CH 11　振 动

提纲

- **11.1 简谐振动**
- **11.2 阻尼振动**
- **11.3 受迫振动和共振**

振动

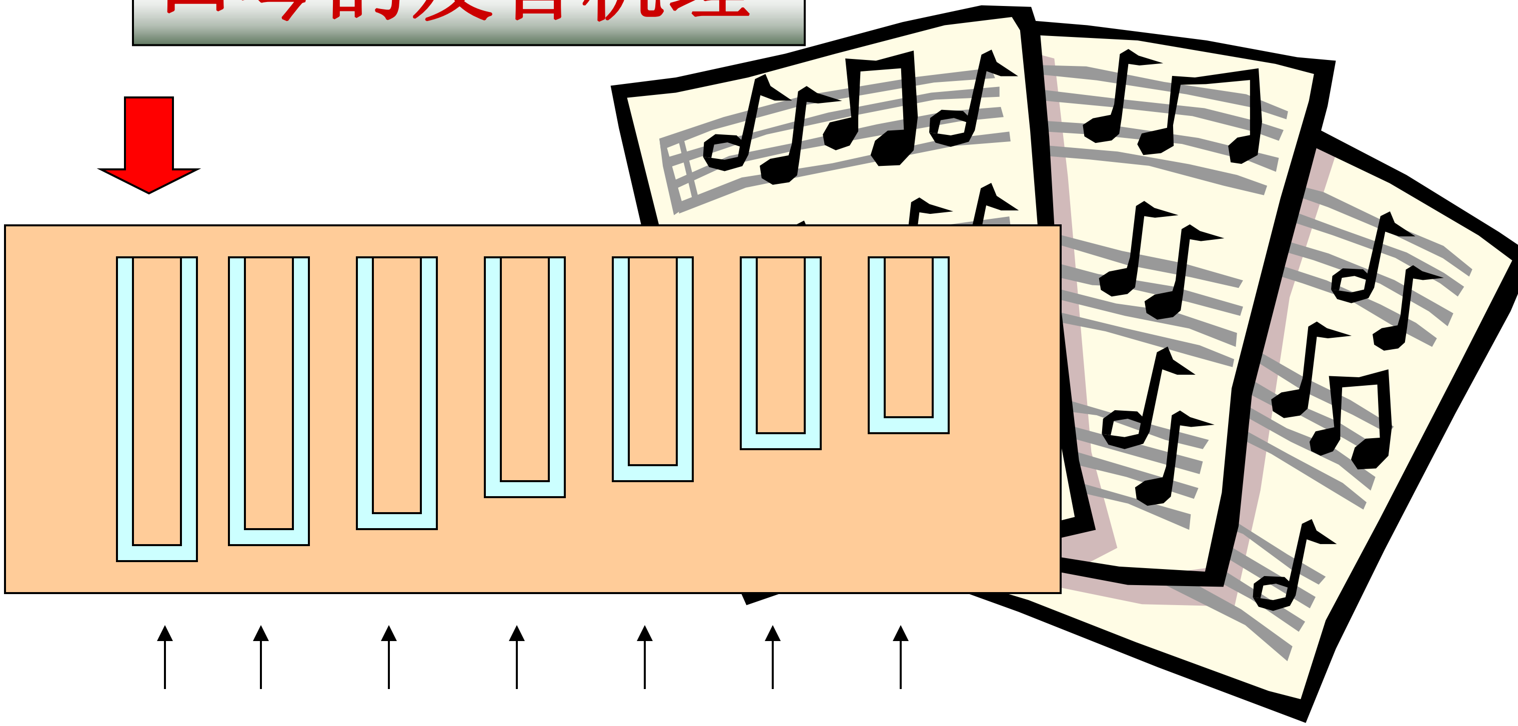
广义上振动：在时间上具有重复性或者往复性的一种运动

物理上，描述物质运动状态的物理量，在某一数值的周期性变化

机 械 振 动

- 物体在同一路径的一定位置附近作重复往返运动称为机械振动
- 如心脏的跳动，钟摆，乐器， 地震等

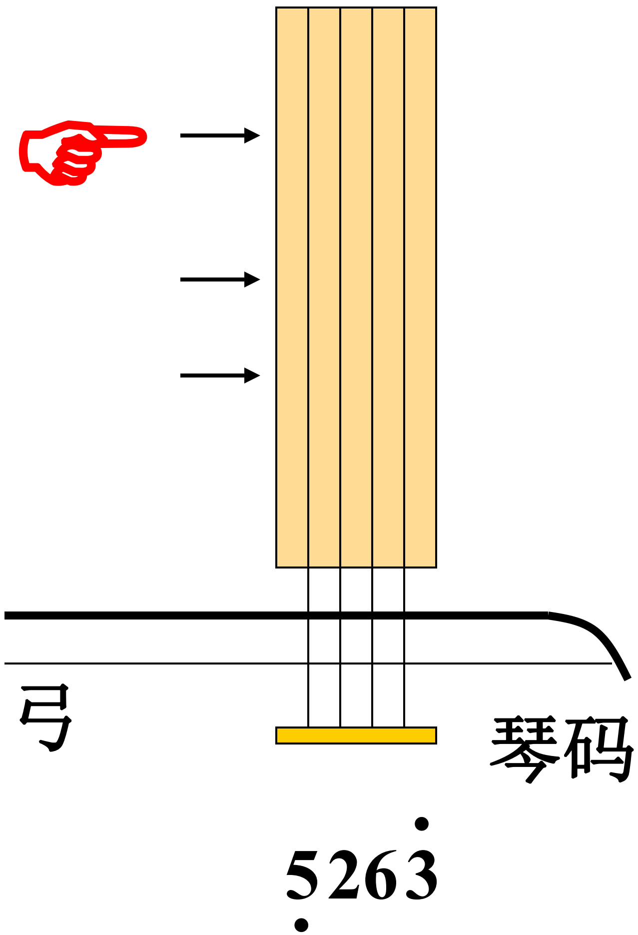
口琴的发音机理



？ 1 2 3 4 5 6 7 ？

7 6 5 4 3 2 1

提琴弦线的振动



●● 机械振动分类

按振动规律分：简谐、非简谐、随机振动

按产生振动原因分：自由、受迫、自激、参变振动

按自由度分：单自由度系统、多自由度系统振动

按振动位移分：角振动、线振动

按系统参数特征分：线性、非线性振动

其中简谐振动是最基本的，存在于许多物理现象中

复杂的振动都可以分解为一些简谐振动的叠加

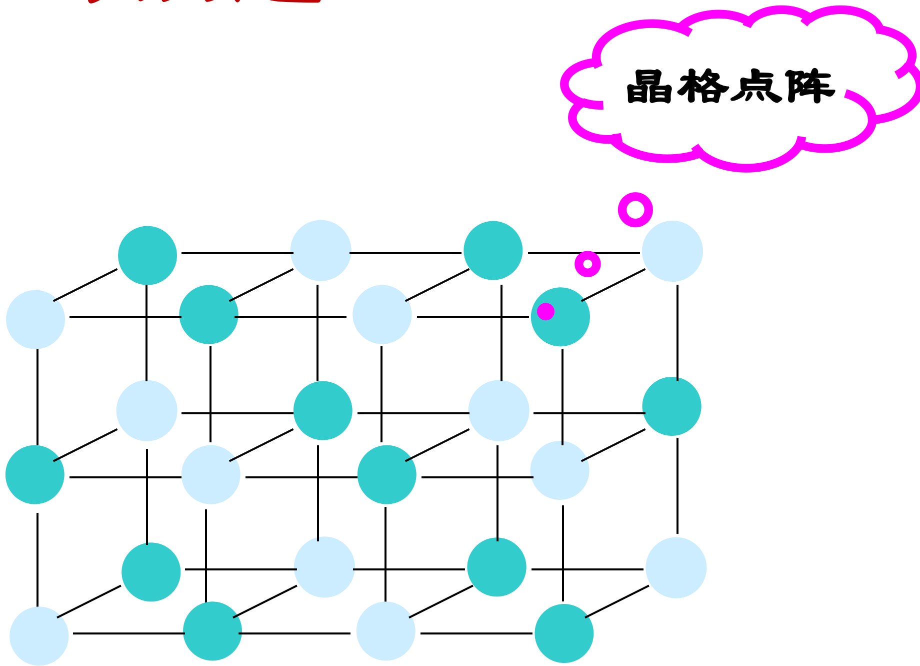
§1简谐振动

- 简谐振动的描述
- 简谐振动的合成

简谐振动的描述

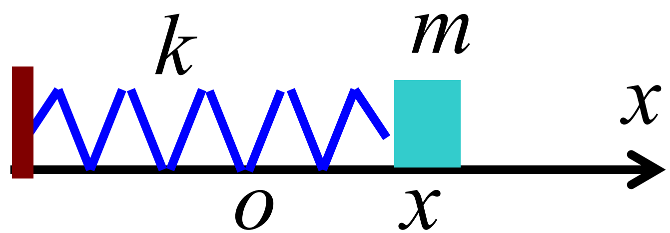
一、简谐振动的特征

任何一个稍微偏离平衡状态的稳定系统，都可看成简谐振子。对于物理学中的许多问题，谐振子都可以作为一个近似的或相当精确的模型



简谐振动的动力学方程

$$m\ddot{x} = -kx$$ 弹性力



令 $k = m\omega_0^2$ → $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

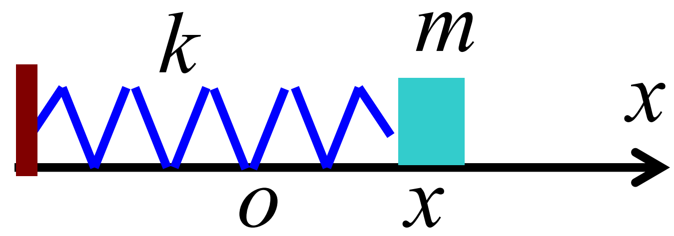
$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

其解：$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

质点所受的外力与对平衡位置的位移成正比且反向，或质点的势能与位移（角位移）的平方成正比的运动，就是简谐振动。这种振动系统称为谐振子。

简谐振动的运动学描述

以弹簧振子为例



系统位移的运动规律

$$x(t) = A\cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_o)$$

其中ω_0由系统自身决定

结论：

简谐振动——凡是以时间的正弦或余弦函数表示的运动都是简谐振动

简谐振动的周期和频率、振幅

$$A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0+2\pi n)$$
$$=A\cos[\omega_0(t+\frac{2\pi}{\omega_0}n)+\varphi_0]$$
$$=A\cos[\omega_0(t+nT)+\varphi_0]$$

$T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 叫做**周期**，每隔T时间运动完全重复

$\nu=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega_0}{2\pi}$ 称为**振动频率**，单位时间内振动的次数

$\omega_o=\dfrac{2\pi}{T}=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 称为角频率（或圆频率）
即单位时间内相位的变化值

简谐振动的相位、初相位、振幅

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

A --振幅　振动中最大位移量　　ω_0 角频率

$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ 相位　　φ_0 初相位

相同的运动状态对应相位差为 2π 的整数倍

简谐振动除用余弦函数形式表达外还可以用正弦函数

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2)$$

$$= A\sin(\omega_0 t + \varphi_0')$$

简谐振动的速度

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

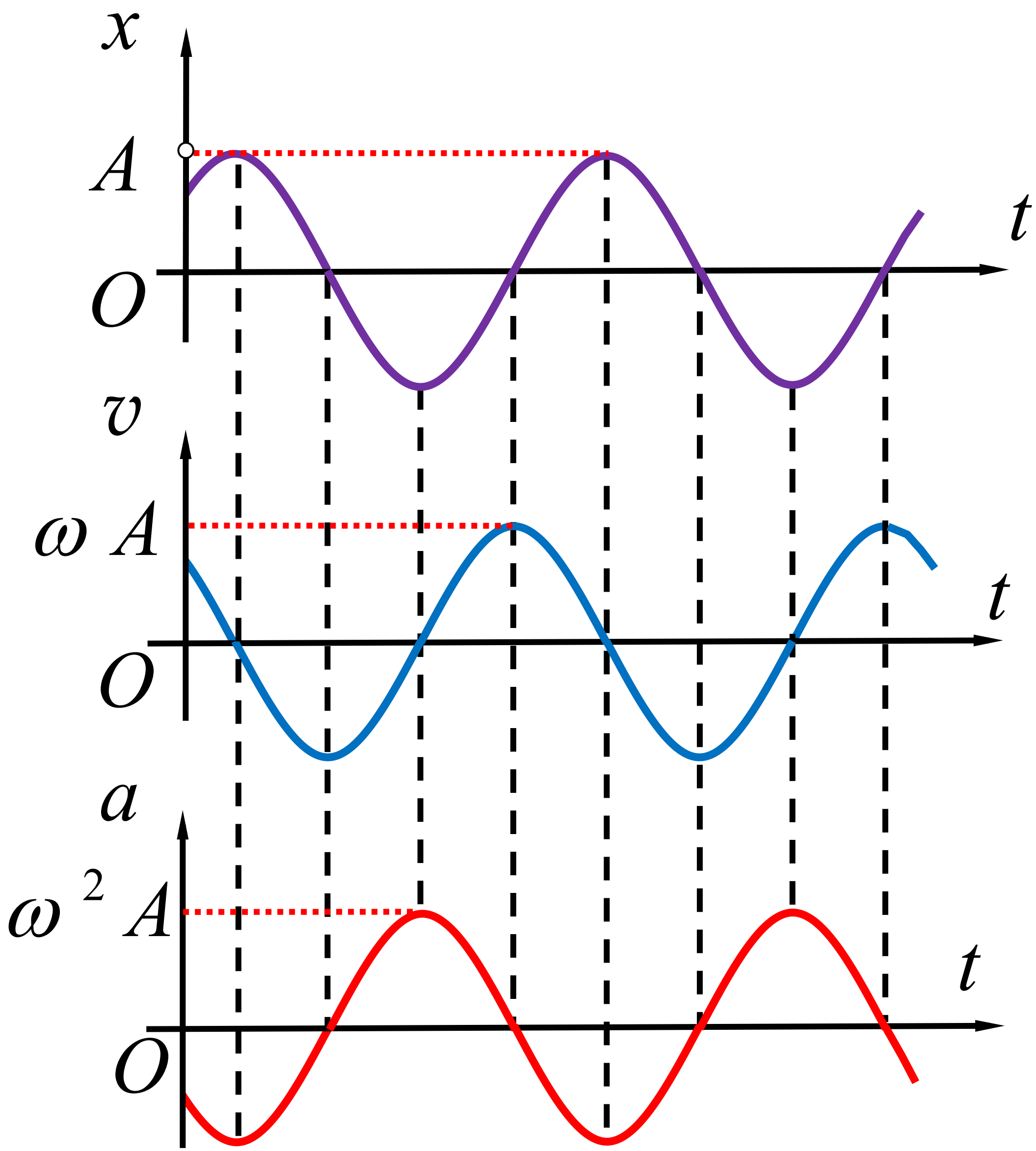
简谐振动的加速度

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

简谐振动的加速度为变加速度

位移与加速度反相

$$a = -x\omega^2$$


x
A
O
t
v
ω A
O
t
a
ω 2 A
O
t

由初始状态确定 A, φ_0

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$x_0 = A\cos\varphi_0 \qquad v_0 = -\omega A\sin\varphi_0$$

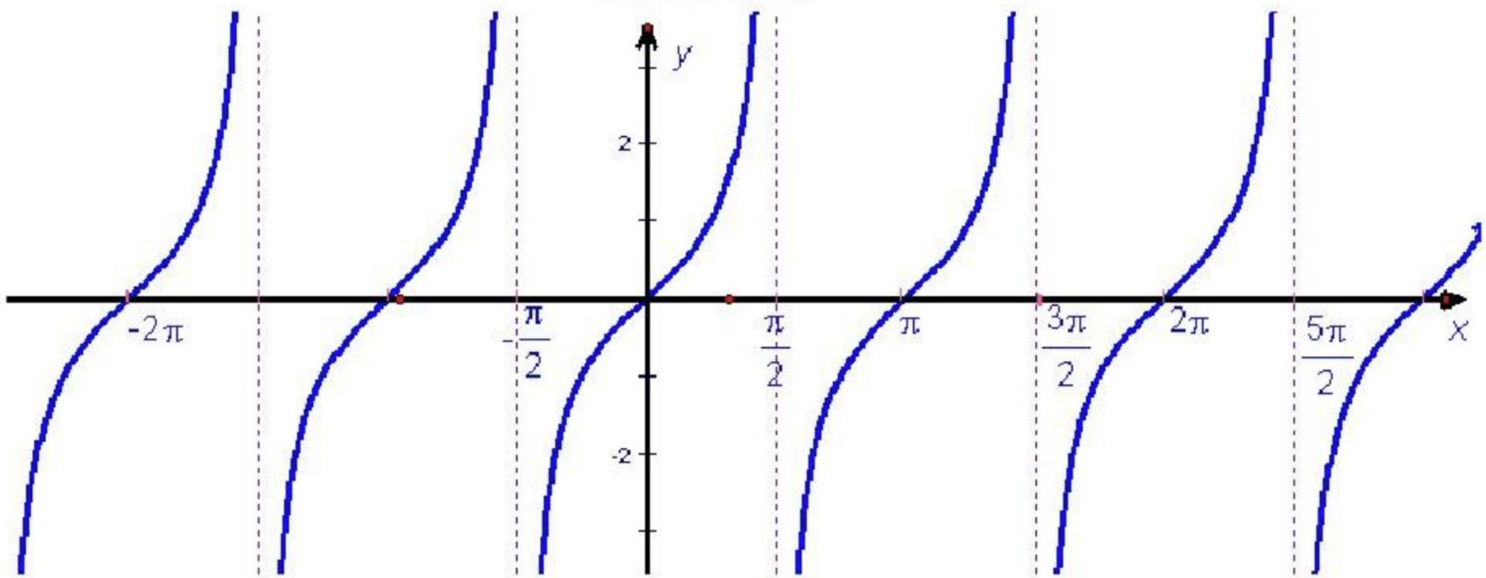
$$A = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad \tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

φ_0要由 v_0的方向唯一确定

φ_0 要由 v_0 的方向唯一确定

$$\tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

正切曲线



讨论

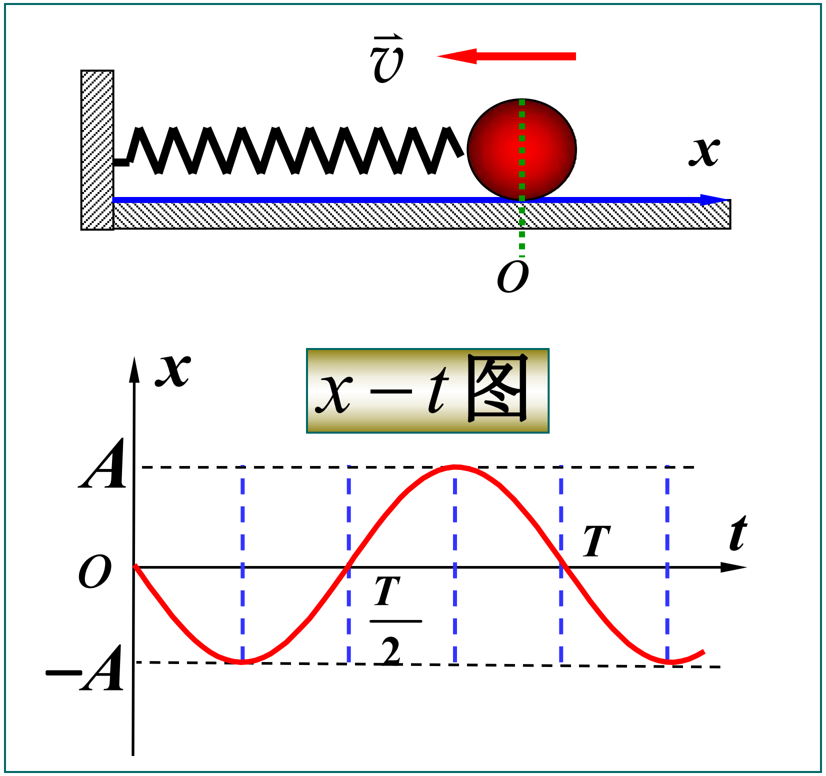
已知 $t=0, x=0, v_0<0$ 求 φ

$$0=A\cos\varphi \Rightarrow \varphi=\pm\frac{\pi}{2}$$

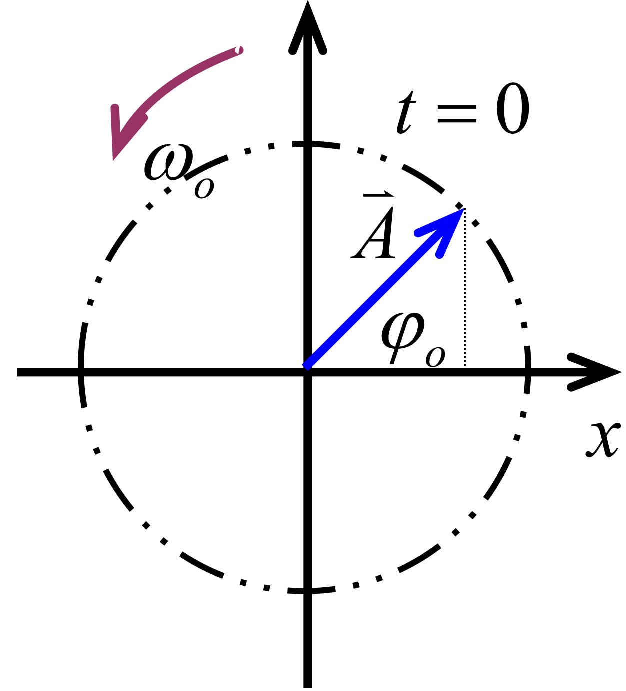
$$\because v_0=-A\omega\sin\varphi<0$$

$$\therefore \sin\varphi>0 \text{ 取 } \varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$x=A\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$$



二、简谐振动的旋转矢量表示法



以O点起始点作一矢量 $\vec{A}$

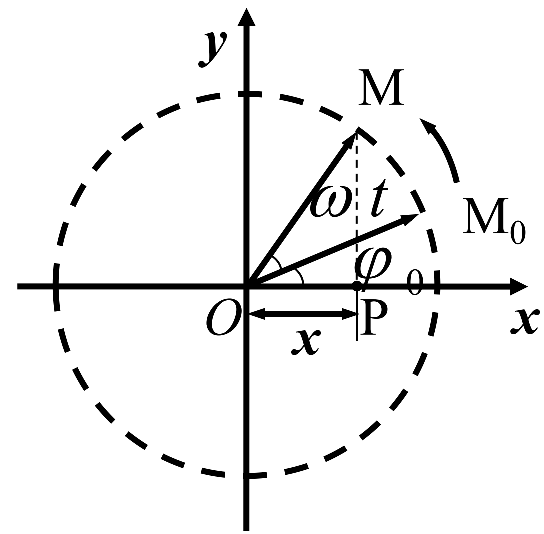
旋转矢量，或振幅矢量

长度等于简谐振动的振幅 A

矢量在Oxy平面内绕O点逆时针匀速旋转

其角速度与简谐振动的角频率 ω

t时刻，旋转矢量在x轴上的投影为



$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

对应：旋转矢量端点M在x轴上的投影

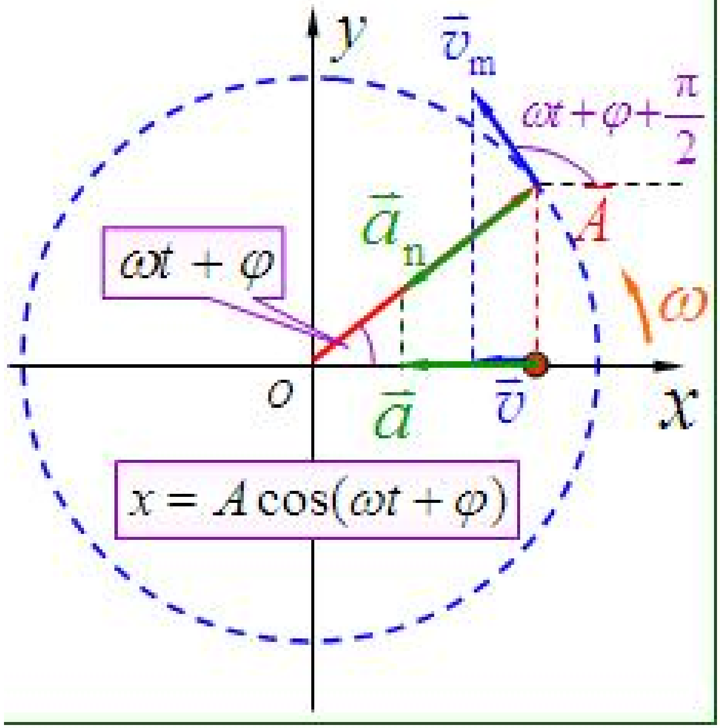
P在x轴上以O为原点简谐振动

M点的速率为

$$v_{\mathrm{M}} = A\omega$$

P点的速率为

$$v_{\mathrm{P}} = -\omega A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



M点的加速度为向心加速度

$$a_{\mathrm{M}} = A\omega^2$$

P点的加速度为

$$a_{\mathrm{P}} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$

讨论

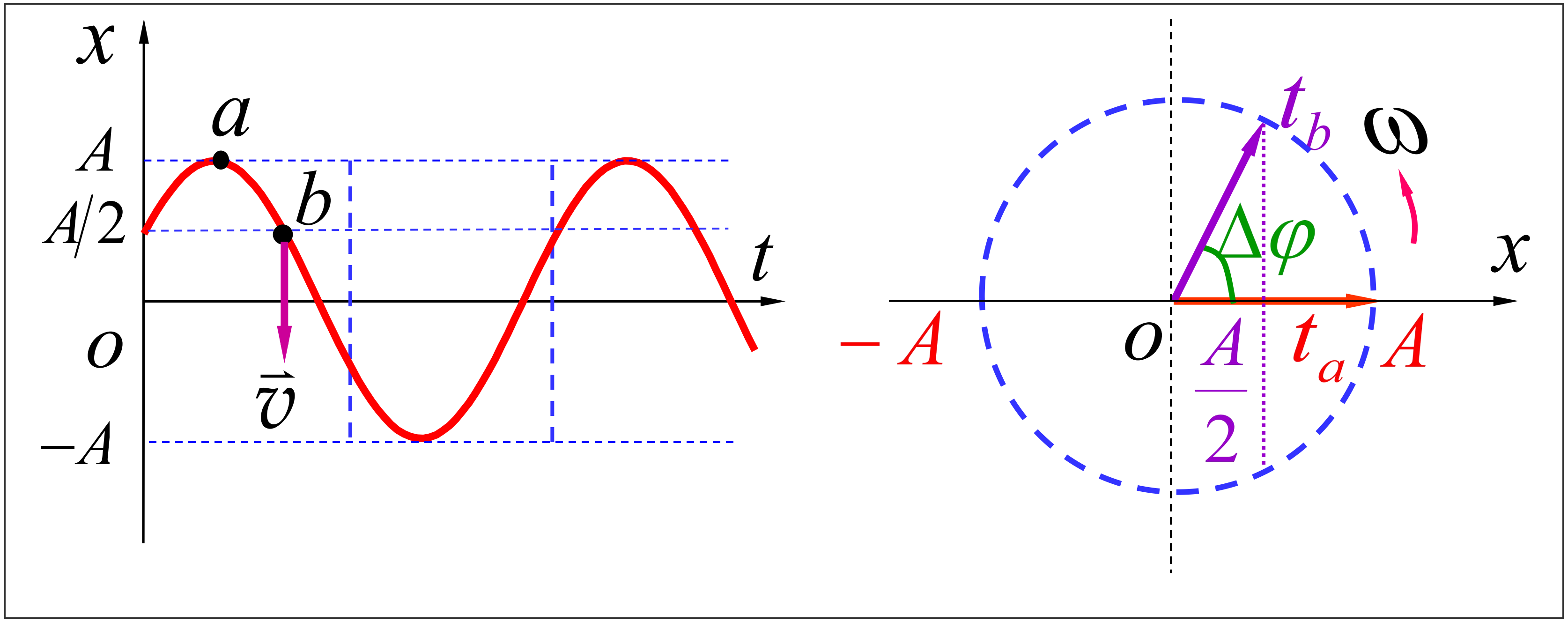
➤ 相位差：表示两个相位之差

（1）对同一简谐运动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间.

$$x_1 = A\cos(\omega t_1 + \varphi) \qquad x_2 = A\cos(\omega t_2 + \varphi)$$

$$\Delta\varphi = (\omega t_2 + \varphi) - (\omega t_1 + \varphi)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$



$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \qquad \Delta t = \frac{\pi/3}{2\pi}T = \frac{1}{6}T$$

（2）对于两个同频率的简谐运动，相位差表示它们间步调上的差异（解决振动合成问题）.

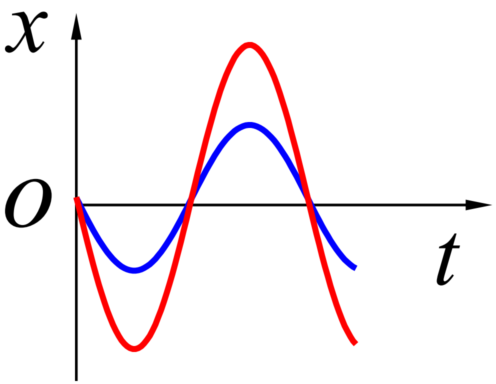
$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \quad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1)$$

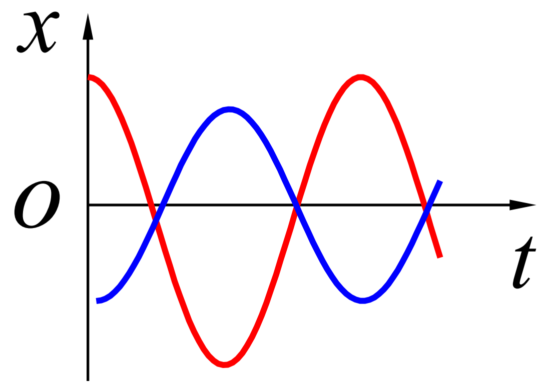
$$\boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

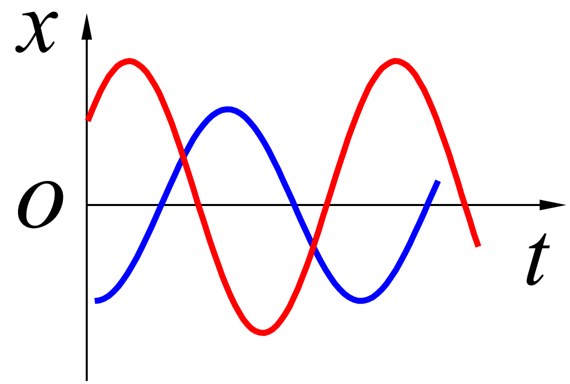
$\Delta\varphi = 0$ 同步



$\Delta\varphi = \pm\pi$ 反相



$\Delta\varphi$为其它$\begin{cases} \text{超前} \\ \text{落后} \end{cases}$



两个同频率简谐振动的相位差

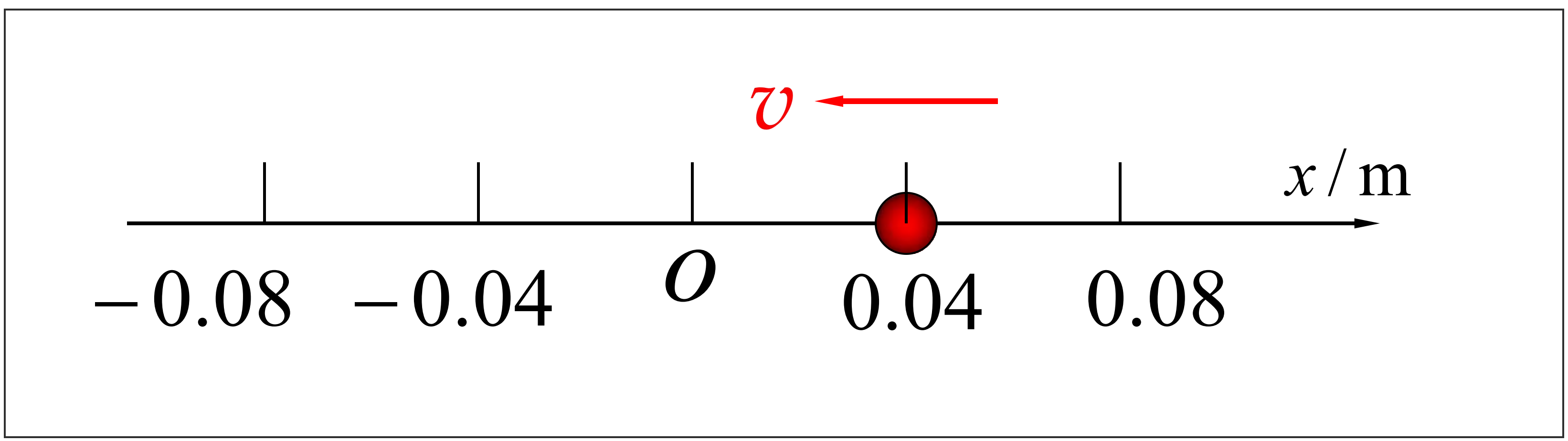
$$(\omega_0 t+\varphi_{20})-(\omega_0 t+\varphi_{10})=\varphi_{20}-\varphi_{10}$$

$\varphi_{20}-\varphi_{10}$

>0	φ_{20}超前φ_{10}
<0	φ_{20}落后φ_{10}
（$2n\pm1$）π	反相
$2n\pi$	同相

例　一质量为0.01 kg的物体作简谐运动，其振幅为0.08 m，周期为4 s，起始时刻物体在x=0.04 m处，向ox轴负方向运动（如图）. **试求**

（1）t=1.0 s时，物体所处的位置和所受的力；



已知 $m = 0.01\,\text{kg}, A = 0.08\,\text{m}, T = 4\,\text{s}$

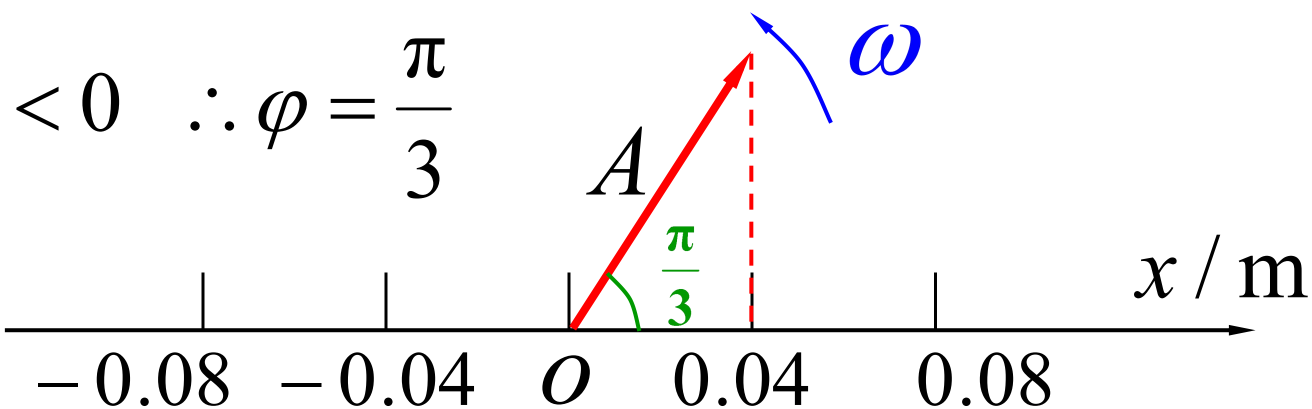
$t = 0, x = 0.04\,\text{m}, v_0 < 0$ 求（1）$t = 1.0\,\text{s}, x, F$

解 $A = 0.08\,\text{m} \quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}\,\text{s}^{-1}$

$t = 0, \quad x = 0.04\ \text{m}$

代入 $x = A\cos(\omega t + \varphi) \Longrightarrow \varphi = \pm\dfrac{\pi}{3}$

$\because v_0 < 0 \quad \therefore \varphi = \dfrac{\pi}{3}$



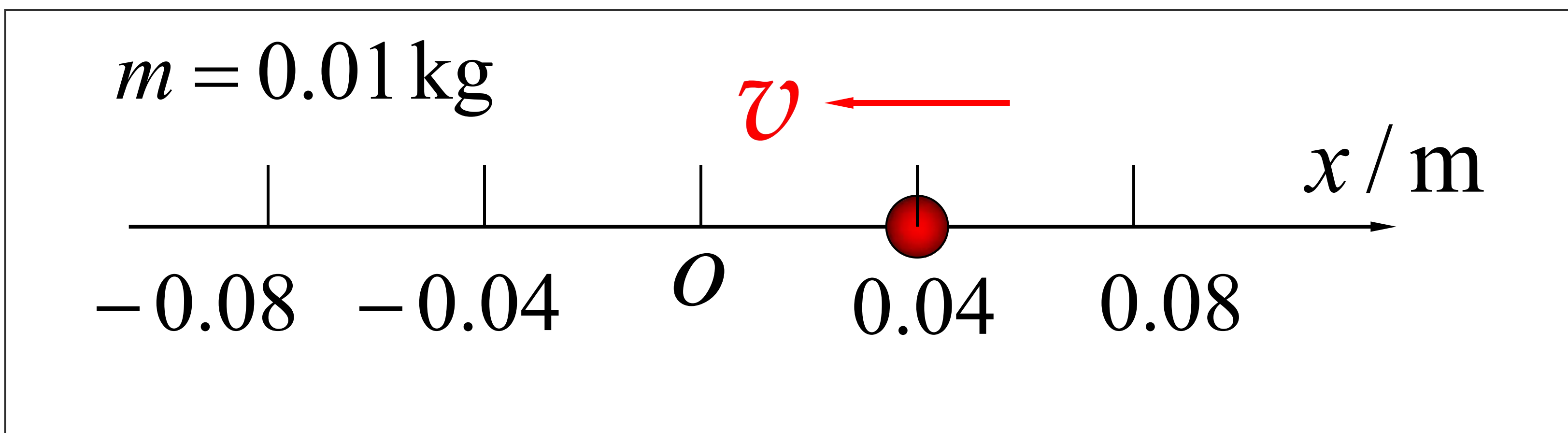
$$\because \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore x = 0.08\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})$$

可求（1）$t = 1.0\,\mathrm{s}, x, F$

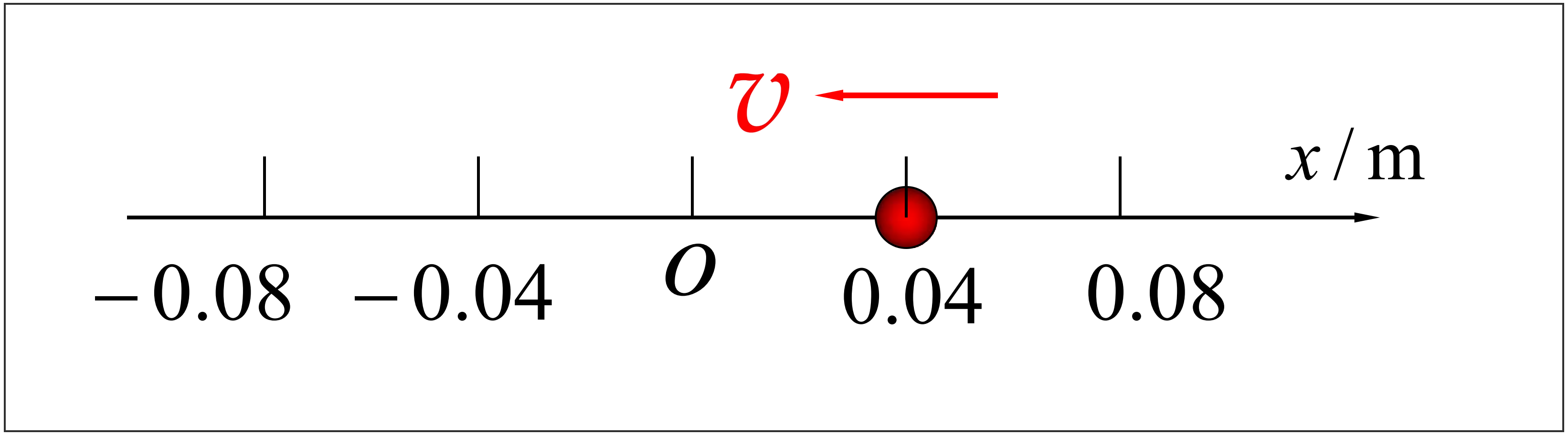
$t = 1.0\,\mathrm{s}$ 代入上式得 $x = -0.069\,\mathrm{m}$

$$F = -kx = -m\omega^2 x = 1.70\times10^{-3}\ \mathrm{N}$$



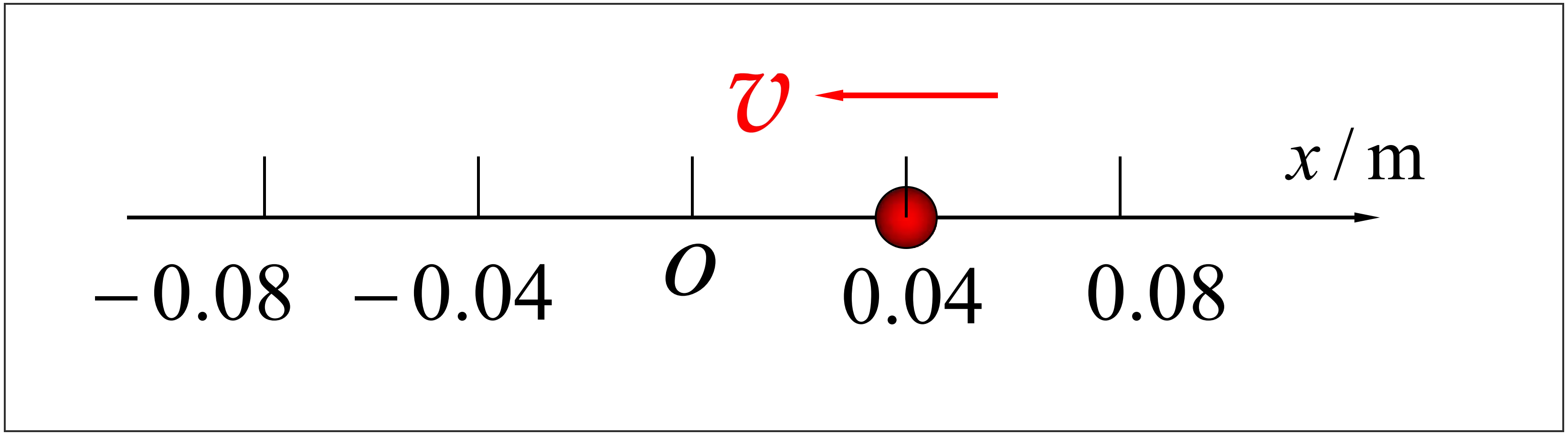
（2）由起始位置运动到x = -0.04 m处所需要的最短时间.

法一 设由起始位置运动到x= -0.04 m处所需要的最短时间为t

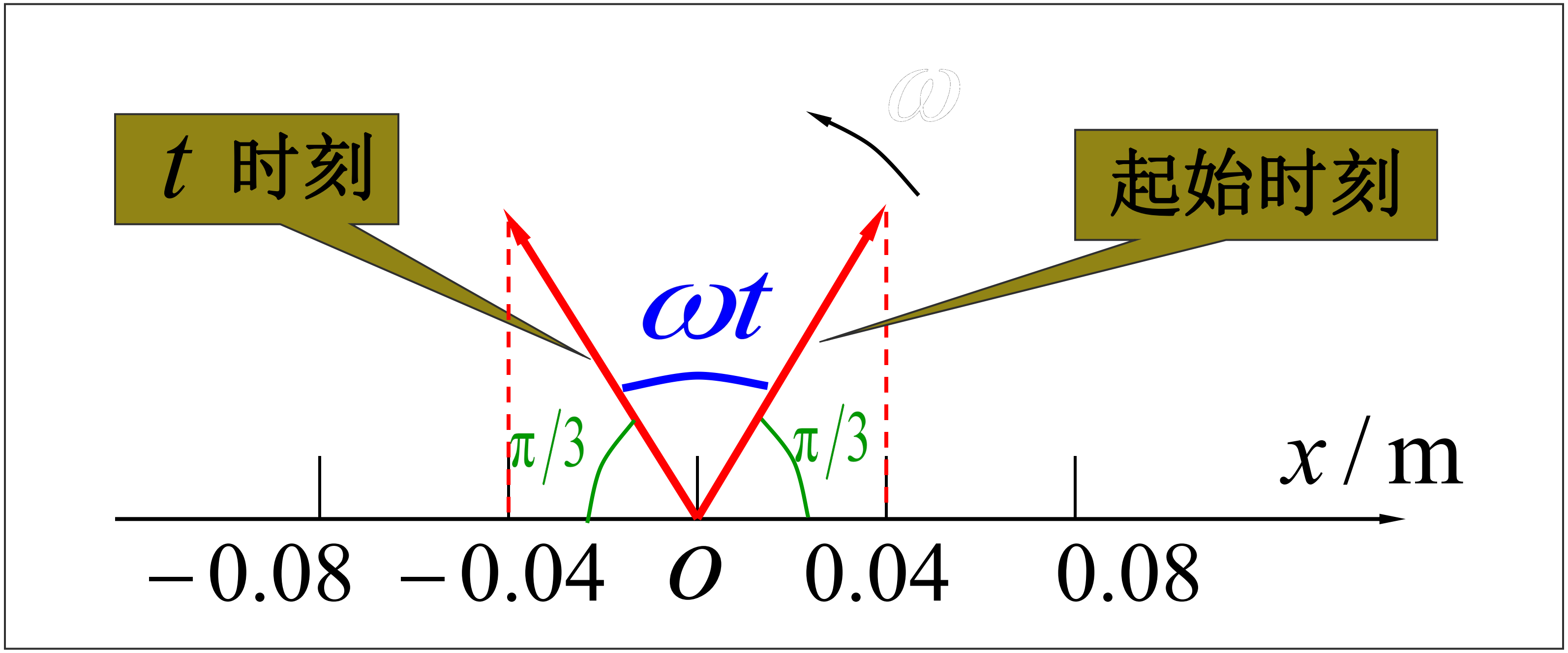


$$x = 0.08\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow -0.04 = 0.08\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$t = \frac{\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}}{\pi/2} = \frac{2}{3} = 0.667\ \mathrm{s}$$



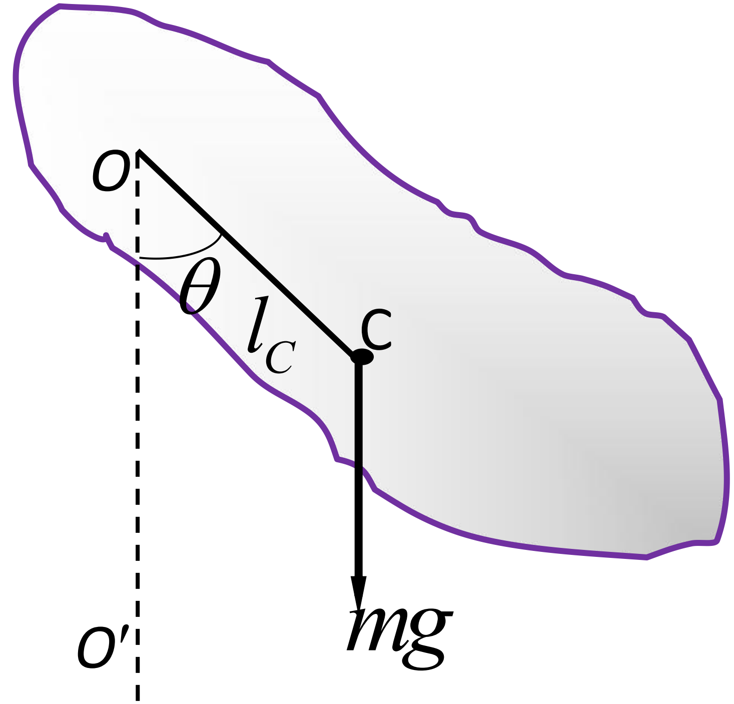
法二



$$\omega t = \frac{\pi}{3} \qquad \omega = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} \qquad t = \frac{2}{3} = 0.667\ \mathrm{s}$$

三、简谐振动的典型问题

- **复摆**



刚体绕过O的水平轴小角度摆动

刚体定轴转动定律

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-mgl_C\sin\theta$$

负号表示：力矩总是使转动回到平衡位置

角度很小 $\sin\theta\sim\theta$

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+mgl_C\theta=0$$

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+mgl_C\theta=0$$

令 $$\omega^2=\frac{mgl_C}{J}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0$$

解得 $$\theta=\theta_0\cos(\omega t+\varphi_0)$$

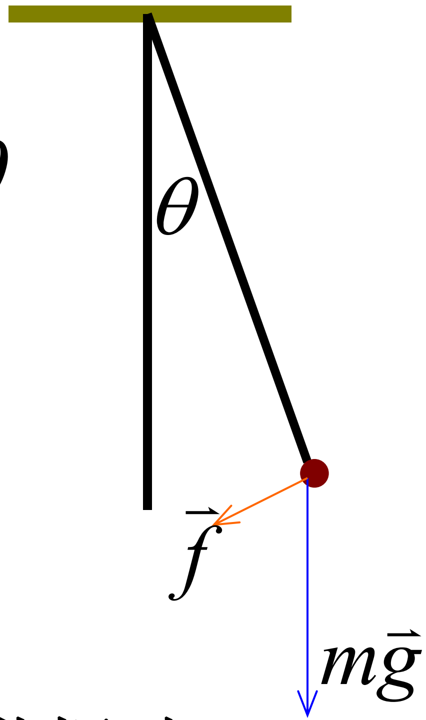
可见—复摆的定轴小角度转动为简谐振动

- **单摆**

转动定律 $$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

当 $\sin\theta \approx \theta$ 时

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$



在角位移很小的时候，单摆的振动是简谐振动

角频率,振动的周期分别为：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

振动的角频率、周期完全由振动系统本身来决定。

总结：　　简谐运动的描述和特征

（1）物体受线性回复力作用 $F = -kx$

平衡位置 $x = 0$

（2）简谐运动的动力学描述 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$

（3）简谐运动的运动学描述

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$　　$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

（4）加速度与位移成正比而方向相反

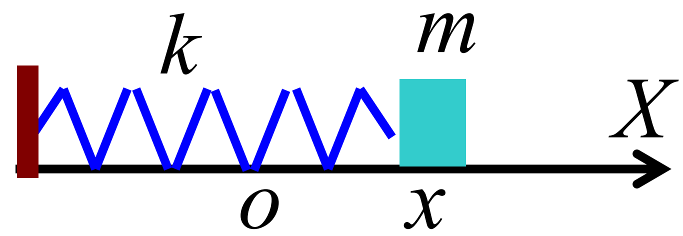
$a = -\omega^2 x$

弹簧振子 $\omega = \sqrt{k/m}$

单摆 $\omega = \sqrt{g/l}$

复摆 $\omega = \sqrt{mgl/J}$

简谐振动的能量



- 简谐振动的动能：

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$$

以水平的弹簧振子为例

$$\omega_0=\sqrt{k/m}$$

$$E_k=\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)$$

$$=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)$$

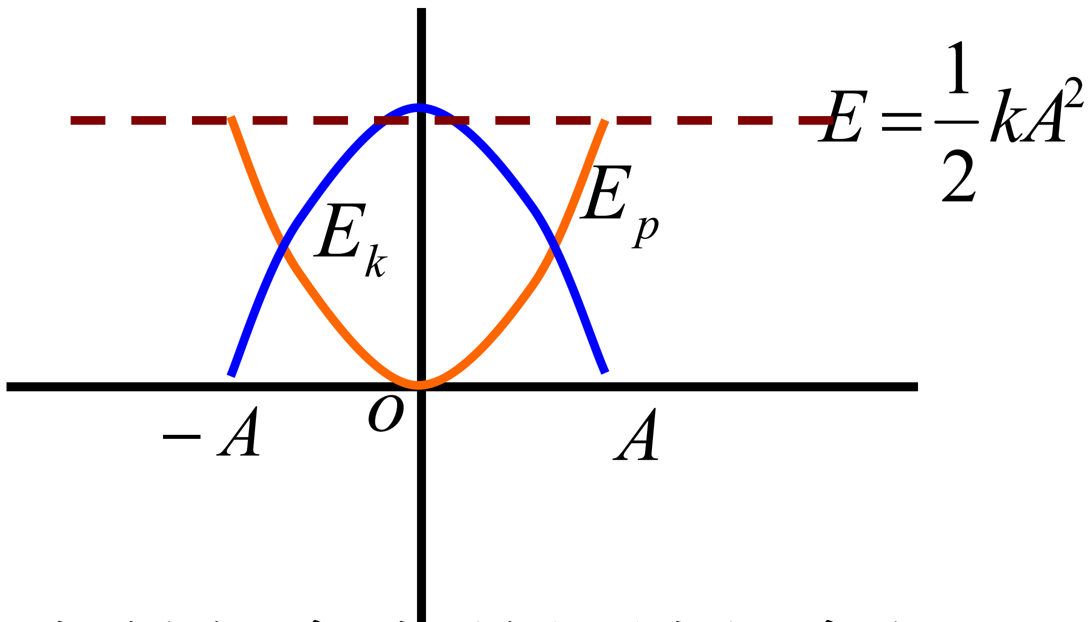
- 简谐振动的势能：

$$f=-kx=\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$$

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0);$$

• 简谐振动的总能量

$$E = E_k + E_p$$
$$= \frac{1}{2}kA^2[\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{1}{2}kA^2$$



弹性力是保守力总机械能守恒，即总能量不随时间变化

动能的时间平均值:

$$\overline{E_k}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)dt$$

$$=\frac{kA^2}{2T\omega_0}\int_{\varphi_0}^{2\pi+\varphi_0}\sin^2 x\cdot dx=\frac{1}{4}kA^2$$

势能的时间平均值:

$$\overline{E_P}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)dt$$

$$=\frac{kA^2}{2T\omega_0}\int_{\varphi_0}^{2\pi+\varphi_0}\cos^2 x\cdot dx=\frac{1}{4}kA^2$$

结论：

* 即弹簧振子的动能和势能的平均值相等，且等于总机械能的一半

* 任一简谐振动总能量与振幅的平方成正比

* 振幅不仅给出简谐振动运动的范围，而且还反映了振动系统总能量的大小及振动的强度。

这些结论同样适用于任何简谐振动

推导

能量守恒 $\longrightarrow$ 简谐运动方程

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{常量}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=0$$

$$m\cancel{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kx\cancel{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0$$

例 质量为$0.10\ \mathrm{kg}$的物体，以振幅$1.0\times10^{-2}\ \mathrm{m}$作简谐运动，其最大加速度为$4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，**求：**

（1） 振动的周期；

（2） 通过平衡位置的动能；

（3） 总能量；

（4） 物体在何处其动能和势能相等？

已知 $m = 0.10\ \mathrm{kg}$，$A = 1.0\times10^{-2}\ \mathrm{m}$，

$a_{\max} = 4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 求:(1) T；(2) $E_{\mathrm{k,max}}$

解（1）$a_{\max} = A\omega^2 \quad \omega = \sqrt{\dfrac{a_{\max}}{A}} = 20\ \mathrm{s^{-1}}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.314\ \mathrm{s}$$

（2）$E_{\mathrm{k,max}} = \dfrac{1}{2}mv_{\max}^2 = \dfrac{1}{2}m\omega^2A^2$

$$= 2.0\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

已知 $m = 0.10\,\text{kg}$，$A = 1.0 \times 10^{-2}\ \text{m}$，

$a_{\max} = 4.0\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ 求: (3) E_{sum} ；

(4) 何处动势能相等?

解（3）$E_{\text{sum}} = E_{\text{k,max}} = 2.0 \times 10^{-3}\ \text{J}$

（4）$E_{\text{k}} = E_{\text{p}}$ 时 $E_{\text{p}} = 1.0 \times 10^{-3}\ \text{J}$

由 $E_{\text{p}} = \dfrac{1}{2} k x^2 = \dfrac{1}{2} m \omega^2 x^2$

$$x^2 = \frac{2E_{\text{p}}}{m\omega^2} = 0.5 \times 10^{-4}\ \text{m}^2 \qquad x = \pm 0.707\ \text{cm}$$

简谐振动的合成

一、同方向、同频率简谐振动的合成

结论：

代数方法：设两个振动具有相同频率，同一直线上运动，有不同的振幅和初相位

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t - (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t$$

$$= A\cos\varphi\cdot\cos\omega t - A\sin\varphi\cdot\sin\omega t$$

$$= A\cos(\omega t + \varphi)$$

合振幅

仍然是同频率的简谐振动

式中：

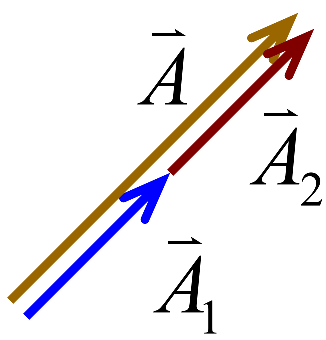
$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\varphi=arctg\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

可见，当

$$\varphi_2-\varphi_1=2k\pi \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$A=A_1+A_2$$



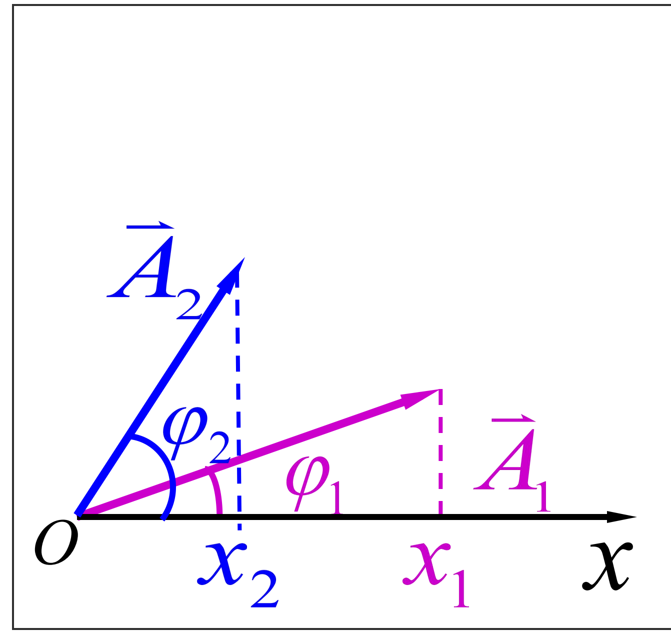
合振幅最大

几何方法

设一质点同时参与两独立的同方向、同频率的简谐振动：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

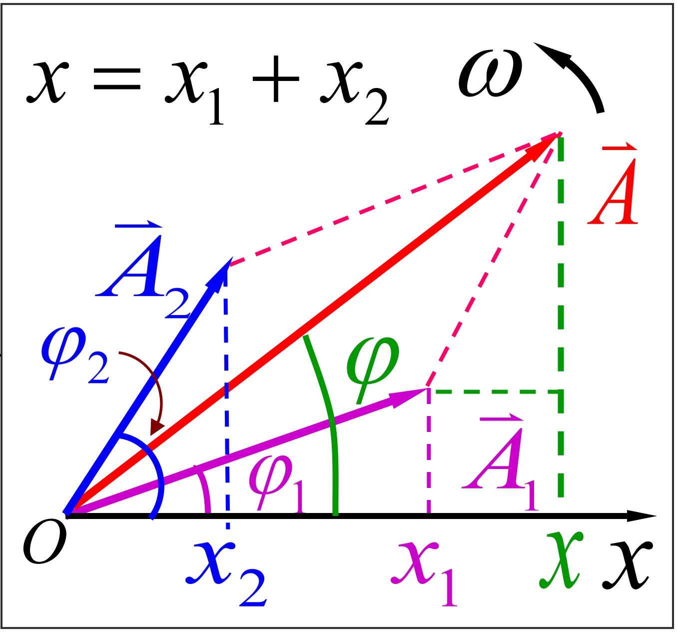
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$



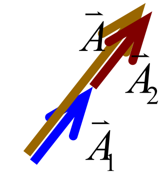
两振动的位相差$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$=常数

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

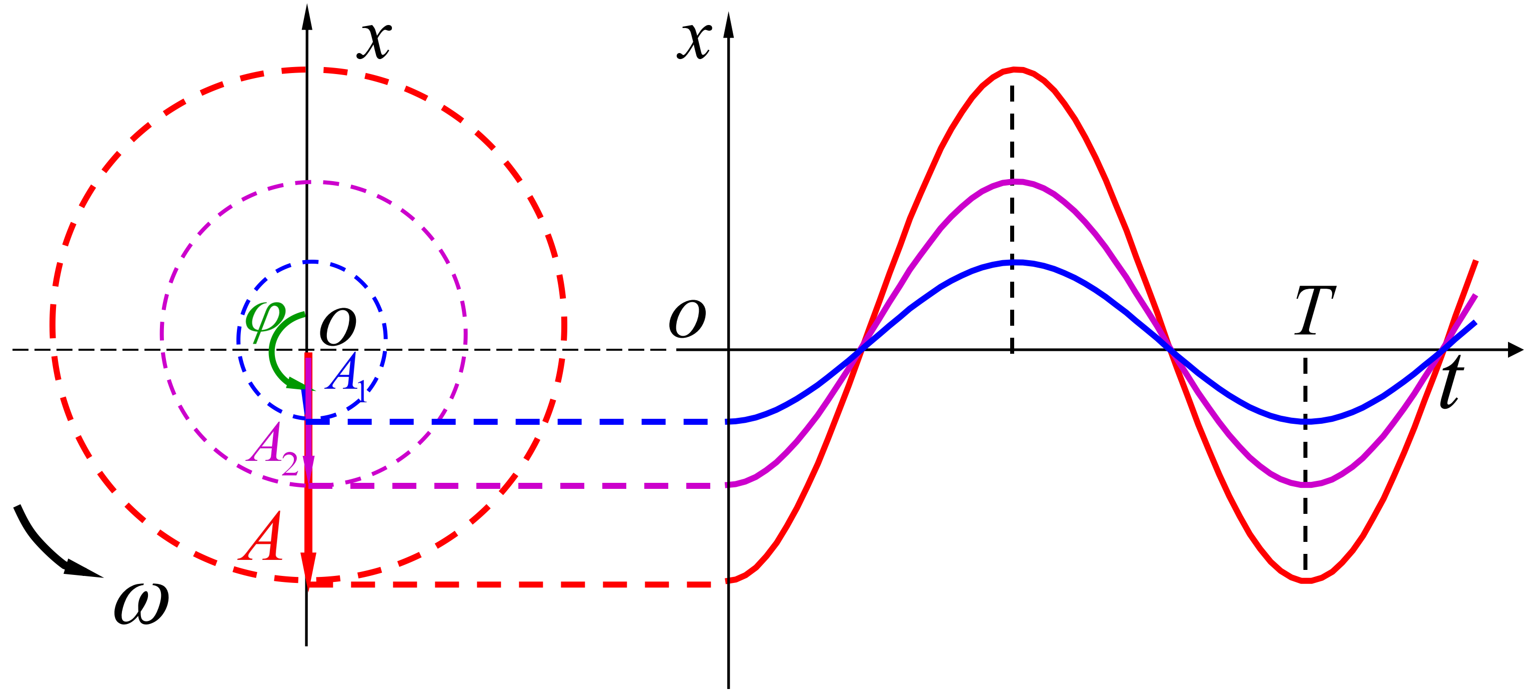
$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$



两个同方向同频率简谐运动合成后仍为同频率的简谐运动

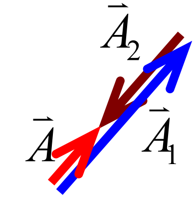


（1）相位差$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

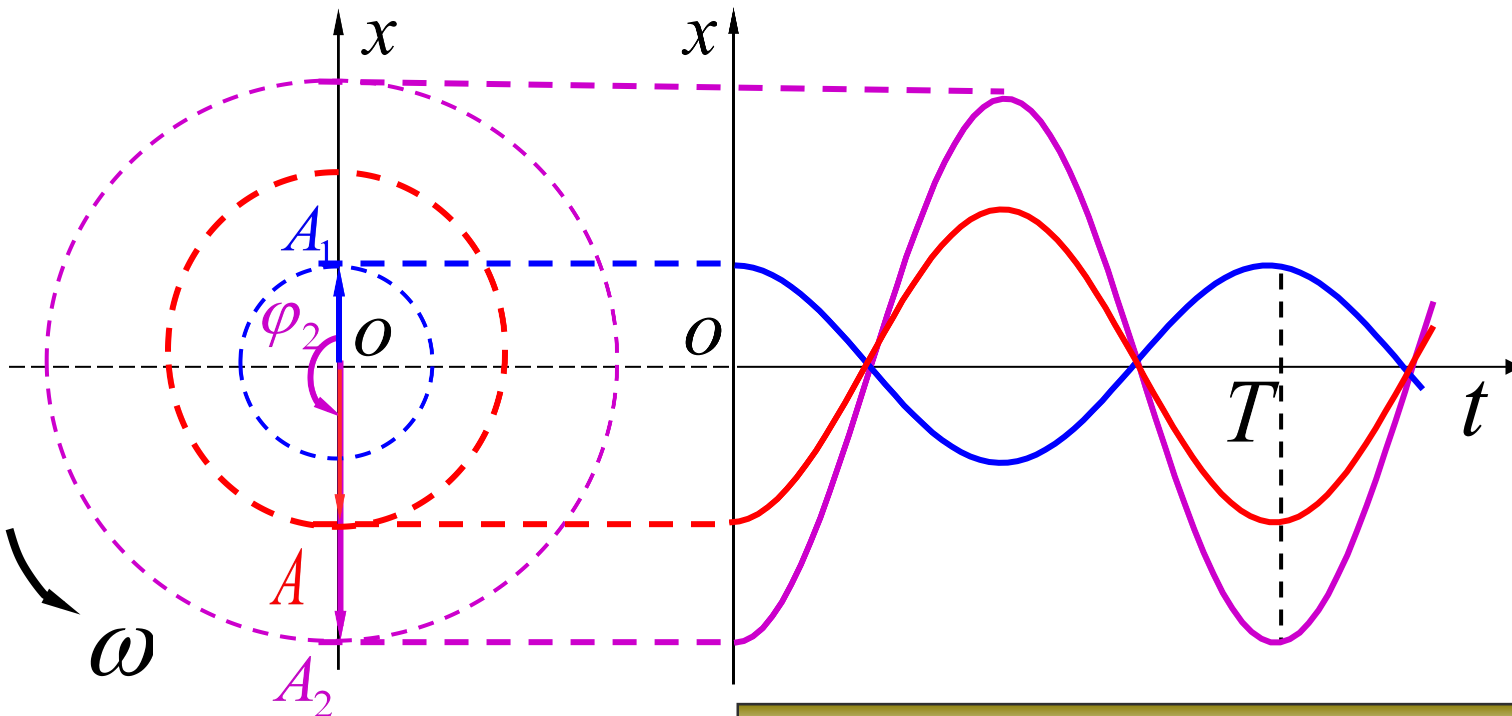


$$x=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\begin{cases} A=A_1+A_2 \\ \varphi=\varphi_2=\varphi_1+2k\pi \end{cases}$$



（2）相位差$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi \, (k = 0\,, \pm 1, \cdots)$



$$\begin{cases} A = |A_1 - A_2| \\ \varphi = \varphi_2 = \varphi_1 + (2k+1)\pi \end{cases}$$

$$\boxed{x = (A_2 - A_1)\cos(\omega t + \varphi)}$$

小结

（1）相位差 $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$

$$A = A_1 + A_2$$

加强

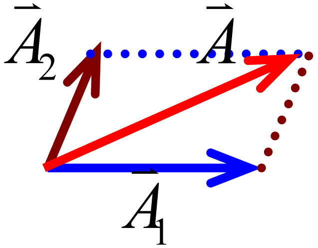
（2）相位差 $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$

$$A = \left| A_1 - A_2 \right|$$

减弱

（3）一般情况

$$A_1 + A_2 > A > \left| A_1 - A_2 \right|$$



[附]　同方向的N个同频率简谐振动的合成
（用矢量合成法）

设它们的振幅相等，初相位依次差一个恒量
其表达式为：

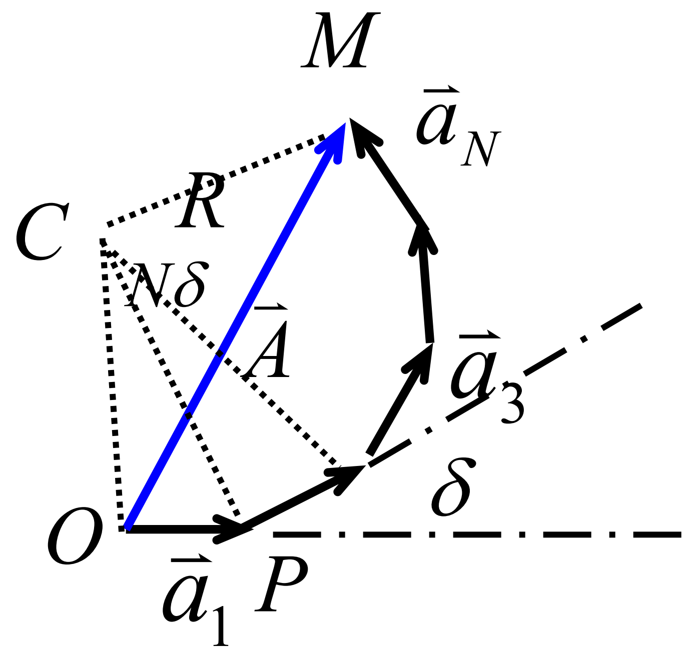
$$x_1(t) = a\cos\omega t$$

$$x_2(t) = a\cos(\omega t + \delta)$$

$$x_3(t) = a\cos(\omega t + 2\delta)$$

$$\vdots$$

$$x_N(t) = a\cos(\omega t + N\delta)$$



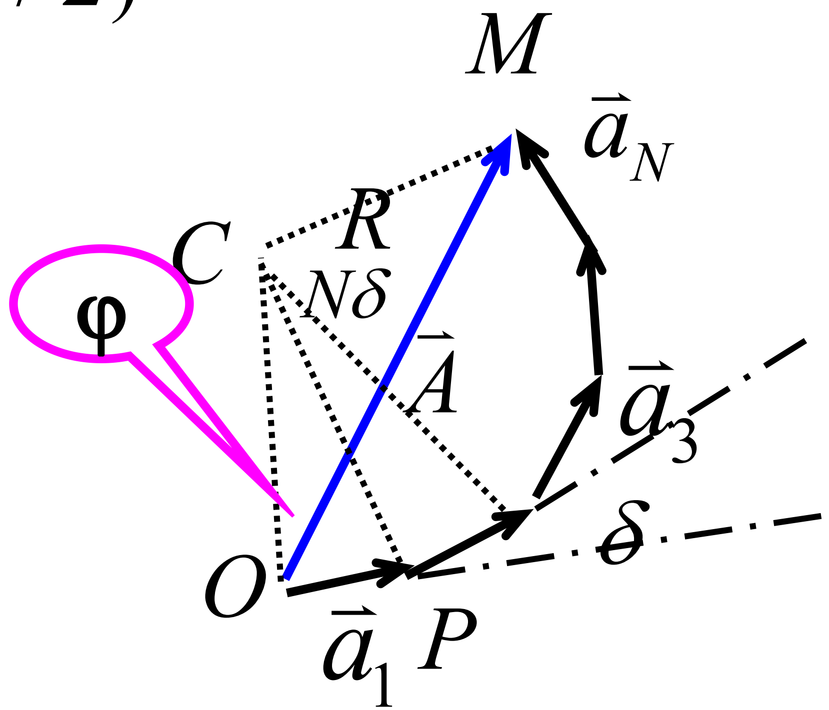
$$A = 2R\sin(N\delta/2)$$

在ΔOCP中：

$$a = 2R\sin(\delta/2)$$

上两式相除得

$$A = a\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin\delta/2}$$



$$\because \angle COM = (\pi - N\delta)/2$$

$$\because \angle COP = (\pi - \delta)/2$$

$$\varphi = \angle COP - \angle COM = \frac{N-1}{2}\delta$$

合振动的表达式

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= a\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\cos(\omega t + \frac{N-1}{2}\delta)$$

讨论1：

当 $\delta = 2k\pi \qquad k = 0,\pm1,\pm2,\cdots$

$$A = \lim a\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} = Na$$

即各分振动同相位时，合振动的振幅最大

讨论2：

$$x(t)=a\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\cos(\omega t+\frac{N-1}{2}\delta)$$

当 $\delta=2k'\pi/N$ **且** $k'\neq kN$

$$A=a\frac{\sin(k'\pi)}{\sin(k'\pi/N)}=0$$

即： $N\delta=2k\pi \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

这时各分振动矢量依次相接，构成闭合的正多边形，合振动的振幅为零

以上讨论的多个分振动的合成在说明光的干涉和衍射规律时有重要的应用

二、同方向、不同频率简谐振动的合成

为了简单起见，先讨论两个振幅相同，初相位也相同，在同方向上以不同频率振动的合成。其振动表达式分别为：

$$x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi) \qquad x_2(t) = A\cos(\omega_2 t + \varphi)$$

利用三角函数关系式：

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

合成振动表达式：

$$x(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi) + A\cos(\omega_2 t + \varphi)$$

附录：三角函数关系式的证明

$$\frac{4}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$=\frac{4}{2}(\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2})(\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2})$$

$$=\frac{4}{2}(\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\beta}{2})$$

$$=\frac{4}{2}[\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos\beta)-\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)\cdot\frac{1}{2}(1-\cos\beta)]$$

$$=\cos\alpha+\cos\beta$$

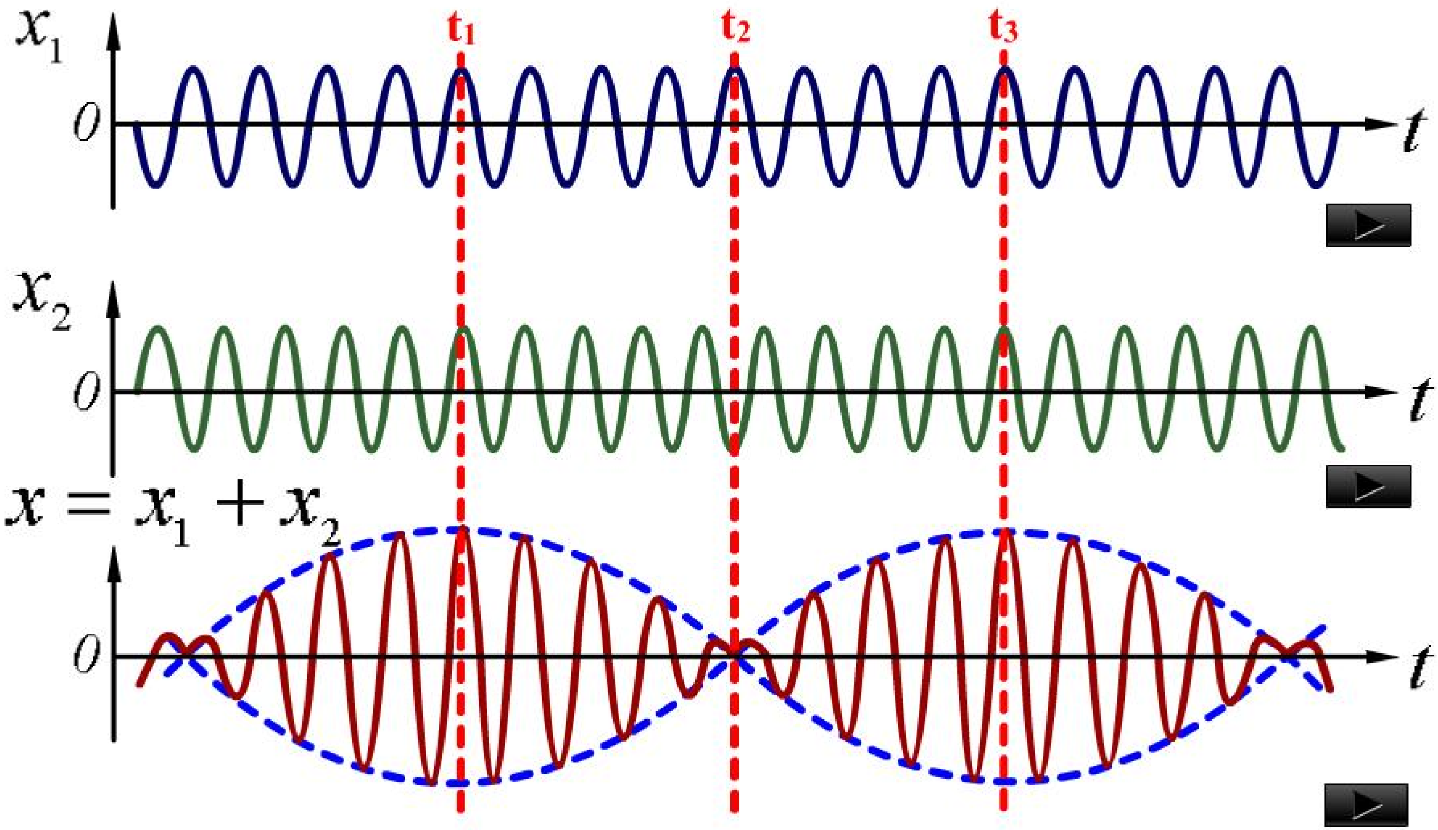
合成振动表达式:

$$x(t)=A\cos(\omega_1 t+\varphi)+A\cos(\omega_2 t+\varphi)$$

$$=2A\cos\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}\cdot\cos[\frac{(\omega_2+\omega_1)t}{2}+\varphi]$$

当ω_1与ω_2 **都很大，且相差甚微时，可将** $|2A\cos(\omega_2-\omega_1)t/2|$ **视为振幅变化部分，合成振动是以** $(\omega_2+\omega_1)/2$ **为角频率的谐振动**

其振幅变化的周期是由振幅绝对值变化来决定，即振动忽强忽弱，所以它是近似的谐振动这种合振动忽强忽弱的现象称为拍。

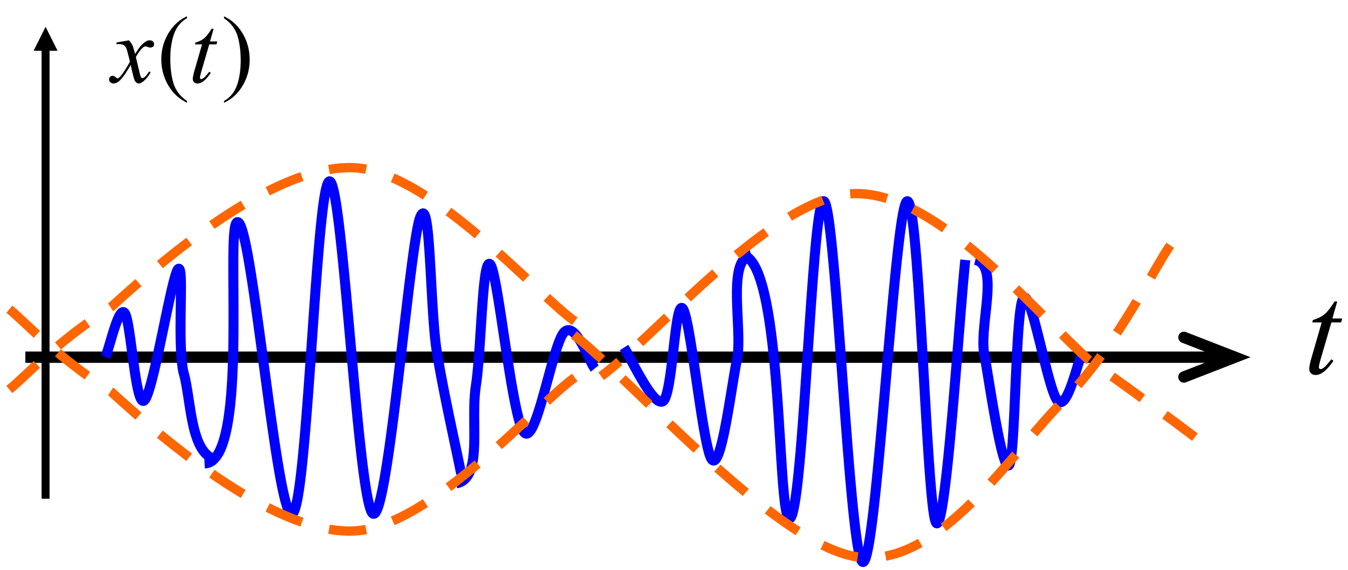

x_1
t_1
t_2
t_3
0
t
x_2
0
t
$x = x_1 + x_2$
0
t

单位时间内振动加强或减弱的次数叫拍频

显然，拍频是振动 $\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)$ **的频率的两倍**

即拍频为：

$$\nu = 2\frac{1}{2\pi}(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}) = \nu_2 - \nu_1$$



三、振动方向垂直的同频率简谐振动的合成

设一个质点同时参与了两个振动方向相互垂直的同频率简谐振动，即

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10}); \qquad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t \cdot \cos\varphi_{10} - \sin\omega t \cdot \sin\varphi_{10}$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos\omega t \cdot \cos\varphi_{20} - \sin\omega t \cdot \sin\varphi_{20}$$

$$\frac{x}{A_1}\cos\varphi_{20} - \frac{y}{A_2}\cos\varphi_{10} = \sin\omega t \cdot \sin(\varphi_{20} - \varphi_{10})$$

$$\frac{x}{A_1}\cos\varphi_{20}-\frac{y}{A_2}\cos\varphi_{10}=\sin\omega t\cdot\sin(\varphi_{20}-\varphi_{10})$$

$$\frac{x}{A_1}\sin\varphi_{20}-\frac{y}{A_2}\sin\varphi_{10}=\cos\omega t\cdot\sin(\varphi_{20}-\varphi_{10})$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi$$ **椭圆方程**

具体形状由相位差 $\Delta\varphi=(\varphi_{20}-\varphi_{10})$ **决定**

质点的运动方向与 $\Delta\varphi$ **有关。当** $0<\Delta\varphi<\pi$ **时，质点沿顺时针方向运动；当** $\pi<\Delta\varphi<2\pi$ **时，质点沿逆时针方向运动**

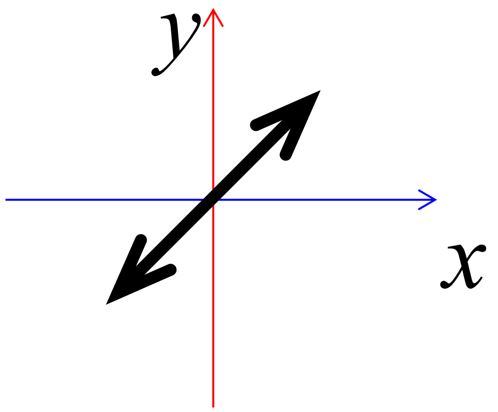
当 $A_1=A_2$ **时，正椭圆退化为圆**

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi$$

讨论1

$$(\varphi_{20}-\varphi_{10})=0$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}=0$$



在 $y=\frac{A_2}{A_1}x$

直线上的运动

讨论2

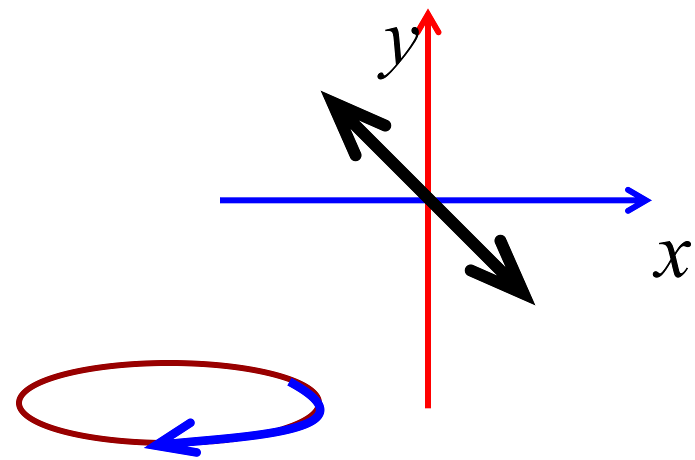
$$(\varphi_{20}-\varphi_{10})=\pi \qquad \frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{2xy}{A_1A_2}=0$$

所以是在 $y=-\dfrac{A_2}{A_1}x$ **直线上的振动。**

讨论3

$$(\varphi_{20}-\varphi_{10})=\frac{\pi}{2}$$

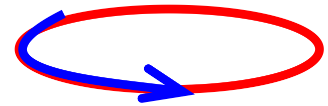
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$



所以是在X轴半轴长为 A_1 **，** Y**轴半轴长为** A_2 **的椭圆方程，且顺时针旋转。**

讨论4

$$(\varphi_{20}-\varphi_{10})=\frac{3\pi}{2}$$

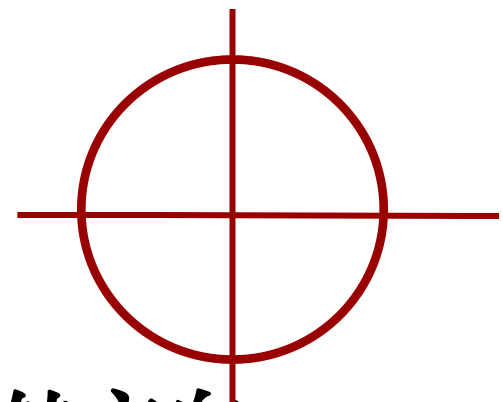


$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=-1$$

所以是在X轴半轴长为 A_1 ， Y轴半轴长为 A_2 的椭圆方程，且逆时针旋转。

讨论5

$$A_1=A_2$$



质点的轨道是圆。

X和Y方向的相位差决定旋转方向。

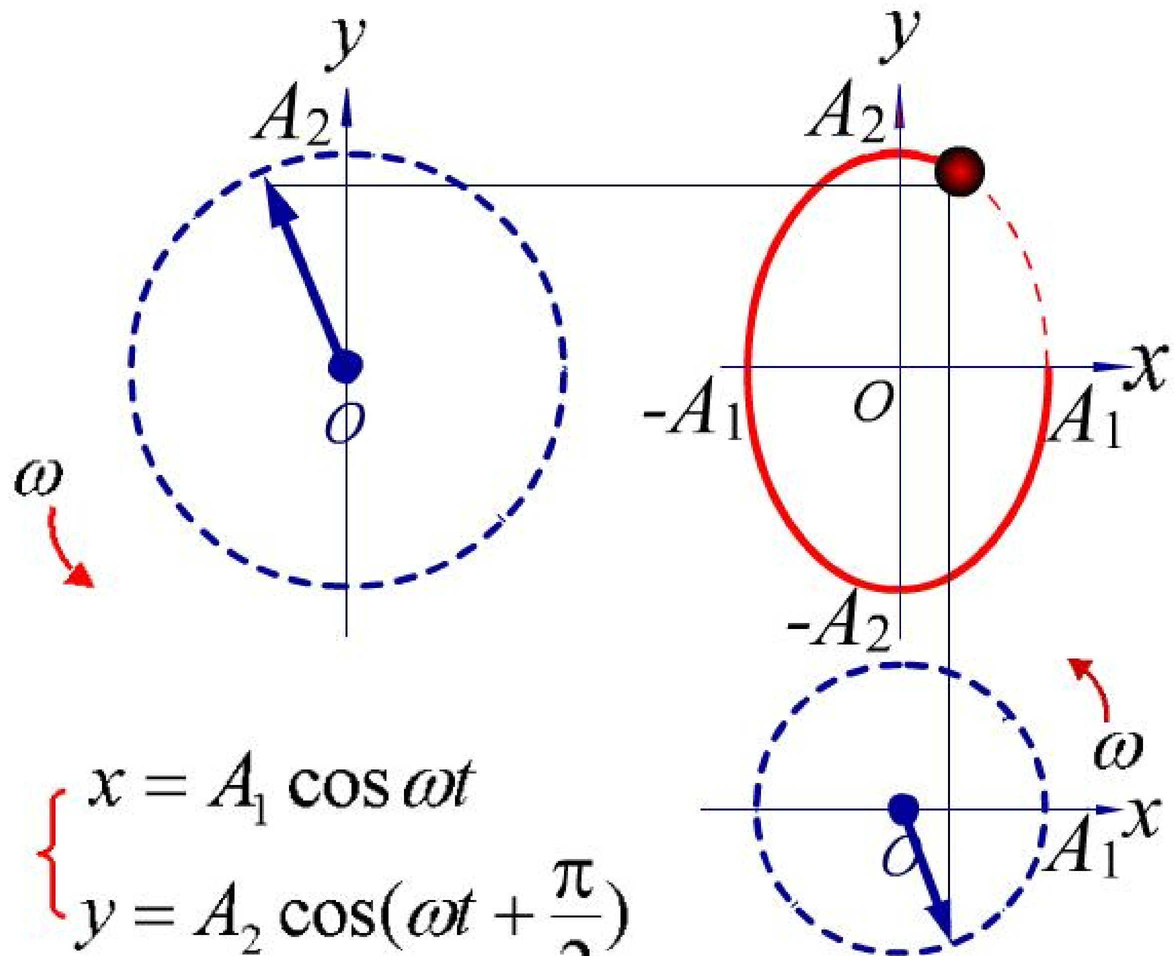
讨论6

$$\varphi_{20}-\varphi_{10}\neq\frac{2k+1}{2}\pi \qquad k=0,1,2,3\cdots\cdots$$

$$\varphi_{20}-\varphi_{10}\neq 2k\pi$$ 为任意椭圆方程

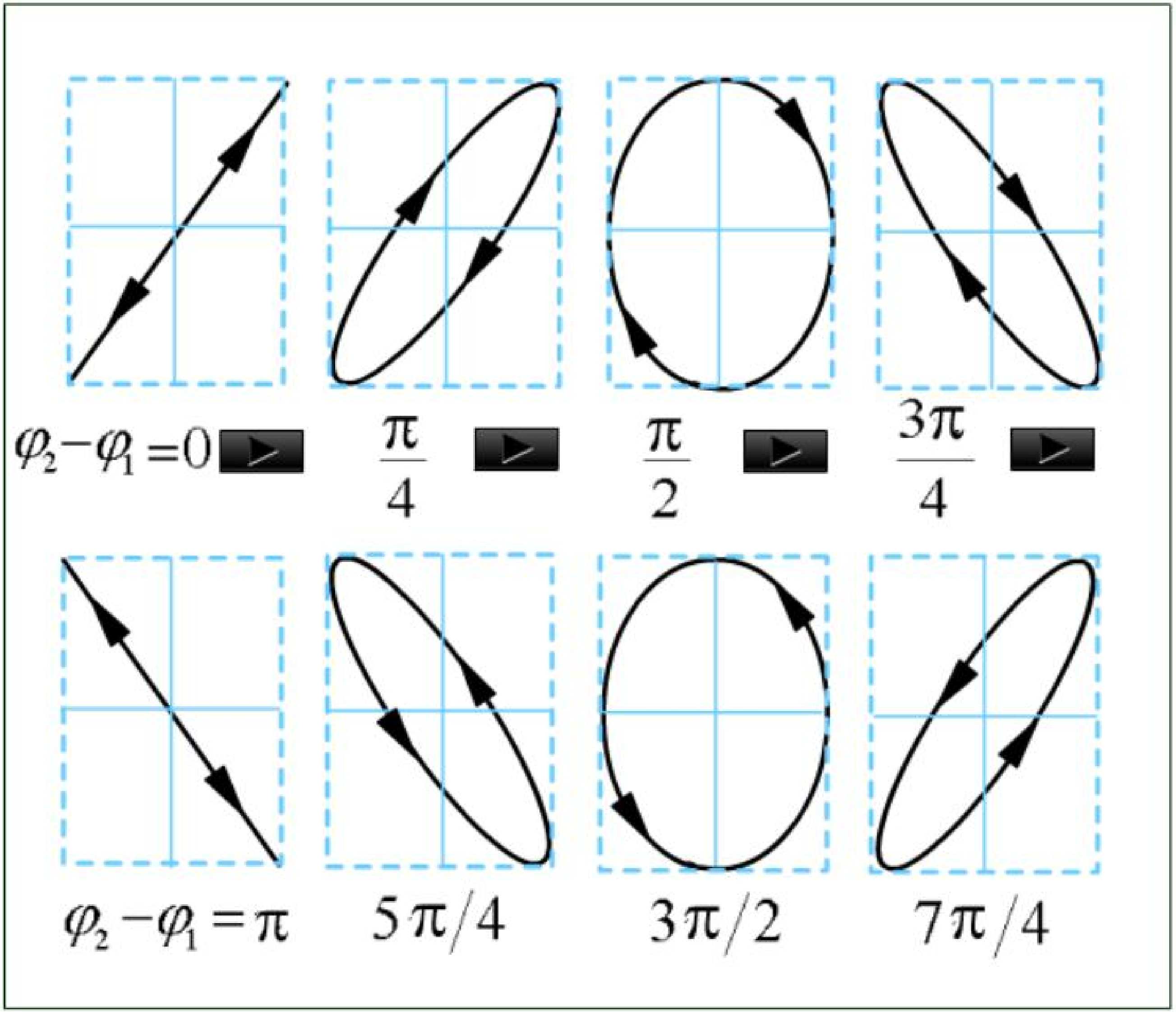
综上所述：两个频率相同的互相垂直的简谐振动合成后，合振动在一直线上或者在椭圆上进行（直线是退化了的椭圆）当两个分振动的振幅相等时，椭圆轨道就成为圆

用旋转矢量描绘振动合成图



$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$

两相互垂直同频率不同相位差简谐运动的合成图



四、振动方向垂直、频率不同的简谐振动的合成

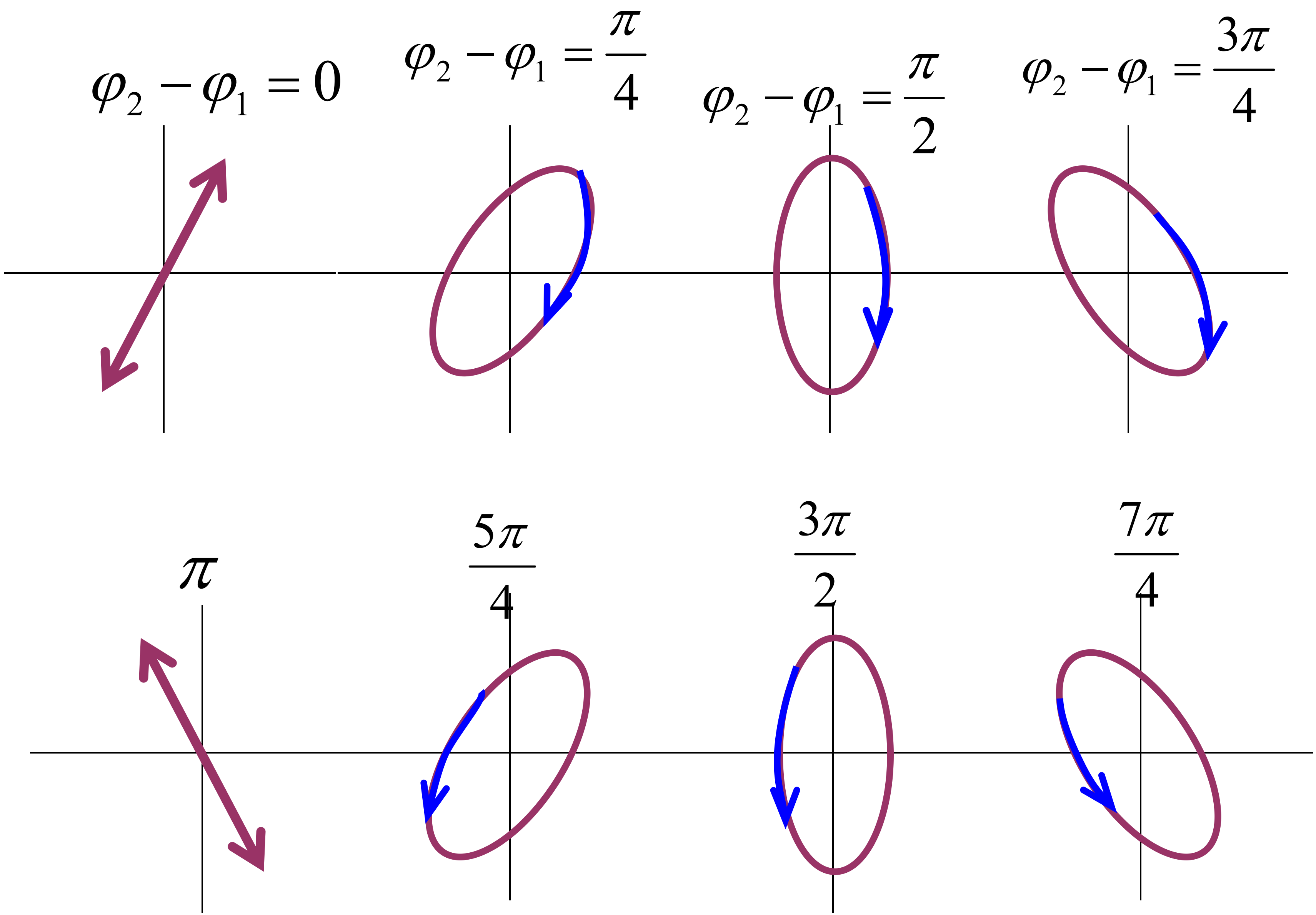
一般是复杂的运动轨道不是封闭曲线，即合成运动不是周期性的运动

下面就两种情况讨论

$\nu_2 - \nu_1 \approx 0$视为同频率的合成，不过两个振动的相位差在缓慢地变化，所以质点运动的轨道将不断地从下图所示图形依次的循环变化

当$0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$ 时是顺时针转

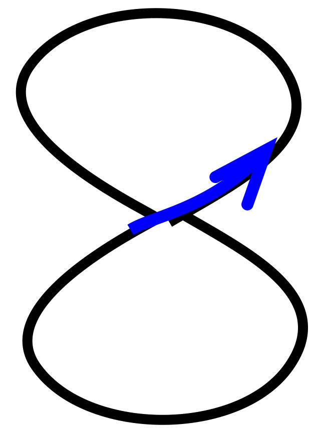
$\pi < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$ 时是逆时针转



$\varphi_2 - \varphi_1 = 0$
$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$
$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$
$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3\pi}{4}$
π
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$

2、如果两个互相垂直的振动频率成整数比，合成运动的轨道是封闭曲线，运动也具有周期-----运动轨迹的图形称为李萨如图形

用李萨如图形在无线电技术中可以测量频率：



$$T_x : T_y = 1 : 2$$

在示波器上，垂直方向与水平方向同时输入两个振动，已知其中一个频率，则可根据所成图形与已知标准的李萨如图形去比较，就可得知另一个未知的频率

§2 阻尼振动

- 无阻尼的自由振动 $$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

- 谐振子的阻尼振动

振动系统受介质的粘滞阻力与速度大小成正比，与其方向相反

$$f_r=-\gamma v=-\gamma\frac{dx}{dt}$$

弹性力或准弹性力和上述阻力作用下的动力学方程

$$m\ddot{x}=-kx-\gamma\dot{x}$$

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m};$

$\beta = \frac{\gamma}{2m}$

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$$

称ω_0为振动系统的固有角频率，称β为阻尼系数

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

（1）阻尼较小时， $\beta^2 < \omega_0^2$ 此方程的解：

$$x(t) = Ae^{-\beta \cdot t}\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

阻力使周期增大　　　　这种情况称为欠阻尼

由初始条件决定A和初相位 φ_0 ,设

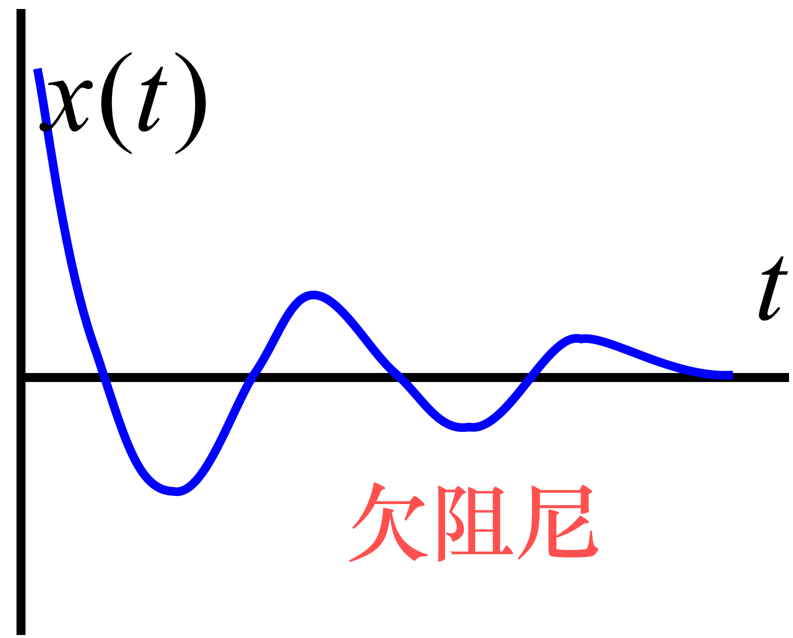
$$t=0,\quad x(0)=x_0,\quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=V_0$$

即有： $x_0 = A\cos\varphi_0$

$$V_0 = -A\omega\sin\varphi_0 - A\beta\cos\varphi_0$$

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{(V_0+\beta x_0)^2}{\omega^2}},$$

$$tg\varphi_0 = -\frac{V_0-\beta x_0}{\omega x_0}$$

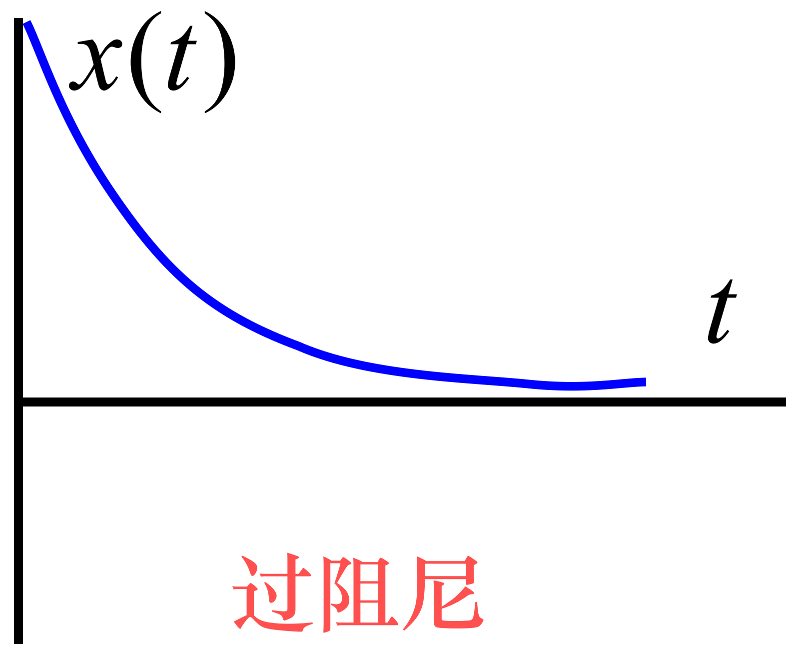


（2）阻尼较大时， $\beta^2 > \omega_0^2$ 方程的解：

$$x(t) = C_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

C_1， C_2 是积分常数，由初始条件来决定，这种情况称为过阻尼

无振动发生

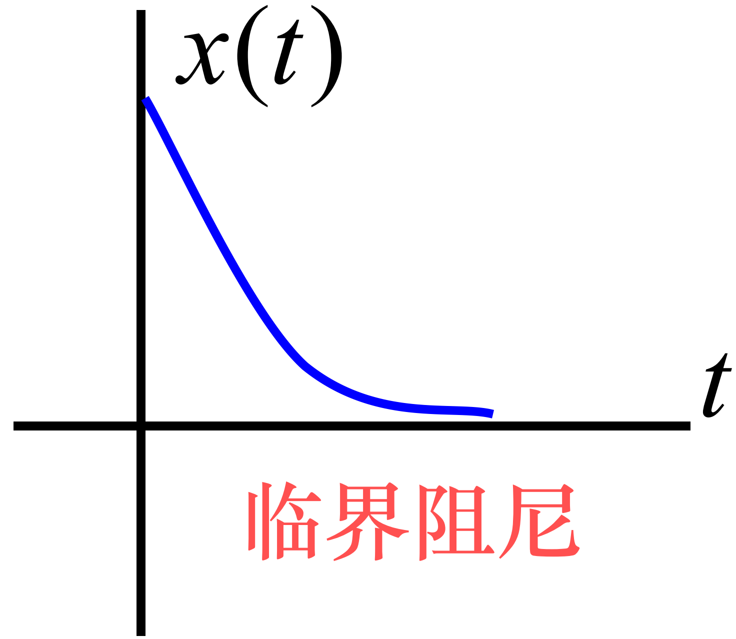


过阻尼

（3）如果 $\beta^2 = \omega_0^2$ 方程的解：

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\beta t}$$

C_1, C_2 是由初始条件决定的积分常数



$\beta^2 = \omega_0^2$

称之为临界阻尼情况。它是振动系统刚刚不能作准周期振动，而很快回到平衡位置的情况，应用在天平调衡中

是从有周期性因子$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$到无周期性的临界点

§3 受迫振动和共振

- **谐振子的受迫振动**

设强迫力 $f = H\cos pt$

阻尼力： $f_r = -\gamma v = -\gamma \cdot \dot{x}$

令 $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}; \beta = \dfrac{\gamma}{2m}; \quad h = \dfrac{H}{m}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = h\cos pt$$

是典型的常系数、二阶、线性、非齐次微分方程

由微分方程理论：

非齐次微分方程的通解=

齐次微分方程的解+非齐次的一个特解

$\beta^2 < \omega_0^2$ 其解为：

$$x(t) = Ae^{-\beta\cdot t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\, t + \varphi_0) + A_p\cos(pt + \phi_0)$$

经过足够长的时间，称为定态解：

$$x(t) = A_p\cos(pt + \phi_0)$$

该等幅振动的角频率就是强迫力的频率；

稳定态时的振幅及与强迫力的相位差分别为：

$$A_p = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}$$

$$\phi_0 = arctg\,\frac{-2\beta p}{\omega_0^2 - p^2}$$

讨论： $p >> \omega_0,\quad A_p = \dfrac{H/m}{p^2} = \dfrac{h}{p^2}$ 较小

$$p << \omega_0,\quad A_p = \frac{H/m}{\omega_0^2} = \frac{H}{k}$$

$p = \omega_0,\quad A_p = \dfrac{H/m}{2\beta\omega_0}$ 若 β很小， A_p很大。

- **共振**

求振幅 $A_p = \dfrac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}$ 对频率的极值，得出

振幅有极大值：

$A_r = \dfrac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ 共振的振幅。

$p_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 共振的角频率。

$$p_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$ 共振的角频率。

代入 $\phi_0 = arctg \dfrac{-2\beta p}{\omega_0^2 - p^2}$

共振时的初相位 $\phi_{0r} = arctg \dfrac{-\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta}}{\beta}$

当强迫力的频率为某一值时，稳定受迫振动的位移振幅出现最大值的现象，叫做位移共振，简称共振（*resonance*）。

当 $\beta \to 0$ 弱阻尼时

共振发生在固有频率处，称为尖锐共振。

$$\therefore p_r = \omega_0, \quad A_r \longrightarrow \infty, \quad \phi_{0r} = -\pi/2$$

振动振幅急剧增大的原因

受迫振动相位落后于强迫力相位 $\pi/2$，即振动速度与强迫力同相位，即外力始终对系统作正功，对速度的增大有最大的效率振动振幅急剧增大的原因

随着振幅的增大，阻力的功率也不断增大，最后与强迫力的功率相抵，从而使振幅保持恒定。从能量观点看在共振时，这能量转变为共振质点的能量，也叫共振吸收