Analyse Asymptotique

1-Relations de comparaison : cas des fonctions

Soient 2 fonctions $f, g : I \to \Re$ et un point a $\in \bar{I}$. Nous supposerons ici que f et g sont deux fonctions qui ne s'annulent pas sur un voisinage de a privé de a.

Il s'agit ici de comparer les 2 fonctions au voisinage de a.

Pour cela, formons leur rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ et regardons ce qui se passe lorsque x $\to$ a.

3 cas intéressants se présentent alors :

- ☐ Cas 1 : $\frac{f(x)}{g(x)}$ est borné au voisinage de a On dira que f est dominé par g : $f = O(g)$
- ☐ Cas 2 : $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers a On dira que f est négligeable devant g : $f = o(g)$
- ☐ Cas 3 : $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 lorsque x tend vers a On dira que f et g sont équivalentes : $f \sim g$

1.1 La relation : "Est un grand O de ..."

Soit a $\in$ I et f et g deux fonctions définies sur l'intervalle I $\subset$ R ne s'annulant pas sur un voisinage de a privé de a.

Définition 1 : "Est un grand O de ..."

On dira que la fonction f est un grand O de la fonction g au voisinage du point a ssi

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ est bornée au voisinage de a privé de a.}$$

Notation : f(x) = O(g(x)) au voisinage de x_0.

Par abus de langage, on notera O(g) toute fonction étant un grand O de g au voisinage de a.

🚨 Lorsque f(x) = O(g(x)), on pourra dans un calcul remplacer f(x) par O(g(x)) mais pas O(g(x)) par f(x).

Remarque :

1. Lorsque f = O(g), on dit aussi que f est dominée par g. Mais cette terminologie prête à confusion…
2. La notation f = O(g) ne veut rien dire si l'on ne précise pas au voisinage de quel point on se trouve.
3. Ecrire f = O(1) au voisinage de a signifie que f est bornée au voisinage de a.

Exemple :

Si f(x) = $3x^5 - x^4 + 2x$ alors :

- f = O(x) au voisinage de 0.
- f = O(x^5) au voisinage de +∞ .

1.2 "Est négligeable devant ..."

Soit a ∈ I et f et g deux fonctions définies sur l'intervalle I ⊂ R ne s'annulant pas sur un voisinage de a privé de a.

Définition 2 : La relation : "Est négligeable devant ..."

On dira que la fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage du point a ssi

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Notation : f(x) = o(g(x)) ou parfois f(x) << g(x)

Par abus de langage, on notera o(g) toute fonction négligeable devant g au voisinage de a.

🚨 Lorsque f(x) = o(g(x)), on pourra dans un calcul remplacer f(x) par o(g(x)) mais pas o(g(x)) par f(x).

Remarque :

1. La notation f(x) = o(g(x)) ne veut rien dire si l'on ne précise pas au voisinage de quel point on se trouve.
2. f(x) = o(g(x)) signifie en gros que f(x) est beaucoup plus petit en valeur absolue que g(x) au voisinage de a.
3. Écrire f(x) = o(1) au voisinage de a signifie que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Exemple 1 :

Soit (p, q) ∈ N^2 . On a : x^p = o(x^q) au voisinage de 0 ⟺ p > q .

Exemple 2 :

Si f(x) = $3x^5 - x^4 + 2x$ alors :

f = o(x) au voisinage de 0 .

f = o(x^6) au voisinage de +∞ .

Proposition 1 : Lien entre les relations de comparaison

Si au voisinage d'un point a on a

f(x) = o(g(x)) alors f(x) = O(g(x)).

Théorème 2 : Comparaison des fonctions usuelles

Soient α, β, γ > 0 trois réels.

1. Comparaison ln et puissance :
   - en +∞ : $(lnx)^{\gamma}$ = o(x^{α})
   - en 0+ : $|lnx|^{\gamma}$ = o($\frac{1}{x^{\alpha}}$)
2. Comparaison puissance et exponentielle :
   - en +∞ : x^{α} = o($e^{\beta x}$)
   - en +∞ : x^{α} = o(a^{x}), lorsque a > 1
   - en −∞ : $e^{\beta x}$ = o($\frac{1}{x^{\alpha}}$), lorsque α ∈ N

Par transitivité, on en déduit que : en +∞ : $ln\beta x$ = o($e^{\alpha x}$) .

Le théorème précédent dit en gros la chose suivante :

”Aux bornes de leur intervalle de définition, les exponentielles l’emportent sur les fonctions puissance et les fonctions puissance l’emporte sur le logarithme.”

Proposition 3 : Opérations sur les relations de comparaisons

1) $f = o(g)$, $g = o(h) \Rightarrow f = o(h)$ cad (transitivité) idem avec O .

2) $f_1 = o(g)$, $f_2 = o(g) \Rightarrow f_1 + f_2 = o(g)$ cad $o(g) + o(g) = o(g)$ idem avec O .

3) $f_1 = o(g_1)$, $f_2 = o(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$ cad $o(g_1)o(g_2) = o(g_1 g_2)$ idem avec O .

4) $f = o(g) \Rightarrow h\, f = o(hg)$ cad $h o(g) = o(hg)$ idem avec O .

5) $f = o(\lambda g)$ $(\lambda \in \Re^*) \Rightarrow f = o(g)$ cad $o(\lambda g) = o(g)$ idem avec O.

1.3 La relation : ”Est équivalent à ...”

Définition et premières propriétés

Soit $a \in \bar{I}$ et f et g deux fonctions définies sur l’intervalle $I \subset R$ ne s’annulant pas sur un voisinage de a privé de a.

Définition : "Est équivalent à ...”

On dira que f et g sont équivalentes au voisinage du point a ssi :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Notation : $f(x) \sim_a g(x)$ ou f(x) ~ g(x) s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Proposition 4 : Caractérisation de l'équivalence de deux fonctions

On a au voisinage d'un point a :

$$f(x) \sim g(x) \Longleftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$$

Cela sera particulièrement utile lorsqu'on souhaitera remplacer une expression par un équivalent dans une égalité.

Remarque

1. Contrairement à l'intuition, il n'y a aucune implication entre $f(x) \sim g(x)$ et $f(x) - g(x) \underset{x \to a}{\to} 0$. Ces deux propriétés définissent des notions de proximité différentes.
2. Ne JAMAIS écrire que $f(x) \sim 0$ puisque la fonction nulle ne vérifie pas les conditions d'application de la définition.

Proposition 5 : La relation ~ est une relation d'équivalence sur $F(I, R)$

Elle est en particulier symétrique, c'est `a dire : si f est équivalente à g, g est alors équivalente à f.

On dira donc que f et g sont équivalentes.

Rq: On ne doit jamais donner un équivalent sous la forme d'une somme ! !

Proposition 6 : Lien entre les relations de comparaison

On se place au voisinage d'un point a.

1. Si f(x) ~ g(x) alors f(x) = O(g(x)).
2. Si f(x) ~ g(x)
   f(x) = o(α(x)) alors g(x) = o(α(x)).
3. Si f(x) ~ g(x)
   α(x) = o(f(x)) alors α(x) = o(g(x)).

Théorème : Les équivalents de références

Les limites usuelles en 0, nous donnent les équivalents suivants au voisinage de 0 :

- sin x ~ x
- arcsin x ~ x
- sh x ~ x
- tan x ~ x
- arctan x ~ x
- th x ~ x
- 1 − cos x ~ $\frac{x^2}{2}$
- 1 − ch x ~ − $\frac{x^2}{2}$
- ln(1 + x) ~ x
- $[e^x - 1]$ ~ x
- $(1 - x)^{\alpha} - 1$ ~ αx

Théorème : Les équivalents de références - Généralisation

Plus généralement, au voisinage de a lorsque $f(x) \underset{x \to a}{\to} 0$, on a :

- sin$f(x)$ ~ $f(x)$
- arcsin $f(x)$ ~ $f(x)$
- sh $f(x)$ ~ $f(x)$
- tan $f(x)$ ~ $f(x)$
- arctan $f(x)$ ~ $f(x)$
- th $f(x)$ ~ $f(x)$
- 1 − cos $f(x)$ ~ $\frac{f(x)^2}{2}$
- 1 − ch $f(x)$ ~ − $\frac{f(x)^2}{2}$
- ln(1 + $f(x)$) ~ $f(x)$
- $\left[e^{f(x)} - 1\right] \sim f(x)$
- $[(1 + f(x))^{\alpha} - 1]$ ~ α.$f(x)$

Proposition 9 : Calculs avec des équivalents

1. Si $f(x)\underset{x\to a}{\to} l$ et $l \neq 0$ alors $f \sim l$ en a.

2. Si $f_1 \to_a g_1$ et $f_2 \to_a g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\to} g_1 g_2$ et $f_1/f_2 \underset{a}{\to} g_1/g_2$

3. Soit α ∈ R.

Si $f \to_a g$ et f et g sont positives alors $f^{\alpha} \to_a g^{\alpha}$ (α est ici indépendant de x !).

Théorème : Cas du logarithme et de l'exponentielle

1. • Si $f \to_a g$

   $g(x)\underset{x\to a}{\to} l$, $l \in \Re^{+}\backslash\{1\}$

   ⇒ Alors $ln\, f \to_a ln\, g$

   • Si $f(x)\underset{x\to a}{\to} 1$

   ⇒ Alors $ln\, f(x) = ln(1 + (f(x) - 1)) \sim_a f(x) - 1$

2. • Si $f \to_a g$

   $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{\to} 0$

   ⇒ Alors $e^{f} \sim_a e^{g}$ (Rarement utilisé en pratique).

1.4 Applications des équivalents

Proposition 11 : Un équivalent donne une idée de l'allure de la courbe au voisinage d'un point

Soient deux fonctions f, g : $I \to$ R et a = 0 ou ± ∞ ∈ $\bar{I}$. Si au voisinage du point a, f ~ g alors, Cf et Cg ont la même allure.

Proposition 12 : Un équivalent donne localement le signe de la fonction

Soient deux fonctions f, g : I → R et un point a ∈ I. Si au voisinage du point a, f ~ g alors, il existe un voisinage V de a sur lequel f et g ont même signe.

Théorème Fondamental : Un équivalent donne la limite !

Soient deux fonctions f, g : I → R et un point a ∈ I.

Si - $f \to_a g$

- $g(x) \to_{x \to a} l$

⇒ Alors $f(x) \to_{x \to a} l$

1-Relations de comparaison : cas des Suites

L'objectif de cette partie est l'étude du comportement d'une suite en +∞ par comparaison à des suites plus simples.

2.1 La relation O : "est un grand O de ..."

Définition :

Soient deux suites (U_n) et (α_n) telle que α_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que la suite (U_n) est un grand O de la suite (α_n) et l'on note U_n = O(α_n)

lorsque : $\left(\frac{U_n}{\alpha_n}\right)$ est bornée.

Remarque:

$U_n = O(\alpha_n)$ se lit de la façon suivante : U_n est un grand "O" de α_n.

2.2 La relation o : "est négligeable devant ..."

Définition :

Soient deux suites (U_n) et (α_n) telle que α_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que la suite (U_n) est négligeable devant la suite (α_n) et l'on note $U_n = o(\alpha_n)$

$$\text{lorsque : } \frac{U_n}{\alpha_n} \to 0$$

Remarque:

$U_n = O(\alpha_n)$ se lit de la façon suivante : U_n est un petit "o" de α_n.

Remarque:

1. Écrire que : $U_n = O(1)$ est équivalent à dire que (U_n) converge vers 0.
2. Si $\alpha_n \to l \in R$ alors toute suite négligeable devant (α_n) converge vers 0 : $o(\alpha_n) \to 0$.

Proposition 14 : Calculs avec o .

🚨 Dans les égalités suivantes, le signe "=" signifie " ... est un ..." ou " ... peut s'écrire comme un ...".

1. Une combinaison linéaire de deux suites négligeables devant (α_n) est négligeable devant (α_n) :

$$\lambda.o(\alpha_n) + \mu.o(\alpha_n) = o(\alpha_n)$$

2. Une suite négligeable devant (αn) est dominée par (α_n) :

$$o(\alpha_n) = O(\alpha_n) \text{ mais } O(\alpha_n) \neq o(\alpha_n)$$

3. Le produit d'une suite (β_n) par une suite négligeable devant (α_n) est négligeable devant $(\beta_n.\alpha_n)$:

$$\beta_n . o(\alpha_n) = o(\beta_n . \alpha_n)$$

4. La notation o est transitive : si $a_n = o(b_n)$

$b_n = o(c_n)$

$\Rightarrow$ alors $a_n = o(c_n)$.

Théorème : Comparaisons de référence

1. Si $0 < \alpha < \beta$ alors $n^{\alpha} = o(n^{\beta})$ et $\frac{1}{n^{\beta}} = o(\frac{1}{n^{\alpha}})$
2. Si $0 < \alpha$ et $0 < \beta$ alors $(ln\, n)^{\beta} = o(n^{\alpha})$
3. Si $0 < \alpha$ et $0 < \beta$ alors $n^{\beta} = o(e^{\alpha n})$

et par transitivité :$(ln\, n)^{\beta} = o(e^{\alpha n})$

4. Si $1 < a$ et $0 < \beta$ alors $n^{\beta} = o(a^{n})$
5. Si $1 < a$ alors $a^{n} = o(n!)$
6. $n! = o(n^{n})$

2.3 La relation ~ : ”est équivalent à ...”

Définition : Suites équivalentes

Soient deux suites (U_n) et (α_n) telle que α_n ne s’annule pas à partir d’un certain rang. On dit que deux suites (U_n) et (α_n) sont équivalentes

(Notation : $U_n \sim \alpha_n$)

lorsque : $\dfrac{U_n}{\alpha_n} \to_{n\to+\infty} 1$

Remarque: Nous avons l'équivalence : $U_n \sim \alpha_n \Leftarrow\Rightarrow U_n - \alpha_n = o(\alpha_n)$

Proposition 16 : La relation "~" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites.

Proposition 17 :

1. Si $U_n \sim \alpha_n$ alors $U_n = O(\alpha_n)$ et $\alpha_n = O(U_n)$.
2. Si $U_n \sim V_n$ et $U_n = o(\alpha_n)$ alors $V_n = o(\alpha_n)$.

Théorème Fondamental: Un équivalent permet d'obtenir la limite d'une suite

Si $U_n \sim V_n$

$V_n \to l$, $l \in \overline{\mathfrak{R}}$, alors $U_n \to l$.

Théorème : Un équivalent simple permet d'obtenir le signe d'une suite

Si deux suites sont équivalentes : $U_n \sim V_n$ alors elles sont de même signe à partir d'un certain rang.

Théorème : Équivalents usuels

Soit (U_n) une suite telle que un 7→ 0 .

Alors :

1. $\sin U_n \sim U_n$
2. $\tan U_n \sim U_n$
3. $\text{sh } U_n \sim U_n$
4. $\text{th } U_n \sim U_n$
5. $\arcsin U_n \sim U_n$
6. $\arctan U_n \sim U_n$
7. $[1 - \cos U_n] \sim U_n^2 / 2$
8. $[1 - \text{ch } U_n] \sim -U_n^2 / 2$

9. $\ln(1 + U_n) \sim U_n$ 10. $[e^{U_n} - 1] \sim U_n$

11. $[(1 + U_n)^{\alpha} - 1] \sim \alpha.U_n$ lorsque $\alpha \in \Re^*$

Théorème 22 : Produit, quotient, puissance d'équivalents

Soient quatre suites (U_n), (a_n) et (V_n), (b_n) vérifiant $U_n \sim a_n$ et $V_n \sim b_n$ alors :

1. $U_n.V_n \sim a_n.b_n$
2. $\frac{U_n}{V_n} \sim \frac{a_n}{b_n}$ (si V_n et b_n ne s'annulent pas)
3. $U_n^{\alpha} \sim a_n^{\alpha}$ $\forall \alpha \in R$ (uniquement pour des suites à termes positifs lorsque $\alpha \notin Z$).

🚨 α est un réel qui ne doit pas dépendre de n.

Théorème : Logarithme et Exponentielle d'équivalents

Soient $(U_n), (a_n) \in \Re^N$, telles que : $U_n \sim a_n$:

- Si $U_n \to l \in \Re\backslash\{1\}$ alors $\ln U_n \sim \ln U_n$
- Si $U_n \to 1$ alors $\ln U_n = \ln(1 + (U_n - 1)) \sim U_n - 1$
- Si $U_n - a_n \to 0$ alors $e^{U_n} \sim e^{a_n}$