# Méthodes: Suites

## Démontrer qu'une suite ne converge pas

Pour démontrer qu'une suite $(u_n)$ est divergente,

- on peut trouver deux suites extraites de $(u_n)$ qui convergent vers des valeurs différentes;
- on peut la minorer par une suite tendant vers $+\infty$.

## Pour lever une forme indéterminée

- on peut essayer de factoriser par le terme dominant, puis utiliser des équivalents ou des développements limités;
- on peut utiliser la quantité conjuguée si on a la différence de deux racines carrées;
- on peut encadrer la suite et appliquer le théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes).

## Pour démontrer qu'une suite $(u_n)$ est monotone

- on peut étudier la différence $u_{n+1} - u_n$;
- si la suite est strictement positive, on peut étudier le quotient $u_{n+1}/u_n$;
- on peut essayer de prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$; ceci est particulièrement adapté pour les suites définies par une relation de récurrence.

## Étude des suites récurrentes

Voici une méthode générale pour étudier une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : D \to \mathbb{R}$ est continue et $u_0 \in D$.

- Étape 1 : Étudier la fonction $f$ sur son ensemble de définition (monotonie, croissance,...)
- Étape 2 : Résoudre l'équation aux limites possibles $f(l) = l$. En effet, si la suite $(u_n)$ converge, sa limite sera solution de cette équation. Pour résoudre cette équation, on peut parfois s'aider du résultat de l'étape 1.
- Étape 3 : Déterminer un intervalle $I$ stable par $f$ sur lequel $f$ est monotone, et tel que $u_0 \in I$. On sait alors que $u_n \in I$ pour tout $n \geq 0$. Souvent, c'est le tableau de variations de $f$ qui donne la réponse.
  Il est des cas où on ne peut pas y arriver pour $u_0$, mais où c'est vrai pour $u_1$, ou $u_2$. Par exemple, si $u_{n+1} = u_n^2$ et $u_0 = -2$, alors $u_1 = 4$ est dans l'intervalle $[0, +\infty[$ qui est stable par $f : x \mapsto x^2$, et sur lequel cette fonction est croissante.
- Etape 4 - premier cas : la fonction $f$ est croissante sur $I$.
  Dans ce cas, la suite $(u_n)$ est monotone sur $I$. Son sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$. Si $u_1 \geq u_0$, alors $(u_n)$ est croissante, sinon $(u_n)$ est décroissante. On conclut alors souvent de l'une des 2 façons suivantes :
  - On arrive à prouver que $(u_n)$ est bornée (parce que $I$ l'est par exemple). Dans ce cas, on applique le théorème de convergence des suites croissantes majorées, et on détermine la limite grâce à l'équation aux limites possibles.
  - On prouve que $(u_n)$ est croissante, et on sait que $u_0$ est supérieur strict à toute solution de $f(l) = l$. Alors $f$ ne peut pas converger, sinon sa limite vérifierait $l \geq u_0$ et ne pourrait pas être solution de l'équation aux limites possibles. Et une suite croissante qui ne converge pas tend nécessairement vers $+\infty$.

- Etape 4 - deuxième cas : la fonction $f$ est décroissante sur $I$.
  Dans ce cas, on pose $g = f \circ f$, qui est croissante sur $I$, puis $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
  Alors $(v_n)$ et $(w_n)$ vérifient la relation de récurrence $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$, avec $g$ croissante sur l'intervalle $I$. On se ramène donc à étudier les suites $(v_n)$ et $(w_n)$ comme dans le cas précédent.
  Rappelons que la suite $(u_n)$ converge si et seulement si $(v_n)$ et $(w_n)$ convergent vers la même limite.