§2 集合'

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 09 月 25 日

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{20} \in \{1,2,3,4,5\}, b_1, b_2, \cdots, b_{20} \in \{1,2,3,\cdots,10\}$，
   集合 $X = \{(i,j) | i \leq i < j \leq 20, (a_i - a_j)(b_i - b_j) < 0\}$，求 $|X|_{\max}$.

   最优情况必为 a_n 递增，b_n 递减.

   易证 $\{(i,j) | a_i = a_j\} \cap X = \emptyset$,

   即求 $|\{(i,j)|a_i = a_j\}|_{\min}$.

   不妨设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{20}$，

   设其中值为 i 的数有 X_i 个 $(i = 1,2,3,4,5)$，则有 $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 20$.

   结合 Cauchy 不等式，有

$$\begin{aligned} & |\{(i,j)|a_i = a_j\}| \\ = \ & C_{X_1}^2 + C_{X_2}^2 + \cdots + C_{X_5}^2 \\ = \ & \frac{1}{2}\left[\frac{(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)^2}{5} - (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)\right] \\ = \ & \tfrac{1}{2} \times 20 \times 3 \\ = \ & 30. \end{aligned}$$

   故 $|X| \leq C_{20}^2 - 30 = 160$，

   在

$$\begin{aligned} & a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1, \quad a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 2, \cdots, \quad a_{17} = a_{18} = a_{19} = a_{20} = 5 \\ & b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 5, \quad b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = 4, \cdots, \quad b_{17} = b_{18} = b_{19} = b_{20} = 1 \end{aligned}$$

   时有 $|X|_{\max} = 160$.

2. 集合 A, B 有:

   (1) $A \cup B = \{3, 4, \cdots, n\}$

   (2) $A \cap B = \emptyset$

   (3) $\forall x, y \in A: x, y \notin A$

   (4) $\forall x, y \in B: x, y \notin B$.

求 $n_{\max}$.

不妨设 $3 \in A \Rightarrow 9 \in B \Rightarrow 81 \in A \Rightarrow 243 \in B$, 但 $3 \in A, 81 \in A \Rightarrow 27 \in B \Rightarrow 243 \in A$,

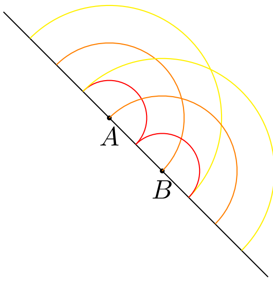
所以有 $n \leq 242$.

$$A=\{3,4,5,6,7,8,81,82,\cdots,242\}, B=\{9,10,\cdots,80\}$$

时有 $n_{\max}=242$.

3. A 和 B 是平面上的两个点, 过 A, B 的直线为 l, 由 l 分成的一个半平面内, 有 2021 个不同的点 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_{2021}$. 则由 A, B 到 $P_i(i=1,2,\cdots,2021)$ 的距离所构成的集合中，至少有多少个不同的元素.

设集合中有 n 个元素 $r_1, r_2, \cdots, r_n$. 以 A, B 为圆心，$r_1, r_2, \cdots, r_n$ 为半径作半圆.



$\therefore P_i(i=1,2,\cdots,2021)$ 在某个半圆上，而半圆至多有 n^2 个交点.

$\therefore n^2 \geq 2021, n \geq 45$.

4. 设 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ 为平面上的 $n+1$ 个点，它们之间两两间距离的最小值为 $d(d>0)$.

求证:

$$\prod_{i=1}^{n}|P_0P_i| > \left(\frac{d}{3}\right)^n \cdot \sqrt{(n+1)!}\ .$$

从 $P_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 为圆心，$\frac{d}{2}$ 为半径作 $\odot P_i$.

$\therefore \odot P_i$ 一定两两外切或外离且至少一组圆外切.

只需证 $|P_0P_k| > \frac{d}{3}\sqrt{k+1}\ $.

不妨令 $|P_0P_1| \leq |P_0P_2| \leq \cdots \leq |P_0P_k|$,

若 $n \geq 8$，以 P_0 为圆心，$|P_0P_n| + \frac{d}{2}$ 为半径作圆，则有 $\odot P_i$ 均在大圆内.

[设 Q 为 $\odot P_i$ 上任意一点，则有: $|P_0Q| \leq |P_0P_i| + |P_iQ| \leq |P_0P_n| + \frac{d}{2}$.]

比较面积:

$$
\begin{array}{rcl}
\pi\left[|P_0P_n|+\frac{d}{2}\right]^2 & > & \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot(n+1) \\
|P_0P_n| & > & \frac{d}{2}\cdots\left(\sqrt{n+1}-1\right) \\
 & \geq & \frac{d}{3}\sqrt{n+1} \\
 & \Updownarrow & \\
3\left(\sqrt{n+1}-1\right) & \geq & 2\sqrt{n+1} \\
 & \Updownarrow & \\
\sqrt{n+1} & \geq & 3 \\
 & \Updownarrow & \\
n & \geq & 8.
\end{array}
$$

若 $n\leq 7$, $\frac{d}{3}\sqrt{n+1}<d$.

得证.

5. 有限集 $A\subseteq\mathbb{N}^*$. 求证: $\exists$ 有限集 $B: A\subseteq B\subseteq\mathbb{N}^*$ 有

$$
\prod_{x\in B}x=\sum_{x\in B}x^2.
$$

不妨令初始状态为 $B=A$.

若 $\prod\limits_{x\in B}x=\sum\limits_{x\in B}x^2$，则问题解决.

若 $\prod\limits_{x\in B}x>\sum\limits_{x\in B}x^2$，则尝试去缩小 $\prod\limits_{x\in B}x-\sum\limits_{x\in B}x^2$.

记 $\prod\limits_{x\in B}x=P,\sum\limits_{x\in B}x^2=S,C=P-S,$

目标即为在 B 中添加一个元素 y，使得 $C\to C-1$.

则有:

$$
\begin{array}{rcl}
P\cdot y-(S+y^2) & = & P-S-1 \\
-y^2+P\cdot y-p+1 & = & 0 \\
P(y-1) & = & (y-1)(y+1).
\end{array}
$$

显然，不可能一直添加 1.

如果 $P-1\in B$，则 $B=\{1,2\}$，$P=2,S=3$，与前提假设不符.

所以有 $P-1\notin B$，添加 $P-1$ 即可.

若 $\prod\limits_{x\in B}x<\sum\limits_{x\in B}x^2$,

令 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\,(x_1<x_2<\cdots<x_n)$,

当 $x_n\geq 6$ ，令 $B=\{1,2,\cdots,x_n\}$

$$
\begin{aligned}
& \prod_{x\in B} x-\sum_{x\in B} x^2 \\
= \quad & (x_n)!-\frac{x_n\left(x_n+1\right)\left(2x_n+1\right)}{6} \\
= \quad & \tfrac{x_n}{6}\left[6\left(x_n-1\right)!-\left(x_n+1\right)\left(2x_n+1\right)\right] \\
\geq \quad & \tfrac{x_n}{6}\left[6\left(x_n-1\right)\left(x_n-2\right)-\left(x_n+1\right)\left(2x_n+1\right)\right] \\
= \quad & \tfrac{x_n}{6}\left(4x_n^2-21x_n+11\right) \\
> \quad & 0
\end{aligned}
$$

于是按照 $\prod\limits_{x\in B} x>\sum\limits_{x\in B} x^2$ 操作即可.

当 $x_n\leq 5$ 时，令 $B=\{1,2,3,4,5,6\}$ 即可.

$\therefore \forall$ 有限集 $A\subseteq\mathbb{N}^*$ $\exists$ 有限集 $B: A\subseteq B\subseteq\mathbb{N}^*$ 有

$$\prod_{x\in B} x=\sum_{x\in B} x^2.$$

6. 设有 n 个人，任意两人在其他 $n-2$ 人中都至少有 2016 位共同的朋友，朋友关系是相互的. 求所有的 n，使得在满足以上所有条件的任何情况下都存在 5 人彼此是朋友.

考虑原命题结论的反面：不存在 5 个人彼此是朋友的 $n_{\min}$.

设 a_1,a_2 是朋友，他们至少有 2016 名共同的朋友 $b_1,b_2,\cdots,b_{2016}$，

若 $b_1,b_2,\cdots,b_{2016}$ 中有一对朋友，不妨设为 b_1,b_2，

b_1,b_2 的共同朋友中，除了 $a_1,a_2,c_1,c_2,\cdots,c_2014$，

共 $n\geq 2+2016+2014=4032$

故 $n=2018,2019,\cdots,4031$ 符合题意.

当 $n=4032$ 时，

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{1,2,\cdots,1008\}, \\
A_2 &= \{1009,1010,\cdots,2016\}, \\
A_3 &= \{2017,2018,\cdots,3024\}, \\
A_4 &= \{3025,3026,\cdots,4032\}.
\end{aligned}
$$

不符合.

于是符合条件的 $n=2018,2019,\cdots,4031$.

7. n 个同学坐在一排的 n 个位置上，然后重新编排座位，使得没有一人坐在原来的座位上，问有多少种不同的编排方法?

由 de Morgan 反演律

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} X_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{X_k},$$

考虑原问题的反面，即至少有一人坐在原座位上，

设 n 个同学为 $1,2,\cdots,n$，将同学坐在座位 i 上的编排方式构成的集合记为 A_i，则由容斥原理有:

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{n+1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|\\ &= n\times(n-1)!-C_n^2\times(n-2)!+\cdots+(-1)^{n+1}C_n^n\times 0!\\ &= n!\left[\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right].\end{aligned}$$

于是所求即为 $n!-\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right|=n!\left[-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right]$.

8. 平面上有 n 个点，过其中的任意两个点的直线必过第三个点. 求证：这 n 点必定在同一直线上.

假设这 n 个点不共线，则 n 个点两两连线，则点到直线的距离应存在最小正值记为 d.

设点 A 到直线 l 的距离为 d.

直线 l 上至少有 3 点，则必有亮点在垂足 H 的同侧.

不妨设 B,C 在 H 同侧，不妨设 $BH<CH$.

B 到直线 AC 的距离 $<AH$，与 d 的最小性矛盾.

于是这 n 点必定在同一直线上.