Conducteurs électrostatiques

I. Conducteurs électrostatiques chargés à l'équilibre

1. Introduction

a/ Champ électrostatique dans la matière neutre

Dans la matière neutre, à l'échelle microscopique il règne des champs très élevés. Mais, ces champs locaux prennent toutes les directions et valeurs possibles ; leur résultante est nulle. Donc, il n'y a pas de mouvement d'ensemble des particules chargées.

b/ Action d'un champ extérieur

Dans le cas d'un conducteur, les charges sont mobiles sous l'action d'un champ externe $\vec{E}$.

c/ Equilibre d'un conducteur

Définition : un conducteur (métallique, homogène et maintenu à température constante) est dit à l'équilibre électrostatique si toutes les charges sont macroscopiquement au repos.

2. Propriétés d'un conducteur à l'équilibre

- Le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre :

  En effet, toutes les charges sont au repos $\vec{F} = \vec{0}$ donc $\vec{E} = \vec{0}$ $\quad (\vec{F} = q\vec{E})$

- La distribution des charges électriques est surfacique :

Considérons un conducteur chargé à l'équilibre. En un point M à l'intérieur du conducteur, le champ $\vec{E}$ est nul : d'après le théorème de Gauss

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = 0.$$

A l'intérieur du conducteur, la densité volumique de charges est nulle : il y a autant de charges positives que de charges négatives.

Donc la charge du conducteur ne peut être que surfacique avec une densité σ

-

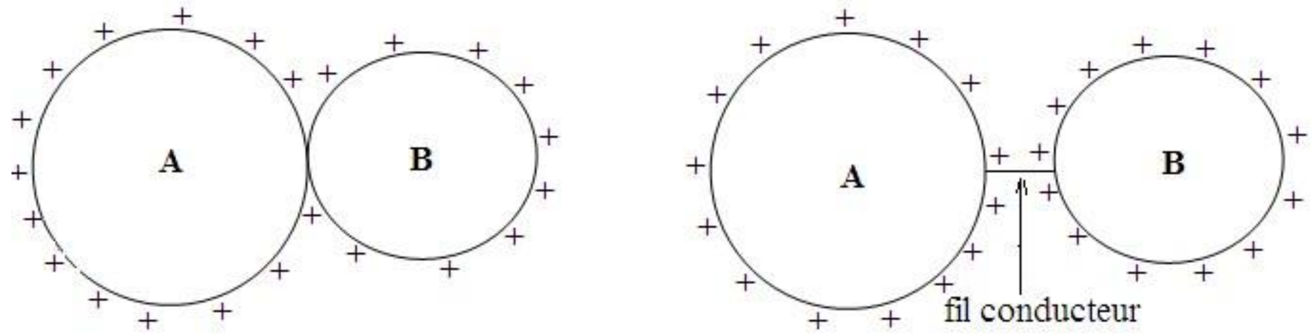
- Le potentiel est constant à l'intérieur et sur la surface du conducteur à l'équilibre : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = \vec{0} \Rightarrow V = cte.$

La surface du conducteur est donc une équipotentielle

$=>$ les lignes de champ sont normales à la surface du conducteur.

- Deux conducteurs en contact peuvent échanger les charges électriques entre eux :

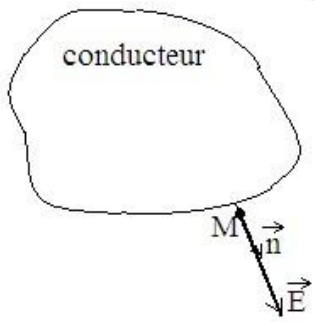
Soient deux conducteurs A et B, avec A chargé et B non chargé. On les met en contact (ou on les relie par un fil conducteur), l'ensemble A+B forme alors un seul et même conducteur.



La charge initiale sur A va se répartir sur la surface totale de A et B. Si l'on sépare les deux conducteurs, B aura pris une partie de la charge de A.

3. Champ au voisinage d'un conducteur à l'équilibre a/

Théorème de Coulomb :



Le champ $\vec{E}$ en un point M à l'extérieur du conducteur et très

prés de la surface est : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$, (Th. de Coulomb).

$\vec{n}$: vecteur unitaire de la normale à la surface du conducteur.

$\vec{E}$ est discontinu à la traversée d'une surface chargée.

b/ Pouvoir des pointes :

L'expérience montre que la densité de charges varie σ en sens inverse du rayon de courbure ρ de la surface du conducteur. Si le conducteur présente une pointe, rayon de courbure ρ est faible au niveau de cette pointe, donc la densité ρ élevée.

Le champ $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ sera intense et provoquera, au voisinage de la pointe, ionisation de l'air qui déchargera la pointe. Il est donc impossible de conserver la charge d'un conducteur muni de pointes (exemple : rôle des pointes au niveau des ailes d'un avion).

4. Capacité d'un conducteur à l'équilibre

Soit un conducteur à l'équilibre portant la charge Q et de potentiel V. Par définition la capacité d'un conducteur isolé à l'équilibre est le cœfficient :

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \text{(toujours positif).}$$

C s'exprime en farad (F) ; on emploie les sous multiples de F :

$$1\mu F = 10^{-6}\ F\ ; \quad 1nF = 10^{-9}\ F\ ; \quad 1pF = 10^{-12}\ F.$$

C ne dépend que des caractéristiques géométriques du conducteur (forme, dimensions).

5. Energie d'un conducteur

L'énergie d'un conducteur est le travail qu'il faut fournir pour charger le conducteur d'une façon réversible (réversible : on passe d'un état d'équilibre à un autre infiniment voisin).

On montre que cette énergie W peut s'écrire : $W=\frac{1}{2}*Q*V$

Or $Q = CV \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

II. Systèmes de conducteurs à l'équilibre : influence électrostatique

1. Introduction

Etant donné un système de conducteurs placés dans le vide, ils agissent par influence les uns sur les autres ; on obtient un état d'équilibre tel que le champ à l'intérieur de chacun des conducteurs soit nul.

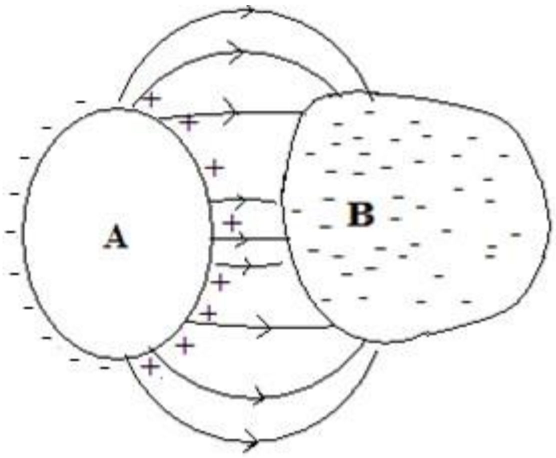
Dans le cas d'un système de conducteurs à l'équilibre, on cherche à déterminer le potentiel et les charges de ces conducteurs ainsi que la répartition des charges à la surface de chacun d'eux.

2. Phénomène d'influence

a/ Influence subie par un conducteur isolé

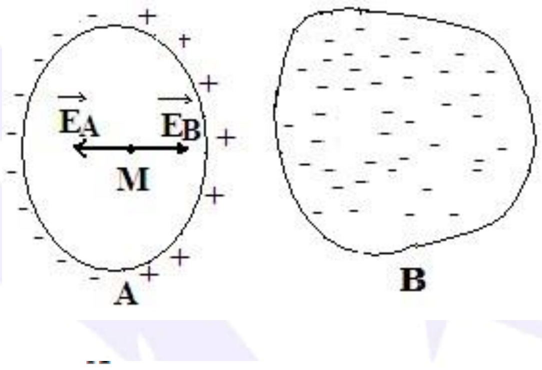
Supposons un conducteur A isolé ne portant aucune charge ; $Q=0 \Rightarrow V=0$ et

$E = 0$ en tout point de A. Approchons de A un corps B chargé négativement. On constate l'apparition de charges positives sur la partie de A proche de B et des charges négatives sur la partie éloignée. On dit que le conducteur A est influencé par B.



Explications :

Lorsqu'on rapproche le corps B du conducteur A, en un point M à l'intérieur de A règne un champ $\vec{E}_B$ créé par la charge de B. Or en M le champ est nul (conducteur A à l'équilibre) ; donc, les charges de A se répartissent de manière à créer en M un champ $\vec{E}_A$ tel que $\vec{E}_A + \vec{E}_B = \vec{0}$.



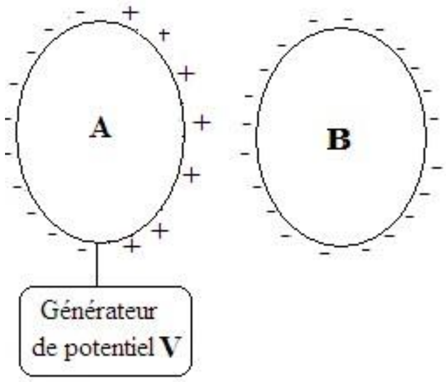
A étant isolé, sa charge totale reste constante et égale à sa charge initiale $\Rightarrow (-q) + (+q) = 0$.

Conclusion : Pour un conducteur isolé, les phénomènes d'influence ne modifient pas sa charge totale mais la répartition de cette charge sur sa surface, donc son potentiel.

Remarque : si le corps B est conducteur il subit l'influence de A ; il y a influence réciproque (mutuelle).

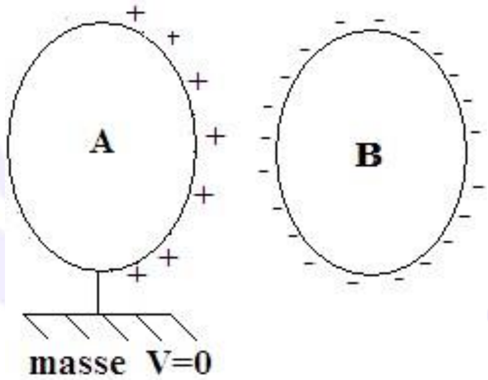
b/ Influence subie par un conducteur maintenu à un potentiel constant

Le conducteur A, initialement neutre, est maintenant relié à un générateur qui maintient son potentiel à la valeur V. Un conducteur B chargé négativement est placé à son voisinage.



Les phénomènes d'influence entraînent une modification de la charge de A alors que son potentiel reste constant.

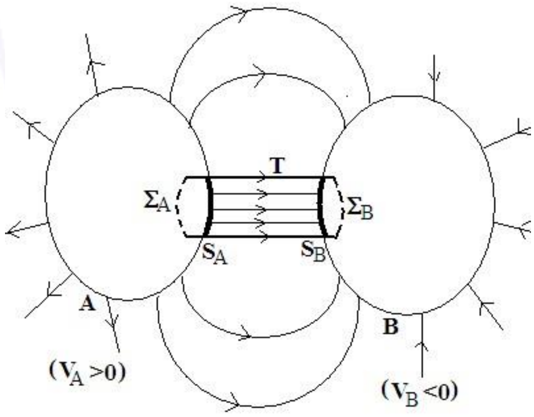
Si on remplace le générateur de potentiel V par la terre (de potentiel nul), le conducteur A forme dans ce cas un seul conducteur avec la terre. Les charges - sont absorbées sur la terre (la masse) alors que les charges + sont maintenues par influence sur la partie de la surface de A proche de B.



Si on coupe la liaison de A avec le sol, la charge positive se répartis sur toute la surface de A. Le conducteur A a ainsi acquis une charge positive. La charge de B n'a pas changée. C'est une méthode pour charger un corps par influence.

c/ Théorème des éléments correspondants

Considérons une surface fermée constituée du tube de champ T s'appuyant sur S_A et S_B, et fermée par des surfaces quelconques Σ_A et Σ_B. Soient q_A et q_B les charges portées par S_A et S_B respectivement. Supposons les deux conducteurs avec les potentiels $V_A>0$ et $V_B<0$.



Le flux sortant de cette surface fermée est nul car :

- Aucun flux ne sort de la paroi latérale du tube de champ T

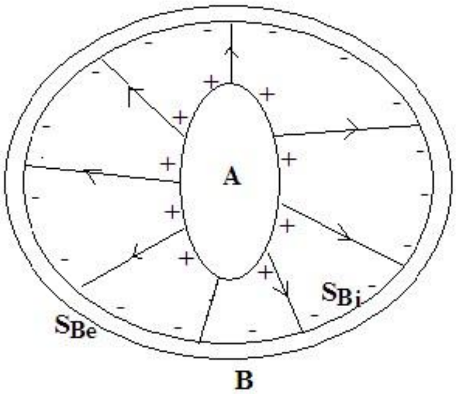
Or, d'après le théorème de Gauss, $\Phi_{\vec{E}/T} + \Phi_{\vec{E}/\Sigma_A} + \Phi_{\vec{E}/\Sigma_B} = \dfrac{\Sigma q_{int}}{\Sigma_0}$,

d'où $0 = \dfrac{q_A + q_B}{\Sigma_0} \Rightarrow q_A = -q_B$

Théorème : Les surfaces découpées par un même tube de champ sur deux conducteurs sont appelées éléments correspondants (S_A et S_B) et portent des charges opposées.

d/ Influence totale

On dit que l'influence entre deux conducteurs est totale si l'un des conducteurs entoure totalement l'autre.



Supposons que le conducteur A porte une charge positive q_A. Toutes les lignes de forces issues de A arrivent sur la surface interne S_{Bi} de B.

D'après le théorème des éléments correspondants, il apparaît sur S_{Bi}, par influence de A, une charge $q_{Bi} = - q_A$.

Sur la surface externe S_{Be} de B, apparaît une charge q_{Be} qui dépend de la charge initiale q_0 de
B et de l'état de B (isolé = charge constante, ou maintenu à V constant).

- Si le conducteur B est relié au sol, $V_B = 0$ et $q_{Be} = 0$ (toutes les charges non retenues par influence sont absorbées par le sol).

- Si le conducteur B est isolé, $V_B = 0$ et $q_{Be} = q_0 + q_A$.

La répartition de q_{Be} sur la surface externe de S_{Be} de B est indépendante de la position de A, alors que la répartition de q_{Bi} sur la surface interne S_{iB} de B dépend de la position de A.

A l'intérieur de A et de B, le champ est nul et le potentiel est constant (propriétés des conducteurs à l'équilibre).

3. Capacités et cœfficients d'influence d'un système de conducteurs à l'équilibre électrostatique

Soient n conducteurs en équilibre, avec V_i est le potentiel du conducteur i de charge Q_i. On montre que, lorsqu'il y a influence, les charges sont proportionnelles aux potentielles des conducteurs :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \dots + C_{1n}V_n$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \dots + C_{2n}V_n$$

$$\dots .$$

$$Q_n = C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 + \dots + C_{nn}V_n$$

C_{ij} (i diffèrent de j) sont les cœfficients d'influence entre les conducteurs i et j, avec $C_{ij} = C_{ji} < 0$ (l'influence est mutuelle ou réciproque et les coefficients d'influence sont toujours négatifs).

Les cœfficients C_{11}, C_{22}, …, C_{nn} sont les capacités des conducteurs 1, 2, …, n en présence des autres conducteurs. C_{ii} est toujours positif ($C_{ii} > 0$).

Remarque : la capacité C_{ii} du conducteur i en présence des autres conducteurs est différente de sa capacité C_{ii} lorsqu'il est seul.

III Condensateurs

1. Définitions

Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs A_1 et A_2 en influence totale. Les deux conducteurs sont appelés armatures du condensateur.

L'armature interne est portée au potentiel V_1 et porte la charge Q_1. L'armature externe de potentiel V_2 porte la charge Q_2 dont une parie $-Q_1$ sur la face interne.

On a :

- $Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$
- $Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$

avec $C_{12} = C_{21} < 0$

Si on porte le conducteur externe à la masse ($V_2 = 0$), on aura : $\begin{cases} * \ Q_1 = C_{11}V_1 \\ * \ Q_2 = C_{21}V_1 = -Q_1 \end{cases}$ Les charges sur la face externe du conducteur 2 sont absorbées par le sol et les charges sur la face interne sont maintenues par l'influence du conducteur 1, d'où $Q_2 = - Q_1$.

Donc $C_{11} = -C_{21} = -C_{12} = C$ (valable même pour $V_2 <> 0$).

D'une manière générale (pour $V_2 <> 0$), on a :

- $Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C(V_1 + V_2)$
- $Q_2 = -CV_1 + C_{22}V_2 = -Q_1 + Q_e$

avec $Q_e = (C_{22} - C)V_2$.

La charge de l'armature interne Q_1 est la charge du condensateur. C est la capacité du condensateur.

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\text{charge de l'armature interne}}{\text{ddp aux bornes du condensateur}}.$$

Si on relie les deux armatures par un fil conducteur, $+Q_1$ et $-Q_1$ se neutralisent par un courant qui circule dans le fil (déplacement des charges) jusqu'à ce que les potentiels de A_1 et A_2 prennent la même valeur V_2. On dit que le condensateur s'est déchargé. Il reste alors Q_e sur la face externe de A_2.

En général A_2 est relié au sol $=> V_2 = 0$ et $Q_e = 0$, mais si $V_2 <> 0$, on a toujours $Q_e << Q_1$.

2. Calcul de capacités

La capacité d'un condensateur est donnée par : $C = \dfrac{Q}{V_1 - V_2}$,

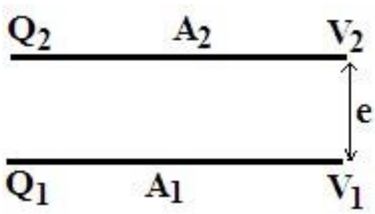
Q est la charge du condensateur ; $Q = \iint_S \sigma dS$.

$V_1 - V_2$ est la différence de potentiel entre les armatures.

$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dl}$, c'est la circulation de $\vec{E}$ d'une armature à l'autre.

a/ Condensateur plan :

Il est constitué de deux conducteurs plans infinis (armatures inférieure A_1 et supérieure A_2) séparés d'une distance e, portant les charges Q_1 et Q_2 et portés aux potentiels V_1 et V_2.



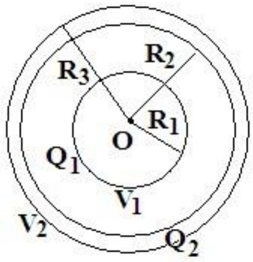
Il y a influence totale entre les deux plans

Entre les armatures, le champ $\vec{E}$ est uniforme :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}.$$

Remarque : dans la pratique les armatures sont de dimensions finies, le champ $\vec{E}$ est perturbé par les effets de bord. On utilise un anneau de garde pour éliminer ces perturbations.

b/ Condensateur sphérique



L'armature interne A_1 est la sphère (O, R_1), la face interne de l'armature externe A_2 est la sphère (O, R_2) et la face externe de A_2 est en général sphérique (mais elle peut être de forme quelconque).

En un point M entre les armatures, le champ est donné par :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2} \quad \text{(th. de Gauss)}, \qquad \text{avec } R_1<r<R_2$$

$$\int_{A_1}^{A_2}\vec{E}.\vec{dl} = -\int_{V_1}^{V_2} dV = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

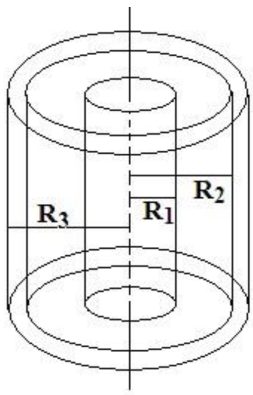
d'où
$$C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$$

Remarque : Si la distance $e = R_2 - R_1$ entre armatures devient très faible $(e \ll R_1 < R_2)$, on a $R_2 = R_1 + e$

D'où
$$C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1(R_1+e)}{e} \approx 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1^2}{e} = \varepsilon_0\frac{S}{e},$$

S étant la surface de l'armature interne.

c/ Condensateur cylindrique



L'armature interne A_1 est un cylindre de rayon R_1 et d'axe D, la face interne de l'armature externe A_2 est le cylindre (D,R_2), sa face externe peut être quelconque (mais elle est cylindrique en générale).

La longueur du condensateur est infinie (pour éviter les effets de bord) mais on calcule la capacité d'une portion de hauteur h, portant la charge Q.

Entre les armatures d'une portion du condensateur de hauteur h, portant la charge Q,

$$E2\pi rh = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$, r est le rayon du cylindre fermé de Gauss ($R_1 \leq r \leq R_2$)

$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{E}.\vec{dl} = -\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{dr}{r} \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\mathrm{Log}\frac{R_2}{R_1}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\mathrm{Log}\frac{R_2}{R_1}}$$

Cas particulier :

Si $R_2 - R_1 = e << R_1 \Rightarrow \frac{e}{R_1} << 1 \Rightarrow \mathrm{Log}\frac{R_2}{R_1} = \mathrm{Log}\frac{R_1+e}{R_1} = \mathrm{Log}\left(1+\frac{e}{R_1}\right) \approx \frac{e}{R_1}$

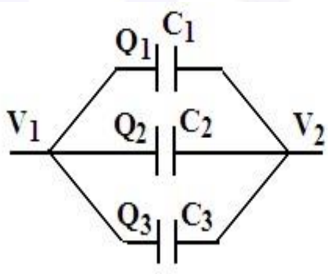
$$C = 2\pi\varepsilon_0 h\frac{R_1}{e} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

$S = 2\pi hR_1$: surface de l'armature interne A_1

3. Associations de plusieurs condensateurs

Un condensateur est caractérisé par sa capacité et la différence de potentiel maximum qu'il peut supporter. L'association de plusieurs condensateurs permet de réaliser soit une capacité plus grande, soit un ensemble capable de supporter des ddp plus élevées.

a/ Groupement en parallèle



Tous les condensateurs ont la même ddp à leurs bornes. Les armatures internes sont reliées ensemble, et de même pour les armatures externes.

$V = V_1 - V_2$ et $Q_1 = C_1V$, $Q_2 = C_2V$, $Q_3 = C_3V$.

Le groupement porte la charge :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

Ce groupement est équivalent à un condensateur de capacité C telle que :

$$Q = C(V_1 - V_2) = (C_1 + C_2 + C_3)(V_1 - V_2)$$

d'où $C = C_1 + C_2 + C_3$.

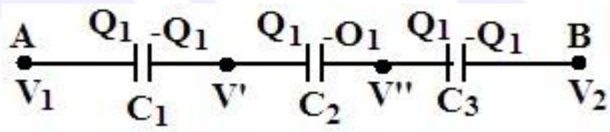
L'association de n condensateurs permet de réaliser un condensateur équivalent de capacité C égale à : $C = \sum_{i=1}^{n} C_i$

Remarque :

Le groupement en parallèle permet d'obtenir une capacité plus grande, la ddp supportée par chaque condensateur étant inchangée.

b/ Groupement en série

L'armature interne de l'un des condensateurs est reliée à l'armature externe du condensateur suivant.



L'ensemble étant initialement non chargé. Exerçons entre A et B la ddp V_1-V_2, l'armature interne du condensateur 1 portée à V_1 prend une charge Q_1 et, par influence, développe une charge $-Q_1$ sur l'armature externe du même condensateur.

L'ensemble, armature externe du condensateur 1 et armature interne du condensateur 2, forme un seul conducteur de charge totale nulle, d'où l'apparition de $+Q_1$ sur la face interne du condensateur 2 et par influence, la face externe du conducteur 2 prend la charge $-Q_1$, et ainsi de suite…

Donc tous les condensateurs portent la même charge que Q_1.

La ddp entre A et B :

$$V_1 - V_2 = (V_1 - V') + (V' - V'') + (V'' - V_2) = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_1}{C_2} + \frac{Q_1}{C_3}$$

Le condensateur équivalent au groupement a une capacité C telle que :

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{C} = Q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

D'où $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$

Remarque : ce groupement permet d'augmenter la ddp totale V_1-V_2 en la divisant en fraction supportable par chaque élément.