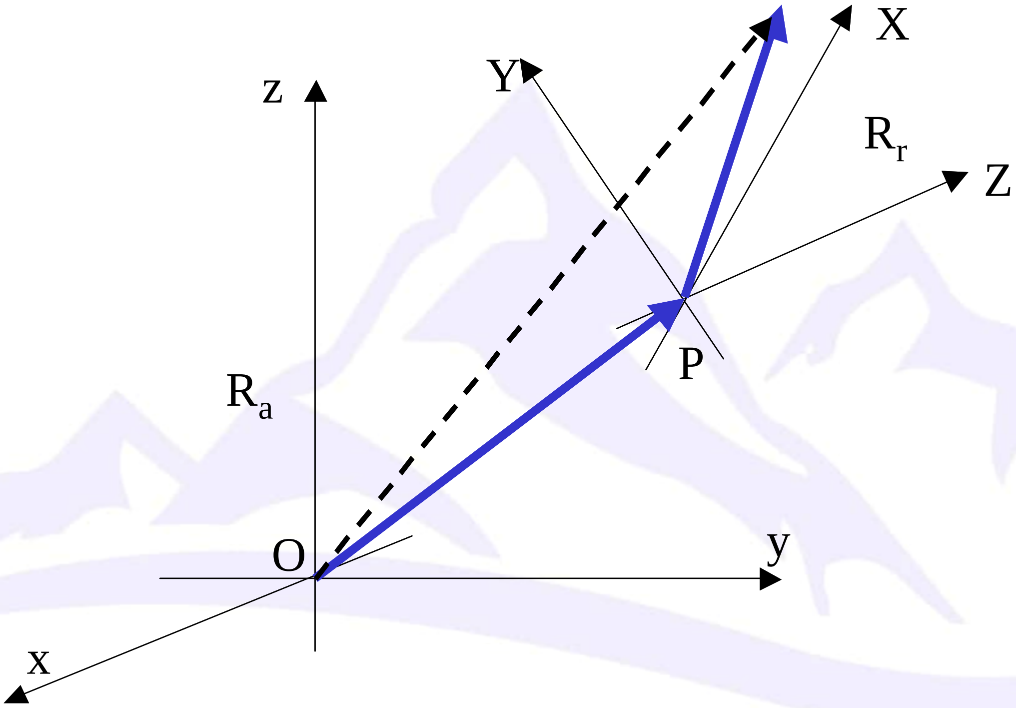
Mouvement relatif

Repère absolu Ra (Oxyz) et repère relatif Rr (PXYZ)



1- Changement de référentiel (repère)

L'étude des changements de repères est justifiée par au moins deux points:

1/ Un mouvement peut s'avérer très simple dans un repère, lui-même animé d'un mouvement par rapport au repère ou se trouve l'observateur. Le problème est alors scindé en deux parties, ce qui rend son analyse plus simple.
2/ La relation fondamentale de la dynamique n'est vérifiée que dans une classe de référentiels, les référentiels inertiels, appelés aussi Galiléens. Il faut donc de toute manière s'y raccrocher.

Pour les démonstrations de changement de repère, il est généralement fait le choix d'un repère cartésien ce qui se justifie par sa commodité : ceci ne restreint en rien la généralité de la démonstration.

Nous verrons successivement quelques définitions puis les compositions des positions, vitesses et accélérations. Ce chapitre est uniquement mathématique.

NB : Un repère étant attaché à un référentiel, nous emploierons ici indifféremment référentiel et repère.

1. Définitions

1.1 Repère absolu

Soit un point matériel M observé par rapport à un repère Oxyz.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \textbf{(1)}$$

On dira que ce premier repère R_a (Oxyz) permet d'observer le mouvement absolu du mobile M. Le seul privilège de ce repère est d'avoir été choisi comme référence et a priori, il ne présente pas de propriété particulière; nous ne l'en appellerons pas moins repère absolu. Ses vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ seront considérés comme constants

Attention, ce repère absolu n'est pas forcément un repère inertiel (Galiléen) : comme annoncé, ce chapitre est purement mathématique.

1.2 Repère relatif

Soit un second repère PXYZ, appelé repère relatif, en mouvement quelconque par rapport au repère absolu.

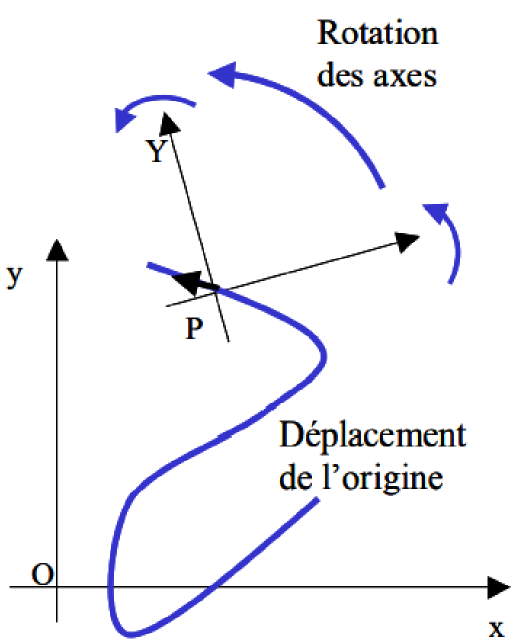
Le point M sera repéré dans ce repère relatif par:

$$\overrightarrow{PM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K} \qquad \textbf{(2)}$$

Attention donc: les vecteurs $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{K}$ ne sont pas fixes dans le repère absolu R_a

Mouvement de R_a par rapport à R_r

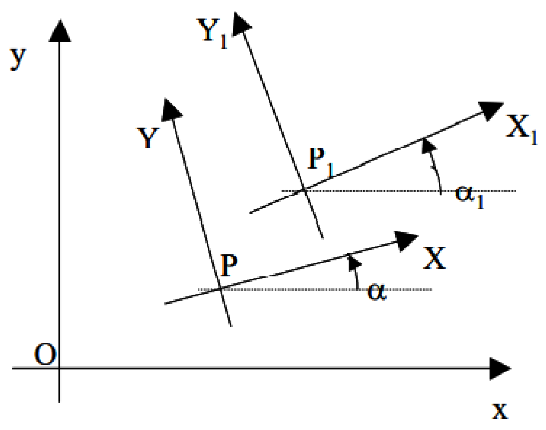
Représenté ici à 2 dimensions



$$\vec{V}_P = \frac{\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP}}{\Delta t}$$

$$\vec{\Omega} = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\Delta t}\vec{k}$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$



Le mouvement de M observé dans ce deuxième repère R_r est dit mouvement relatif.

A un instant t donné, ce mouvement de R_r par rapport à R_a se caractérise par deux grandeurs: - la position du point P, origine du repère PXYZ :

$OP = x_P\, i + y_P\, j + z_P\, k$

- et une rotation de Rr que nous définirons par un vecteur rotation $\vec{\Omega}$
Attention, $\vec{\Omega}$ est rarement constant !

Mouvement d'entraînement

Un point fixe dans le repère relatif (X, Y, et Z constants) est un point mobile dans le repère absolu. Le mouvement d'un tel point dans le repère absolu est dit mouvement d'entraînement.

2. Composition des positions, vitesses, accélérations

2.1 Position

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} \qquad \text{soit encore}$$

$$\overrightarrow{OM} = (x_P\vec{i} + y_P\vec{j} + z_P\vec{k}) + (X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}) \qquad \textbf{(4)}$$

C'est terminé! Facile…

2.2 Vitesse

On cherche

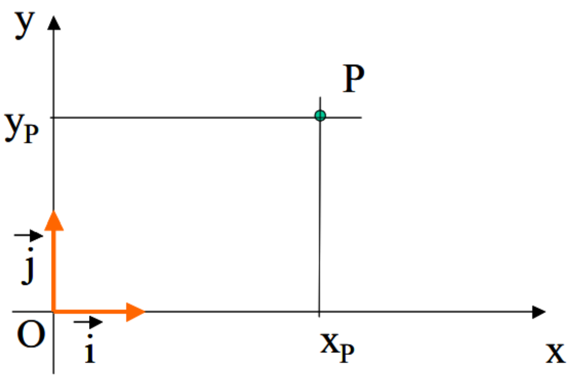
$$\vec{V_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Pour faire intervenir le repère relatif, on utilise la relation (4)

$$d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OP} + d\overrightarrow{PM} \qquad \text{et donc}$$

$$\vec{V_a} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \vec{V_P}$$



$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \vec{V_P} = \frac{dx_P}{dt}\vec{i} + \frac{dy_P}{dt}\vec{j} \quad \left(+ \frac{dz_P}{dt}\vec{k} \right)$$

$\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}$:

$d\overrightarrow{OP} = dx_P.\vec{i} + dy_P.\vec{j} + dz_P.\vec{k}$ cf. (3) $\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \dfrac{dx_P}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy_P}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz_P}{dt}\vec{k}$

$\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}$ est donc simplement (ce qui était évident, mais là, on assure avec les composantes ...) la vitesse du point P dans le repère absolu d'origine O.

Elle sera notée $\overrightarrow{V_P}$:

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \overrightarrow{V_P} = \frac{dx_P}{dt}\vec{i} + \frac{dy_P}{dt}\vec{j} + \frac{dz_P}{dt}\vec{k}}$$ (vitesse du point P dans R_a) **(5)**

$\dfrac{d\overrightarrow{PM}}{dt}$:

Les composantes de $\overrightarrow{PM}$ sont données par (2) :

$\overrightarrow{PM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$ (attention, rappel, $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{K}$ ne sont pas fixes)

$d\overrightarrow{PM} = dX.\vec{I} + dY.\vec{J} + dZ.\vec{K} + X.d\vec{I} + Y.d\vec{J} + Z.d\vec{K}$

en divisant $d\overrightarrow{PM}$ par dt et en utilisant $\dfrac{d\vec{I}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{I}$, $\dfrac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{J}$, $\dfrac{d\vec{K}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{K}$

$$\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt} = \left[\frac{dX}{dt}\vec{I} + \frac{dY}{dt}\vec{J} + \frac{dZ}{dt}\vec{K}\right] + \vec{\Omega} \wedge (X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K})$$

La première parenthèse [ ] n'est autre que la vitesse du point M dans le repère R_r, appelée vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$:

$$\boxed{\overrightarrow{V_r} = \frac{dX}{dt}\vec{I} + \frac{dY}{dt}\vec{J} + \frac{dZ}{dt}\vec{K}}$$ (vitesse du point M dans R_r) **(6)**

Et la seconde ( ) n'est autre que le vecteur $\overrightarrow{PM}$, cf. (2). Donc :

$$\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt} = \overrightarrow{V_r} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM}$$

D'où finalement, en repartant de (4bis) avec (5) et (6bis)

$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_P} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{V_r}$	Vitesse du point M dans le repère absolu **(7)**

Dans cette relation, la 2ème composante n'était pas forcément intuitive!

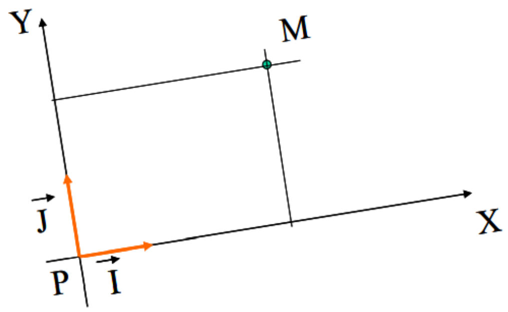
Remarque: s'il n'y a pas de rotation $(\vec{\Omega} = \vec{0})$ nous retrouvons la loi simple d'addition des vitesses $\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_P} + \overrightarrow{V_r}$. Cette relation a été utilisée dans le chapitre lois de Newton, pour définir une famille de référentiels Galiléens R', connaissant un premier référentiel Galiléen R.

Un point fixe dans le repère relatif $(\overrightarrow{V_r} = \vec{0})$ aurait une vitesse dite d'entraînement

$\overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_P} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM}$ d'où, pour un point quelconque:

$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_r}$ formule commode … mais attention à la définition de $\overrightarrow{V_e}$!

$$\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}=\overrightarrow{V_r}$$



$$\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}=\overrightarrow{V_r}=\frac{dX}{dt}\vec{I}+\frac{dY}{dt}\vec{J}\quad\left(+\frac{dZ}{dt}\vec{K}\right)$$

2.3 Accélération

Reprenons chacun des trois termes de $\overrightarrow{V_a}$ (eq. **(7)**) et calculons la dérivée par rapport au temps. Comme nous sommes maintenant parfaitement à l'aise avec les différentielles …!? nous passons immédiatement à la dérivée.

Dérivons donc successivement chacun des 3 termes de $\overrightarrow{V_a}(=\overrightarrow{V_P}+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{V_r})$ par rapport au temps.

1/ $\dfrac{d\overrightarrow{V_P}}{dt}$: il suffit de dériver la relation **(5*)*** par rapport au temps :

$$\boxed{\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2}=\overrightarrow{\Gamma_P}=\frac{d^2x_P}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y_P}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z_P}{dt^2}\vec{k}}$$ (accélération du point P dans R_a) **(8)**

Le résultat est logique : puisque $\overrightarrow{V_P}$ est la vitesse du point P dans le repère absolu R_a (cf **(5)**) , $\dfrac{d\overrightarrow{V_P}}{dt}$ est simplement son accélération dans R_a, que nous avons notée $\overrightarrow{\Gamma_P}$.

2/ $\dfrac{d(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{PM})}{dt}$:

la dérivation d'un produit vectoriel se déroule comme celle d'un produit scalaire ordinaire :

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{PM}+\vec{\Omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}$$

En reprenant $\dfrac{d\overrightarrow{PM}}{dt}$ plus haut dans le paragraphe vitesse **(6 bis)**, nous arrivons à :

$$\frac{d(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{PM})}{dt}=\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{PM}+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{V_r}+\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{PM})$$

PS : attention à ne pas supprimer ou translater les parenthèses : par exemple $(\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega})\wedge\overrightarrow{PM}=\vec{0}$

3/ $\dfrac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}$:

il faut repartir de la définition **(6)** de $\overrightarrow{V_r} = \dfrac{dX}{dt}\vec{I} + \dfrac{dY}{dt}\vec{J} + \dfrac{dZ}{dt}\vec{K}$

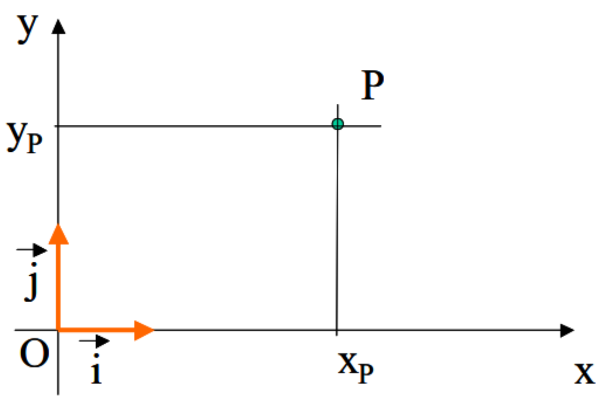
En posant :

$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_r} = \dfrac{d^2X}{dt^2}\vec{I} + \dfrac{d^2Y}{dt^2}\vec{J} + \dfrac{d^2Z}{dt^2}\vec{K}}$ (accélération du point M dans le repère R_r) **(9)**

vous montrerez facilement en procédant exactement comme pour les vitesses que :

$$\frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt} = \overrightarrow{\Gamma_r} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2} = \overrightarrow{\Gamma_P}$$



$$\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2} = \overrightarrow{\Gamma_P} = \frac{d^2x_P}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y_P}{dt^2}\vec{j} \quad \left(+\frac{d^2z_P}{dt^2}\vec{k}\right)$$

d'où l'accélération finale, en additionnant chacune des dérivées:

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_a} = \overrightarrow{\Gamma_P} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{PM} + 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{\Gamma_r} \qquad \textbf{(10)}}$$

On souffle! Tiens, vous pouvez vérifier l'homogénéité de la formule, ça décontracte.
A user avec modération. Il est rare d'avoir à l'employer dans toute sa généralité. En particulier, si le vecteur rotation est constant (direction, sens et module) le terme $\dfrac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{PM}$ disparaît.

Attention, attention, $\overrightarrow{V_r}$ et $\overrightarrow{\Gamma_r}$ sont la vitesse et l'accélération du point M, repérés dans R_r. Pour leur calcul $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{K}$ sont considérés comme fixes, et seuls X, Y et Z sont variables. Il n'y a d'ailleurs aucune ambiguïté : il suffit de bien se référer à leur définition **(6) et (9)**.

L'ordre dans lequel les termes de $\vec{\Gamma}$ sont écrits n'est pas quelconque. Il est de coutume de regrouper les trois premiers sous la dénomination accélération d'entraînement $\overrightarrow{\Gamma_e}$ (voir la définition du mouvement d'entraînement au début). En effet, si le point M est immobile dans le repère R_r alors $\overrightarrow{\Gamma_r} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{V_r} = \vec{0}$. Donc en définissant:

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_e} = \overrightarrow{\Gamma_P} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{PM}} \qquad \text{(accélération dite d'entraînement)} \qquad \textbf{(11)}$$

L'accélération absolue s'écrit finalement :

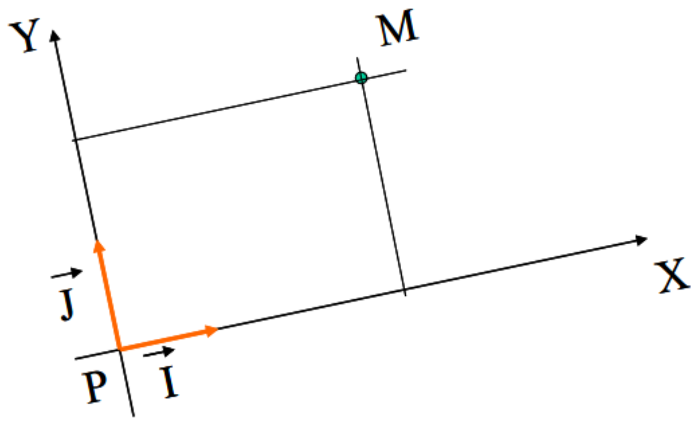
$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_a} = \overrightarrow{\Gamma_e} + 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{\Gamma_r}} \qquad \textbf{(12)}$$

où $2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}$, couplage de la rotation de R_r par rapport à R_a et de la vitesse dans R_r, est l'accélération de Coriolis, déjà rencontrée dans les repères cylindriques et sphériques. Elle intervient par exemple dans le mouvement des nuages autour des dépressions.

Comparez l'expression de $\overrightarrow{\Gamma_a}$ avec celle de la vitesse $\overrightarrow{V_a}$.

La roue de vélo constituera un bon support pour commence à utiliser ces relations. Notre bonne vieille terre, fournira ensuite quelques bons exemples pour illustrer $\overrightarrow{V_a}$ et $\overrightarrow{\Gamma_a}$, en étudiant par exemple la bille qui tombe à l'équateur.

$$\frac{d^2\overrightarrow{PM}}{dt^2} = \overrightarrow{\Gamma_r}$$



$$\overrightarrow{\Gamma_r} = \frac{d^2X}{dt^2}\vec{I} + \frac{d^2Y}{dt^2}\vec{J} \quad \left(+ \frac{d^2Z}{dt^2}\overrightarrow{K} \right)$$

- Composition des positions, vitesses, accélérations (conclusion et résumé)

Position

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}}$$

$$\overrightarrow{OP} = x_P\vec{i} + y_P\vec{j} + z_P\vec{k}$$

$$\overrightarrow{PM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$$

Vitesse

$$\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_P + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM} + \vec{V}_r}$$

$$\vec{V}_P = \frac{dx_P}{dt}\vec{i} + \frac{dy_P}{dt}\vec{j} + \frac{dz_P}{dt}\vec{k}$$

$\vec{\Omega}$ = vecteur rotation de R_r par rapport à R_a

$$\overrightarrow{PM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$$

$$\vec{V}_r = \frac{dX}{dt}\vec{I} + \frac{dY}{dt}\vec{J} + \frac{dZ}{dt}\vec{K}$$

Accélération

$$\boxed{\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}_P + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{PM} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r + \vec{\Gamma}_r}$$

$$\vec{\Gamma}_P = \frac{d^2x_P}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y_P}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z_P}{dt^2}\vec{k}$$

$\vec{\Omega}$ = vecteur rotation de R_r par rapport à R_a

$$\overrightarrow{PM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$$

$$\vec{V}_r = \frac{dX}{dt}\vec{I} + \frac{dY}{dt}\vec{J} + \frac{dZ}{dt}\vec{K}$$

$$\vec{\Gamma}_r = \frac{d^2X}{dt^2}\vec{I} + \frac{d^2Y}{dt^2}\vec{J} + \frac{d^2Z}{dt^2}\vec{K}$$