$4^{ème}$ Sciences 2021/2022	Limites - continuités	Khamassi Adel

Exercice1

$]-\infty,1[$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3}+2x-3 & si\ x\leq 1\\ \frac{\sin(x-1)}{x-1} & si\ x>1\end{cases}$

$]1,+\infty[$

1. a) Montrer que pour tout $x\in\,]1,+\infty[\,;\ \frac{-1}{x-1}\leq f(x)\leq\frac{1}{x-1}$
   b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; Interpréter graphiquement le résultat
2. Calculer $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)$ puis interpréter le résultat
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice2

$a=1$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\frac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & si\ x<1\\ \sqrt{x^2+x+2}-x & si\ x\geq 1\end{cases}$

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. a) Montrer que pour tout $x\in\,]-\infty,1[\,;\ \frac{x+1}{x-1}\leq f(x)\leq 1$
   b) En déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
4. a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $\left]-\frac{1}{2},0\right[$
   b) En déduire que $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{1-\alpha^2}$
5. soit la fonction g définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x)=\begin{cases}f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & si\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\end{cases}$

   Montrer que g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} & si\ x\leq 0\\ \frac{\cos x-1}{\sqrt{x}} & si\ x>0\end{cases}$

1. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
2. a) Montrer que pour tout $x\in\,]0,+\infty[\,;\ \frac{-2}{\sqrt{x}}\leq f(x)\leq 0$
   b) Déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
3. a) Montrer que f est continue en 0
   b) Déterminer $f'(x)$ sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$

Exercice4

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\begin{cases}x^3+12x+1 & si\ x\leq 0\\ \sqrt{x^2+1}-x & si\ x>0\end{cases}$

1. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2. Etudier la continuité de f sur D_f
3. Déterminer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f
4. Montrer que l'équation $x^3 + 12x + 1 = 0$ admet dans $]-\infty, 0[$ une solution unique α
5. Vérifier que $\alpha \in \left]-\frac{1}{12}, 0\right[$

Exercice5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

1. Dresser le tableau de variation de f
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = f(x) - x$
3. a) Dresser le tableau de variation de g

   b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une solution unique α

   Vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$

   c) Déterminer le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$
4. soit la fonction h définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = \begin{cases} f(\tan x) & si\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$

   Vérifier que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $h(x) = \cos 2x$

Exercice6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x^3 + 12x + 1 & si\ x \le 0 \\ \sqrt{x^2+1} - x & si\ x > 0 \end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2. Etudier la continuité de f sur D_f
3. Déterminer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f
4. Montrer que l'équation $x^3 + 12x + 1$ admet dans $]-\infty, 0[$ une solution unique α
5. Vérifier que $\alpha \in \left]-\frac{1}{12}, 0\right[$

Exercice7 :

Soit la f fonction définie par : $f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{\pi}\cot(\pi x)$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Montrer que pour tout entier relatif n, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $]n, n+1[$

Exercice8 :

Soit la f fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

1. Etudier les branches infinies de Cf courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

2. Déterminer l'image de l'intervalle $]1,+\infty[$ par f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]1,+\infty[$ une unique solution α et vérifie $1 < \alpha < 2$
4. Soit la g fonction définie sur $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = f(\tan x) & si\ x \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Montrer que g est continue sur $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice9 :

Soit la f fonction définie sur $\mathbb{R}$par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin(\pi x^2) & si\ x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{2x^2 - x}{2 - x} & si\ x \in [0,1] \\ 2 - x + \sqrt{x^2 - 1} & si\ x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que pour tout $x \in]-\infty,0[$; $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$
   Et en déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ puis $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$
3. Montrer que la Cf courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ dont on donnera une équation .

Exercice10 :

Soit la f fonction définie sur $\mathbb{R}$par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} + \pi x + \cos \pi x + 1 & si\ x > 1 \\ x^2 - x + \pi & si\ \ x \leq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. a) Montrer que pour tout $x > 1$: $f(x) \geq \sqrt{x^2 - 1} + \pi x$
   b)En déduire la limite de f en $+\infty$
3. Déterminer $\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ et $\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
4. Interpréter les résultats trouvés.

Mathématiques Année Scolaire 2021/2022	Série d'exercices : Limite-Continuité	Prof : Khamassi Adel
	Classes : 4ème Sc exp Math	

EXERCICE N°1:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1 / Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation .

2 / Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans IR une unique solution α et que $\alpha\in\left]\frac{2}{3},1\right[$.

3 / Soit la fonction φ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ par :

$$\begin{cases}\varphi(x)=f(tgx) \text{ si } x\neq-\frac{\pi}{2}\\ \varphi(-\frac{\pi}{2})=1\end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, $\varphi(x)=\dfrac{2}{2+\sin 2x}$

b) Etudier les variations de φ et donner son tableau de variation .

EXERCICE N°2:

Soit f la fonction sur IR₊ par $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

1 / Dresser le tableau de variation de f .

2 / On considère la fonction g définie sur IR_+ par $g(x)=f(x)-x$

a) Dresser le tableau de variation de g .

b) En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet dans IR_+ une solution unique α .

Vérifier que $\alpha\in\,]0,5\,;0,6[$

c) Déterminer le signe de $g(x)$ pour $x\in IR_+$

3 / Soit G la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $G(x)=f(tgx)$; $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

a) Vérifier que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$: $G(x)=\cos 2x$.

b) Dresser le tableau de variation de G .

EXERCICE N°3:

Soit f la fonction définie sur $I=\,]0,2]$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1 /a) Vérifier que f n'est pas dérivable à gauche en 2 .

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,2[$ et que $f'(x)=\dfrac{-4}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ pour tout $x\in]0,2[$

c) Dresser alors le tableau de variation de f .

2 / Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$

3 / On donne la fonction g définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = f(2\cos x)$

a) Vérifier que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $g(x) = tg(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de g sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

EXERCICE N°4:

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) + 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1 /a) Montrer que pour tout $x < 0$ on a : $-x^2 + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

c) Montrer que f est continue en 0 .

2 / Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

3 / Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in]-2, -1[$ tel que $f(x_0) = 0$.

4 /a) Vérifier que pour tout $x \geq 0$,on a : $f(x) = -1 + \frac{4}{2 + \sqrt{x}}$.

b) En déduire que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

c) Déterminer alors l'image de l'intervalle $[0, +\infty[$ par la fonction f .

d) En étudiant la fonction $\varphi(x) = f(x) - x$ sur $[0, +\infty[$, montrer que $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]0,1[$.

e) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

EXERCICE N°5:

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 3} - 3 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = 2x - 3 + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1 / Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x$.

2 /a) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$: $2x - 4 \leq f(x) \leq 2x - 2$.

b) En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

3 / Montrer que f est continue en 1 .

4 /a) Montrer que f est dérivable à gauche en 1 .

b) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$ et calculer

$f'(x)$ pour $x \in]-\infty,1[$ et $x \in]1,+\infty[$.

5 / Dresser le tableau de variation de f .

6 / Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]1,2[$.

7 / Soit g la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $g(x)=f(\sin x)$

Montrer que g est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$.

EXERCICE N°6:

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2+4}-x & \text{si } x\leq 0 \\ f(x)=x^3+2+x^2\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x>0 \end{cases}$

1 / Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+2x]$.

2 /a) Montrer que f est continue sur $]-\infty,0]$.

b) Montrer que pour tout $x>0$ on a : $x^3+2-x^2 \leq f(x) \leq x^3+2+x^2$.

c) Montrer alors que f est continue en 0 .

3 /a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,0]$.

b) Déterminer $f'(x)$ pour $x \in]-\infty,0]$ puis déterminer son signe .

c) Montrer que si $x>0$; $x^2-x \leq \frac{f(x)-2}{x} \leq x^2+x$.

d) f est-elle dérivable en 0 ? Interpréter graphiquement les résultats trouvés .

4 / Soit pour $x \in]-\infty,0]$; $g(x)=f(x)-3$

a) Dresser le tableau de variation de g .

b) Montrer que l'équation $(E): g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in]-1,0[$.

c) Interpréter graphiquement le résultat du 4 /b) .

d) Dresser le tableau de signe de g .

M^r : Khamassi Adel	Série d'exercices : *Limites et continuité*	4ème Maths Sciences

EXERCICE N°1: Q . C . M :

Pour chaque question ,une seule des trois propositions est exacte . Laquelle ?

1 / Soit f une fonction définie sur IR par : $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$;

❶ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.	❷ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.	❸ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2 / f est la fonction définie par $f(x) = x\sin(\frac{\pi}{x})$.

❶ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$	❷ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pi$	❸ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3 / Soit $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

L'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 2 est :

❶ $y = -2x+2$.	❷ $y = -2x+10$.	❸ $y = -2x-2$.

EXERCICE N°2:

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = x^2+1+\cos(x-1) & \text{si } x \le 1 \\ f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1 /a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty,1]$ on a : $x^2 \le f(x) \le x^2+2$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2 /a) Montrer que f est continue en 1 .

b) En déduire que f est continue sur IR .

3 /a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

EXERCICE N°3:

Soit f la fonction définie sur IR* par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ f(x) = \dfrac{x^3\sin(\frac{\pi}{x})}{1+x^2} & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$

1 /a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $-x^3 \le f(x) \le x^3$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

2 /a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pi$

EXERCICE N°4:

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) + 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1 /a) Montrer que pour tout $x < 0$ on a : $-x^2 + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

c) Montrer que f est continue en 0 .

2 / Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

3 / Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in]-2,-1[$ tel que $f(x_0) = 0$.

4 /a) Vérifier que pour tout $x \geq 0$,on a : $f(x) = -1 + \dfrac{4}{2 + \sqrt{x}}$.

b) En déduire que f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

c) Déterminer alors l'image de l'intervalle $[0,+\infty[$ par la fonction f.

d) En étudiant la fonction $\varphi(x) = f(x) - x$ sur $[0,+\infty[$, montrer que $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]0,1[$.

e) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

EXERCICE N°5:

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x} - 1$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 / Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2 /a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3 / Soit g la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} g(x) = x^2 + 2 - 3\cos(x^2) & \text{si } x < 0 \\ g(x) = f(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue en 0 .

b) Vérifier que pour tout $x < 0$,on a : $x^2 - 1 \leq g(x) \leq x^2 + 5$.

c) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

Exercice :6

Calculer

1. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3-3x^2-x+3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^3-3x^2-x+3}$

3. $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$ — Conjugué

4. $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$

5. $\lim_{x\to 3}\frac{x-1-\sqrt{x+1}}{x(x-3)}$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1-\sqrt{x+1}}{x(x-3)}$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{2x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{2x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{2x}$

7. $\lim_{x\to 0^+} x\sqrt{\frac{1-x}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{+\infty}\underbrace{-x}_{+\infty}$ $= +\infty$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1+\sqrt{x^2+x+1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1+\sqrt{x^2+x+1}$

$+\infty$ $+\infty$ $+\infty$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}$

$= \underbrace{\sqrt{x}}_{+\infty}\Big(\underbrace{\sqrt{1+1/x}-2}_{<0}\Big) = -\infty$