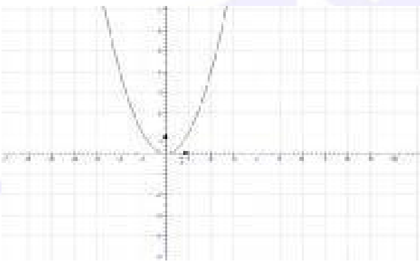
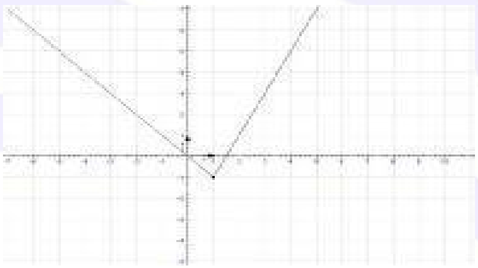
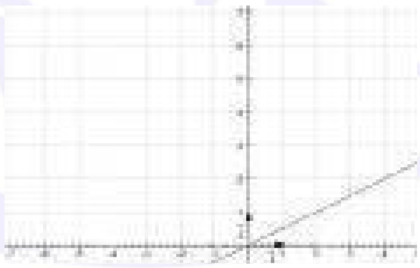
I. Rappels

Notion de continuité :

Graphiquement, on peut reconnaître une fonction continue sur un intervalle I par le fait que le tracé de la courbe représentative de f pour $x \in I$ peut se faire sans lever le crayon de la feuille.

Exemple :

$f(x) = x^2$	$g(x) = -x$ si $x \leq 1$ et $g(x) = 2x-3$ si $x > 1$	$h(x) = x$ si $x < -2$ et $h(x) = \frac{1}{2}x$ si $x \geq -2$
		
f est continue sur ***IR***	g est continue sur ***IR***	h est continue sur $]-\infty, 2-[$ h est continue sur $[-2, +\infty[$ Mais h n'est pas continue en -2

Propriété :

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée sont continues sur tout intervalle sur lequel sont définies.

Exemples :

$f(x) = x^7 + 3x^3 - 2x + 4$ est une fonction polynôme continue sur IR

$f(x) = \frac{x+4}{x^2-1}$ est une fonction rationnelle continue sur IR\{-1,1}

$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ est une fonction continue sur $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$

Opérations sur les limites :

Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	Forme indéterminée

Limite d'un inverse

Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 Par valeurs supérieures	0 Par valeurs inférieures	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{g}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Limite d'un quotient

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 par valeurs supérieures ou 0 par valeurs inférieures	0	0 par valeurs supérieures ou 0 par valeurs inférieures	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	Forme indéterminée	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	Forme indéterminée

Règles opératoires :
La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré. La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Exemples :

$$\lim_{x \to -\infty} x^7 + 3x^3 - 2x + 4 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+4}{x^2-1} = 0$$

$f(x) = x^2 + 1 + cos(x - 1)$ si $x \leq 1$

$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}}$ si $x>1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

donc f est continue à droite et à gauche en 1.

II. Continuité et limite d'une fonction composée

Définition :
Soit f une fonction définie sur un ensemble I et g une fonction définie sur ensemble J tel que $f(I) \subset J$.

La fonction notée $g\ o\ f$, définie sur I par $g\ o\ f(x) = g\left[f(x)\right]$, est appelée fonction composée de f et g.

Exemple :

$f(x) = 3x + 7$

$g(x) = x^2$

$gof = (3x + 7)^2$

$fog = 3x^2 + 7$

Théorème :
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $f(a)$. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors g o f est continue en a .

Conséquence :
La composée de deux fonctions continue est continue.

Théorème :
Soit f et g deux fonctions. Soit a,b et c finis ou infinis.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim_{x \to a} g\ o\ f(x) = c$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x}$$

$g(x) = -x^2$

$\lim_{x \to 1} f(x) = \sqrt{2}$

$\lim_{x \to \sqrt{2}} g(x) = -2$

$g\, o\, f = -(f(x))^2 = -\left(\frac{\sqrt{2x^2 - x + 1}}{x}\right)^2$

$\lim_{x \to 1} g\, o\, f = -2$

III. Limites et ordre

Théorème :

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut être en un réel a de I.
Soit deux réels ℓ et ℓ' .

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I'$ et si $\lim_{x \to a} f = \ell$ et $\lim_{x \to a} g = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I^{*}$ et si $\lim_{x \to a} h = \lim_{x \to a} g = \ell$, alors $\lim_{x \to a} f = \ell$.

Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I^{*}$ et si $\lim_{x \to a} g = +\infty$, alors $\lim_{x \to a} f = +\infty$.

Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I^{*}$ et si $\lim_{x \to a} g = -\infty$, alors $\lim_{x \to a} f = -\infty$.

Ces résultats restent aussi valables lorsqu'on remplace a par $-\infty$ ou par a^+ ou a^-.

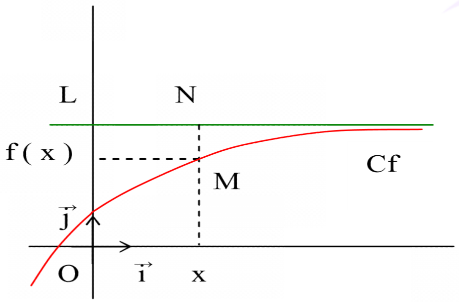
IV. Branches infinies

Asymptote verticale :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [a; $+\infty$[où a est un réel et L un réel donné .

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

alors la droite d'équation y = L est asymptote horizontale à la courbe Cf en $+\infty$.



Asymptote verticale :

Soit f une fonction .

Si « ***f (x) est aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de a*** » ,

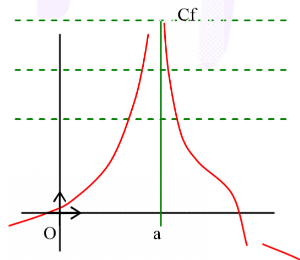
alors on dit que f a pour limite $+\infty$ en a .

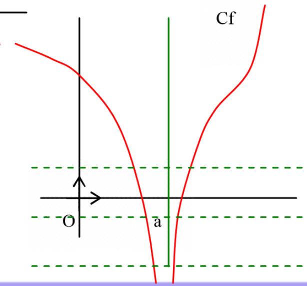
On note :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

On définit de la même façon $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

On dit que la droite d'équation x = a est **asymptote verticale** à la courbe Cf .





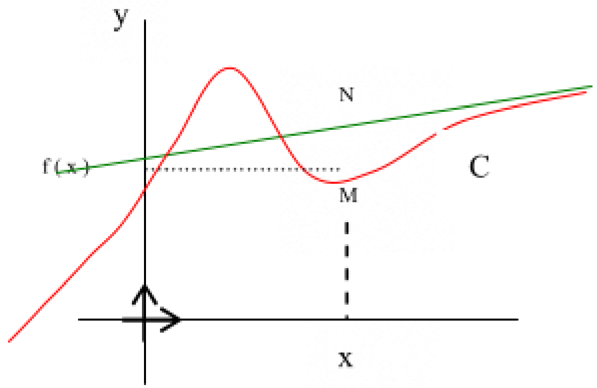
Asymptote oblique :

Soit a (a ≠ 0) et b deux réels et C la courbe représentant une fonction f dans un repère.

Dire que la droite d'équation y = a x + b est asymptote oblique à C en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) revient à dire que :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (a x + b)) = 0$$

(respectivement $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$)

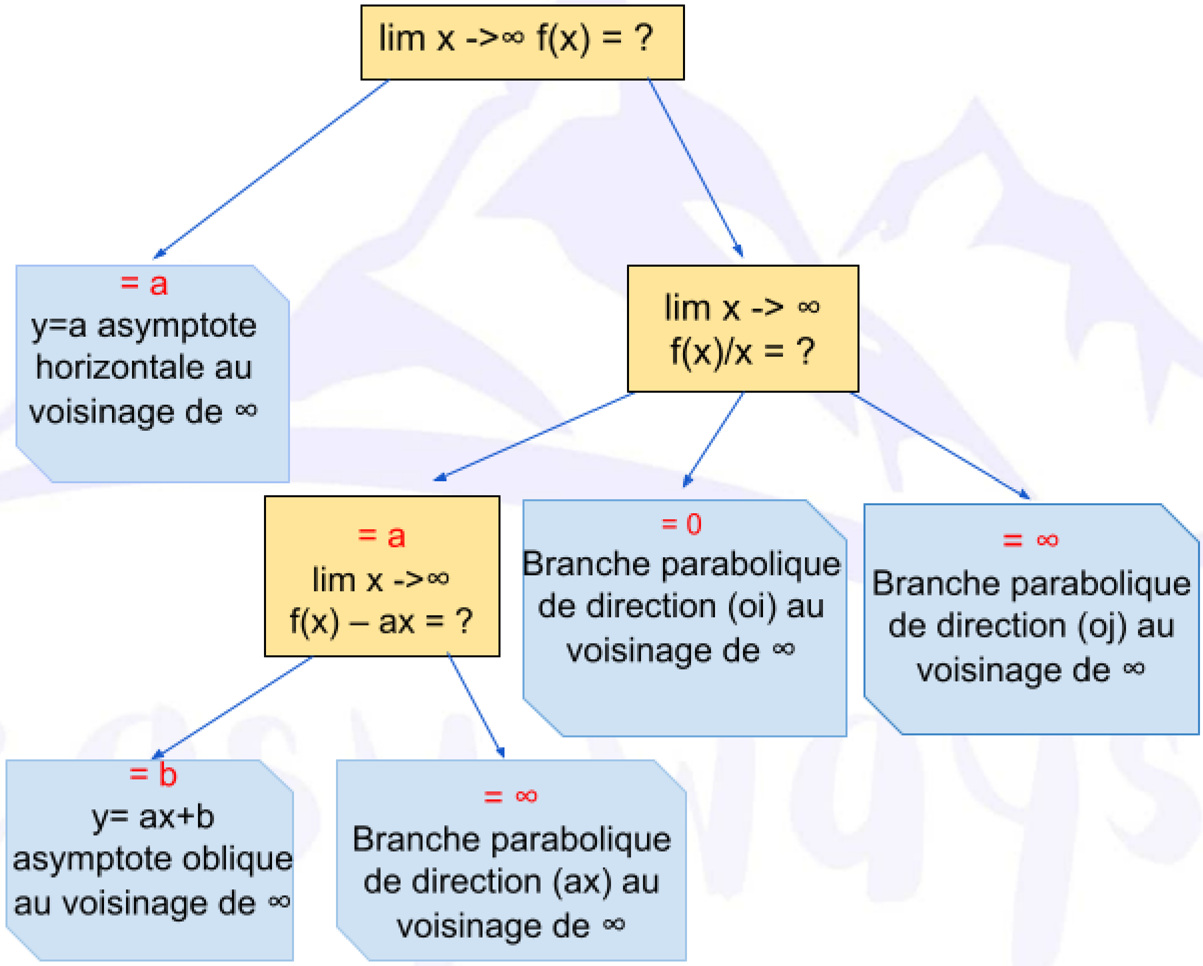


Exercice demonstration branche paraboligye :

Montrer que la courbe représentative de la fonction f : x $\longmapsto \frac{x^2+2x-2}{2x}$ admet en $\pm\infty$ une asymptote Δ.

Étudier les positions de C_f et Δ.

Branches paraboliques :



Exemple :

$$f(x) = \frac{3x^2-2x-1}{x-2}$$

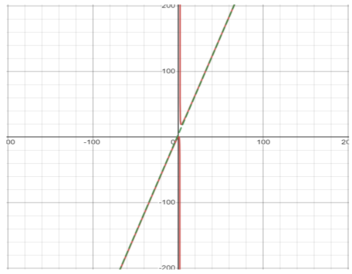
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2-2x-1}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x-1}{x^2-2x} = 3$$

y = ax + b a=3

$$b = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2-2x-1}{x-2} - 3x = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2-2x-1-3x^2+6x}{x-2} = 4$$

Asymptote oblique est $y = 3x + 4$

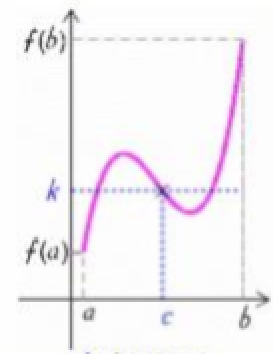


V. Image d'un intervalle par une fonction continue :

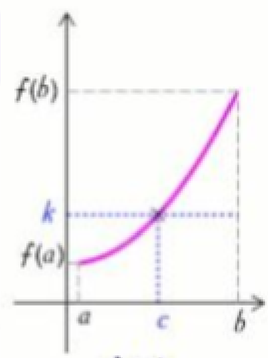
Théorème :
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soient $a \in I$ et $b \in I$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b
tel que $f(c) = k$
On peut aussi l'exprimer sous la forme :
L'équation $f(x) = k$ a au moins une solution c comprise entre a et b.
En particulier, si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.
Si de plus f est strictement monotone sur I, alors c est unique



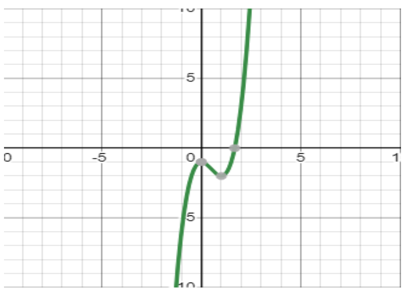
f n'est pas strictement monotone



f est strictement monotone

Exemple :
soit la fonction , on veut montrer que f admet une solution unique $1 \leq \alpha \leq 2$
$f(1) = -2$
$f(2) = 3$
$f(1) \times f(2) < 0$ d'après le TVI il existe $1 \leq \alpha \leq 2$ tel que $f(\alpha) = 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	



Conséquence :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.

Image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue :

Théorème :

Si f est continue sur $[a,b]$ alors $f([a,b])=[m,M]$

Où m est le minimum de f sur $[a, b]$ et M est le maximum de f sur $[a ,b]$.

Cas des fonctions monotones :

Théorème :

* Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini).
  Si f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b.
  Si f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ en b.

* Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a,b]$(a fini ou infini).
  Si f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en a .
  Si f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en a .

Théorème :

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et monotone sur I est un intervalle de même nature.

Exemples :

Intervalle I	f est croissante sur I	f est décroissante sur I
$I = [\ a\ ,\ b\ ]$	$f(I) = [\ f(a)\ ,\ f(b)\ ]$	$f(I) = [\ f(b)\ ,\ f(a)\ ]$
$I = [\ a\ ,\ b\ [$	$f(I) = [\ f(a)\ ,\ \lim\limits_{x\to b^-} f\ [$	$f(I) = [\ \lim\limits_{x\to b^-} f\ ,\ f(a)\ [$
$I = [\ a,+\infty\ [$	$f(I) = [\ f(a)\ ,\ \lim\limits_{x\to +\infty} f\ [$	$f(I) =]\ \lim\limits_{x\to +\infty} f\ ,\ f(a)\ ]$
$I =]\ a\ ,\ b\ [$	$f(I) = [\ \lim\limits_{x\to a^+} f,\ \lim\limits_{x\to b^-} f\ [$	$f(I) = [\ \lim\limits_{x\to b^-} f,\ \lim\limits_{x\to a^+} f\ [$

Exemple