第五讲　局部不等式与放缩法

1.设实数a、b、c满足$a+b+c=3$，求证：

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\le\frac{1}{4}.$$

2.设a、b、$c>0$，且$a+b+c=1$，求证：

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}\ge\frac{1}{ab+bc+ca}.$$

3.已知x、y、z为正数，求证：

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\le 1.$$

4.设a、b、c是非负实数，求证：$\sqrt{\dfrac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\dfrac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\dfrac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\ge 1$.

5.设x、y、$z\in\mathbf{R}$，求证：$\dfrac{9}{4}(x^2-x+1)(y^2-y+1)(z^2-z+1)\ge x^2y^2z^2-xyz+1$.

6.设实数a、b、c、d满足$a+b+c+d=6$，$a^2+b^2+c^2+d^2=12$，求证：

$36\le 4(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^4+b^4+c^4+d^4)\le 48$.

7.设$a_1,a_2,\cdots,a_n$（$n\geq 2$）是n个互不相等的正数，且满足$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{-2n}=1$，求证：

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^{2n}-n^2\sum_{1\leq i<j\leq n}(\frac{a_i}{a_j}-\frac{a_j}{a_i})^2>n^2.$$

8.已知$a_1,a_2,\cdots,a_n$为正实数，且满足$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，证明：

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2a_3}+\frac{a_2^3}{a_2^2+a_3a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}^3}{a_{n-1}^2+a_na_1}+\frac{a_n^3}{a_n^2+a_1a_2}\geq\frac{1}{2}.$$

9. 设 $n\ge 3$ 是整数，求证：对正实数 $x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$，有不等式

$$\frac{x_n x_1}{x_2}+\frac{x_1 x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}x_n}{x_1}\ge x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

10. 设正整数 $n\ge 2$，实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$，求证：存在 $a,b\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，使得对任意的 $1\le j\le n$，有 $a+2x_j+nax_j^2\le\sum_{x=1}^{n}x_i^3\le b+2x_j+nbx_j^2$.

11.设正数a、b、c满足$a+b+c=1$，求证：$\sqrt{1+\frac{bc}{a}}+\sqrt{1+\frac{ca}{b}}+\sqrt{1+\frac{ab}{c}}\geq 2\sqrt{3}$.

12.设a,b,c是正实数，求证：$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+(a+b+c)^2\geq 4\sqrt{3abc(a+b+c)}$.

13.设正整数$n\geq 2$，求证：$\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{3}\cdots\cos\frac{1}{n}<\frac{\sqrt{2}}{2}$.