Méthodes: polynômes

Trouver le reste dans la division euclidienne

Pour trouver le reste de la division euclidienne de A par B, on peut :

- écrire le résultat de la division euclidienne $A = BQ + R$, en écrivant formellement $R = \sum_{n=0}^{p} a_n X^n$;
- Évaluer l'équation $A = BQ + R$ en les racines de B;
- On trouve alors un système linéaire vérifié par les coefficients de R;
- Si B est scindé, il y a autant d'équations que d'inconnues et on résout le système;
- Sinon, on dérive l'équation $A = BQ + R$, et on évalue l'équation aux racines doubles de B;
- Et ainsi de suite si B admet des racines d'ordre 3,4,...

Démontrer que B divise A

Pour démontrer que B divise A, on peut

- Effectuer la division euclidienne de A par B et démontrer que le reste est nul

- Si B est scindé, vérifier que toute racine x de B de multiplicité m est racine de A de multiplicité $m' \geq m$, par exemple en vérifiant que $A(a) = A'(a) = \cdots = A^{(m-1)}(a) = 0$

Décomposer un polynôme en produit d'irréductibles

Pour décomposer un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ en produits d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, on trouve des racines $b_1, \ldots, b_q$ de P en cherchant des racines évidentes, en utilisant les résultats que l'on connait sur les nombres complexes (résolution des équations de degré 2, recherche de racines n-ièmes) ou en suivant les indications de l'énoncé. On peut alors factoriser P en

$$P(X) = (X - b_1) \cdots (X - b_p) Q(X)$$

et on recommence avec Q

Pour décomposer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, peut commencer par le décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis regrouper les facteurs correspondants à deux racines non réelles conjuguées

Propriétés sur les racines

Pour démontrer des propriétés sur les racines d'un polynôme, ou utiliser des propriétés connues sur les racines d'un polynôme, on utilise très souvent les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme