Methode: complexe

Mise sous forme trigonométrique d'un complexe

Pour mettre sous forme trigonométrique un complexe $z=a+ib$, on met en facteur le module $\sqrt{a^2+b^2}$, puis on cherche un angle θ tel que

$$\begin{cases} \cos\theta & = & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta & = & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

- Pour trouver θ, on peut s'aider du cercle trigonométrique
- Pour mettre sous forme trigonométrique la somme de deux nombres complexes de même module, on factorise par l'angle moitié :

$$re^{i\alpha}+re^{i\beta}=re^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)=2r\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Attention! $\cos((\alpha-\beta)/2)$ n'est pas nécessairement positif, on n'a pas toujours automatiquement la forme trigonométrique. Dans le cas où ce réel est négatif, il faut faire un décalage d'angle de π

Calcul de la puissance d'un nombre complexe

- Pour calculer la puissance d'un nombre complexe, on l'écrit sous forme trigonométrique

Racine carrée d'un nombre complexe

Si $w=x+iy$, on cherche les solutions de $z^2=w$ avec $z=u+iv$ en écrivant que :

$$\begin{cases} \Re e(z^2) & = & \Re e(w) \\ \Im m(z^2) & = & \Im m(w) \\ |z|^2 & = & |w| \end{cases} \iff \begin{cases} u^2-v^2 & = & x \\ 2uv & = & y \\ u^2+v^2 & = & \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

La première et la dernière équation donnent u et v au signe près, la seconde donne le signe du produit uv, donc les deux racines souhaitées

Racine n-ième d'un nombre complexe

Pour calculer la racine n-ième d'un nombre complexe, c'est-à-dire pour résoudre l'équation $z^n=a$ avec $a\neq 0$,

on commence par mettre a sous forme trigonométrique, $a = re^{i\theta}$
on utilise le théorème qui nous dit qu'alors les solutions sont les nombres complexes $r^{1/n}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, avec $k = 0, \ldots, n-1$.

Applications des nombres complexes à la trigonométrie

Pour linéariser $\sin^n t$ et $\cos^n t$:

- on utilise la formule d'Euler en remplaçant $\cos t$ par $\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ et $\sin t$ par $\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$;
- on développe en utilisant la formule du binôme de Newton;
- on regroupe les exponentielles d'angles opposés en utilisant à nouveau la formule d'Euler

Pour exprimer $\sin(nt)$ et $\cos(nt)$ en un polynôme en $\sin t$ et $\cos t$:

- on utilise la formule de Moivre $(\cos t + i\sin t)^n = \cos(nt) + i\sin(nt)$
- on développe le membre de gauche par la formule du binôme de Newton
- on identifie les parties réelles et les parties imaginaires