Méthodes :Analyse asymptotique

Démontrer qu'une fonction f est dérivable en a

- on peut utiliser la définition avec le taux d'accroissement particulier, si on veut démontrer que f **n'est pas** dérivable en a, c'est presque toujours ainsi que l'on procèdera.
- on peut appliquer le théorème de prolongement d'une dérivée

Démontrer des formules faisant intervenir la dérivée d'ordre n d'une fonction

- il s'agit souvent d'appliquer le théorème de Rolle à la bonne fonction

Calculer la dérivée n-ième d'une fonction

- on peut appliquer la formule de Leibniz
- on peut calculer les premières dérivées, conjecturer le résultat et procéder par récurrence

Étudier des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ et (u_n) une suite définie par $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- on peut démontrer que $|f'| \leq k < 1$ sur $I = [a,b]$.
- on démontre ensuite que f admet un point fixe γ dans $[a,b]$ à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $g(x) = f(x) - x$.
- on utilise l'inégalité des accroissements finis pour démontrer par récurrence sur n que

$$|u_n - \gamma| \leq k^n |u_0 - \gamma|.$$

Obtenir des inégalités

L'égalité et l'inégalité des accroissements finis permettent souvent d'obtenir des inégalités. Par exemple, si on applique l'égalité des accroissements finis entre a et b, on peut souvent contrôler la différence $f(a) - f(b)$ si on connait des informations sur la dérivée f' sur $[a,b]$

Composition de deux développements limités

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J, de sorte que $f(I) \subset J$. On suppose que f admet en a le développement limité suivant :

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n).$$

On suppose que g admet en $f(a) = b$ le développement limité suivant :

$$g(f(a)+k) = b_0 + b_1 k + b_2 k^2 + \cdots + b_n k^n + o(k^n).$$

Alors le développement limité de $g \circ f$ en a s'obtient en posant

$$k = a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n),$$

en calculant les puissances k^2, k^3,..., mais en tronquant à l'ordre n, et en remplaçant ces puissances par leur nouvelle expression dans le développement limité de g

Inverse d'un développements limité - Quotient de deux développements limités

Si g admet un développement limité en a à l'ordre n, de la forme

$$g(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n),$$

alors on obtient le développement limité de $\frac{1}{g}$ en a en commençant par factoriser par a_0 :

$$\frac{1}{g(a+h)} = \frac{1}{a_0} \times \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0} h + \cdots + \frac{a_n}{a_0} h^n + o(h^n)}$$

puis on compose avec le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ comme indiqué ci-dessus.

Pour obtenir le développement limité d'un quotient f/g, on multiplie le développement limité de f par le développement limité de l'inverse $1/g$ calculé ci-dessus.

Développement limité d'une fonction réciproque

Pour calculer le développement limité d'une fonction réciproque f^{-1} au voisinage de $f(a)$:

- on calcule le développement limité de f en a.
- on écrit de façon formelle le développement limité de f^{-1} en $f(a)$:

$$f^{-1}(f(a)+h)=a+a_1h+\cdots+a_nh^n+o(h^n).$$

- on écrit que $f\circ f^{-1}(x)=x$. On calcule (formellement) le développement limité de $f\circ f^{-1}(x)$ en composant des développements limités. Puis on utilise l'unicité des développements limités et l'écriture $f\circ f^{-1}(x)=x$ pour identifier les coefficients.

Détermination d'une asymptote

Pour déterminer une asymptote à la courbe représentative de $y=f(x)$ au voisinage de $+\infty$, on essaie d'obtenir un développement asymptotique de la fonction du type

$$f(x)=ax+b+o(1).$$

Dans ce cas, la droite $y=ax+b$ est asymptote à la courbe au voisinage de l'infini. Si on veut étudier de plus la position de la courbe par rapport à cette asymptote, on cherche le terme suivant du développement asymptotique