TD polynômes et fractions rationnelles

Ex 1

Soit P = $X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que j est une racine multiple de P .
2. Factoriser P dans C[X].
3. Factoriser P dans R[X].

Ex 2

1. Montrer que pour tout $n \in N$, $X^{4n} - 1$ est divisible par $X^4 - 1$.
2. En déduire que le polynôme P = $X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$ avec a,b,c et d entiers naturels , est divisible par Q = $X^3 + X^2 + X + 1$.

Ex 3

On considère le couple de polynômes à coefficients réels

P = $X^3 - X^2 - X - 2$ et Q = $X^3 - 1$

1. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD (P,Q).
2. Décomposer P et Q en facteurs irréductibles dans R[X].
3. Retrouvez le résultat de la question 1.
4. Décomposer P en facteur irréductible dans C[X].

Ex 4

Soit P = $X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$ et P' = $5X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$

1. Calculer le PGCD de P et P' .
2. Quelles sont les racines communes à P et P' ?
   Quelles sont les racines multiples de P dans C ?
3. Montrer que $(X^2 + 1)^2$ divise P .
4. Factoriser P dans R[X].

Ex 5

Soit P $\in C$ [X] un polynôme tel que XP(X - 1) = (X - 2).P(X)

1. Montrer que 0 et 1 sont les racines de P .
2. Soit a une racine de P .

Si $a \neq 0$, montrer que $a - 1$ est une racine.

Si $a \neq 1$, montrer que $a + 1$ est une racine.

3. On suppose que P n'est pas le polynôme nul. Montrer que 0 et 1 sont les seules racines de P .

Indication :

S'il existe une racine a telle que Re(a)< 1 différente de 0 ($a \neq 0$), montrer qu'il y a une infinité de racines.

S'il existe une racine a telle que Re(a)> 0 différente de 1 ($a \neq 1$), montrer qu'il y a une infinité de racines.

4. En déduire que P est de la forme $\alpha X^k (X - 1)^l$ avec $\alpha \in C$[X], $k \in N^*$ et $l \in N^*$.
5. Quel est l'ensemble des polynômes de P $\in C$ [X] tels que XP(X - 1) = (X - 2).P(X)