Théorème De Gauss

1- FLUX DU CHAMP ELECTROSTATIQUE

a - Cas d'une charge ponctuelle

* *Flux élémentaire*

Soit une charge ponctuelle q>0 placée en O et M un point de l'espace (figure 1).

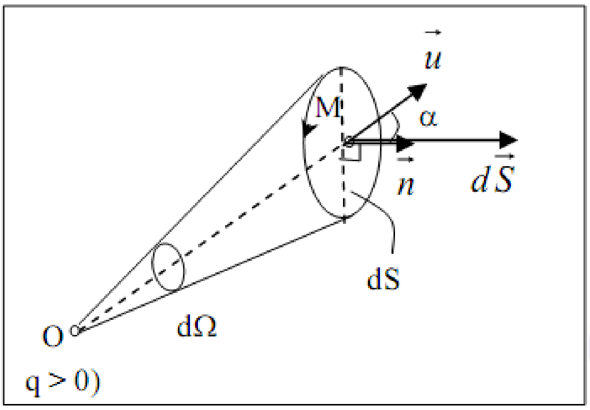

Figure 1

Le champ $\vec{E}(M)$ créé par q en M est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{r^2}$$

$$\text{avec, } \vec{u} = \overrightarrow{OM}/\left\|\overrightarrow{OM}\right\| \quad \text{et} \quad r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$$

Soit dS un élément de surface entourant le point M ; orientons la surface dS (figure 1). Le flux élémentaire de $\vec{E}$ à travers la surface orientée est :

$$d\Phi = \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}.d\vec{S}}{r^2} = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0}d\Omega \qquad (1)$$

$$\text{où, } d\Omega = \frac{\vec{u}.d\vec{S}}{r^2} = \frac{\vec{u}.\vec{n}}{r^2}dS \; :$$

angle solide élémentaire sous lequel du point O on voit la surface élémentaire. Le signe de dΩ dépend de l'orientation de la surface :

- $d\Omega > 0$ si $\alpha = (\vec{u}, \vec{n}) < \Pi/2$
- $d\Omega < 0$ si $\alpha > \Pi/2$

b- Cas de n charges ponctuelles

Considérons ni charges à l'intérieure d'une surface fermée (Σ) et ne charges situées à l'extérieure de cette surface. Le champ $\vec{E}$ créé par les n charges $(n = n_i + n_e)$ est la somme vectorielle des champs créées par chacune des charges :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n_i} \vec{E}_i + \sum_{e=1}^{n_e} \vec{E}_e$$

Le flux du champ $\vec{E}$ sortant de la surface Σ est :

$$\Phi_i = \frac{q_i}{\varepsilon_0} \text{ et } \Phi_e = 0$$

d'où :

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \text{avec , } Q_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{n_i} q_i$$

Le flux sortant de la surface fermée Σ est égal à la somme, divisée par ε0, des charges intérieures à la surface Σ :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

avec, Qint : charge totale intérieure à Σ

Ce résultat constitue le théorème de Gauss.

c - Cas d'une distribution continue de charge

On peut écrire le théorème de Gauss dans le cas où la distribution de charges est continue et décrite par une densité volumique de charges ρ. La charge totale intérieure à Σ, c'est à dire contenue dans le volume v limité par la surface fermée Σ est :

$$Q_{\text{int}} = \iiint_v \rho \, d\tau$$

Où v est le volume délimitée par (Σ).
Dans ce cas le théorème de Gauss s'écrit, v étant le volume limité par la surface (Σ) :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{v} \rho \, d\tau$$

C'est l'expression du théorème de Gauss sous la forme intégrale.

2 - Validité du théorème de Gauss

Précisons que ce théorème est obtenu à partir de la loi de Coulomb (loi fondamentale de l'électrostatique). Ce théorème reste valable quand les charges sont en mouvement.
Le théorème de Gauss est une conséquence :
1) de la loi en $1/r^2$ régissant les interactions entre les charges électriques
2) du caractère central des forces électrostatiques
3) du principe de superposition
Nous présentons dans le tableau ci-dessous la formulation du théorème de Gauss pour le champ électrostatique.

Sources du champ	Charges
Champ créé en M par une source ponctuelle placée en P_i	$\vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\Vert\overrightarrow{P_iM}\right\Vert^3}$
Flux élémentaire	$d\Phi_i = \frac{q_i}{4\Pi\varepsilon_0} d\Omega_i$
Théorème de Gauss	$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$ ou $\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_v \rho \, d\tau$

Cependant, ce théorème est également valable pour tous les champs de vecteurs de la forme $\vec{u}_r / r^2$, en particulier pour le champ de gravitation $\vec{g}$

3 - SYMETRIE ET INVARIANCE DE LA DISTRIBUTION DE CHARGE ET CARACTERISATION DU CHAMP ET DU POTENTIEL

On rappelle que le calcul du champ électrostatique E , crée par une distribution de charge de densité volumique ρ peut être mené, soit à partir :

- de la loi de Coulomb :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho d\tau}{r^2}\vec{u}_r$$

- du potentiel V :

$$V = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho d\tau}{r}$$

$$\text{avec,}\quad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \ \text{ ou } \oint_C \vec{E}.d\vec{r} = 0$$

où τ est le volume de la distribution de charge, et C est un contour fermé.

- du théorème de Gauss sous sa forme intégrale:

$$\oint_S \vec{E}.\vec{n}dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Où $\vec{n}$ est la normale à la surface fermée englobant la charge q.

a- Symétries des sources (causes) et des effets crées : Principe de Curie

Les effets présentent les mêmes symétries que leurs causes. Les éléments de symétrie des causes (distributions D ou sources) doivent donc se retrouver dans les effets ($\vec{E}$ et V) produits.

b) Distribution de charge présentant un plan de symétrie pair (Π)

On dit qu'une distribution de charge (D) est symétrique par rapport à un plan Π, si pour deux points P et P' symétriques par rapport à Π, on a (figure 5) :

$\rho'(P') = \rho(P)$.

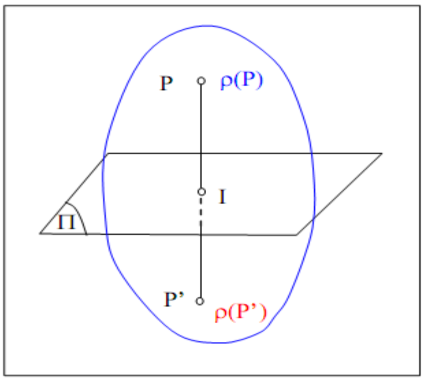

Figure 5

Pour illustrer ce cas, nous prenons deux charges identiques q placées en P et P', où P' est le symétrique de M par rapport au plan Π.
Soit M' le symétrique du point M par rapport au plan Π. On peut constater sur la figure 6 que le champ en M' est le symétrique du champ en M :

$$\vec{E}(M') = sym\vec{E}(M) \text{ et } V(M') = symV(M)$$

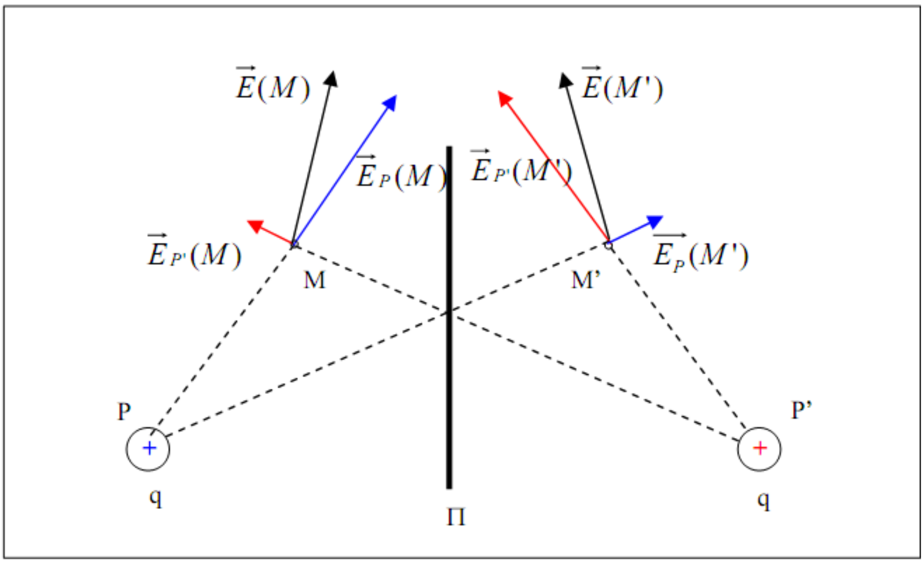

Figure 6

On remarque que les composantes du champ parallèles au plan de symétrie $\vec{E}_{//}$ sont conservées alors que celles perpendiculaires au plan $\vec{E}_{\perp}$ sont inversées :

$$\vec{E}_{//}(M') = \vec{E}_{//}(M) \text{ et } \vec{E}_{\perp}(M') = -\vec{E}_{\perp}(M)$$

En particulier, en un point du plan de symétrie (M = M') on a (figure 7):

$$\vec{E}_{\perp}(M) = \vec{0} \text{ d'où : } \vec{E}(M) = \vec{E}_{//}(M) + \vec{E}_{\perp}(M) = \vec{E}_{//}(M)$$

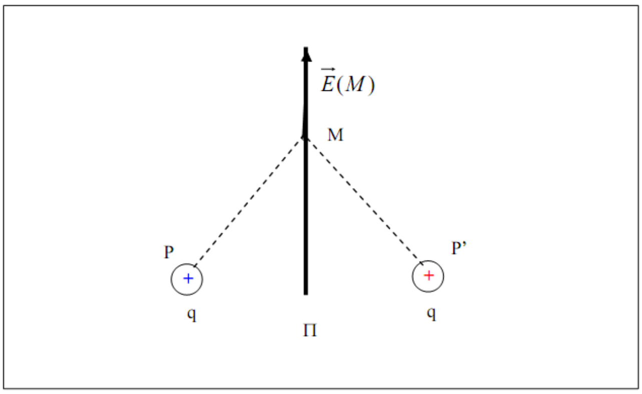

Figure 7

Le champ électrique est contenu dans le plan de symétrie paire. Dune façon générale tout vecteur polaire est contenu dans le plan de symétrie paire (figure 7).

c) Distribution de charge présentant un plan de symétrie impair (Π')

Une distribution de charge possède un plan de symétrie impaire Π', si pour deux points P et P' symétriques par rapport à Π', on a

$$\rho'(P') = -\rho(P)$$

Pour illustrer ce cas, nous prenons deux charges q et – q placées en P et P', où P' est le symétrique de M par rapport au plan Π'.

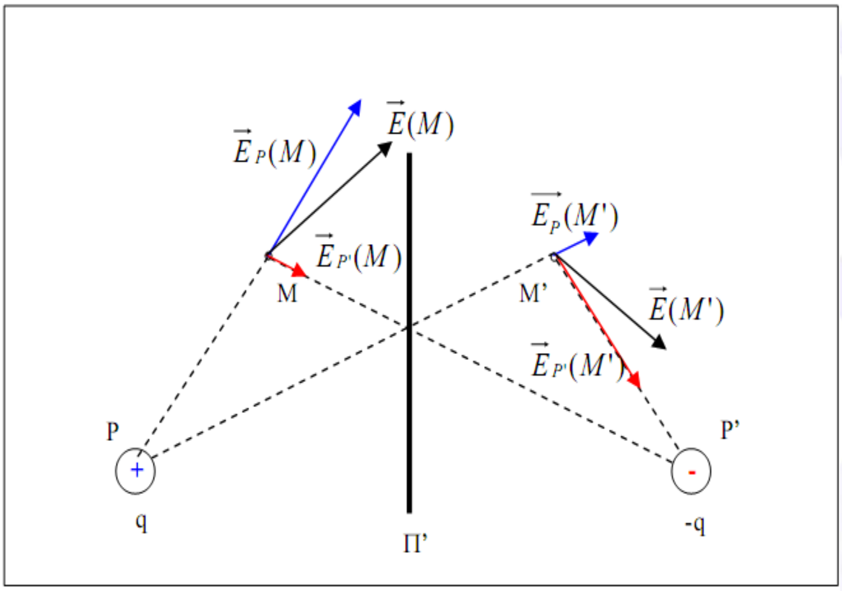

Figure 8

Soit M' un point symétrique de M par rapport à Π', On peut constater sur la figure 8 que le champ en M' est l'opposé du symétrique du champ en M :

$$\vec{E}(M') = -sym\vec{E}(M) \text{ et } V(M') = -symV(M)$$

A l'inverse du cas précèdent, on remarque sur la figure 8 que les composantes du champ parallèles au plan de symétrie impair Π' sont opposées alors que celles perpendiculaires au plan sont conservées :

$$\vec{E}_{//}(M') = -\vec{E}_{//}(M) \text{ et } \vec{E}_{\perp}(M') = \vec{E}_{\perp}(M)$$

Si M appartient au plan de symétrie impaire (M = M'), on aura (figure 9) :

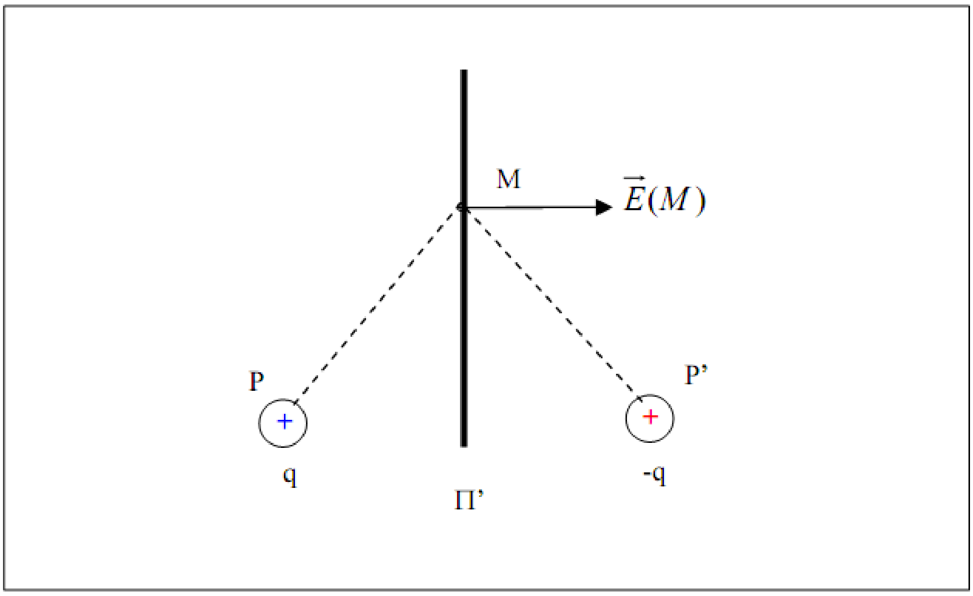

Figure 9

On a donc, $\vec{E}_{//}(M) = 0$ et $\vec{E}(M) = \vec{E}_{//}(M) + \vec{E}_{\perp}(M) = \vec{E}_{\perp}(M)$

Tout vecteur polaire est perpendiculaire à un plan de symétrie impaire.

*** Conséquences ***

Lors d'une opération de symétrie appliquée à la distribution de charges (D), le champ électrostatique $\vec{E}$ subit la même opération. On dit que le vecteur champ électrique est un vecteur polaire ou "vrai" vecteur. Ce vecteur a les mêmes propriétés de symétrie que ses sources.

Les plans de symétrie nous permettent souvent de trouver la direction du champ en un point M. Pour trouver la direction du champ $\vec{E}$ en un point M, il suffit de trouver :

* Soit deux plans de symétrie passant par M. Le champ $\vec{E}$ appartenant à ces deux plans. Il est donc porté par la droite formée par leur intersection.

* Soit un plan de symétrie impair passant par M. La direction du champ $\vec{E}$ au point M est donnée par la normale au plan de symétrie impaire.

Les plans de symétrie permettent d'obtenir les composantes du champ $\vec{E}$.