TD Ensembles, applications,relations

Exercice1:

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1.$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+1.$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y).$

Exercice2:

Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f(x) = 2x$ et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Les fonctions f et g sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

Exercice 3 :

Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{-3\} & \to & \mathbb{C}\backslash\{i\} \\ z & \mapsto & \frac{iz-i}{z+3} \end{array}$$

est une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 4:

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \iff x = x'.$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, puis déterminer la classe d'équivalence d'un élément $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 5 :

Soit E un ensemble et A, B, C trois éléments de $\mathcal{P}(E)$.

1. Démontrer que, si $A \cap B = A \cup B$, alors $A = B$.
2. Démontrer que, si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$, alors $B = C$. Une seule des deux conditions suffit-elle?

Exercice 6 :

On considère 4 ensembles A, B, C et D, et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$. Montrer que

$$g \circ f \text{ injective } \Longrightarrow f \text{ injective,}$$

$$g \circ f \text{ surjective } \Longrightarrow g \text{ surjective.}$$

Montrer que :

$$\left(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }\right) \Longleftrightarrow \left(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\right).$$