# Chapter 7

# 恒定电流与恒定磁场

# 主要内容

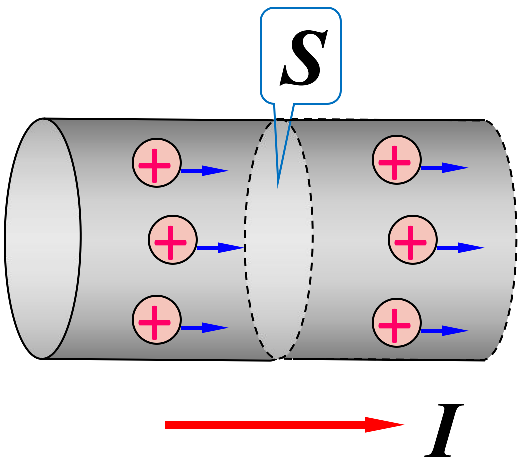
# §7.1

# 恒定电流

# 7.1.1 电流 电流的连续性方程

## 一、电流 电流密度 电流场

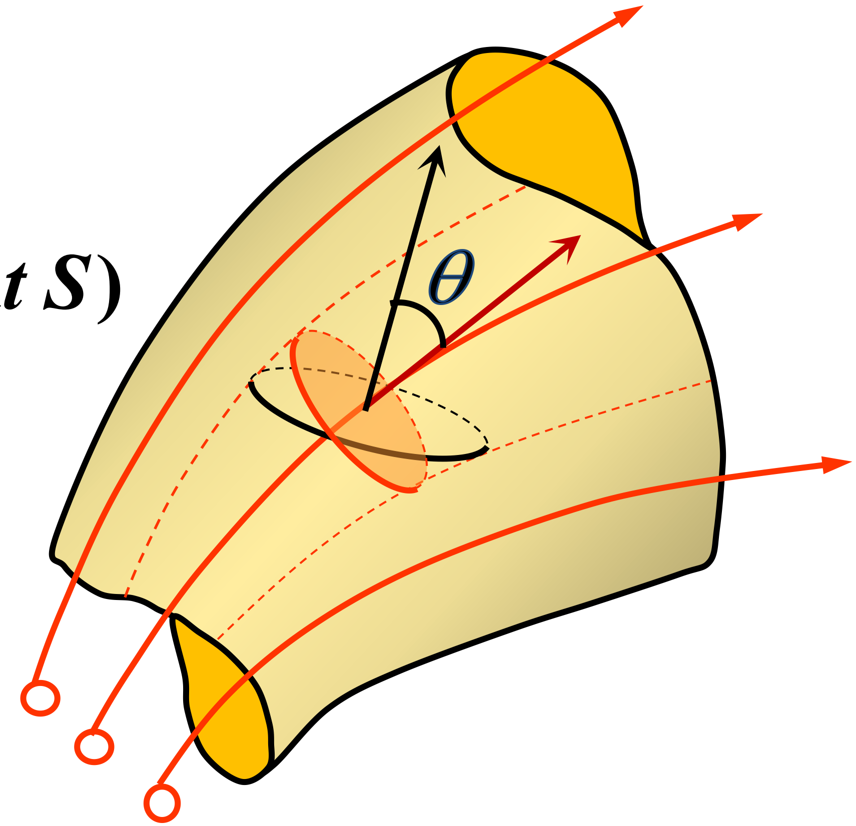
**电流定义**为通过**截面*S*** 的电荷随时间的**变化率**




$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{dQ} = nq(u\mathrm{d}t\, S)$$

$$\boxed{I = nquS}$$




*u* 为电子的漂移速度大小

$$\mathrm{dQ} = nq(u\mathrm{d}t\underline{\mathrm{d}S\cos\theta})$$

$$\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{d}t} = \frac{nq(u\mathrm{d}t\mathrm{d}S\cos\theta)}{\mathrm{d}t} = nqu\mathrm{d}S\cos\theta$$

$$= nq\vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

引入面元矢量

$$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

若有几种载流子

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{u}_i$$

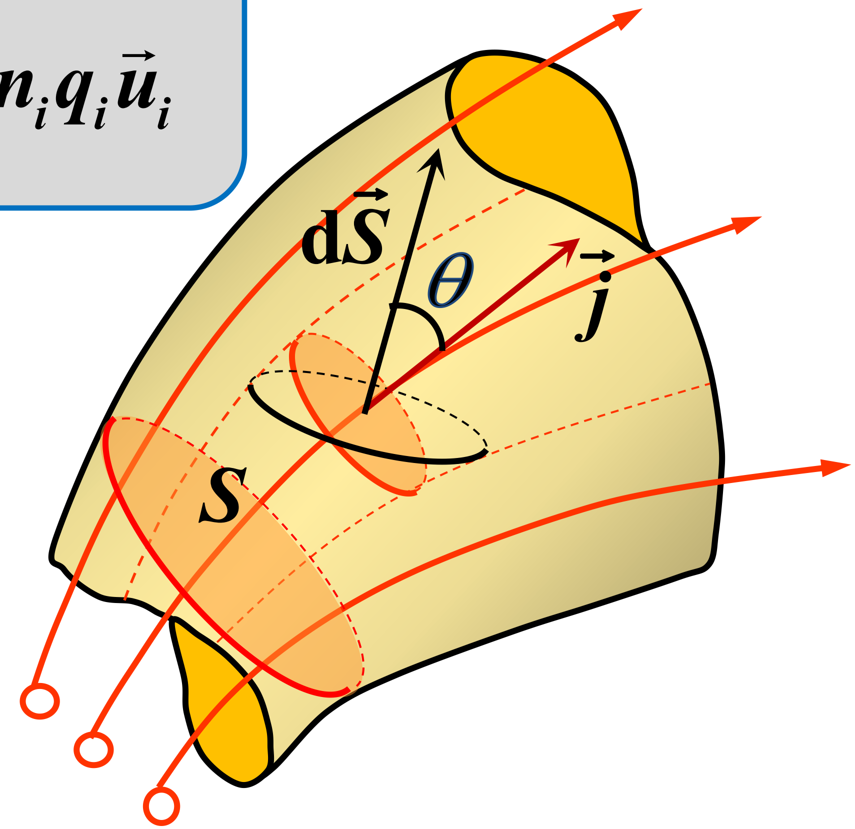
电流密度矢量

$$\vec{j} = nq\vec{u}$$

$$\mathrm{d}I = \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

通过任意曲面$S$的电流

$$I = \int_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_S j\cos\theta\,\mathrm{d}S$$



**电流密度**反映了**空间各点**电流的分布

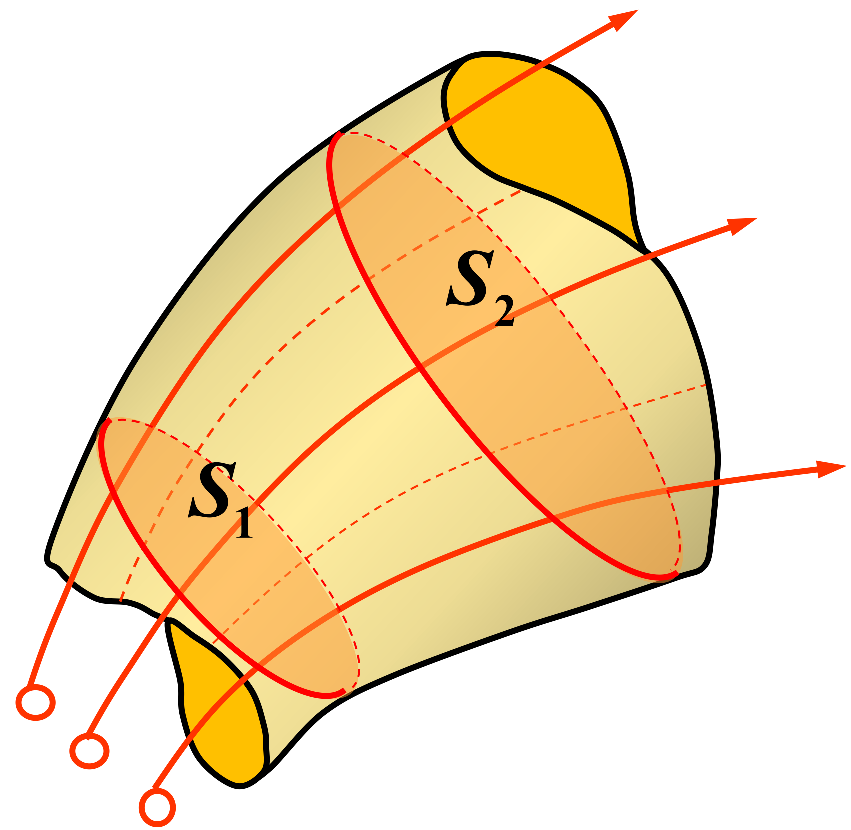
$$\vec{j}_1 \neq \vec{j}_2$$

在大块导体中，电流分布复杂

$\vec{j}(x, y, z)$ 组成一个矢量场

——**电流场**

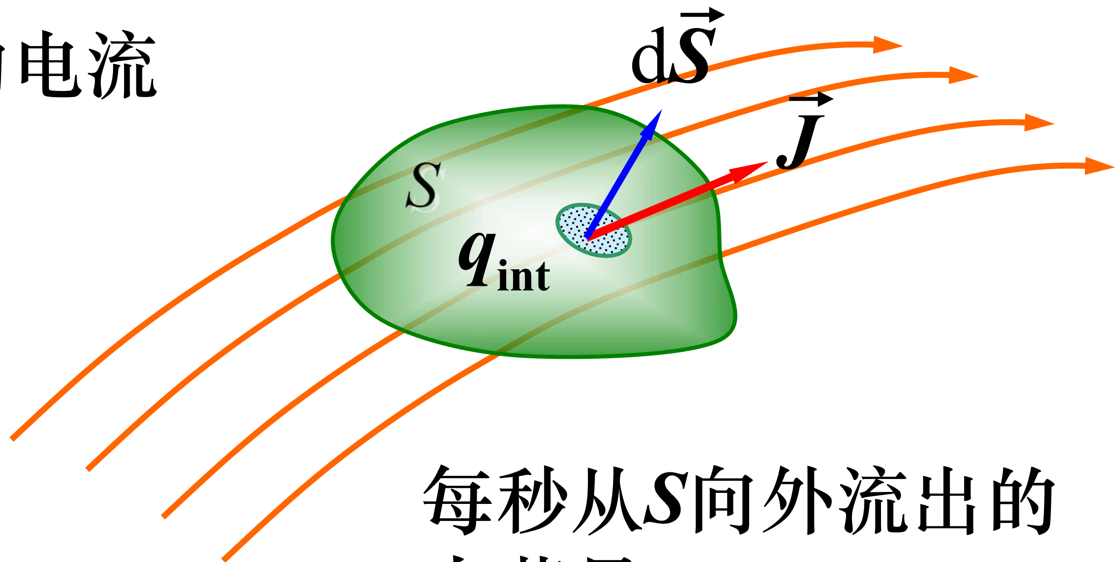
引入**电流线**来描述电流场的分布




电流线上每一点的**切线方向**与该点**电流密度的方向**相同，曲线的**疏密**程度代表电流密度的**大小**

# 二、电流的连续性方程　电流的恒定条件

通过一个**封闭曲面**$S$的电流




$$I=\oint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

表示**净流出封闭面的电流线的条数**，即**通过封闭面向外流出的电流**

每秒从$S$向外流出的电荷量

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=I=\oint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

由**电荷守恒**：

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}q_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}t}$$

**电流的连续性方程**

$$\oint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=-\frac{\mathrm{d}q_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}t}$$

**电流线有头有尾**

## ◆ 恒定电流

导体中各点电流密度 $\vec{j}$ 的方向和大小都**不随时间变化**的电流，称为**恒定电流**（又称**稳恒电流**）

**电流的连续性方程**
$$\oint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}q_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}t}$$

**对于恒定电流，任意时刻进入任意封闭面的电流线的条数，与穿出封闭面的电流线的条数相等**

$$\oint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

**这是恒定电流条件**

**恒定电流线是无头无尾的闭合曲线**

## ◆ 恒定电场

若导体载的是恒定电流，导体内各处的电荷分布不随时间变化，任意封闭面内的电量不随时间变化

$$\frac{\mathrm{d}q_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}t}=0$$ （动平衡）

**恒定电场是存在于恒定电流通过的导体内部和导体外部的电场。**

恒定电场的空间分布不随时间变化

- 宏观电荷空间分布、电场分布 $\Big\}$ 不随时间变化
- 满足 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum q_{\mathrm{int}}/\varepsilon_0$
- 满足 $\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$ 可引入**电势**的概念

# 7.1.2 欧姆定律

## 一、欧姆定律的微分形式

**理论上可以证明**：当保持金属的温度恒定时，金属中的电流密度 $\vec{j}$ 与该处的电场强度 $\vec{E}$ 成正比

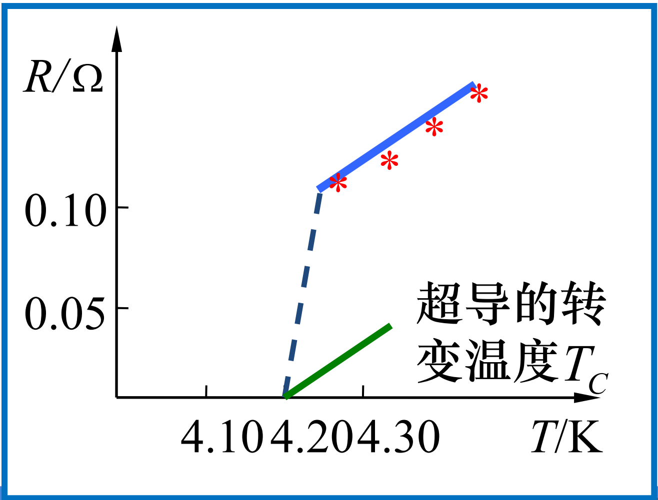
$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

电导率

其倒数称为**电阻率** $\rho = \dfrac{1}{\gamma}$

**讨 论**

有些金属和化合物在降到接近绝对零度时，它们的**电阻率突然减小到零**，这种现象叫**超导**。




汞在4.2K附近电阻突然降为零

# 二、欧姆定律　电阻

由恒定电流条件可知

$$I_1 = I_2$$

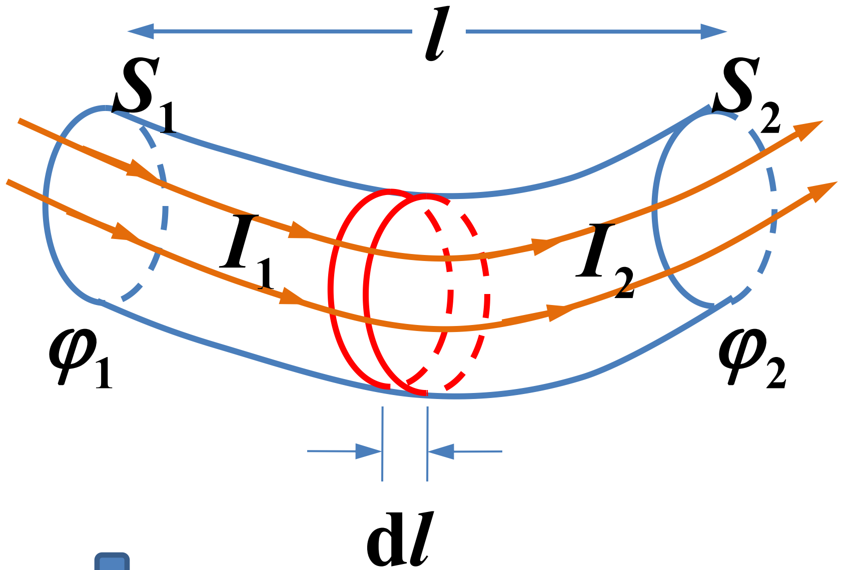
故d$l$段的电势差为

$$\mathrm{d}\varphi = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

截面$S_1$、$S_2$之间的电势差为

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \rho \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int \rho j \mathrm{d}l = I \boxed{\int \frac{\rho \mathrm{d}l}{S}} \quad R$$




横截面均匀的导体:

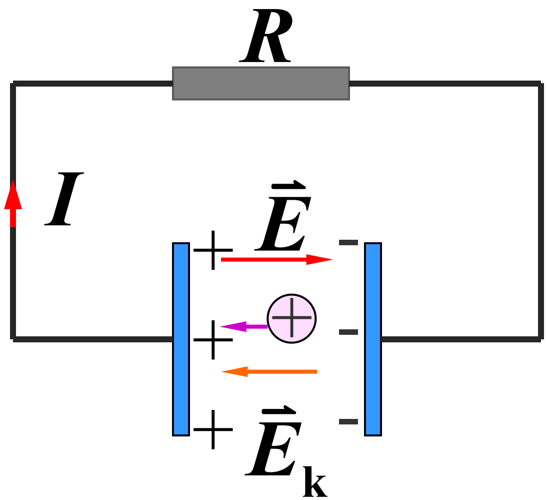
$$R = \rho \frac{l}{S}$$

$$U = IR$$

欧姆定律

# 7.1.3 电源电动势和全电路欧姆定律

## 一、电源电动势




♦ 非静电力: 能不断分离正负电荷使正电荷逆静电场力方向运动。

♦ 电源: 提供非静电力的装置。

♦ 非静电性的场强 $\vec{E}_k$: 为单位正电荷所受的非静电力。

♦ 电动势的定义: 在电源内部，单位正电荷从负极到正极，非静电力所做的功。

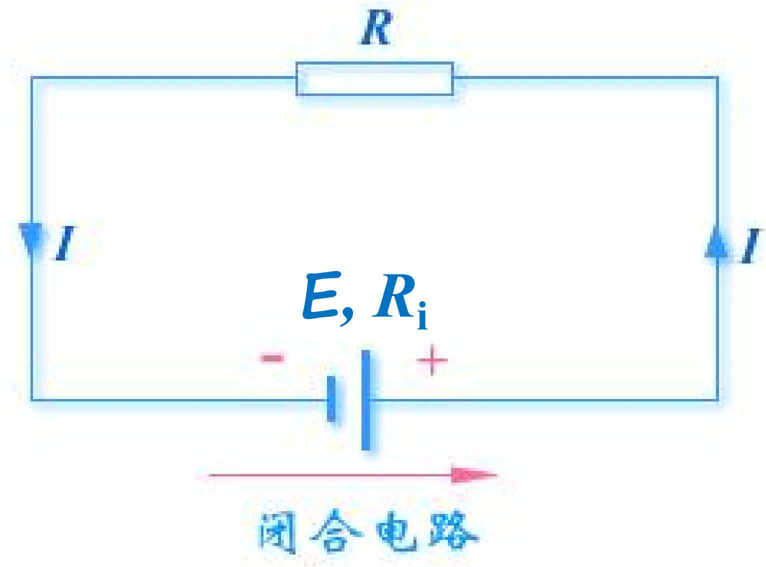
$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

非静电力存在于整个回路上

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

# 二、全电路欧姆定律

$$\boxed{\vec{j} = \frac{1}{\rho}(\vec{E}_{\mathrm{e}} + \vec{E}_{\mathrm{k}}) = \gamma(\vec{E}_{\mathrm{e}} + \vec{E}_{\mathrm{k}})}$$




$$\oint_L (\vec{E}_{\mathrm{k}} + \vec{E}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \oint_L \vec{E}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mathsf{E}$$

$$\oint_L (E + E_{\mathrm{k}}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \frac{\vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{\gamma}$$

$$= \oint_L \frac{j\,\mathrm{d}l}{\gamma}$$

对于**均匀电路**

$$j = I / S$$

$$\mathrm{E} = \oint_L \frac{\vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{\gamma}$$

$$= \int_{\mathrm{out}} \frac{j\,\mathrm{d}l}{\gamma} + \int_{\mathrm{in}} \frac{j\,\mathrm{d}l}{\gamma}$$

$$= I\left(\int_{\mathrm{out}} \frac{\mathrm{d}l}{\gamma S} + \int_{\mathrm{in}} \frac{j\,\mathrm{d}l}{\gamma S}\right)$$

$$\mathcal{E} = I\Big(\underbrace{\int_{\text{out}}\frac{\mathrm{d}l}{\gamma S}}_{R} + \underbrace{\int_{\text{in}}\frac{\mathrm{d}l}{\gamma S}}_{R_\mathrm{i}}\Big)$$

外电路的电阻　　电源的内阻

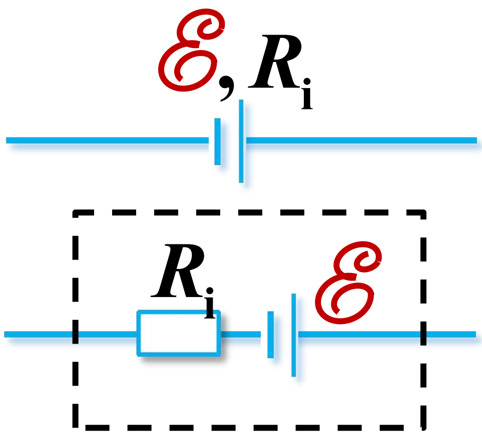
**全电路欧姆定律**

$$\mathcal{E} = I(R + R_\mathrm{i})$$

# 三、一段含源电路的欧姆定律

**规定**

- 电源看做电动势为 $\mathcal{E}$ 的理想电源和一电阻为 $R_\mathrm{i}$ 的电阻串联而成
- 导线电阻为零，无电势降落
- 顺着电流方向，电流流经电阻，电势降低；电流流过电源，电势升高

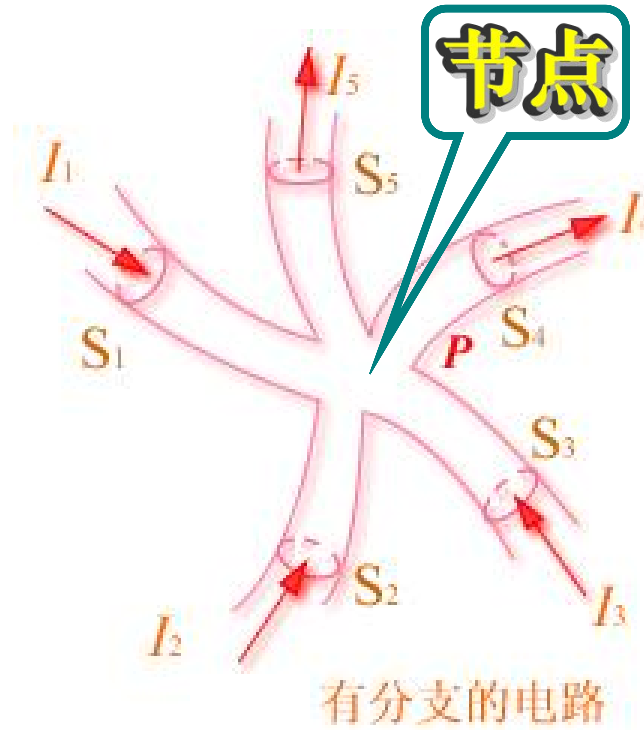


# 四、基尔霍夫方程及其应用

处理复杂电路问题

**1.** 基尔霍夫第一方程

在有分支的电路中，由恒定电流条件可知：

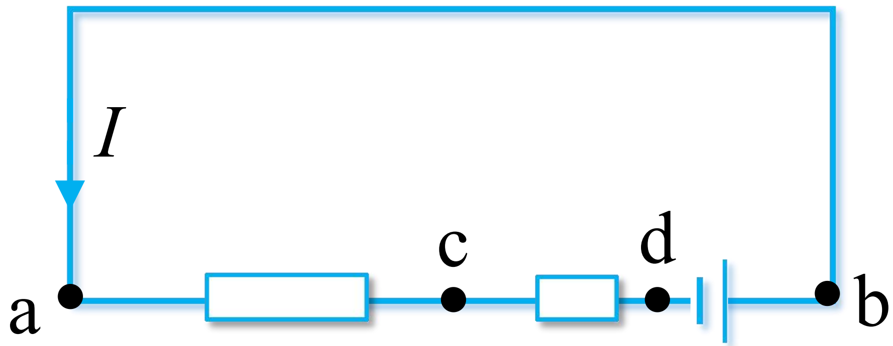



$$\sum I_i = 0$$ 节点电流方程

即 流出节点的电流的代数和为零。

**2.** 基尔霍夫第二方程

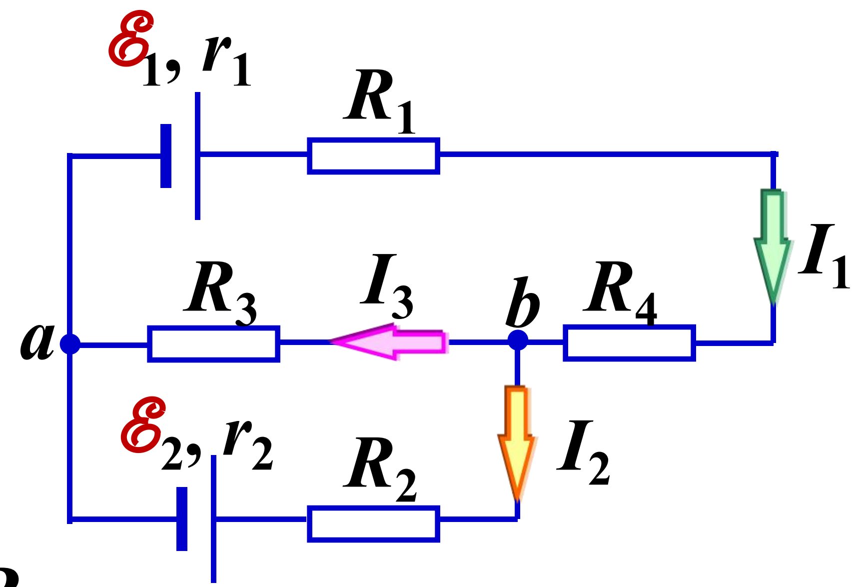
$$\left(\sum \pm IR\right) - \left(\sum \pm \mathcal{E}\right) = 0$$




即 回路一周电势降低和电势升高相等。

**例2** 如图所示，$\mathscr{E}_1 = 3.0\text{V}$，$\mathscr{E}_2 = 1.0\text{V}$，$R_{i1} = 0.5\text{W}$，$R_{i2} = 1.0\text{W}$，$R_1 = 4.5\text{W}$，$R_2 = 19.0\text{W}$，$R_3 = 10.0\text{W}$，$R_4 = 5.0\text{W}$。求电路中的电流分布。

**解：** 列出**基尔霍夫方程**




对节点 $b$:

$$-I_1 + I_3 + I_2 = 0$$

对回路 $aR_1bR_3a$:

$$\mathscr{E}_1 = I_1(r_1 + R_1 + R_4) + I_3R_3$$

对回路 $aR_3bR_2a$:

$$-\mathscr{E}_2 = I_2(r_2 + R_2) - I_3R_3$$

代入数据： $I_1 = 0.16\text{A}$， $I_2 = 0.02\text{A}$， $I_3 = 0.14\text{A}$

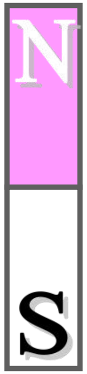
# § 7.2

# 磁场  磁感应强度

# 7.2.1 磁现象与磁场

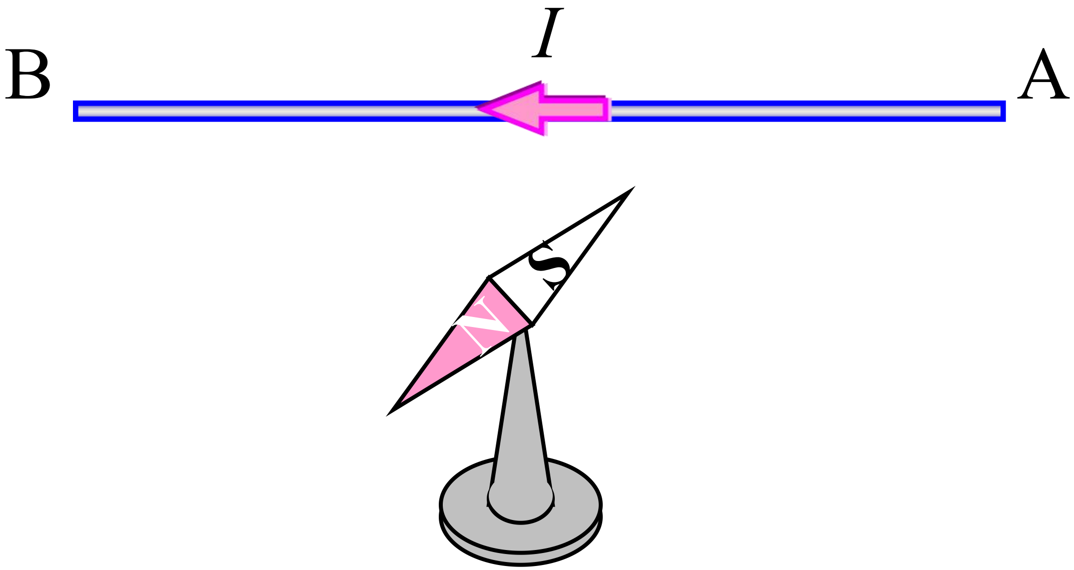
- 磁铁之间的相互作用:

  **同极相斥　异极相吸**



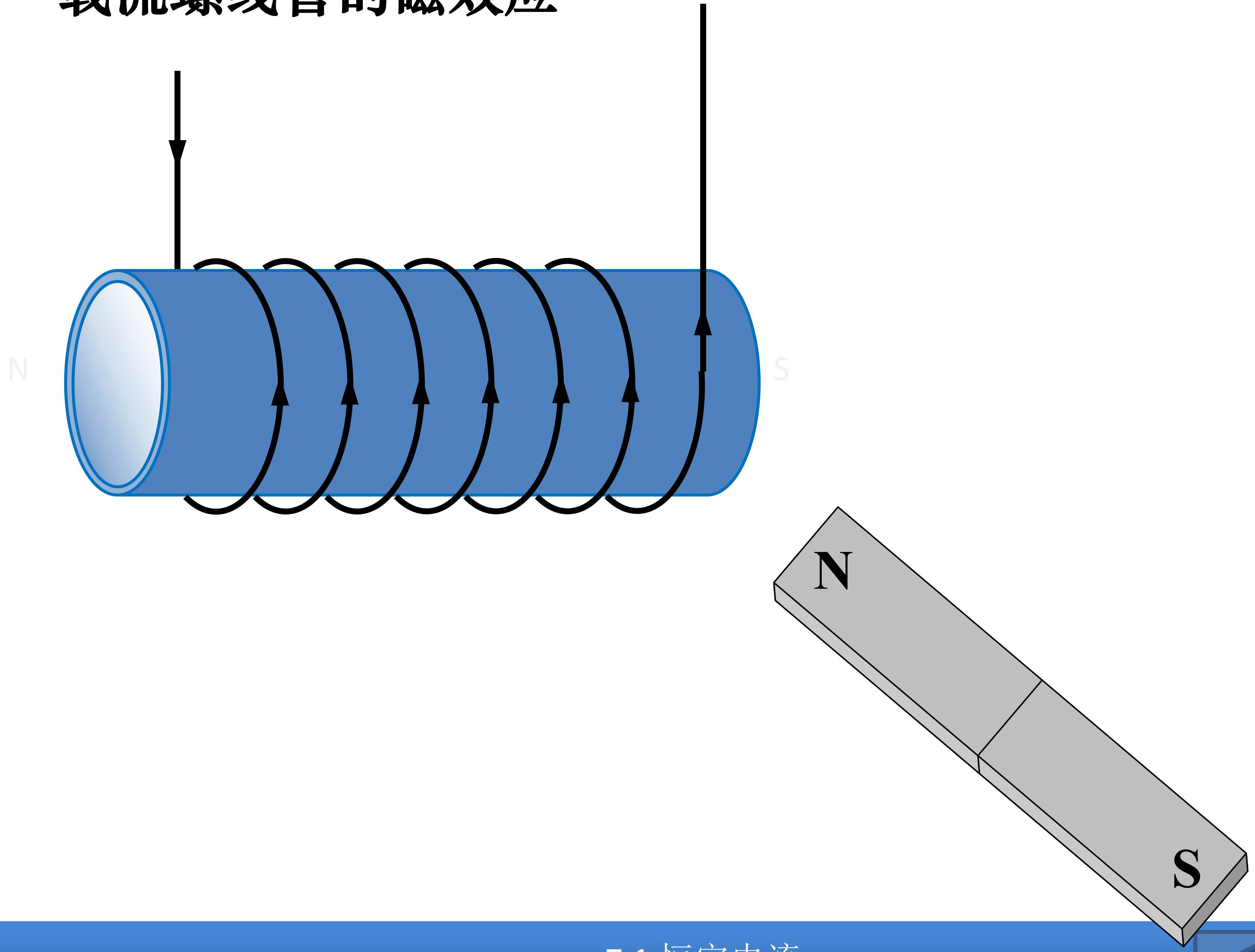

磁铁

- 电流的磁效应




丹麦物理学家
—奥斯特

# 载流螺线管的磁效应

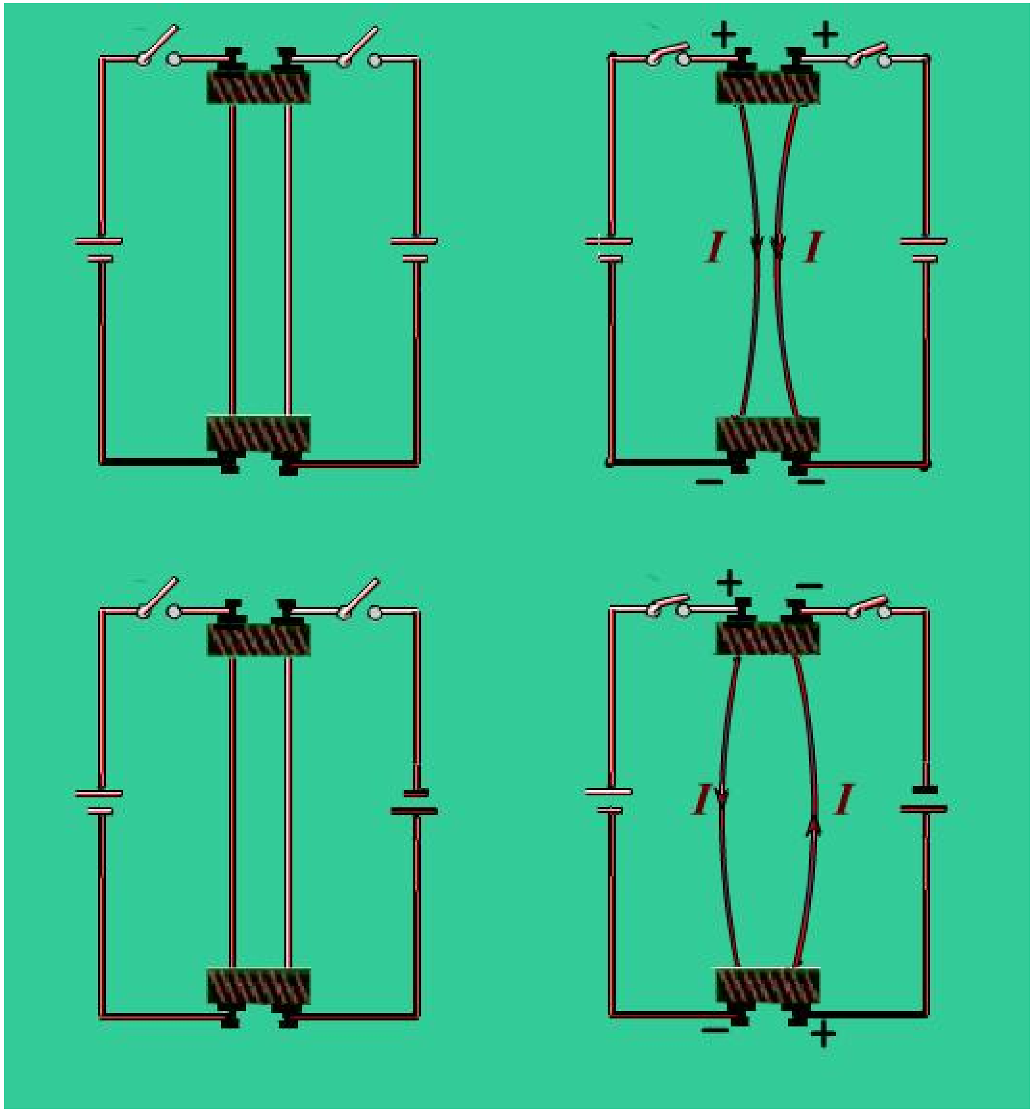


# 电流与电流之间的相互作用

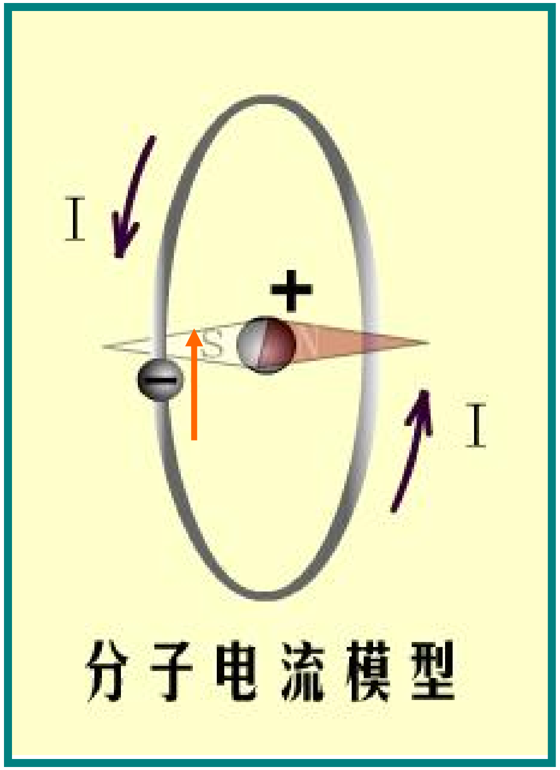
**现象：**

同向电流相互吸引；

反向电流相互排斥。

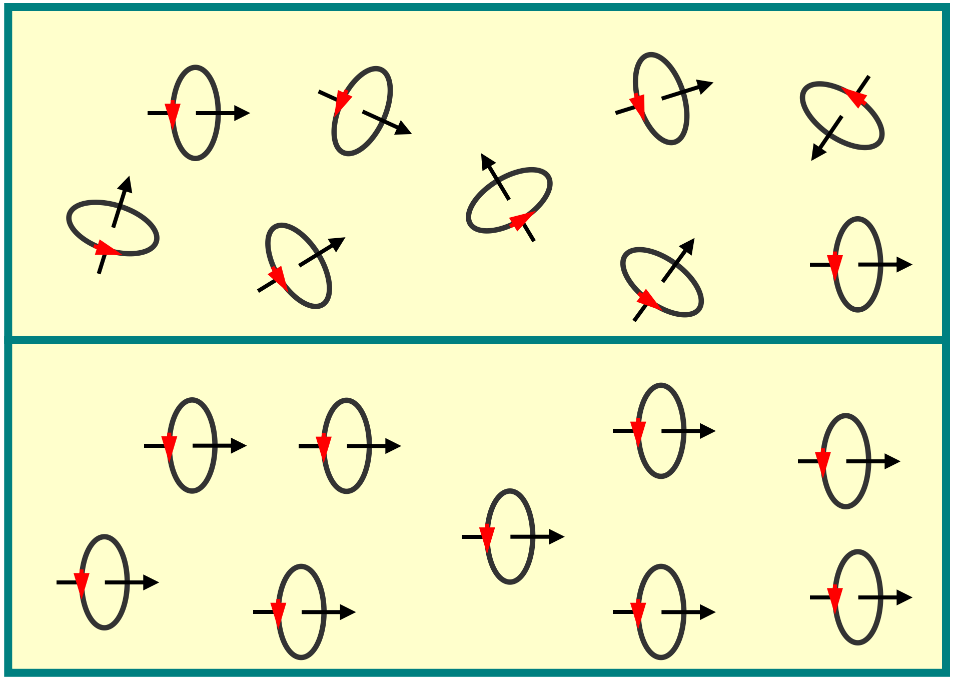


## ♦ 安培的分子电流假说　　磁性本源




在原子内部，电子（绕核旋转，且还有自转）的运动形成微小的电流

——分子电流



内部的分子电流的方向按一定的方式排列整齐

——磁体

小结：磁体与磁体之间，磁体与电流之间，以及电流与电流之间的磁现象，或者可以说一切磁现象都可归结为电流的磁效应。

**电流与磁体的本源只有一个：电荷的运动**

**结论：从微观上看，磁力都是运动电荷之间的相互作用的表现。**

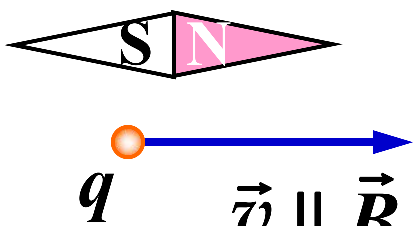
## ♦ 磁场

**运动电荷**周围空间里存在着磁场，置于其中的另一个运动电荷受到的磁力实际上是**该磁场对它的作用**。

**运动电荷** ⟷ **磁场** ⟷ **运动电荷**

# 7.2.2 磁感应强度

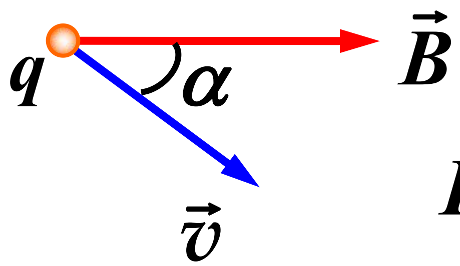
## 分析运动点电荷在磁场中所受洛伦兹力

1. 


$\vec{v} \parallel \vec{B}$

$F = 0$

磁感强度大小 $B = \dfrac{F_{\max}}{qv}$

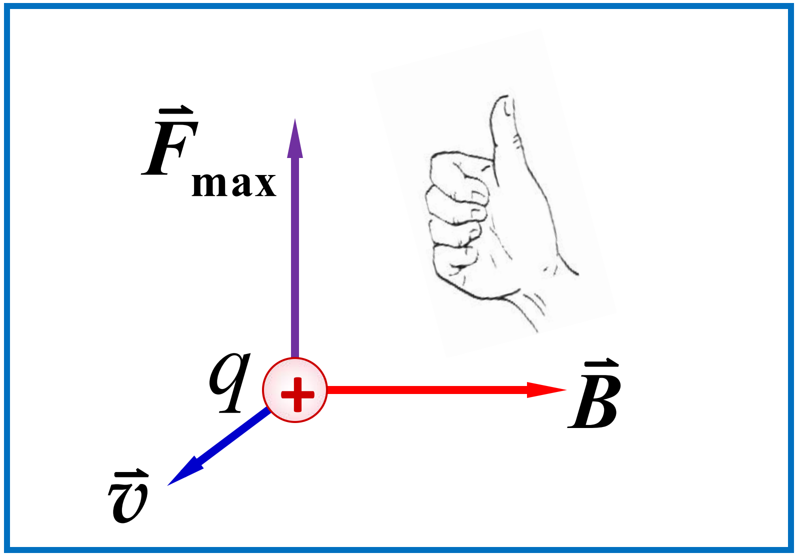
2. 


$F = qvB\sin\alpha$

$\vec{v} \perp \vec{B}$

$\alpha = 90^\circ$

$F_{\max} = qvB$




$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$

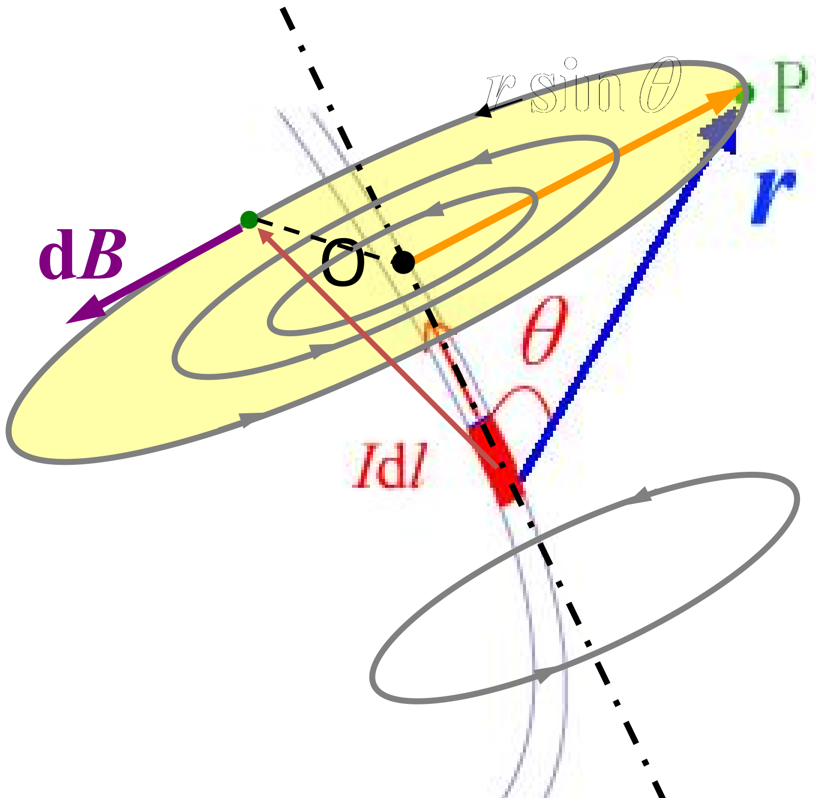
# § 7.3

# 毕奥-萨伐尔定律

# 7.3.1　毕奥–萨伐尔定律

**毕奥–萨伐尔定律**，即：一段电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 与它所激发的磁感应强度 $\mathrm{d}\vec{B}$ 之间的关系

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}$$




**真空磁导率**

$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{N\cdot A^{-2}}$$

大小：$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

注：电流元的磁感线是圆心在电流元轴线上的同心圆。

绕向与电流满足 **右手定则**

任意电流（载流导线）的磁场可看成是无限多个电流元产生的**磁场的叠加**，即

$$\vec{B}=\int \mathrm{d}\vec{B}=\int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}$$

**磁场满足叠加原理**

# 7.3.2 毕奥–萨伐尔定律的应用

## 基本步骤

**(1)** 将电流分解为无数个电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$

**(2)** 由电流元求$\mathrm{d}\vec{B}$ (据毕—萨定律)

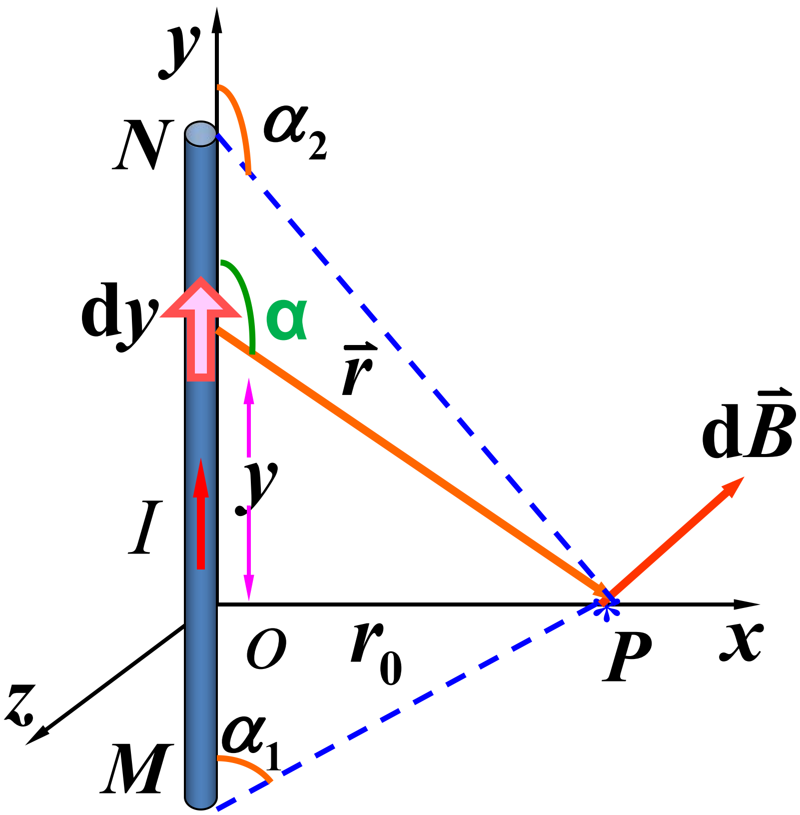
**(3)** 将 $\mathrm{d}\vec{B}$ 在坐标系中分解，并用磁场叠加原理**做对称性分析**，以简化计算步骤

**(4)** 对 $\mathrm{d}\vec{B}$ 积分求 $\vec{B}=\int\mathrm{d}\vec{B}$

$$B_x=\int_L \mathrm{d}B_x,\quad B_y=\int_L \mathrm{d}B_y,\quad B_z=\int_L \mathrm{d}B_z$$

**矢量合成：** $\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$

# 载流直导线产生的磁场




$\boxed{d\vec{B} \text{ 均沿 } z \text{ 轴的负向}}$

**解:**

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dy \sin\alpha}{r^2}$$

$$\boxed{y = -r_0 \cot\alpha,\ r = r_0 / \sin\alpha}$$

$$dy = r_0 d\alpha / \sin^2\alpha$$

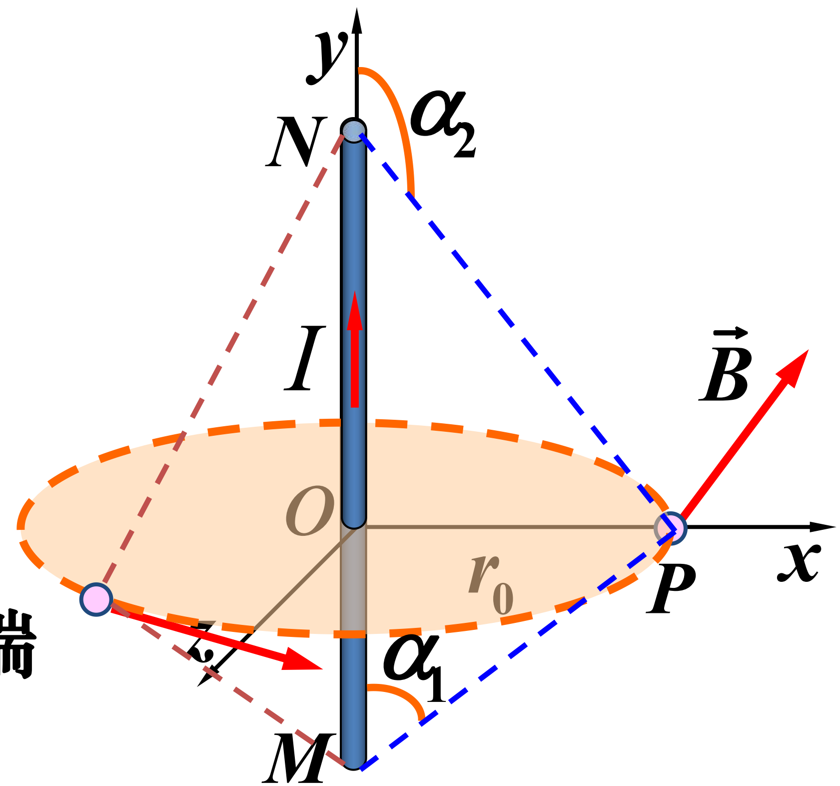
$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \sin\alpha d\alpha$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)$$

**方向：** 电流与磁感应强度成**右手螺旋定则**




◆ **无限长载流长直导线的磁场**

$$\begin{aligned}\theta_1 &\to 0\\ \theta_2 &\to \pi\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

◆ **半无限长载流长直导线的一端**

$$\begin{aligned}\theta_1 &\to \frac{\pi}{2}\\ \theta_2 &\to \pi\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$

- 电流元产生的磁场　毕-萨定律

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

- 任意电流的磁场　积分 (对称性)

■　载流直导线

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)}$$

无限长、半无限长

■　圆电流 (特殊位置(圆心处)、N匝、圆弧电流)

■　螺线管

# § 7.4

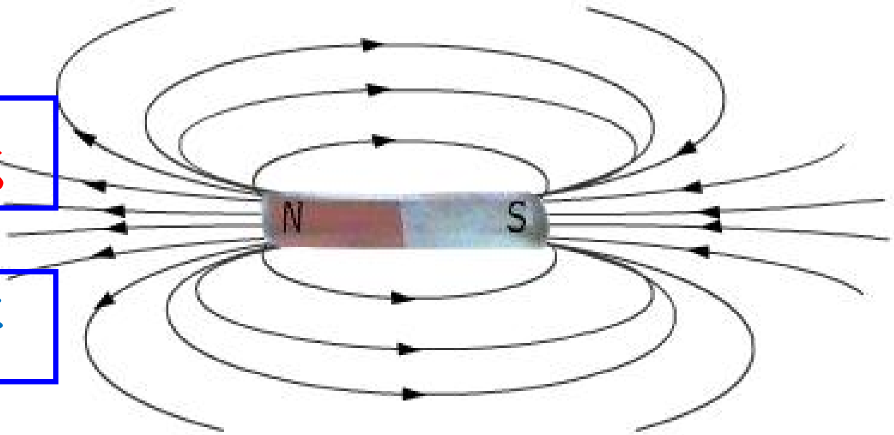
# 磁场的高斯定理和安培环路定理

# 7.4.1　磁场的高斯定理

## 一、磁感线　磁通量

◆ **磁感应线**：线上任一点的切线方向都和该点的磁场方向一致。

| | | |
|---|---|---|
| 磁感应线**密集** | ⟶ | 磁场**强** |
| 磁感应线**稀疏** | ⟶ | 磁场**弱** |

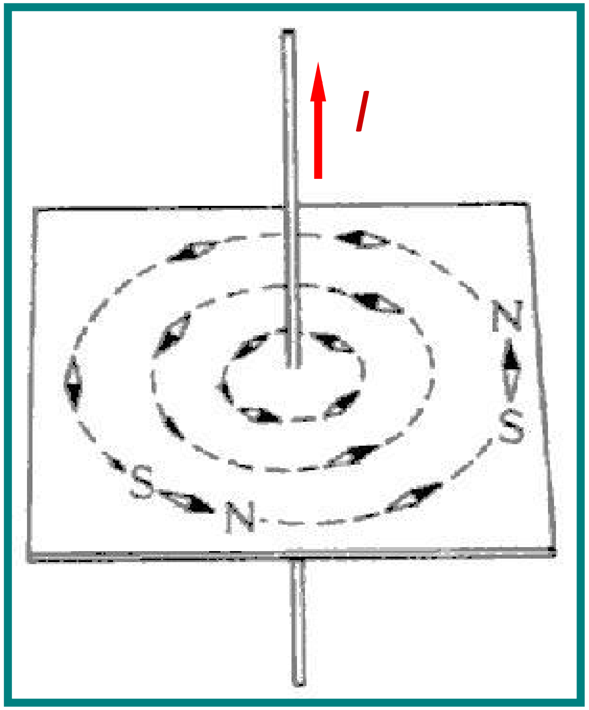


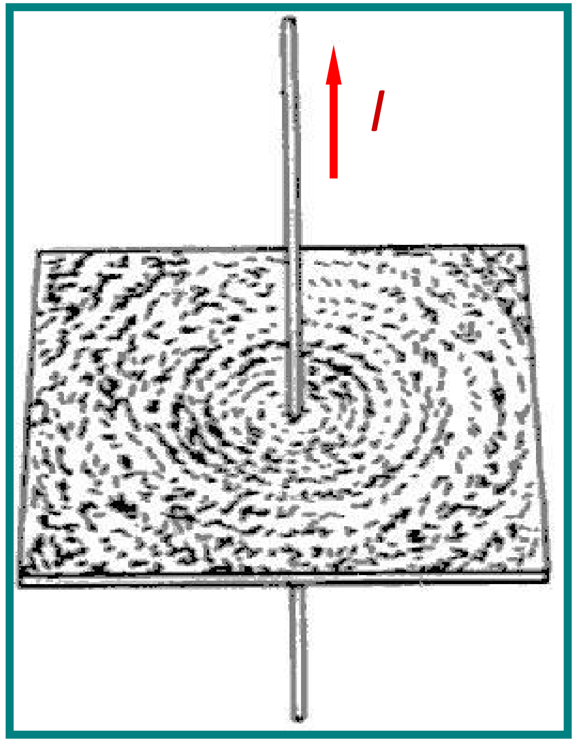

永久磁铁的磁感线图

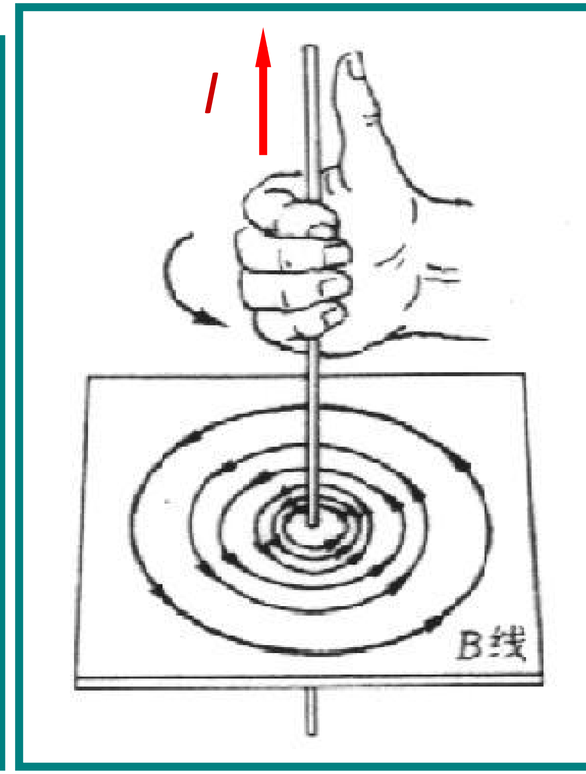
◆ **磁感应线的性质**

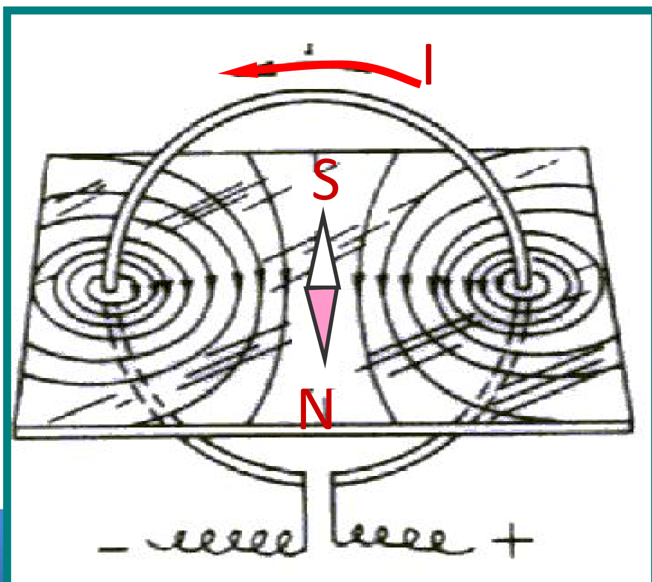
**1. 磁感线是闭合曲线**

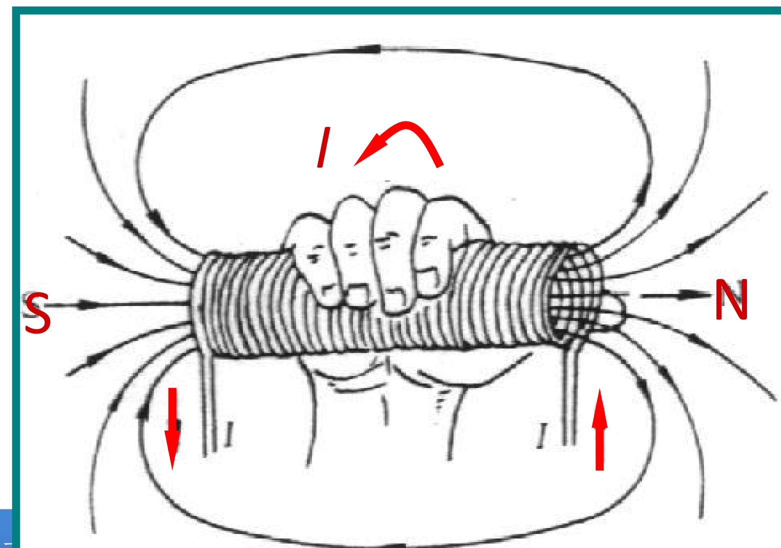
**2. 磁感线与产生它的电流套连，互成右手螺旋关系**


I
N
S
S
N


I


I
B线


I
S
N
-
+

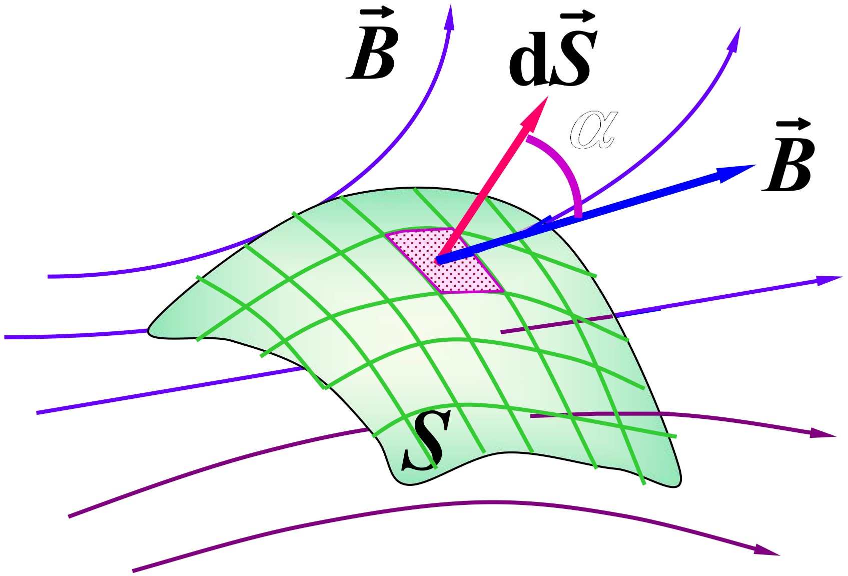

I
S
N
I
I

## ◆ 磁通量

在磁场中穿过一面积为 $S$ 的**有限曲面**的磁通量为通过该面积的磁感线的条数

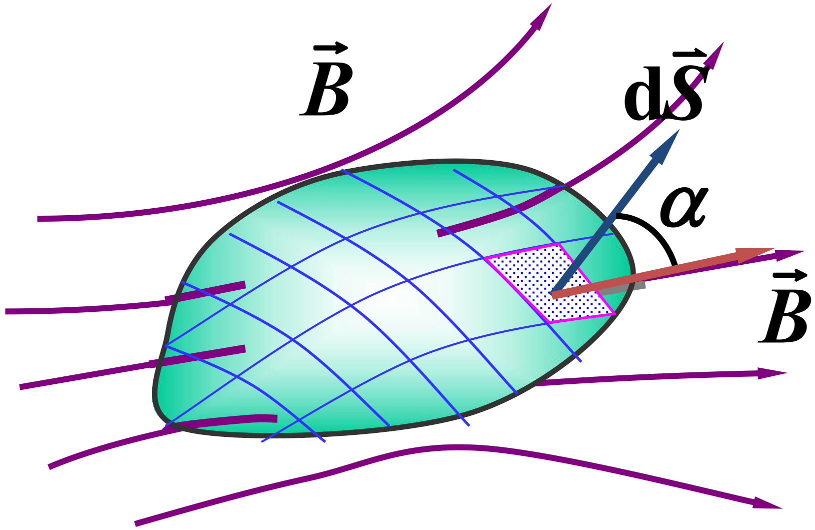
$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

单位：韦[伯]，Wb




对于**闭合曲面**

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



# 二、磁场的高斯定理

电流元的磁感线是闭合的

由磁场叠加原理可知，磁感线都是闭合的曲线

磁场的高斯定律（**磁通连续定理**）：任何磁场中通过任意封闭曲面的磁通量总等于零。

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

**磁场是无源场**

**磁单极子（磁荷）不存在**

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i \qquad \oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_i q_{0i}$$

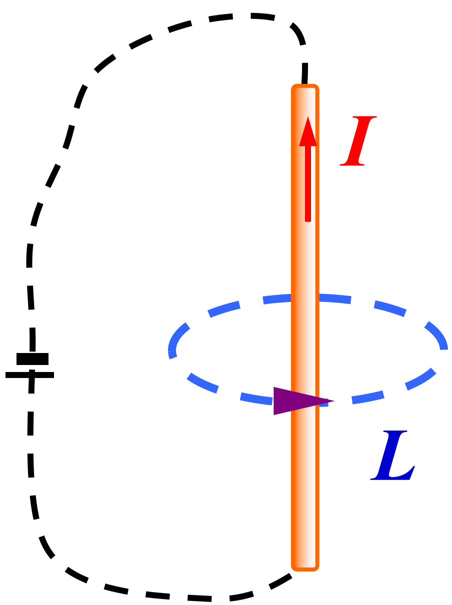
# 7.4.2　磁场的安培环路定理

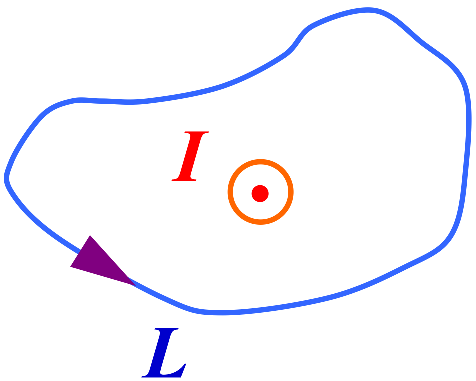
以**无限长载流直导线**产生的磁场为例

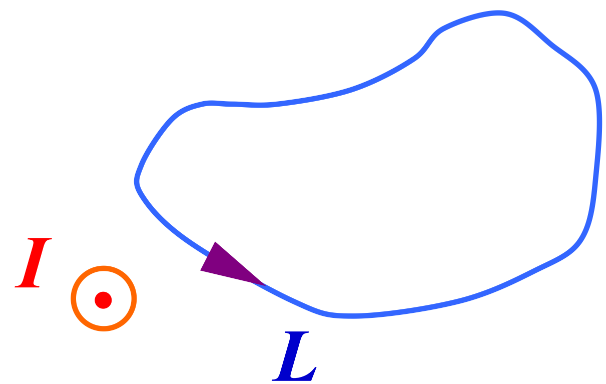
(1) 取对称环路包围电流

(2) 取任意环路包围电流

(3) 取任意环路不包围电流

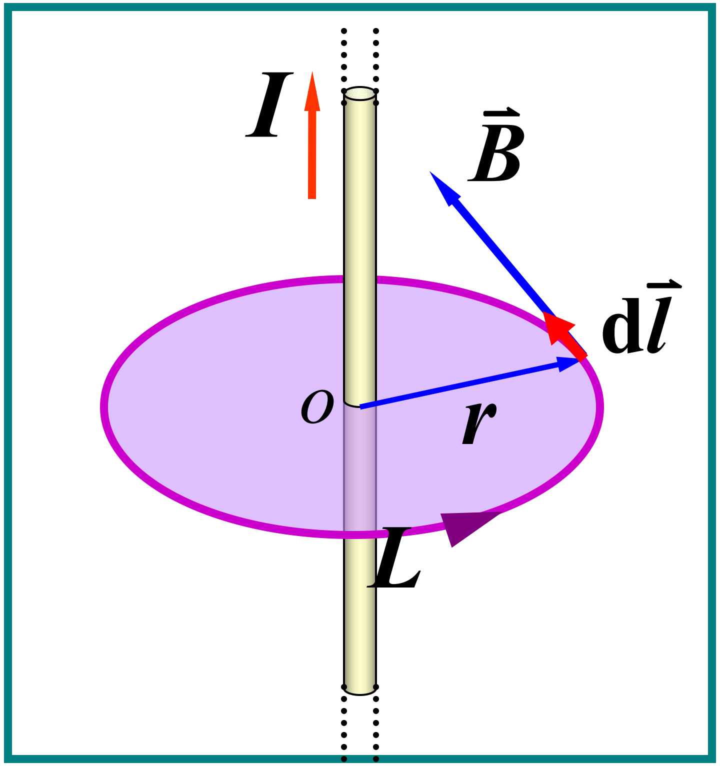



注：回路均在垂直于导线的平面内

(1) 设闭合回路 $L$ 为圆形回路，载流长直导线位于其中心




$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=B\mathrm{d}l\cos 0=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}l$$

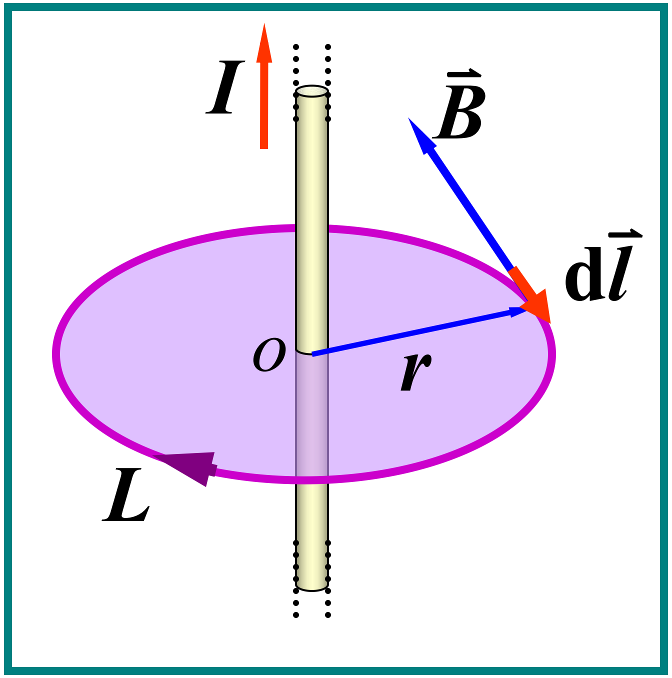
$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\oint_L \mathrm{d}l$$

$$\oint_L \mathrm{d}l=2\pi r$$

$$\Rightarrow \oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$

设 $L$ 与 $I$ 成右螺旋关系

**说明：** $B$ 沿此圆形环路的环流只与闭合环路所包围的电流 $I$ 有关，而与环路的大小无关。

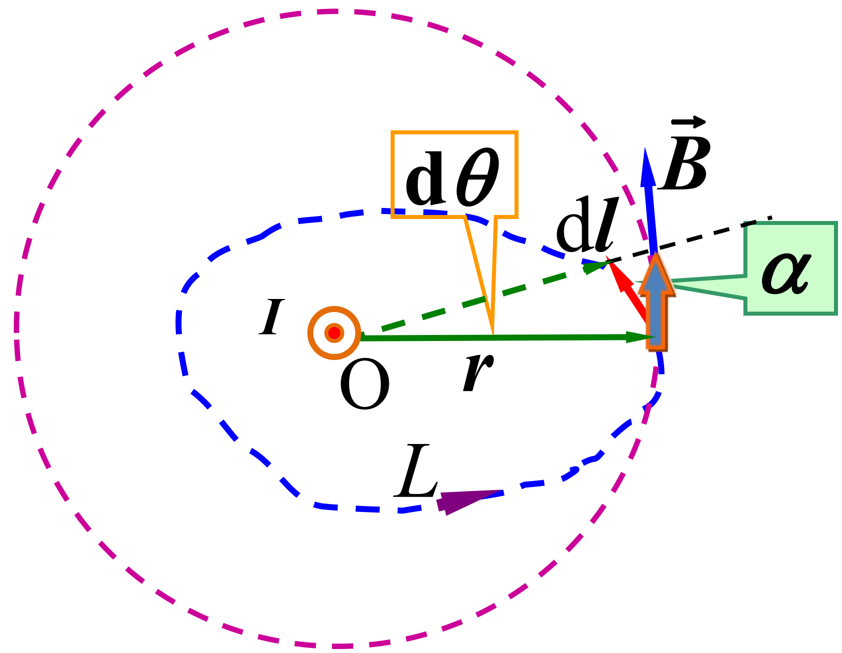



若回路绕向变为逆时针时，则

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = -\mu_0 I$$

$$= \mu_0(-I)$$

## (2) 对包围电流的任意形状的回路*L*




$$\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\mathrm{d}l\cos\alpha$$

$$\mathrm{d}l\cos\alpha = r\mathrm{d}\theta$$

$$\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_L \mathrm{d}\theta}$$

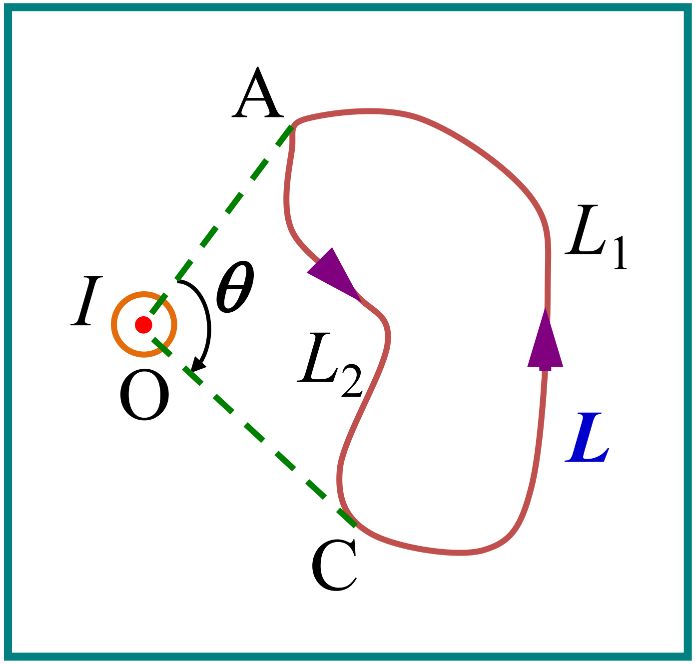
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

*L* 与 *I* 成右螺旋

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

**说明：** *B* 的环流值与环路的大小、形状无关。

## (3) 取任意环路不包围电流



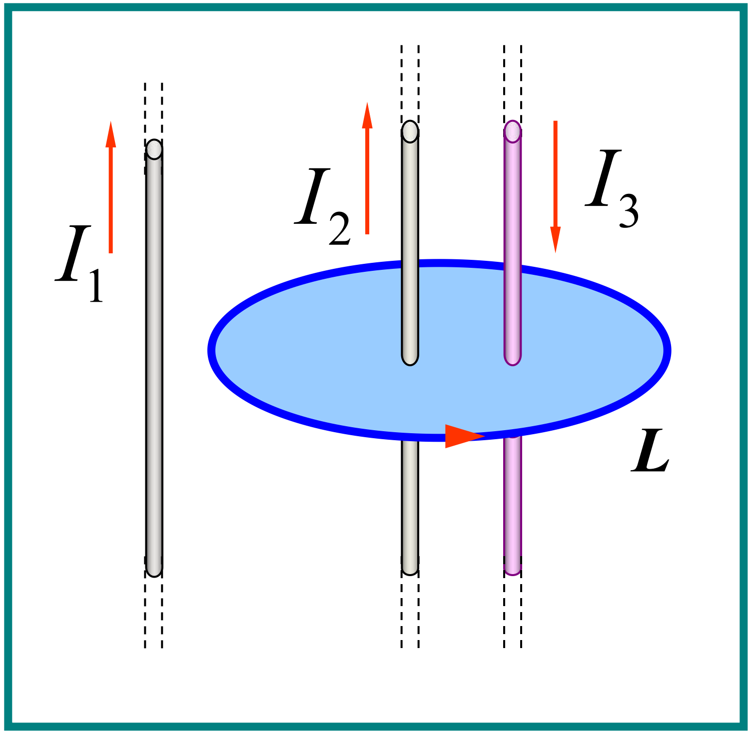

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int_{L_1} \mathrm{d}\theta + \int_{L_2} \mathrm{d}\theta\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}[\theta - \theta] = 0$$

**说明：** 当闭合路径 $L$ 不包围电流时，该电流对沿这一闭合路径的 $B$ 环流无贡献。

## (4) 多电流情况




$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint_L \vec{B}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\oint_L \vec{B}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\oint_L \vec{B}_3\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\mu_0(I_2-I_3)$$

结果对任意形状的回路，任意形状的闭合电流（伸向无限远的电流）均成立

安培环路定理

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\sum I_{\mathrm{int}}}$$

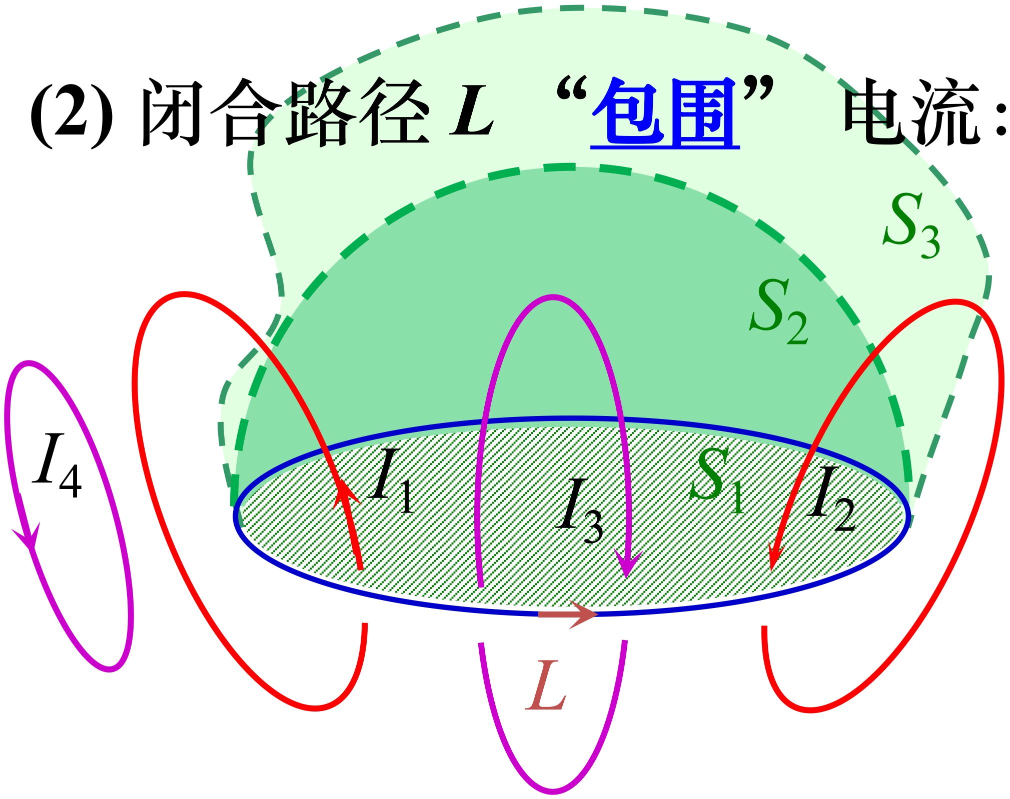
$$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0}$$

## 几点注意

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\mathrm{int}}$$

(1) 电流应该是闭合的恒定电流。

(2) 闭合路径 $L$ “**包围**”电流：只有与 $L$ 相**铰链**的电流才算被 $L$ 包围的电流。



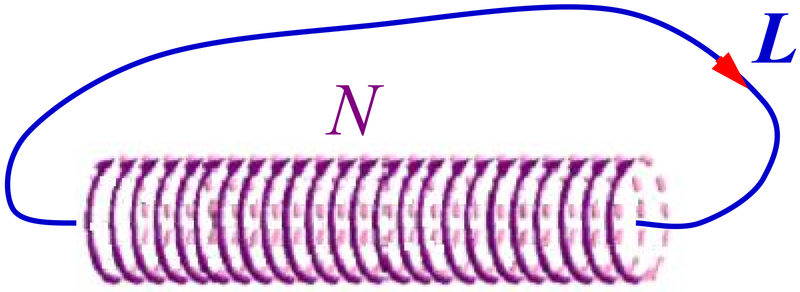

只有 $I_1$、$I_2$ 被回路$L$所包围，且 $I_1$ 为正，$I_2$ 为负。

## 几点注意

(3) 电流 $I$ 正负的规定： $I$ 与 $L$ 成右螺旋时，$I$ 为正；反之 $I$ 为负。

(4) 若电流回路为**螺旋形**，而积分环路 $L$ 与 $N$ 匝电流铰链，则

$$\boxed{\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 NI}$$

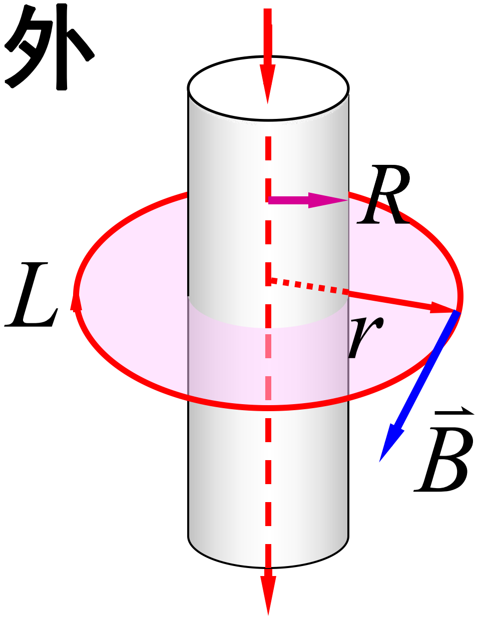



**(5) 安培环路定理表明**

**恒定磁场是有旋场，即**电流以涡旋的方式激发磁场，凡是有电流的地方，在它周围必然有闭合的磁感线环绕。

# 7.4.3 安培环路定理的应用

## 一、无限长均匀载流圆柱体内外的磁场



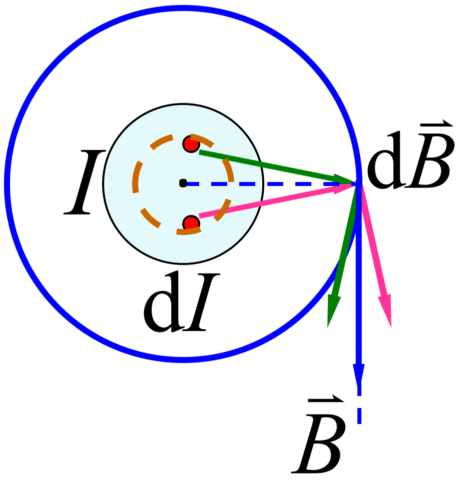

**解：** (1) 对称性分析 (2) 选取回路

$r > R$ $\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$

$$2\pi r B = \mu_0 I \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

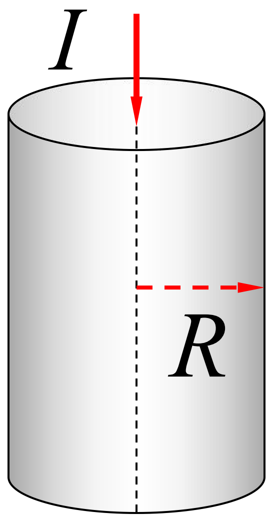
$0 < r < R$ $\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I$

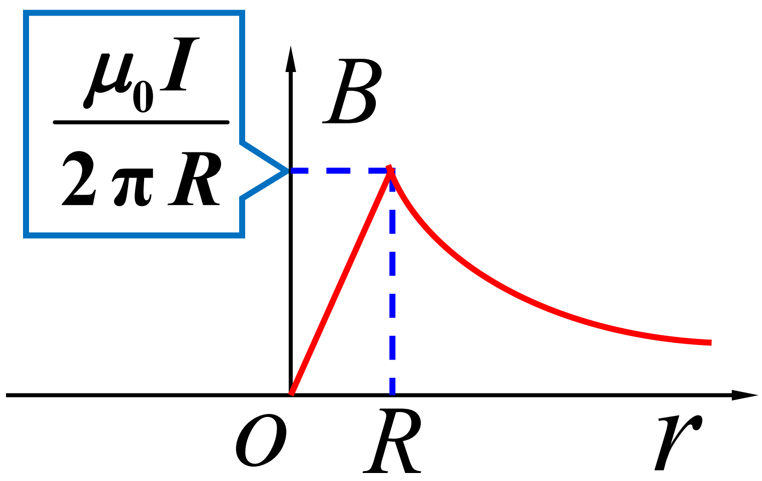
$$2\pi r B = \frac{\mu_0 r^2}{R^2} I \qquad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$



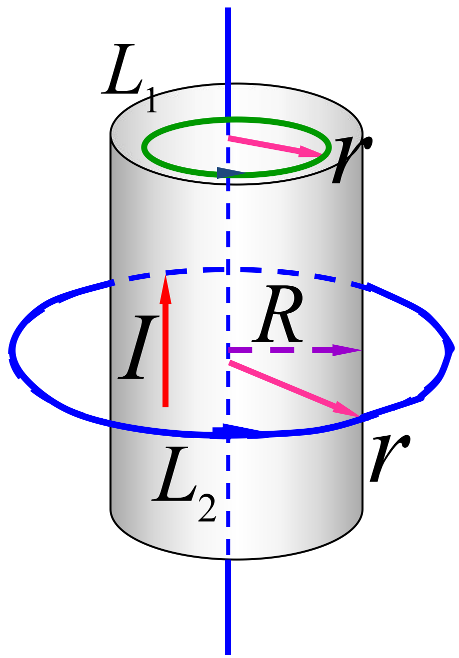
$$\begin{cases} 0 < r < R, & B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \\ r > R, & B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases}$$

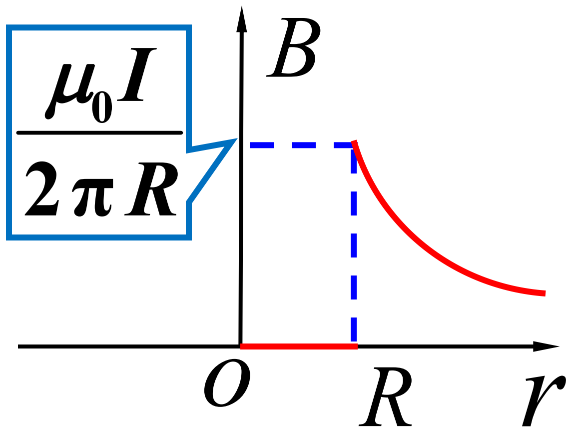
$\vec{B}$ 的方向与 $I$ 成右螺旋



# 思考：无限长载流圆柱面的磁场



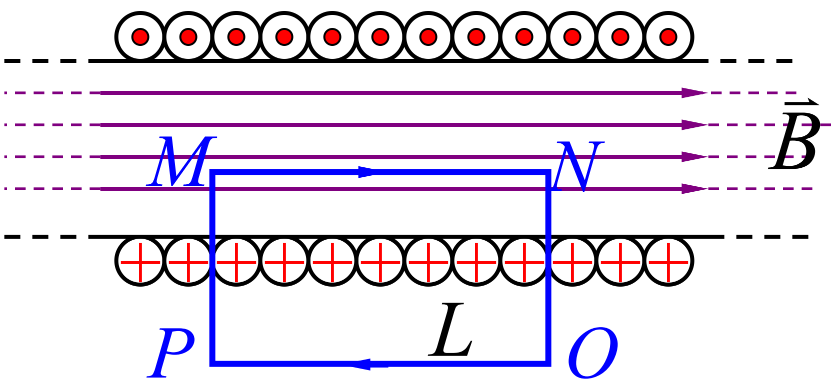

**解：**

$0 < r < R$, $\oint_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ $\quad B = 0$

$r > R$, $\oint_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$ $\quad B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

# 二、无限长密绕直螺线管内部的磁场

**解：** (1) 对称性分析螺旋管内为均匀场，方向沿轴向，外部磁感强度趋于零，即 $B \cong 0$ .




(2) 选回路 $L$ .

磁场 $\vec{B}$ 的方向与电流 $I$ 成右螺旋.

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{MN} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{NO} \cancel{\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \int_{OP} \cancel{\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \int_{PM} \cancel{\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

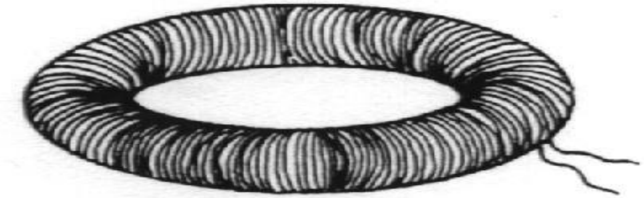
$$B\cdot \overline{MN} = \mu_0 n \overline{MN} I$$

$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

**无限长载流螺线管内部磁场处处相等，外部磁场为零.**

# 三、密绕螺绕环内部的磁场

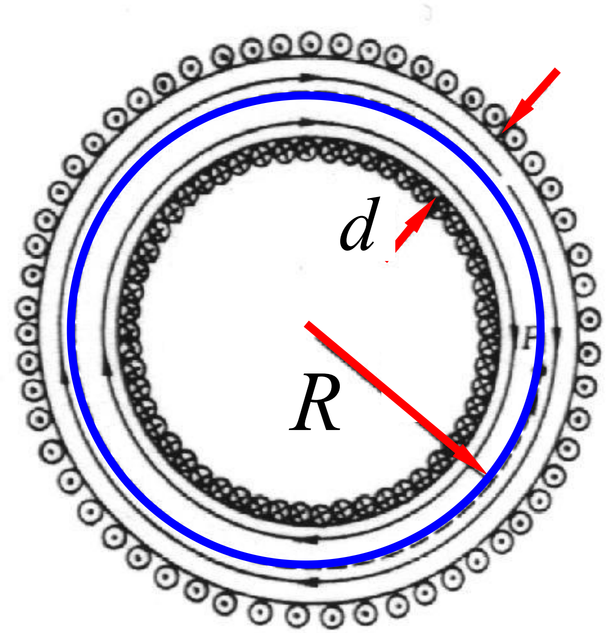
**解：** (1) 对称性分析；环内 $\vec{B}$ 线为同心圆，环外 $\vec{B}$ 为零.



(2) 选回路 .

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi RB = \mu_0 NI$$

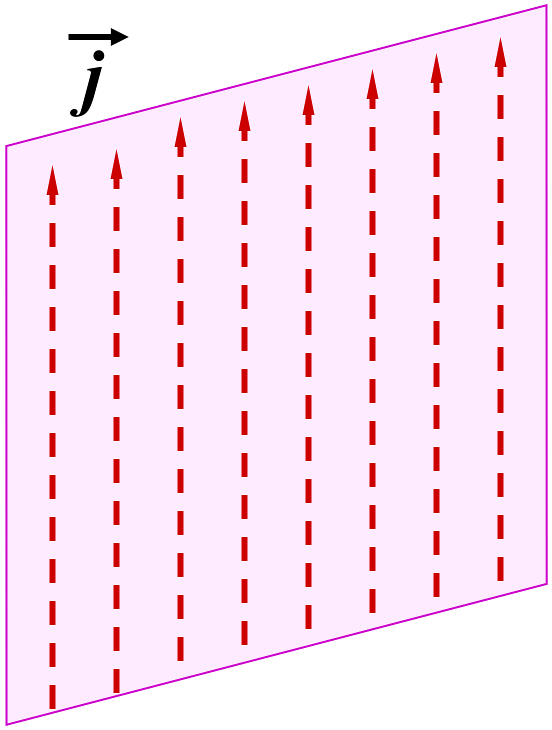
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$$

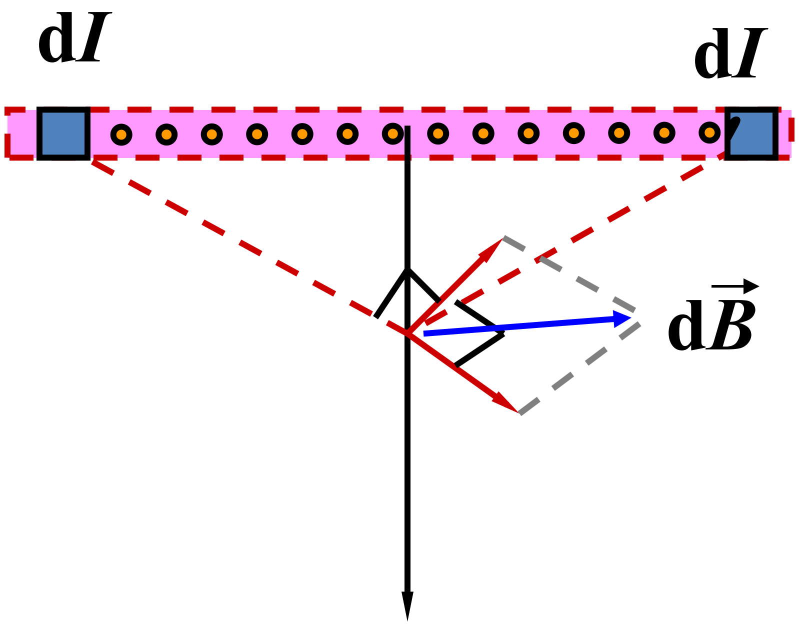



令 $L = 2\pi R$ $\qquad \boxed{B = \mu_0 NI/L}$

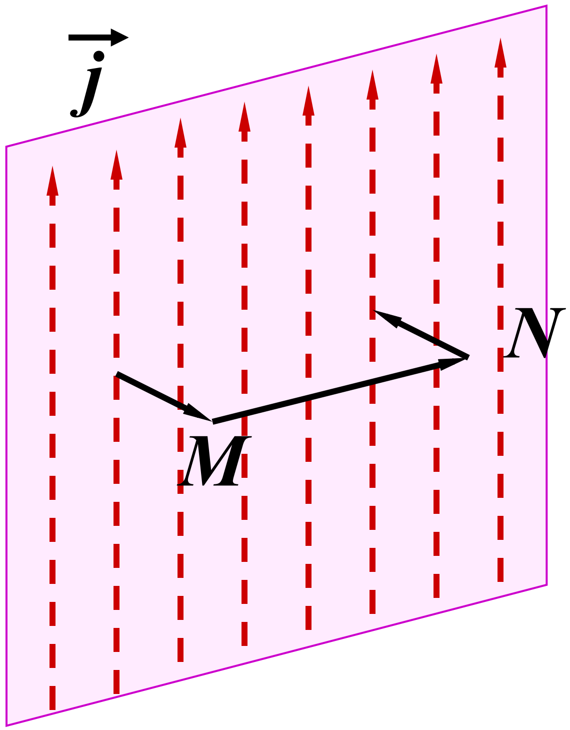
当 $2R >> d$ 时，螺绕环内可视为均匀场 .

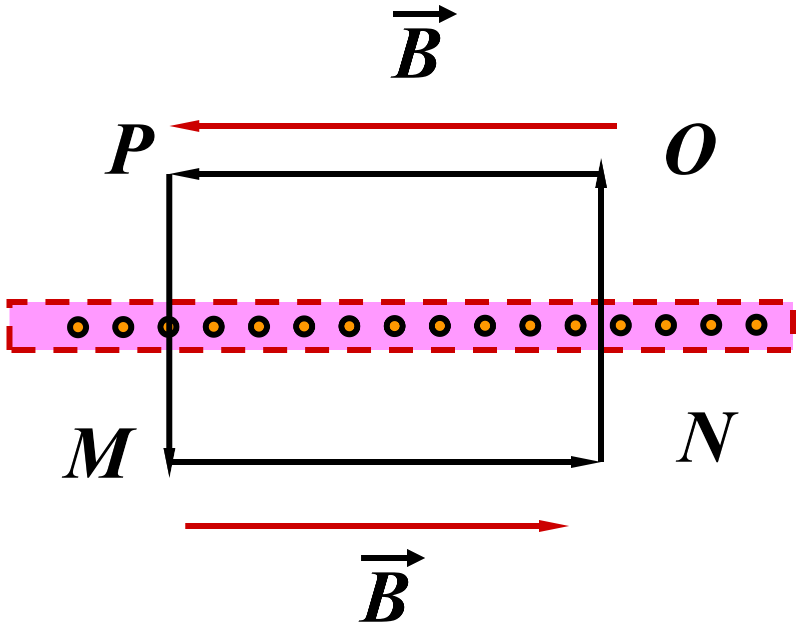
# 四、无限大载流平面的磁场



**解:**



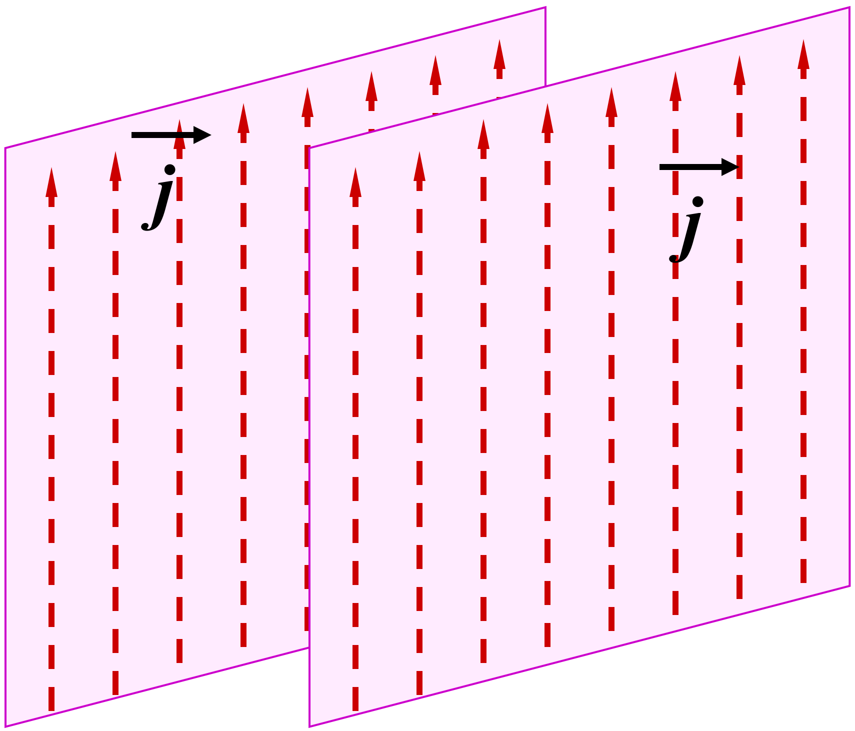



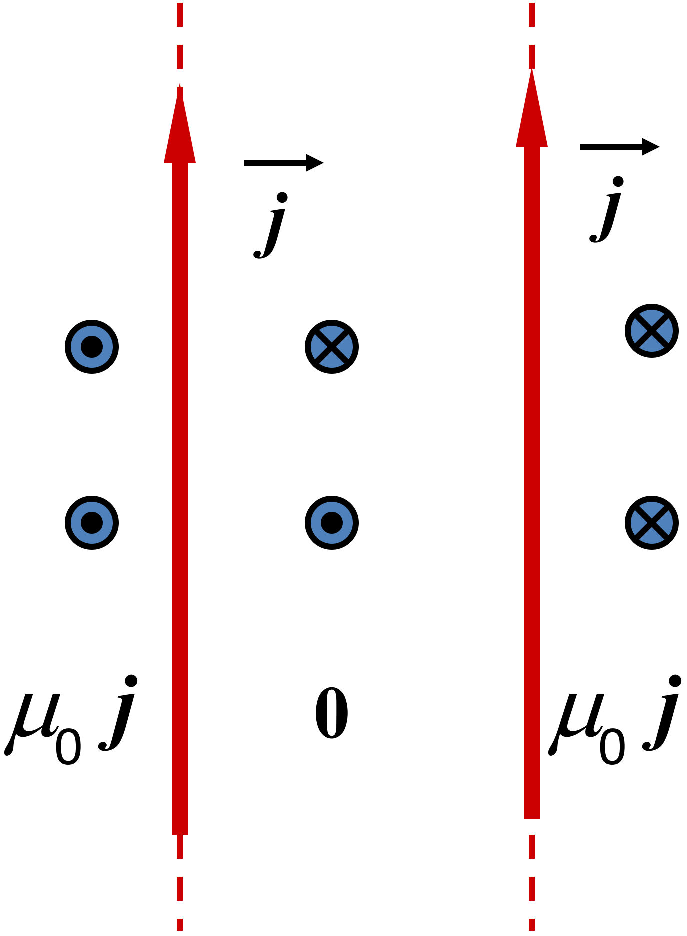

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{MN} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{NO} \cancel{\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \int_{OP} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{PM} \cancel{\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

$$2Bl = \mu_0 jl$$

故 $\boxed{B = \frac{1}{2}\mu_0 j}$

# 思考：两无限大导体平板两侧的磁感应强度

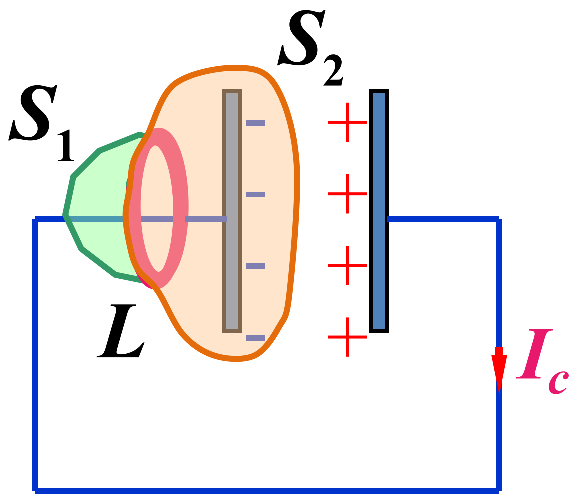


# 7.4.4 位移电流与全电流

恒定磁场中，安培环路定理

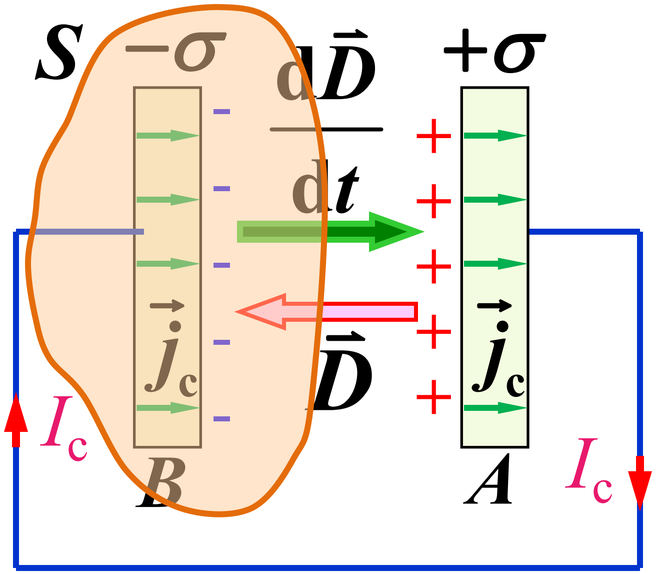
$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$




（以 $L$ 为边做任意曲面 $S$）

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_{S_1} \vec{j}_c\cdot d\vec{S} = I_c$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_{S_2} \vec{j}_c\cdot d\vec{S} = 0$$




**麦克斯韦假设**：变化的电场是一种电流，称为位移电流，它使全电路的电流“连续”起来。

♦ **位移电流密度**

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$I_d = \int_S \vec{j}_d \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

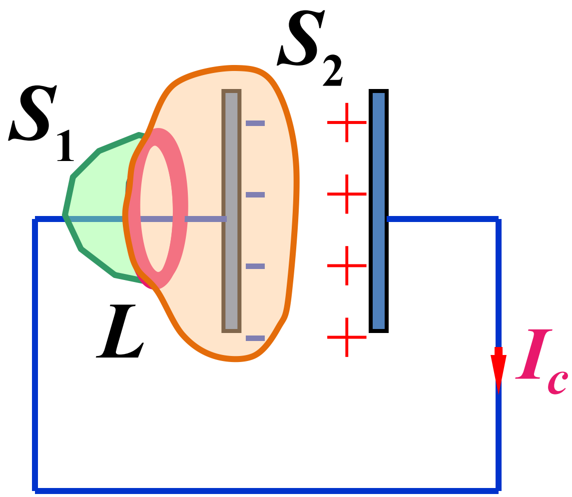
**电流连续性方程**　　**$D$的高斯定理**

$$\frac{d}{dt}\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{j}_c \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}+\oint_S \vec{j}_{\mathrm{c}}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

$$\oint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}+\vec{j}_{\mathrm{c}}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

$$\oint_S (\vec{j}_{\mathrm{d}}+\vec{j}_{\mathrm{c}})\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$



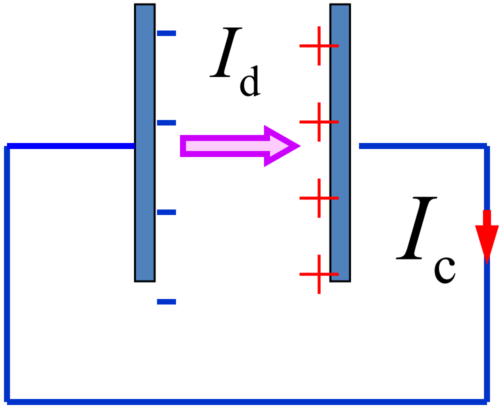

$$S_1+S_2=S$$

故

$$\int_{S_1} (\vec{j}_{\mathrm{d}}+\vec{j}_{\mathrm{c}})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\int_{S_2} (\vec{j}_{\mathrm{d}}+\vec{j}_{\mathrm{c}})\cdot \mathrm{d}\vec{S}=I_{\mathrm{d}}+I_{\mathrm{c}}$$

即 $\int (\vec{j}_{\mathrm{d}}+\vec{j}_{\mathrm{c}})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 是连续的




♦ **全电流** $I_t = I_c + I_d$

1）全电流是**连续**的；

2）位移电流和传导电流一样激发磁场；

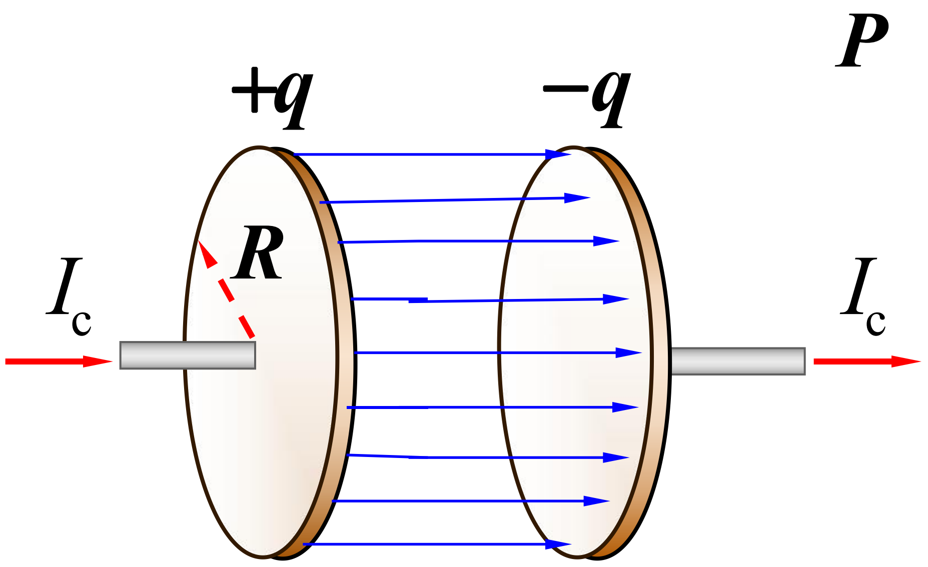
3）传导电流产生焦耳热，位移电流不产生焦耳热。

**普遍的安培环路定理**

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_t = \mu_0 \int_s \left(\vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

**例1** 有一圆形平行平板电容器，$R = 0.3\,\mathrm{m}$。现对其充电，使电路上的传导电流 $I_c = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 5\,\mathrm{A}$，若略去边缘效应，**求：** 两极板间距离轴线 $r_1 = 0.2\,\mathrm{m}$ 和$r_2 = 0.4\,\mathrm{m}$两处的磁感应强度 。

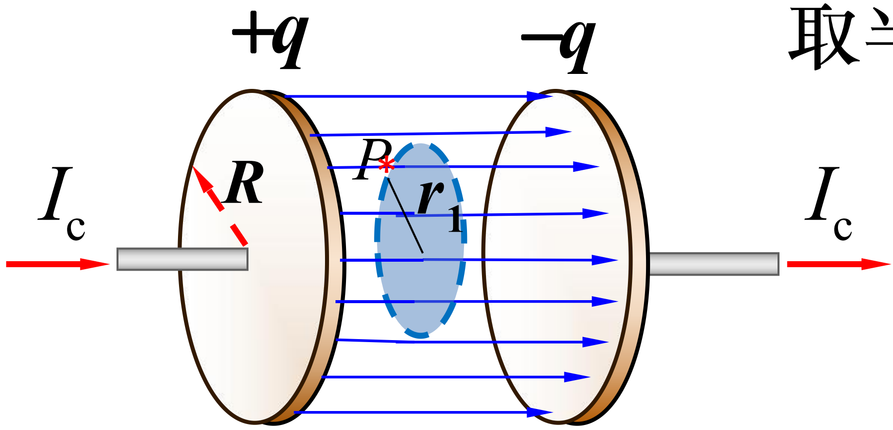
**解：** 两极板之间的电位移矢量的大小为




$$D = \varepsilon_0 E = \sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\pi R^2}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{I_c}{\pi R^2}$$

**电场具有轴对称性，故磁场亦呈轴对称性分布。**




取半径 $r_1 = 0.2\,\mathrm{m}$ 的圆形回路 $L_1$

$$\oint_{L_1} \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi r_1 B_1$$

而

$$\int_{S_1} \frac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1} \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}S = \pi r_1^2 \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{r_1^2 I_c}{R^2}$$

由普遍的安培环路定理

$$2\pi r_1 B_1 = \mu_0 \frac{r_1^2 I_c}{R^2}$$

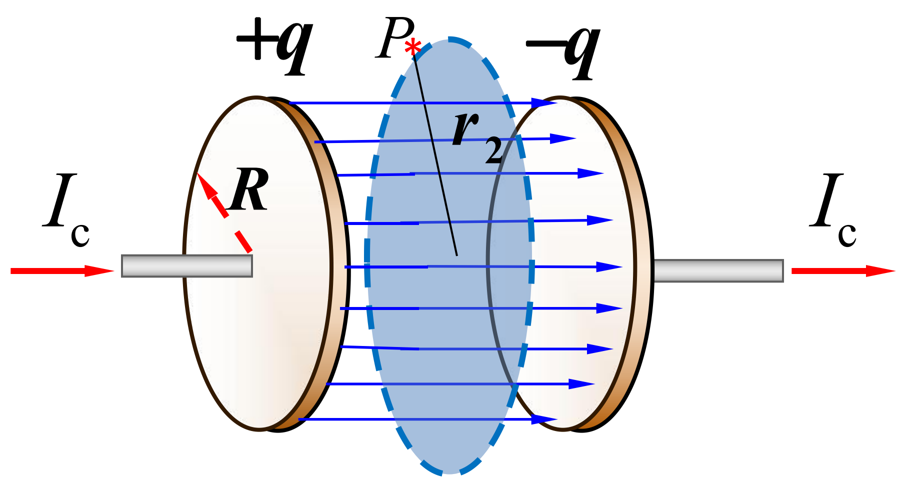
故 $$B_1 = \mu_0 \frac{r_1 I_c}{2\pi R^2}$$ 代入数据得 $B_1 = 2.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$

取半径 $r_2 = 0.4\,\mathrm{m}$ 的圆形回路 $L_2$

$$\int_{S_2} \frac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_2} \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}S = \pi R^2 \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = I_{\mathrm{c}}$$

故 $\quad 2\pi r_2 B_2 = \mu_0 I_{\mathrm{c}}$

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_{\mathrm{c}}}{2\pi r_2} = 2.5\times 10^{-6}\ \mathrm{T}$$



# §7.5

# 安培力与洛伦兹力

# 7.5.1 安培力

## 一、安培定律

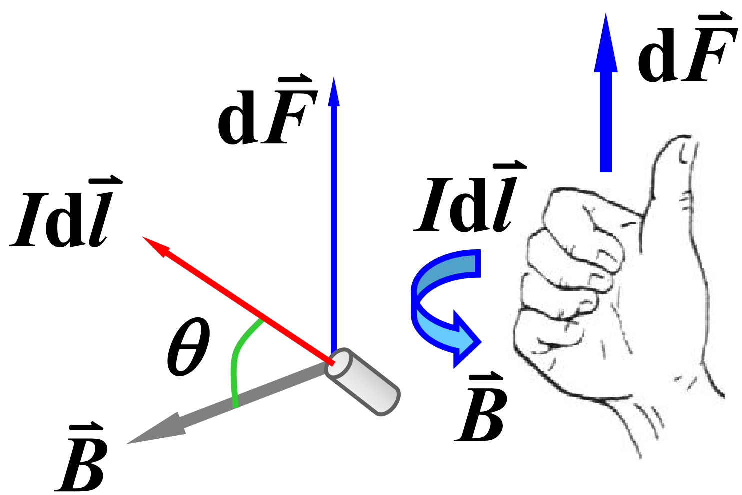
磁场对载流导线的作用力——**安培力**

一个**电流元** $I\mathrm{d}\vec{l}$ 所受安培力为

$$\mathrm{d}F = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$ **安培定律**

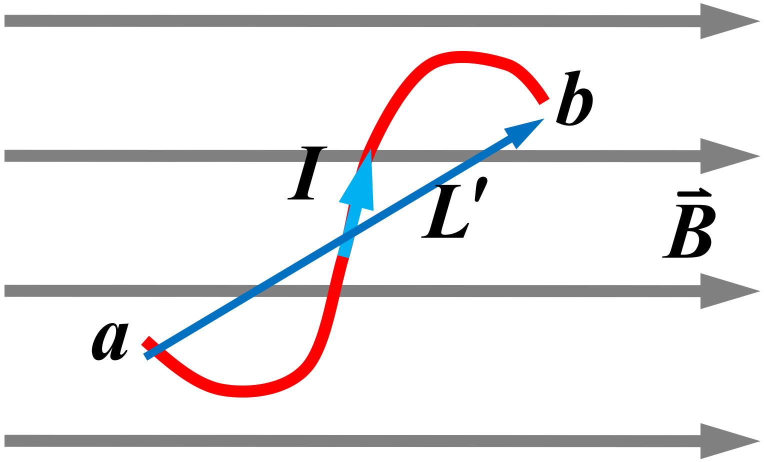
任意形状的载流导线在任意磁场中所受安培力为

$$\vec{F} = \int_L I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$



# 讨 论

**1.** 在均匀磁场中的任意形状的**载流导线**



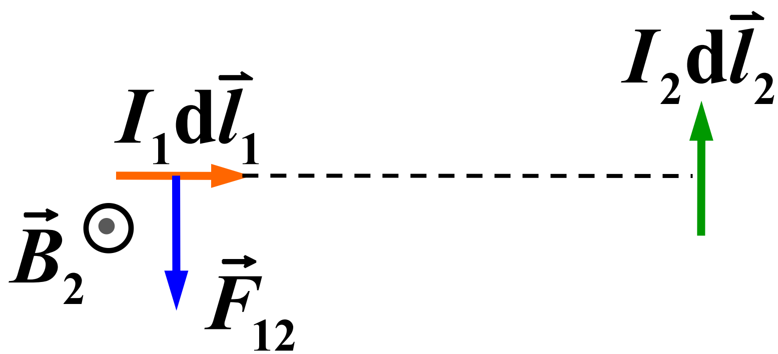

$$\vec{F}=\int_a^b I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}=I\left(\int_a^b \mathrm{d}\vec{l}\,\right)\times\vec{B}$$

$$=I\vec{L}'\times\vec{B}$$

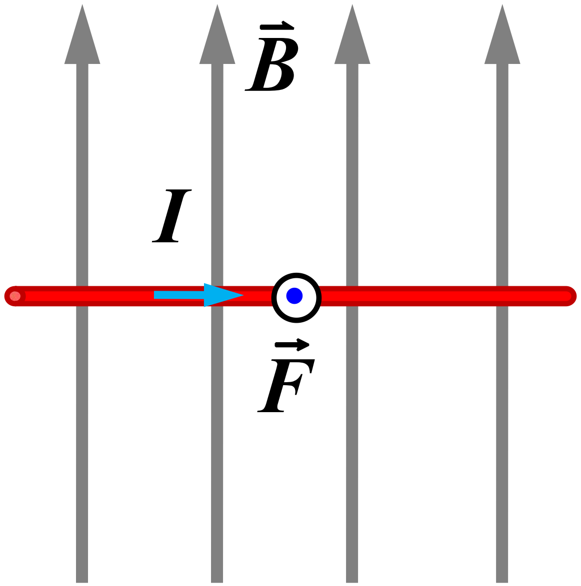
**2.** 在均匀磁场中的任意形状的**闭合载流线圈**

$$\vec{F}=\oint_L I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}=I\left(\oint_L \mathrm{d}\vec{l}\,\right)\times\vec{B}=0$$

**3.** 两孤立电流元之间的安培力**不满足牛顿第三定律**



# 3. 均匀磁场、直导线**相互垂直**




$$F = ILB$$