Suites numérique

Définition

Une suite $(U_n) \in N$ est dite

- **stationnaire (ou constante) à partir d'un certain rang n_0 si :** $\exists\ n_0 \in N : \forall\ n \in N, n \geqslant n_0 \Rightarrow U_{n+1} = U_n$.
- **périodique si :** $\exists\ n_0 \in N^* : \forall\ n \in N, U_{n+n0} = U_n$.
- **arithmétique de raison r si :** $\forall\ n \in N, U_{n+1} = U_n + r$ **et alors** $U_n = U_0 + n.r$.
- **géométrique de raison q si :** $\forall\ n \in N, U_{n+1} = q \times U_n$ **et alors**
- $U_n = U_0 \times q^n$.
- **majorée si :** $\exists\ M \in \Re : \forall\ n \in N, U_n \leqslant M$.
- **minorée si :** $\exists\ m \in \Re : \forall\ n \in N, U_n \geqslant m$.
- **bornée si :** $\exists\ m \in \Re, \exists\ M \in \Re : \forall\ n \in N, m \leqslant U_n \leqslant M$ **et de façon équivalente :** $\exists\ M \geqslant 0 : \forall\ n \in N, |U_n| \leqslant M$.
- **croissante si :** $\forall\ n \in N, U_n \leqslant U_{n+1}$.
- **strictement croissante si :** $\forall\ n \in N, U_n < U_{n+1}$.
- **décroissante si :** $\forall\ n \in N, U_n \geqslant U_{n+1}$.
- **strictement décroissante si :** $\forall\ n \in N, U_n > U_{n+1}$.
- **monotone (resp. strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou décroissante).**
- **convergente s'il existe $l \in$ R tel que** $\forall\ e > 0, \exists\ n_0 \in N :$

$$\forall\ n \in N, n \geqslant n_0 \Rightarrow |U_n - l| < e .$$

- **divergente si elle n'est pas convergente.**
- **divergente vers $+\infty$ si :** $\forall\ M > 0, \exists\ n_0 \in N : \forall\ n \in N, n \geqslant n_0 \Rightarrow U_n > M$.
- **divergente vers $-\infty$ si :** $\forall\ M > 0, \exists\ n_0 \in N : \forall\ n \in N, n \geqslant n_0 \Rightarrow U_n < -M$

Définition

Si $(U_n) \in N$ est une suite réelle, on appelle suite extraite ou sous-suite de $(U_n) \in N$ tout suite $(V_n) \in N$ de la forme

$$V_n = U_{\varphi}(n),\ \forall\ n \in N$$

où $\varphi : N \rightarrow N$ est une application strictement croissante.
(Exemple : $(U_{2n}) \in N$, $(U_{2n+1}) \in N$, $(U_{n+3}) \in N$ ...)

Corollaire 0.1

Si une suite $(U_n) \in N$ admet deux sous-suites (ou plus !) convergeant vers des limites distinctes alors la suite $(U_n) \in N$ ne converge pas.

Suite adjacente

a.Definition:

Deux suites $(U_n) \in N$ et $(V_n) \in N$ sont dites adjacentes si

1. $\forall\ n \in N, U_n \leqslant V_n$.
2. $(U_n) \in N$ est croissante.
3. $(V_n) \in N$ est décroissante.
4. $(V_n - U_n) \in N$ converge vers 0.

b.Théorème : Deux suites adjacentes convergent et ce vers une même limite.

Théorème (Limites et fonctions continues)

Soient f : I ⊂ $\Re \to \Re$ une fonction et $(U_n) \in N$ une suite dont tous les termes appartiennent à I . Si $(U_n) \in N$ converge vers un réel l et si f est continue en l alors

$$\lim_{n \to +\infty} f(U_n) = f(l).$$

Proposition 0.1 (Comparaison de suites convergentes)

Soient $(U_n) \in N$ et $(V_n) \in N$ deux suites réelles convergentes telles que

$$\exists\ \mathbf{N} \in N : \forall\ n \in N, n \geqslant \mathbf{N} \Rightarrow V_n \leqslant U_n,$$

alors on a

$$\lim_{n \to +\infty} V_n \leqslant \lim_{n \to +\infty} U_n .$$

Proposition 0.2 (Suite géométrique)

On fixe un réel a. Soit $(U_n) \in N$ une suite de terme général $U_n = a^n$. Alors on a le résultat suivant :

1. Si a = 1, alors $(U_n) \in N$ converge vers 1.
2. Si a > 1 alors $(U_n) \in N$ diverge vers +∞.
3. Si −1 < a < 1, alors $(U_n) \in N$ converge vers 0.
4. Si a ⩽ −1 alors $(U_n) \in N$ diverge en ayant aucune limite.

Proposition 0.3 (Série géométrique)

On fixe un réel a, a ≠ 1. En notant

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \ldots\ldots + a^n = \frac{1-a^{n-1}}{1-a} .$$

Théorème (Théorème des gendarmes)

Soient (a_n) , (b_n) et (c_n) $n \in N$ trois suites réelles telles que $\forall\ n \in N$, $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. Si (a_n) et (c_n) convergent vers un même réel l alors (b_n) converge aussi vers l .

Corollaire 0.2

On considère (U_n) et (V_n) $n \in N$ deux suites réelles telles que

1. $\forall\ n \in N$, $|U_n| \leqslant |V_n|$.
2. $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$. Alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$.

Corollaire 0.3

On considère (U_n) $n \in N$ et (V_n) $n \in N$ deux suites réelles telles que

1. (U_n) $n \in N$ est bornée.
2. $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} U_n . V_n = 0$.

Proposition 0.4

Soit (U_n) $n \in N$ une suite à termes non nuls et telle que

$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = q$.

Si $q < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$.

Suite récurrente

a.Définition

Soit I un intervalle de $\Re$ et f : I → I une application.

Toute suite définie par

- U_0 donné dans I

- $U_{n+1} = f(U_n)$, $\forall\ n \in N$,

est appelée suite récurrente.

b.Théorème

Soit I un intervalle de $\Re$ et f : I → I une application continue sur I. Si la suite récurrente (un) n∈ N définie par

- U_0 **donné dans I**
- $U_{n+1} = f(U_n)$, $\forall\ n \in N$,,

converge vers $l \in$ I, alors l est solution dans I de l'équation f(l) = l .