第八讲　不等式中的归纳法

1.设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为非负数，求证：

$$\sqrt{a_1+a_2+\cdots+a_n}+\sqrt{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}+\cdots+\sqrt{a_1+a_2}+\sqrt{a_1}$$

$$\geq\sqrt{n^2a_1+(n-1)^2a_2+\cdots+2^2a_{n-1}+a_n}.$$

2.设整数$n\geq 2$，且实数$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$，求证：$\sum\limits_{1\leq k<l\leq n}kx_kx_l\leq\frac{n-1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k$.

3. $x_1 \geq 2x_2 \geq \cdots \geq 2^{n-1}x_n \geq 0$，$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{i}}=1$，证明：$\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \leq 1$.

4.已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 0$（$n \geq 4$），求证：$4\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}a_i \leq (\sum_{i=1}^{n}a_i)^2$，其中 $a_{n+1}=a_1$.

5.设集合$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}=\{1,2,\cdots,n\}$，则$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$的可能值有多少种？

6.已知正整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}<1$，求证：当$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$取得最大值时，有$a_1=2$且

$a_{k+1}=a_1a_2\cdots a_k+1$（$k=1,2,\cdots,n-1$）

7.设 n 是正整数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正实数，若存在实数 $t\in(0,1)$，使得对任意 $1\le i<j\le n$，有 $x_ix_j\le t^{|i-j|}$，求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i<\dfrac{1}{1-\sqrt{t}}$.

8.设正整数 $n\ge 2$，实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 满足 $0<a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}$，求证：

$$\sqrt[n]{a_1}-\sqrt[n]{a_2}+\sqrt[n]{a_3}-\cdots-\sqrt[n]{a_{2n}}+\sqrt[n]{a_{2n+1}}<\sqrt[n]{a_1-a_2+a_3-\cdots-a_{2n}+a_{2n+1}}.$$

9. 设正整数 $n\geq 2$，实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 满足 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$ 以及 $0\leq r_1\leq r_2\leq\cdots\leq r_n$，求证：$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j\min\left\{r_i,r_j\right\}\geq 0$.

10. n,k 为大于1的整数，$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 0$，$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，$c_1,c_2,\cdots,c_n\geq 0$，且 $\forall 1\leq m\leq n$，$\sum_{i=1}^{m}c_i\leq m^k$，求 $\sum_{i=1}^{n}c_ia_i^k$ 的最大值.