



TD Analyses asymptotique

Ex 1

Quels sont les équivalents corrects parmi les propositions suivantes?

1. $n \sim_{n \rightarrow +\infty} n + 1$
2. $n^2 \sim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n$
3. $\ln(n) \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(10^6 n)$
4. $e^n \sim_{n \rightarrow +\infty} e^{(n+10^{-6})}$
5. $e^n \sim_{n \rightarrow +\infty} e^{(2n)}$
6. $\ln(n) \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n + 1)$

Ex 2

Calculer les développements limités suivants :

(Somme et produit de DLs)

1. $\frac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0
2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0
3. $\sin(x) \cdot \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0
4. $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 en 0

(Quotient de DLs)

5. $\frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0
6. $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0

(Composition de DLs)

7. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0
8. $e^{\sin x}$ à l'ordre 4 en 0

Ex 3

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\frac{\sin x - x}{x^3}$ en 0
2. $\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x}$ en 0
3. $\frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}$ en 0
4. $\frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ en 0



Ex 4

On considère , pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln x = n$

1. Démontrer que cette équation admet une unique solution $x_n \in]0, +\infty[$, puis démontrer que la suite (x_n) est strictement croissante.

2. Démontrer que (x_n) tend vers $+\infty$.

3. Démontrer que $x_n \sim_{n \rightarrow +\infty} n$.

4. Démontrer que $x_n = n - \ln(n) + o(\ln(n))$.

5. Démontrer que $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln n}{n} + o(\frac{\ln n}{n})$.

6. En admettant éventuellement le résultat de la question précédente , dire parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

a. $x_n \sim_{n \rightarrow +\infty} n - \ln(n)$

b. $x_n \sim_{n \rightarrow +\infty} n - 2\ln(n)$

c. $x_n = n - \ln(n) + o(\sqrt{\ln n})$

d. $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln n}{n}$

easy ways