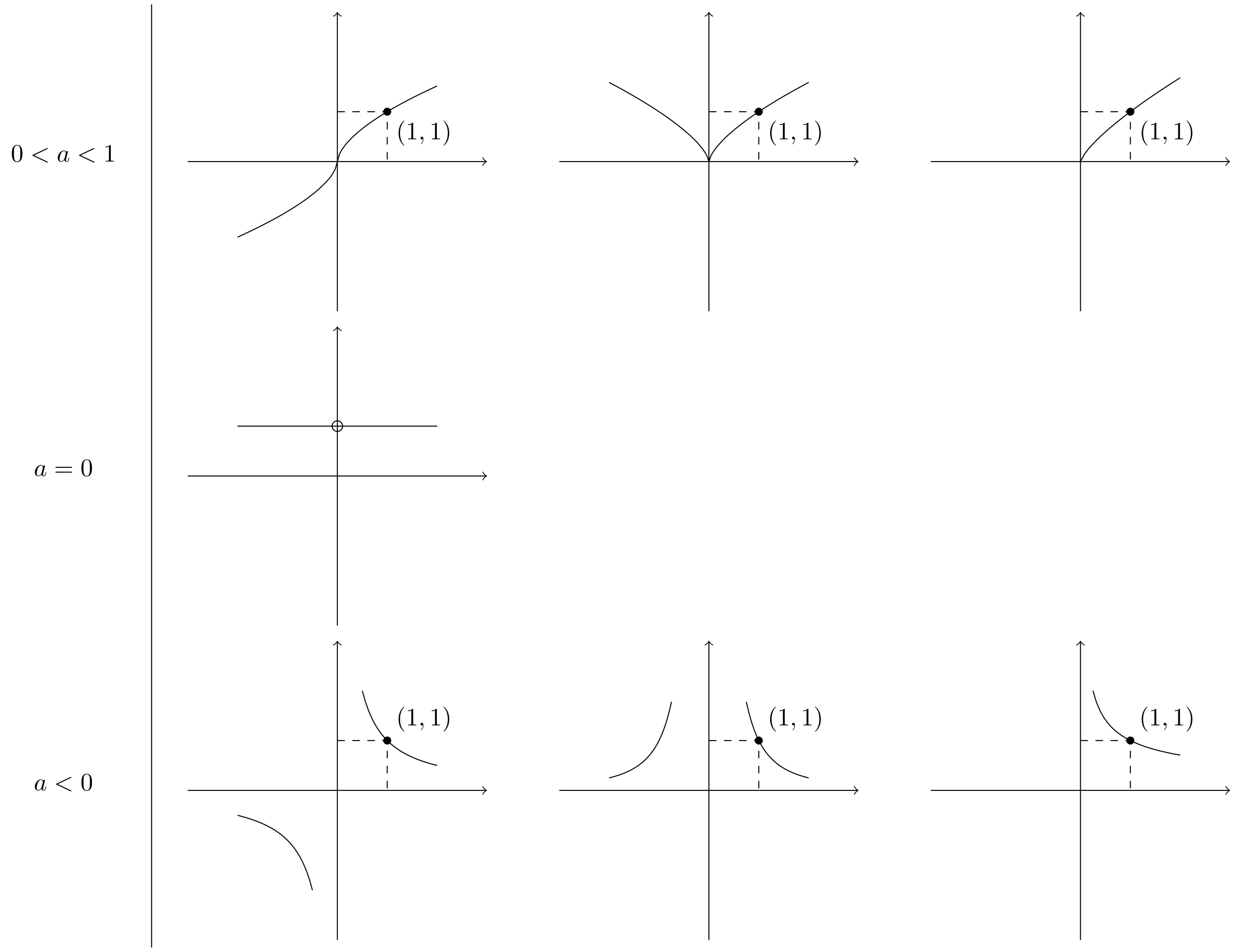
4 幂函数、指数函数与对数函数

4.1 幂函数

幂函数的定义: 形如
$$y = x^a (a\text{是常数}, a \in \mathbb{R})$$
的函数叫**指数为 a 的幂函数**.

幂函数的图像: 考虑函数 $y = x^a, a \in \mathbb{Q}$, 令 $a = \dfrac{q}{p}, p, q$ 为互质的整数, 则有以下 11 种图像:

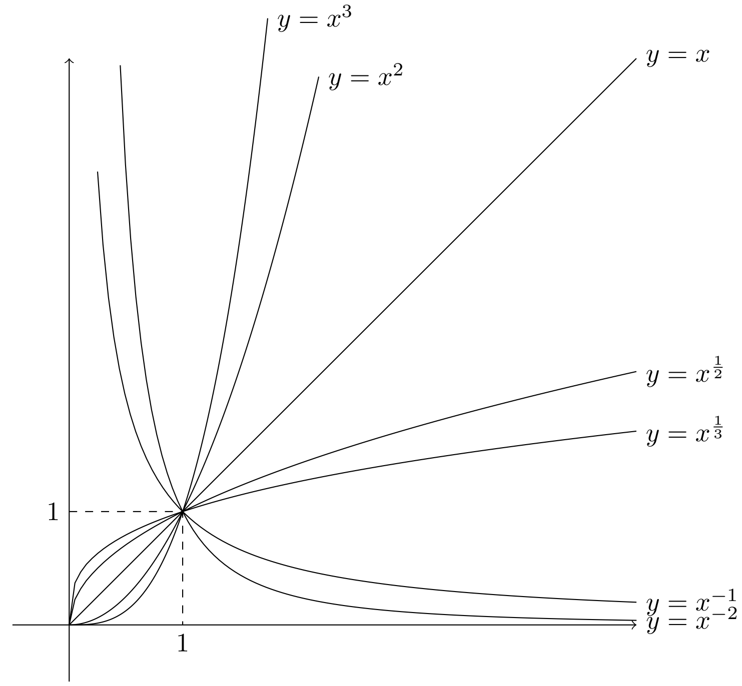
	p 奇 q 奇	p 奇 q 偶	p 偶 q 奇
$a > 1$			
$a = 1$			



幂函数的定义域: (1) $\mathbb{R}$: $a > 1$ 且 p 奇 or $a = 1$ or $0 < a < 1$ 且 p 奇; (2) $[0, +\infty)$: $a > 1$ 且 p 偶 or $0 < a < 1$ 且 p 偶; (3) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$: $a = 0$ or $a < 0$ 且 p 奇; (4) $(0. +\infty)$: $a < 0$ 且 p 偶.

幂函数的值域: (1) $\mathbb{R}$: $a > 1$ 且 p 奇 q 奇 or $a = 1$ or $0 < a < 1$ 且 p 奇 q 奇; (2) $[0, +\infty)$: $a > 1$ 且 q 偶 or $0 < a < 1$ 且 q 偶; (3) $\{1\}$: $a = 1$; (4) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$: $a < 0$ 且 p 奇 q 奇; (5) $(0, +\infty)$: $a < 0$ 且 q 偶.

如何记忆幂函数的 11 种图像: 第一象限 + 奇偶性.



幂函数的通性: (1) 在第一象限均被定义, 第四象限没有定义. (2) 过点 $(1,1)$, 且当且仅当 $a>0$ 时过 $(0,0)$. (3) $a>0$ 时在第一象限严格增, $a<0$ 时在第一象限严格减. (4) $a \le 0$ 时与 x 轴, y 轴无交点.

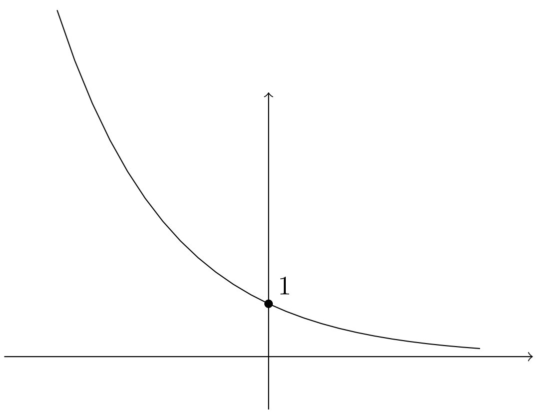
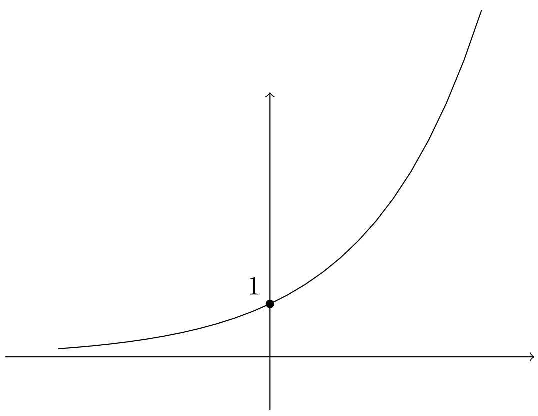
4.2 指数函数

指数函数的定义: 形如

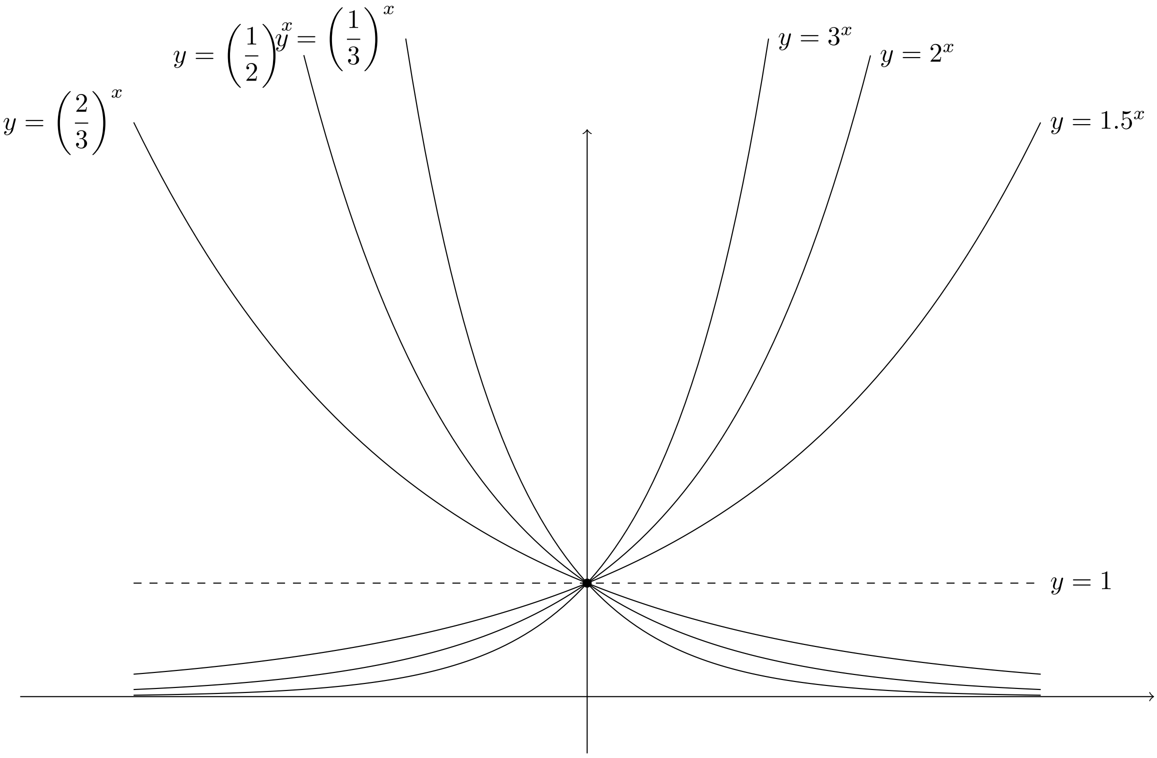
$$y=a^x(a\text{是常数}, a>0 \text{ 且} a\neq 1)$$

的函数叫**底为 a 的指数函数**.

指数函数的图像: 2 种图像:

$0<a<1$	$a>1$
	

如何记忆指数函数的图像:



指数函数的通性: (1) 底数互为相反数的指数函数图像关于 y 轴对称. (2) 定义域 $D=\mathbb{R}$, 值域 $R=(0,+\infty)$, $a>1$ 时严格增, $0<a<1$ 时严格减. (3) 过定点 $(0,1)$ 及一、二象限.

例一: 求以下满足条件的 a 的范围.

(1) $a^{-2}>3^{-2}$.

$a\neq 0$, 有 $0<|a|<3$, 即 $a\in(-3,0)\cup(0,3)$.

(2) $0.01^{-3}>a^{-3}$.

分两类讨论.

1° $a<0$, 显然成立.

2° $a>0$, 有 $a>0.01$.

故 $a\in(-\infty,0)\cup(0.01,+\infty)$.

总结: 解含指数/幂的不等式时可以利用指数/幂函数的单调性进行求解.

例二 (1): 若 $(a-3)^{-\frac{3}{5}} < (1+2a)^{-\frac{3}{5}}$, 求 a 的范围.

显然有 $a \neq 3, a \neq -\dfrac{1}{2}$.
有

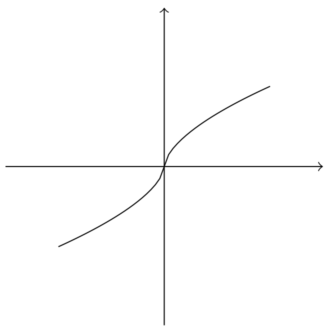
$$\left(\frac{1}{a-3}\right)^{\frac{3}{5}} < \left(\frac{1}{1+2a}\right)^{\frac{3}{5}}.$$

如图, 函数 $y = x^{\frac{3}{5}}$ 的图像在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 故有

$$\frac{1}{a-3} < \frac{1}{1+2a},$$

即

$$a \in (-\infty, -4) \cup \left(-\frac{1}{2}, 3\right).$$



总结: 此类题一般可以使用对 a 分类讨论的方法或者使用图像解决.

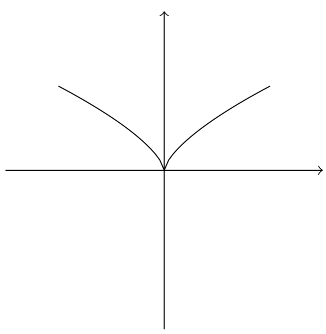
例二 (2): 若 $(a-3)^{\frac{2}{3}} < (1+2a)^{\frac{2}{3}}$, 求 a 的范围.

如图, 函数 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数且在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 故有

$$|a-3| < |1+2a|,$$

即

$$a \in (-\infty, -4) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right).$$



总结：可巧妙使用绝对值来解决非单调函数的问题.

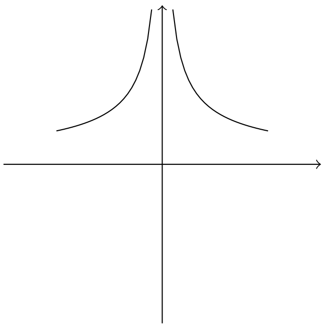
例二 (3): 若 $(a-3)^{-\frac{2}{3}} < (1+2a)^{-\frac{2}{3}}$, 求 a 的范围.

如图, 函数 $y = x^{-\frac{2}{3}}$ 为定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 偶函数且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故有

$$|a-3| > |1+2a| > 0,$$

即

$$a \in \left[-4, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right].$$



总结：注意 a 的定义域的问题.

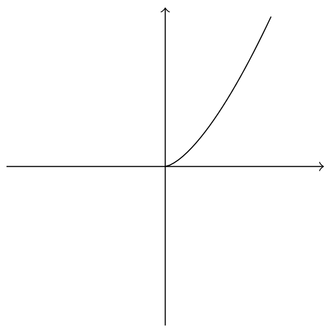
例二 (4): 若 $(a-3)^{\frac{3}{2}} < (1+2a)^{\frac{3}{2}}$, 求 a 的范围.

如图, 函数 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 定义域为 $[0, +\infty)$ 且单调递增, 故有

$$\begin{cases} a-3 & \geq & 0, \\ 1+2a & \geq & 0, \\ a-3 & < & 1+2a, \end{cases}$$

即

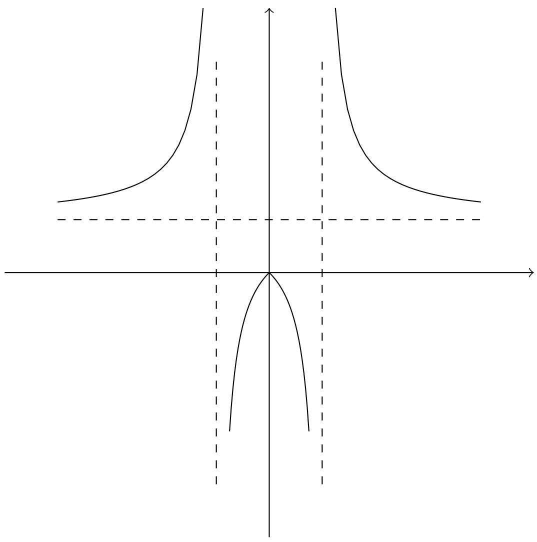
$$a \in [3, +\infty).$$



总结：注意 a 的定义域的问题.

函数图像的变换: $x \to -x$, 关于 y 轴对称; $y \to -y$, 关于 x 轴对称; $x \to -x, y \to -y$, 关于原点对称.

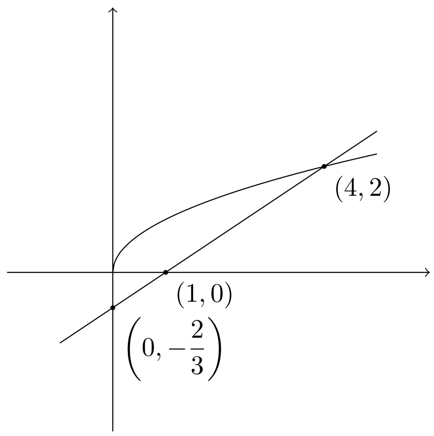
例三: 考虑 $f(x) = \dfrac{|x|}{|x|-1}$ 的图像.



总结：绘制函数图像先拆绝对值，随后考虑图像的变换.

例四: 利用图像解无理不等式

$$\sqrt{x} > \frac{2}{3}(x-1).$$



故 $x\in[0,4)$.

总结：可利用函数图像的上下关系解不等式.

例五: 已知 $\forall x\in\mathbb{R}$, 不等式

$$\frac{1}{2^{x^2+x}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-mx+m+4}$$

恒成立, 求实数 m 的取值范围.

有

$$x^2+x<2x^2-mx+m\text{恒成立},$$

即

$$x^2-(m+1)x+m>0\text{恒成立},$$

故

$$m^2+2m+1-4m>0,$$

即

$$m\neq 1.$$

总结：利用函数的单调性可将其它不等式化为基础的二次不等式，将其它恒成立问题化为基础的二次函数恒成立问题.

例六: 求下列函数的值域:

$$f(x)=2^{-x^2+x},g(x)=4^{-x}-21-x-3,h(x)=\frac{3^x}{9^x+3^{x+1}+2}.$$

$$-x^2+x\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]\Rightarrow f(x)\in\left(0,2^{\frac{1}{4}}\right].$$

$$\text{令}t=2^{-x}\in(0,+\infty)\Rightarrow g(x)=t^2-2t-3\in[-4,+\infty).$$

令$t=3^x\in(0,+\infty)\Rightarrow h(x)=\dfrac{t}{t^2+3t+2}=\dfrac{1}{t+\frac{2}{t}+3}$, 又$t+\dfrac{2}{t}\geq 2\sqrt{2}, g(x)\in(0,3-2\sqrt{2}]$.

总结：通过换元法等将复合函数值域转为二次函数是很好的处理方法.

例七: 方程

$$4^x+m\cdot 2^x+m+1=0$$

有实根, 求 m 的取值范围.

$$m(2^x+1)=-4^x-1\Rightarrow m=\frac{-4^x-1}{2^x+1}.$$

令 $t=2^x+1>1$,

$$m=-\frac{t^2-2t+2}{t}=-\left(t-2+\frac{2}{t}\right).$$

又

$$t+\frac{2}{t}\geq 2\sqrt{2},$$

有

$$m\leq 2-2\sqrt{2}.$$

总结：参变分离法是很好的处理根的存在性的方法.

4.3 对数函数

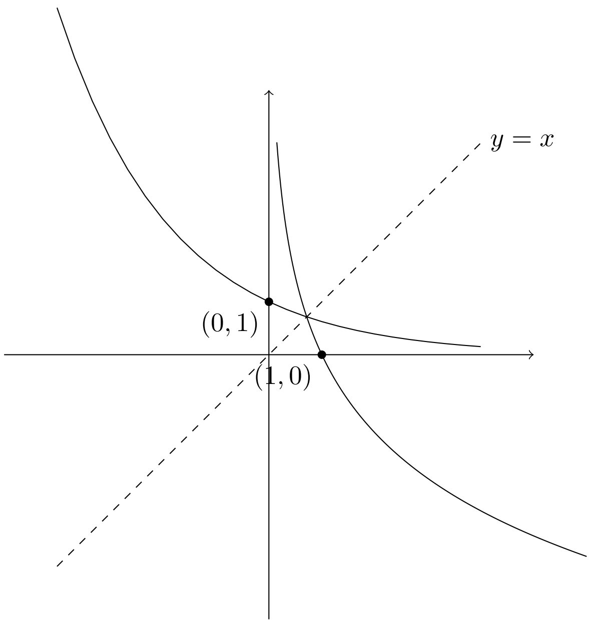
对数函数的定义: 形如

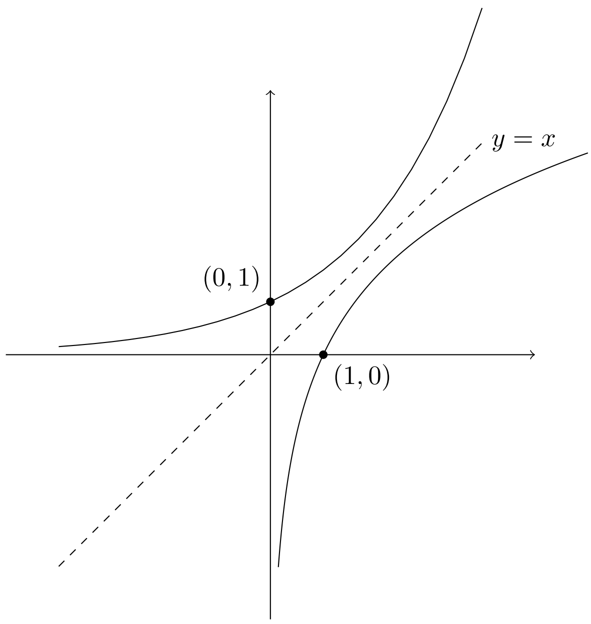
$$y=\log_a x(a\text{是常数}, a>0, a\neq 1)$$

的函数叫**底为 a 的指数函数**.

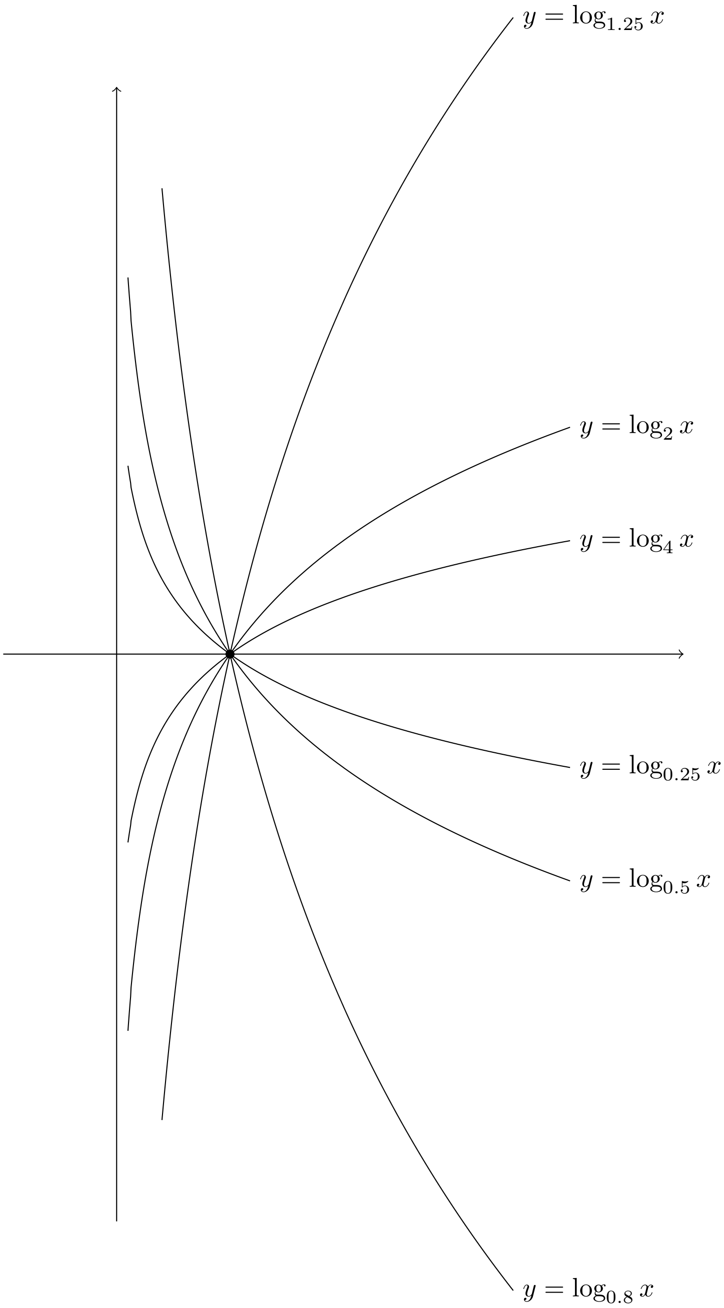
对数函数的图像: 2 种图像:

$0<a<1$	$a>1$





如何记忆对数函数的图像:



对数函数的通性: (1) 定义域 $D=(0,+\infty)$, 值域 $R=\mathbb{R}$; (2) 恒过 $(0,1)$; (3) $a>1$ 严格增, $0<a<1$ 严格减; (4) a 互为倒数, 图像关于 x 轴对称.

例一 (1): $y=\log_a(x^2+ax+1)$ 定义域为 $\mathbb{R}$, 求 a 的范围.

有 $x^2+ax+1>0$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立, 即有

$$a>0, a\neq 1, \Delta=a^2-4<0.$$

例一 (2): $y=\log_a(x^2+ax+1)$ 值域为 $\mathbb{R}$, 求 a 的范围.

由 x^2+ax+1 可取遍所有正数, 即有

$$a>0, a\neq 1, \Delta\geq 0.$$

总结: 复合函数的定义域和值域问题考虑变量的取值范围即可.

例二 (1): 判定以下函数的奇偶性: $y=\ln(x-2)+\ln(x+2)$.

$D=(-2,+\infty)$, 故为非奇非偶函数.

例二 (2): 判定以下函数的奇偶性: $y=\log_2\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{|2+x|-2}$.

$D=\left\{x|1-x^2\geq 0 \text{ and } |2+x|-2\neq 0 \text{ and } \dfrac{x}{|2+x|-2}>0\right\}=(-1,0)\cup(0,1)$,
令

$$f(x)=\log_2\frac{x\sqrt{1-x^2}}{|2+x|-2}=\log_2\frac{x\sqrt{1-x^2}}{x},$$

则有

$$f(-x)=\log_2\frac{-x\sqrt{1-x^2}}{-x}=\log_2\frac{x\sqrt{1-x^2}}{x}=f(x),$$

$f(x)$ 为偶函数.
总结: 判断奇偶性先考虑定义域, 再考虑定义域内的 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.

例三: 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-kx-k)$ 在 $(-\infty,9-\sqrt{3})$ 严格增, 求 k 的范围.

令 $u(x)=x^2-kx-k$ 在 $(-\infty,1-\sqrt{3})$ 单调减, 有

$$\frac{k}{2}\geq 1-\sqrt{3}, k\geq 2-2\sqrt{3}.$$

有 $u(1-\sqrt{3})\geq 0$, 即 $k\leq 2$.
综上, $k\in[2-2\sqrt{3},2]$.
总结: 复合函数的单调性问题: (1) 首先考虑内函数在外函数的取值范围内的定义域的问题 (2) 考虑复合函数"同增异减"的单调性规律.

例四: 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格增, 且有 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=0$. 求满足 $f\left(\log_{\frac{1}{8}}x\right)>0$ 的 x 的取值范围.

有

$$f\left(\left|\log_{\frac{1}{8}} x\right|\right) > 0 = f\left(\frac{1}{3}\right),$$

即

$$\left|\log_{\frac{1}{8}} x\right| > \frac{1}{3},$$

即

$$\log_{\frac{1}{8}} x > \frac{1}{3} \text{ or } \log_{\frac{1}{8}} x < -\frac{1}{3},$$

有

$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty).$$

总结：利用单调性解不等式，将常数代换为函数值即可，随后利用幂函数解代数方程或代数不等式/指对函数单调性解超越方程或超越不等式.

例五: $f(x) = \log_a(ax^2 - x)(a > 0, a \neq 1)$ 在 $[2,4]$ 上严格增，求 a 的取值范围.

令 $u(x) = ax^2 - x$,

1° $a > 1$, $u(x)$ 在 $[2,4]$ 上严格增，且 $u(x)$ 在 $[2,4]$ 上恒大于 0，有

$$\frac{1}{2a} \leq 2, u(2) = 4a - 2 > 0, a > 1 \Rightarrow a > 1.$$

2° $0 < a < 1$, $u(x)$ 在 $[2,4]$ 上严格减，且 $u(x)$ 在 $[2,4]$ 上恒大于 0，有

$$\frac{1}{2a} \geq 4, u(4) = 16a - 4 > 0 \Rightarrow a \in \emptyset.$$

综上，$a > 1$.

总结：同例三，考虑内函数的取值和单调性，注意分类讨论的问题.