Étude énergétique d'un point matériel

L'action d'une force $\overline{F}$ sur une masse (m) peut provoquer:

a) Une translation : caractérisée par une vitesse linéaire $\overline{v}$ et une quantité de mouvement $\overline{p}$ = m.$\overline{v}$

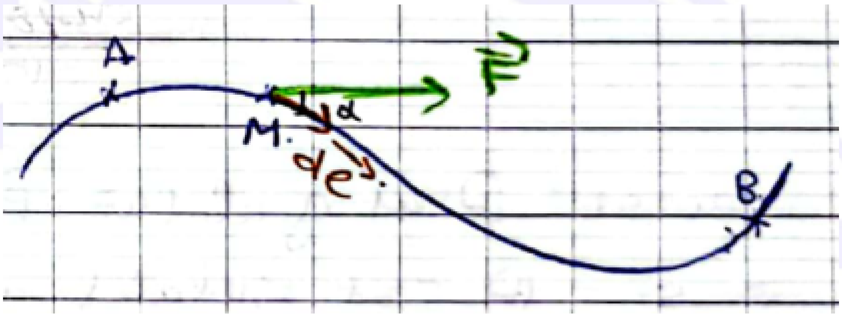
b) Une rotation : caractérisée par une vitesse angulaire $\overline{w}$ et le moment cinétique $\overline{L_{/O}} = \overline{OM} \wedge \overline{p}$ = m. $\overline{OM} \wedge \overline{v}$

I- Travail et puissance d'une force:

1) Travail d'une force:

Le travail élémentaire d'une force $\overline{F}$ pour un déplacement élémentaire $\overline{dl} = \overline{dr}$ est :

dw = $\overline{F}.\overline{dl}$



Sur un trajet AB :

$$W_{A\to B} = W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \overline{F}.\overline{dl} = \int_A^B ||\overline{F}||.dl.\cos(\alpha)$$

Si $\alpha<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\alpha)>0 \Rightarrow W_{AB}>0 \Rightarrow$ On a un travail moteur

Si $\alpha>\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\alpha)<0 \Rightarrow W_{AB}<0 \Rightarrow$ On a un travail résistant

Si $\alpha=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\alpha)=0 \Rightarrow W_{AB}=0 \Rightarrow$ La force ne travaille pas

2) Puissance d'une force:

On définit la puissance d'une force $\overline{F}$ par le travail de cette force par unité de temps , c'est à dire :

P = $\frac{dW(\overline{F})}{dt} = \overline{F}.\frac{\overline{dl}}{dt} = \overline{F}.\overline{v}$ (avec W en joule et P en watt)

II- Energie d'un point matériel:

1) Théorème de l'énergie cinétique:

L'énergie cinétique est une grandeur physique scalaire positive tel que :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

P.F.D : $\overline{F}_{résultante} = \overline{F} = m.\overline{a} = \frac{d\overline{p}}{dt} = m.\frac{d\overline{v}}{dt}$

Le théorème de l'énergie cinétique pour un trajet [AB] :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A\to B}(\overline{F}\ appliqués)$$

Le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen :

$$\Delta\overline{E}_c = \sum W(\overline{F}_{réelle} + \overline{f}_{ie})$$

2) Energie potentielle:

a) force conservative:

Une force $\overline{F}$ est dite conservative ssi elle dérive d'une énergie potentielle (E_p)

$\Rightarrow$ dW $(\overline{F}_{cons}) = \overline{F}_{cons}.\overline{dr}$ = -dE_p

$\Rightarrow$ $\overline{F}_{cons} = -\overline{grad}(E_p)$

Pour un trajet [AB] : $W_{A\to B}(\overline{F}_{cons}) = \int_A^B dW(\overline{F}_{cons}) = -\int_A^B dE_p = -(E_p(B) - E_p(A))$

$\Rightarrow$ Théorème de l'énergie potentielle : $\Delta E_p = -\sum W(\overline{F}_{cons})$

Une force est dite conservatrice ssi:

$$\overline{rot}(\overline{F}) = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{F} = -\overline{grad}\ E_p$$

b) Exemples de forces conservatives:

$\overline{F} = \frac{-G.M.m}{r^2}\overline{U}_r = F(r)\ \overline{U}_r$

rot($\overline{F}$) = $\overline{0}$ $\Rightarrow$ $\overline{F}$ conservatrice $\Rightarrow$ elle dérive d'une E_p $\Rightarrow$ $\overline{F} = -\overline{grad}(E_p)$ ou dE_p = - $\overline{F}$. $\overline{dr}$

avec $\overline{dr}$ = dr $\overline{U}_r$ + rdθ $\overline{U}_\theta$+ rsin(θ)dφ $\overline{U}_\varphi$ donc dE_p = + $\frac{G.M.m}{r^2}$dr d'où $E_p = \int G.M.m\frac{dr}{r^2}$ = G.m.M[$\frac{-1}{r^2}$] +cst ⇒ $E_p = -\frac{G.M.m}{r}$ + cst

Rq :

Force de coriolis : $\overline{f}_{ic} = -m\overline{a}_c = -2m\overline{w}\wedge\overline{v}_r$

Force de frottement : $\overline{f} = -k.\overline{v}$ (avec k coefficient)

Force magnétique : $\overline{F}_M = q.\overline{v}\wedge\overline{B}$

Ces trois forces ne sont pas des forces conservatives. En effet , ces forces dépendent de la vitesse et pas de la position.
Généralement , les forces qui dépendent de la position sont conservatives.

c) Positions d'équilibres et stabilité:

Soit M un point matériel soumis à une force résultante $\overline{F}$ conservatrice ⇔ $\overline{F} = -\overline{grad}(E_p)$

Si M est en équilibre : $\overline{F} = \sum\overline{F}_{app} = \overline{0}$ d'où $\overline{grad}(E_p) = \overline{0}$

La variation de E_p par rapport à la position du point M est nulle tel que :

Pour un mvt rectiligne : $\overline{F} = -\overline{grad}(E_p) = -\frac{dE_p}{dx}\overline{i} = \overline{0} \Rightarrow \frac{dE_p(x)}{dx} = 0$

Pour un mvt circulaire : $\overline{F} = -\overline{grad}(E_p) = \frac{1}{R}\frac{dE_p}{d\theta}\overline{U}_\theta = \overline{0} \Rightarrow \frac{dE_p}{d\theta} = 0$

Si on a une énergie potentielle extrémale (minimale ou maximale) ⇒ $\frac{dE_p}{dx} = 0$

E_p minimale : $\frac{d^2E_p}{d\alpha^2} \succ 0$ ⇒ Position d'équilibre stable

E_p maximale : $\frac{d^2E_p}{d\alpha^2} \prec 0$ ⇒ Position d'équilibre instable

3) Energie mécanique:

L'énergie mécanique d'un point matériel est définie par : $E_m = E_c + E_p$ ⇒ $dE_m = dE_c + dE_p$

or d'après le théorème de l' E_c : $dE_c = dW(\overline{F}_{app})$ et d'après le théorème de E_p : $dE_p = -dW(\overline{F}_{cons})$ d'où

dE_m = d E_c + d E_p

= dW$\overline{F}_{app}$ -dW($\overline{F}_{cons}$)

= dW($\overline{F}_{cons}$) + dW($\overline{F}_{non\ cons}$) - dW($\overline{F}_{cons}$)

⇒ dE_m = dW($\overline{F}_{non\ cons}$)

ou bien , le théorème de l'énergie mécanique : $\Delta E_m = \sum W(\overline{F}_{non\ cons})$

Si pas de $\overline{F}_{non\ cons}$, c'est à dire si M soumis uniquement au forces conservatives :

dE_m = dW($\overline{F}_{non\ cons}$) = 0 donc E_m = cst d'où la conservation de l'énergie mécanique.