TD suites numériques

Ex 1

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Donner une démonstration de chaque assertion vraie, et donner un contre-exemple de chaque assertion fausse.

1. Si une suite positive est non majorée, elle tend vers l'infini.
2. Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire à partir d'un certain rang.
3. Si une suite positive tend vers zéro, elle est décroissante.
4. Si une suite positive tend vers zéro, elle est décroissante à partir d'un certain rang.
5. Si une suite n'est pas majorée, elle est minorée.
6. Si une suite est croissante et non bornée, elle tend vers l'infini.

Ex 2

Etudier la convergence des suites

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n} \ , \quad \frac{n\, sin(n)}{n^2+1} \ , \quad \frac{1}{n} + (-1)^n \ , \quad n \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k} \ , \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} cos \frac{1}{\sqrt{n+k}}$$

Ex 3

On considère les deux suites $(Un)_{n \in N}$et $(Vn)_{n \in N}$ définies par

un = Xn k=0 1 k! et vn = un + 1 n! .

1. Montrer que$(Un)_n$ est strictement croissante, et que $(Vn)_n$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang.
2. En déduire que $(Un)_n$ et $(Vn)_n$ convergent vers une même limite l.
3. Montrer que cette limite est irrationnelle.

Ex 4

Soit $(u_n)_{n \in N}$ définie par u_0 = 1 et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$$

Et soit $(v_n)_{n \in N}$ définie par

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

1. Montrer que $(v_n)_{n \in N}$ est une suite géométrique de raison $\frac{-3}{5}$
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Montrer que $(u_n)_{n \in N}$ converge et déterminer sa limite.