§12 不等式中的恒等变形”

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 12 月 25 日

1. 设 $1 \ge x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n > 0$, $1 \ge y_1 \ge y_2 \ge \cdots \ge y_n > 0$, 且对任意的 $1 \le k \le n$, 有

$$\prod_{i=1}^{k} x_i \le \prod_{i=1}^{k} y_i.$$

求证:

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) \ge \prod_{i=1}^{n}(1-y_i).$$

由已知, 有

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{y_i}{x_i} \ge 1.$$

由均值不等式有

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{y_i}{x_i} \ge k\sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} \frac{y_i}{x_i}} \ge k.$$

要证

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) \ge \prod_{i=1}^{n}(1-y_i),$$

只需证

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1-y_i}{1-x_i} \ge 1.$$

由

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1-y_i}{1-x_i} \ge n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1-y_i}{1-x_i}},$$

只需证

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1-y_i}{1-x_i} \le n,$$

即证

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - x_i}{1 - x_i} \geq 0.$$

有

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{y_i - x_i}{x_i} \geq 0,$$

故

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{y_i - x_i}{x_i} \frac{x_i}{1 - x_i} \geq 0.$$

由 Abel 求和公式,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - x_i}{1 - x_i} \geq 0, \frac{x_i}{1 - x_i} = 0,$$

故得证.