Cinématique du point matériel

I- Introduction :

La cinématique du point matériel est l'étude du mouvement des corps matériels en fonction du temps (la position, la distance parcourue, la vitesse, l'accélération…) sans tenir compte des causes qui provoquent ou modifient le mouvement (les forces, l'énergie,…)
On suppose que le corps étudié est un point matériel. On considère que les dimensions du corps sont très petites devant la distance parcourue.
La notion du mouvement est relative. Un corps peut être, en même temps, en mouvement par rapport à un corps et en repos par rapport à un autre. Par conséquent, il est nécessaire de définir un repère pour déterminer la position, la vitesse ou l'accélération d'un mobile à un instant correspondant à la position du mobile par rapport à ce repère.
On définit plusieurs systèmes de coordonnées selon la nature du mouvement du point matériel. Cartésien, polaire, cylindrique et sphérique.

II- Étude Descriptive du mouvement d'un point matériel :

2.1. La position du mobile :

La position d'un mobile à un instant t est déterminée par rapport à un repère par un vecteur $\overline{OM}$ qu'on appelle vecteur position. Son origine est le centre du repère O et son extrémité est le mobile M. Suivant le repère cartésien dans l'espace (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$, $\vec{k}$), le vecteur position s'écrit :

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

Les composantes x, y et z du vecteur position dans la base cartésienne sont les coordonnées cartésiennes du mobile M. Ces coordonnées changent avec le temps car le mobile M est en mouvement : x(t), y(t), z(t).
Les fonctions x(t), y(t) et z(t) sont appelées les équations horaires du mouvement.

2.2. La trajectoire :

La trajectoire est l'ensemble des positions successives occupées par le mobile au cours du temps par rapport à un repère. C'est une ligne continue qui relie le point de départ au point d'arrivée (figure 7). La trajectoire définit la nature du mouvement. Si la trajectoire est rectiligne, le mouvement est rectiligne et si elle est curviligne le mouvement est curviligne.

2.2. Le vecteur vitesse :

a)Vitesse moyenne :

La vitesse moyenne est la variation de la distance entre deux positions M1, M2 occupées par le mobile par rapport au temps écoulé entre ces deux positions. Elle est définit comme suit :

$$\overline{V}_m = \frac{\Delta\overline{OM}}{\Delta t} = \frac{\overline{OM'} - \overline{OM}}{t' - t} = \frac{\overline{MM'}}{\Delta t}$$

avec : $\overline{OM}$: le vecteur position à l'instant t

$\overline{OM'}$: le vecteur position à l'instant t'

b)Vitesse instantanée :

C'est la vitesse à un instant t donné et elle est définit comme suit :

$$\overline{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{V}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{OM}_1 - \overline{OM}_2}{\Delta t} = \frac{d\overline{OM}}{dt}$$

2.3. Le vecteur accélération :

a)Accélération moyenne :

L'accélération moyenne est la variation de la vitesse entre deux positions par rapport au temps. Soit v1 la vitesse du mobile à un instant t1 et v2 sa vitesse à l'instant t2. Le mobile subit une accélération moyenne telle que :

$$\overline{a}_m = \frac{\overline{v}_2 - \overline{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t}$$

b)Accélération instantanée :

L'accélération instantanée est l'accélération à un instant t donné :

$$\overline{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{v}_2 - \overline{v}_1}{\Delta t} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2\overline{OM}}{dt^2}$$

2.4. Expression des grandeurs cinématiques dans la base cartésienne :

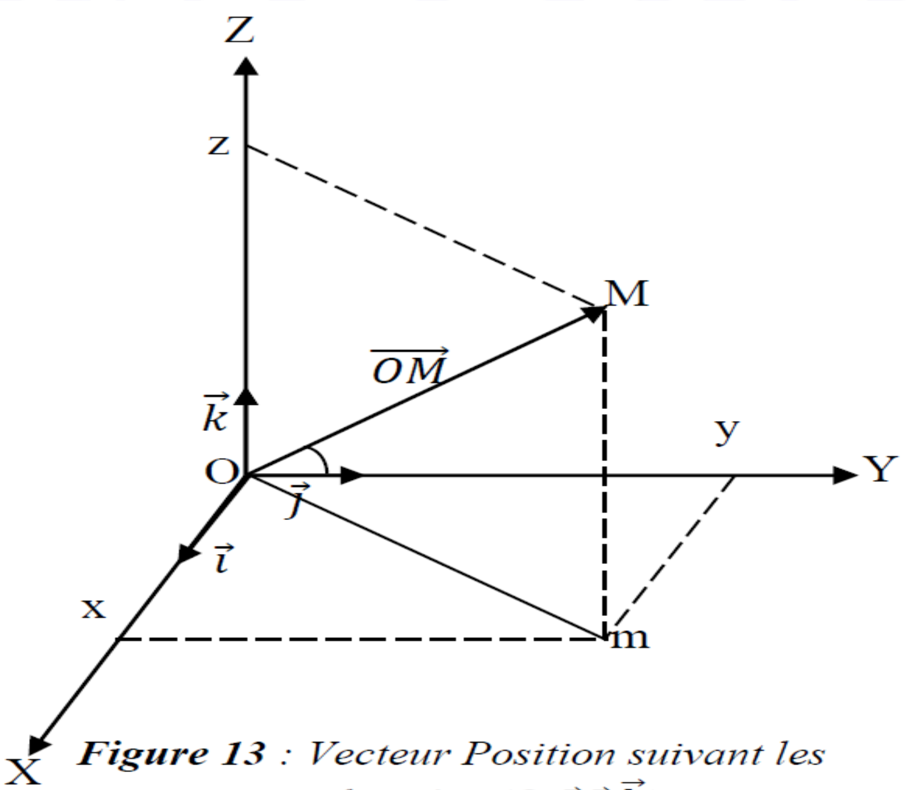


***Figure 13** : Vecteur Position suivant les coordonnées $(O, \vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k})$*

Les vecteurs : position vitesse et accélération s'écrivent suivant les coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\overline{OM} = \overline{Om} + \overline{mM} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$$

$$\overline{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\overline{i} + \frac{dy}{dt}\overline{j} + \frac{dz}{dt}\overline{k}$$

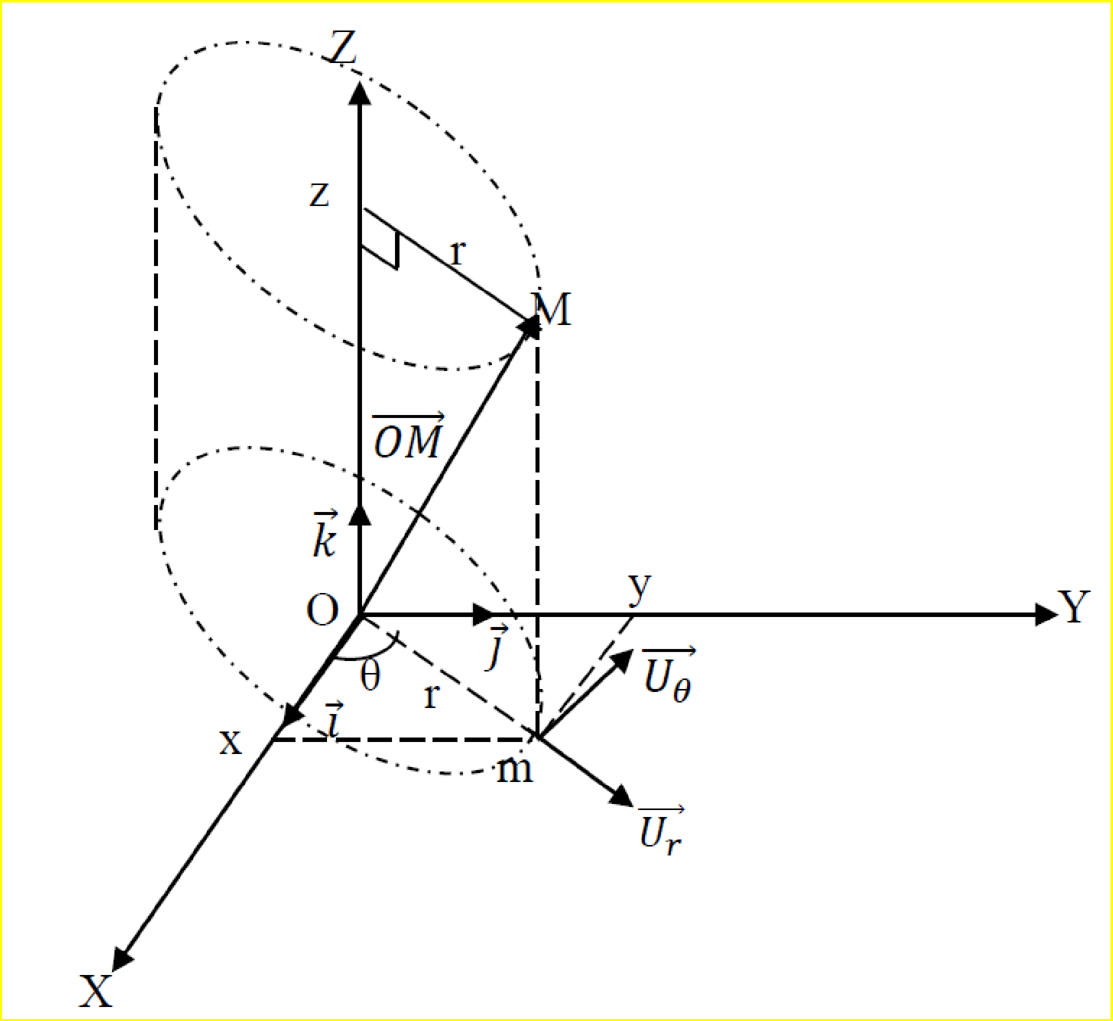
$$\overline{a} = \frac{d^2\overline{OM}}{dt^2} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\overline{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\overline{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\overline{k}$$

2.4. Expression des grandeurs cinématiques dans la base cylindrique :

La base cylindrique est déterminée par les vecteurs unitaires ($\overline{U_r}$,$\overline{U_\Theta}$,$\overline{k}$).

Le vecteur position $\overline{OM}$ s'écrit suivant les coordonnées cylindriques comme suit :

$$\overline{OM} = \overline{Om} + \overline{mM} = r\overline{U_r} + z\overline{k}$$



Expression du vecteur vitesse suivant les coordonnées cylindriques:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\overline{U_r} + z\overline{k})$$

$$\overline{v} = \frac{dr}{dt}\overline{U_r} + r\frac{d\overline{U_r}}{dt} + \frac{dz}{dt}\overline{k}$$

Nous rappelons que :

$$\frac{d\overline{U_r}}{dt} = \frac{d\Theta}{dt}\overline{U_\Theta} \ ; \ \overline{U_\Theta} = -\frac{d\Theta}{dt}\overline{U_r} \ ; \ \overline{k} = 0$$

Donc le vecteur vitesse est :

$$\overline{v} = \frac{dr}{dt}\overline{U_r} + r\frac{d\Theta}{dt}\overline{U_\Theta} + \frac{dz}{dt}\overline{k}$$

Expression du vecteur accélération suivant les coordonnées cylindriques:

$$\overline{a} = \frac{d^2\overline{OM}}{dt^2} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\overline{U_r} + r\frac{d\Theta}{dt}\overline{U_\Theta} + \frac{dz}{dt}\overline{k}\right)$$

$$\overline{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\overline{U_r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\Theta}{dt}\overline{U_\Theta} + \frac{dr}{dt}\frac{d\Theta}{dt}\overline{U_\Theta} + r\frac{d^2\Theta}{dt^2}\overline{U_\Theta} - r\frac{d\Theta}{dt}\frac{d\Theta}{dt}\overline{U_r} + \frac{d^2z}{dt^2}\overline{k}$$

$$\overline{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\Theta}{dt}^2\right)\overline{U_r} + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\Theta}{dt} + r\frac{d^2\Theta}{dt^2}\right)\overline{U_\Theta} + \frac{d^2z}{dt^2}\overline{k}$$

2.4. Expression des grandeurs cinématiques dans la base sphérique :

La base sphérique est déterminée par les vecteurs unitaires ($\overline{U_R}$,$\overline{U_\Theta}$,$\overline{U_\varphi}$).

Le vecteur position $\overline{OM}$ s'écrit suivant les coordonnées sphériques comme suit :

$$\overline{OM} = R\overline{U_R}$$

Expression du vecteur vitesse suivant les coordonnées sphériques:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\overline{U_R}) = \frac{dR}{dt}\overline{U_R} + R\frac{d\overline{U_R}}{dt}$$

$$\frac{d\overline{U_R}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\overline{U_\varphi} + \frac{d\Theta}{dt}sin(\varphi)\overline{U_\Theta}$$

Donc : $\overline{v} = \frac{dR}{dt}\overline{U_R} + R\frac{d\Theta}{dt}sin(\varphi)\overline{U_\Theta} + R\frac{d\varphi}{dt}\overline{U_\varphi}$

Expression du vecteur accélération suivant les coordonnées sphériques:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\overline{U_R} + R\frac{d\Theta}{dt}sin(\varphi)\overline{U_\Theta} + R\,\frac{d\varphi}{dt}\overline{U_\varphi} \right)$$

$$= \left(\frac{d^2R}{dt^2} - R\frac{d\varphi}{dt}^2 - R\ \frac{d\Theta}{dt}^2 sin^2(\varphi)\right)\overline{U_R} + \left(R\frac{d^2\Theta}{dt^2}sin(\varphi) + 2\frac{dR}{dt}\ \frac{d\Theta}{dt}sin(\varphi) + 2R\frac{d\Theta}{dt}\ \frac{d\varphi}{dt}cos(\varphi)\right)\overline{U_\Theta}$$

$$+ \left(R\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\ \frac{dR}{dt}\ \frac{d\varphi}{dt} - R\ \frac{d\Theta}{dt}^2 sin(\varphi)cos(\varphi)\right)\overline{U_\varphi}$$

2.5. Base de frenet :

La base de Frenet est une base reliée au mobile en mouvement curviligne. Elle est définit par la base orthonormé ($\overline{T}$, $\overline{N}$) tel que :

$\overline{T}$ est un vecteur unitaire tangentiel à la trajectoire et en direction du mouvement ($\overline{T}$ est parallèle au vecteur vitesse $\overline{v}$)
$\overline{N}$ est perpendiculaire au vecteur $\overline{T}$ et il est dirigé vers le centre de la courbure de la trajectoire.

$$\overline{v} = v\overline{T} = \frac{dS}{dt}\overline{T}$$

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\overline{T} + v\frac{d\overline{T}}{dt}$$

$$\overline{a} = \frac{dv}{dt}\overline{T} + v\frac{d\Theta}{dt}\ \overline{N}$$

D’autre part :

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{dS}{dt}\ \frac{1}{R} = \frac{v}{R}$$

Donc :

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt}\overline{T} + \frac{v^2}{R}\ \overline{N} = \overline{a_T} + \overline{a_N}$$

$$\overline{a_T} = \frac{dv}{dt}\overline{T}\ ;\ \overline{a_N} = \frac{v^2}{R}\overline{N}$$

$\overline{a_T}$ est l’accélération tangentielle et $\overline{a_N}$ est l’accélération normale.

Si $|v|$ est constant donc l’accélération tangentielle $\overline{a_T}$ est nulle. On dit que le mouvement est curviligne uniforme: $\overline{a} = \overline{a_N} = \frac{v^2}{R}\ \overline{N}$

R est le rayon de courbure de la trajectoire qui est déterminé comme suit :

$$\overline{a}x\overline{v} = \left(\frac{dv}{dt}\overline{T} + \frac{v^2}{R}\overline{N}\right)\ x\ v\overline{T}$$

$$\overline{a}x\overline{v} = \frac{v^3}{R}(\overline{N}x\overline{T})$$

$$|\overline{a}x\overline{v}| = \frac{v^3}{R}$$

Donc : $R = \frac{v^3}{|\overline{a}x\overline{v}|}$

N.B: Il existe un troisième vecteur unitaire $\overline{B}$ définit par : $\overline{B} = \overline{T} \wedge N$

III- Etude des mouvements simples:

Tout mouvement d'un point matériel simple ou compliqué quelque soit sa nature peut être décomposé en deux types de mouvement : - mouvement de translation (uniforme ou non)
- mouvement de rotation (uniforme ou non)

1.Translation rectiligne uniforme:

Dans ce cas , le vecteur vitesse est de forme constante , c'est à dire :

$\overline{v} = \overline{cte} = \overline{v_0} = v_0\overline{i} \Rightarrow \overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = 0$

On a $\overline{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt} \Rightarrow \overline{OM} = \int \overline{v}\,dt = \int v_0\overline{i}\,dt \Rightarrow \overline{OM} = (v_0 t + x_0)\overline{i}$ avec x_0 est l'abscisse à t=0

2.Translation rectiligne uniformément variée:

C'est un mouvement défini par une accélération constante :

$$\overline{a} = \overline{cte} = \overline{a_0} = a_0\overline{i} \Rightarrow \overline{v} = \int \overline{a}\,dt = \int a_0\overline{i}\,dt = (a_0 t + v_0)\overline{i}$$

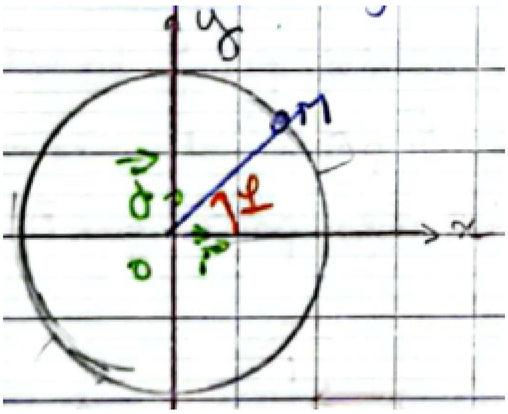
$$\overline{OM} = \int \overline{v}\,dt = \int (a_0 t + v_0)\,dt\,\overline{i} = (\tfrac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0)\overline{i}$$

avec x_0 et v_0 sont l'abscisse et la vitesse à t=0

Le mouvement est uniformément accéléré si $\overline{v}.\overline{a}>0$ et est décéléré(retardé) si $\overline{v}.\overline{a}<0$

3.Mouvement de rotation:

Soit un point M en rotation autour d'un axe , généralement (oz) , dans ce cas la trajectoire est un cercle C de rayon R et de centre O.



La position du point M est angulaire définie par un angle $\varphi(\widehat{\overline{oi}, \overline{oM}})$

On définit aussi la vitesse angulaire $\overline{W}$ portée par l'axe de rotation (oz) ⇒ $\overline{W}$ = W$\overline{k}$ tel que : W = $\frac{d\varphi}{dt}$

(W: est exprimée en rad.s^{-1}).

On définit aussi l'accélération angulaire $\overline{\sigma} = \frac{d\overline{w}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\overline{k}$

⇒$\overline{OM}$, $\overline{v}$ et $\overline{a}$ sont les grandeurs cinématiques linéaires alors que φ , $\overline{W}$ et $\overline{\sigma}$ sont les grandeurs cinématiques angulaires.

4.Expression des grandeurs cinématiques dans la base cartésienne:

$\overline{OM}$ = x(t)$\overline{i}$ + y(t)$\overline{j}$ avec x = Rcos(φ(t)) et y = Rsin(φ(t))

$\overline{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\overline{i} + \frac{dy}{dt}\overline{j}$

$V_x = \frac{dx}{dt}$ = -R$\frac{d\varphi}{dt}$sin(φ(t)) = -RWsin(φ(t))

$V_y = \frac{dy}{dt}$ = R$\frac{d\varphi}{dt}$cos(φ(t)) = RWcos(φ(t))

$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\overline{i} + \frac{dV_y}{dt}\overline{j}$

⇒ $\overline{a_x} = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d}{dt}$(-RWsin(φ(t)) = -RW²cos(φ(t)) - R$\frac{dw}{dt}$sin(φ(t)) = -R[w²cos(φ(t)) + σsin(φ(t))]

⇒ $\overline{a_y} = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d}{dt}$(RWcos(φ(t))) = -RW²sin(φ(t)) + Rσcos(φ(t))

5.Expression des grandeurs cinématiques dans la base polaire:

Dans la base polaire : M(ρ,θ) tel que ρ = $||\overline{OM}||$ = R et θ = ($\overline{Oi}$, $\overline{OM}$)

$\overline{OM} = \rho\overline{U_\rho} = R\overline{U_\rho}$

La vitesse : $\overline{v} = \frac{d\,\overline{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(R.\overline{U_\rho}) = R\frac{d\overline{U_\rho}}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}\overline{U_\theta}$ avec $\frac{d\theta}{dt}$ = w vitesse angulaire

⇒ $\overline{v} = Rw\overline{U_\theta}$, or ($\overline{U_\rho}$, $\overline{U_\theta}$, $\overline{k}$) est un trièdre directe formant la base cylindrique

⇒ $\overline{U_\theta} = \overline{k}\wedge\overline{U_\rho}$

En remplaçant ce terme dans v :

$\overline{v} = Rw\overline{U_\theta} = Rw\overline{k}\wedge\overline{U_\rho} = w\overline{k}\wedge R\overline{U_\rho} = \overline{w}\wedge\overline{OM}$

⇒ Dans le cas d'une rotation pure : $\overline{v} = \frac{d\,\overline{OM}}{dt} = \overline{w}\wedge\overline{OM}$

$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(Rw\overline{U_\theta}) = R\frac{dw}{dt}\overline{U_\theta} + Rw\frac{d\overline{U_\theta}}{dt} = R\sigma\overline{U_\theta} - Rw^2\overline{U_\rho}$ avec w = $\frac{d\theta}{dt}$ et σ = $\frac{d^2\theta}{dt^2}$

D'autre part on a $\overline{v} = \overline{w}\wedge\overline{OM}$

⇒ $\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overline{w}\wedge\overline{OM}) = \frac{d\overline{w}}{dt}\wedge\overline{OM} + \overline{w}\wedge\frac{d\,\overline{OM}}{dt} = \overline{\sigma}\wedge\overline{OM} + \overline{w}\wedge(\overline{w}\wedge\overline{OM})$

6.Expression des grandeurs cinématiques dans la base de Serret-Frenet:

Le point M est défini par son abscisse curviligne sur la trajectoire (cercle) s(t) = R$\theta(t)$

$\Rightarrow \overline{v}$ = v.$\overline{T}$ avec v = $\frac{ds(t)}{dt}$

$v = \frac{ds(t)}{dt}$ = R $\frac{d\theta}{dt}$ = Rw

donc $\overline{v}$ = Rw$\overline{T}$ $\Rightarrow \overline{T} = \overline{U_\theta}$

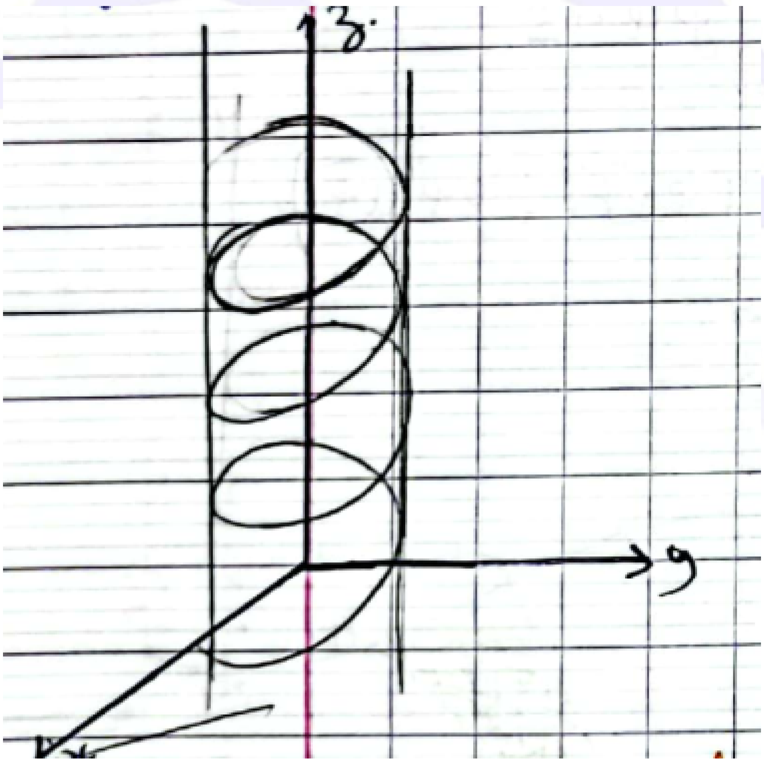
$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}$ (Rw$\overline{T}$) = R.$\frac{dw}{dt}\overline{T}$ + Rw$\frac{d\overline{T}}{dt}$ avec $\frac{d\overline{T}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overline{N}$

$\overline{a}$ = R.$\frac{dw}{dt}\overline{T}$ +Rw²$\overline{N}$

Par identification avec l'expression de $\overline{a}$ dans la base polaire : $\overline{N} = -\overline{U_\theta}$

7.Mouvement hélicoïdal:

C'est un mouvement composé d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation tel que la rotation se fait autour d'un axe z suivant lequel se fait la translation aussi :

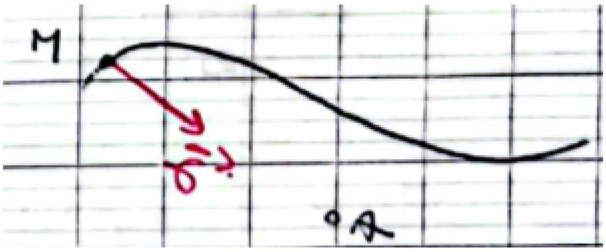


La trajectoire est une hélice enroulée sur un cylindre de rayon R et d'axe (oz).

IV- Mouvement à accélération centrale:

1.Définition et lois des aires:

Le mouvement d'un point M est à accélération centrale si son accélération $\overline{a}$(t) à tout instant passe par un point fixe (A) c'est à dire $\overline{a}$ et $\overline{AM}$ sont colinéaires mais de sens contraire donc : $\overline{AM} \wedge \overline{a} = \overline{0}$



Pour simplifier le problème on considère l'origine du repère avec ce point (A) d'où le vecteur position $\overline{OM} = \overline{AM}$ (O ≡ A) dans ce cas $\overline{OM} \wedge \overline{a} = \overline{0}$

Soit $\overline{C} = \overline{OM} \wedge \overline{v}$ (défini le plan du mvt)

$\frac{d\overline{C}}{dt} = \frac{d\overline{OM}}{dt} \wedge \overline{v} + \overline{OM} \wedge \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{v} \wedge \overline{v} + \overline{OM} \wedge \overline{a} = \overline{0}$

$\frac{d\overline{C}}{dt} = \overline{0} \Rightarrow \overline{C} = \overline{cst}$

⇒ $\overline{C}$ est perpendiculaire au plan du mouvement ($\overline{OM}$, $\overline{v}$) qui est $\overline{cst}$ d'où le point de mouvement est fixe (le mvt d'un point M se fait dans un plan fixe) d'où l'utilisation des coordonnées polaires tq :

$$\overline{OM} = \rho \overline{U_\rho}$$

$$\overline{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\overline{U_\rho} + \rho\frac{d\varphi}{dt}\overline{U_\varphi}$$

$$\overline{C} = \overline{OM} \wedge \overline{v} = (\rho\overline{U_\rho}) \wedge \left(\frac{d\rho}{dt}\overline{U_\rho} + \rho\frac{d\varphi}{dt}\overline{U_\varphi}\right) = \rho^2\frac{d\varphi}{dt}\overline{U_z}$$

$$\Rightarrow \|\overline{C}\| = C = \rho^2\frac{d\varphi}{dt} = cst$$

2.Formule de binet:

Pour déterminer les formules de binet nous introduisons la constante des aires dans les expressions de la vitesse et l'accélération:

$\overline{v} = \frac{d\rho}{dt}\overline{U_\rho} + \rho\frac{d\varphi}{dt}\overline{U_\varphi} \Rightarrow \|\overline{v}\| = \sqrt{\frac{d\rho}{dt}^2 + \left(\rho\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$

$\overline{a} = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\frac{d\varphi}{dt}^2\,\overline{U_\rho}$

soit $u = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{du}\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{-1}{u^2}\frac{d\varphi}{dt}\frac{du}{d\varphi} = -\rho^2\frac{d\varphi}{dt}\frac{du}{d\varphi} = -C\frac{du}{d\varphi}$ (avec $\frac{d\rho}{du} = \frac{-1}{u^2} = -\rho^2$)

$\rho^2\frac{d\varphi}{dt} = C \Rightarrow \rho\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{\rho} = u.C \rightarrow \overline{v} = -C\frac{du}{d\varphi}\overline{U_\rho} + C.u\,\overline{U_\varphi}$

⇒ 1ére formule de binet : $v^2 = c^2\left(u^2 + \frac{du}{d\varphi}^2\right)$

$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-C\frac{du}{d\varphi}\right) = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d}{d\varphi}\left(-C\frac{du}{d\varphi}\right) = -\frac{d\varphi}{dt}C\frac{d^2u}{d\varphi^2}$ avec $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{\rho^2} = u^2C$

$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -u^2C^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}$

$\rho\frac{d\varphi}{dt}^2 = \rho\left(\frac{C}{\rho^2}\right)^2 = \rho\frac{C^2}{\rho^4} = \frac{C^2}{\rho^3} = u^3C^2$ d'où :

⇒ 2éme formule de binet : $\overline{a} = u^2C^2\left(-\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right)\overline{U_\varphi}$