§10 不等式中的恒等变形

高一（6）班 邵亦成 26 号

2021 年 12 月 11 日

1. 设正整数 $n \geq 2$, 求常数 $C(n)$ 的最大值, 使得对于所有满足 $x_i \in (0,1)(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $(1-x_i)(1-x_j) \geq \frac{1}{4}(1 \leq i < j \leq n)$ 的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均有:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq C(n) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(2x_i x_j + \sqrt{x_i x_j}\right).$$

令 $x_i = \frac{1}{2}$, 则有

$$\frac{n}{2} \geq C(n) \cdot C(n)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right),$$

即

$$\frac{n}{2} \geq C(n) \cdot \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow C(n) \leq \frac{1}{n-1}.$$

当 $C(n) = \frac{1}{n-1}$ 时, 有

$$x_i + x_j \geq 2x_i x_j + \sqrt{x_i x_j},$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i + x_j) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(2x_i x_j + \sqrt{x_i x_j}\right),$$

只需证

$$2\sqrt{x_i x_j} \geq 2x_i x_j + \sqrt{x_i x_j},$$

即证

$$x_i x_j \leq \frac{1}{4},$$

显然成立.

故 $C(n)_{\max} = \frac{1}{n-1}$.

2. 对于任意的 10 元两两不同的整数组 $(a_1, a_2 \cdots, a_{10})$, 求

$$11 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{10} a_k\right)^2$$

的最小值.

$$11\sum_{k=1}^{10}a_k^2-\left(\sum_{k=1}^{10}a_k\right)^2=\sum_{1\le i<j\le 10}(a_i-a_j)^2+\sum_{k=1}^{n}a_k^2,$$

即有

$$\sum_{1\le i<j\le 10}(a_i-a_j)^2\ge\sum_{1\le i<j\le 10}(j-i)^2,$$

等号成立当且仅当 $a_{k+1}-a_k=1$.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2\ge 0^2+2\cdot a^2+2\cdot 2^2+2\cdot 3^2+2\cdot 4^2+5^2=85,$$

等号成立当且仅当 $a_n=n-6$ or $a_n=n-5$.

两者同时成立, 代入得原式 $=910$.

3. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实数, 求证: 对任意 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ 的非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 不等式 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\ge a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2$ 均成立的充要条件是对所有的 $1\le i,j\le n$ 有 $a_i+a_j\ge 0$.

必要性: 令 $x_i=x_j=\dfrac{1}{2}$, 其余 $x_k=0$, 得:

$$\frac{1}{2}a_i+\frac{1}{2}a_j\ge\frac{1}{4}a_i+\frac{1}{4}a_j,a_i+a_j\ge 0.$$

充分性:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_kx_k-\sum_{k=1}^{n}a_kx_k^2&=\left(\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)-\sum_{k=1}^{n}a_kx_k^2\\&=\sum_{1\le i<j\le n}(a_i+a_j)x_ix_j\\&\ge 0.\end{aligned}$$

4. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n,c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为实数, 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2=1,\sum\limits_{i=1}^{n}b_ic_i=1,\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=0$, 求证:

$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_ic_j-a_jc_i)^2\ge\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

$$左=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}c_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kc_k\right)\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}a_k^2\left(\sum_{k=1}^{n}c_{k-1}^2\right)\ge\left(\sum_{k=1}^{n}a_kc_k\right)^2.$$

$$\sum_{k=1}^{n}c_k^2-1=\sum_{k=1}^{n}c_k^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}b_kc_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

$$\sum a_ib_i\cdot\sum b_ic_i-\sum b_i^2\sum a_ic_i=\sum_{i<j}(a_ib_j-a_jb_i)(b_ic_-b_jc_i)-\sum a_ic_i. \tag{1}$$

$$\sum a_i^2=\sum a_i^2\sum b_i^2-\left(\sum a_ib_i\right)^2=\sum(a_ib_j-a_jb_i)^2. \tag{2}$$

$$\sum c_i^2=\sum c_i^2\sum b_i^2-\left(\sum c_ib_i\right)^2=\sum(c_ib_j-c_jb_i)^2. \tag{3}$$

$$(2)(3)\geq(1)^2.$$

5. 设正整数 $n\geq 2$, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数, $M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. 求证:

$$M\sum_{i=1}^n ia_i\geq\frac{n+1}{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j.$$

记

$$s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k,k\cdot M\geq S_k,$$

有

$$\begin{aligned}
左&=\sum_{i=1}^n(i\cdot M)a_i\\
&\geq\sum_{i=1}^n S_ia_i\\
&\geq\sum_{i=1}^n(a_1+a_2+\cdots+a_i)a_i \qquad (*)\\
&=\sum_{i=1}^n a_i^2+\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j.
\end{aligned}$$

$(*)$ 式证明如下:

即证

$$n\sum_{k=1}^n a_k^2\geq\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2,$$

即证

$$(n-1)\sum_{i=1}^n a_i^2\geq 2\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j=\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2-\sum_{k=1}^n a_k^2$$

显然成立.

于是即证

$$(n-1)\sum_{i=1}^n a_i^2+(n-1)\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j\geq(n+1)\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j,$$

成立.

6. 设 n 为正整数, 实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2,$$

并求出等号成立条件.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j| = 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i) = 2\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)x_k.$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 = 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)^2,$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)^2\sum_{1\leq i<j\leq n}(j-i)^2 \geq \left[\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)(j-i)\right]^2,$$

$$x_k\text{系数} = \sum_{i=1}^{k-1} i - \sum_{i=1}^{n-k} i = \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} = \frac{-n^2+(2k-1)n}{2}.$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)^2\sum_{1\leq i<j\leq n}(j-i)^2 \geq \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{n(2k-1-n)}{2}x_k\right]^2 = \frac{n^2}{16}\left[\sum_{k=1}^{n}2(2k-n-1)x_k\right]^2.$$