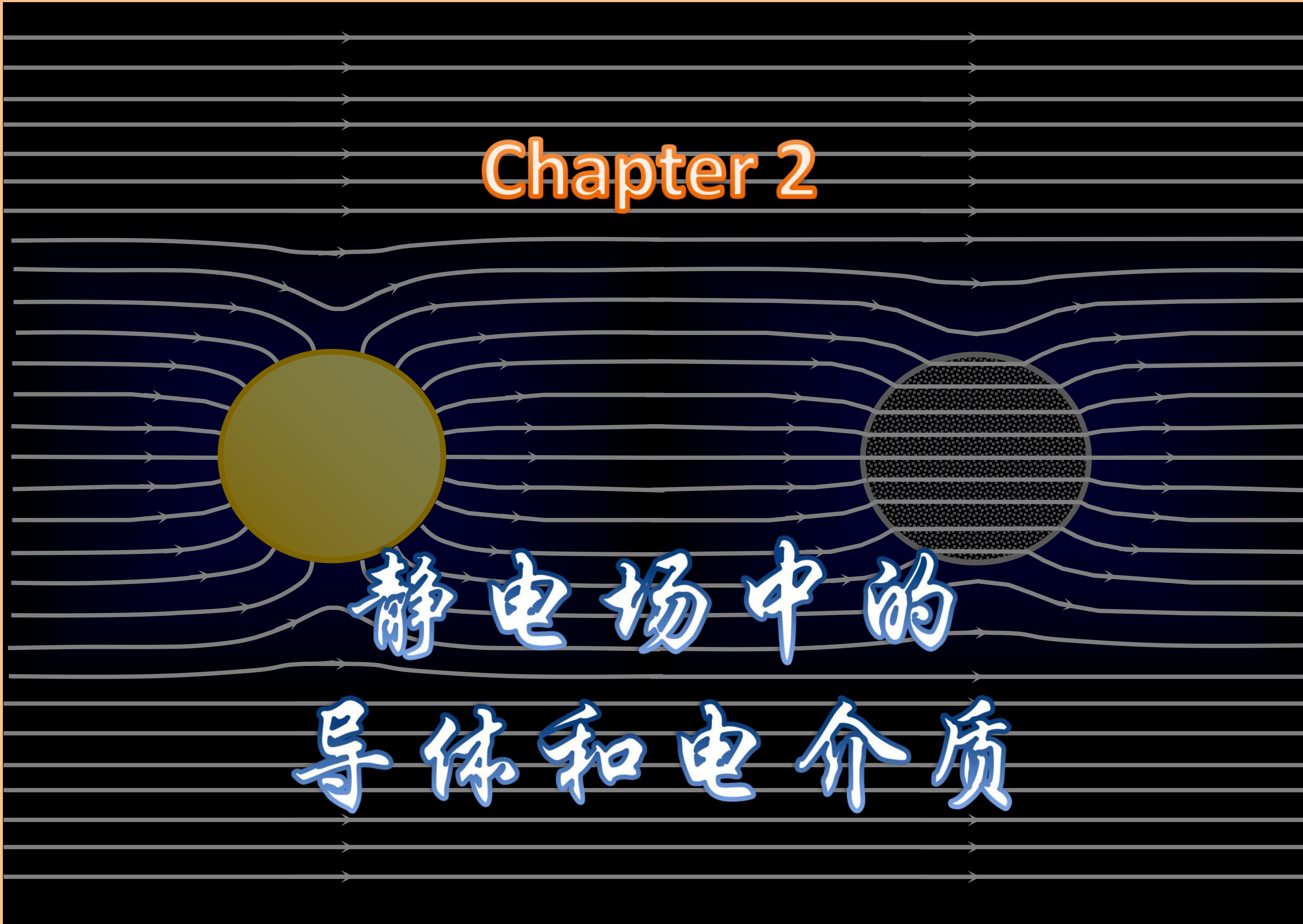
Chapter 2

静电场中的导体和电介质



主要内容

§ 1　静电场中的导体

§ 2　电容和电容器

§ 3　静电场中的电介质

§ 4　带电体系的静电能

§ 6.1

静电场中的导体

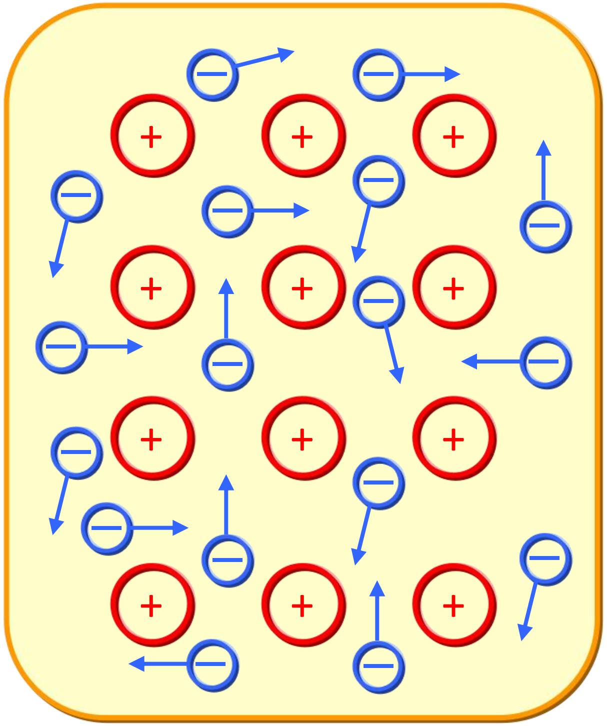
6.1.1 导体的静电平衡

一、导体的电结构

金属导体的电结构特征

1. 金属导体由带负电的**自由电子**和带正电的**晶体点阵**构成。

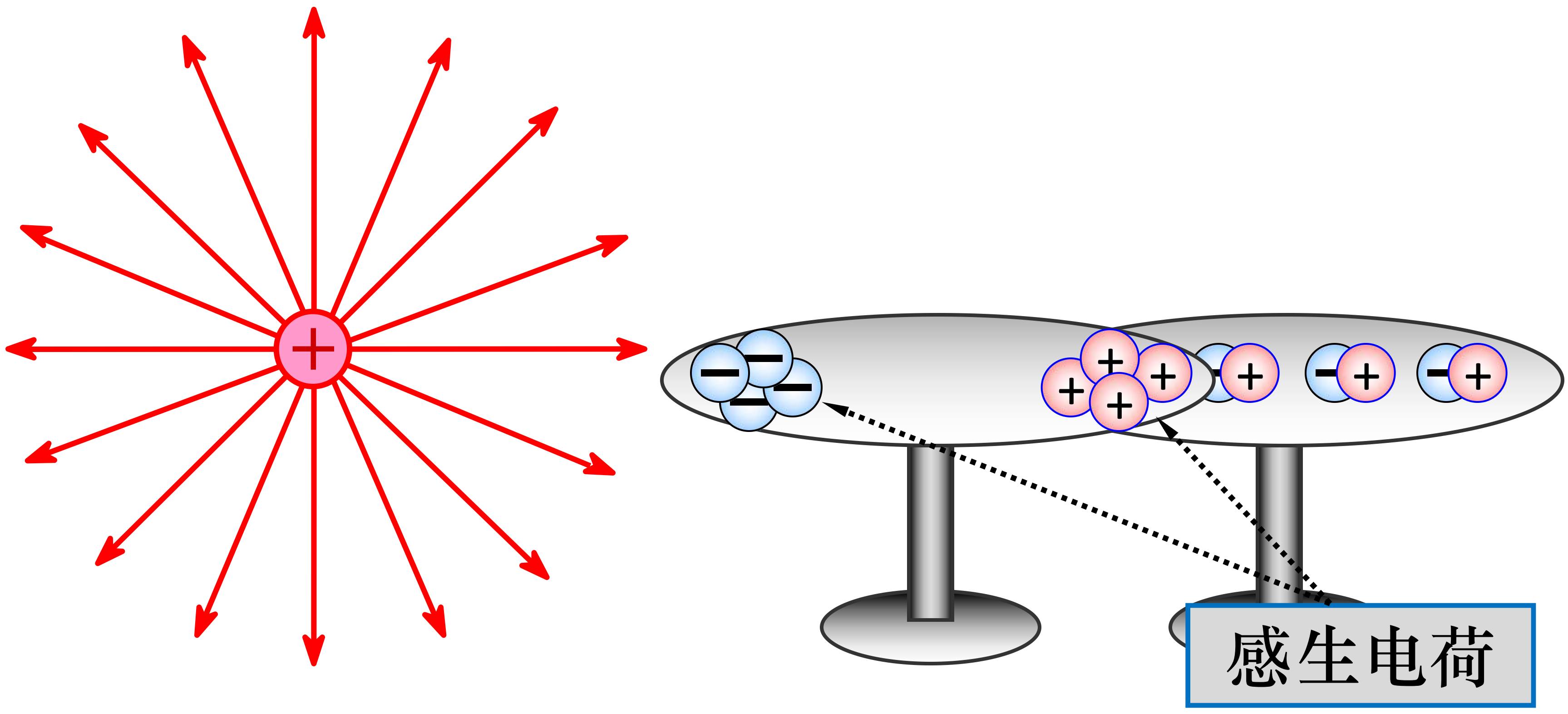
2. 当导体不带电也不受外电场的作用时，两种电荷在导体内均匀分布，都**没有宏观移动**，只有**微观的热运动**存在。



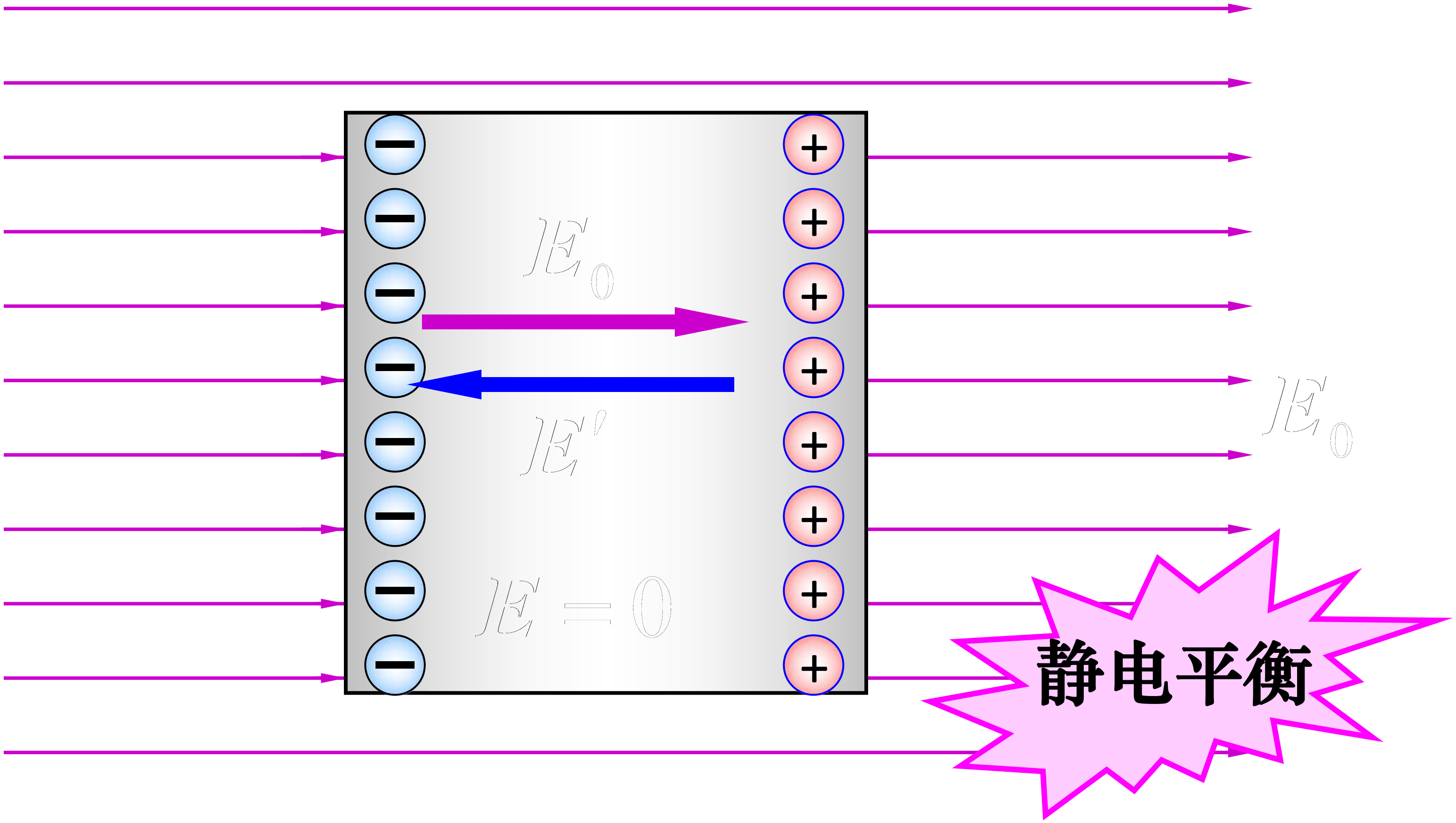
晶体点阵和自由电子示意图

电中性

二、导体的静电平衡



导体上因静电感应而出现的电荷，称为**感生电荷**



$$\boxed{E_{\text{int}} = E_0 + E'}$$

导体内电场强度

外电场强度

感生电荷电场强度

静电平衡状态：导体内部和表面都没有电荷的定向移动

静电平衡条件

(1) **导体内部**任何一点处的**电场强度为零**；

(2) **导体表面**处的**电场强度的方向**，都与导体**表面垂直**。

导体是等势体

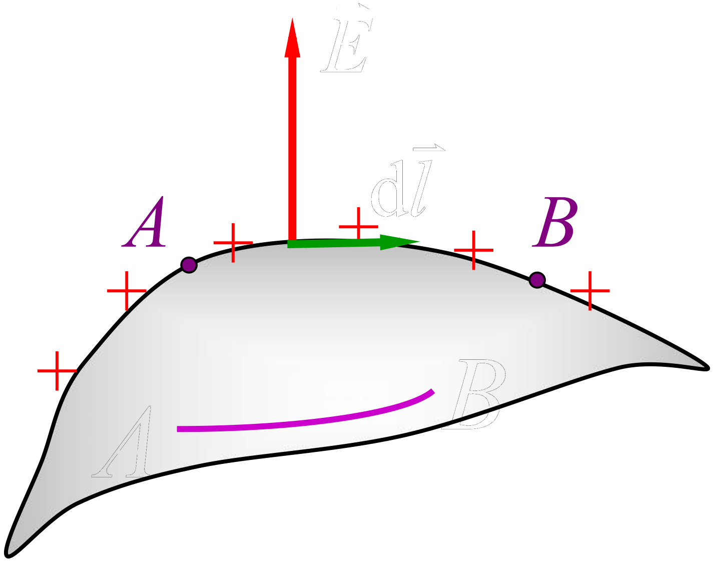
- **导体表面是等势面**

$$\because \vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

- **导体内部电势相等**

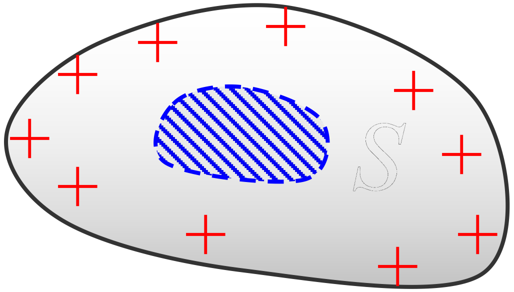
$$\because \vec{E}_{\text{int}} = 0 \qquad \therefore U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$



6.1.2　静电平衡导体上的电荷分布

一、导体内部和表面的电荷分布

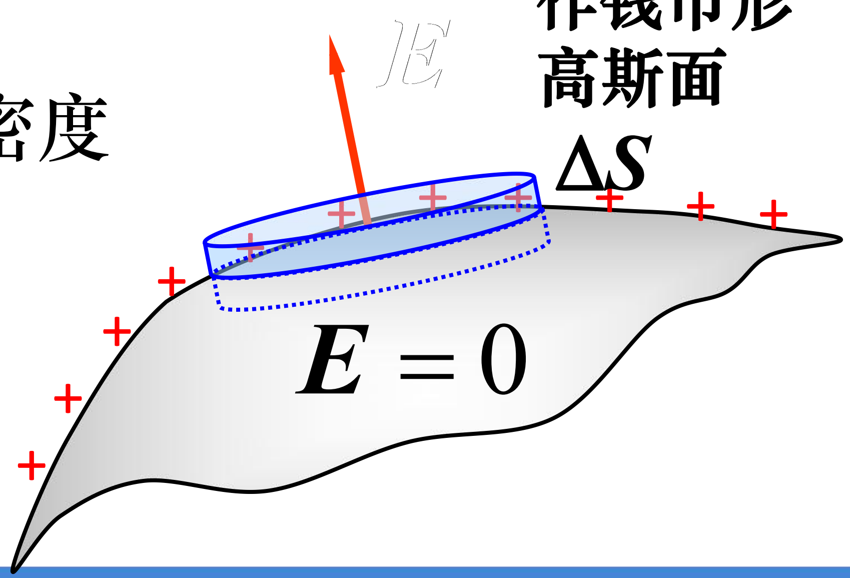
1. 导体内部没有净电荷存在，**电荷只能分布在导体表面上**。



作高斯面： $$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\because \vec{E} = 0 \quad \therefore q = 0$$

2. 导体表面电场强度与电荷面密度的关系



$$\oint_S E\cdot dS = \sigma\Delta S/\varepsilon_0$$

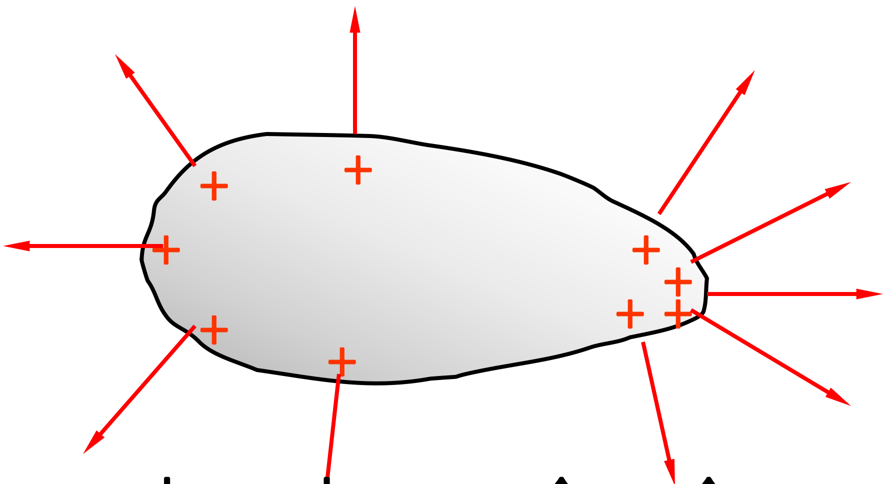
$$E\Delta S = \sigma\Delta S/\varepsilon_0$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

二、孤立导体的形状对电荷分布的影响
尖端放电现象

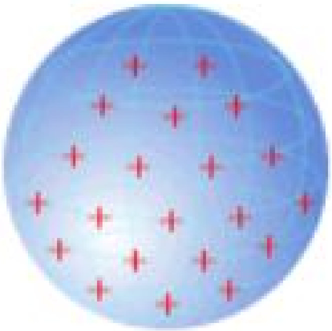
导体表面电荷分布与导体形状有关

1. 实验表明：**孤立**的导体处于静电平衡时，表面各处的面电荷密度与各处表面的**曲率**有关——**曲率越大的地方，面电荷密度也越大**。



$\sigma\downarrow, E\downarrow$； $\sigma\uparrow E\uparrow$

2. 孤立的**球形**带电导体，球面上各部分的**曲率**相同，故电荷均匀分布，即**面电荷密度在球面上处处相同**。



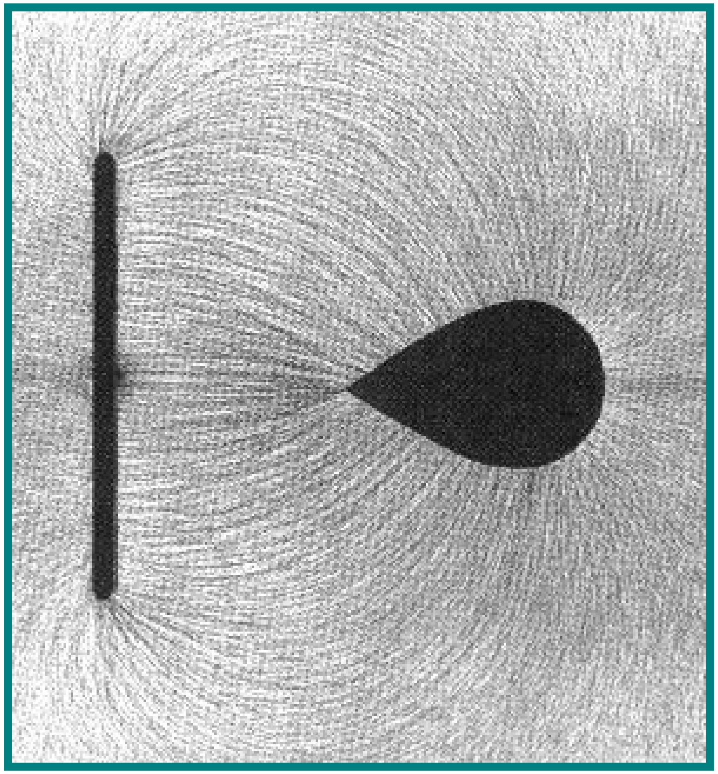
3. 尖端放电现象

$$\sigma\uparrow\Rightarrow E\uparrow$$

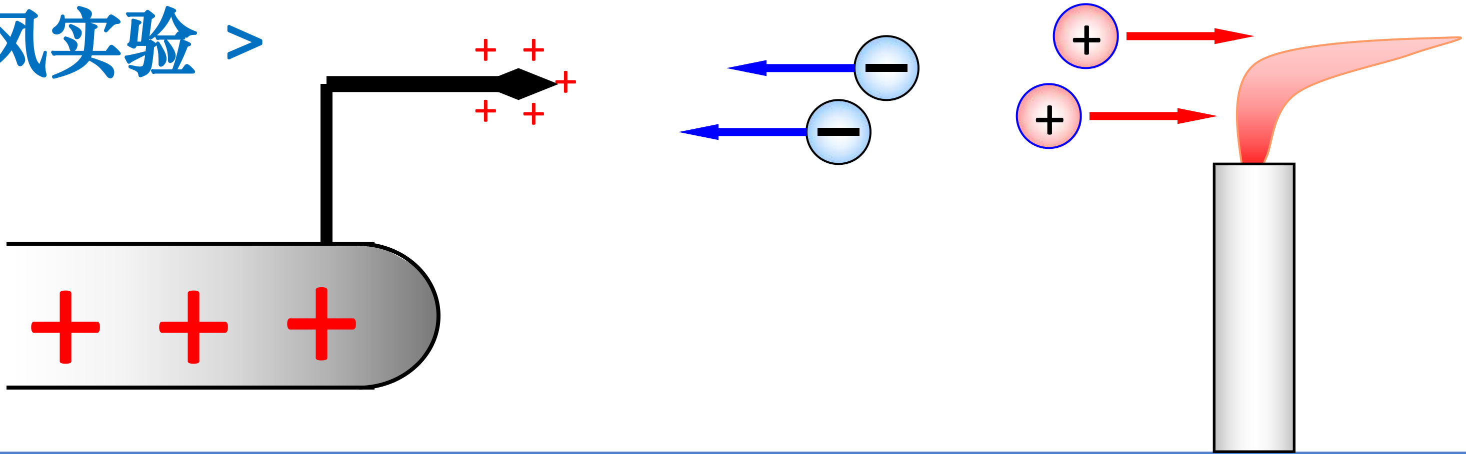
带电导体尖端附近电场最强

带电导体尖端附近的电场特别大，可使尖端附近的空气发生电离而成为导体产生放电现象

——**尖端放电**

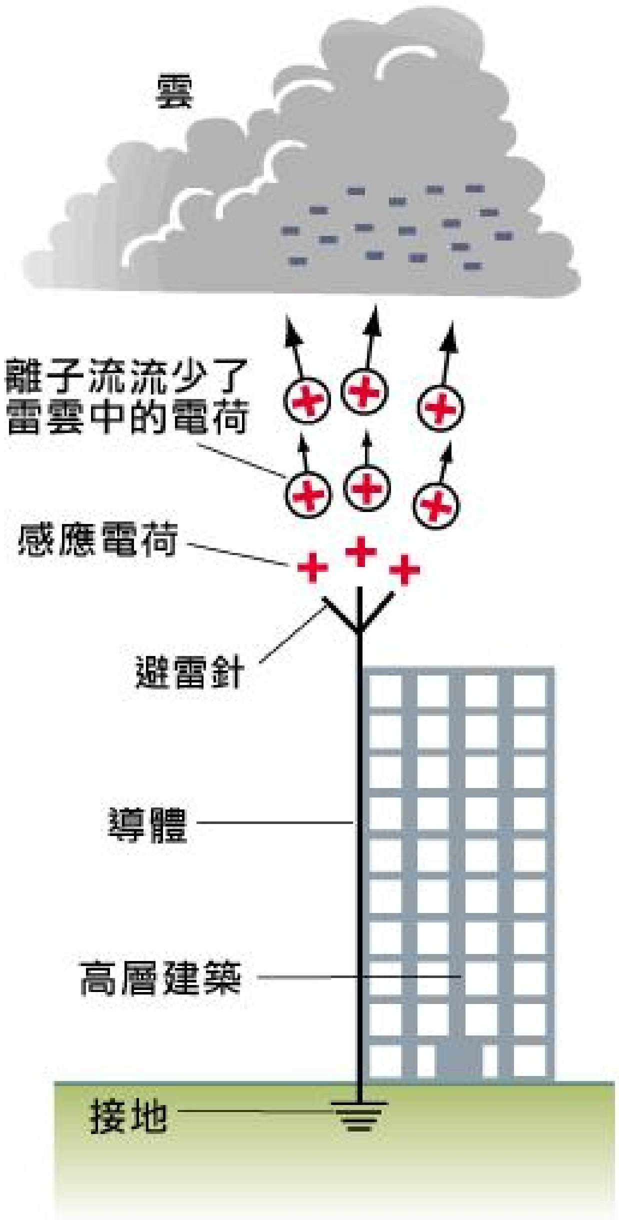


< 电风实验 >



< 避雷针 >

尖端放电现象的利用

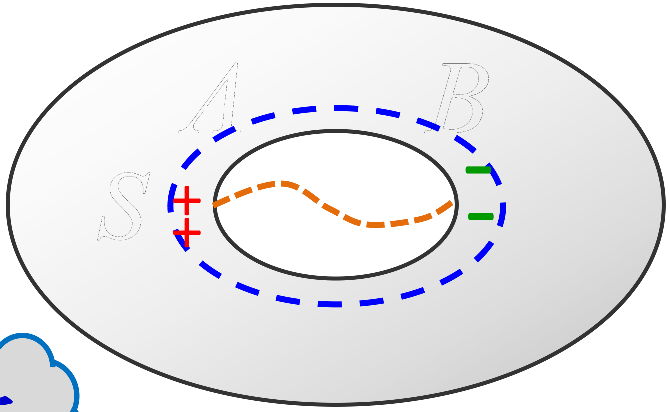


6.1.3 封闭导体空腔内外的电场 静电屏蔽

一、导体空腔内部无带电体的情况

1. 空腔内表面上处处无电荷，电荷只能分布在外表面

2. 空腔无电场，腔内是等势区



疑问：内表面上有电荷吗?

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0,\quad \sum q_i=0$$

矛盾

若内表面带电 $\varphi_A-\varphi_B=\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}\neq 0$ 导体是等势体

二、导体空腔内部有带电体的情况

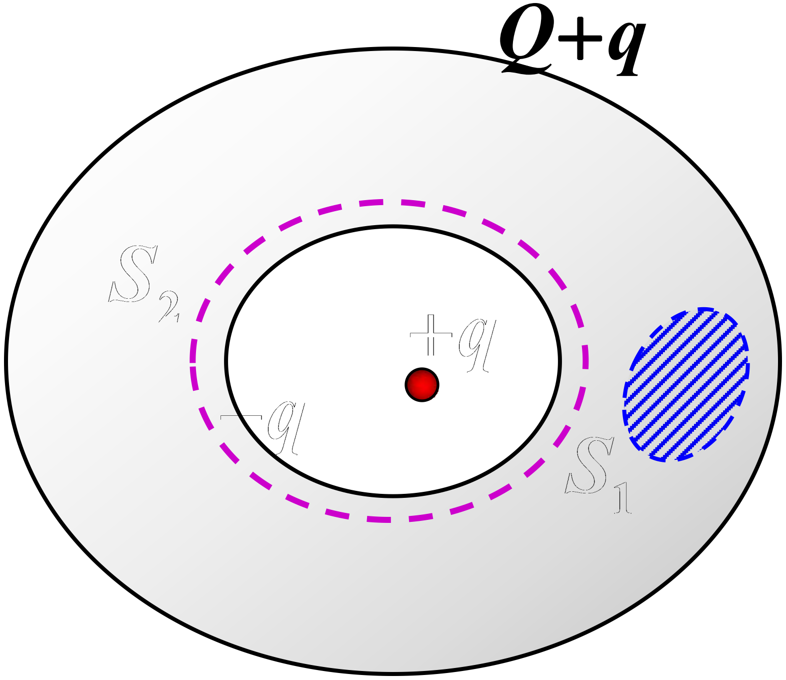
1. 空腔内表面上带电，所带感应电荷与空腔内带电体的电荷等值异号

作高斯面S_2，因内部电场处处为零，故

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

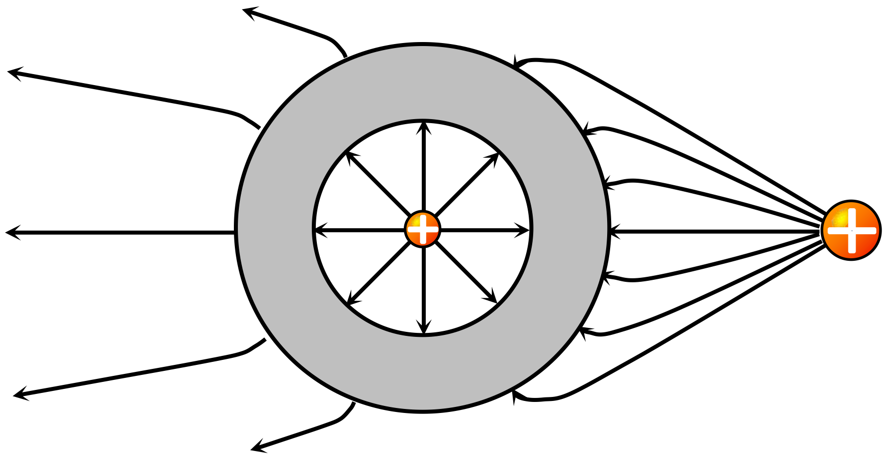
$$\sum q_i = 0$$

空腔内电荷电量$+q$加
导体内表面分布的电量 $-q$

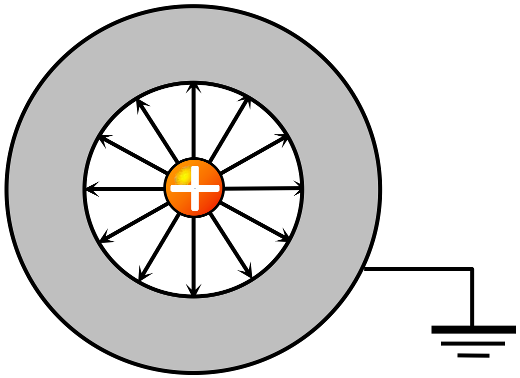


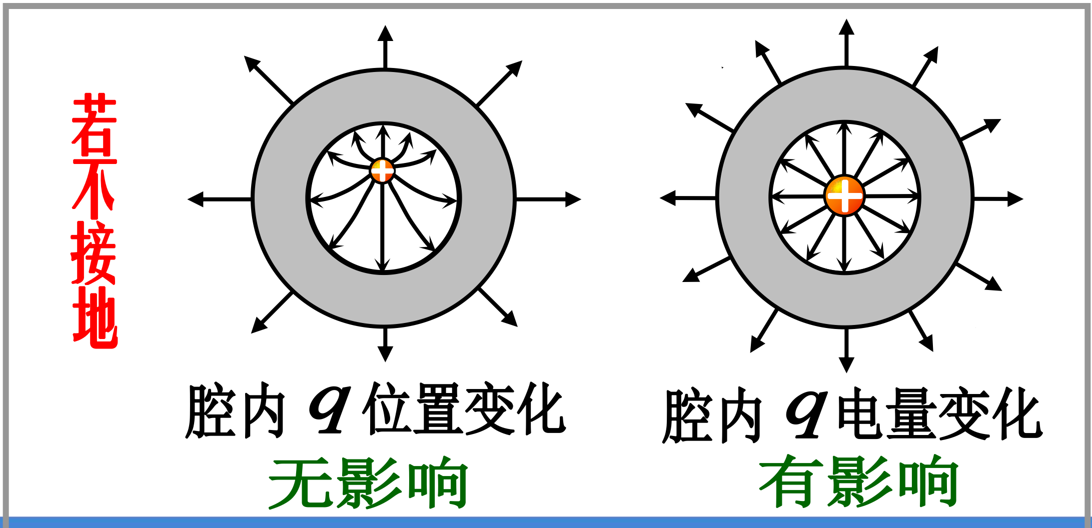
因本系统的导体中电荷守恒
导体外表面分布的电量为
$Q+q$

2. 空腔内电场仅由腔内带电体和空腔内表面感应电荷的分布决定，与导体外其他带电体无关



3. 空腔外电场是否受空腔内带电体的影响和空腔是否接地有关





三、静电屏蔽

接地的导体空腔，腔内、外电场各自独立，互不干扰，称为静电屏蔽现象。

四、有导体存在时静电场的计算举例

有导体存在时静电场场量的计算原则

1. 静电平衡的条件

导体 $E_{\text{int}} = 0$ *or* $V = \text{const.}$

2. 基本性质方程

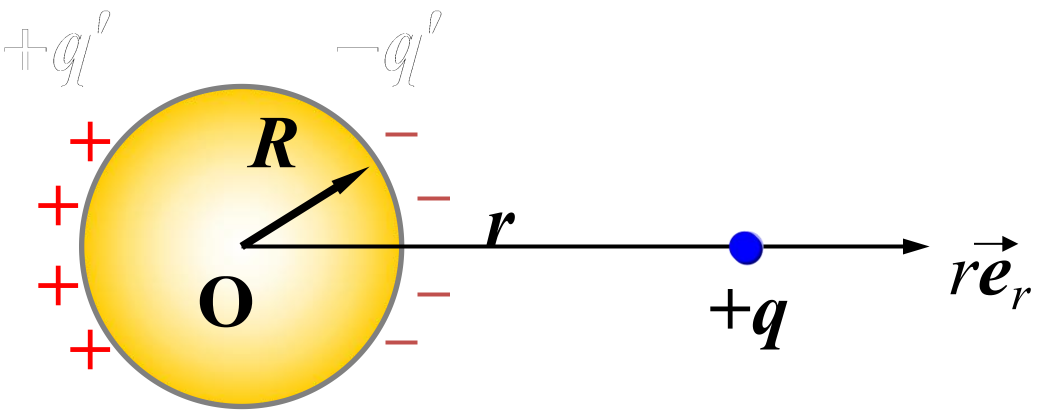
$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i \qquad \oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

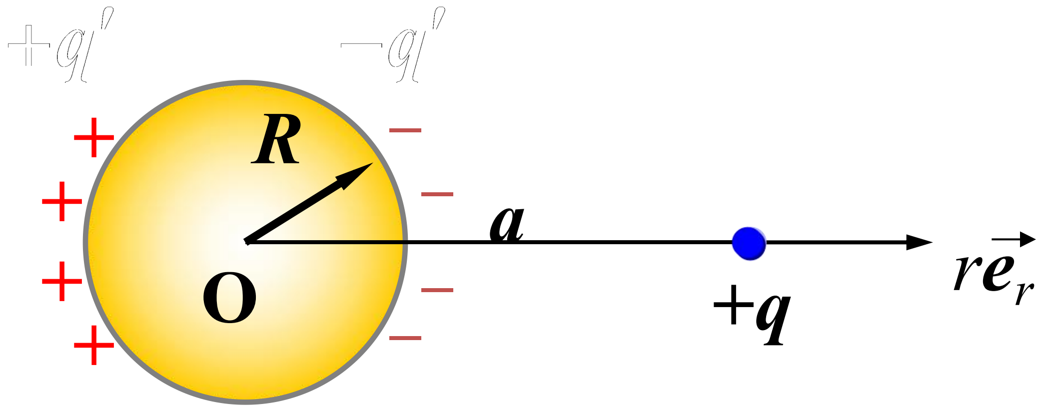
3. 电荷守恒定律 $\sum Q_i = \text{const.}$

例1： 在一不带电的金属球旁，有一点电荷$+q$，金属球半径为 R，试求：

(1) 金属球上感生电荷在球心处产生的电场强度 E 及此时球心的电势。

(2) 若将金属球接地，球上的净电荷为何？已知$+q$ 与金属球心间距为 r。





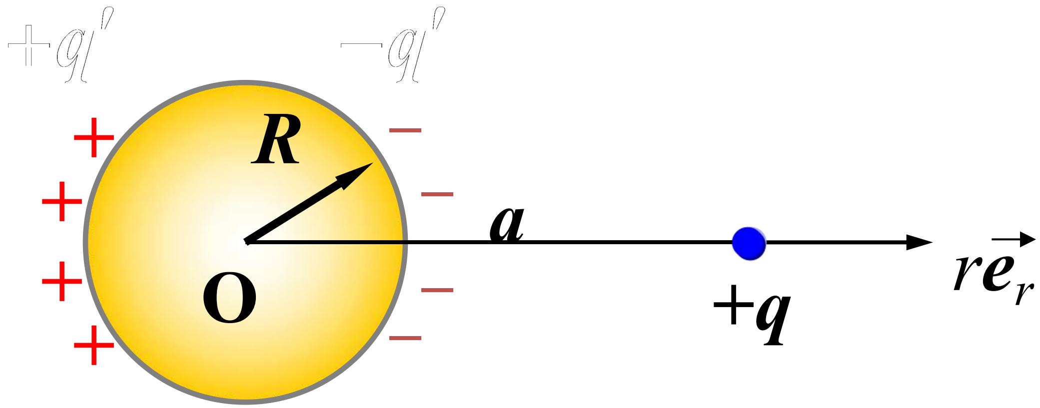
解：

(1) 球心O点的场强为感生电荷 $\pm q'$ 的电场 E 及点电荷 q 的电场 E' 的叠加，即：

$$\vec{E}_0 = \vec{E} + \vec{E}'$$

由静电平衡条件可知，金属导体球内场强处处为零，即 $E_0 = 0$，则

$$\vec{E} = -\vec{E}' = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(-\vec{e}_r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{e}_r$$



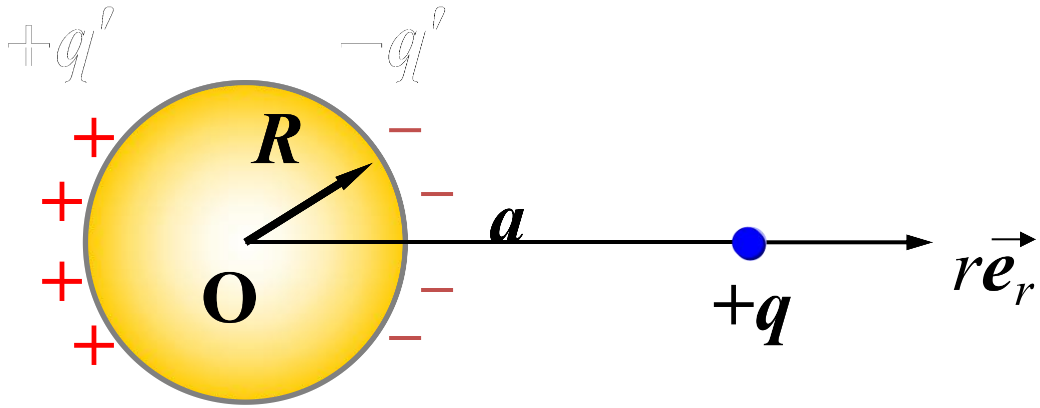
感生电荷分布在在球心O的电势：

$$\varphi = \int_{\pm q'} \frac{\mathrm{d}q'}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{\pm q'} \mathrm{d}q' = 0$$

点电荷 q 在球心O的电势： $\varphi' = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

根据电势叠加原理，球心O的电势

$$\varphi_0 = \varphi + \varphi' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$



(2) 若将金属球接地，设球上有净的负电荷q''，这时金属球的电势应为零，由叠加原理可知：

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0$$

$$\Rightarrow q'' = -\frac{R}{a} q \qquad \boxed{R < a} \qquad \Rightarrow |q''| < q$$

§ 6.2

电容和电容器

6.2.1 孤立导体的电容

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

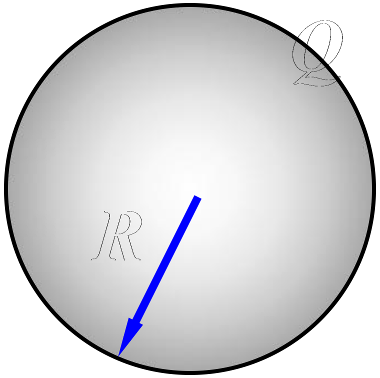
单位 $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{C/V}$

$1\,\mu\mathrm{F} = 10^{-6}\ \mathrm{F}$

$1\,\mathrm{pF} = 10^{-12}\ \mathrm{F}$

例如： 孤立导体球的电容

$$C = \frac{Q}{\varphi} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}} = 4\pi\varepsilon_0 R$$



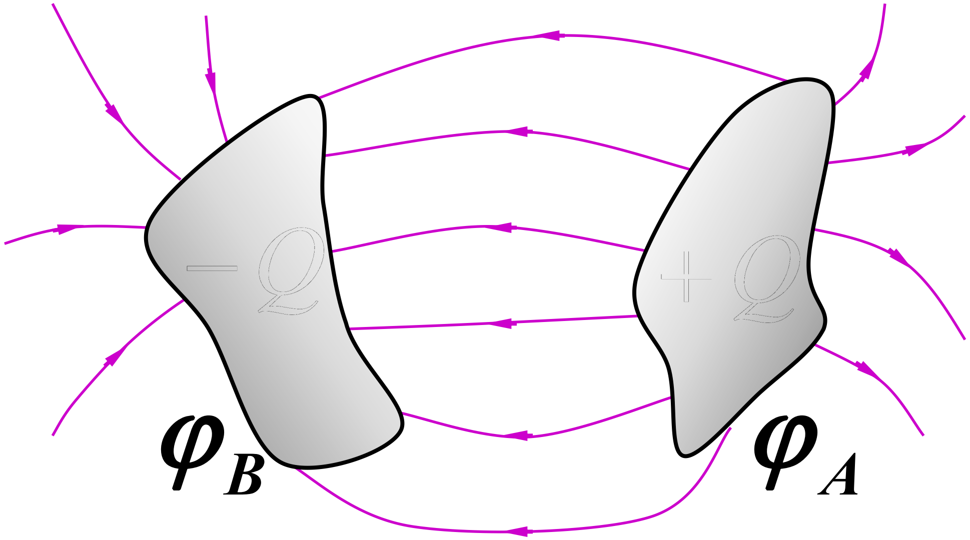
◆ 地球 $R_{\mathrm{E}} = 6.4\times10^{6}\,\mathrm{m}$, $C_{\mathrm{E}} \approx 7\times10^{-4}\,\mathrm{F}$

6.2.2 电容器及其电容

电容器的**电容**

$$C = \frac{Q}{\varphi_A - \varphi_B} = \frac{Q}{U}$$

意义：贮存电荷的能力

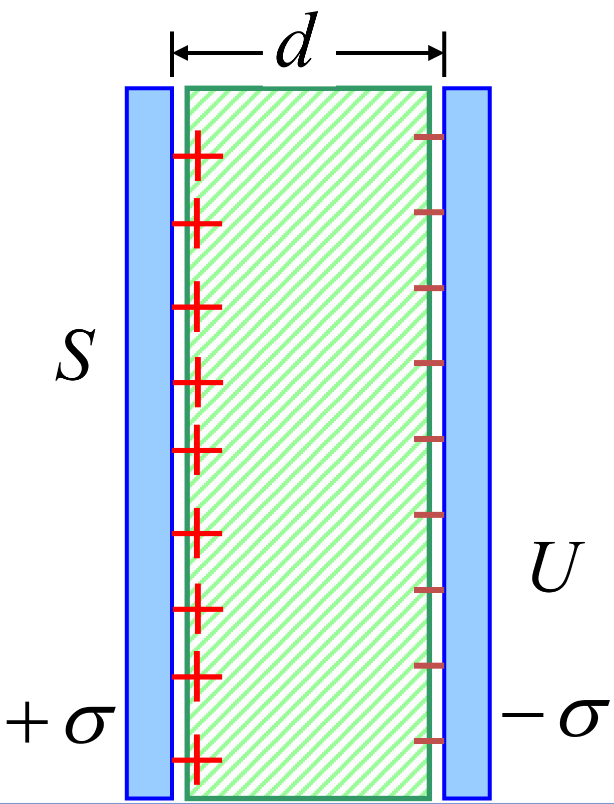


注意：电容的大小仅与导体的**形状**、**相对位置**，与所带电荷量**无关**。

♦ 电容器电容的计算

步骤	1. 设两极板分别带电 $\pm Q$	2. 求$\vec{E}$ (高斯定理)
	3. 求U，$U_{AB}=\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$	4. 求C，$C=Q/U$

1. 平行板电容器



(1) 板间电场强度： $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}=\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$

(2) 两板间的电压： $U=Ed=\dfrac{Qd}{\varepsilon_0 S}$

(3) 平行板电容： $\boxed{C=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}}$

§ 6.3

静电场中的电介质

6.3.1 电介质　电介质的极化

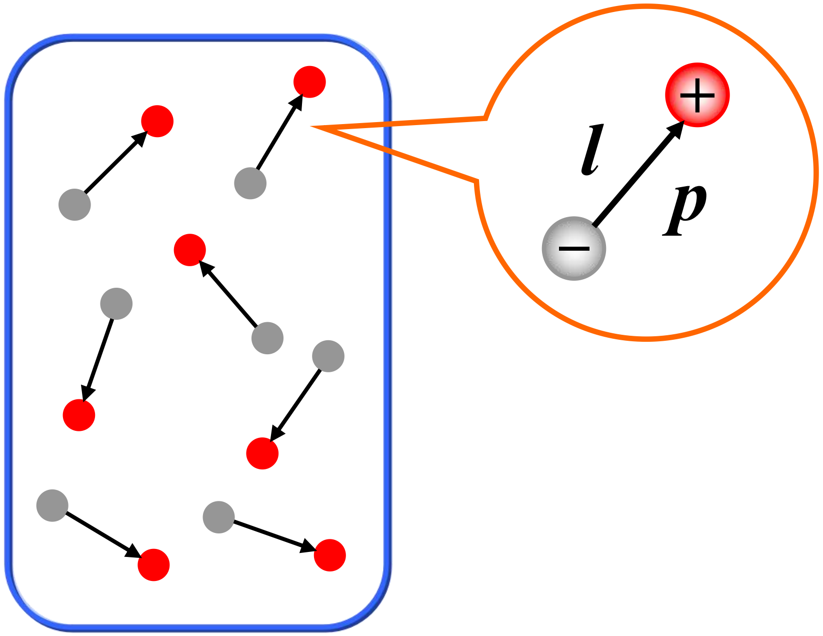
一、电介质的分类

1. 分子内正、负电荷的重心不相重合，其间有一定距离—有极分子（极性分子）

如：水、环氧树脂、陶瓷

电矩为： $\vec{p} = q\vec{l}$

固有电矩

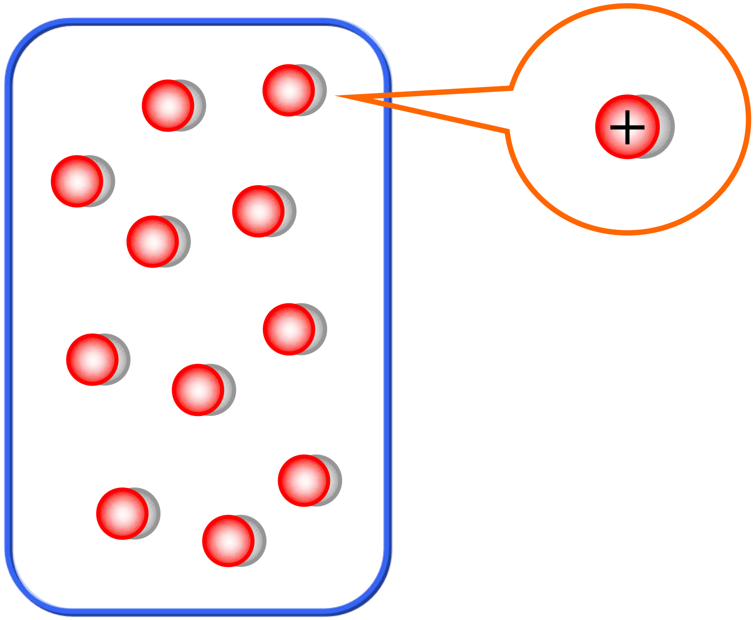


a. 有极分子

2. 分子内正、负电荷重心是重合的，这类分子称为无极分子（非极性分子）

如：甲烷、聚丙烯、石蜡

电矩： $\vec{p} = 0$

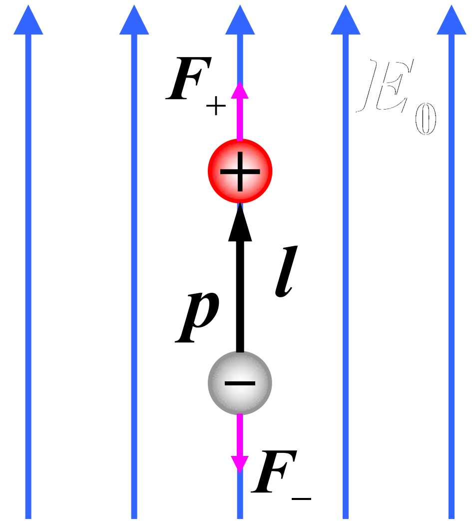


b. 无极分子

二、电介质的极化

1. 无极分子电介质的位移极化

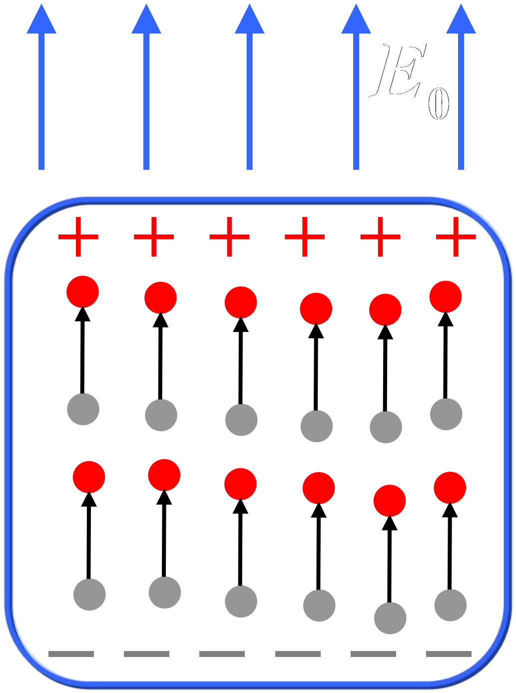
外场使正、负电荷中心发生相对位移，等效于一个**电偶极子**



感生电矩 $\vec{p} = q\vec{l}$

其方向都沿着外电场的方向

$$E_0 \uparrow \Rightarrow l \uparrow \Rightarrow p \uparrow$$

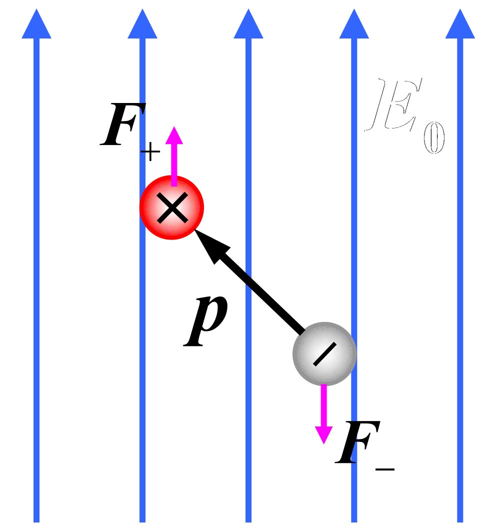


介质与外场垂直的两个端面出现正、负电荷层

—**极化面电荷**或**束缚电荷**

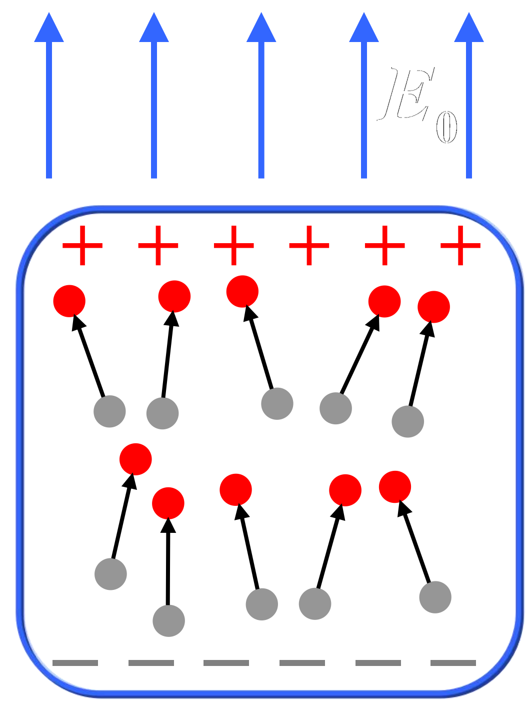
2. 有极分子电介质的取向极化

外场对有极分子的电矩产生力矩，
使有极分子**转向**



注意： 由于**分子热运动的干扰**，并不能使各分子电矩都循外电场的方向整齐排列。**外电场愈强，分子电矩的排列愈趋向于整齐。**

由于**电矩趋向外电场方向**，导致介质与外场垂直的两个端面出现正、负极化面电荷



6.3.2 极化强度与极化电荷

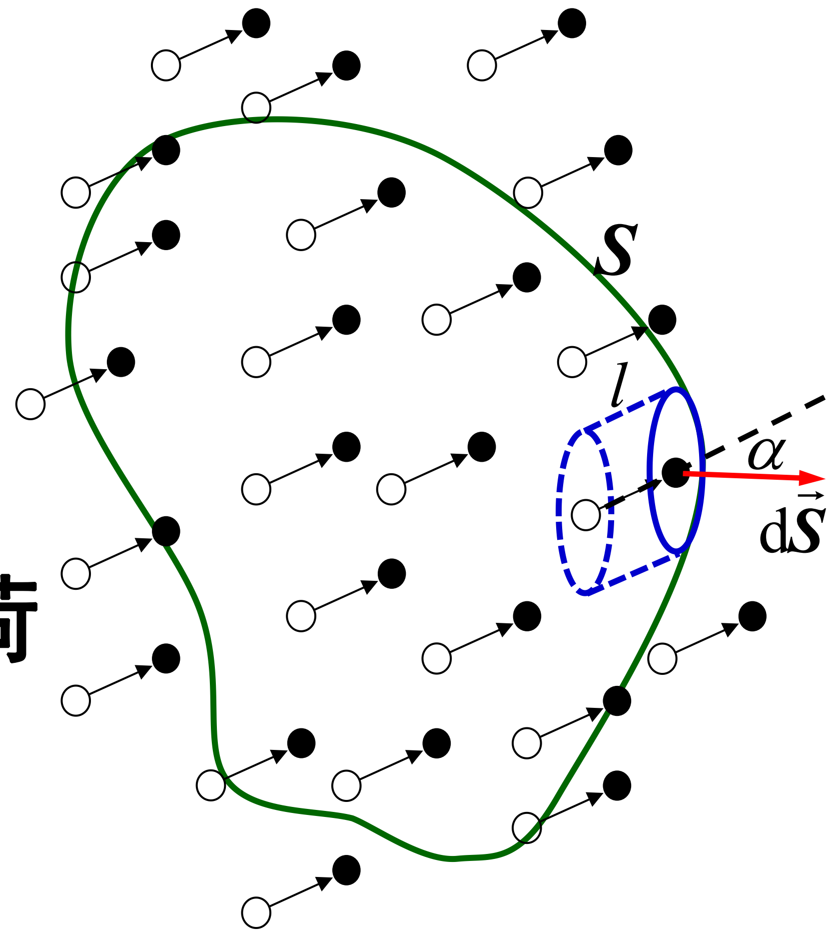
一、极化强度

$$\vec{P}=\frac{\sum\vec{p}_i}{\Delta V}$$

对于均匀极化的电介质:

$$\vec{P}=n\vec{p}=nq\vec{l}$$

二、极化强度与极化电荷



dV的体积: $\mathrm{d}V=l\mathrm{d}S\cos\alpha$

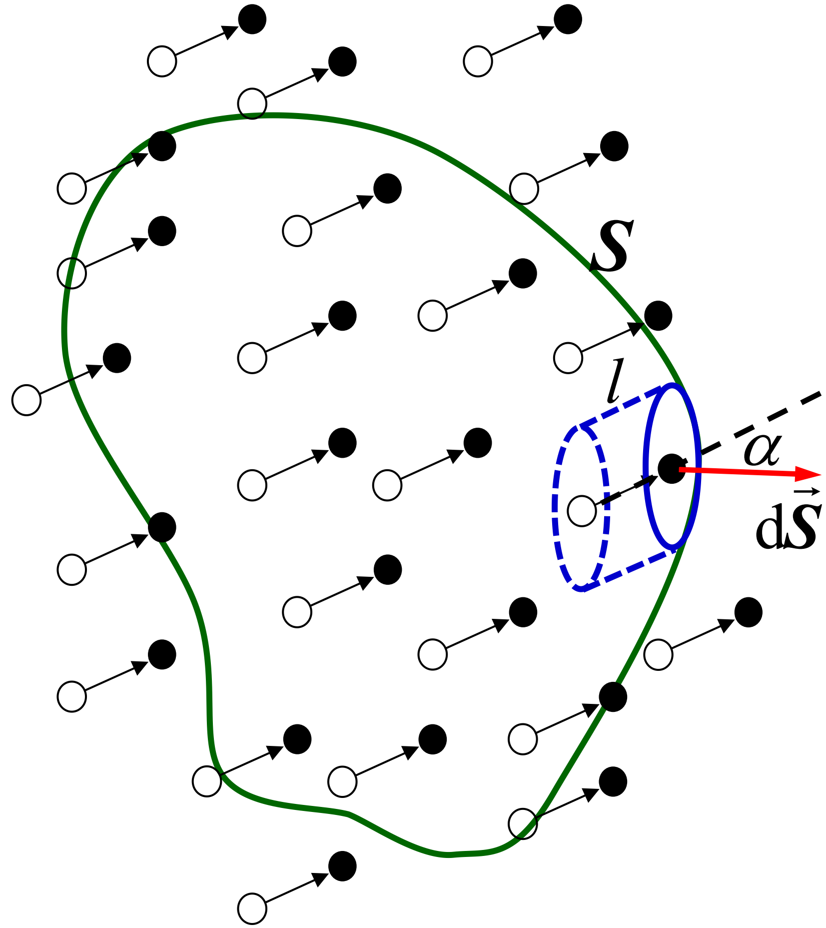
dV的体积内的分子数:

$$n\mathrm{d}V=nl\mathrm{d}S\cos\alpha$$

正电荷的量值：

$$\mathrm{d}Q = nq\mathrm{d}V = nql\mathrm{d}S\cos\alpha = \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \vec{P}\cdot\vec{e}_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S$$



dV内有净的等量异号电荷$-\mathrm{d}Q$

在整个闭合曲面S所包围的体积V中，**体束缚电荷**q'为

$$q' = \oiiint_V -\mathrm{d}Q = -\oiint_S \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

面束缚电荷密度

$$\sigma' = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S} = \vec{P}\cdot\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

表明：极化的程度越高$\vec{P}\uparrow$，电介质表面的束缚电荷面密度σ'越大

6.3.3 电介质的极化规律

当极化达到稳定后，**实验表明：**在各向同性的线性电介质内，当场强不太大时，有

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

χ_e —介质的**电极化率**

$\vec{E}$ 电介质中的**总电场强度**，既包括**外加电场** $\vec{E}_0$，也包括极化电荷所产生的**附加电场** $\vec{E}'$。

$\vec{P}$、σ'、$\vec{E}'$和$\vec{E}$ 这些量是彼此依赖、相互制约的.

6.3.4 有电介质存在时的高斯定律

有介质时，原**真空中的高斯定理**仍成立

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_0 + q')$$

S内电荷(自由，束缚)

$$q' = \iiint_V -dQ = -\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E}\cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = q_0$$

$$\oint_S \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)\cdot d\vec{S} = q_0$$

电位移矢量 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

有介质时的高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_i q_{0i}$$

S内自由电荷

均匀各相同性介质

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}(1+\chi_e)$$

均匀各相同性介质

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}(1 + \chi_e)$$

令 $\varepsilon_r = (1 + \chi_e)$ 为**相对介电常量**（相对电容率）

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ 为**介电常量**

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

对于**真空** $\chi_e = 0$ $\varepsilon_r = 1$ $\varepsilon = \varepsilon_0$ 则 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

有介质时的高斯定理 $\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_i q_{0i}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

注意

有介质时先求 $\boxed{\vec{D} \to \vec{E} \to \varphi, U}$

如果要求极化电荷 $\boxed{\vec{E} \to P \to \sigma'}$

$$\left.\begin{aligned} P &= (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E \\ \sigma' &= P \end{aligned}\right\} \sigma' = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E$$

例1 把一块相对电容率$\varepsilon_r = 3$的电介质，放在极板间相距$d = 1\text{mm}$ 的平行平板电容器的两极板之间。放入之前，两极板的电势差是1000V。试求两极板间电介质内的电场强度E，电极化强度P，极板和电介质的电荷面密度，电介质内的电位移D。

解： $$E_0 = U / d = \frac{1000}{10^{-3}} \text{V} \cdot \text{m}^{-1} = 10^6 \text{V} \cdot \text{m}^{-1} = 10^3 \text{kV} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$E = E_0 / \varepsilon_r = 3.33 \times 10^2 \text{kV} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$P = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E = 5.89 \times 10^{-6} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 E_0 = 8.85 \times 10^{-6} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$$

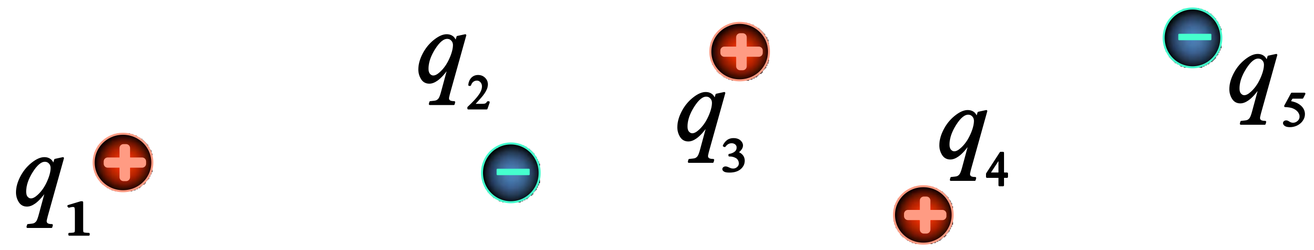
$$\sigma' = P = 5.89 \times 10^{-6} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon_0 E_0 = \sigma_0 = 8.85 \times 10^{-6} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$$

§ 6.5

带电体系的静电能

6.5.1 点电荷系的相互作用能



设 n 个静止电荷所组成的电荷系，将各电荷从彼此相距无限远搬运到现有位置时，外力克服它们之间的静电力所做的功—— 电荷系的静电相互作用能（互能）

势能零点

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i\varphi_i$$

其中：φ_i 为 q_i 所在处由 q_i 以外的其他电荷产生的电势

推导

1. **最简单**的情形：两个点电荷q和Q

点电荷 q 在 Q 的电场中的电势能为

$$W=q\varphi_Q=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}=Q\varphi_q$$

同样表示了 Q 在 q 的电场中的电势能

也就是由 Q 和 q 组成的电荷系统的静电能

可写为：

$$W=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r}\right)=\frac{1}{2}(q\varphi_q+Q\varphi_q)$$

2. 空间有*n*个点电荷存在的情形 **归纳法**

当只有q_1和q_2两个电荷时，静电能为

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

引入第三个电荷

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \boxed{\left(\frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right)}$$

引入第三个点电荷所引起的静电能的改变

$$W=\frac{1}{2}q_1\left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}q_2\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{31}}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{32}}\right)$$

$$W=\frac{1}{2}q_1(\varphi_{21}+\varphi_{31})+\frac{1}{2}q_2(\varphi_{12}+\varphi_{32})+\frac{1}{2}q_3(\varphi_{13}+\varphi_{23})$$

$$=\frac{1}{2}q_1\varphi_1+\frac{1}{2}q_2\varphi_2+\frac{1}{2}q_3\varphi_3$$

引入第四个电荷

$$W=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}+(\frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}+\frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}})$$

$$+\boxed{(\frac{q_1q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_{14}}+\frac{q_2q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_{24}}+\frac{q_3q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_{34}})}$$

引入第四个点电荷所引起的静电能的改变

重复以上过程，可得n个点电荷组成的系统的静电能

$$W=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}q_i\varphi_i$$

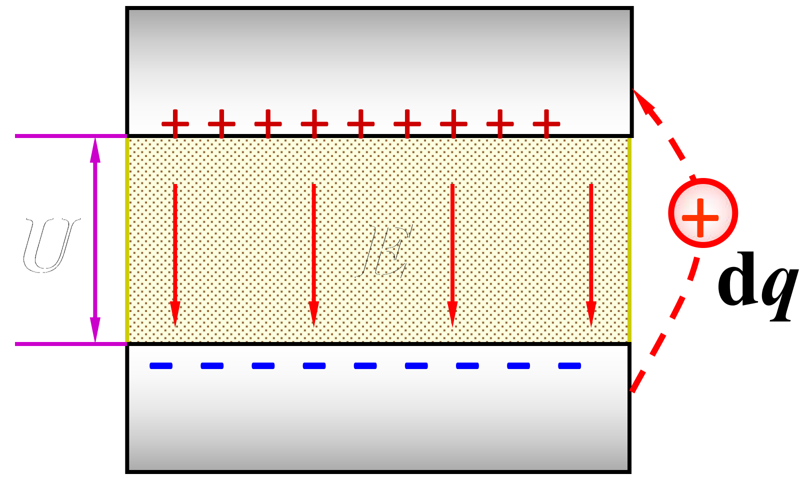
6.5.2 电容器的电能

$$\mathrm{d}A = U\mathrm{d}q = \frac{q}{C}\mathrm{d}q$$

$$A = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}$$

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$A = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$



电容器贮存的电能 $W_\mathrm{e} = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{1}{2}QU = \dfrac{1}{2}CU^2$

6.5.3　电荷连续分布时的静电能

电荷元系统

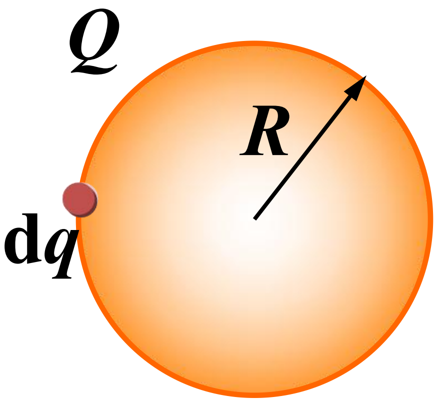
该带电体的静电能（自能）

$$W=\frac{1}{2}\int_q \varphi \mathrm{d}q$$

例1　一均匀带电球面（R，Q），其静电能：

$$W=\frac{1}{2}\int_q \varphi \mathrm{d}q=\frac{1}{2}\int_q \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\mathrm{d}q$$

$$=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\int_q \mathrm{d}q=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$



6.5.4　静电场的能量

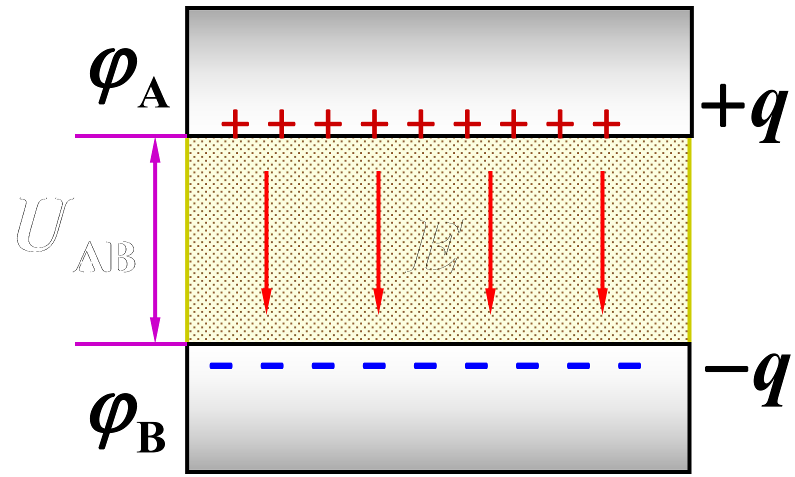
系统的静电能为：

$$W_e = \frac{1}{2}q\varphi_A - \frac{1}{2}q\varphi_B$$

$$= \frac{1}{2}qU_{AB} = \frac{1}{2}CU_{AB}^2$$

$$= \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2} V = w_e V$$



$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S} \qquad V = Sd$$

电场能量密度

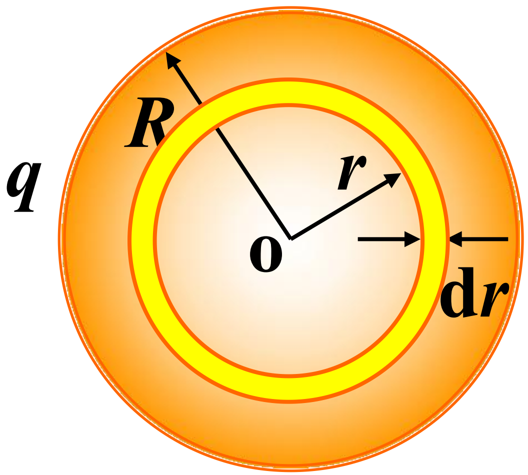
$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

一个带电系统的电场的总能量：

$$W=\int_V w_e \mathrm{d}V=\int_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\mathrm{d}V$$

用场的概念表示的带电系统的能量

例1 真空中一个均匀带电球体 (R，q)，试利用电场能量公式求此带电系统的静电能。



$$\mathrm{d}V=4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$W=\int_V w_e \mathrm{d}V=\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{R}\frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2}4\pi r^2\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}\frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2}4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$W=\int_0^R\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0R^3}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r+\int_R^\infty\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0R}$$