§8 局部不等式与放缩法

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 11 月 20 日

1. 设实数 a, b, c 满足 $a+b+c=3$, 求证:
$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\le\frac{1}{4}.$$

记

$$f(x)=\frac{1}{5x^2-4x+1},$$

设

$$f(x)\le kx+m,$$

令

$$k=f'(1),$$

$$f'(x)=(5x^2-4x+11)^{-2}\cdot(10x-4)\Rightarrow f'(1)=-(12)^{-2}\cdot 6=-\frac{1}{24},$$

$$m=f(1)-k=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8},$$

于是有

$$\begin{aligned}f(x)\le kx+m &\Leftrightarrow 24\le-(x-3)(5x^2-4x+11)\\ &\Leftrightarrow -5x^3+19x^2-23x+9\ge 0\\ &\Leftrightarrow (x-1)(5x-9)(x-1)\le 0.\end{aligned}$$

不妨设 $a>\dfrac{9}{5}$, 于是有

$$\begin{aligned}\frac{1}{5a^2-4a+11}&<\frac{1}{5\left(\frac{9}{5}\right)^2-4\times\frac{9}{5}+11}=\frac{1}{20},\\ \frac{1}{5b^2-4b+11}&=\frac{1}{5\left(b-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{51}{5}}\le\frac{5}{51}<\frac{1}{10},\\ \frac{1}{5c^2-4c+11}&<\frac{1}{10}.\end{aligned}$$

相加, 得 左 $< \frac{1}{4}$.

2. 设 $a,b,c>0$, 且 $a+b+c=1$, 求证:

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}.$$

$$\begin{aligned}
&\sum\frac{1}{ab+2c^2+2c(a+b+c)}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}\\
\Leftrightarrow&\frac{1}{ab+2c^2+2ac+2bc+2c^2}\geq\frac{ab}{(ab+bc+ca)^2}\\
\Leftrightarrow&a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2ab^2c+2abc^2+2a^2bc\geq a^2b^2+2abc^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2\\
\Leftrightarrow&b^2c^2+c^2a^2-2abc^2\geq 0\text{恒成立}.
\end{aligned}$$

于是有

$$\text{左}\geq\frac{ab+bc+ca}{(ab+bc+ca)^2}=\text{右}.$$

3. 已知 x,y,z 为正数, 求证:

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\leq 1.$$

法一:

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}=\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(z+x)}}\leq\frac{x}{x+\left(\sqrt{xz}+\sqrt{xy}\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}},\text{相加即得证}.$$

法二:

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}=-\frac{x(x-\sqrt{(x-y)(x+z)})}{\leq}-\frac{x(x-\frac{2x+y+z}{2})}{(y+z)x+yz}=\frac{xy+xz}{2(xy+yz+zx)}.$$

法三:

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}\leq\frac{x^k}{x^k+y^k+z^k}\Leftrightarrow x(y^k+z^k)\leq x^k\sqrt{(x+y)(x+z)}\Leftrightarrow(y^k+z^k)^2\leq x^{2k-2}(x+y)(x+z).$$

$$\sum_{\text{项}}\cdot\text{系数}\cdot x\text{ 的指数}=1x\cdot 2k+1x(2k-1)+\cdots=0,k=\frac{1}{2}.$$

4. 设 a, b, c 是非负实数, 求证:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq 1.$$

令

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \geq \frac{a^k}{a^k+b^k+c^k},$$

则有

$$a^{\frac{3}{2}}\left(a^k+b^k+c^k\right) \geq \frac{a^3+(b+c)^3}{\cdot} a^k,$$

即

$$\left(a^k+b^k+c^k\right)^2 \geq a^{2k-3}\left[a^3+(b+c)^3\right],$$

即

$$a^{2k}+2\left(b^k \cdot c^k\right)+a^k+\left(b^k+c^k\right)^2,$$

即

$$2k+4k=2k+8(2k-3),$$

有

$$k=2.$$

于是即证

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \geq \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2},$$

即证

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq a \cdot [a^3+(b+c)^3],$$

只需证

$$\left[a^2+\frac{(b+c)^2}{2}\right] \geq a[a^3+(b+c)^3],$$

即证

$$a^2(b+c)^2+\frac{(b+c)^4}{4} \geq (b+c)^3 a,$$

即证

$$a^2+\frac{(b+c)^2}{4}\geq (b+c)a,\text{成立}.$$

5. 设 $x,y,z\in\mathbb{R}$, 求证:

$$\frac{9}{4}(x^2-x+1)(y^2-y+1)(z^2-z+1)\geq x^2y^2z^2-xyz+1.$$

有

$$\begin{aligned}\text{左}&=\frac{3}{2}(x^2-x+1)(y^2-y+1)\frac{3}{2}(z^2-z+1)\\&\geq [(xy)^2-xy+1]\frac{3}{2}(z^2-z+1)\\&\geq (xyz)^2-xyz+1.\end{aligned}$$

即证

$$\frac{3}{2}(x^2-x+1)(y^2-y+1)\geq (xy)^2-xy+1,$$

即证

$$\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right)y^2+\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)y+\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)\geq 0,$$

即证

$$\begin{aligned}\Delta&=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\right)^2-4\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)\\&=-\frac{3}{4}x^4+\frac{9}{2}x^2-\frac{33}{4}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{3}{4}\\&\leq 0,\end{aligned}$$

即证

$$x^4-6x^3+11x^2-6x+1\geq 0,$$

而

$$(x^2-3x+1)^2\geq 0,$$

故得证.

6. 设实数 a,b,c,d 满足 $a+b+c+d=6, a^2+b^2+c^2+d^2=12$, 求证:

$$36 \le 4(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^4+b^4+c^4+d^4) \le 48.$$

左侧等号, 法一:

即证

$$4a^3-a^4 \ge xa^2+ya+z,$$

等号成立当且仅当 $a=1$ or $a=3$.

故有

$$\begin{cases} 3 &=& x+y+z \\ 27 &=& 9x+3y+z \\ 36 &=& 12x+6y+4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &=& 2 \\ y &=& 4 \\ z &=& -3 \end{cases}$$

左侧等号, 法二:

$$\begin{aligned} 3(b^2+c^2+d^2) &\ge (b+c+d)^2 \\ 3(12-a^2) &\ge (6-a)^2 \\ 0 &\ge 4a^2-12a \\ a &\in [0,3] \end{aligned}$$

即证

$$a^4-4a^3+xa^2+ya+z \le 0,$$

对 $a \in [0,3]$ 恒成立.

$(a-1)^2(a-3)(a+1)$,

相加得 $\sum(4a^3-a^4) \ge 36$.

右侧等号:

等号成立条件 $a=0$ or $a=2$.

$4a^3-a^4 \le 4a^2$, 成立.

7. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n (n\ge 2)$ 是 n 个互不相等的正数, 且满足 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{-2n}=1$, 求证:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{2n} - n^2 \sum_{1\le i<j\le n} \left(\frac{a_i}{a_j}-\frac{a_j}{a_i}\right)^2 > n^2.$$

有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{2n} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^{-2n},$$

$$\sum_{1\le i<j\le n} \left(\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_j}{a_i}\right)^2 = \sum \left(\frac{a_i^2}{a_j^2} - 2 + \frac{a_j^2}{a_i^2}\right),$$

故

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{2n} - n^2 = \sum_{1\le i<j\le n} \left(a_i^n \cdot a_j^{-n} - a_i^n \cdot a_j^{-n}\right)^2,$$

故只需证

$$\left(\frac{a_i^n}{a_j^n} - \frac{a_j^n}{a_i^n}\right)^2 \geq n^2 \left(\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_j}{a_i}\right)^2,$$

即证

$$\left|\frac{a_i^n}{a_j^n} - \frac{a_j^n}{a_i^n}\right| > n \left|\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_j}{a_i}\right|.$$

有

$$\left|\frac{a_i^n}{a_j^n} - \frac{a_j^n}{a_i^n}\right| = \left|\left(\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_j}{a_i}\right)\left[\left(\frac{a_i}{a_j}\right)^{n-1} + \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^{n-3} + \cdots + \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^{1-n}\right]\right|,$$

又因为

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^{n-1} + \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^{1-n} &> 2, \\ \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^{n-3} + \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^{3-n} &> 2, \\ \cdots &> \cdots \end{aligned}$$

相加有

$$\left(\frac{a_i}{a_j}\right)^{n-1} + \cdots + \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^{1-n} > n, \text{得证.}$$

8. 设 a,b,c 是正实数, 求证:

$$\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+(a+b+c)^2 \geq 4\sqrt{3abc(a+b+c)}.$$

不妨设 $a+b+c=3$,

即证

$$\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+9 \geq 12\sqrt{abc}.$$

有

$$左 \geq (a+b+c)^2+3(abc)^{\frac{2}{3}},$$

记

$$m^3=\sqrt{abc}, m\in(0,1],$$

只需证

$$m^3\cdot 3m+9 \geq \sqrt{2}m^3,$$

即证

$$m^4+3 \geq 4m^3,$$

即证

$$(m-1)(m^3-3m^2-3m-3) \geq 0, 显然成立.$$

9. 设正整数 $n \geq 2$, 求证:

$$\cos\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{1}{3}\cdots\cos\frac{1}{n} > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

即证

$$\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{3}\cdots\cos\frac{1}{n}\cos 0 > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

若 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 则有 $\sin x < x < \tan x$,

故

$$\cos\frac{1}{n} > 1-\sin^2\frac{1}{n} > 1-\left(\frac{1}{n}\right)^2,$$

故

$$
\begin{aligned}
\text{原式}^2 &= \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\cdots \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots \\
&= \left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\right)\times\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2} \\
&> \frac{1}{2}, \text{得证}.
\end{aligned}
$$