

16.5 狭义相对论中的动量、质量和能量

在相对论动力学中，我们将根据新的实验事实，重新定义动量、质量和能量等物理量，并确定它们在相互作用下的变化规律。

因为在低速情况下牛顿力学是正确的，所以新定义的物理量在 $v \ll c$ 时必须趋于牛顿力学中的相应量。

作为一般性的原则，这些物理量的变化规律还应该遵守能量守恒和动量守恒定律。

16.5.1&2 狭义相对论中的动量和质量

仍按下式定义动量

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

仍假设

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

形式上与牛顿力学没什么区别。但在牛顿力学中，物体的质量是一个与运动速率无关的恒量。如果保留这一观念，就会有

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

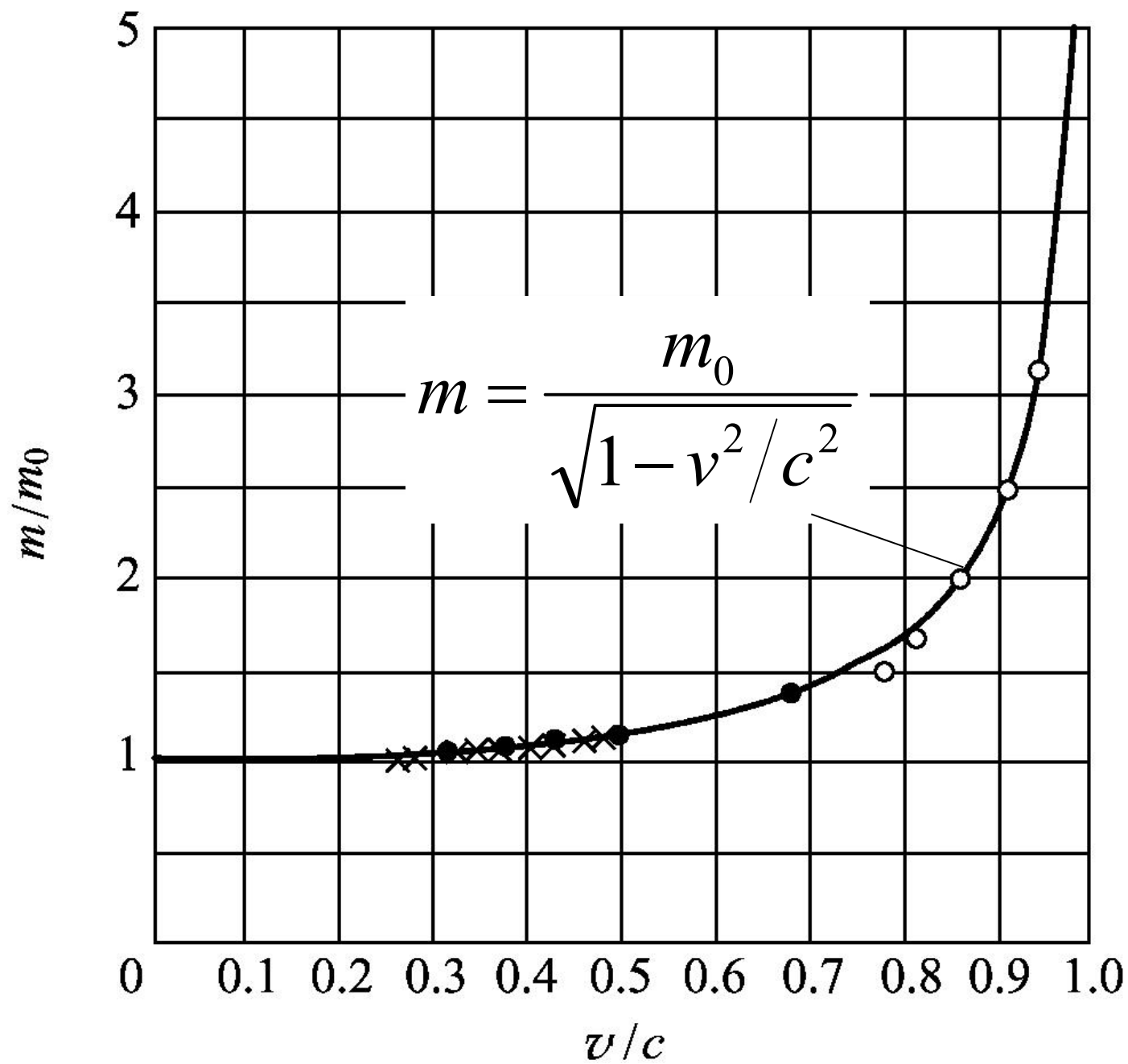
$$f = \frac{dp}{dt} = m_0 \frac{dv}{dt}$$

即，在恒力的作用下物体以恒定的加速度被加速。只要时间足够长，速率就可以超过光速，这显然违背相对论的基本原理。

因此在高速情况下，不能再把质量看成是与速率无关的恒量。

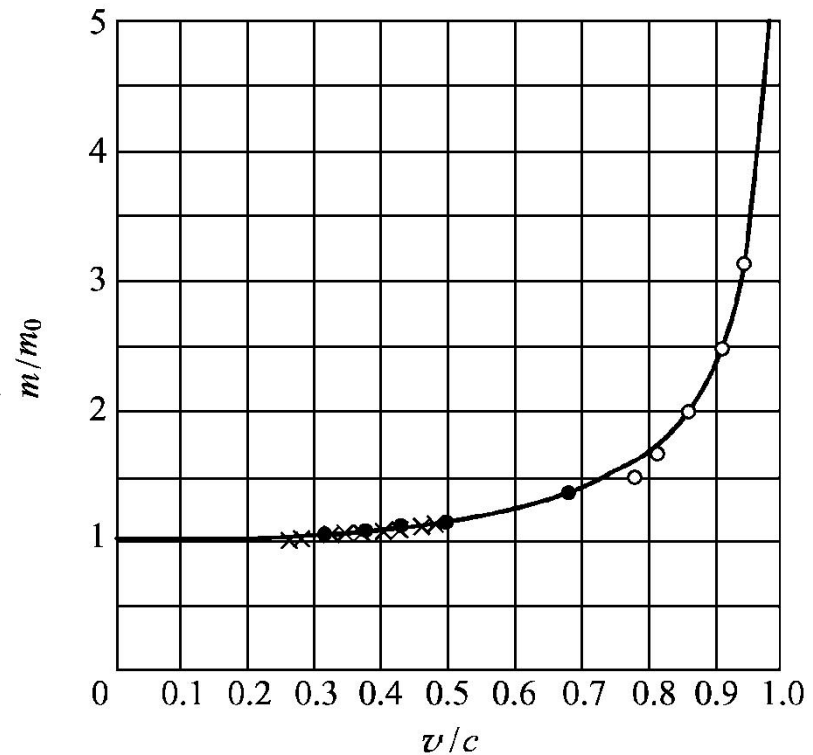
实验表明，物体的相对论性质量或动质量 m ，与物体的运动速率 v 之间满足

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{质速关系})$$



实物粒子：静质量 $m_0 \neq 0$ 的粒子，例如电子、质子和中子。

当速率很大时，质量随之急剧增大，这时对实物粒子的加速变得十分困难，在加速器的设计和运行中必须考虑到这一点。



$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

当 $v=c$ 时，质量无意义，因此实物粒子的运动速度不能达到光速。

粒子的动量：

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\boldsymbol{f} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \boldsymbol{v} = m\boldsymbol{a} + \frac{dm}{dt} \boldsymbol{v}$$

在高速情况下粒子所受的力不再等于它的质量乘以加速度，必须考虑质量的变化。只有当 $dm/dt \rightarrow 0$ 时，加速度的方向才趋于力的方向，与牛顿运动定律的结论一致。

16.5.3 狭义相对论中的能量

相对论仍然保留牛顿力学中的动能定理：**力对粒子所做的功等于粒子动能的增量**

$$dE_k = \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$$

推导相对论的动能公式：设静质量为 m_0 的粒子在沿 x 轴方向的力 f 作用下从静止开始运动，当速度达到 v 时粒子的动能

$$E_k = \int_{v=0}^v f dx$$

$$\begin{aligned}
 E_k &= \int_{v=0}^v \frac{d(mv)}{dt} dx = \int_{v=0}^v v d(mv) = \int_{v=0}^v v d\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \\
 &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Big|_0^v - \int_{v=0}^v \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\
 &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2} \Big|_0^v \\
 &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2} - m_0 c^2 \\
 &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 c^2
 \end{aligned}$$

相对论的动能公式：

$$E_k = (m - m_0)c^2 = mc^2 - m_0c^2$$

粒子的动能与运动所引起的粒子质量的增量成正比，比例系数为 c^2 。

质能关系：

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

粒子的能量等于它的质量乘以 c^2 ，而粒子的动能等于它的能量减去它的静质能 m_0c^2 。

【例】粒子的运动速率多大时，它的动能才等于它的静质能？

解

$$E_k = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 \right) c^2 = m_0 c^2$$

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{3}{4}} c = 0.866c$$

速率达到 $0.866c$ 时，粒子的动能才等于它的静质能。

在核反应和化学反应过程中，物质的静质量要减少。在反应过程中，系统所减少的静质量 Δm_0 称为质量亏损。

按照质能关系和能量守恒，亏损的质量 Δm_0 转化成能量 $\Delta m_0 c^2$ 释放出来。

能够释放的能量只占静质能的很小一部分。核反应（核裂变、核聚变）所释放的能量（核能），约占参加反应的核燃料的静质能的千分之一。而化学反应，例如汽油燃烧，所释放的化学能仅占其静质能 10^{-10} 左右。

化学反应只涉及电磁作用，而核反应是强相互作用过程，强度比电磁作用大两个量级。



原子弹爆炸烟云

重核裂变



质量亏损

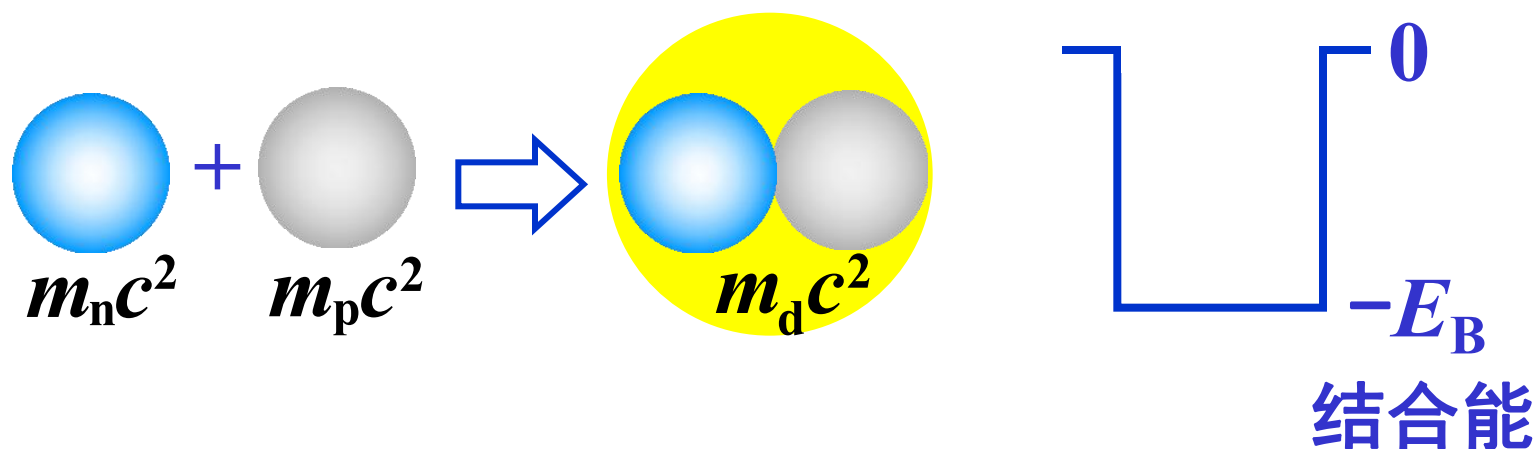
$$\Delta m_0 = m_{X0} - (m_{Y0} + m_{Z0})$$

裂变能

$$\Delta E = \Delta m_0 c^2$$

【例】 计算中子和质子结合成氘核所释放的能量占氘核静质能的比例，并与电子和质子结合成氢原子的情况作对比。

解 核子（质子、中子）间的相互作用叫核力。质子和中子通过核力吸引结合成氘核。引力做功，系统能量减小，在形成氘核的过程中发生质量亏损——**聚变能**



$$m_n = 939.565\ 63\ \text{Mev} / c^2$$

$$m_p = 938.272\ 31\ \text{Mev} / c^2$$

$$m_d = 1875.613\ 39\ \text{Mev} / c^2$$

质量亏损: $\Delta m_0 = (m_n + m_p) - m_d$

聚变能: $\Delta E = \Delta m_0 c^2 = 2.23\ \text{Mev}$

占参加反应的质子和中子静质能的比例:

$$\frac{\Delta E}{m_p + m_n} = \frac{2.23}{938.272 + 939.565} \approx 1.2 \times 10^{-3}$$

电子和质子结合成氢原子时释放能量

$$\Delta E = 13.6 \text{ eV}$$

占质子和电子静质能的比例：

$$\frac{13.6}{938.272 \times 10^6} \approx 1.4 \times 10^{-8}$$

只是核反应情况的十万分之一。

原因：化学反应只涉及电磁相互作用，而核反应是核力作用的过程。核力是强相互作用，强度比电磁相互作用的强度大两个数量级。

16.5.4 狭义相对论中的能量和动量关系

由 $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ 和 $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ 得

得能量和动量关系：

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

对于静质量 $m_0=0$ 的粒子

$$E = pc \rightarrow mc^2 = mvc \rightarrow v = c$$

静质量为零的粒子只能以光速运动。

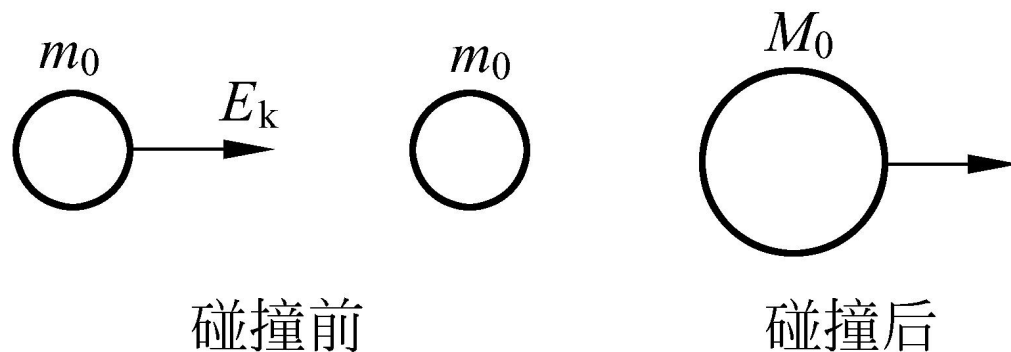
目前实验结果：光子静质量上限为 10^{-62}kg ，
可以认为光子静质量为零，其运动速度就是 c 。

*能量和动量守恒

相对论的研究对象主要是那些不受外界影响的粒子系统。在这些系统所经历的过程中，系统的动量和能量守恒。在相对论中，已知力求粒子运动的问题不占主要地位。

对于高能粒子碰撞、裂变和衰变等过程，一般测量的是反应前和反应后的能量。而反应前、后粒子相距都很远，因此通常总是忽略粒子间的相互作用势能。

【例】 静质量为 m_0 、动能为 E_k 的高能粒子撞击一个静质量也为 m_0 的静止靶粒子，并形成复合粒子。求复合粒子的静质量 M_0 。



解 碰撞过程粒子发生强烈相互作用，可以忽略重力等外界影响，系统的能量和动量守恒

动量守恒： $p'^2 c^2 = p^2 c^2$

$$p^2 c^2 = (E_k + m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^4 = E_k^2 + 2m_0 c^2 E_k$$

能量守恒： $E = E'$

$$E' = \sqrt{p'^2 c^2 + M_0^2 c^4} = \sqrt{p^2 c^2 + M_0^2 c^4} = \sqrt{E_k^2 + 2m_0 c^2 E_k + M_0^2 c^4}$$

$$E_k + 2m_0 c^2 = \sqrt{E_k^2 + 2m_0 c^2 E_k + M_0^2 c^4}$$

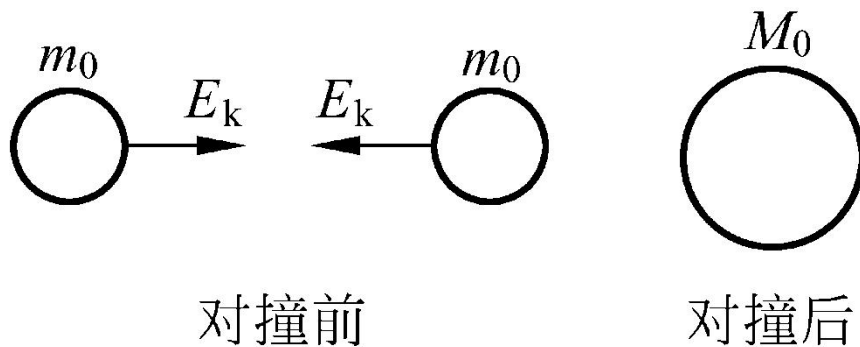
$$M_0 = \sqrt{4m_0^2 + \frac{2m_0 E_k}{c^2}} = 2m_0 \sqrt{1 + \frac{E_k}{2m_0 c^2}}$$

复合粒子的静质量 M_0 大于参加反应的粒子的静质量 $2m_0$ ，增加的静质量称为质量过剩，它是由入射粒子的动能转化来的。

$$M_0 = 2m_0 \sqrt{1 + \frac{E_k}{2m_0 c^2}}$$

在靶粒子静止的碰撞中，入射粒子的动能只有一部分转化成复合粒子的静质能，另一部分变成复合粒子的动能被“浪费”掉了。

【例】对撞可使参加反应的粒子的动能全部转化成复合粒子的静质能。



$$M_0 = 2m_0 + \frac{2E_k}{c^2}$$



欧洲核子中心 CERN

**C.Rubbia和S.van
der Meer 在对撞机
上发现了 W_{\pm} 和 Z_0 粒
子，证实了弱电统一
理论，获得1984年
诺贝尔物理学奖。**