§1 集合

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 09 月 11 日

1. 已知：S_1, S_2, S_3 为非空整数集，$\forall 1,2,3$ 的排列 $i,j,k : x \in S_i, y \in S_j \Rightarrow x - y \in S_k$.

   求证：S_1, S_2, S_3 三个集合中至少有两个相等.

   思路：

   (i) 至少有两个相等 $\Leftrightarrow 0 \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$

S_1	S_2	S_3
0	x	x
	y	y
	$\vdots$	$\vdots$

表 1: 若 $0 \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$

   (ii) 若 $x \in S_i$ 则 $-x \in S_i$

S_1	S_2	S_3
x	y	$y - x$
$-x$		

表 2: 若 $x \in S_i$

   (iii) 对于 $y \in \mathbb{N}^*$

   i) 若 $x > y$ 则 x 除以 y 的余数 $\in S$

   ii) 若 $0 < x < y$ 则 $x \in S$

   $\therefore \forall y \in \mathbb{N}^* : \exists x \in \mathbb{N} \cap S : x < y, y \in S$

S_1	S_2	S_3
x	y	$x - y$
$x - 2y$		$x - 3y$
$x - 4y$		$x - 5y$
$\vdots$		$\vdots$

表 3: 对于 $y \in N^*$

   证明：

   i) 若 $0 \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$, 得证.

ii) 若 $0 \notin S_1 \cup S_2 \cup S_3$, 设 $t = \min(S_1 \cup S_2 \cup S_3)$.
不妨设 $t \in S_1$, 对于 $x \in S_2\,(x > 0)$:
$x - t \in S_3, x - 2t \in S_2 \ldots$, 即 $x - \left[\frac{x}{t}\right] t \in S_1 \cup S_3$.
而 $0 \le x - \left[\frac{x}{t}\right] t < t$.
结合 t 的最小性可知 $x - \left[\frac{x}{t}\right] t = 0 \in S_1 \cup S_3$
与假设不符.

综上所述, S_1, S_2, S_3 三个集合中至少有两个相等.

2. 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是 4 个有理数，使:

$$\{a_i a_j | 1 \le i < j \le 4, i, j \in \mathbb{Z}\} = \left\{-24, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 1, 3\right\}$$

求 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

$\prod(a_i a_j) = (-24) \times (-2) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{8}\right) \times 1 \times 3 = 3^3$.
$\therefore \prod a_i = 3$
不妨设 $a_1 a_2 = -24$, 则 $a_3 a_4 = -\frac{1}{8}$.
不妨设 $a_1 a_3 = -2$, 则 $a_2 a_4 = -\frac{3}{2}$.

(i) 若 $a_1 a_4 = 1, a_2 a_3 = 3$
解得

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = -6 \\ a_3 = -\dfrac{1}{2} \\ a_4 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_2 = 6 \\ a_3 = \dfrac{1}{2} \\ a_4 = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

(ii) 若 $a_1 a_4 = 3, a_2 a_3 = 1$, 无有理数解.

综上所述，$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \pm\frac{9}{4}$.

3. 称有限集 S 的所有元素的积为 S 的“积数”. 给定 $M=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\frac{1}{100}\right\}$. 求 M 的所有偶数元子集的“积数”之和.

构造方程

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(x-\frac{1}{100}\right)=a_{99}x^{99}+a_{98}x^{98}+\cdots a_1x^1+a_0$$

则

$$\sum(x_ix_j)=\frac{a_{97}}{a_{99}}$$

$$\sum(x_ix_jx_kx_m)=\frac{a_{95}}{a_{99}}$$

$$\vdots$$

于是对所求和 S 有:

$$S=\frac{a_{97}+a_{95}+\cdots+a_1}{a_{99}}=\sum_{k=1}^{44}a_{2k+1}$$

在所构造方程中代入 $x=1$ 有:

$$\frac{1}{100}=a_{99}+a_{97}+a_{95}+\cdots+a_1+a_0$$

代入 $x=-1$ 有:

$$-\frac{101}{2}=-a_{99}+a_{97}-a_{95}+\cdots-a_1+a_0$$

相减得

$$\frac{5051}{100}=2\times\left(1+\sum_{k=1}^{44}a_{2k+1}\right)$$

$\therefore a_{97}+\cdots+a_1=\frac{4851}{200}$.

4. 设 $n\in\mathbb{N}$, $S=1,\cdots,2020$. 求最小的 $k\in\mathbb{N}^*$, 使得 $\exists S$ 的子集 $A_1,A_2,\cdots A_k$ 具有: 对于 S 中的任意两个不同的元素 a,b 存在 $j\in 1,2,\cdots k$, 使得 $A_j\cap\{a,b\}$ 的元素个数为 1.

存在性问题只需构造一个符合条件的即可.

考虑

$$a\in\{1,2,\cdots 1010\},b\in\{1011,1012,\cdots,2020\}$$

构造:

	1	2	3	$\cdots$	1010	1011	$\cdots$	2020
A	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\cdots$	$\surd$	$\times$	$\cdots$	$\times$

表 4: 考虑一种 A

余下的情形:

$$a, b \in \{1, 2, \cdots 1010\}$$

或

$$a, b \in \{1011, 1012, \cdots, 2020\}.$$

若 $i \in A_j$, 我们在 i 所在列, A_j 所在行填入 1, 反之填入 0.

将 i 所在列构成的序列记为 $P(i)$,

由题可知, $\forall a, b \in S, a \neq b : P(a) \neq P(b)$.

$2^{10} < 2020 < 2^{11}$, $\therefore k \geq 11$.

5. 设 $S = \{A_1, A_2, \cdots A_n\}$, 其中 $A_1, A_2, \cdots a_n$ 是 n 个互不相同的有限集 $(n \geq 2)$ 满足 $\forall A_i, A_j \in S : A_i \cup A_j \in S, k = \min_{1<j\leq n} |A_i| \geq 2$.

   求证:

$$\exists x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i : x \in A_1 \cdots A_n$$

   满足 $x \in A_1 \cdots A_n$ 的至少 n 个集合.

   不妨设

$$|A_1| \leq |A_2| \leq \cdots |A_n|$$

   记 $A_1 = \{x_1, x_2, \cdots x_k\}$,

   (i) $A_i \subseteq A_n (i = 1, 2, \cdots n)$ 因为 $A_n \subseteq A_i \cup A_n \in S$

   (ii) 记 $Px_i) = \{A_j | x_i \in A_j \, i = 1 \cdots k, j = 1 \cdots n$ 只需证

$$\exists i : |P(x_i)| \geq \frac{n}{k}$$

   只需证

$$\sum_{i=1}^{k} |P(x_i)| \geq n$$

   只需证

$$\forall j : \exists i : A_j \in P(x_2) \Leftrightarrow A_j, A_i \cap A_j \neq \emptyset$$

   但此式不成立.

	A_1	A_{i1}	A_{i2}	$\cdots$	A_{it}	$A_{i1}\cup A_1$	$A_{i2}\cup A_2$	$\cdots$	$A_{it}\cup A_1$	$A_1^{'}$	$A_2^{'}$	$\cdots$	$A_{n-2t-1}^{'}$
x_1	1	0	0	$\cdots$	0	1	1	$\cdots$	1				
x_2	1	0	0	$\cdots$	0	1	1	$\cdots$	1				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	1				
x_k	1	0	0	$\cdots$	0	1	1	$\cdots$	1				

表 5: 构造集合 A

记 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots A_{ik}$ 是 S 中与 A_1 不相交的集合.

则有 $A_{i1}\cup A_1\in S, A_{i2}\cup A_1\in S, \cdots A_{ik}\cup A_1\in S$

$\sum_{i=1}^{k}|P(x_1)|$ 即为表格中所有数的和.

令 N 为表格中剩余 $n-2t-1$ 列所有数字的和,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}|P(x_1)| &= k+kt+N \\
&\geq k+kt+(n-2t-1) \\
&\geq 2+2t+n-2t-1 \\
&= n+1 \\
&> n
\end{aligned}
$$

得证.