Ensembles . Applications . Relations

I. Ensembles:

a.définition:

● On appelle **élément** d'un ensemble E tout objet qui appartient à E.

● Si E et F sont deux ensembles, on dit que E est une **partie** de F, que E est un **sous-ensemble** de F, ou encore que EE est **inclus** dans F si tout élément de E est aussi élément de F. On note $E \subset F$.

● Il existe un unique ensemble qui ne contient aucun élément, l'**ensemble vide**. Il est noté $\varnothing$.

● Un ensemble peut être écrit en extension, c'est-à-dire que l'on donne la liste de tous ses éléments, ou en compréhension, c'est-à-dire que l'on définit cet ensemble par une propriété. Par exemple, $A=\{2,3,4,5\}$ est défini en extension, et $B=\{n \in N;\ 2 \leq n < 6\}$ est défini en compréhension. Remarquons que A=B.

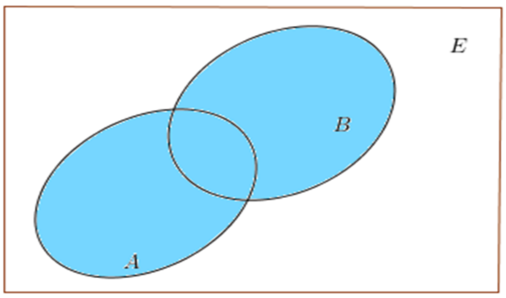
b. l'ensemble P(E):

● L'ensemble des parties de E est lui-même un autre ensemble, appelé **ensemble des parties** et noté P(E).

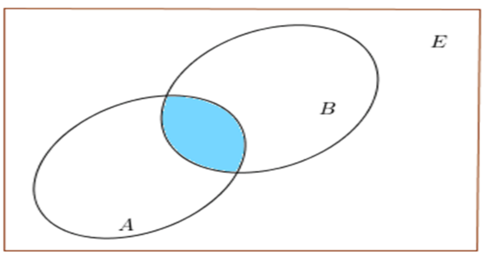
c.Les opérations dans P(E):

· ● Étant donné un ensemble E et deux parties A et B de E, on peut définir :

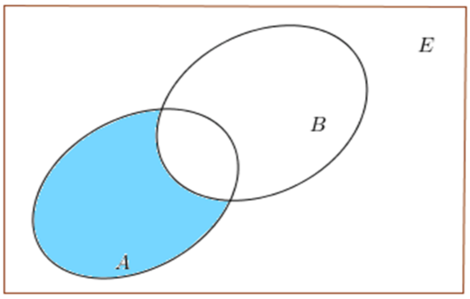
* la **réunion** de A et B, noté $A \cup B$. $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.



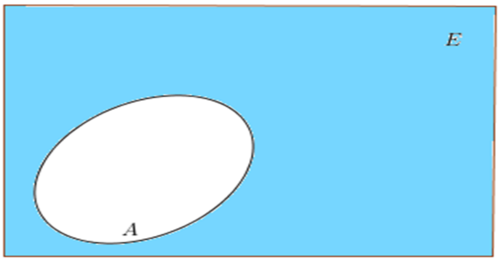
* l'**intersection** de A et B, noté $A \cap B$. $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B



* la **différence** $A \setminus B$: $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans A, mais pas dans B.



*le **complémentaire** de A dans E, noté $\overline{A}$, ou CEA, ou $E \setminus A$, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.



c.Le produits cartésiens:

*Si A et B sont deux ensembles, le **produit cartésien** de A et B, noté $A \times B$, est l'ensemble constitué de tous les couples (a,b), où a est un élément de A et b est un élément de B.

II. Applications:

a.définition:

- Soit E et F deux ensembles. Une **application** ou **fonction** de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. L'ensemble des applications de E dans F est noté F(E,F), ou FEFE. On appelle **graphe** de l'application $f:E \to F$ la partie Γ de $E \times F$ définie par $\Gamma=\{(x,f(x));\ x \in E\}$.

b.exemples géneraux:

*** Application caractéristique de A:**

Si A est une partie de E, la **fonction indicatrice de A**, notée 1A, est la fonction définie par $1A(x)=\{\ 1 \text{ si } x \in A \text{ sinon } 0\}$

*** Application identique de E:**

Si E est un ensemble, la fonction identité de E est la fonction Id_E, définie de E dans E par $Id_E(x)=x$

*** La Restriction:**

Si f est une fonction de E dans F, on appelle restriction de f à A, et on note $f_{|A}$ la fonction définie sur A par $f_{|A}(x)=f(x)$.

*** Composé de deux applications:**

Si E, F et G sont 3 ensembles et si $f:E\to F$ et $g:F\to G$ sont deux applications, on appelle application composée de f et g l'application notée $g\circ f:E\to G$ définie par la formule $g\circ f(x)=g(f(x))$.

c.Injection, surjection, bijection:

Soit $f:E\to F$ une application. On dit que f est

- injective si, pour tout $y\in F$, l'équation $y=f(x)$ admet au plus une solution $x\in E$;
- surjective si, pour tout $y\in F$, l'équation $y=f(x)$ admet au moins une solution $x\in E$;
- bijective si, pour tout $y\in F$, l'équation $y=f(x)$ admet exactement une solution $x\in E$.

- Souvent pour démontrer que f est, ou n'est pas, injective, on utilise la caractérisation suivante : $f:E\to F$ est injective si, et seulement si, pour tout couple $(x,x')\in E^2$, si $f(x)=f(x')$, alors $x=x'$.
- La composée de deux injections est une injection; la composée de deux surjections est une surjection; la composée de deux bijections est une bijection.
- Si $f:E\to F$ est une bijection, il existe une unique application notée f^{-1}, définie de F dans E, telle que $f\circ f^{-1}=Id_F$ et $f^{-1}\circ f=Id_E$. f^{-1} est appelée fonction réciproque de f. On a $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$.
- Si $f:E\to F$ et $g:F\to G$ sont bijectives, alors $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

d. Image d'un ensemble par une application:

- **Si f est une application de E dans F et si A est une partie de E, on appelle image directe de A par f l'ensemble**

$f(A)=\{f(x);\ x\in A\}$. Ainsi, $y\in f(A)\Leftrightarrow\exists x\in A,\ y=f(x)$.

- **Si f est une application de E dans F et si B est une partie de F, on appelle image réciproque de BB par f l'ensemble $f^{-1}(B)=\{x\in E;\ f(x)\in B\}$. Ainsi, $x\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow f(x)\in B$**

III. Relations:

a.Relation d'equivalance:

- **On appelle relation binaire sur un ensemble EE la donnée d'une partie Γ de E×E. On dit que x est en relation avec y et on écrit xRy lorsque $(x,y)\in\Gamma$.**
- **On dit que la relation R est**
  - **réflexive si, pour tout $x\in E$, xRx.**
  - **symétrique si, pour tous $x,y\in E$, si xRy, alors yRx.**
  - **anti-symétrique si, pour tous $x,y\in E$, si xRy et yRx, alors x=y.**
  - **transitive si, pour tous $x,y,z\in E$, si xRy et yRz, alors xRz.**
- **Une relation d'équivalence est une relation réflexive, symétrique, transitive.**
- **Si R est une relation d'équivalence et x est un élément de E, on appelle classed'équivalence de xx l'ensembledes éléments y de E tels que xRy.**

Théorème : Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence R. Alors les classes d'équivalence pour R forment une partition de E.

b. Relation d'orde:

- **Une relation d'ordre est une relation réflexive, anti-symétrique, transitive.**
- **Si $<$ est une relation d'ordre sur E, alors**

- on dit que l'ordre est total si on peut toujours comparer deux éléments de E : pour tous $x,y \in E$, on a $x \prec y$ ou $y \prec x$. Dans le cas contraire, on dit que l'ordre est partiel.

- si A est une partie de E et M est un élément de E, on dit que M est un majorant de A si, pour tout $x \in A$, on a $x \prec M$.