

第十一章 振动

本章首先研究简谐振动的运动规律，其后讨论简谐振动系统的能量特点，分析简谐振动的合成问题，最后简单介绍了阻尼振动和受迫振动的研究方法。

§11.1 简谐振动

振动是自然界中最常见的运动形式之一。物体在平衡位置附近做周期性的往返运动，称为机械振动。例如钟摆的摆动，心脏的跳动，汽缸中活塞的运动，以及固体晶格中原子的振动等等。广义而言，对于任意物理量，如电量、电压、电流、电场强度和磁感应强度等，当其围绕某一定值作周期性的变化时，则称该物理量在振动。

11.1.1 简谐振动的描述

一、简谐振动的特征

如图 11.1-1 所示的振动模型，称为弹簧振子。弹簧振子系统由质量为 m 的物体与一端固定、劲度系数为 k 的轻质弹簧组成。现将这一系统放置在一光滑水平面上，当弹簧处于原长时， m 在水平方向不受力的

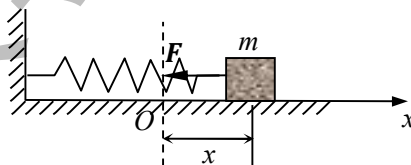


图 11.1-1 弹簧振子模型

作用，此时 m 处于 O 点，该点称为平衡位置。取水平向右为 x 轴正向，坐标原点 O 取在弹簧振子的平衡位置。当弹簧被拉伸或压缩，物体处于坐标 x 时受到弹簧作用力的大小为 $F = -kx$ ，其方向总是指向原点 O 。这种大小与弹簧形变成正比，其方向与形变方向相反的力又称为线性回复力。

由牛顿定律可知物体的加速度为

$$a = -\frac{k}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

令 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ，得物体满足的运动方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (11.1-1)$$

我们把具有这种特征的振动，称为简谐振动，亦称简谐运动，(11.1-1) 式就是简谐振动的运动微分方程。该方程的通解为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (11.1-2)$$

可以证明, 如果合外力是线性回复力, 质点将做简谐振动. 简谐振动是最简单、最基本的振动, 任何复杂的振动都可以看成是若干简谐振动的合成.

由式(11.1-2)可见, 要唯一地描述一个简谐振动需要同时确定 A , ω 和 φ_0 三个参数, 它们被称为简谐振动的特征量.

(1) 振幅 A , 表示振动的幅度, 即物体离开平衡位置的最大距离.

(2) 角频率 ω , 亦称圆频率, 表征物体振动的快慢程度, 满足

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

其中 ν 是频率, 表示物体每秒振动的次数; T 是周期, 表示物体作一次完全振动所需要的时间, $\nu = \frac{1}{T}$.

(3) 初相 φ_0

(11.1-2) 式中的 $(\omega t + \varphi_0)$ 称为物体在 t 时刻的相位, 记为 φ :

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \quad (11.1-3)$$

用以描述物体在一个周期内不同的振动状态. φ_0 则表示在计时的初始时刻, 即 $t = 0$ 时振动的初始相位, 简称初相. 初相 φ_0 只与计时零点的选择有关. 我们可以通过适当选择计时零点, 使振动初相为零, 故相位是相对的. 在国际单位制(SI)中, 相位 φ 的单位是弧度, 记为rad; ω 的单位是弧度每秒, 记为rad/s, 或者 s^{-1} .

简谐振动是一种变加速运动, 其速度和加速度可由下列关系给出

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (11.1-4)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) \quad (11.1-5)$$

比较(11.1-2)和(11.1-5)式, 可得

$$a = -\omega^2 x \quad (11.1-6)$$

由(11.1-2)、(11.1-4)和(11.1-5)式可见, 简谐振动在 t 时刻的瞬时位置、速度和加速度都决定于相位 $(\omega t + \varphi_0)$. 相位是我们分析简谐振动的一个重要物理量. 而且根据以上三式可作出 $x-t$ 、 $v-t$ 和 $a-t$ 的关系曲线, 如图 11.1-2 所示. 图中 $x-t$ 曲线常被称为振动曲线.

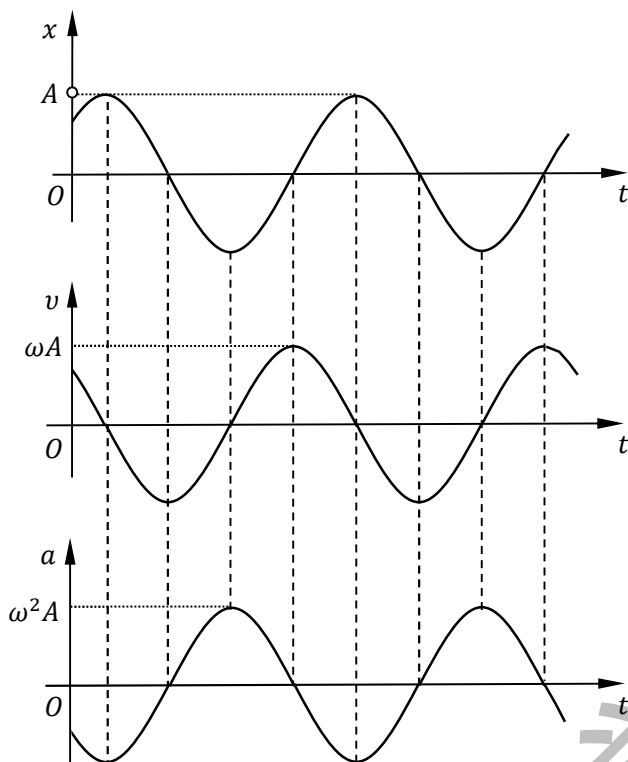


图 11.1-2 简谐振动的关系曲线

当 $t = 0$ 时，物体的初始位置和速度分别为

$$x_0 = A \cos \varphi_0, \quad v_0 = -A\omega \sin \varphi_0 \quad (11.1-7)$$

称为振动的初始条件。由上式可解得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \tan \varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0} \quad (11.1-8)$$

在用 (11.1-8) 式确定 φ_0 时，由于 $\tan \varphi_0$ 是多值函数，在 $(-\pi, \pi)$ 或 $(0, 2\pi)$ 的区间内， φ_0 有两个值，需结合初始条件 (11.1-7) 式中 v_0 的方向才能判断 φ_0 唯一确定的值。

例 11.1-1 质点沿 x 轴作简谐振动，振幅为 12 cm，周期为 2 s。当 $t = 0$ 时，位于 x 轴上 6 cm 处且向 x 轴正方向运动。求：

- (1) 该质点的简谐振动表达式。
- (2) $t = 0.5$ s 时质点的位置、速度和加速度。
- (3) 当该质点从 $x = -6$ cm 向 x 轴负方向运动，第一次回到平衡位置所需要的时间。

解：(1) 已知 $A = 0.12$ m, $T = 2$ s, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ (s^{-1})，设简谐振动表达式为

$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, 代入初始条件: $t = 0$ 时, $x_0 = 0.06 \text{ m} = \frac{1}{2}A$, $v_0 > 0$, 可知 $\cos\varphi_0 = 0.5$, 解得 $\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{3}$.

再将题设条件代入简谐振动的速度表达式 $v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$, 可得 $v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 > 0$, 即 $\sin\varphi_0 < 0$, 最后确定 $\varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$.

因此, 该质点的简谐振动表达式为:

$$x = 0.12\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right);$$

$$v = -0.12\pi\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right);$$

$$a = -0.12\pi^2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

(2) 将 $t = 0.5 \text{ s}$ 带入以上简谐振动的表达式可得:

$$x|_{t=0.5\text{s}} = 0.12\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \approx 0.104(\text{m});$$

$$v|_{t=0.5\text{s}} = -0.12\pi\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \approx -0.188(\text{m} \cdot \text{s}^{-1});$$

$$a|_{t=0.5\text{s}} = -0.12\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \approx -1.03(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

(3) 质点从 $x = -6 \text{ cm}$ 向 x 轴负方向运动, 此时运动方程为:

$$-0.06 = 0.12\cos\left(\pi t_1 - \frac{\pi}{3}\right)$$

由此得

$$\left(\pi t_1 - \frac{\pi}{3}\right) = \pm\frac{2}{3}\pi$$

与速度关系 $0.12\pi\sin\left(\pi t_1 - \frac{\pi}{3}\right) < 0$ 联立, 可得

$$\left(\pi t_1 - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi, \text{ 即 } t_1 = 1 \text{ s}$$

质点回到平衡位置时运动方程为

$$0 = 0.12\cos\left(\pi t_2 - \frac{\pi}{3}\right)$$

由此解得

$$\left(\pi t_2 - \frac{\pi}{3}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

因第一次回到平衡位置速度 $-0.12\pi\sin\left(\pi t_2 - \frac{\pi}{3}\right) > 0$, 所以有

$$\left(\pi t_2 - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\pi, \text{ 即 } t_2 = \frac{11}{6} \text{ s}$$

综上可得

$$\Delta t = t_2 - t_1 \approx 0.83(s)$$

二、简谐振动的旋转矢量表示法

为了使简谐振动的描述更为直观,常采用旋转矢量法.如图 11.1-3 所示,在直角坐标系 Oxy 中,以 O 点为起始点作一矢量 \mathbf{A} ,使其模长等于简谐振动的振幅 A ,并让该矢量在 Oxy 平面内绕 O 点逆时针匀角速旋转,其角速度与简谐振动的角频率 ω 相同,这一矢量就叫旋转矢量,或振幅矢量.

设 $t = 0$ 时,矢量 \mathbf{A} 的端点在 M_0 点,与 x 轴的夹角为 φ_0 ;在时刻 t ,矢量 \mathbf{A} 的端点在 M 点,在此过程中,该矢量沿逆时针转过了角度 ωt ,与 x 轴的夹角则为 $\omega t + \varphi_0$.由图可见, t 时刻该矢量在 x 轴上的投影坐标为 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$.也就是说旋转矢量的端点 M 在 x 轴上的投影点 P 将以 O 为中心作简谐振动.如图 11.1-4(a)所示,旋转矢量 \mathbf{A} 的端点 M 的速率为 $v_m = \omega A$,其在 x 轴上的投影分量为 $v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$.

同样,如图 11.1-4 (b) 所示, \mathbf{A} 末端的加速度为向心加速度 $a_m = \omega^2 A$,其在 x 轴上的投影分量为 $a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$.

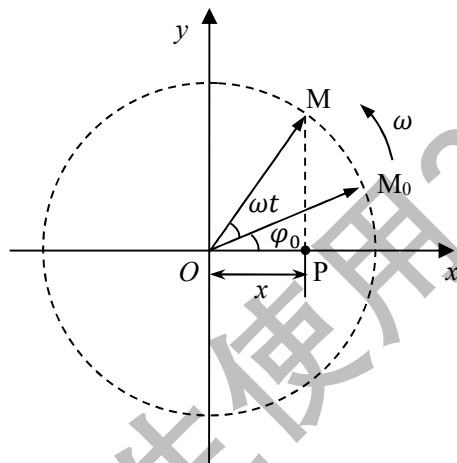


图 11.1-3 平面旋转矢量模型

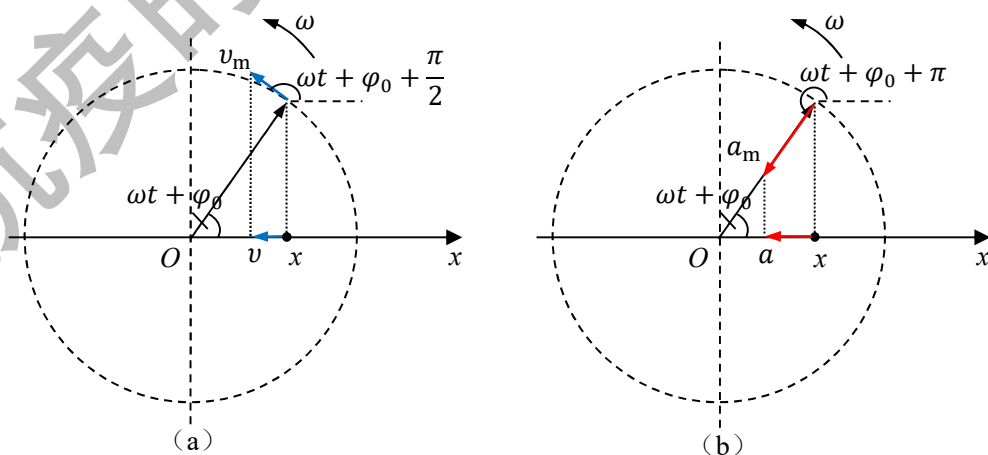


图 11.1-4 平面旋转矢量速度和加速度

可见,简谐振动和匀速圆周运动之间存在一个简单的关系.矢量 \mathbf{A} 的模即为

简谐振动的振幅，矢量 \mathbf{A} 的旋转角速度即为振动的角频率，矢量 \mathbf{A} 的初角位置对应振动的初相， t 时刻的角位置对应 t 时刻的相位。

利用旋转矢量来分析简谐振动的方法称为几何法，或相量法。几何法非常直观的给出了振动在任一时刻的相位与圆周运动的角位置之间的对应关系，所以，在涉及到求解振动相位及初相时，几何法比解析法更简单。由图 11.1-4 不难看出，在任一时刻 t ，若旋转矢量 \mathbf{A} 位于 x 轴的上方，则振动相位满足 $0 < \varphi < \pi$ ，而速度投影在 x 轴的负向，此时 $v < 0$ ；若旋转矢量 \mathbf{A} 位于 x 轴的下方，则 $\pi < \varphi < 2\pi$ ，其速度投影在 x 轴的正向， $v > 0$ 。

考察四个特殊位置，如图 11.1-5 (a) 所示，若旋转矢量 \mathbf{A} 位于 x 轴上且水平向右，则 $\varphi = 0$ ，表明此时物体处于正的极大位移处 $x = A$ ，速度 $v = 0$ ；若旋转矢量 \mathbf{A} 位于 x 轴上且水平向左，则 $\varphi = \pi$ ，表明此时物体处于负的极大位移处 $x = -A$ ，速度 $v = 0$ 。如图 11.1-5 (b) 所示，若旋转矢量 \mathbf{A} 与 x 轴垂直，表明此时物体正在通过平衡位置 $x = 0$ 。进一步，如果 \mathbf{A} 在 x 轴的上方， $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ，则速度 $v < 0$ ，物体通过平衡位置向负的极大位移处运动，如果 \mathbf{A} 在 x 轴的下方， $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}$ ，则 $v > 0$ ，物体通过平衡位置向正的极大位移处运动。

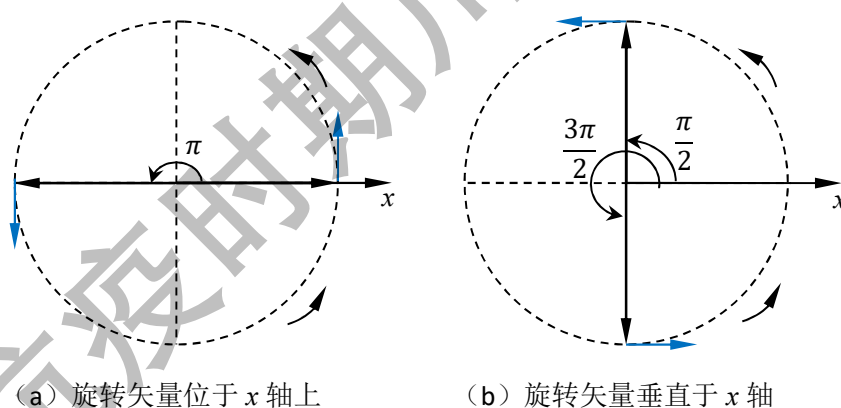


图 11.1-5 旋转矢量的四个特殊位置

综上所述，只要能够根据已知条件确定出旋转矢量 \mathbf{A} 的方位，就能够判断该时刻（包括初始时刻）的振动相位。

例 11.1-2 用旋转矢量法求解例 11.1-1 中的第 (1)、(3) 问。

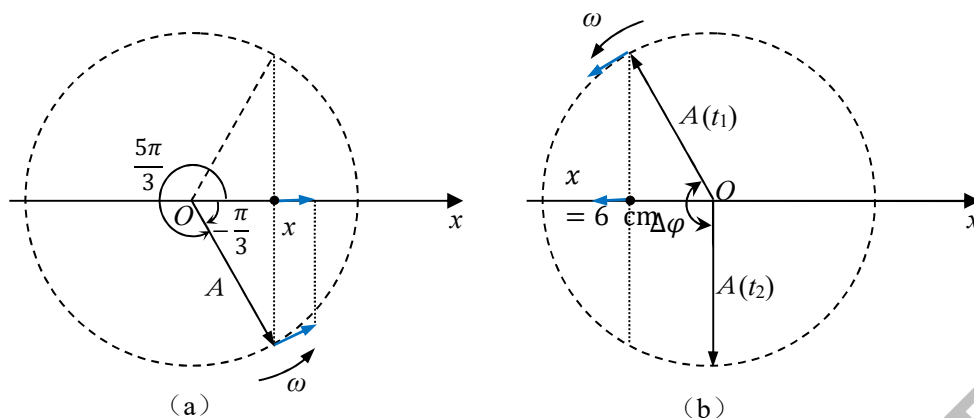


图 11.1-6 例题 11.1-2 图

解：（1）用几何法确定振动初相

当 $t = 0$ 时，位置为 $x = 6 \text{ cm}$ ，且向 x 轴正方向运动， $v > 0$ ，该状态的旋转矢量位于 x 轴下方，如图 11.1-6 (a) 所示，于是有 $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$ 或 $-\frac{\pi}{3}$ 。

（3）如图 11.1-6 (b) 所示， t_1 时刻，质点在 $x = -6 \text{ cm}$ 且向 x 轴负方向运动，旋转矢量的位置为 $A(t_1)$ ，相位 $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$ ，由于逆时针旋转，故第一达到的平衡位置为 $A(t_2)$ ，相位 $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ ，故两个状态之间的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

由 $\varphi = \omega t + \varphi_0$ 可知

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t_2 + \varphi_0) - (\omega t_1 + \varphi_0) = \omega \Delta t$$

故所需要的时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \left(\frac{5\pi}{6}\right) / (\pi \text{ s}^{-1}) \approx 0.83(\text{s})$$

利用旋转矢量可以很方便的分析两个同频率的简谐振动之间的步调问题。假设两个同频率的简谐振动：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01})$$

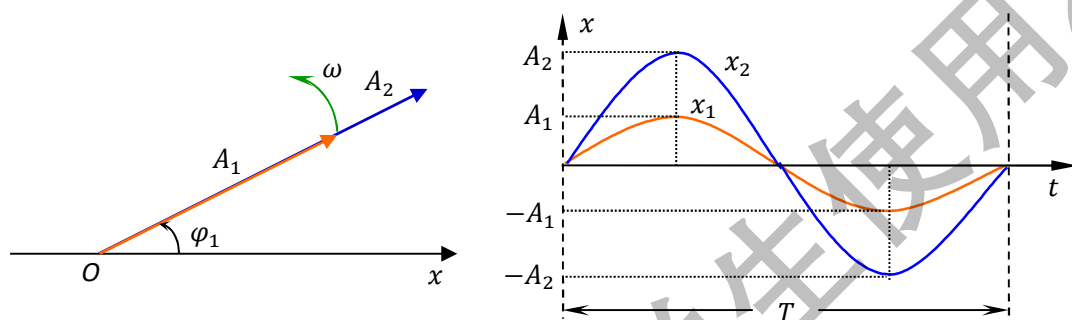
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02})$$

在同一时刻 t 的相位之差恒等于它们的初相之差，即

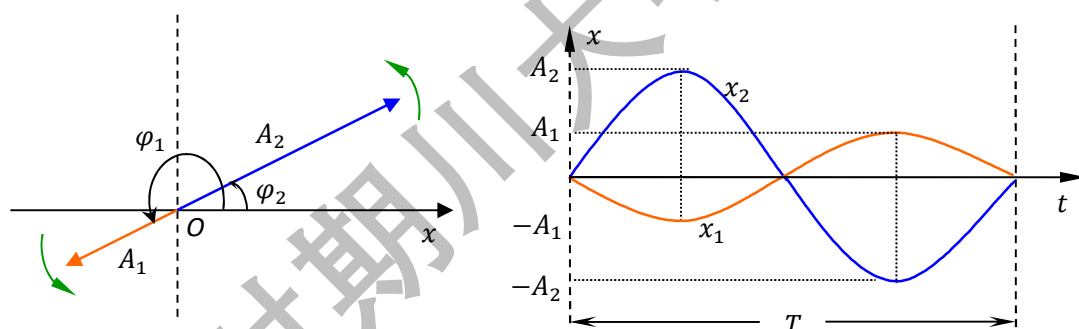
$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{02} - \varphi_{01} \quad (11.1-9)$$

此时，相位差 $\Delta\varphi$ 反映了两简谐振动之间的步调关系。若 $\Delta\varphi$ 为零或 2π 的整数倍，则两振动的步调一致，称这两个振动是同相的，如图 11.1-7 (a) 所示；若 $\Delta\varphi$ 为 π

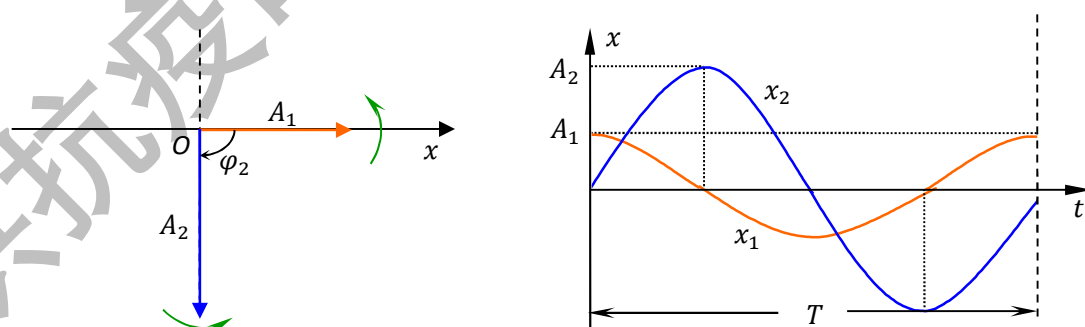
或 π 的奇数倍, 则两振动的步调相反, 称这两个振动是反相的, 如图 11.1-7 (b) 所示. 一般而言, 在 $(-\pi, \pi)$ 区间内, 若 $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$, 称振动 $x_2(t)$ 超前于振动 $x_1(t)$; 若 $-\pi < \varphi_2 - \varphi_1 < 0$, 则称振动 $x_2(t)$ 落后于振动 $x_1(t)$. 如图 11.1-7 (c) 所示, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$, 于是在任一时刻 $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} < 0$, 振动 x_2 落后于振动 x_1 , 或说成振动 x_1 超前于振动 x_2 . 思考, 为什么不取 $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$?



(a) 同相



(b) 反相



(c) x_1 较 x_2 超前 $\frac{T}{4}$

图 11.1-7 两个同频率简谐振动的步调 (假设 $A_1 < A_2$)

三、简谐振动的典型问题

1. 复摆与单摆

如图 11.1-8 所示, 一质量为 m 的刚体可绕水平轴 O 在竖直面内做定轴转动. 忽略轴承的摩擦, 将它拉开一个微小角度 θ , 刚体将在重力矩作用下来回摆动, 平衡位置为 OO' , 这样的装置称为复摆, 又称为物理摆. 由刚体定轴转动定律和力矩定义可得

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_z, \quad M_z = -mgl_c \sin\theta$$

负号表示力矩总是指向复摆的平衡位置.

当摆角很小, $\theta < 5^\circ$ 时, $\sin\theta \approx \theta$, 上式变为

$$M_z = -mgl_c \theta \quad (11.1-10)$$

表明重力矩为线性回复力矩. 由此得到复摆的运动方程:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl_c}{J} \theta = 0 \quad (11.1-11)$$

其中 C 为刚体的质心, l_c 为质心到定轴 O 的距离. 令常数项 $\frac{mgl_c}{J} = \omega^2$, 则

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0 \quad (11.1-12)$$

上式在形式上与弹簧振子的简谐振动方程 (11.1-1) 式一致. 因此复摆的小角度摆动也是一种简谐振动, 亦称为角谐振动.

(11.1-12) 式的解是复摆的运动函数:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (11.1-13)$$

角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl_c}{J}} \quad (11.1-14)$$

若复摆是一根匀质细杆, 质量为 m , 长为 l . 如图 11.1-9 所示, 细杆绕过端点 O 的水平轴在铅垂面内作角谐振动, 则 $J = \frac{1}{3}ml^2$, $l_c = \frac{1}{2}l$, 代入 (11.1-14) 式, 可得振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}} \quad (11.1-15)$$

单摆, 又称数学摆, 可以视为复摆的特例. 如图 11.1-10 所示, 小球的质量为 m , 摆

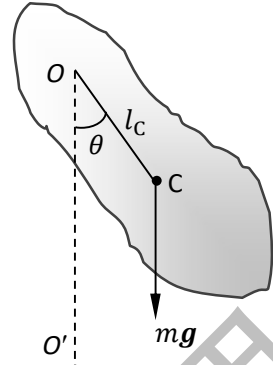


图 11.1-8 复摆

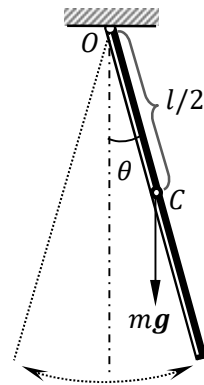


图 11.1-9 角谐振动的匀质细杆

线长为 l ，若忽略了摆线的质量，则 $J = ml^2$ ， $I_C = l$ ，代入(11.1-14)式，于是小角度摆动条件下单摆的角频率和周期分别为

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (11.1-16)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (11.1-17)$$

从弹簧振子到复摆和单摆的运动分析可知，它们都是在线性回复力或线性回复力矩作用下的运动形式，都属于简谐振动。

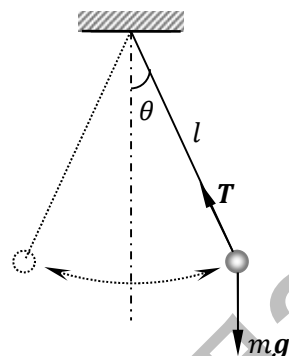


图 11.1-10 单摆

2. LC振荡

当电感和电容同时出现在电路中时，会出现电流的简谐振动现象。

图 11.1-11 所示为由外电源 \mathcal{E} 、电感 L 和电容 C 组成的电路，忽略整个电路的电阻。先把开关 K 拨向电源一端，电容器充电。然后将开关拨向电感元件一端，接通 LC 回路，电容器放电。设某时刻电路中的电流为 i ，极板上的电荷量为 q ，由欧姆定律，有

$$\mathcal{E}_L + \frac{q}{C} = 0$$

或

$$-L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

考虑到回路中的电流 $i = -\frac{dq}{dt}$ ，于是上式变为

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$

令常数项 $\frac{1}{LC} = \omega^2$ ，得

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \quad (11.1-18)$$

上式在形式上和(11.1-1)式一致，所以电容器极板上的电荷量 q 随时间的变化一定是简谐振动的形式。上式的解为

$$q = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (11.1-19)$$

振动频率为

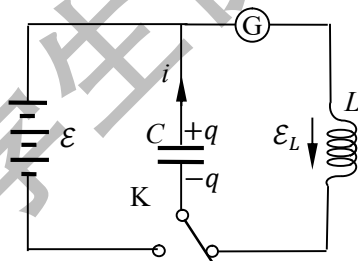


图 11.1-11 LC电路

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

于是可得到回路中的电流的表达式:

$$i = -\frac{dq}{dt} = \omega q_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (11.1-20)$$

表明电流随时间按正弦规律变化, 这就是振荡电流.

例 11.1-3 如图 11.1-12 所示, 质量为 m 的比重计, 放在密度为 ρ 的液体中. 已知比重计圆管的直径为 d . 试证明在竖直方向的振动为简谐振动, 并计算周期.

解: 取比重计质心的平衡位置为原点, 平衡时有

$$mg - \rho Vg = 0$$

V 为平衡时比重计的排水体积.

在任意时刻 t , 比重计质心的位置为 x , 其运动方程为

$$mg - \left[V + \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 x \right] \rho g = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

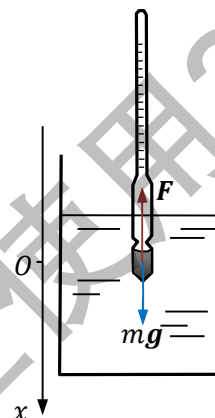


图 11.1-12 例题
11.1-3 图

所以有

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\pi d^2 \rho g}{4m} x = 0$$

这就是简谐振动的微分方程, 说明该运动为简谐振动, 其角频率为 $\omega = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\pi \rho g}{m}}$,

周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4}{d} \sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}}$.

四、简谐振动的能量

以图 11.1-1 所示的弹簧振子为例, 其任意时刻的势能和动能分别为

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \quad (11.1-21)$$

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \quad (11.1-22)$$

弹簧振子的总机械能为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2 \quad (11.1-23)$$

可见, 在简谐振动中, 系统的动能和势能不断相互转换, 其变化频率为振

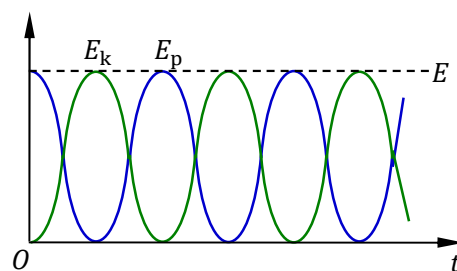


图 11.1-13 简谐振子的机械能曲线

动频率的 2 倍. 但系统的总机械能始终保持不变, 即机械能守恒, 其值正比于振幅的平方. 能量变化的曲线如图 11.1-13 所示.

11.1.2 简谐振动的合成

一、同方向、同频率简谐振动的合成

设某一质点同时参与了两个同方向、同频率的简谐振动, 即

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

该质点的合振动为

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10}) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

利用三角函数的相关公式可求得

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

其中

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})} \quad (11.1-24)$$

$$\tan\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20}} \quad (11.1-25)$$

即合振动仍为一简谐振动, 其振动方向和频率与分振动相同.

用旋转矢量法分析可以很直观的得到上述结果. 如图 11.1-14 所示, 由于频率相同, 所以两个分振动对应的旋转矢量 \mathbf{A}_1 和 \mathbf{A}_2 以相同的角速度 ω 绕 O 点作圆周运动. 于是 \mathbf{A}_1 和 \mathbf{A}_2 的合矢量 \mathbf{A} 也以相同的角速度 ω 绕 O 点旋转, 且长度保持不变. \mathbf{A} 在 x 轴上的投影满足 $x = x_1 + x_2$, 所以 \mathbf{A} 就是合振动的旋转矢量. 利用几何关系即可求出 A 和 $\tan\varphi_0$.

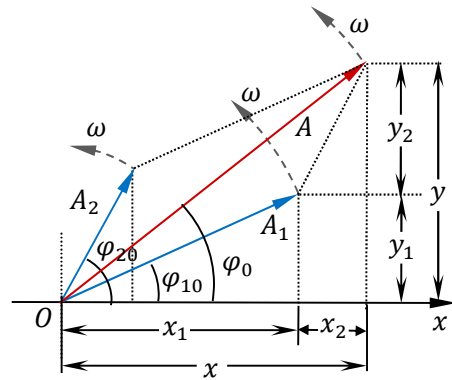


图 11.1-14 用旋转矢量法表示同方向同频率简谐振动的合成

从 (11.1-24) 式可以看出, 在一维同频率简谐振动的合成中, 相位差 $(\varphi_{20} - \varphi_{10})$ 起着重要作用. 对于 $n = 0, 1, 2, \dots$, 有:

(1) 当 $\varphi_{20} - \varphi_{10} = \pm 2n\pi$, 即两分振动同相时, $A = A_1 + A_2$, 合振幅最大;

(2) 当 $\varphi_{20} - \varphi_{10} = \pm(2n + 1)\pi$, 即两分振动反相时, $A = |A_1 - A_2|$, 合振幅最小. 特别的, 若 $A_1 = A_2$, 则 $A = 0$, 合振动使质点始终处于静止状态;

(3) 在一般情况下, $|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$.

以上结论在讨论机械波和光的干涉和衍射时很重要.

若质点同时参与多个同方向、同频率的简谐振动, 设

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

.....

$$x_n = A_n \cos(\omega t + \varphi_{n0})$$

可按图 11.1-15 所示的方法合成. 合成后的振动仍为简谐振动, 表示为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

其中

$$A = \sum A_i \quad (11.1-26)$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{\sum A_i \sin \varphi_i}{\sum A_i \cos \varphi_i} \quad (11.1-27)$$

特别的, 若这 n 个分振动的振幅相等, $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A_0$, 且各个分振动的相位依次递增相同的量值, $\varphi_{i+1} - \varphi_i = \delta$, 如图 11.1-16 所示. n 个分振动的旋转矢量大小相等, 依次首尾相连且依次转过相同的角度 δ , 于是它们构成一个正多边形的一部分, C 点为该正多边形的中心. 过 C 点作 A_1 和 A_2 的垂线, 由几何关系可知, $\angle OCM = \delta$. 显然, $\angle OCN = n\delta$. 在等腰三角形 $\triangle OCN$ 中, 可得合振幅为

$$A = 2\overline{OC} \sin \frac{n\delta}{2}$$

在等腰三角形 $\triangle OCM$ 中, 可得

$$\overline{OC} = \frac{A_0}{2 \sin (\delta/2)}$$

联立上面两式, 有

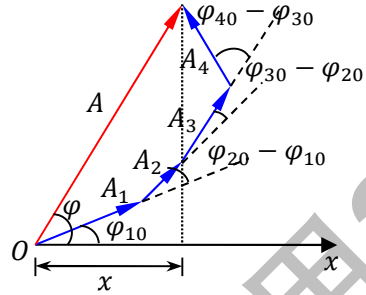


图 11.1-15 多个同方向同频率的简谐振动的合成

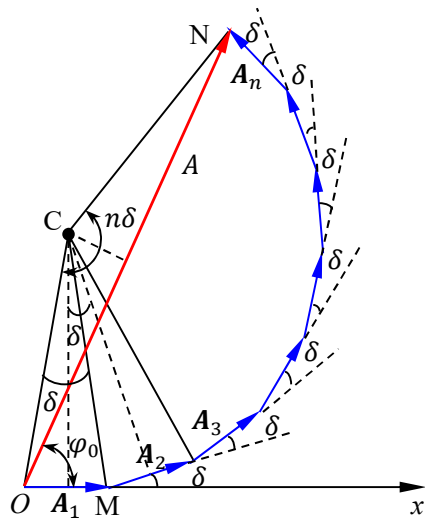


图 11.1-16 n 个同方向同频率的简谐振动的合成特例

$$A = A_0 \frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \quad (11.1-28)$$

另一方面, 在等腰三角形 $\triangle OCN$ 中, $\angle CON = \frac{1}{2}(\pi - n\delta)$; 在等腰三角形 $\triangle OCM$ 中,

$\angle COM = \frac{1}{2}(\pi - \delta)$, 有

$$\varphi_0 = \angle COM - \angle CON = \frac{n-1}{2}\delta$$

合振动的初相为

$$\varphi_0 = \frac{n-1}{2}\delta \quad (11.1-29)$$

多个同方向同频率的简谐振动的合成在分析光的衍射规律时有重要应用.

例 11.1-4 一个物体同时参与两个同方向的简谐振动:

$$x_1 = 0.04 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}, \quad x_2 = 0.03 \cos(2\pi t + \pi) \text{ m}$$

求此物体的振动函数.

解: 采用旋转矢量法进行求解. 如图所示, 由勾

股定理可求出合振动的振幅为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{0.04^2 + 0.03^2} = 0.05 \text{ m}$$

图中 \mathbf{A}_1 和 \mathbf{A} 的夹角 θ 为

$$\theta = \arccos \frac{4}{5} \approx 37^\circ$$

故合振动的初相为

$$\varphi_0 = \theta + \frac{\pi}{2} = 127^\circ = 2.22 \text{ rad}$$

于是物体的振动函数为

$$x = 0.05 \cos(2\pi t + 2.22) \text{ m}$$

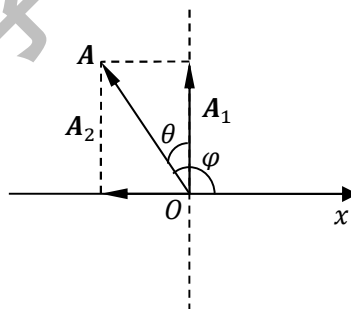


图 11.1-17 例 11.1-4 图

二、同方向、不同频率简谐振动的合成

一般情况下, 同方向、不同频率简谐振动的合成结果为非简谐振动.

考虑质点同时参与振幅相

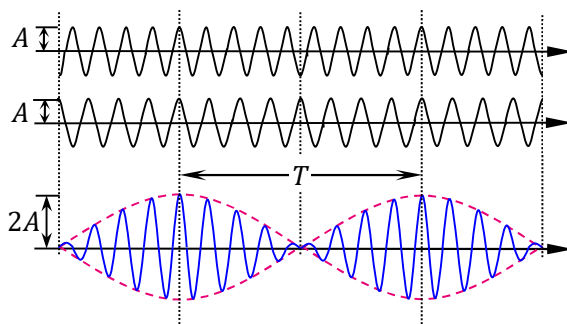


图 11.1-18 两同方向不同频率简谐振动的合成拍

同、角频率分别为 ω_1 和 ω_2 的两个同方向的简谐振动。把两振动相位相同的时刻选定为计时零点，使两者的初相都为零。于是，这两个简谐振动可分别表示为

$$x_1 = A \cos \omega_1 t$$

$$x_2 = A \cos \omega_2 t$$

其合振动为

$$x = x_1 + x_2 = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t \quad (11.1-30)$$

利用三角函数和差化积公式，可将（11.1-22）式改写成

$$x = 2A \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \cos \frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2} \quad (11.1-31)$$

讨论一种特殊情况，假设两分振动的角频率 ω_1 和 ω_2 都较大，而两者相差却很小，使得 $|\omega_2 - \omega_1| \ll \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ 。这时，可以近似地将合振动看成是角频率为 $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ 的准简谐振动，其振幅按照 $\left| 2A \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \right|$ 随时间在缓慢变化，如图 11.1-15 所示。这种合振幅时而加强时而减弱的现象称为拍。合振动的振幅函数 $\left| 2A \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \right|$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}$ ，即为拍的周期。合振幅变化的频率称为拍频：

$$\nu_b = \frac{1}{T} = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2\pi} = |\nu_2 - \nu_1| \quad (11.1-32)$$

可见拍频为两个分振动的频率之差。在信号分析中，利用拍的现象可以实现对频率的调制。

三、振动方向垂直的同频率简谐振动的合成

当一质点同时参与两个振动方向相互垂直的同频率简谐振动，即

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

将式中的 t 消去，可得合振动的轨迹方程：

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta \varphi = \sin^2 \Delta \varphi \quad (11.1-33)$$

这是一个普遍的椭圆方程。质点合振动的轨迹如图 11.1-19 所示，其具体形状取决于相位差 $\Delta \varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10}$ 。

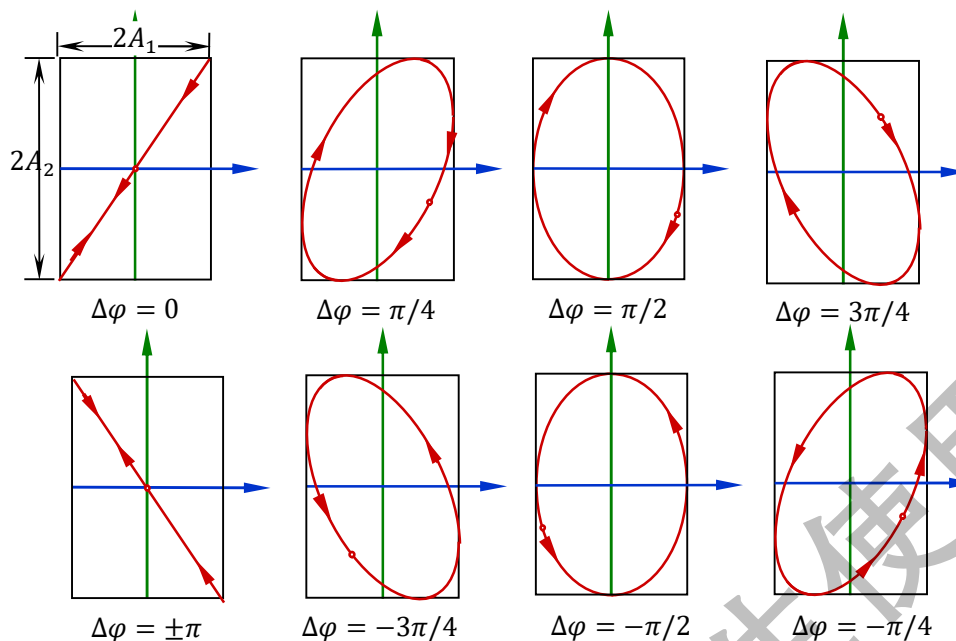


图 11.1-19 两个相互垂直的同频率、不同相位差的简谐振动的合成

讨论几种特殊情况.

(1) 当 $\Delta\varphi = 0$ 时, 两分振动同相, (11.1-33) 式退化为直线方程:

$$y = \frac{A_2}{A_1}x$$

质点轨迹为一、三象限内通过坐标原点 O 的直线. 很明显, 合振动也是频率为 ω 的简谐振动, 振幅为 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.

(2) 当 $\Delta\varphi = \pm\pi$ 时, 两分振动反相, 有

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x$$

质点轨迹为二、四象限内通过坐标原点 O 的直线. 合振动仍是频率为 ω 的简谐振动, 振幅为 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.

(3) 当 $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ 时, (11.1-33) 式化为标准的正椭圆方程:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

质点的轨迹为一个正椭圆, 其长、短轴分别为 $2A_1$ 、 $2A_2$. 若 $A_1 = A_2$, 正椭圆退化为圆, 质点作圆周运动.

(4) 当 $\Delta\varphi$ 为其他值时, 质点的轨迹为一般的斜椭圆, 但斜椭圆总是内切于边长

为 $2A_1$ 、 $2A_2$ 的矩形.

值得注意的是, 质点沿椭圆(圆)轨迹的运动方向也与 $\Delta\varphi$ 有关. 当 $0 < \Delta\varphi < \pi$ 时, 质点沿顺时针方向运动; 当 $-\pi < \Delta\varphi < 0$ 或 $\pi < \Delta\varphi < 2\pi$ 时, 质点沿逆时针方向运动, 如图 11.1-19 所示.

四、振动方向垂直、频率不同的简谐振动的合成

两个振动方向互相垂直的不同频率的简谐振动, 合成后的运动一般来说比较复杂, 而且其轨迹往往是不稳定的. 但是, 如果两个简谐振动的频率之比 ω_1/ω_2 恰为整数比, 则它们的合运动具有稳定而闭合的轨迹, 这些轨迹图形称为李萨如图, 如图 11.1-17 所示. 可以在示波器上利用李萨如图来精确地比较频率.

$\Delta\varphi$ ω_1/ω_2	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$\pm\pi$	$-\pi/2$	$-3\pi/4$
1/2						
1/3						
3/2						

图 11.1-20 李萨如图

§ 11.2 阻尼振动

机械能守恒的简谐振动是一种理想情况. 通常的振动系统都是有能量损耗的. 损耗主要来源于摩擦和介质阻力, 损耗的机械能将逐步转化为热能, 使振动系统的强度逐渐减弱, 振幅逐渐减小, 这种振动叫做阻尼振动, 亦称减幅振动.

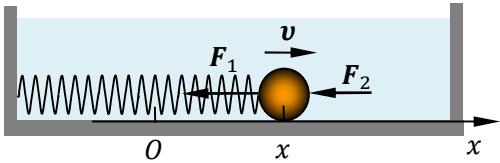


图 11.2-1 阻尼振动模型

如图 11.2-1 所示, 将弹簧振子置于液体介质中振动, 则振子在运动中将受到流体粘滞力的阻碍, 而做阻尼振动. 由

牛顿定律可知

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_1 + F_2 \quad (11.2-1)$$

式中弹性力 $F_1 = -kx$ ，粘滞力 F_2 与物体运动的速度有关，一般在速度不是很大的时候可表示为

$$F_2 = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt} \quad (11.2-2)$$

式中 γ 为阻力系数，其单位为牛顿秒每米，记作 $\text{N} \cdot \text{s/m}$ 。

由此可得阻尼运动的运动方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

定义阻尼系数 $\beta = \frac{\gamma}{2m}$ ，其量纲与频率的量纲相同，单位为“ s^{-1} ”。于是弹性振子的阻尼运动的微分方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (11.2-3)$$

式中 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 称为系统的固有角频率。

如图 11.2-2 所示，对于微分方程式 (11.2-3)，可以分成下述情况分别讨论：

(1) 当 $\beta < \omega_0$ 时，称为欠阻尼振动。此时方程的解为

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (11.2-4)$$

其中， $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ，振子作往返运动，但由于粘滞阻力做负功，使得系统的机械能逐渐耗散，振幅逐渐减小。

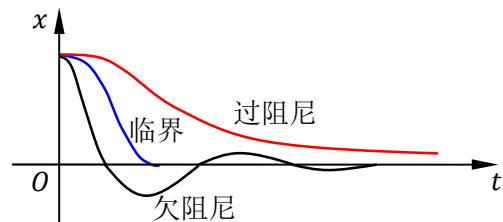


图 11.2-2 阻尼振动 $x-t$ 曲线

(2) 当 $\beta > \omega_0$ 时，称为过阻尼振荡。方程的解为

$$x(t) = c_1 e^{-(\beta-\beta_0)t} + c_2 e^{-(\beta+\beta_0)t} \quad (11.2-5)$$

其中， $\beta_0 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ ，此时振子不再做往复运动，以非周期运动方式缓慢地回到平衡位置。

(3) 当 $\beta = \omega_0$ 时，称为临界阻尼振荡。方程的解为

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\beta t} \quad (11.2-6)$$

图 11.2-2 反映出，在临界阻尼时，物体从运动到静止在平衡位置所经历的时间

间最短。临界阻尼运动的特性常被应用在精密仪表的设计和制造中。

§ 11.3 受迫振动和共振

简谐振动和阻尼振动都称为自由振动，只在开始时由外界给振动系统提供一份初始能量。而受迫振动指在振动过程中始终有外力作用并对系统做功，是外界与系统有能量交换的一类振动。

11.3.1 受迫振动的动力学方程

如图 11.3-1 所示，如果一维弹簧振子除了受弹性力 F_1 、阻尼力 F_2 作用外，还受到一个周期性外力 $F(t)$ 作用。 $F(t)$ 称为驱动力：

$$F(t) = F \cos \omega t \quad (11.3-2)$$

式中 F 为驱动力的幅值， ω 为驱动力的角频率。此时振子的运动方程为

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_1 + F_2 + F(t) \\ &= -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F \cos \omega t \end{aligned} \quad (11.3-1)$$

即

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = C \cos \omega t \quad (11.3-3)$$

式中， β 为阻尼系数， ω_0 为系统固有角频率， C 为单位质量受到的驱动力幅值，即

$$\beta = \frac{\gamma}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad C = \frac{F}{m} \quad (11.3-4)$$

微分方程 (11.3-3) 式的解为

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t + \varphi_0) + A \cos(\omega t + \varphi) \quad (11.3-5)$$

式中 A_0 、 φ_0 是由系统初始条件决定的积分常数。式子右边第一项为系统参与的阻尼振动，随时间逐渐衰减为零；第二项是驱动力所为的等幅振动。当时间足够长，(11.3-5) 式中的第一项可略去，受迫振动将达到稳定状态，表示为

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (11.3-6)$$

式中

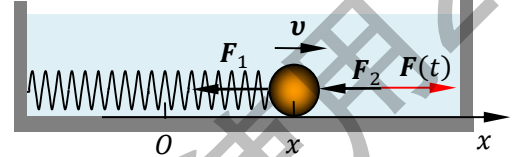


图 11.3-1 受迫振动模型

$$A = \frac{c}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \varphi = \arctan \frac{-2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (11.3-7)$$

从以上结果看，受迫振动有以下明显特征：

- (1) 稳定后，受迫振动为等幅振动，其频率与驱动力的频率相同。
- (2) 由 (11.3-7) 式可知，受迫振动的振幅 A 和初相 φ 与初始条件无关，与系统的本征频率 ω_0 、驱动力的频率 ω 和阻尼特征 β 有关。可以通过调整驱动力的频率来控制振子的振幅。

11.3.2 共振

由 (11.3-7) 式可知，对于一个确定的振动系统， ω_0 和 β 是常量，振幅 A 只是 ω 的函数。不难得到，若驱动力的角频率 ω 为

$$\omega = \Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (11.3-8)$$

则振幅 A 具有极大值：

$$A = \frac{c}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (11.3-9)$$

(11.3-8) 式中的 Ω_0 称为共振角频率。振幅达到极大值的振动现象称为共振。

图 11.3-2 所示为 $A - \omega$ 曲线。可以看到，在共振角频率 Ω_0 附近出现一个峰值，称为共振峰。一般情况下 $\Omega_0 < \omega_0$ ，只有当 β 很小时， $\Omega_0 \approx \omega_0$ ，即驱动力的频率等于系统的固有频率。而且阻尼因子 β 越小，共振峰越尖锐。如果 $\omega \gg \omega_0$ ，则无论 β 为多少，振幅均趋近于 0。这表明，如果驱动力以很高的频率在变化，物体会由于惯性而来不及变化，于是处于静止状态。

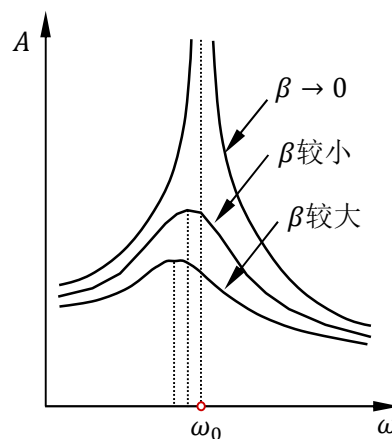


图 11.3-2 共振频率

共振现象在自然界和日常生活中时有发生。中国在公元 3 世纪就曾有关于乐器相互共鸣的文字记载。人们在生产和实践中也常常有效利用共振现象。例如，医学中核磁共振成为目前最有效的疾病检测和诊断方法之一，无线电通讯中也是利用调谐回路与相应电磁波产生共振的原理实现选台。

共振广泛存在于建筑、桥梁、机床甚至人体中，时常造成危害，需要尽量避

免。例如 1940 年，美国的塔科马大桥在启用后第五个月，就在大风中因共振而坍塌。另外，研究显示汽车发动机中的低频噪音与人体五脏的固有频率很接近，这可能就是有些人晕车的原因之一。

仅供抗疫时期川大学生使用2020

第十一章 振动 习题

11-1 一个弹簧振子按照

$$x = 0.1 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{SI})$$

的规律作简谐振动.

(1) 求振动的角频率、周期、振幅、初相、最大速度和最大加速度;

(2) 分别求解 $t = 1 \text{ s}$ 、 2 s 及 5 s 时的相位;

(3) 分别画出振子的位移、速度和加速度随时间的变化曲线.

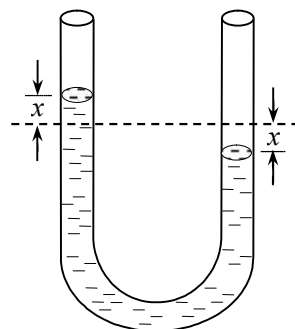
11-2 质量为 m 的物体悬挂在弹性系数为 k 的弹簧上, 运动周期为 T . 若再挂上质量为 m' 的物体, 周期变为 $3T$. 试用 m 表示 m' .

11-3 一竖直悬挂的轻质弹簧的劲度系数为 k , 挂上质量为 m 的物体后伸长 l , 将物体拉离平衡位置 y 后松手. 证明: 物体在平衡位置附近做简谐振动, 并证明振动周期与一长度为 l 的单摆的振动周期相同.

11-4 弹簧振子的质量为 0.025 kg , 弹性系数为 $k = 0.4 \text{ N/m}$. 令 $t = 0$ 时物体在 $x_0 = 0.1 \text{ m}$ 处, 以初速度 $v_0 = 0.4 \text{ m/s}$ 向正方向运动, (1) 求周期, 振幅和初相, 写出振动表达式; (2) 求振动的能量; (3) 从开始运动经过 $\frac{\pi}{8} \text{ s}$ 时物体的坐标, 速度和加速度.

11-5 一质量 $m = 10 \text{ g}$ 的物体作简谐振动, 振幅 $A = 20 \text{ cm}$, 周期 $T = 4 \text{ s}$. 令 $t = 0$ 时位移 $x_0 = +20 \text{ cm}$. 求: (1) 由初始位置运动到 $x = +10 \text{ cm}$ 处的最少时间为多少? (2) 还需要多长的时间物体第二次经过 $x = +10 \text{ cm}$ 处?

11-6 如图所示, 将 9 kg 的水银注入 U 形管, U 形管内直径为 1.2 cm . 水银在平衡位置附近作振动, (1) 证明水银在管中做简谐振动. (2) 求振动周期. 提示: 1 m^3 水银质量为 13600 kg , 不考虑摩擦力和表面张力的作用.



题 11-6 图

11-7 一石块在直径为 0.8 m 的水平圆周上运动, 频率为 30 r/min . 远处射来的光束将此石块投影到附近墙壁上, 求投影运动的振幅、频率及周期.

11-8 质量为 36kg 的物体做振幅为 13cm，周期为 12s 的简谐振动。在 $t = 0$ 时，位移为 +13cm。(1) 求在 $x = 5$ cm 处，物体的速度，(2) 求 $t = 2$ s 时物体所受力的 大小。

11-9 一弹簧振子，劲度系数 $k = 25$ N/m，已知初始时刻的动能和势能分别为 $E_{k0} = 0.4$ J 和 $E_{p0} = 0.6$ J，求：

- (1) 振动的振幅 A ；
- (2) 势能和动能相等时的位移 x 。

11-10 在一平板上放一质量为 $m = 1$ kg 的物体，平板在竖直方向作简谐振动，其振动周期为 $T = \frac{1}{2}$ s，振幅 $A = 4$ cm，求：

- (1) 物体对平板的压力 N 的表达式；
- (2) 平板以多大的振幅振动时，物体才能离开平板？（注意取 $g = 9.8$ N/kg）

11-11 有一质点，同时参与 $x_1 = 5 \cos(\omega t + 2)$ cm 和 $x_2 = 5 \cos(\omega t + 1)$ cm 的两个谐振动（其中时间单位用 s）。问这两个振动在任意时刻哪个的相位超前，超前多少？

11-12 两个同方向的简谐振动，振动方程分别为：

$$x_1 = 0.1 \cos\left(4\pi t + \frac{1}{3}\pi\right) \text{ m}, \quad x_2 = 0.3 \cos\left(4\pi t - \frac{2}{3}\pi\right) \text{ m}$$

求合振动的振幅为多少？

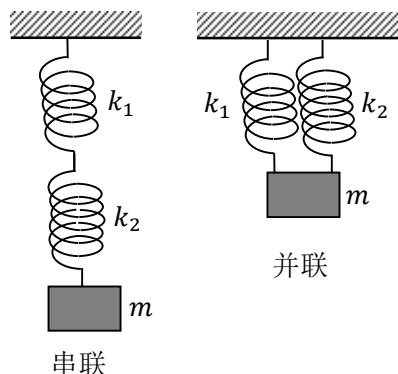
11-13 两个同方向的简谐振动，已知方程式分别为

$$x_1 = 5 \cos(10t + 0.75\pi) \text{ cm}, \quad x_2 = 6 \cos(10t + 0.25\pi) \text{ cm}$$

求：(1) 合振动的振幅；(2) 若另有谐振动 $x_3 = 7 \cos(10t + \varphi)$ cm，则 φ 为何值时 $x_1 + x_3$ 的振幅最大？ φ 又为何值时 $x_2 + x_3$ 的振幅最小？

11-14 示波器的电子束受到两个互相垂直电场的作用。若电子两个方向上的位移分别为 $x = A \cos \omega t$ 和 $y = A \cos(\omega t + \phi)$ 。求在 $\phi = 0$ 和 $\pi/6$ 时，电子在荧光屏上的轨迹方程。

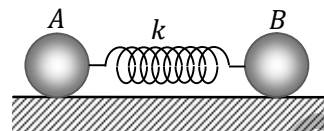
11-15 两条劲度系数分别为 k_1 和 k_2 的轻弹簧，



题 11-15 图

若分别将它们（1）串联在一起；（2）并联在一起，然后竖直悬挂，在下面系一重物 m ，构成一个可沿竖直方向振动的弹簧振子，如图所示．试求在上述两种情况下，振子的周期各为多少？

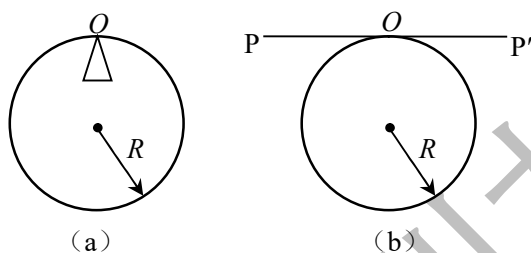
11-16* 在水平桌面上用轻弹簧（劲度系数为 k ）连接两个质量均为 m 的小球 A 和 B，如图所示．今沿弹簧轴线向相反方向拉开两球然后释放，求此后两球振动的角频率 ω ．



题 11-16 图

11-17* （1）一个质量为 m ，半径为 R 的环放在刀口上，环可以在自身平面内摆动，形成一个物理摆，如图（a）所示．求此圆环摆小摆动时的周期 T_1 ．

（2）假设一个相同的环固定在与共面且与圆周相切的轴 PP' 上，环可以自由地在纸面内外摆动，如图（b）所示．求此圆环摆小摆动时的周期 T_2 ．



题 11-17 图

问题讨论

如果带电粒子处于电磁场中，电场和磁场都是均匀的，且两者相互垂直，粒子的速度 \mathbf{v}_0 与 \mathbf{E} 平行．该粒子将怎样运动？