TD nombres complexes

EX 1:

Soit Z un nombre complexe non nul, de forme algébrique Z=x+iy.

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$\textbf{1. } z_1 = \frac{\bar{z}}{z} \qquad \textbf{2. } z_2 = \frac{iz}{\bar{z}}.$$

EX 2:

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues les nombres complexes z1 et z2 :

1) $\begin{cases} 2z_1 - z_2 & = & i \\ -2z_1 + 3iz_2 & = & -17 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3iz_1 + iz_2 & = & i+7 \\ iz_1 + 2z_2 & = & 11i \end{cases}$

EX 3 :

On se propose dans cet exercice de déterminer toutes les fonctions f:C→C vérifiant les trois propriétés suivantes :

a)∀z∈R, f(z)=z.

b)∀(z,z′)∈C2, f(z+z′)=f(z)+f(z′).

c)∀(z,z′)∈C2, f(z×z′)=f(z)×f(z′).

1-Vérifier que les fonctions définies par f(z)=z et f(z)=$\bar{z}$ sont solutions du problème.

2-Réciproquement soit f une fonction du problème.

2*1-Démontrer que f(i)=i ou f(i)=−i.

2*2-On suppose que f(i)=i. Démontrer que, pour tout z∈C, f(z)=z.

2*3- On suppose que f(i)=−i. Démontrer que, pour tout z∈C, f(z)=$\bar{z}$

3- Qu'a-t-on démontré dans cet exercice?

EX4 :

Soient z et z′ deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$.

Démontrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel, et préciser son module.