# nombres complexes et trigonométrie

## 1)Nombres complexes

### a)définition :

- Un nombre complexe est un nombre z qui s'écrit $z=a+ib$,
(avec $a,b \in \mathbb{R}$ et $i^2=-1$.)

L'ensemble des nombres complexes est noté C.

a est la partie réelle de z, et b sa partie imaginaire.

- Le conjugué de $z=a+ib$ est le complexe $\overline{z}=a-ib$
- Le module de $z=a+ib$ est le réel positif $|z|=\sqrt{a2+b2}$

On a aussi $|z|^2=z\overline{z}$

- Le module vérifie l'inégalité triangulaire

$\forall(z,w)\in C2, |z+w|\leq|z|+|w|$

Si $w\neq 0$ et $z\neq 0$, on a égalité dans cette inégalité si et seulement s'il existe $c>0$ tel que $z=cw$

## 2) Nombres complexes de module 1 - Trigonométrie

On note UU l'ensemble des nombres complexes de module 1, qui se représente géométriquement par le cercle trigonométrique. Ainsi, pour tout nombre complexe z de module 1, il existe un réel θ tel que $z=\cos\theta+i\sin\theta$.

On note alors $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

### a) Formule d'Euler

$$\boxed{\text{Cos}\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{i\theta}}{2}}$$

$$\boxed{\text{Sin}\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{i\theta}}{2}}$$

### b) Formule de Moivre

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

### C) Formules de trigonométrie :

- $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

- $\sin(a-b)=\sin a \cos b-\sin b \cos a\cos(a+b)=\cos a \cos b-\sin a$ $\sin b\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a \sin b$
- $\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a\sin(2a)=2\sin a\cos a\cos(a)\cos(b)$ $=1/2(\cos(a+b)+\cos(a-b))$
- $\sin(a)\sin(b)=1/2(\cos(a-b)-\cos(a+b))$
- $\sin(a)\cos(b)=1/2(\sin(a+b)+\sin(a-b))$
- $\tan(a+b)= = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$
- $\tan(a-b)= \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

## 3) Argument - forme trigonométrique

**Théorème et définition :** Pour tout nombre complexe non nul, il existe un réel θ tel que $z=|z|\ e^{i\theta}$. Tout réel θ vérifiant cette égalité s'appelle un **argument** de z et l'écriture $z=|z|\ e^{i\theta}$ s'appelle **forme trigonométrique** de z.

Ainsi, deux arguments de z sont égaux modulo 2π. En particulier, si $r,r'>0$et $\theta,\theta'\in R$ on a

$r\ e^{i\theta} =r'\ e^{i\theta'}\Leftrightarrow r=r'$ et $\theta=\theta'$.

**Théorème (propriétés algébriques de l'argument)** :

Soit z et z′ deux nombres complexes non nuls.

$$\text{Alors } \arg(zz')\equiv\arg z+\arg(z')\ [2\pi]$$

$$\arg(zz')\equiv\arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]$$

$$\arg(\bar{z})\equiv-\arg(z)\ [2\pi].$$

## 4) Équations du second degré

**Proposition** : Pour tout nombre complexe aa non nul, l'équation $z^2=a$ possède deux solutions distinctes opposées.

**Théorème** : Si a,b,c sont des complexes avec $a\neq 0$, alors
l'équation $az2+bz+c=0$ possède deux solutions éventuellement égales,

$z_1= \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2= \frac{-b+\delta}{2a}$

où δ est une des deux solutions de l'équation $z^2=\Delta$, avec $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant.

Si $z_1$et $z_2$ sont les deux racines de l'équation $az^2+bz+c=0$, alors

$z_1+z_2= -b/a$

$z_1\times z_2=c/a$.

## 5) Racines n-ièmes

**Théorème :** Pour tout nombre complexe $a \neq 0$ et tout $n \geq 1$, l'équation $z^n = a$ possède $n$ solutions, qu'on appelle les **racines n-ièmes** de $a$. De plus, si $a = r\,e^{i\theta}$ est une forme trigonométrique de $a$, alors les solutions de $z^n = a$ sont les complexes

$z = r^{1/n} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ , $k = 0, \ldots, n-1$

Plus spécifiquement, les solutions de $z^n = 1$, avec $n \geq 1$, s'appellent les racines n-ièmes de l'unité. On note $U_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité et on remarque que le théorème précédent implique que

$U_n = \{e^{i\,2k\pi/n} : k = 0, \ldots, n-1\}$.

Ainsi, les points dont les affixes sont éléments de $U_n$ forment une partie du cercle unité. De plus, ce sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

## 6) Exponentielle complexe

$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$ , $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in R$

**Propriétés :**

- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ ( Car $\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$ **)**
- $|e^{i\theta}| = 1$ ( Car $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$ **)**
- $e^{i\theta} . e^{-i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$