

## 第五章 真空中的静电场

本章从静止点电荷间相互作用的基本规律—库仑定律出发,引入描述静电场的两个基本物理量电场强度和电势,讨论了二者之间的关系,在库仑定律和电场叠加原理的基础上,导出了反映静电场性质的两个基本规律,即高斯定理和静电场的环路定理.最后讨论了带电系统的静电能和静电场中带电系统的受力问题.

### §5.1 库仑定律

#### 5.1.1 电荷

##### 一、电荷的种类

任何两个不同性质的物体相互摩擦之后,就会具有吸引毛发、小纸片等轻小物体的能力,这时就说它们带有了电荷.

实验证明,自然界中只有两种电荷.十八世纪美国物理学家富兰克林将它们命名为正电荷与负电荷,并规定用丝绸摩擦过的玻璃棒所带的电荷为正电荷,用毛皮摩擦过的胶木棒所带的电荷为负电荷,这种规定一直沿用至今.同种电荷互相排斥,异种电荷互相吸引.

电荷量是物体所带电荷数量的多少.在国际单位制(SI)中,电荷量的单位是库仑,其符号为C.当导线中的恒定电流等于1安培时,在1秒钟内流过导线横截面的电量就定义为1C.

##### 二、电荷的量子化

1906—1917年,美国物理学家密立根(R.A.Millikan, 1868-1953)根据油滴实验的结果发现,在自然界中电荷总是以一确定基本单元的整数倍出现,这种性质称为电荷的量子化.用 $e$ 表示这个基本单元量,称其为基元电荷.在用国际单位制(SI)中,其量值为

$$e = 1.60217733 \times 10^{-19} \text{ C}$$

一个质子带电量恰为 $e$ 、一个电子带电量为 $-e$ .

美国物理学家盖尔曼(Murray Gell-Mann, 1929-)于1964年提出的夸克模型认为,存在着电荷量为 $\pm\frac{1}{3}e$ 及 $\pm\frac{2}{3}e$ 的夸克.但夸克模型与电荷的量子化并不矛盾.

宏观带电体所带的电荷量远远大于基元电荷，所以可以忽略电荷的量子化现象，而认为带电体的电荷是连续分布的。

### 三、电荷守恒定律

大量实验事实表明：对于一个封闭的物质系统，无论系统内发生什么过程，系统内正负电荷的代数和保持不变。这就是电荷守恒定律。电荷守恒定律是物理学的基本定律，它不仅适用于宏观带电体的电荷转移过程（例如起电、中和、静电感应和极化以及氧化—还原等），而且在微观物理过程中也得到了精确验证。

例如，自由中子可以衰变为质子、电子及反中微子

$$n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

电子与正电子可以湮灭成一对光子

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$$

在这些反应前后，电荷的代数和保持不变。

### 四、电荷量的相对论不变性

实验证明，带电物体所带的总电荷量，不会因其运动而改变。原子和分子的精确电中性就是一个很好的证明。例如氢分子和氦原子都有两个质子和两个电子，但是它们内部的电子和质子的运动是不同的。如果运动对电量有任何影响，那么我们就不能看到：在氢分子和氦原子中，原子核的电荷和电子的电荷都恰好抵消。事实上，氢分子和氦原子几乎以相同的实验精确度被证明是电中性的。

在任何惯性系中，测量带电物体的电量，会得到完全相等的量值，这就是电荷的相对论不变性。

#### 5.1.2 库仑定律

##### 一、真空中的库仑定律

为了对电荷之间的相互作用进行定量的描述，需要引入点电荷模型。当一个带电体的几何线度比它到其他带电体的距离小得多，带电体的大小、形状及电荷的具体分布对问题的影响小到可以忽略不计，就可以把该带电体抽象为一个带有有限电荷量的几何点，这就是点电荷。

1785 年，法国物理学家库仑（Charles Augustin

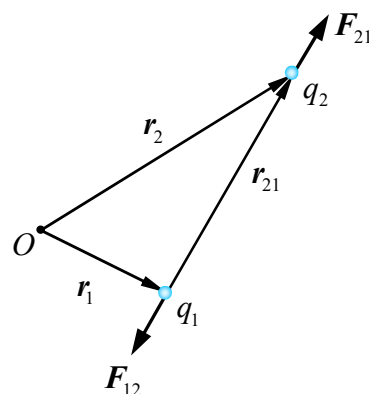


图 5.1-1 库仑定律

de Coulomb, 1736—1806) 通过扭秤实验总结出两个静止点电荷之间电相互作用的规律, 把电学从定性描述提高到定量研究的水平.

通过实验总结出的库仑定律表述为: 在惯性系中观察, 真空中的两个静止的点电荷之间的作用力(斥力或吸引力, 称为库仑力)与这两个电荷所带电量乘积成正比, 与它们之间的距离的平方成反比, 作用力的方向沿着这两个点电荷的连线. 该定律表述的矢量形式为

$$\mathbf{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \mathbf{e}_{21} \quad (5.1-1)$$

其中  $q_2, q_1$  为两个点电荷的电荷量,  $r_{21}$  是两点电荷之间的距离,  $\mathbf{e}_{21}$  表示由  $q_1$  指向  $q_2$  方向的单位矢量,  $\mathbf{F}_{21}$  表示  $q_2$  受  $q_1$  的作用力, 如图 5.1-1 所示. 在国际单位制(SI)中, 电量的单位为 C, 距离的单位为 m, 力的单位为 N, 由此测定比例系数  $k \approx 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$ .

通常引入另一常量  $\epsilon_0$  来代替  $k$ , 令比例系数  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ,  $\epsilon_0$  被称为真空介电常量(真空电容率),  $4\pi$  因子的作用是使单位制有理化. 在 SI 中,  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$ . 于是真空中的库仑定律变为

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_{21} \quad (5.1-2)$$

注意, 库仑定律只适用于真空中两个静止的点电荷.

库仑定律是静电场理论的基础, 是实验精确验证的平方反比定律. 目前研究表明, 库仑定律在  $10^{-17} \text{ m} \sim 10^7 \text{ m}$  的范围内精确成立.

**例 5.1-1** 氢原子中电子和质子的距离为  $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$ . 求此二粒子间的静电力和万有引力各为多大?

**解:** 由于电子的电荷是  $-e$ , 质子的电荷为  $+e$ , 而电子的质量  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , 质子的质量  $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , 所以由库仑定律, 求得两粒子间的静电力大小为

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{9.0 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{(5.3 \times 10^{-11})^2} \text{ N} \\ &= 8.2 \times 10^{-8} \text{ N} \end{aligned}$$

由万有引力定律, 求得两粒子间的万有引力

$$F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2} = \frac{6.7 \times 10^{-11} \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1.7 \times 10^{-27}}{(5.3 \times 10^{-11})^2} \text{ N}$$

$$= 3.7 \times 10^{-47} \quad \text{N}$$

由计算结果可以看出，氢原子中电子与质子的相互作用的静电力远较万有引力为大，前者约为后者的  $10^{39}$  倍。

**例 5.1-2** 卢瑟福（Ernest Rutherford，1871—1937 年）在他的  $\alpha$  粒子散射实验中发现， $\alpha$  粒子具有足够高的能量，使它能达到与金原子核的距离为  $2 \times 10^{-14} \text{m}$  的地方。试计算在这一距离时， $\alpha$  粒子所受金原子核的斥力的大小。

**解：** $\alpha$  粒子所带电量为  $2e$ ，金原子核所带电量为  $79e$ ，由库仑定律可得此斥力为

$$F_e = \frac{2e \times 79e}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{9.0 \times 10^9 \times 2 \times 79 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{(2 \times 10^{-14})^2} \text{N}$$

$$= 91 \quad \text{N}$$

此斥力的大小约相当于  $10 \text{kg}$  物体所受到的重力。此例说明，在原子尺度内电力是非常强的。

## 二. 库仑力的叠加原理

实验事实：两个电荷间的作用力不因第三个电荷的存在而改变。于是，施于任一电荷上的库仑力等于其他每一电荷单独对它所施库仑力的矢量和。

图 5.1-2 表示两个点电荷  $q_1$  和  $q_2$  对第三个点电荷  $q$  的作用库仑力叠加的情况。点电荷  $q_1$  和  $q_2$  各自单独作用于点电荷  $q$  上的库仑力分别为  $F_1$  和  $F_2$ ，它们共同作用在  $q$  上的库仑力  $F$  就是这两个力的合力

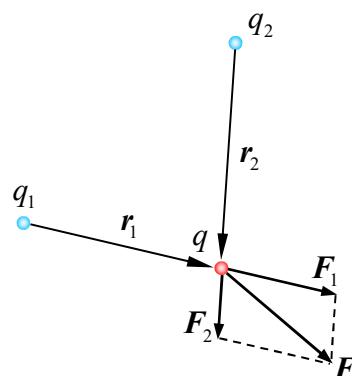


图 5.1-2 静电力的叠加

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

若空间某点电荷  $q$  所受的库仑力  $F$  是由若干点电荷或带电体组成的系统施予的，则  $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_i + \cdots + F_n$ ，其中  $F_i$  是系统内第  $i$  个点电荷对电荷  $q$  的库仑力，这就是库仑力的叠加原理，体现了力的独立性和叠加性。

## 库仑

(Charlse-Augustin de Coulomb, 1736 -1806)



法国工程师、物理学家。其最主要的贡献是利用他发明的扭秤以极高的精度确定了静止电荷之间的静电力，总结出著名的库仑定律，使电学的研究从定性阶段进入了定量阶段。

此外在应用力学方面，他提出的计算物体上应力和应变分布情况的方法一直沿用至今，是结构工程的理论基础；他还做了一系列的摩擦实验，建立了库仑摩擦定律：摩擦力和作用在物体表面上的正压力成正比；并证明了摩擦因数和物体的材料有关。

## §5.2 静电场 电场强度

### 5.2.1 电场 电场强度

电荷会在其周围激发电场，该电场对处在其中的任何电荷都有作用力。电荷之间的相互作用，本质上是一个电荷的场作用在另一个电荷上的电场力。电场是物质的一种形态，它具有能量、动量和质量等物质属性，并以有限的速度传递。

由静止电荷激发的电场称为静电场，静电场具有稳定的分布。真空中的电荷  $Q$ （称为场源电荷），在其周围激发的电场与其它电荷的存在与否无关。为定量描述该电场的分布，引入试验电荷  $q_0$ ，试验电荷的电荷量要足够小，以保证  $q_0$  的存在不会影响场源电荷  $Q$  的场分布，其次  $q_0$  的几何线度要足够小，以准确反映  $q_0$  所在点的场性质。实验证明  $q_0$  在电场中某点的受力  $\boldsymbol{F}$  与  $q_0$  成正比，该比值与  $q_0$  无关，只取决于电场在该点的性质。因此，定义该比值为电场强度，简称场强，用  $\boldsymbol{E}$  表示，即

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q_0} \quad (5.2-1)$$

其值在数值上等于单位正电荷在该点所受的电场力。在国际单位制（SI）中，电场强度的单位为牛每库或伏每米，其符号为  $\text{N/C}$  或  $\text{V/m}$ ， $1\text{N/C} = 1\text{V/m}$ 。

若某空间区域内各点的电场强度大小相等，方向相同，就称为匀强电场或均

匀电场.

5.2.2 电场强度的叠加原理

设某静电场由  $n$  个点电荷组成的点电荷系所产生, 当电场强度不太强时, 各个点电荷单独存在时在场点  $P$  处产生的电场强度分别为  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $\cdots E_i \cdots$ 、 $E_n$ , 根据库仑力的叠加原理,  $P$  点的总电场强度  $E$  为它们的矢量和

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n = \sum_{i=1}^n E_i \quad (5.2-2)$$

此即电场强度的叠加原理.

近代物理学的理论和实验完全证实了场的观点的正确性。电场以及磁场已被证明是一种特殊形态的物质, 它们运动(或传播)的速度是有限的, 这个速度就是光速。电磁场与实物粒子一样具有能量、质量和动量等物质的基本属性。

尽管在研究静止电荷的相互作用时, 电场的引入可以认为只是描述电荷相互作用的一种方便的方法, 而在研究有关运动电荷, 特别是其运动迅速改变的电荷的现象时, 电磁场的实在性就突出地显示出来了。

表 1. 1 给出了一些典型的电场强度的数值.      单位: N/C

铀核表面	$2 \times 10^{21}$
中子星表面	约 $10^{14}$
氢原子电子内轨道处	$6 \times 10^{11}$
X 射线管内	$5 \times 10^6$
空气的电击穿强度	$3 \times 10^6$
范德格拉夫静电加速器内	$2 \times 10^6$
电视机的电子枪内	$10^5$
电闪内	$10^4$
雷达发射器近旁	$7 \times 10^3$
太阳光内 (平均)	$1 \times 10^3$
晴天大气中 (地表面附近)	$1 \times 10^2$
小型激光器发射的激光束内 (平均)	$1 \times 10^2$
日光灯内	10
无线电波内	约 $10^{-1}$

家用电路线内

约  $3 \times 10^{-2}$

宇宙背景辐射内（平均）

$3 \times 10^{-6}$

### 5.2.3 电场强度的计算

#### 一、点电荷产生的电场

将点电荷  $q$  看成场源电荷，在  $q$  产生的电场中某点  $P$  处置一试验电荷  $q_0$ ，以  $q$  所在处为坐标原点，由  $q$  到  $q_0$  的径矢用  $\mathbf{r}$  表示。根据库仑定律， $q_0$  受到  $q$  的电场力为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \mathbf{e}_r$$

式中  $\mathbf{e}_r$  为从场源电荷  $q$  指向点  $P$  的单位矢量。

再由电场强度的定义式（5.2-1），可得  $P$  点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (5.2-3)$$

上式给出了点电荷所产生的电场强度  $\mathbf{E}$  与场源电荷的电荷量  $q$  及场点位置  $r$  之间的关系，表明点电荷产生的电场是具有球对称性的有心场。

根据点电荷的场强公式（5.2-3）式，结合电场强度的叠加原理，原则上可以求出场源电荷为任意分布时，空间各点的电场强度  $\mathbf{E}(x, y, z)$ 。

#### 二、点电荷系产生的电场

如果场源是由  $n$  个点电荷  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$  所构成的点电荷系，由点电荷场强公式及场强叠加原理可知， $P$  点的总电场强度为

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{e}_{ri} \quad (5.2-4)$$

式中  $r_i$  为  $q_i$  到  $P$  点的距离， $\mathbf{e}_{ri}$  为从  $q_i$  指向  $P$  点的单位矢量。

#### 三、连续带电体产生的电场

虽然从微观结构看，电荷具有量子性，但若基本电荷之间的距离远小于所考虑问题的特征尺度，

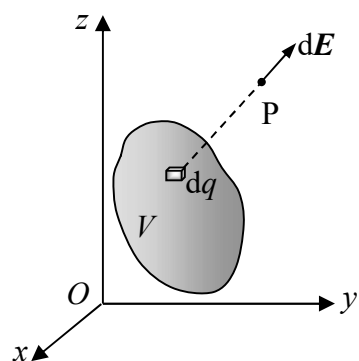


图 5.2-1 带电体产生的场

就可以认为电荷是连续分布的。定义体电荷密度为

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

在这里， $dV$  是“宏观足够小微观足够大”的体积元，如图 5.2-1 所示。“宏观足够小”是说从宏观上看它很小，能够体现出电荷随空间不同位置的宏观分布情况；“微观足够大”是指其线度远大于原子及分子的大小，故  $dV$  可视为电荷连续分布。

在下一章中我们将看到，对于导体或电介质，其所带的电荷通常局限于表面附近的薄层里。若不考虑纵深方向的分布，可把这带电薄层抽象为一个没有厚度的几何面，并把单位面积内的电荷量定义为面电荷密度，即

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

式中的  $dS$  称为面积元，如图 5.2-2 所示。

对于分布在某根细线或细棒上的电荷，若不考虑其在横截面的分布，电荷可视为分布在一条几何线上，并把单位长度内的电荷量定义为线电荷密度，即

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

式中的  $dl$  称为线元，如图 5.2-3 所示。

对于任意形状的带电体，可以将其分割成无穷多个电荷元，每一电荷元对 P 点场的贡献为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{e}_r$$

式中  $r$  为电荷元  $dq$  到点 P 的距离， $\mathbf{e}_r$  是从  $dq$  指向点 P 的单位矢量。根据场强叠加原理，P 点的总场强为整个带电体上所有电荷元对该点场强贡献的矢量和，即

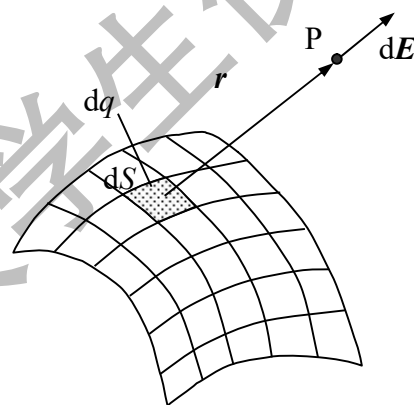


图 5.2-2 带电面产生的场

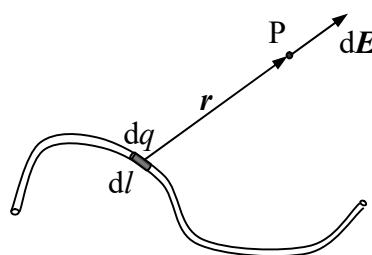


图 5.2-3 带电线产生的场



$$\mathbf{E} = \int_{(q)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{e}_r = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{r^2} \mathbf{e}_r \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{r^2} \mathbf{e}_r \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl}{r^2} \mathbf{e}_r \end{cases} \quad (5.2-5)$$

#### 四、几种典型带电系统的电场

##### 1. 电偶极子的电场

一对等量异号电荷 $\pm q$ ，相距为 $l$ ，这个带电系统称为电偶极子。定义 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ 为电偶极子的电偶极矩，简称电矩，其中 $\mathbf{l}$ 是由负电荷指向正电荷，大小为 $l$ 的矢量，如图 5.2-4 所示。



图 5.2-4 电偶极子

以电偶极子连线中点  $O$  为坐标原点，场点  $P$  的位矢为  $\mathbf{r}$ ，且有  $r \gg l$ ，即  $P$  相对于电偶极子而言是远场点。

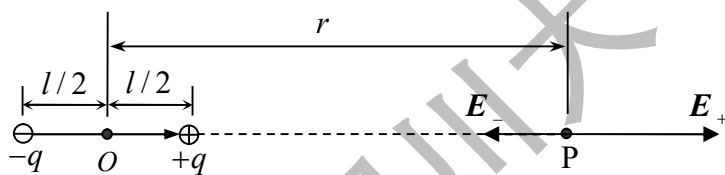


图 5.2-5 电偶极子延长线上一点的场强

(1) 场点  $P$  位于电偶极子延长线上，如图 5.2-5 所示。正、负电荷单独在  $P$  点产生的场强分别为

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2}, \quad E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2}$$

$r$  为点  $O$  到场点  $P$  的距离， $E_+$  向右， $E_-$  向左，则  $P$  点的总场强为

$$E = E_+ - E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right]$$

因为  $r \gg l$ ，故有

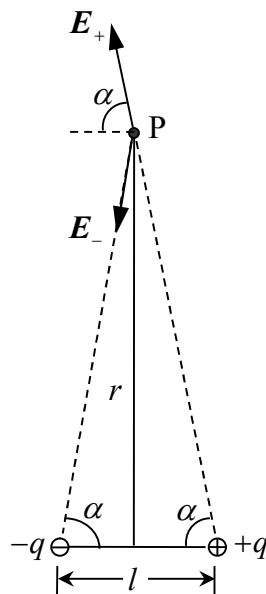


图 5.2-6 电偶极子中垂线上一点的场强

$$\left(r \pm \frac{l}{2}\right)^{-2} = r^{-2} \left(1 \pm \frac{l}{2r}\right)^{-2} \approx r^{-2} \left(1 \mp \frac{l}{r}\right)$$

得

$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{r^3}$$

P 点场强  $\mathbf{E}$  沿电偶极矩  $\mathbf{p}$  的方向, 则

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r^3}$$

(2) 点 P 位于电偶极子的中垂线上, 如图 5.2-6 所示, 正、负电荷单独在 P 点产生的场强分别为

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)}, \quad E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)}$$

P 点的总场强为

$$E = E_+ \cos \alpha + E_- \cos \alpha = 2E_+ \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}$$

其中  $\cos \alpha = \frac{l}{2\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$ . 因为  $r \gg l$ , 则展开有  $\frac{l}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}} \approx \frac{l}{r^3}$

再考虑到场强的方向与电偶极矩  $\mathbf{p}$  的指向相反, 可得总场强为

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r^3}$$

(3) 点 P 为空间任意一点, 其位置可由极坐标  $r$  和  $\theta$  给出, 如图 5.2-7 所示. 将电偶极子的电矩  $\mathbf{p}$  分解为平行于  $\mathbf{r}$  的分量  $p_{\parallel}$  和垂直于  $\mathbf{r}$  的分量  $p_{\perp}$

$$p_{\parallel} = p \cos \theta, \quad p_{\perp} = p \sin \theta$$

于是 P 点的场强可视为电矩分别为  $p_{\parallel}$  和

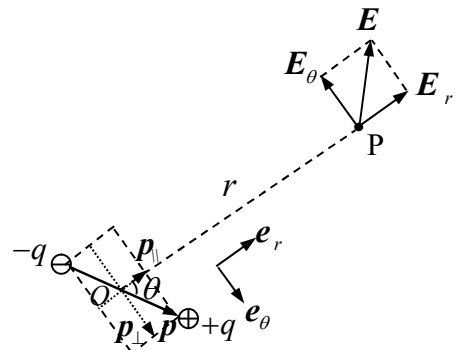


图 5.2-7 电偶极子周围任一点的场强

$p$  的电偶极子在该点的场强叠加, 即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_\theta$$

式中

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3}, \text{ 沿 } \mathbf{e}_r \text{ 方向}$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}, \text{ 沿 } -\mathbf{e}_\theta \text{ 方向}$$

$\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$  分别为  $p_{\parallel}$ 、 $p$  方向上的单位矢量。电偶极子在空间的电场分布如图 5.2-8 所示。

## 2. 均匀带电直线段的电场

图 5.2-8 电偶极子的电场

均匀带电直线段长为  $L$ , 电荷量为  $q$ , 则线电荷密度  $\lambda = q/L$ 。

### (1) 均匀带电直线段延长线上一点的场

如图 5.2-9 所示, 以线左端点  $O$  为坐标原点, 沿带电直线方向为  $x$  轴,  $P$  点距线段右端距离为  $a$ 。在带电线上任意位置  $x$  处取线元  $dx$ , 该线元所带电荷量为  $dq = \lambda dx$ 。

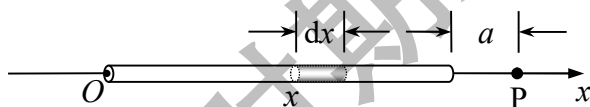


图 5.2-9 均匀带电直线段延长线上一点的场

设  $\lambda > 0$ ,  $dq$  在  $P$  点产生的元场强的方向沿  $x$  轴向右, 大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(L - x + a)^2}$$

带电直线段上所有线元在  $P$  点产生的元场强方向都相同,  $P$  点的总场强就等于各元场强的代数和, 即

$$E = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(L - x + a)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{L - x + a} \right) \Big|_0^L = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a + L} \right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a(a + L)} \quad (5.2-6)$$

当  $a \gg L$  时,  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2}$ , 即对远场点而言, 带电直线可视为点电荷.

## (2) 均匀带电直线段外一点的场

如图 5.2-10 所示, 过场点 P 做带电直线段的垂线, 垂线段长记为  $a$ , 以垂足  $O$  为坐标原点, 沿垂线为  $y$  轴, 向上为正, 沿带电线段为  $x$  轴, 向右为正. 在带电线段上任意位置  $x$  处取线元  $dx$ , 其电荷量为  $dq = \lambda dx$ , 它在 P 点产生的元场强  $dE$  方向如图所示, 大小为

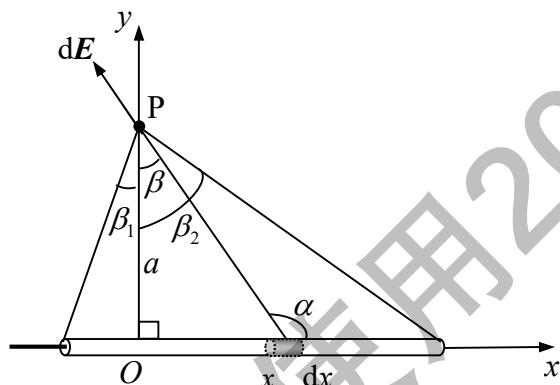


图 5.2-10 均匀带电直线段外一点的场

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{a^2 + x^2}$$

将  $dE$  沿  $x, y$  方向分解

$$dE_x = dE \cos \alpha = dE \cos \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{a^2 + x^2} (-\sin \beta)$$

$$dE_y = dE \sin \alpha = dE \sin \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{a^2 + x^2} (\cos \beta)$$

作变量代换, 有  $x = a \tan \beta$ ,  $dx = a \sec^2 \beta d\beta$ ,  $a^2 + x^2 = a^2 (1 + \tan^2 \beta) = a^2 \sec^2 \beta$

得

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a \sec^2 \beta d\beta}{a^2 \sec^2 \beta} (-\sin \beta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} (-\sin \beta) d\beta$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a \sec^2 \beta d\beta}{a^2 \sec^2 \beta} \cos \beta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \cos \beta d\beta$$

于是

$$E_x = \int dE_x = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} (-\sin \beta) d\beta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \cos \beta d\beta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1)$$

$\beta$  的正负与图中  $x$  的正负相对应, 积分限由  $\beta_1 \rightarrow \beta_2$ .

对于带电直线段中垂线上的一点,  $\cos \beta_2 - \cos \beta_1 = 0$ ,  $E_x = 0$ , 场强只沿中垂线方向, 这是电荷分布对称性的必然结果.

对于无限长均匀带电直线外的一点,  $\beta_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ ,  $\beta_2 \rightarrow +\frac{\pi}{2}$ ,

$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \quad (5.2-7)$$

其方向垂直于该带电线. 场点到直线的距离远小于直线的长度时, 带电直线可视为无限长.

若场点到直线段的垂足恰在线段一 endpoint 处, 而另一端很远, 这时称带电电线为“半无限长”的,  $\beta_1 \rightarrow 0$ ,  $\beta_2 \rightarrow +\frac{\pi}{2}$ , 于是

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}$$

### 3. 均匀带电圆环轴线上一点的场

如图 5.2-11 所示, 以圆心为坐标原点  $O$ , 过圆心垂直于圆面的直线为  $x$  轴,  $P$  点坐标为  $x$ .

在圆环上取线元  $dl$ ,  $dq = \lambda dl$ , 其中  $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$ , 该电荷元在  $P$  点产生的元场强  $dE$  方向如图, 大小为

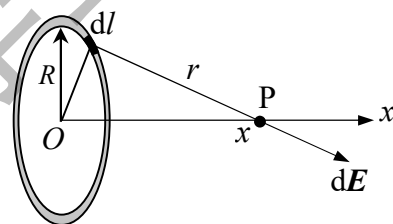


图 5.2-11 均匀带电圆环轴线上一点的场

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2 + x^2}$$

由对称性可知, 位于任一直径两端的一对电荷元, 在  $P$  点产生的电场, 其垂直于  $x$  轴的分量相互抵消, 故在  $P$  的总场强只具有  $x$  方向的分量

$$\begin{aligned} E = E_x &= \int dE_x = \int dE \cos \theta = \int_{\text{圆周}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \lambda \int_{\text{圆周}} dl \end{aligned}$$

则

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (5.2-8)$$

上式表明, 均匀带电圆环对轴线上任意点处的电场强度, 是该点距环心  $O$

的距离  $x$  的函数, 如图 5.2-12 所示. 下面讨论几种特殊情况.

(a) 若  $x = 0$ , 则  $E = 0$ , 即圆心处的场强为零, 这是电荷分布对称性的必然结果.

(b) 若  $x \gg R$ , 则  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2}$ , 即对于远场点, 圆环可视为点电荷.

(c) 由  $\frac{dE}{dx} = 0$ , 可求得电场强度极大值的位置为

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

这表明在圆环轴线上, 圆心两侧  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} R$  处场强最大.

#### 4、均匀带电薄圆盘轴线上一点的场

半径为  $R$  的均匀带电薄圆盘, 电荷量为  $q$ ,  $P$  为过盘心且与盘面垂直的轴上一点. 以盘心  $O$  为坐标原点, 沿轴线为  $x$  轴,  $P$  点的坐标为  $x$ .

如图 5.2-13 所示, 圆盘可视为由无数个同心圆环带组成. 取半径为  $r$ , 宽度为  $dr$  的圆环带, 其面积为  $dS = 2\pi r dr$ , 环上所带电荷量为

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

其中,  $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$  表示面电荷密度.

由 (5.2-8) 式, 将其中的  $q$  换成  $dq$  即得该带电圆环带在  $P$  点激发的元场强

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq \cdot x}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr \cdot x}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\pi\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \frac{d(r^2 + x^2)}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

由于各圆环带在  $P$  点产生的电场方向相同, 均沿轴线方向, 所以  $P$  点总场强就是上式的直接积分

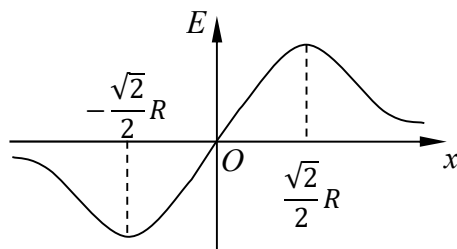


图 5.2-12 均匀带电圆环对轴线上的场强分布曲线

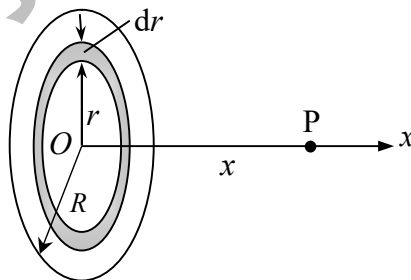


图 5.2-13 均匀带电圆盘轴线上一点的场

$$E = \int_0^R \frac{\sigma x}{4\epsilon_0} \frac{d(r^2 + x^2)}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \quad (5.2-9)$$

当  $x \ll R$  时, 对 P 点而言, 圆盘可视为无限大均匀带电平面, 由上式可得

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (5.2-10)$$

可见, 无限大均匀带电平面附近的电场是一个均匀场.

当  $x \gg R$  时, 只要对 (5.2-9) 式括号中的第二项进行泰勒展开

$$\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \left[ 1 + \left( \frac{R}{x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{x} \right)^2$$

代入式 (5.2-9) 可得

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} \right) \right] = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{R^2}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2}$$

即在远离圆盘处可将圆盘视为点电荷处理.

### 例 5.2-1 求均匀带电半球面在球心的电场

解: 设球面半径为  $r$ , 电荷面密度为  $\sigma$ , 取原点与球面中心重合的球面坐标如图 5.2-14 所示. 球坐标中的面元  $dS$  可以看作是边长为  $r d\theta$  和  $r \sin\theta d\phi$  的矩形, 其面积为

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

面元上的电荷在 O 点的场强为

$$dE = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

当  $\sigma$  为正时,  $dE$  的方向由  $dS$  指向球心. 由

于对称性, 只有  $dE$  沿  $z$  轴的分量  $dE_z$  才对 O 点的合电场有贡献.

$$dE_z = -dE \cos\theta = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi$$

对  $\phi$  积分, 即得一条球面带的电荷在 O 点产生的电场. 这球面带的位置在  $\theta$  和  $\theta + d\theta$  之间, 对  $\theta$  积分就可以得到所有整个半球面在 O 点产生的电场:

$$E = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

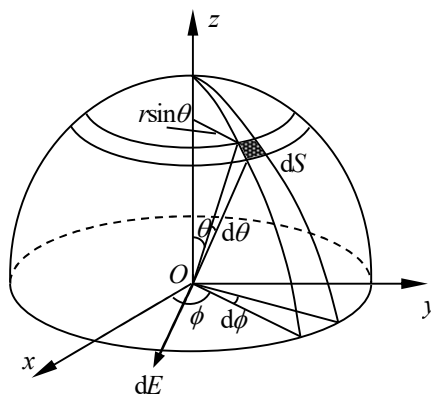


图 5.2-14 例题 5.2-1 图  
均匀带电半球面在球心的电场

$$= -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

负号表示  $\mathbf{E}$  沿负  $z$  方向.

如果在  $Oxy$  平面下面还有一相同的半球面,它在  $O$  点产生的场强亦为  $\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$ ,但沿正  $z$  轴方向,因此均匀带电球壳在球心处的场强为零.

#### 5.2.4 匀强电场对电偶极子的作用

当电偶极子处于电场强度为  $\mathbf{E}$  的匀强电场中时,两个电荷所受的电场力大小均等于  $qE$ ,方向相反,合力为零.

由于  $\mathbf{p}$  的方向与  $\mathbf{E}$  的方向不一定相同,如图 5.2-15 所示,正负电荷所受力不共线,形成了一个力偶,其力偶矩大小为

$$M = qEl \sin \theta = pE \sin \theta$$

式中  $\theta$  为电矩  $\mathbf{p}$  与场强  $\mathbf{E}$  之间的夹角.

写成矢量形式

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (5.2-11)$$

在力矩  $\mathbf{M}$  的作用下,电偶极子将在由  $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{E}$  构成的平面内转动.当  $0 < \theta < \pi$  时,  $M = qEl \sin \theta \neq 0$ ,力矩使电矩转向与电场强度方向一致;当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时,力矩为极大值,  $M = qEl$ ;当  $\theta = 0$  或  $\theta = \pi$  时,  $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{E}$  同向或反向平行,电偶极子所受的力矩为零.

### §5.3 高斯定理

#### 5.3.1 电场线

在电场中画出一系列有方向的曲线,规定曲线上任一点的切线方向表示该点处的电场强度的方向,并以曲线的疏密表示电场强度的大小,这些曲线称为电场线或  $\mathbf{E}$  线.电场线并不是电场中客观存在的,只是为了形象描述电场的分布而画出的假想几何曲线.

为了能用电场线定量描述电场强度的大小,规定:在与电场强度方向垂直的单位面积上所通过的电场线条数等于该处的电场强度数值,即

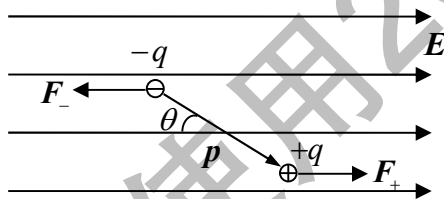


图 5.2-15 匀强电场对电偶极子的作用



$$E = \frac{dN}{dS_{\perp}} \quad (5.3-1)$$

式中  $dS_{\perp} = dS \cos \theta$  为垂直于电场方向的面积元， $dN$  为通过此面积元的电场线条数，如图 5.3-1 所示。这样，就把电场线的密度与电场强度的大小联系起来了。电场线密集处电场强度较大，电场线稀疏处电场强度较小。

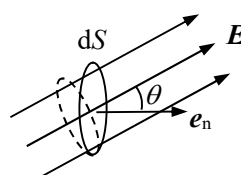
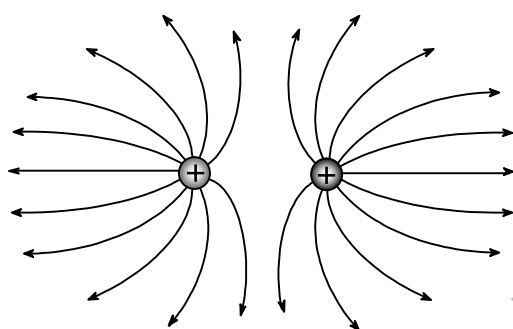
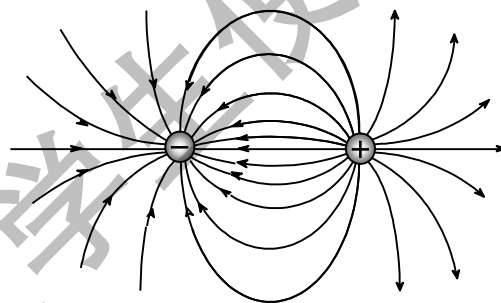


图 5.3-1 电场线数密度

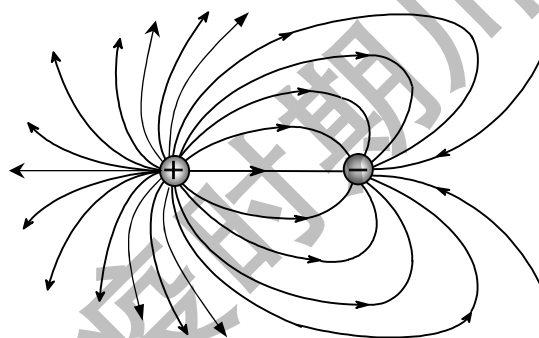
图 5.3-2 给出了几种典型带电系统的电场线。



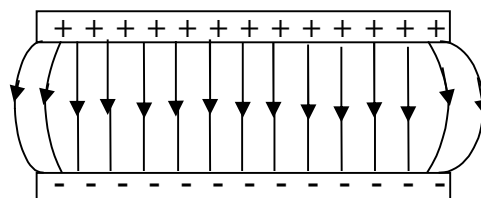
(a) 一对等量正点电荷的电场线



(b) 一对等量异号电荷的电场线



(c) 一对不等量异号点电荷的电场线



(d) 带电平行板电容器的电场线

图 5.3-2 几种典型带电体系的电场线

电场线的性质如下：

- (1) 静电场的电场线起于正电荷或无限远处，止于负电荷或无限远处，不能在无电荷的地方中断。
- (2) 静电场的电场线不能形成闭合曲线。
- (3) 两条电场线不能相交。

### 5.3.2 电场强度通量

通过某空间曲面的电场线的数目，称为通过该面的电场强度通量，记为  $\Phi_E$ 。由 (5.3-1) 式可知

(1) 若电场为匀强电场，如图 5.3-3 所示，通过垂直于电场线的平面  $S$  的电场强度通量为

$$\phi_E = ES$$

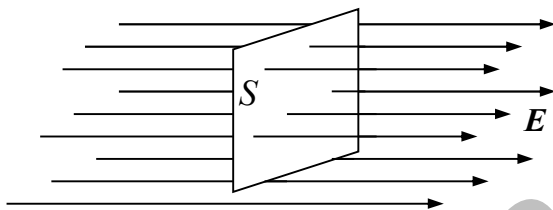


图 5.3-3 匀强电场中垂直平面的电场强度通量

(2) 若电场为匀强电场，如图 5.3-4 所示，通过任意平面  $S$  的电场强度通量为

$$\phi_E = ES \cos \theta = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}$$

其中， $\mathbf{S} = S\mathbf{e}_n$  称为面积矢量， $\mathbf{e}_n$  是该平面法线方向的单位矢量， $\theta$  为  $\mathbf{e}_n$  与电场线之间的夹角。

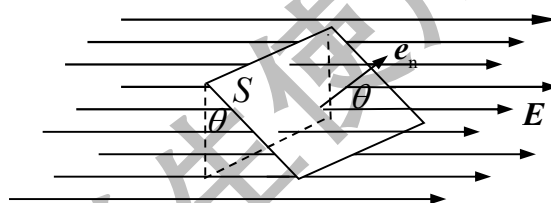


图 5.3-4 匀强电场中任意平面的电场强度通量

(3) 对于非匀强电场中的任意曲面  $S$ ，如图 5.3-5 所示，可在该曲面上任取一面积元  $d\mathbf{S} = dS\mathbf{e}_n$ ，该面积元处的场强  $\mathbf{E}$  可视为是均匀的。于是由 (2) 的结论可知

$$d\phi_E = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

则通过整个曲面的电场强度通量为所有面元通量的和，即

$$\phi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.3-2)$$

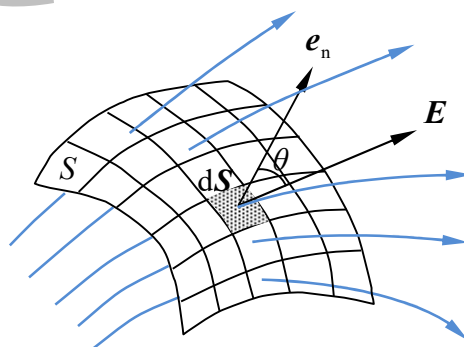


图 5.3-5 任意曲面的电场强度通量

这就是电场强度通量的普遍表达式。

需要指出，电场强度通量是标量。对于非闭合曲面，通量的正负取决于  $d\mathbf{S}$  的法向与场强的取向。

**例 5.3-1** 三棱柱体放在如图 5.3-6 所示的匀强电场中。求通过此三棱柱体的电场强度通量。

**解：**三棱柱体表面由 5 个平面构成一闭合曲面。其中 NMQO 所围的面积为  $S_1$ ，MQPL 所围的面积为  $S_2$ ，NOPL 所围的面积为  $S_3$ ，MNL 所围的面积为  $S_4$ ，OPQ 所围的面积为  $S_5$ 。此匀强电场中通过  $S_1$ ， $S_2$ ， $S_3$ ， $S_4$  和  $S_5$  的电场强度通量分别为

$\Phi_{e1}$ ,  $\Phi_{e2}$ ,  $\Phi_{e3}$ ,  $\Phi_{e4}$ , 和  $\Phi_{e5}$ . 故通过闭合曲面的电场强度通量为

$$\Phi_e = \Phi_{e1} + \Phi_{e2} + \Phi_{e3} + \Phi_{e4} + \Phi_{e5}$$

由式 (5.3-2) 可求得通过  $S_1$  面的电场强度通量为

$$\Phi_{e1} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

从图中可见, 面  $S_1$  的正法线单位矢  $\mathbf{e}_{n1}$  的方向与电场强度  $\mathbf{E}$  的方向之间夹角为  $\pi$ , 故

$$\Phi_{e1} = ES_1 \cos \pi = -ES_1$$

而面  $S_3$ ,  $S_4$  和  $S_5$  的正法线单位矢均与  $\mathbf{E}$  垂直, 故

$$\Phi_{e3} = \Phi_{e4} = \Phi_{e5} = 0$$

对于面  $S_2$ , 其正法线单位矢  $\mathbf{e}_{n2}$  与  $\mathbf{E}$  的夹角  $0 < \theta < \pi/2$ , 故

$$\Phi_{e2} = \iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = ES_2 \cos \theta$$

而  $S_2 \cos \theta = S_1$ , 所以

$$\Phi_{e2} = ES_1$$

把它们代入得

$$\Phi_e = \Phi_{e1} + \Phi_{e2} + \Phi_{e3} + \Phi_{e4} + \Phi_{e5} = -ES_1 + ES_1 = 0$$

上述结果表明, 在匀强电场中穿入三棱柱体的电场线与穿出三棱柱体的电场线数目相等, 即穿过闭合曲面 (三棱柱体表面) 的电场强度通量为零.

### 5.3.3 电场的高斯定理

#### 一、闭合曲面的正法线方向

对于非闭合曲面, 其面元矢量的正法线方向  $\mathbf{e}_n$  的指向可任意选取.

对于闭合曲面, 有严格的内外之分. 规定: 由表面指向外侧的法线方向为闭合曲面的正法线方向  $\mathbf{e}_n$ , 如图 5.3-7 所示.

这样, 对于闭合曲面, 电场强度通量代表

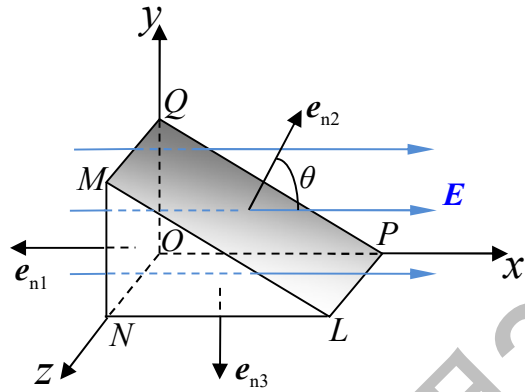


图 5.3-6 例题 5.3-1 图

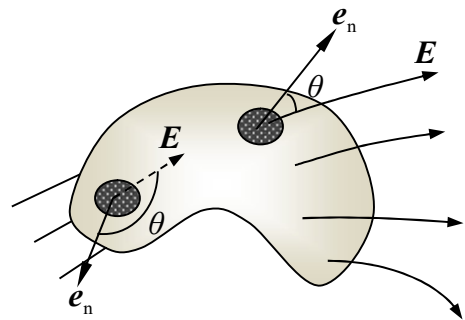


图 5.3-7 闭合曲面的电场强度通量

穿出和穿入该闭合曲面的电场线的净条数：

若  $\phi_E > 0$ ，表明有净的电场线穿出，即电场线穿出该闭合曲面的数目大于穿入数目；若  $\phi_E < 0$ ，表明有净的电场线穿入，即电场线穿出该闭合曲面的数目小于穿入数目；若  $\phi_E = 0$ ，则表明穿出与穿入该闭合曲面的电场线数目相等。

## 二、高斯定理

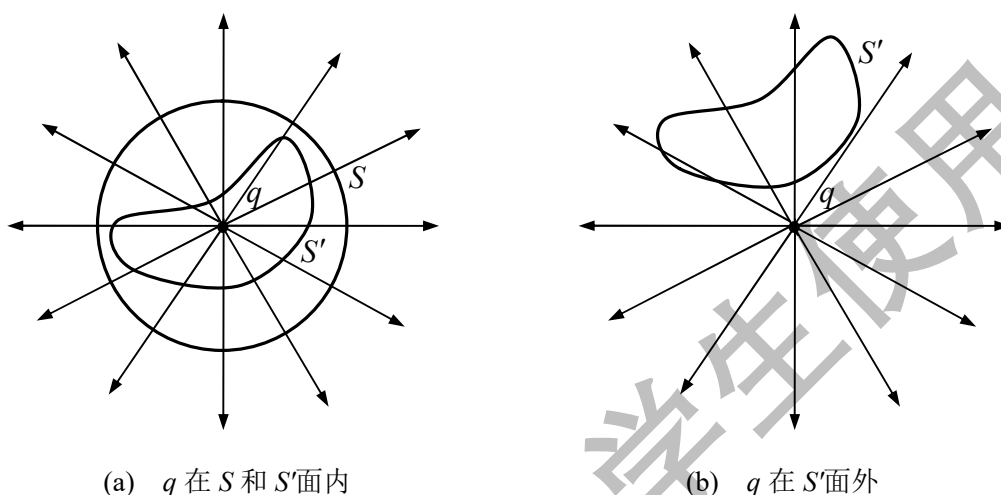


图 5.3-8 点电荷源对闭合曲面的通量

高斯定理是用电场强度通量表示电场与场源电荷关系的重要规律，本节从点电荷的电场出发，根据库仑定律和场强叠加原理来导出这一关系。

如图 5.3-8 (a)、(b) 所示，若场源是一个点电荷  $q$ ，则该点电荷的电场对任一闭合曲面  $S$  的电场强度通量为

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S \frac{dS}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega^* \\ &= \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & (q \text{ 在 } S \text{ 面内}) \\ 0 & (q \text{ 在 } S \text{ 面外}) \end{cases}\end{aligned}$$

式中  $d\Omega$  为  $dS$  对点电荷所张立体角\*。可以看到，只有处于面内的点电荷  $q$ ，其产生的场才会对该闭合面有电场强度通量  $\frac{q}{\epsilon_0}$ ；在面外的点电荷，对该闭合面的电场强度通量无贡献。

现在设想空间任一闭合曲面如图 5.3-9 所示，若面内的电荷为  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_k$ ，

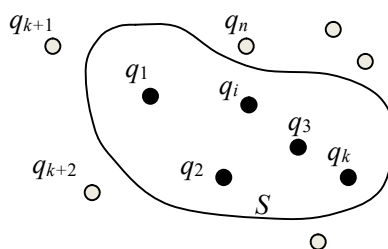


图 5.3-9 点电荷系对闭合曲面的通量

闭合曲面外的电荷为  $q_{k+1}$ 、 $q_{k+2}$ 、 $\cdots$ 、 $q_n$ 。则第  $i$  个点电荷产生的电场  $\mathbf{E}_i$  通过闭合曲面  $S$  的电场强度通量为

$$\oiint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} \frac{q_i}{\varepsilon_0} & i = 1, 2, \cdots, k \quad (\text{面内}) \\ 0 & i = k+1, k+2, \cdots, n \quad (\text{面外}) \end{cases}$$

由电场强度的叠加原理， $S$  面上任一点的总电场强度为

$$\mathbf{E} = \sum_i^n \mathbf{E}_i$$

因此通过闭合曲面  $S$  的总电场强度通量为

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \sum_i^n \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \sum_i^n \oiint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i^k q_i \quad i = 1, 2, \cdots, k \end{aligned}$$

上式表明，通过闭合曲面  $S$  的总电场强度通量，只与面内电荷的代数和有关，即

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{(\text{面内})} q_i \quad i = 1, 2, \cdots, k \quad (5.3-6)$$

若场源电荷是连续分布的带电体，可将其划分为无穷多的电荷元，在计算时只需将对  $q_i$  的求和运算改成对  $dq$  的积分即可，则上式变为

$$\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{S_{\text{面内}}} dq \quad (5.3-7)$$

此即静电场中的高斯定理：通过任意闭合曲面的电场强度通量等于面内所包围电荷量代数和的  $\frac{1}{\varepsilon_0}$ 。

几点说明：

(1) 库仑定律只适用于静电场；而高斯定理不仅适用于静电场，也适用于变化的电场。

(2) 高斯定理是静电学的普遍定理之一，它给出了场与源的关系，说明静电场是有源场。

(3) 高斯面（即闭合曲面  $S$ ）外的电荷虽然对通量没有贡献，但对于高斯面上任一点的电场都有影响。高斯面上各点的电场是空间中分布的所有电荷（包括面内和面外）共同产生的。

\*\*\*

### \*立体角

为了说明点电荷对于任意曲面的电通量问题,这里介绍立体角的概念.如图 5.3-10 所示,面积元  $dS$  对某点  $O$  所张的立体角定义为

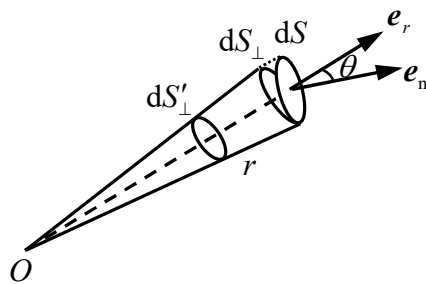


图 5.3-10 立体角

$$d\Omega = \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = \frac{dS \cos \theta}{r^2} \quad (\text{附 5-1})$$

其中  $\theta$  为矢径  $\mathbf{r}$  与面积元  $d\mathbf{S}$  的正法线方向之间的夹角.  $dS \cos \theta = dS_{\perp}$  可以看成以  $O$  为球心,  $r$  为半径的球面的一部分. 由于球面积与半径  $r$  的平方成正比, 所以  $dS$  与  $dS'$  对应的立体角相等.

对于任意闭合空间曲面, 如图 5.3-11 所示, 如果在  $O$  点看到的是  $d\mathbf{S}$  的内侧, 则  $\theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $d\Omega > 0$ ; 如果在  $O$  点看到的是  $d\mathbf{S}$  的外侧, 则  $\theta > \frac{\pi}{2}$ ,  $d\Omega < 0$ .  $O$  点对  $dS_1$ 、 $dS_2$ 、 $dS_3$  的立体角绝对值相等, 其中  $O$  点对  $dS_1$ 、 $dS_3$  的立体角为正, 对  $dS_2$  的立体角为负; 而面外一点  $O'$  对  $dS_1'$  的立体角为负, 对  $dS_2'$  的立体角为正.

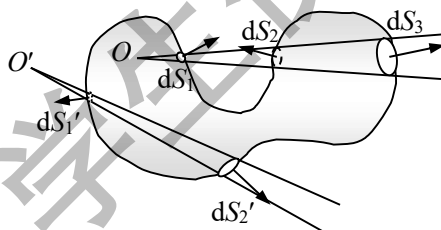


图 5.3-11 闭合曲面的立体角

这样, 根据 (附 5-1) 式不难证明, 任意闭合空间曲面对于曲面内任意一点  $O$  所

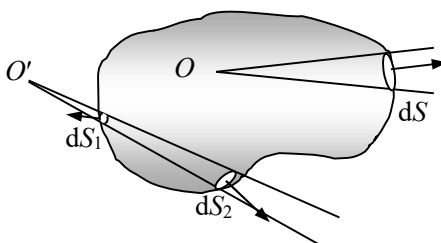


图 5.3-12 闭合曲面的立体角

张的立体角都等于  $4\pi$ , 而对于曲面外任意一点  $O'$  所张的立体角都等于 0, 如图 5.3-12 所示, 即

$$\Omega = \oint_{(S)} d\Omega = \begin{cases} 4\pi & \text{参考点在闭合曲面内} \\ 0 & \text{参考点在闭合曲面外} \end{cases} \quad (\text{附 5-2})$$

立体角的单位是球面度 (sr), 无量纲.

\*\*\*

### 5.3.4 高斯定理的应用

当电荷分布具有较高对称性时, 可利用高斯定理求解电场强度的分布.

### 一、均匀带电球壳的电场

电荷量  $q$  均匀分布在半径为  $R$  的球壳上, 球心为  $O$ . 由于电荷分布具有球对称性, 故电场分布也具有球对称性, 即以  $O$  为圆心的任一球面上各点电场强度的大小相等, 方向均沿球面的径向.

点  $P$  为空间任一点, 选取以从  $O$  至  $P$  点的距离  $r$  为半径的球面  $S$  为高斯面, 如图 5.3-13 (a) 所示. 由对称性分析可得对  $S$  的电场强度通量为

$$\oiint_{(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{(S)} E dS = E \oiint_{(S)} dS = E 4\pi r^2$$

再由高斯定理, 有

(1) 若  $P$  点在球壳面外,

$$r > R \quad E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad \text{得} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

(2) 若  $P$  点在球壳面内,  $r < R \quad E 4\pi r^2 = 0$ ,  
得  $E = 0$

对于均匀带电球壳, 壳内无电场, 壳外电场分布与球壳上所有电荷全部集中于球心处产生的电场一致, 如图 5.3-13 (b) 所示.

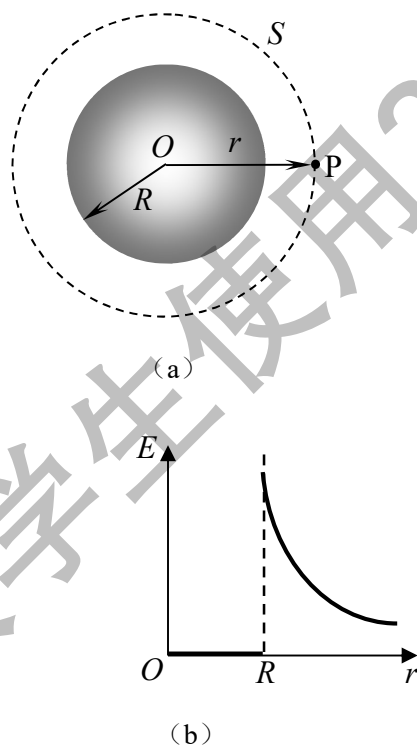


图 5.3-13 均匀带电球壳产生的场

### 二、无限长均匀带电圆柱面产生的场

半径为  $R$  的无限长圆柱面上电荷均匀分布, 单位长度上的电荷量为  $\lambda$ . 由于电荷分布具有轴对称性, 故电场分布也具有轴对称性, 又因为无限长, 各点场强的方向应垂直于圆柱体的轴线, 在与圆柱体共轴的任一圆柱面上各点电场强度的大小相等.

选取半径为  $r$ , 高为  $h$  的闭合同轴圆柱面为高斯面  $S$ , 场点  $P$  落在侧面  $S_{\text{侧}}$  上, 如图 5.3-14 (a) 所示.

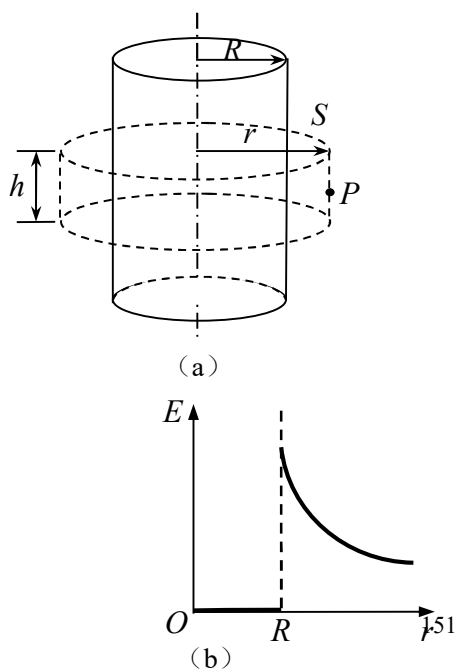


图 5.3-14 无限长均匀带电圆柱面的场

由对称性分析可得对  $S$  的电场强度通量为

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_{\text{上}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{\text{下}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{\text{侧}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_{S_{\text{侧}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \iint_{S_{\text{侧}}} dS = E2\pi rh\end{aligned}$$

再由高斯定理

$$(1) \text{ 若 } P \text{ 点在圆柱面外, } r > R \quad E2\pi rh = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}, \text{ 得 } E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$(2) \text{ 若 } P \text{ 点在圆柱面内, } r < R \quad E2\pi rh = 0, \text{ 得 } E = 0$$

对于无限长带电圆柱面, 面内无电场, 面外电场分布与面上所有电荷集中于轴线上产生的电场一致, 如图 5.3-11 (b) 所示.

### 三、无限大均匀带电平面产生的场

无限大均匀带电平面, 面电荷密度为  $\sigma$ . 其电场具有面对称性, 即平面两侧到面的距离相等的场点的场强大小相等, 又由于平面无限大, 各点场强均与平面垂直.

对于平面外的  $P$  点, 过  $P$  点做一个面积为  $\Delta S$  的小平面, 以  $\Delta S$  为底做一个如图 5.3-15 所示的圆柱面, 其轴线与带电平面相垂直, 左右两侧的底面到带电平面的距离相等, 场点在其中一个底面 (比如  $S_{\text{右}}$ ) 上.

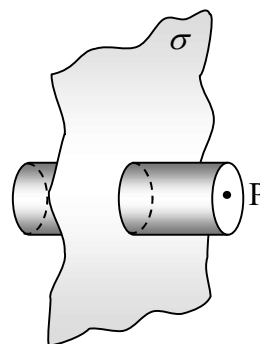


图 5.3-15 无限大均匀带电平面产生的场

由对称性分析可得对  $S$  的电场强度通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_{\text{左}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{\text{右}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{\text{侧}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2E\Delta S$$

由高斯定理

$$2E\Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S$$

得



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (5.3-9)$$

与 5.2.5 中的 (5.2-10) 式一致.

利用电场强度叠加原理可知, 带等量异号电荷的一对无限大平行平板之间的电场强度为

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (5.3-10)$$

是均匀电场, 而两板外侧的电场强度则为零, 如图 5.3-16 所示.

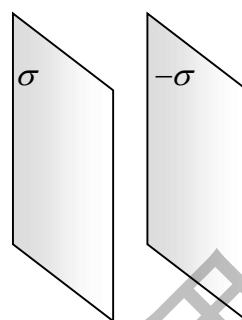
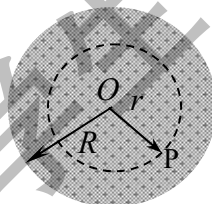


图 5.3-16 两带电平行平面的电场

#### 四、均匀带电球体的电场分布

半径为  $R$  的均匀带电球体, 总电量为  $q$ . 如图 5.3-17 (a) 所示. 设想均匀带电球体是由一层一层同心均匀带电球壳构成; 均匀带电球体与均匀带电球壳的电场分布具有同样的对称性.

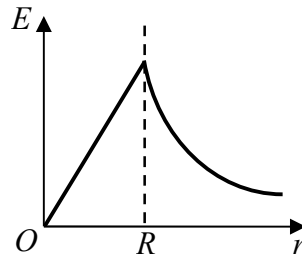


(a)

(1) 在球体外, 电场分布仍为

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r \geq R), \text{ 其矢量表示为}$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (r \geq R) \quad (5.3-11)$$



(b)

(2) 求球内的场强分布, 过球内任意点  $P$ , 做一个半径为  $r$  的同心球面为高斯面, 此高斯面的电场强度通量为  $E \cdot 4\pi r^2$ , 高斯面包含的电荷量为

$$\sum q_{\text{int}} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{qr^3}{R^3}$$

利用高斯定理, 得

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \quad (r \leq R)$$

表明, 在均匀带电体内部各点场强的大小与场点距球心的距离  $r$  成正比, 考虑到  $\mathbf{E}$  的方向, 写为矢量式

图 5.3-17 均匀带电球体的场强分布

$$\mathbf{E} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{e}_r \quad (r \leq R) \quad (5.3-12)$$

$\mathbf{e}_r$  为径向单位矢量，或可以写为

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \mathbf{e}_r \quad (r \leq R) \quad (5.3-13)$$

其中， $\rho = \frac{q}{4\pi R^3/3}$  为带电球体的体电荷密度。注意到，在球体表面上，场强的大小是连续的，如图 5.3-17 (b) 所示。

## 高斯

(Carl Friedrich Gauss, 1777—1855)

德国数学家、天文家和物理学家。他被认为是最重要的数学家，有数学王子的美誉，并被誉为历史上伟大的数学家之一，和阿基米德、牛顿并列。

在电磁学方面，他发明了磁强计；他和物理学家韦伯 (Wilhelm Eduard Weber, 1804—1891) 共同研制了第一个有线电报系统，并建立了地磁观测台，在 1840 年他们画出了世界上第一张地球磁场图，而且定出了地球磁南极和磁北极的位置。

在 CGS 电磁系单位制 (emu) 中磁感应强度的单位定为高斯 (10000 高斯等于 1 特斯拉)，便是为了纪念高斯在电磁学上的卓越贡献。



## §5.4 电势

### 5.4.1 静电场力做功 静电场的环路定理

我们已经知道，静电场具有对置于其中的电荷作用以电场力的性质，从而引入了电场强度  $\mathbf{E}$ 。在静电场中电荷移动时，电场力要对电荷做功。这里分析静电场力对试验电荷做功的特点。

如图 5.4-1 所示，在场源点电荷  $q$

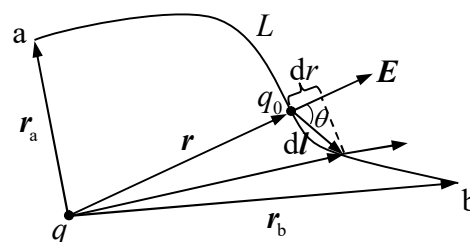


图 5.4-1 在点电荷  $q$  的电场中，电场力对试验电荷  $q_0$  做功的计算示意图

的电场中，将试验电荷  $q_0$  沿任意路径  $L$  从电场中的  $a$  点移到  $b$  点，由于  $q_0$  所受电场力的大小和方向在路径上的各点均不同，我们将  $L$  分割成许多小线元，考虑其中任一线元  $dL$ ，其上的元功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = F \cos \theta dl = q_0 E dr$$

$$A_{ab} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b q_0 E dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2}$$

沿路径  $L$  从电场中的  $a$  点移到  $b$  点所做功为

$$A_{ab} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (5.4-1)$$

式中  $r_a$  和  $r_b$  分别为  $a$  点和  $b$  点到场源  $q$  的距离。

结果表明，点电荷  $q$  的电场中电场力做功与路径无关，仅由起点和终点的位置决定。

在一般情况下，电场源可能是任意的带电体而非点电荷，这时我们可以把产生电场的带电体划分为许多带电荷元，每一带电荷元可以看成是一个点电荷，这样就把任意的带电体看作点电荷组。总场强  $\mathbf{E}$  是各点电荷  $q_1$ 、 $q_2$ 、...、 $q_n$  单独产生的场强  $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{E}_2$ 、...、 $\mathbf{E}_n$  的矢量叠加，即  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n$ 。因此试验电荷  $q_0$  沿任意路径  $L$  从电场中的  $a$  点移到  $b$  点时，电场力对其所做的功等于组成场源带电体的各点电荷的电场力做功的代数和，即

$$\begin{aligned} A_{ab} &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \int_a^b (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n) \cdot d\mathbf{l} \\ &= q_0 \int_a^b \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + q_0 \int_a^b \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \dots + q_0 \int_a^b \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

由于上式右方的每一项都与路径无关，所以总电场力所做功也与路径无关。

由此得出结论：对任意分布的电荷产生的电场，电场力做功与路径无关，仅由起点和终点的位置决定。所以静电场力是保守力，静电场是保守力场。

静电场的保守性还可以表述成另一种形式，如图 5.4-2 所示，在静电场中做一任意闭合路径  $L$ ，考虑场强  $\mathbf{E}$  沿此闭合路径的线积分。在  $L$  上取任意两点  $P_1$

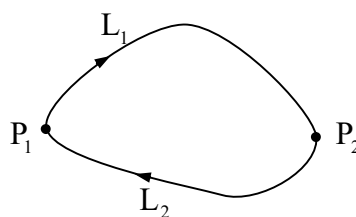


图 5.4-2 静电场的环路定理

和  $P_2$ ，它们把  $L$  分成  $L_1$  和  $L_2$  两段，因此沿  $L$  环路的场强线积分为

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{L_1(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{L_2(P_2)}^{(P_1)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{L_1(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{L_2(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} =\end{aligned}$$

由于场强线积分与路径无关，上式最后的两个积分值相等，所以

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (5.4-2)$$

即静电场的电场强度沿任一闭合路径的线积分为零。这一结论称为静电场的环路定理。

#### 5.4.2 电势差和电势

在力学中曾指出过，对任何保守力场都可引入势能概念。静电力是保守力，故静电中可以引入电势能的概念。试验电荷  $q_0$  沿任意路径  $L$  从电场中的  $a$  点移到  $b$  点时，电场力对其所做的功  $A_{ab}$  等于这两点间电势能增量的负值

$$A_{ab} = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = W(a) - W(b) \quad (5.4-3)$$

式中  $W(a)$  和  $W(b)$  分别表  $q_0$  在  $a$  点和  $b$  点的电势能。(5.4-3) 式表明电场力做正功，以电势能减少为代价；电场力做负功，电势能增加。

电荷处在静电场内任意给定两点的电势能的变化，可以用电场力沿连结这两点的任意路径上做的功来量度。由于静电力做功与路径无关，当场内两点的位置确定以后，电势能差是完全确定的。

电荷处在电场内任意给定两点的电势能差，不仅与场有关，而且与此电荷的电荷量有关。但电势能差与该电荷的电荷量的比值  $\frac{W(a) - W(b)}{q_0} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ ，则与电荷无关，它反映了电场本身在  $a$  点和  $b$  点的性质。用静电场内  $a$ 、 $b$  两点的电势  $\varphi_a$  与  $\varphi_b$  之差来表示这一比值，即

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.4-4)$$

这就是说，在静电场内任意两点  $a$  和  $b$  的电势差，在数值上等于一个单位正电荷从  $a$  沿任一路径移到  $b$  的过程中，电场力所做的功。电势差又称电压。

若取 b 点为电势零点，则任一点 a 的电势可表示为

$$\varphi_a = \int_a^{\text{电势零点}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.4-5)$$

静电场内任意给定两点的电势差是完全确定的，但电场内某点的电势则取决于电势零点的选择。电势零点选择不同，同一点的电势可以具有不同的值。在国际单位制（SI）中，电势或电势差的单位为伏特，符号为 V， $1\text{V}=1\text{J}/\text{C}$ 。

在理论分析中，原则上电势零点的选择是任意的，但为了方便起见，常规定：若产生电场的源电荷分布在空间有限的范围内，则选取无限远处作为电势零点，那么静电场内某一点 a 的电势实质上就是 a 点与无限远处的电势差，即

$$\varphi_a = \int_a^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.4-6)$$

它在数值上等于把单位正电荷由 a 点移到无限远处的过程中电场力做的功。在实际工作中，常以大地作为电势的零点。

引入电势以后，电荷量为  $q$  的电荷在 a 点的电势能即为

$$W_a = q\varphi_a \quad (5.4-7)$$

如果该电荷  $q$  从 a 点沿任意路径移至 b 点，电场力所做的功为

$$A_{ab} = W_a - W_b = q(\varphi_a - \varphi_b) \quad (5.4-8)$$

### 5.4.3 电势的计算

#### 一、点电荷的电势

当场源是电荷量为  $q$  的孤立点电荷时，选取无限远为电势零点，根据电势定义式（5.4-5）得场内离点电荷的距离为  $r$  的 P 点的电势为

$$\varphi = \int_P^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

即

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (5.4-9)$$

当  $q$  为正时，电势也为正，离点电荷越远，电势越小，在无限远处电势最小，其值为零。当  $q$  为负时，电势也为负，离点电荷越远电势越大，在无限远处电势最大，其值为零。

#### 二、点电荷系的电势

若场源电荷是点电荷系，各点电荷的电荷量分别为  $q_1, q_2, \dots$ ，根据电场强度的叠加原理，空间任一点 P 的电势为

$$\begin{aligned}\varphi &= \int_a^{\text{势能零点}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^{\text{势能零点}} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^{\text{势能零点}} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_a^{\text{势能零点}} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_a^{\text{势能零点}} \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{r} \\ &= \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n\end{aligned}$$

利用 (5.4-9) 式，得

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (5.4-10)$$

式中  $\mathbf{E}_i$ 、 $\varphi_i$  分别为点电荷  $q_i$  单独存在时在 P 点的电场强度和电势， $r_i$  为  $q_i$  到点 P 的距离。

上式表明，点电荷系的电场中某点 P 的电势等于各点电荷单独存在时在该点产生的电势的代数和，这一结论称为电势叠加原理。

### 三、连续带电体的电势分布

对于任意形状的电荷连续分布的带电体产生的电势，可以由电势叠加原理 (5.4-10) 式推广而得到

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (5.4-11)$$

式中  $r$  是电荷元  $dq$  到点 P 的距离。

### 四、电势的计算

在具体求解带电体的电势分布时，有两种基本的方法：

(1) 根据电势定义  $\varphi_a = \int_a^{\text{电势零点}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  求电势分布，适用于电场分布已知，或电荷分布具有对称性，电场强度易于求解的情形。注意电势零点的选择，若电荷分布至无限远处，则电势零点必须选在有限远的位置处。

(2) 利用电势叠加原理求电势分布。注意由于电势叠加方法是以点电荷的电势为基础进行叠加，故电势零点已选在无限远处，因此这种方法只适用于电荷分布在有限区域内的情形。

若电场是由一系列宏观带电体组成的系统所产生的，空间电势仍服从叠加原理。利用上述方法求出第  $i$  个带电体单独存在时在空间的电势分布  $\varphi_i$ ，则空间总的电势为

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

**例 5.4-1** 求均匀带电球面的电场中的电势分布. 球面半径为  $R$ , 总带电荷量为  $q$ .

**解:** 均匀带电球壳内外的场强分布为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases}$$

$\mathbf{e}_r$  为沿球径向的单位矢量.

以无限远为电势零点, 如图 5.4-3 (a) 所示, 对球壳外任一点  $a$ : 设  $a$  点到球心  $O$  点的距离为  $r_a$  ( $r_a > R$ ). 根据 (5.4-5) 式, 积分路径为沿  $\mathbf{e}_r$  方向由  $a$  至无限远, 则

$$\varphi_a = \int_a^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^{\infty} E dr = \int_{r_a}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_a}$$

可见  $\varphi_a$  与  $r_a$  成反比.

对球壳内任一点  $b$ : 设  $b$  点到球心  $O$  的距离为  $r_b$  ( $r_b < R$ ). 从  $b$  点至无穷远, 无论选择哪条路径, 均需经过球壳内、外二个不同的电场区域, 故积分需分段完成. 这里仍沿  $\mathbf{e}_r$  方向积分, 于是

$$\begin{aligned} \varphi_b &= \int_b^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_b^{\infty} E dr = \int_{r_b}^R E_{\text{内}} dr + \int_R^{\infty} E_{\text{外}} dr \\ &= \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

对球面上任一点  $c$ :  $r_c = R$ , 有

$$\varphi_c = \int_c^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_R^{\infty} E dr = \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

综上, 均匀带电球壳电场中的电势分布为

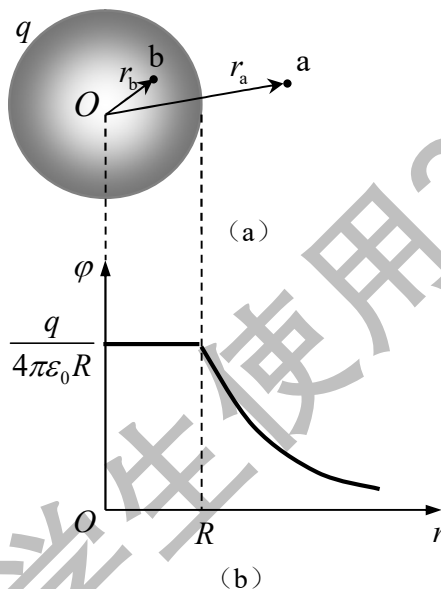


图 5.4-3 例题 5.4-1 图

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & (r > R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} & (r \leq R) \end{cases}$$

电势  $\varphi$  随  $r$  变化的情况如图 5.4-3 (b) 所示.

**例 5.4-2** 一半径为  $R$  的均匀带电细圆环, 所带电荷量为  $q$ , 求圆环中轴线上的电势分布.

**解:** 如图 5.4-4 所示,  $x$  为轴线上 P 点到环心  $O$  的距离, 在圆环上任取一电荷元  $dq$ . 利用电势叠加原理, 由 (5.4-11) 式可知 P 点的电势为

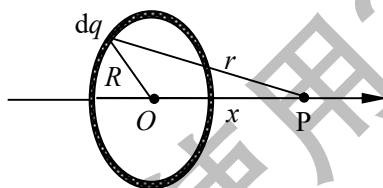


图 5.4-4 例题 5.4-2 图

$$\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int dq = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

由于  $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ , 于是

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$

当  $x = 0$ , 即 P 点位于环心时,  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ .

**例 5.4-3** 计算通过一均匀带电圆平面中心且垂直平面的轴线上任意点的电势.

**解:** 如图 5.4-5 所示, 圆平面的半径为  $R$ , 其中心与坐标原点  $O$  相重合, 点 P 距原点距离为  $x$ . 圆平面的电荷面密度为  $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$ . 把它分成许多个小圆环, 图中画出了一个半径为  $r$ , 宽为  $dr$  的小圆环, 该圆环的电荷为  $dq = \sigma 2\pi r dr$ .

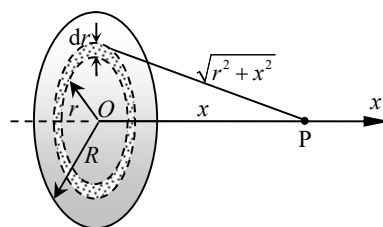


图 5.4-5 例题 5.4-3 图

利用上例的结果, 可得带电圆平面在点 P 的电势为

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + x^2} - x) \end{aligned}$$

显然, 当  $x \gg R$  时,  $\sqrt{R^2 + x^2} \approx x + \frac{R^2}{2x}$ . 由上式得

$$\varphi \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{R^2}{2x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \pi R^2}{x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x}$$



式中  $Q=\sigma\pi R^2$  为圆平面所带的电荷. 由这个结果可以看出, 场点 P 距场源很远时, 可以把带电圆平面视为点电荷.

**例 5.4-4** 求无限长均匀带电直线的电场中的电势分布.

**解:** 由式 (5.2-7) 得无限长均匀带电直线周围空间的场强的大小为

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r$$

其方向垂直于带电直线. 如果仍选无限远处作为电势零点, 则

$$\varphi = \int_0^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^\infty \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

积分的结果显示各点电势都将为无限大值而失去意义. 这是由于电荷分布延伸到了无限远时不能再将电势零点选到无限远处.

这时我们可选距带电直线为  $r_0$  的某点  $P_0$  为电势零点, 如图 5.4-6 所示. 则距带电直线为  $r$  的  $P$  点的电势为

$$\varphi = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_P^{P'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P'}^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

P 点至  $P_0$  点的积分路径可以任意选取, 这里不妨选取与带电直线平行的  $PP'$  段和与带电直线垂直  $P'P_0$  段组成的积分路径. 显然

$$\int_{P'}^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P'}^{P_0} E \cdot dr \cos 0 = 0$$

$$\int_P^{P'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \ln \frac{r_0}{r}$$

所以

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \ln \frac{r_0}{r}$$

$$(\varphi(r_0) = 0)$$

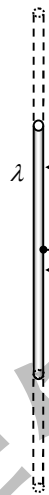


图 5.4-6 例题 5.4-4 图

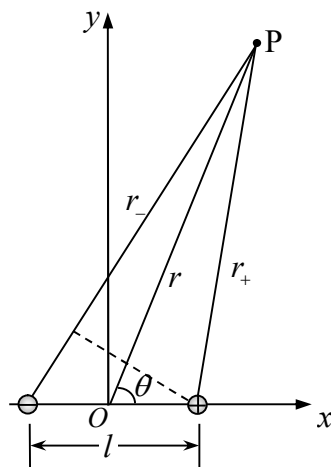


图 5.4-7 例题 5.4-5 图

**例 5.4-5** 求电偶极子  $p = ql$  电场中的电势分布.

**解:** 如图 5.4-7 所示, 设 P 点与  $+q$ 、 $-q$  所在平面为  $xOy$  面,  $+q$  和  $-q$  到 P 点的距离分别为  $r_+$  和  $r_-$ .  $+q$  和  $-q$

单独存在时，P 点的电势分别为

$$\varphi_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+}, \quad \varphi_- = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_-}$$

由电势的叠加原理，P 点的电势为

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

对于电偶极子， $l \ll r$ ，所以

$$r_- \approx r + \frac{l}{2} \cos \theta; \quad r_+ = r - \frac{l}{2} \cos \theta$$

故  $r_- - r_+ \approx l \cos \theta$ ， $r_+ r_- \approx r^2$ ，于是

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2}$$

即电偶极子在 P 点的电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

**例 5.4-6** 求电偶极子在静电场中的电势能

**解：**如图 5.4-8 所示，设正、负电荷所在处的电势分别为  $\varphi_+$  与  $\varphi_-$ ，由 (5.4-8) 式

$$W_{+q} = q\varphi_+, \quad W_{-q} = -q\varphi_-$$

$$W = W_{+q} + W_{-q} = q(\varphi_+ - \varphi_-)$$

再由 (5.4-6) 式

$$\varphi_+ - \varphi_- = \int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{E} \cdot \int_+^- d\mathbf{r} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{l}$$

故

$$W = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}$$

这就是电偶极子在均匀外场中的电势能表达式。

讨论：当  $\mathbf{p} \perp \mathbf{E}$  时，电偶极子的总电势能  $W = 0$ ；当  $\mathbf{p} \parallel \mathbf{E}$  时， $W = -pE$ ，势能最低，电偶极子处于稳定平衡状态；当  $\mathbf{p} \parallel -\mathbf{E}$  时， $W = pE$ ，势能最高，电偶极子处于不稳定平衡状态。平衡状态是指在均匀电场中，电偶极子所受合力为零，

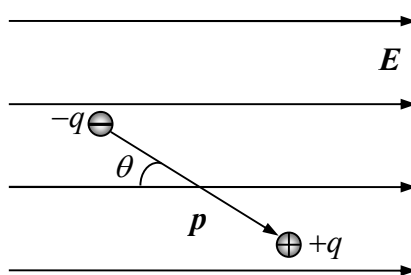


图 5.4-8 例题 5.4-6 图  
电偶极子在均匀外场中的电势

且所受合力矩为零的状态.

#### 5.4.4 等势面 电势梯度

当电势的零点选定后, 电场内各点电势都有确定的值. 由电势相等的各点构成的曲面称为等势面.

如图 5.4-9 所示, 在点电荷的电场中, 由于电场呈球对称性分布, 点电荷位于球心. 凡是  $r$  相等的各点电势相等, 所以点电荷电场的等势面是一系列以点电荷为球心的同心球面.

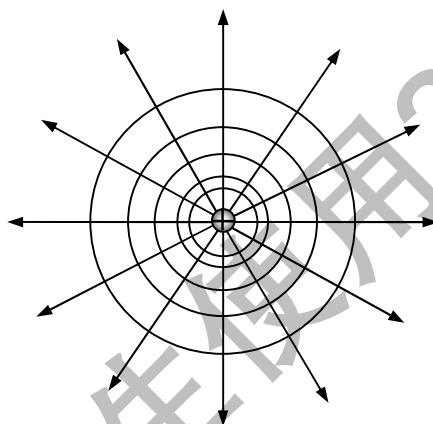


图 5.4-9 点电荷电场的等势面

为了使等势面能反映电场的强弱, 通常使相邻两个等势面之间的电势差相等. 这样, 电场强的地方, 等势面比较密集, 电场弱的地方, 等势面比较稀疏. 由于在等势面上移动电荷电场力不做功, 故  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ , 则  $\mathbf{E} \perp d\mathbf{r}$ , 即各点的场强必与过该点的等势面垂直. 因此电场线与等势面处处正交.

考虑相距很近的两个等势面, 电势分别为  $\varphi$  和  $\varphi + \Delta\varphi$ ,  $\Delta\varphi$  很小, 如图 5.4-10 所示. 设想一个单位正电荷沿任意方向  $\mathbf{l}$ , 从电势为  $\varphi$  的等势面上 P 点移到电势为  $\varphi + \Delta\varphi$  的等势面上 Q 点, 位移为  $\Delta\mathbf{l}$ , 电场力作的功为

$$A = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{l} = \varphi - (\varphi + \Delta\varphi) = -\Delta\varphi$$

或

$$E_l \Delta l = -\Delta\varphi$$

于是

$$E_l = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l} \quad (5.4-13)$$

式中  $E_l$  是电场强度  $\mathbf{E}$  在  $\mathbf{l}$  方向的分量,  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$  是电势沿  $\mathbf{l}$  方向的变化率. 从电势为  $\varphi$  的等势面上 P 点到电势为  $\varphi + \Delta\varphi$  的等势面上任一点, 电势的变化量都是  $\Delta\varphi$ ; 但沿不同方向, 电势的变化率  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$  则是不同的, 其值取决于  $\mathbf{l}$  的方向. 在  $\mathbf{l}$  的各

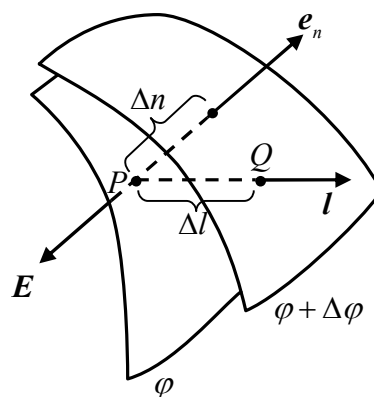


图 5.4-10 电场沿等势面法向指向电势降落的方向

种可能的方向中，有一个方向是等势面上 P 点的法线方向，用  $\mathbf{e}_n$  表示法向的单位矢量。沿法线方向， $\Delta l$  为两等势面间的垂直距离  $\Delta n$ ， $\Delta n = \Delta l \cdot \mathbf{e}_n$ ， $\Delta n$  是所有  $\Delta l$  中最小的值。因此，过 P 点沿等势面法线方向的电势变化率，是沿各个不同方向的变化率中的最大值，由 (5.4-13) 式有

$$E_n = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta n}$$

由于电场强度处处垂直于等势面，因而  $E_n$  就是该点场强  $\mathbf{E}$  的大小，而场强的方向沿等势面法线由高电势指向低电势。在极限情况下则有

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathbf{e}_n \quad (5.4-14)$$

在数学中，对于任何一个标量场  $\varphi$ ，可定义其梯度为

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathbf{e}_n \quad (5.4-15)$$

$\text{grad}\varphi$  是矢量，大小等于该标量函数的空间变化率，方向沿等值面的法线方向，故有

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi \quad (5.4-16)$$

即静电场中任何一点的电场强度的大小即为该点电势梯度的大小，电场强度的方向指向电势降落的方向。

在  $Oxyz$  直角坐标系中，场强  $\mathbf{E}$  可用该坐标系中的各分量来表示，即

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}$$

其中  $E_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ， $E_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ ， $E_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$  分别为  $\varphi$  沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的方向导数。在直角

坐标系中， $\text{grad}$  用算符 “ $\nabla$ ” 表示，有

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \quad (5.4-17)$$

则

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

即有

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\varphi \quad (5.4-18)$$

电势梯度的单位是 V/m.

**例 5.4-7** 用电场强度与电势的关系, 求均匀带电细圆环轴线上一点的电场强度.

**解:** 在例 5.4-2 中, 我们已求得在  $x$  轴上点 P 的电势为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

式中  $R$  为圆环的半径. 由式 (5.4-18) 可得点 P 的电场强度为

$$\begin{aligned} E = E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\sqrt{R^2+x^2}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

这与式 (5.2-8) 的计算结果相同.

**例 5.4-8** 用场强与电势梯度的关系, 计算电偶极子电场中的场强分布.

**解:** 例 5.4-2 计算了电偶极子的电势分布为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

利用电势梯度的概念, 在  $Oxy$  平面上, 电场强度分量为

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

因而电场强度为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} \\ &\equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{p \cdot (2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}} \mathbf{i} + \frac{3pxy}{(x^2+y^2)^{5/2}} \mathbf{j} \right] \end{aligned}$$

特别地, 在电偶极子的延长线上

$$y=0, \quad E_x = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^3}, \quad E_y = 0$$

在电偶极子的中垂线上

$$x=0, \quad E_x = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3}, \quad E_y = 0$$

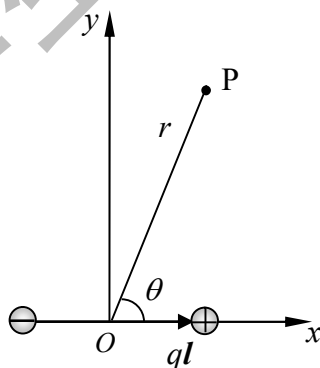


图 5.4-11 例题 5.4-8 图

与 5.2.3 节的结果一致.

求解静电场问题往往遇到矢量的积分运算, 而从电势计算静电场, 只涉及标量函数的积分和求导运算. 在一些情况下, 求得电势分布  $\varphi(x, y, z)$  后, 通过微分运算便可计算场强  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , 这样可以更为简便.

需要指出的是, 场强是矢量, 有三个分量, 电势是标量, 只有一个分量, 为什么一个函数  $\varphi(x, y, z)$  能给出三个函数  $E_x(x, y, z)$ 、 $E_y(x, y, z)$  和  $E_z(x, y, z)$  呢? 其实, 静电场并非一个完全任意的矢量场, 它必须满足  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ , 因而  $\mathbf{E}$  的三个分量并不是独立的. 例如  $\mathbf{E} = ay\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$  就不可能是一种静电场, 不存在产生这种场的电荷分布, 因为这样的电场不满足静电场的环路定理. 能用一个标量函数  $\varphi$  来描写静电场, 并由之得到一个矢量场 (场强), 是由静电场是保守场的性质决定的.

静电场的环路定理是从库仑定律导出的, 因为库仑定律已概括了静电场是有心力场这一特性, 凡是有心力场, 其环流都恒为零. 能够用一个标量势函数描写静电场的前提是静电场为有心力场, 而且只要求静电场是有心力场就足够了. 至于势函数的具体形式, 还取决于有心力的具体形式. 由电荷分布所确定的电势函数 (5.4-10) 式或 (5.4-11) 式, 已包括了电荷间相互作用的平方反比律这一内容, 即已包含了库仑定律的全部信息.

电势函数的值与电势零点的选择有关, 而电势零点的选择有很大的任意性, 电场中任何一点 (或与之等势的面) 都可以作为电势的零点. 把电势的零点取在无穷远处是因为分布在有限区域中的电荷产生的电场在远离电荷处的场强按  $1/r^2$  减少, 故无限远处任意两点的电势差为零, 无限远处是电势的等势区域, 因而我们可以把电势的零点取在这个区域中.

但是, 当电荷分布在无限大区域中时, 无限远处并不是等势区域. 在这种情况下, 虽然可以取远处某一确定点 (或与之等势的面) 作为电势的零点, 但却不能把无限远处作为电势的零点 (无限远处是一个区域).

例如, 无限大均匀带电平面产生的匀强电场, 其场强为  $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_x$  是沿  $x$  方向的单位矢量, 坐标原点取在带电平面上, 远处任意两点 A、B 间的电势差

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_B - x_A)$$

其中  $x_A$ 、 $x_B$  分别是 A、B 两点的坐标. 当 A、B 两点趋向于无限远时,  $x_B - x_A$  不

确定,  $\varphi_A - \varphi_B$  也不确定, 无限远处的区域不是等势区域, 这时若把无限远处作为电势的零点就不恰当了. 但在此问题中,  $x$  为任何确定值的平面都是等势面, 故我们可以把这种平面作为电势的零点. 例如, 若取  $x=0$  的平面即带电平面作为电势的零点, 则坐标为  $x$  处的电势

$$\varphi(x) = \int_x^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x|$$

负号表示电势随  $|x|$  的增大而减小. 电势的值虽与零参考点的选择有关, 但两点间的电势差是确定的, 与零点的选择无关.

### 习 题

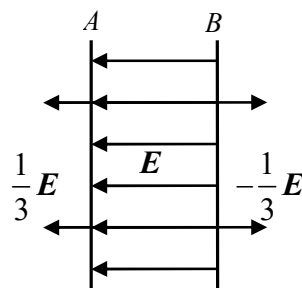
5-1 在正方形的两对角上各置电荷  $Q$ , 在其余两对角上各置电荷  $q$ , 若  $Q$  所受合力为零, 试求  $Q$  与  $q$  之间的关系.

5-2 两根无限长均匀带电直线, 线电荷密度分别为  $\pm\lambda$ , 彼此平行放置, 相距为  $d$ , 求单位长度的带电直线受的电场力.

5-3 如图所示, 一均匀带电细直杆长为  $l$ , 总电荷为  $Q$ , 试求在直杆延长线上距杆的一端距离为  $d$  的 P 点的电场强度.

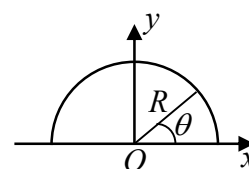


习题 5-3 图



习题 5-4 图

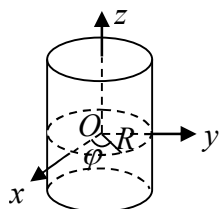
5-4 A、B 为真空中两个平行的“无限大”均匀带电平面, 已知两平面间的电场强度大小为  $E$ , 两平面外侧电场强度大小都为  $E/3$ , 方向如图所示. 求 A、B 两平面上的电荷面密度.



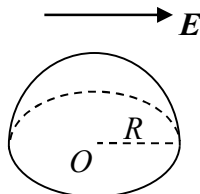
习题 5-5 图

5-5 一半径为  $R$  的半圆形带电细线, 电荷线密度为  $\lambda = \lambda_0 \sin\theta$ , 式中  $\lambda_0$  为一常数,  $\theta$  为半径  $R$  与  $x$  轴所成的夹角, 如图所示. 试求环心  $O$  处的电场强度.

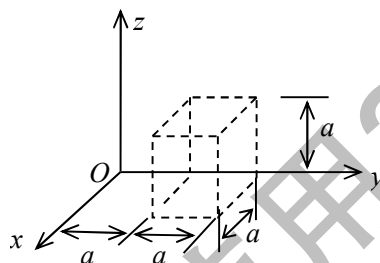
5-6 一无限长圆柱面，其面电荷密度为  $\sigma = \sigma_0 \cos \varphi$ ，式中  $\varphi$  为半径  $R$  与  $x$  轴所夹的角，如图所示，试求圆柱轴线上一点的场强。



习题 5-6 图



习题 5-7 图



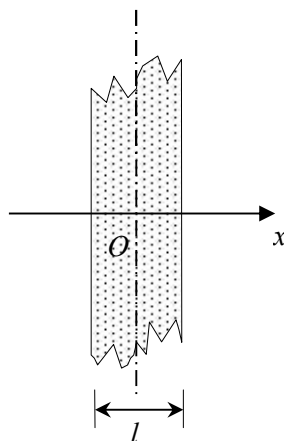
习题 5-8 图

5-8 图中虚线所示为一正立方体形的高斯面，已知空间的场强分布为： $E_x = 0$ ， $E_y = by$ ， $E_z = 0$ 。高斯面边长  $a = 0.1 \text{ m}$ ，常量  $b = 1000 \text{ N}/(\text{C} \cdot \text{m})$ 。试求该高斯面内包含的净电荷。

5-9 实验证明，地球表面上方电场方向向下，大小随高度不同。设在靠近地面处电场强度为  $E_1$ ，在离地面  $h$  高处电场强度为  $E_2$ ，且  $E_1 > E_2$ 。

- (1) 试计算从地面到离地  $h$  高度之间，大气中的平均体电荷密度；
- (2) 假设地球表面内电场强度为零，且地球表面处的电场强度完全是由均匀分布在地表面的电荷产生，求地面上的面电荷密度。

5-10 如图所示，一无限大均匀带电平板，厚度为  $l$ ，体电荷密度为  $\rho$ 。试求板内、外的场强分布，并画出场强随坐标  $x$  变化的图线，即  $E-x$  图线（设原点在带电平板的中央平面上， $Ox$  轴垂直于平板）。



习题 5-10 图

5-11 一半径为  $R$  的带电球体，其电荷体密度分布为

$$\rho = Cr \quad (r \leq R) \quad (C \text{ 为常量})$$

$$\rho = 0 \quad (r > R)$$

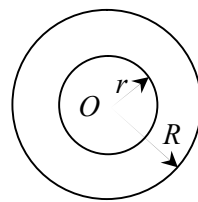
试求：(1) 带电球体的总电荷；

(2) 球内、外各点的电场强度；

(3) 球内、外各点的电势。

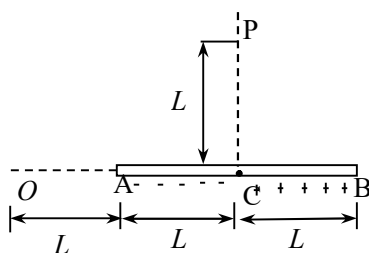


5-12 如图所示一球形电容器（即两个同心的导体球壳），在外球壳的半径  $R$  及内外导体间的电势差  $\Delta\varphi$  维持恒定的条件下，内球半径  $r$  为多大时才能使内球表面附近的电场强度最小？求这个最小电场强度的大小。

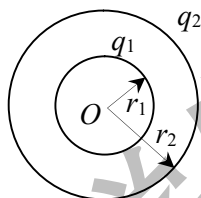


习题 5-12 图

5-13 如图所示， $AB$  为一根长为  $2L$  的带电细棒，左半部均匀带有负电荷  $-q$ ，右半部均匀带有正电荷  $q$ 。  $O$  点在棒的延长线上，距  $A$  端的距离为  $L$ 。  $P$  点在棒的垂直平分线上，到棒的垂直距离为  $L$ 。以棒的中点  $C$  为电势的零点。求  $O$  点电势和  $P$  点电势。



习题 5-13 图

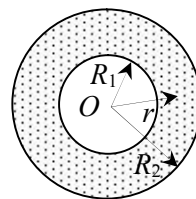


习题 5-14 图

5-14 如图所示，两同心带电球面，内球面半径为  $r_1$ ，带电荷  $q_1$ ；外球面半径为  $r_2$ ，带电荷  $q_2$ ，设无穷远处电势为零，求空间的电势分布。

5-15 一无限长均匀带电圆柱体，半径为  $R$ ，沿轴线方向的线电荷密度为  $\lambda$ ，试分别以轴线和圆柱表面为电势零点，求空间的电势分布。

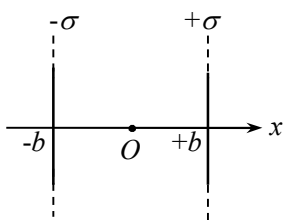
5-16 如图所示，一个均匀带电的球壳层，其电荷体密度为  $\rho$ ，球壳层内表面半径为  $R_1$ ，外表面半径为  $R_2$ 。设无穷远处为电势零点，求空间电势分布。



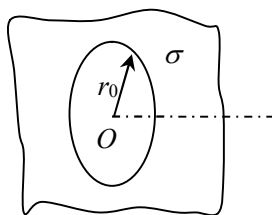
习题 5-16 图

5-17 一半径为  $R$  的均匀带电圆盘，面电荷密度为  $\sigma$ 。求此圆盘中垂轴上的电势分布。

5-18 电荷面密度分别为  $+\sigma$  和  $-\sigma$  的两块无限大均匀带电平行平面，分别与  $x$  轴垂直相交于  $x_1=b$ ， $x_2=-b$  两点，如图所示。设坐标原点  $O$  处电势为零，试求空间的电势分布表示式并画出其曲线。



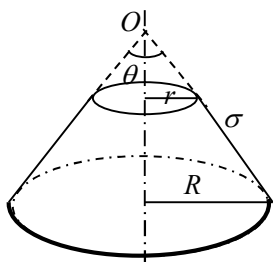
习题 5-18 图



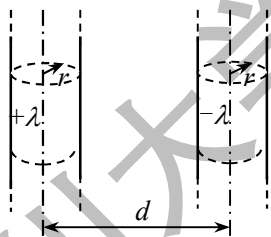
习题 5-19 图

5-19 一无限大平面中部有一半径为  $r_0$  的圆孔，设平面上均匀带电，电荷面密度为  $\sigma$ ，如图所示。试求通过小孔中心  $O$  并与平面垂直的直线上各点的场强和电势（提示：选  $O$  点的电势为零）。

5-20 如图所示，一锥顶角为  $\theta$  的圆台，上下底面半径分别为  $r$  和  $R$ ，在它的侧面上均匀带电，电荷面密度为  $\sigma$ ，求顶点  $O$  的电势。（以无穷远处为电势零点）



习题 5-20 图

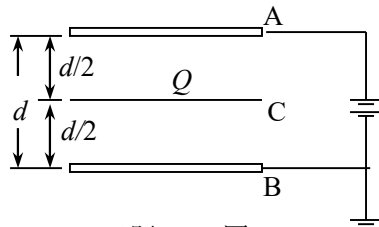


习题 5-21 图

5-21 有两根半径都是  $r$  的“无限长”直导线，彼此平行放置，两者轴线的距离是  $d$  ( $d \geq 2r$ )，沿轴线方向单位长度上分别带有  $+\lambda$  和  $-\lambda$  的电荷，如图所示。设两带电导线之间的相互作用不影响它们的电荷分布，试求两导线间的电势差。

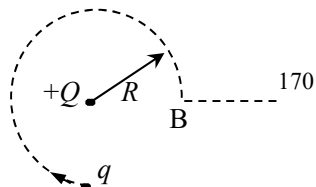
5-22 两无限长共轴均匀带电圆柱面，半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ，沿轴向的线电荷密度分别为  $+\lambda$  和  $-\lambda$ 。试求两筒之间的电势差。

5-23 一空气平板电容器，极板 A、B 的面积都是  $S$ ，极板间距离为  $d$ 。接上电源后，A 板电势  $\varphi_A = E$ ，B 板电势  $\varphi_B = 0$ 。现将一带有电荷  $Q$ 、面积也是  $S$  而厚度可忽略的导体片 C 平行插在两极板的中间位置，如图所示，试求导体片 C 的电势。



习题 5-23 图

5-24 如图所示。在点电荷  $+Q$  产生的电场中，将



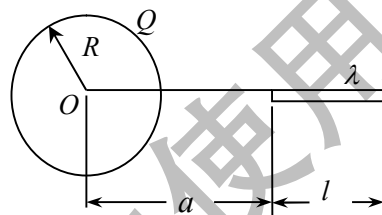
习题 5-24 图

试验电荷  $q$  沿半径为  $R$  的  $3/4$  圆弧轨道由 A 点移到 B 点的过程中电场力作功为多少？从 B 点移到无穷远处的过程中，电场力作功为多少？

5-25 一电偶极子由电荷量为  $q$  的两个异号点电荷组成，两电荷相距  $l$ 。把这电偶极子放在场强大小为  $E$  的均匀电场中。试求：

- (1) 电场作用于电偶极子的最大力矩。
- (2) 电偶极子从受最大力矩的位置转到平衡位置过程中，电场力作的功。

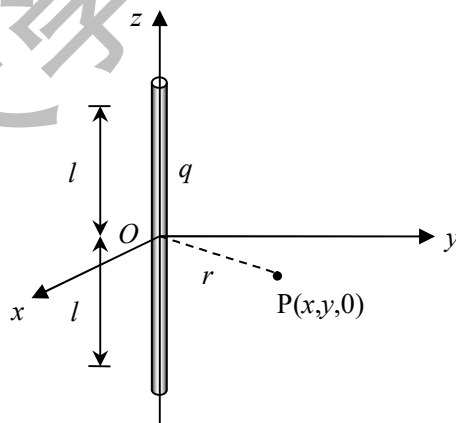
5-26 如图所示，半径为  $R$  的均匀带电球面，带有电荷  $Q$ 。沿某一半径方向上有一均匀带电细线，电荷线密度为  $\lambda$ ，长度为  $l$ ，细线左端离球心距离为  $a$ 。设球和线上的电荷分布不受相互作用影响，试求细线所受球面电荷的电



习题 5-26 图

场力和细线在该电场中的电势能（设无穷远处的电势为零）。

5-27 电量  $q$  均匀分布在沿  $z$  轴放置的长为  $2l$  的直杆上，如图所示求直杆的中垂面上距离杆中心  $O$  为  $r$  处的  $P(x, y, z)$  点电势  $\varphi$ ，并用电势梯度法求电场强度  $E$ 。



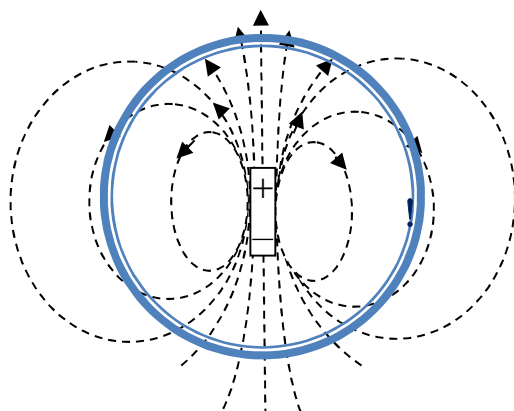
习题 5-27 图

### 讨论题

5-1 两个平行并且靠近的绝缘板，使每个板的内表面均匀的带上  $+Q$  的电量.需要多大的力才能使这两个平板结合在一起？

5-2 一带电珠子可以在一个无摩擦的绝缘的圆环上运动，一个近似点的电偶极子固定在圆环的中心，电偶极子的轴处于圆的平面内.初始时，珠子位于电偶极子的对称面上，如图所示.珠子会如何运动？作用于珠子上的支持力有哪些？如果

没有圆环，珠子会如何运动？忽略重力效应，假定电场力远远大于重力.



讨论题 5-2 图

**提示：**电偶极子的静电场可以从它的势能 $\varphi = \frac{K \cos \theta}{r^2}$ 得到， $K$ 是与电偶极子的强度成正比的常数， $r$ 为电偶极子的距离， $\theta$ 是珠子位置 $r$ 相对于电偶极子的夹角.