§ 5.3

高斯定理

5.3.1 电场线

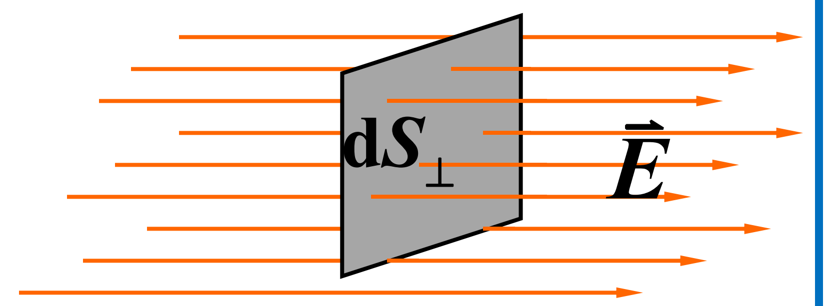
规 定

1) 曲线上每一点**切线**方向为该点电场方向；

2) 通过**垂直**于电场方向单位面积**电场线数**为该点电场强度的大小。

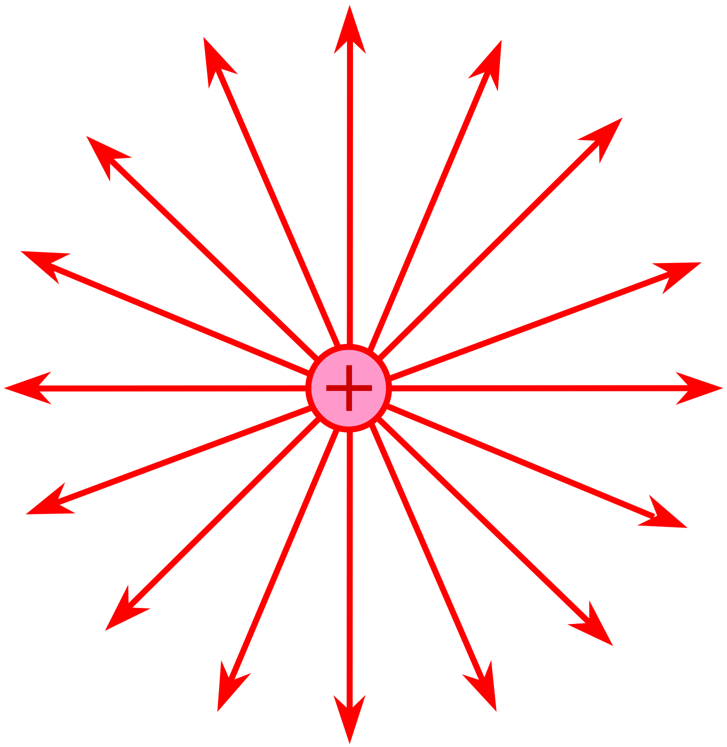
$$\left|\vec{E}\right| = E = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S_{\perp}}$$ 电场线密度

用电场线的疏密程度来表示场强 $\vec{E}$ 的大小。

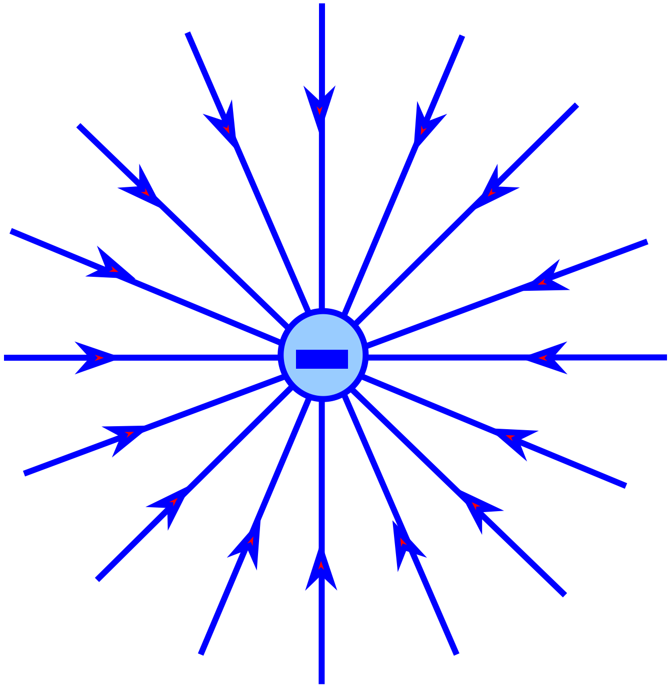


点电荷的电场线

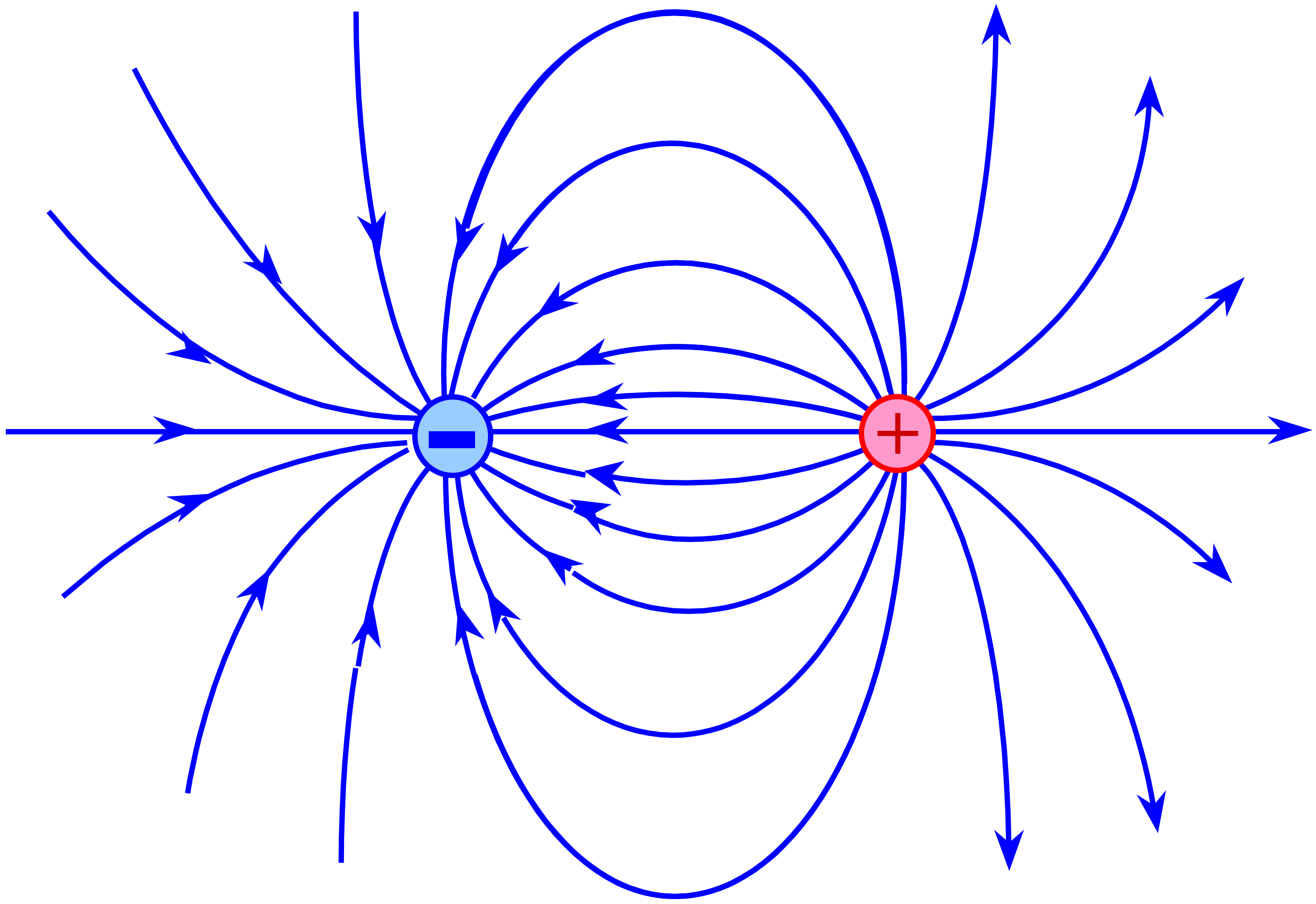
正 点 电 荷



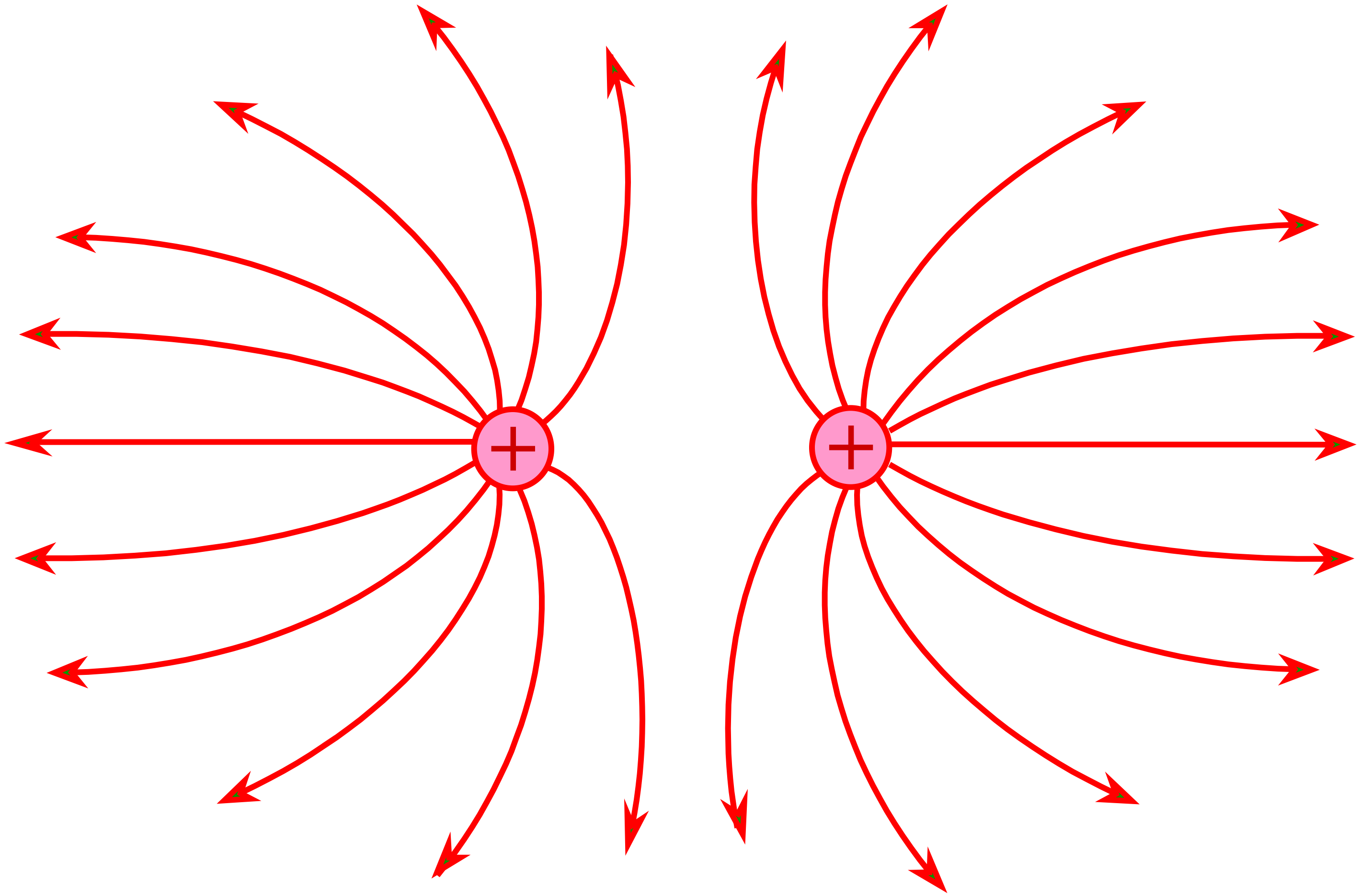
负 点 电 荷



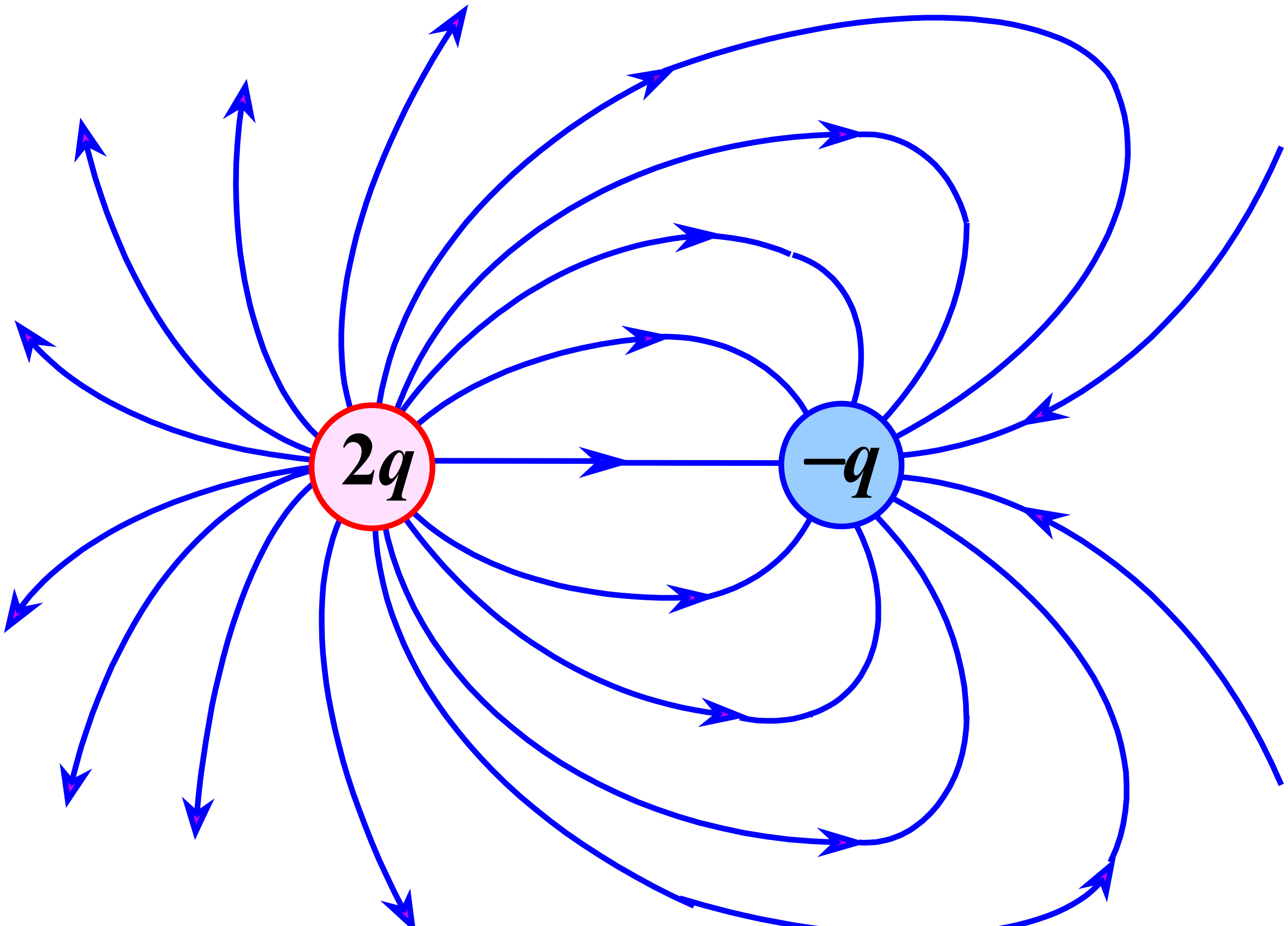
一对等量异号点电荷的电场线



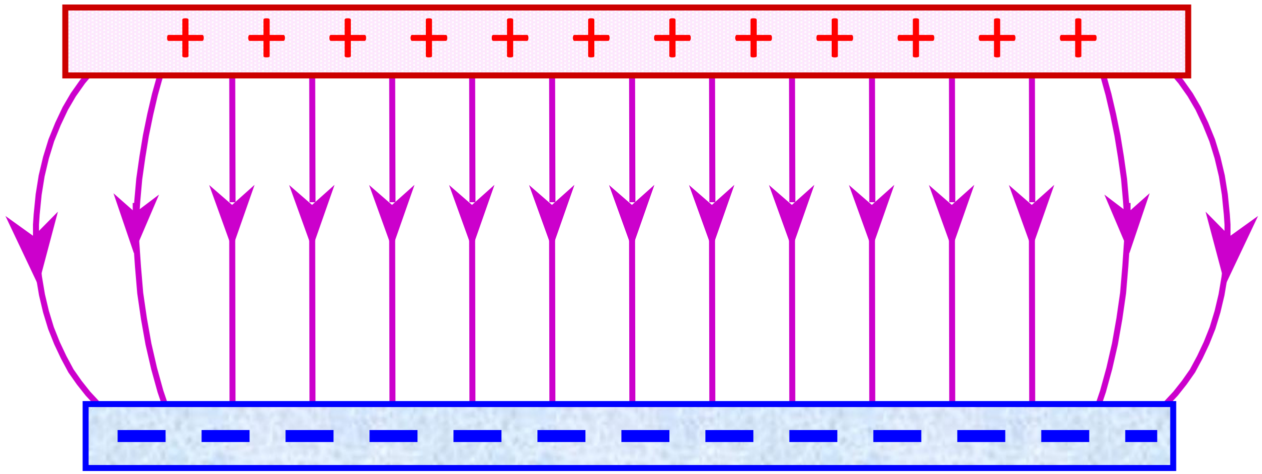
一对等量正点电荷的电场线



一对不等量异号点电荷的电场线



带电平行板电容器的电场线



均匀电场（匀强电场）：一组平行且疏密程度一致的电场线。

电场线特性

1） 始于正电荷，止于负电荷（或来自无穷远，去向无穷远）．

2） 电场线不相交.

3） 静电场电场线不闭合.

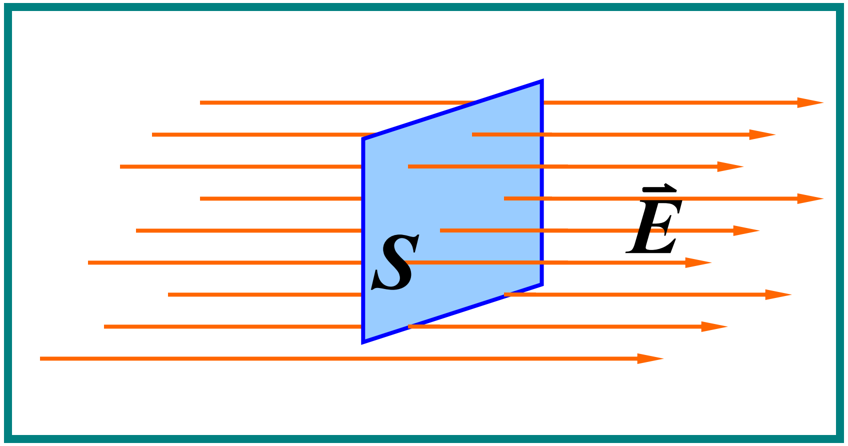
5.3.2 电场强度通量

$$\left|\vec{E}\right| = E = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S_{\perp}}$$

通过电场中某一个面的电场线数叫做通过这个面的电场强度通量 Φ_e。

1. 均匀电场，$\vec{E}$ 垂直平面

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{e}} = ES}$$

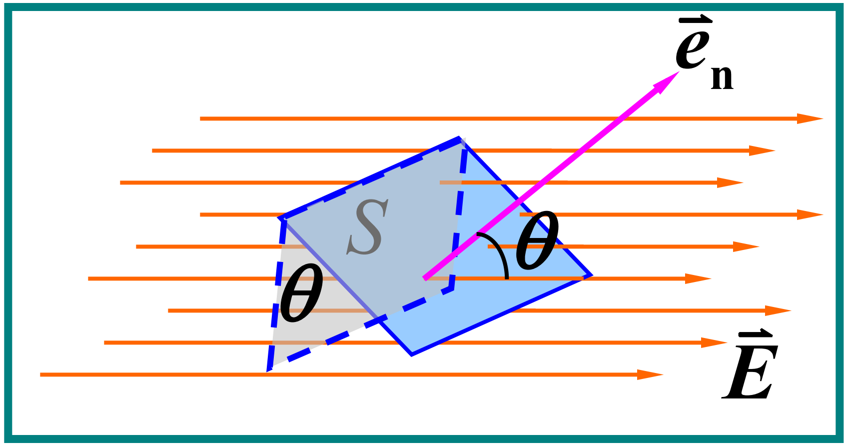


2. 均匀电场，$\vec{E}$ 与平面夹角 θ

$$\Phi_{\mathrm{e}} = ES_{\perp} = ES\cos\theta$$

$$\vec{S} = S\vec{e}_n$$

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{e}} = \vec{E}\cdot\vec{S}}$$



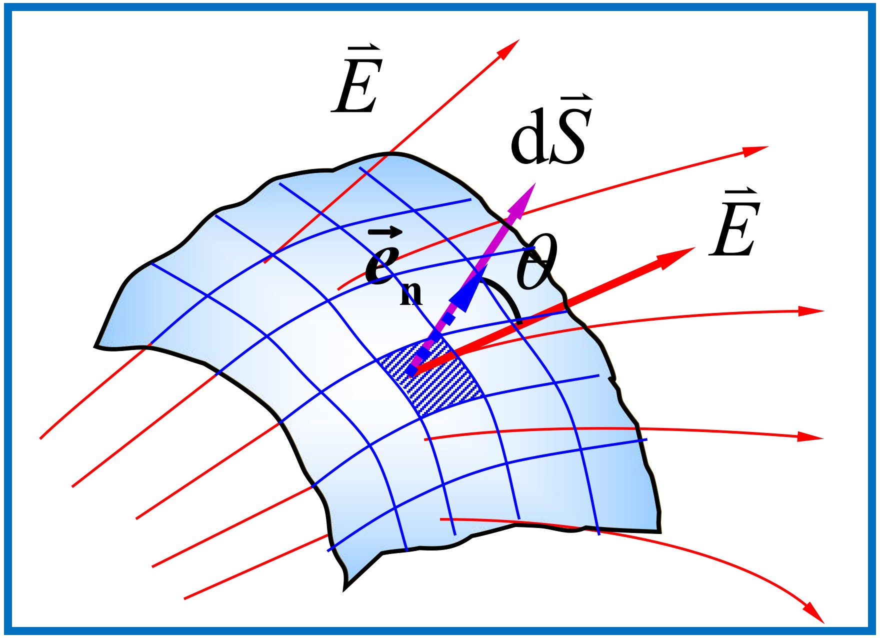
3. 非均匀场，任意曲面

小面元 $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{e}_n$

$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = E\mathrm{d}S\cos\theta$$

$$\Phi_e = \int \mathrm{d}\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

面积分

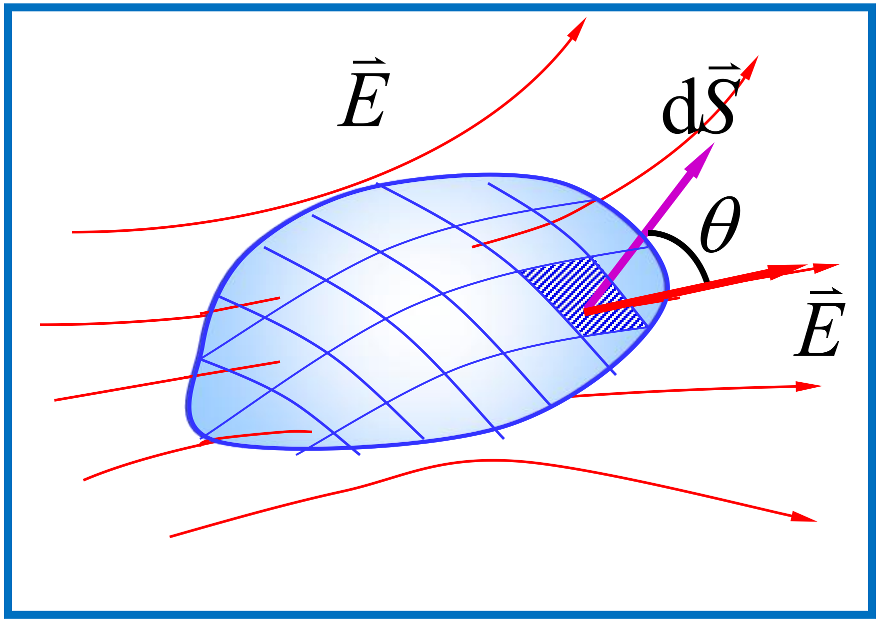


4. 任意电场，封闭曲面

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

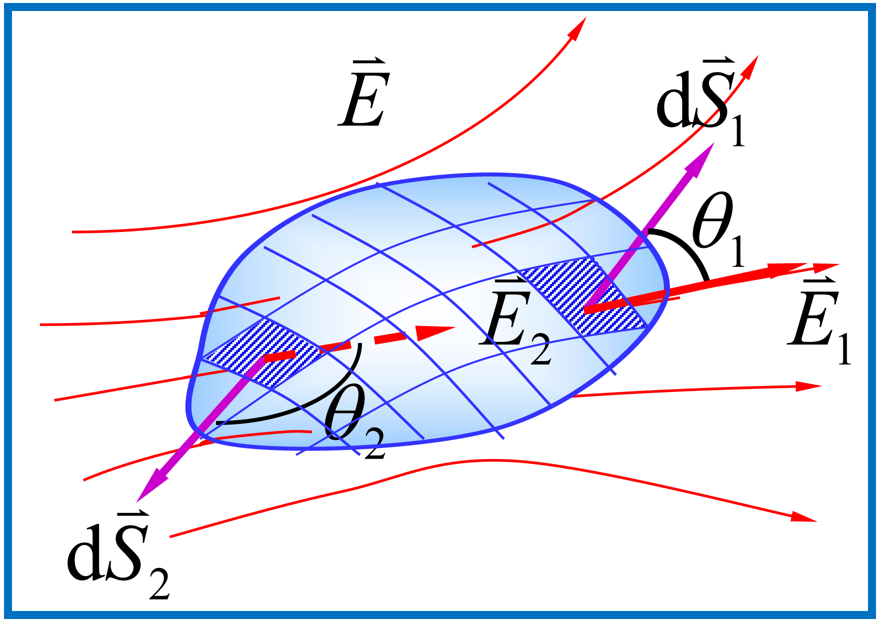
$$= \oint_S E\cos\theta\mathrm{d}S$$

闭合面积分



$\vec{e}_n$ 规定为封闭曲面的外法线方向

$$\mathrm{d}\Phi_\mathrm{e} = E\mathrm{d}S\cos\theta$$



$$\theta_1 < \frac{\pi}{2},\quad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}1} > 0$$

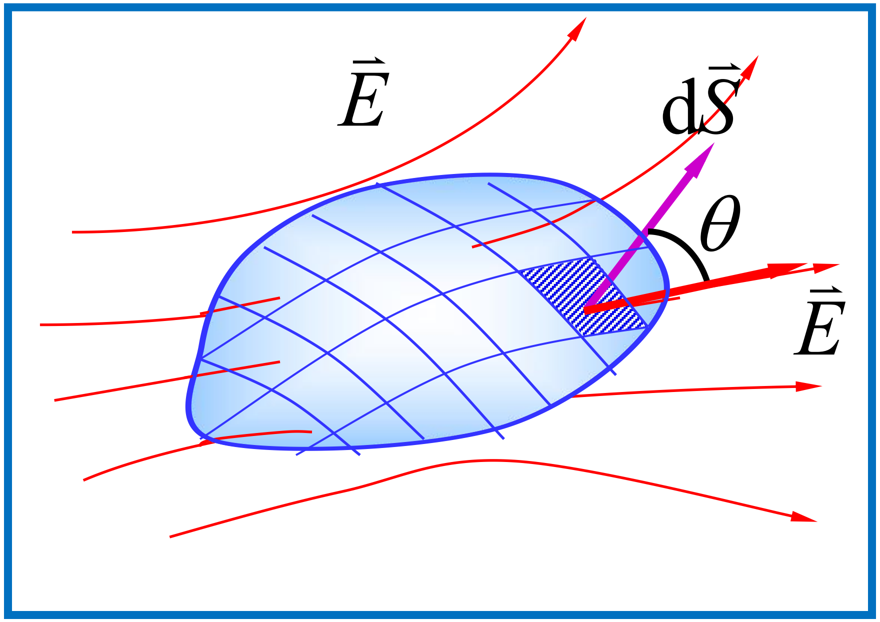
$$\theta_2 > \frac{\pi}{2},\quad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}2} < 0$$

$$\Phi_\mathrm{e} = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\cos\theta\mathrm{d}S$$

$$= \int_{S_{入}} E\cos\theta\mathrm{d}S + \int_{S_{出}} E\cos\theta\mathrm{d}S$$

表示：穿出与穿进封闭面的电场线的条数之差

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \int_{S_{入}} E\cos\theta \mathrm{d}S + \int_{S_{出}} E\cos\theta \mathrm{d}S$$

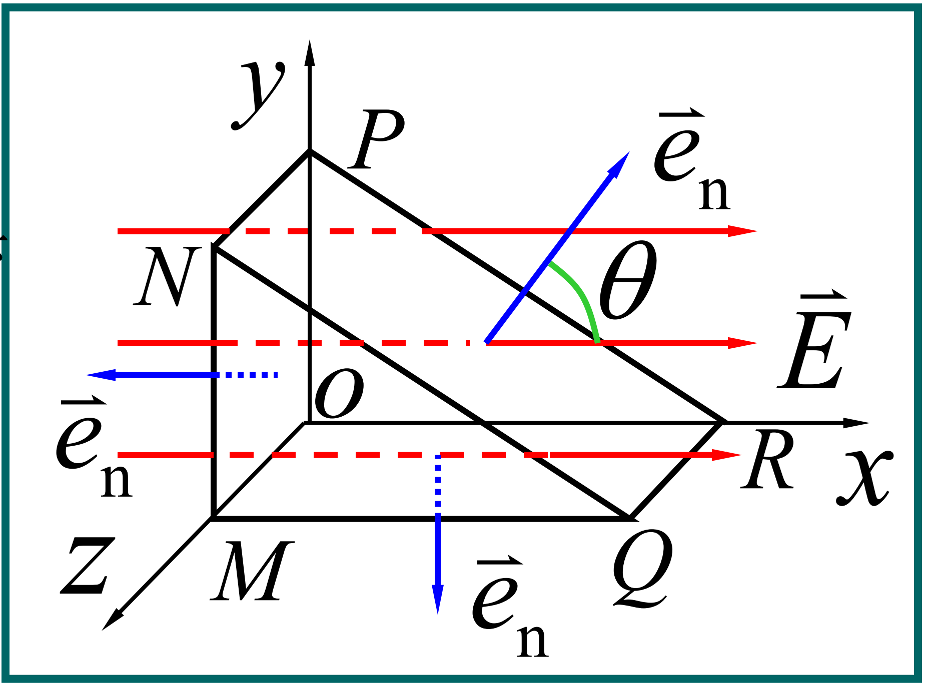


结论： 对封闭曲面

(1) 若 $\Phi_{\mathrm{e}} > 0$，即电场强度通量为正，则有净的电场线从曲面之内向外穿出；

(2) 若 $\Phi_{\mathrm{e}} < 0$，即电场强度通量为负，则有净的电场线从外部穿入曲面。

例1 如图所示，有一个三棱柱体放置在电场强度为 $\vec{E}$ 的匀强电场中。求通过此三棱柱体的电场强度通量。



解: $\Phi_e = \Phi_{e前} + \Phi_{e后} + \Phi_{e左} + \Phi_{e右} + \Phi_{e下}$

$$\begin{cases} \Phi_{e前} = \Phi_{e后} = \Phi_{e下} = \vec{E} \cdot \vec{S} = 0 \\ \Phi_{e左} = \vec{E} \cdot \vec{S}_{左} = ES_{左} \cos\pi = -ES_{左} \\ \Phi_{e右} = \vec{E} \cdot \vec{S}_{右} = ES_{右} \cos\theta = ES_{左} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi_e = \Phi_{e前} + \Phi_{e后} + \Phi_{e左} + \Phi_{e右} + \Phi_{e下} = 0$$

5.3.3 电场的高斯定理

高斯定理

$$\Phi_{\mathrm{e}}=\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}q_i$$

在真空中，通过任一**闭合**曲面的电场强度通量，等于该曲面所**包围**的所有电荷的代数和除以ε_0。

（与**面外**电荷无关，闭合曲面称为**高斯面**）

请思考： (1) 高斯面上的$\vec{E}$与那些电荷有关?

(2) 哪些电荷对闭合曲面S的Φ_{e}有贡献?

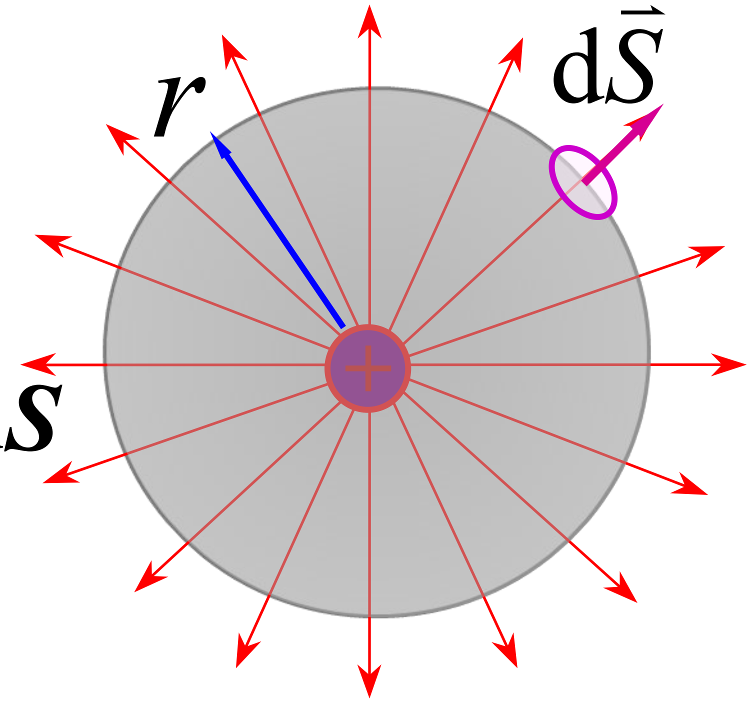
$\left\{\begin{array}{l}\text{库仑定律}\\ \text{电场强度叠加原理}\end{array}\right.$ ⇒ **高斯定理**

1. **点电荷位于球面中心**

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}S$$

$$\Phi_e = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



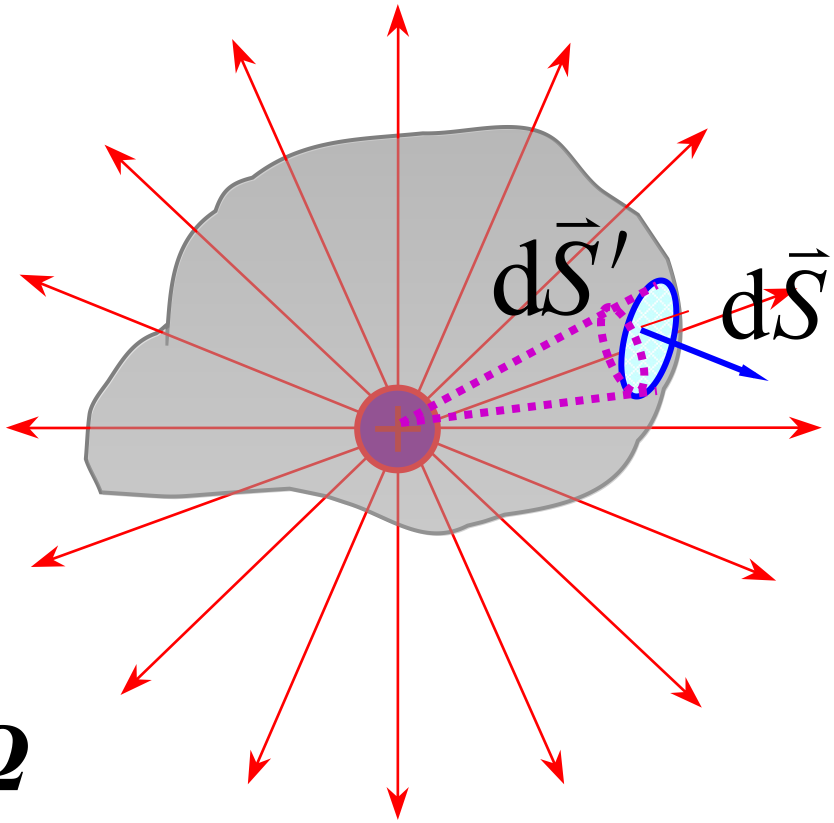
2. 点电荷在任意封闭曲面内

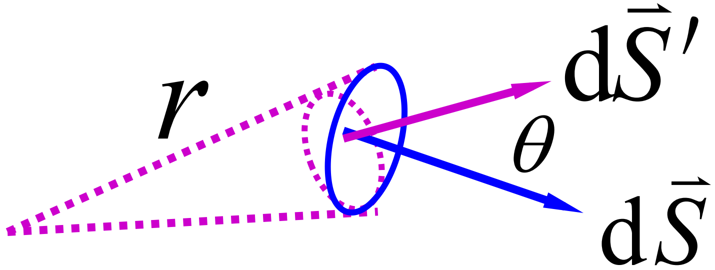
$$\mathrm{d}\Phi_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}S\cos\theta$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}S'}{r^2}$$

其中**立体角** $\frac{\mathrm{d}S'}{r^2} = \mathrm{d}\Omega$

$$\Phi_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint \mathrm{d}\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$





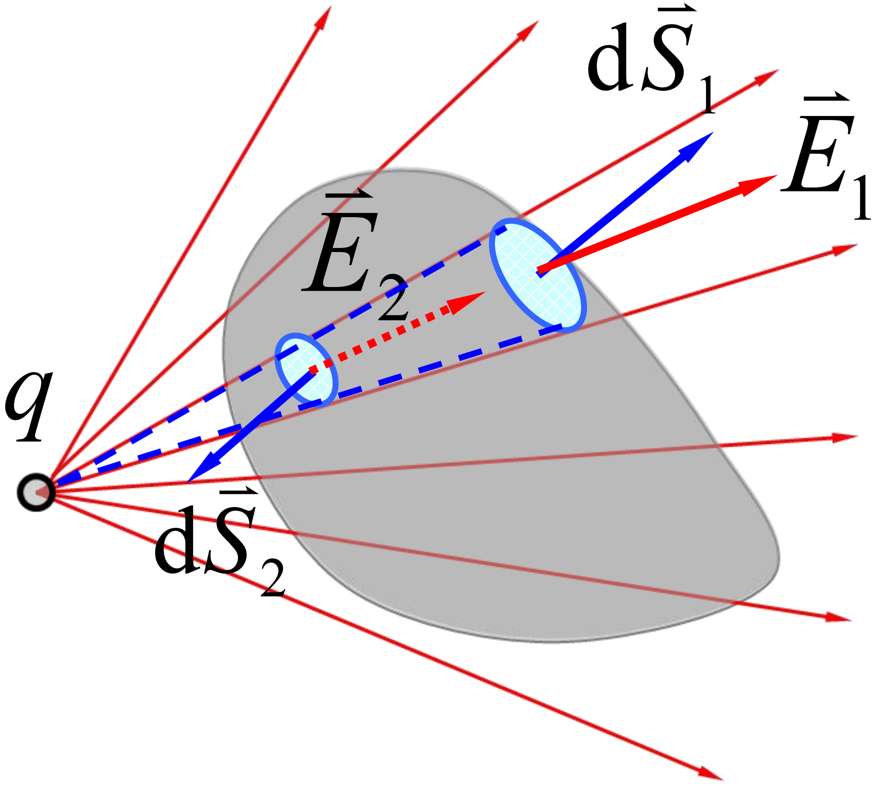
3. 点电荷在封闭曲面之外

$$\mathrm{d}\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 > 0$$

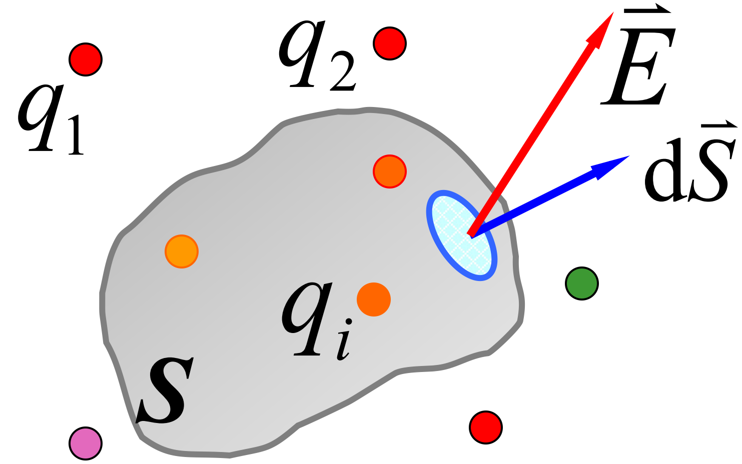
$$\mathrm{d}\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 < 0$$

$$\mathrm{d}\Phi_1 + \mathrm{d}\Phi_2 = 0$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



4. 由多个点电荷产生的电场



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \sum_i \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

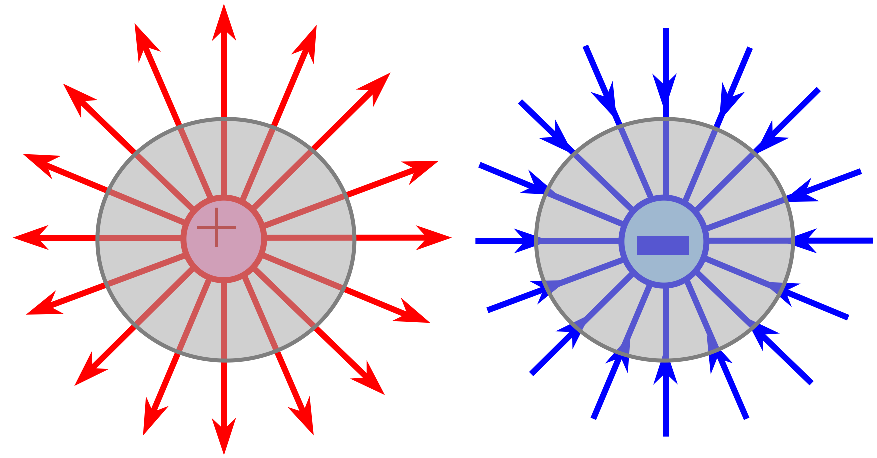
$$= \sum_{i(\mathrm{in})} \oint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \sum_{i(\mathrm{out})} \oint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\because \sum_{i(\mathrm{out})} \oint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\therefore \ \Phi_e = \sum_{i(\mathrm{in})} \oint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i(\mathrm{in})} q_i$$

总结

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$$



1) 高斯面为封闭曲面(假想面）。

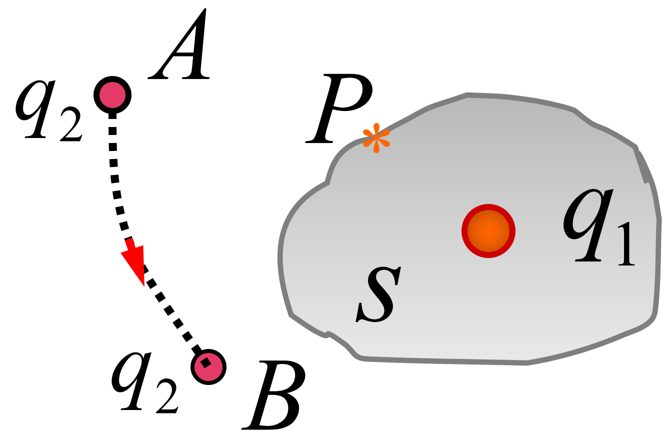
2) 高斯面上的电场强度为所有内外电荷的总电场强度。

3) 仅高斯面内的电荷对高斯面的电场强度通量有贡献。

5) 穿出高斯面的电场强度通量为正，穿入为负。

6) 静电场是有源场。

讨论题



1. 将 q_2 从A移到B点P电场强度是否变化? 变化

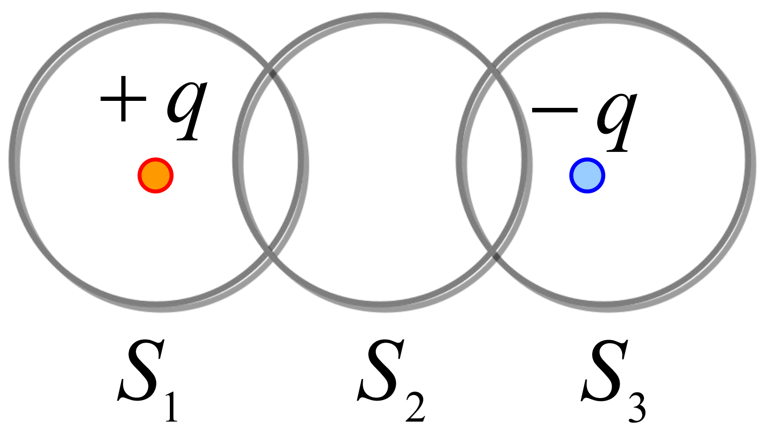
穿过高斯面S的Φ_e有否变化?

不变化

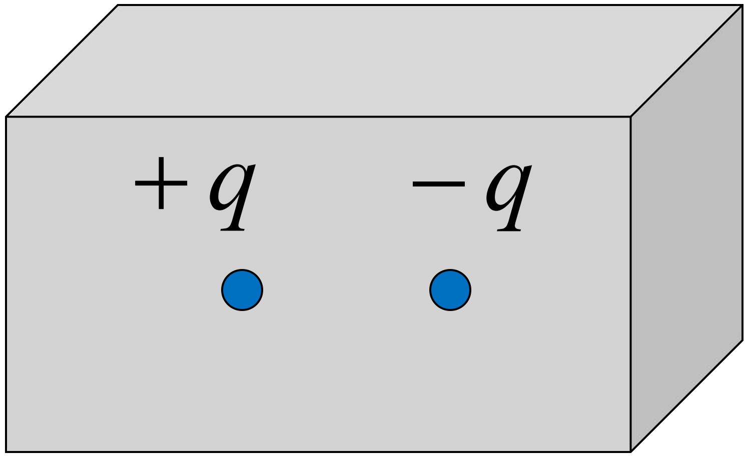
2. 在点电荷$+q$和$-q$ 的静电场中，做如下的三个闭合面S_1、S_2、S_3，求通过各闭合面的电场强度通量。

$$\Phi_{e1} = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{e2} = 0 \qquad \Phi_{e3} = \frac{-q}{\varepsilon_0}$$



思考： 在点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的静电场中，做如下闭合面 S，**求**通过闭合面的电通量 。



通过闭合面的电通量等于0。

思考： 闭合曲面S上任意点的电场强度为0吗?

5.3.4 高斯定理的应用

◆ 用高斯定理求电场强度

原理：高斯定理 $\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$

范围：带电体，静电场必须具有高度的对称性。

步骤：

1. 依据电场强度叠加原理作**对称性分析**；

2. 根据对称性选择合适的**高斯面**；

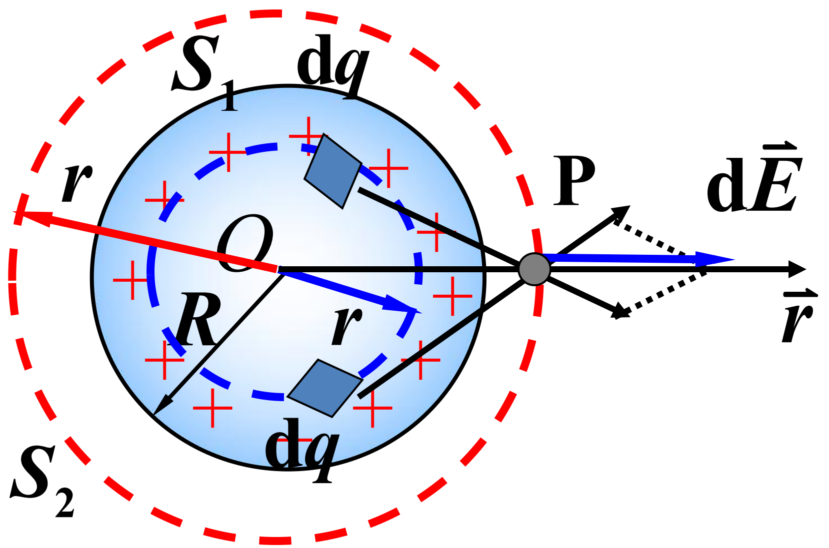
3. 应用高斯定理**计算**；

4. 写出 $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ 的**分区函数**。

一、均匀带电球壳的电场

一半径为 R，均匀带电 q 的薄球壳。求球壳内外任意点的电场强度。

对称性分析：球对称



选高斯面为同心球面。

解（1） $0<r<R$

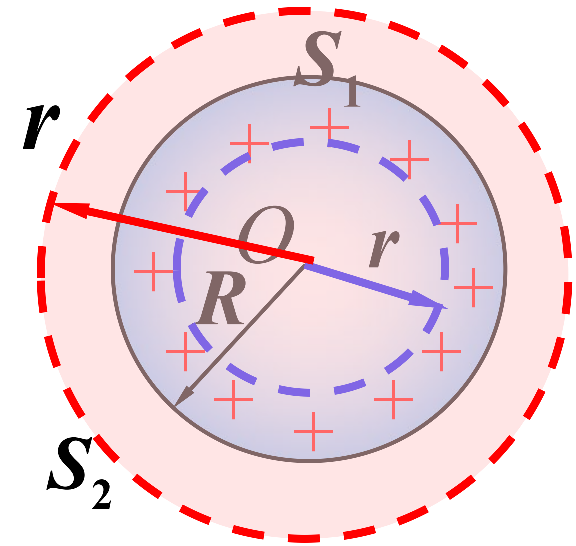
$$\oint_{S_1}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

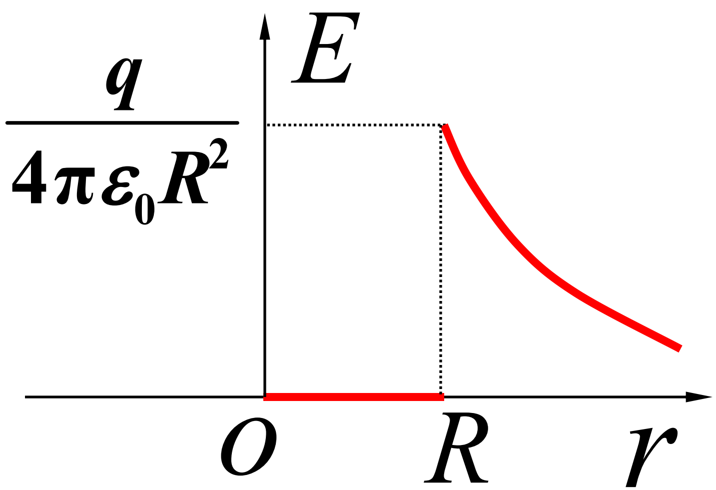
$$\boxed{\vec{E}=0}$$

(2) $r>R$

$$\oint_{S_2}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E=\frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$





二、无限长均匀带电圆柱面的电场

一半径为 R 的无限长均匀带电圆柱面，电荷线密度为 λ。求圆柱面内外任意点的电场强度。

对称性分析：轴对称

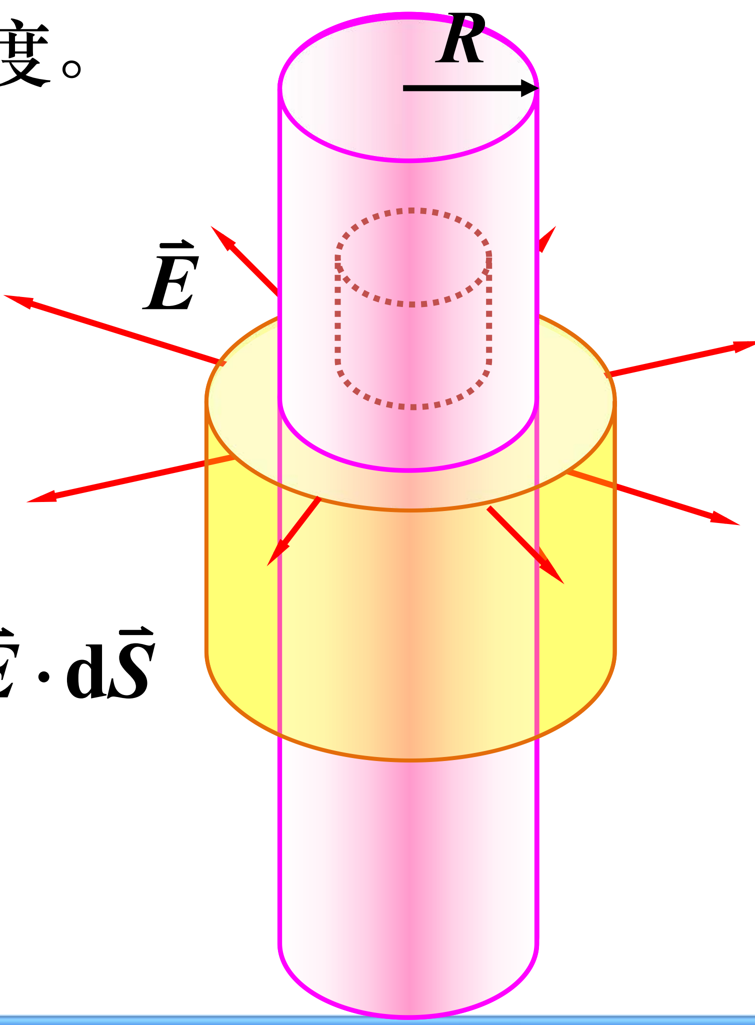
各点电场强度方向垂直于轴线

选取闭合的柱形高斯面

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} =$$

$$\int_{s(柱面)} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{s(上底)} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{s(下底)} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{s(柱面)} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$



(1) $r > R$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{s(\text{柱面})} E\mathrm{d}S = E\int_{s(\text{柱面})} \mathrm{d}S = 2\pi r h E$$

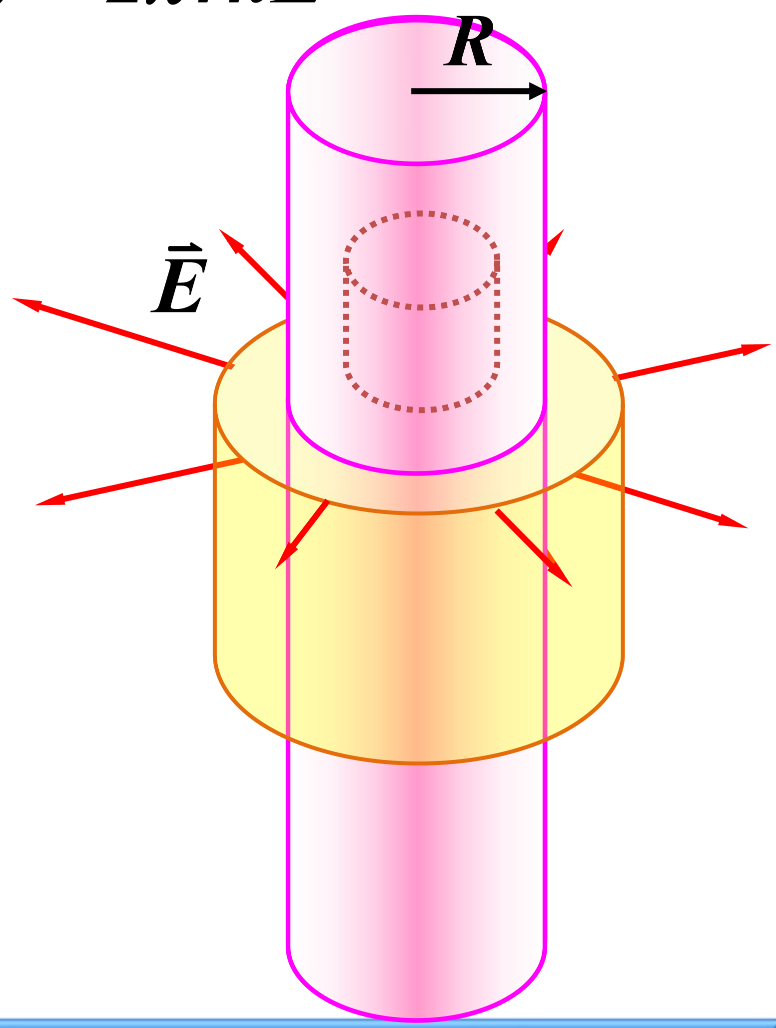
$$2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

(2) $r \le R$

$$2\pi r h E = 0$$

$$\boxed{E = 0}$$



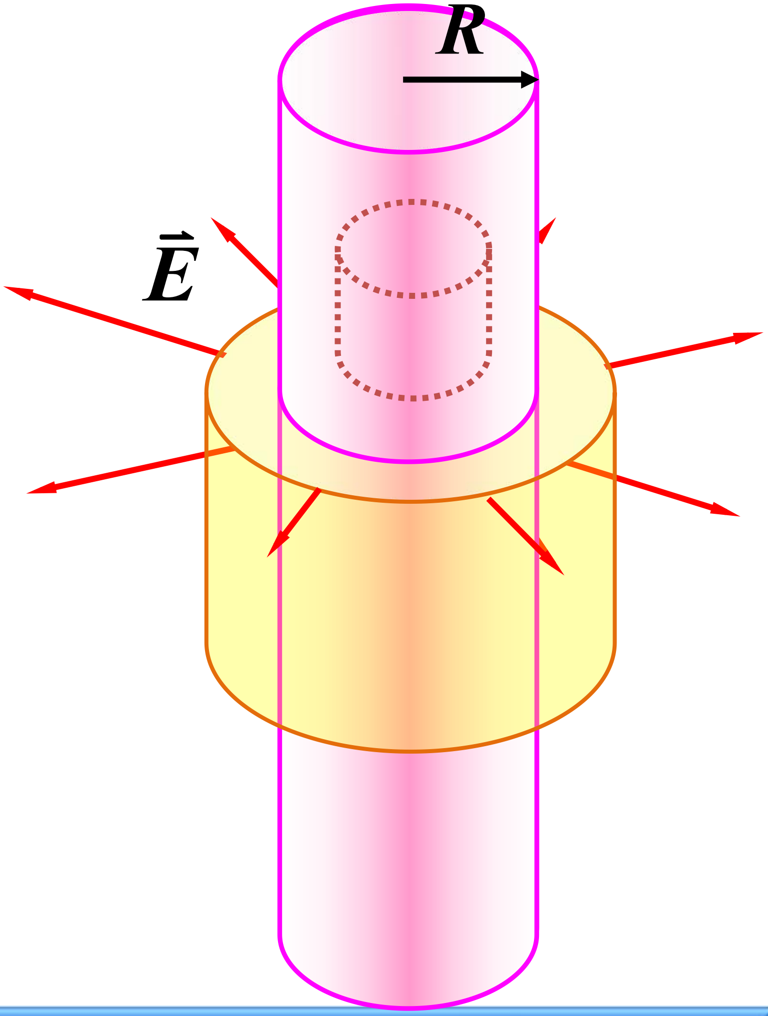
思考：如果是无限长均匀带电圆柱体，内外电场又如何?

$$r > R,\quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r \le R \quad \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{s(\text{柱面})} E\mathrm{d}S$$

$$2\pi rhE = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda\frac{\pi r^2}{\pi R^2}h$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}}$$



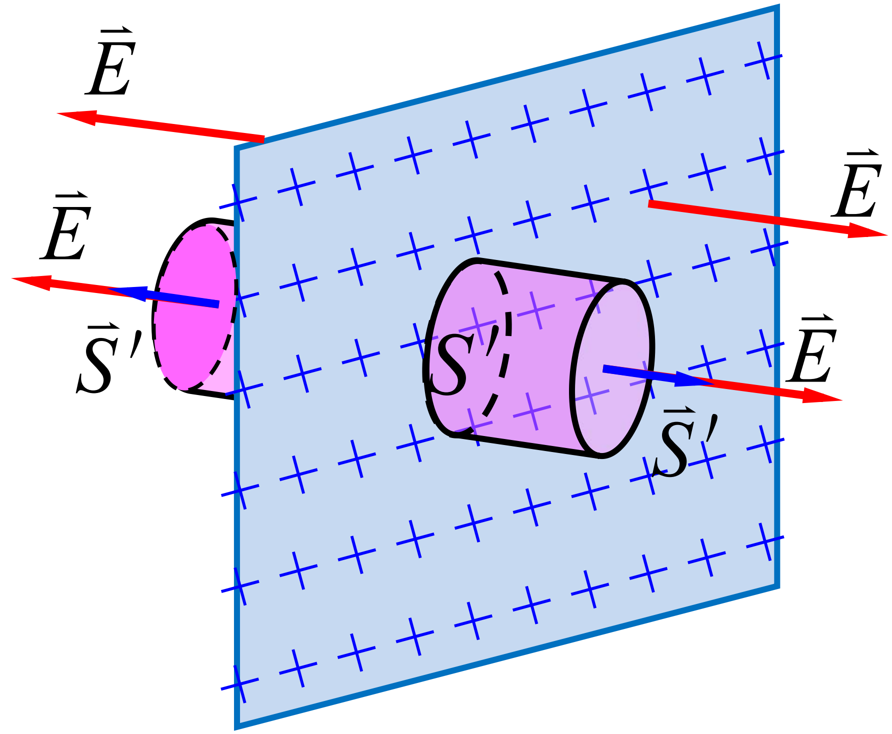
三、无限大均匀带电平面的电场

无限大均匀带电平面，设其面电荷密度为σ。

对称性分析：面对称

各点电场强度垂直于平面

选取闭合的柱形高斯面



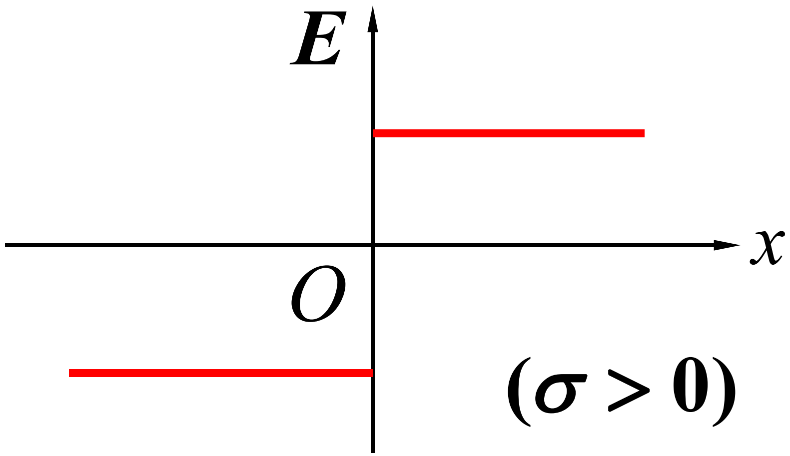
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$

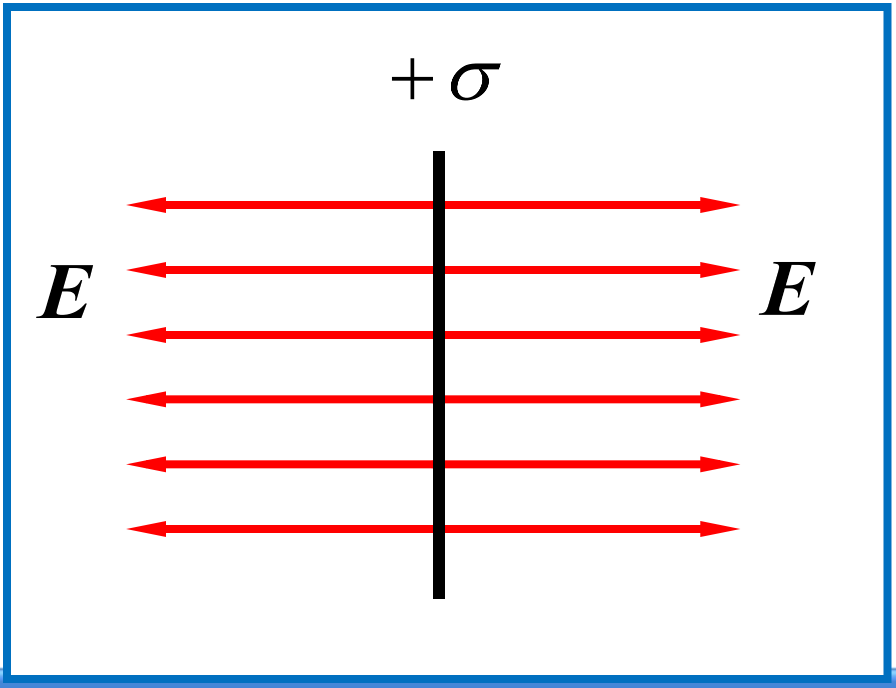
$$2S'E = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$

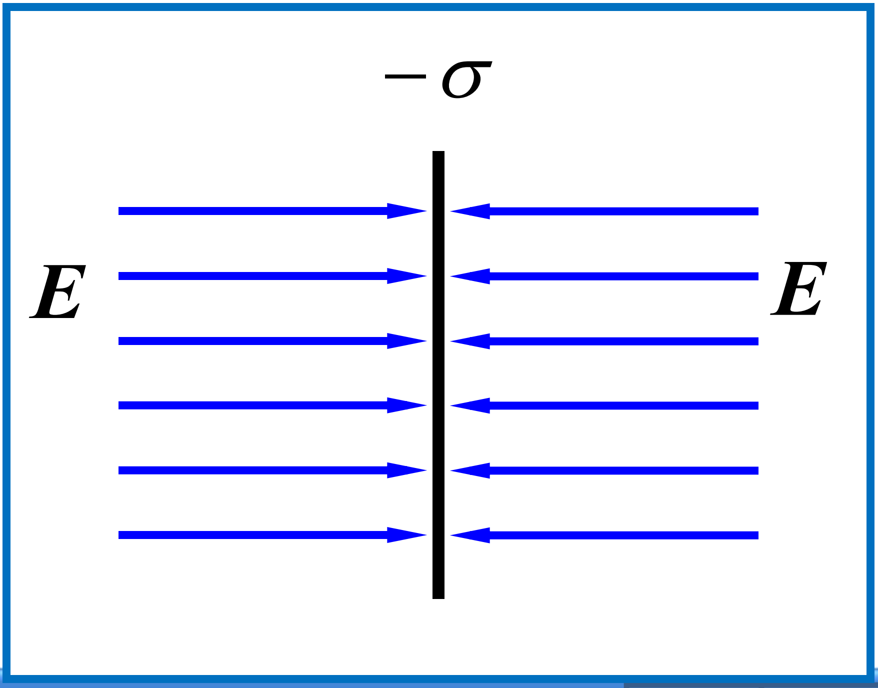
$$\boxed{E = \sigma / 2\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

均匀场

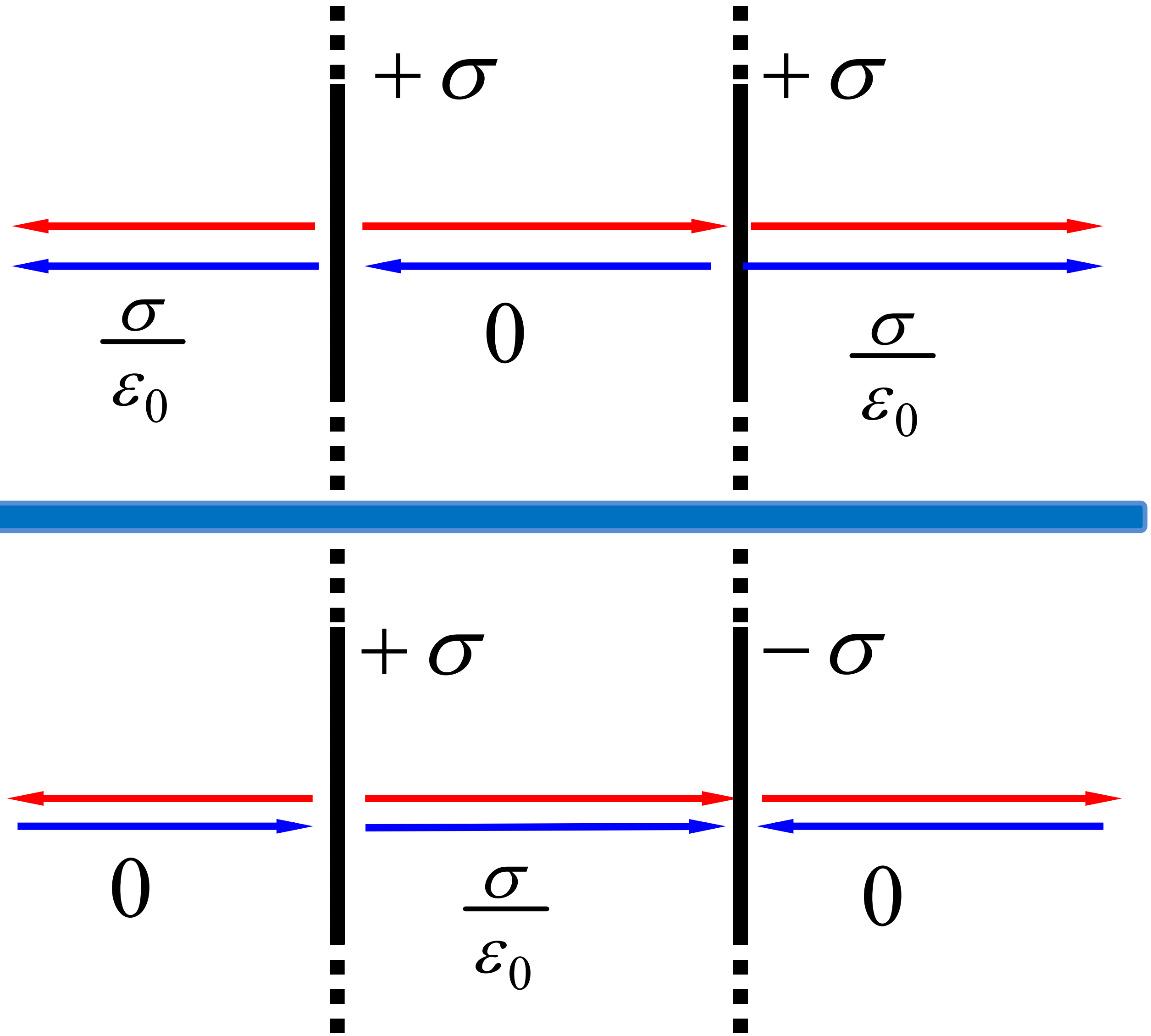






讨论

无限大带电平面的电场叠加问题



四、均匀带电球体的电场

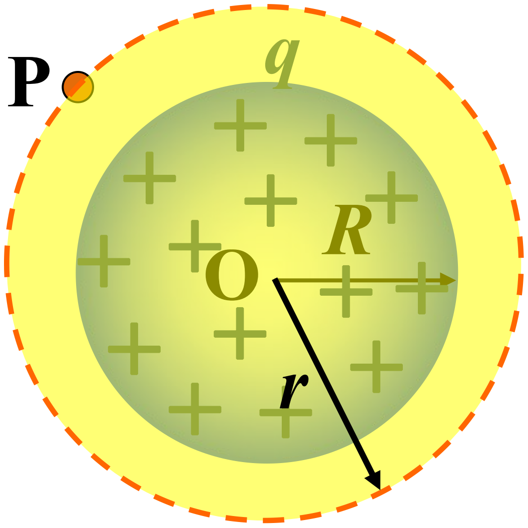
一半径为R，带电量为 q的均匀带电球体。

选高斯面为同心球面。

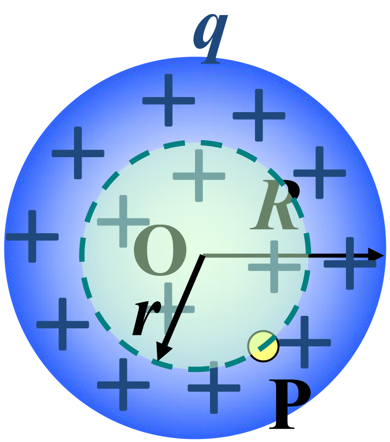
(1) $r > R$ 时，高斯面内电荷为 q:

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r}$$



(2) $r < R$ 时，高斯面内电荷为 q':



$$q' = \rho V = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{r^3}{R^3} q$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{r^3}{R^3}\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}}$$

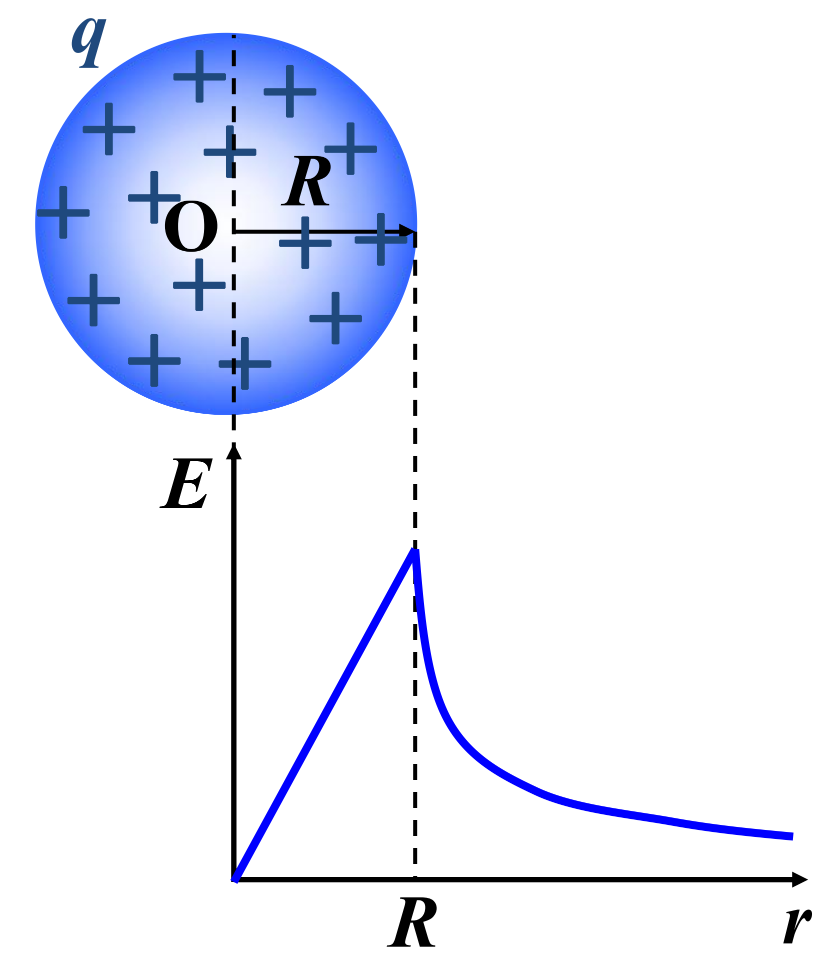
结论：

a. 均匀带电**球体外**的场强分布正象球体上的电荷都集中在球心时所形成的**点电荷**在该区的**场强分布**一样。

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

b. 在**球体内**的**场强与**场点离球心的**距离成正比**。

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}$$



均匀带电球体的电场