SYSTÈMES DES COORDONNÉES
A AXES ORTHOGONAUX

A1-1 INTRODUCTION

Suivant les bases de projection utilisées, plusieurs systèmes des coordonnées peuvent être utiliser pour repérer la position d'un point matériel M (cartésien, cylindrique et sphérique). Les vecteurs de bases de ces systèmes sont tous unitaires et orthogonaux deux à deux. Dans ce chapitre nous allons définir ces quatre types de systèmes des coordonnées à axes orthogonaux ainsi que les déplacements, surfaces et volumes élémentaires associés. Des exemples de calculs d'intégrale permettront alors de montrer l'importance de ces éléments différentiels.

A1-2 COORDONNEES CARTESIENNES

A1-2.1 Définition

Soit (Oxyz) un système d'axes rectanglaire auquel on associe une base orthonormée direct $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, (Figure A1-1).

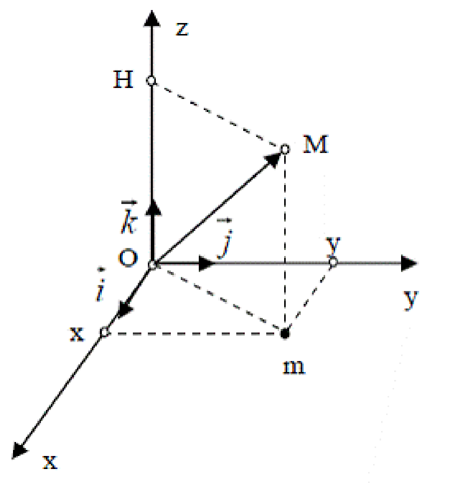

Figure A1-1

Soit M un point matériel

La projection orthogonale de M dans le plan (Oxy) est notée : m et sa projection sur l'axe Oz est notée : H

Le point M est alors repéré par trois distances. Le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ s'écrit donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OH} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

x, y et z sont obtenus en projetant orthogonalement le vecteur position respectivement sur les trois axes Ox, Oy et Oz. $x = \overrightarrow{OM}.\vec{i}$; $y = \overrightarrow{OM}.\vec{j}$ et $z = \overrightarrow{OM}.\vec{k}$.

Les coordonnées cartésiennes d'un point M sont dénommées :

x est l'abscisse du point M (-∞ < x < + ∞)

y est l'ordonnée du point M (-∞ < x < + ∞)

z est la cote de M (-∞ < x < + ∞)

Les vecteurs de base du système des coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont définis par :

* $\vec{i}$ est un vecteur unitaire orienté vers x positif

* $\vec{j}$ est un vecteur unitaire orienté vers y positif

* $\vec{k}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire (⊥) aux deux autres vecteurs de base et orienté vers z positif (tel que le trièdre $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ soit direct). Autrement, il est défini par : $\vec{k}=\vec{i}\wedge\vec{j}$

A1-2.2 Vecteur déplacement élémentaire

Considérons un point M(x,y,z) et le point M'(x+dx, y+dy, z+dz) obtenu en faisant déplacer les trois composantes de M respectivement de dx, dy et dz parallèlement aux vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$, et $\vec{k}$ (Figure A1-2).

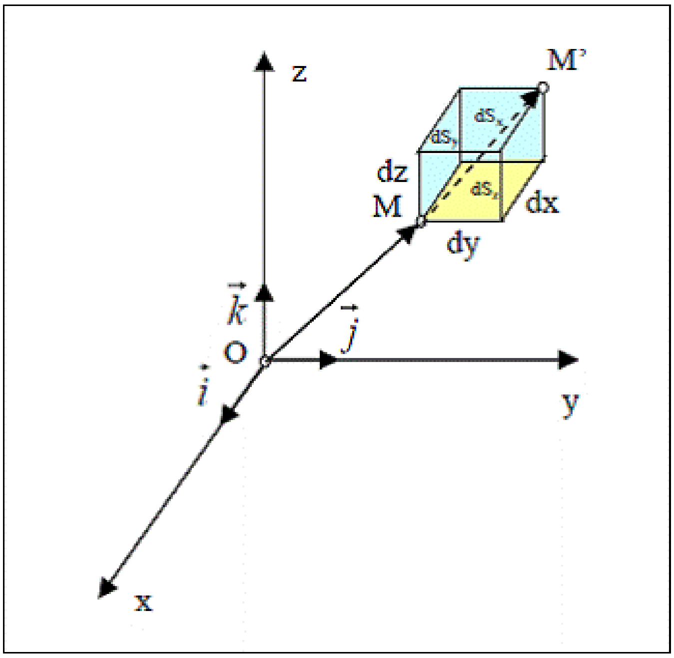

Figure A1-2

Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$\begin{aligned}d\vec{r} &= d(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}\\ &= d(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\\ &= dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}\end{aligned}$$

Ainsi, le déplacement élémentaire du point M à M.' est équivalent à trois déplacements élémentaires parallèlement aux vecteurs de base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) respectivement égaux à dx, dy et dz.

Les projections du vecteur déplacement élémentaire sur la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) s'obtiennent en faisant varier de façon infinitésimale une des coordonnées en laissant les deux autres constantes

La norme du vecteur déplacement est donnée par (Figue A1-2):

$$\left\|d\vec{r}\right\|=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

Le déplacement de M à M' engendre un volume élémentaire limité par six surface parallèles deux à deux dont $d\vec{r}$ est une diagonale principale.

A1-2.3 Surfaces élémentaires

Les surfaces élémentaires sont les surfaces décrites par le point M(x,y,z) lorsque l'on fait varier deux de ses coordonnées d'une quantité élémentaire en maintenant la troisième constante.

Ainsi, la surface rectangulaire élémentaire (ou élément de surface) perpendiculaire à Ox est la surface à x constante et pour y varie de dy et z de dz :

$$dS_x=\left\|d\vec{r}_y\wedge d\vec{r}_z\right\|=\left\|dy\vec{j}\wedge dz\vec{k}\right\|=dydz$$

De même si y puis z sont maintenus constantes, nous avons :

$$dS_y=\left\|d\vec{r}_x\wedge d\vec{r}_z\right\|=\left\|dx\vec{i}\wedge dz\vec{k}\right\|=dxdz$$

avec, dS_y est la surface perpendiculaire à y

$$dS_z=\left\|d\vec{r}_x\wedge d\vec{r}_y\right\|=\left\|dx\vec{i}\wedge dy\vec{j}\right\|=dxdy$$

avec, dS_z est la surface perpendiculaire à z

Remarque

Les vecteurs éléments de surfaces sont orientés vers la normale extérieure à l'élément de surface considéré.

A1-2.4 Volume élémentaire

L'élément de volume est le volume décrit par les trois déplacements élémentaires lorsque l'on fait varier les trois coordonnées du point M d'une quantité élémentaire. Ce volume élémentaire est donné par le produit mixte suivant :

$$d\tau=dx\vec{i}.(dy\vec{j}\wedge dz\vec{k})=dx\vec{i}.(dydz\vec{i})=dxdydz$$

A1-3 COORDONNÉES CYLINDRIQUES

A1-3.1 Coordonnées polaires

A1-3.1.1 Définition

Soit (Oxy) un système d'axes cartésien plan (Figure A1-3).

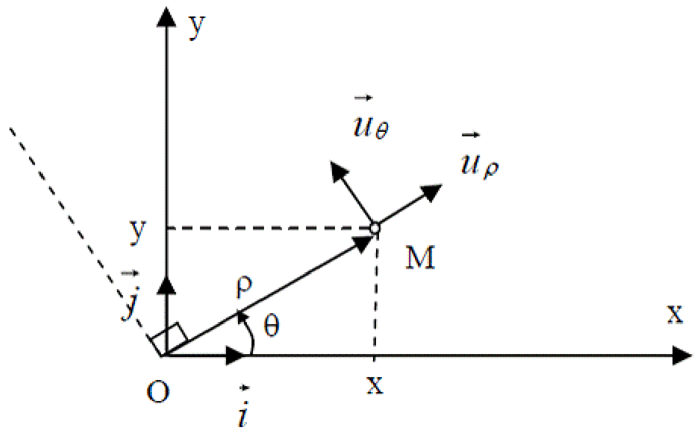

Figure A1-3

Dans le plan (Oxy), un point M est repéré en coordonnées cartésiennes par son abscisse x et son ordonnée y (deux distances). En coordonnées polaires, M est repéré en par une distance et un angle définis par :

ρ : distance du point M à l'origine O, $0 \le \rho < +\infty$

$$\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$$

θ : l'angle du dièdre direct (sens positif) appelé angle polaire (,) , $0 \le \theta \le 2\pi$.

Les vecteurs de base du système polaire sont (ρ, θ) :

* ρ : vecteur unitaire porté par le vecteur position OM

* θ : vecteur unitaire dirigé suivant θ croissants

A1-3.1.2 Relations entre les coordonnées cartésiennes et polaires

En coordonnées cartésiennes, le vecteur position s'écrit :

En projetant le vecteur position (Figure A1-3), nous avons :

A partir de ces deux relations, nous obtenons :

En projetant les vecteurs (ρ, θ) dans le système de coordonnées cartésiennes, nous obtenons (figure A1-4) :

$$\vec{u}_\rho = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$$
$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$$

A1-3.1.3 Expressions du vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \rho(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) = \rho \vec{u}_\rho$$

A1-3.1.4 Dérivation angulaires des vecteurs de base

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} = \cos(\theta + \pi/2)\vec{i} + \sin(\theta + \pi/2)\vec{j}$$

$\frac{d\vec{u}\,\rho}{d\vec{u}\,\theta}$ se déduit de $\vec{u}\,\rho$ en faisant tourner $\vec{u}\,\rho$ de π/2 dans le sens trigonométrique (sens positif ou le sens des θ croissants).

Ce résultat est général: la dérivée par rapport à l'angle polaire θ(t) d'un vecteur unitaire, dont l'orientation varie au cours du temps, est un autre vecteur unitaire tourné par rapport au premier, d'un angle π/2 dans le sens positif.

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}=\vec{u}_\theta$$

de même,

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}=-\vec{u}_\rho$$

A1-3.1.5 Déplacement élémentaire

Considérons un point M(ρ, θ) et le point M'(ρ + dρ, θ + dθ) obtenu en faisant déplacer les deux composantes de M respectivement de dρ et dθ parallèlement aux vecteurs de base polaires et $\vec{u}\,\theta$ (Figure A1-5).

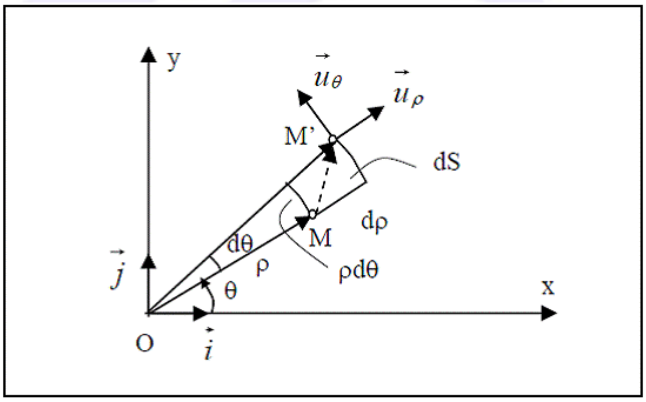

Figure A1-5

Puisque les vecteurs de base polaires changent de direction d'un point à un autre, le vecteur déplacement élémentaire s'écrit en coordonnées polaires :

$$d\vec{r}=d(\rho\vec{u}_\rho)=d\rho\vec{u}_\rho+\rho d\vec{u}_\rho$$

Or,

$$d\vec{u}_\rho(\theta)=(\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta})d\theta=d\theta\vec{u}_\theta$$

$$d\vec{r}=d\rho\vec{u}_\rho+\rho d\theta d\vec{u}_\theta$$

Les projections du vecteur déplacement élémentaire sur la base ($\vec{u}\,\rho$,$\vec{u}\,\theta$) s'obtiennent en faisant varier de façon infinitésimale l'une des coordonnées en laissant l'autre constante :

* La variation de ρ à θ constant : dρ $\vec{r}$ =dρ $\vec{u}\,\rho$

* La variation de θ à ρ constant : dθ $\vec{r}$=ρdθd $\vec{u}\,\theta$

Cette relation peut être également déterminer géométriquement suivant la Figure A1-5 en négligeant les déplacements de second ordre.

La norme du vecteur déplacement élémentaire est la longueur de la première diagonale de la surface élémentaire : $\left\|\vec{dr}\right\| = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2}$

A1-3.1.6 Surface élémentaire

La surface élémentaire décrit par les deux déplacement parallèlement aux vecteurs de base polaires est donnée par :

$$dS = \left\|\vec{dr}_\rho \wedge \vec{dr}_\theta\right\| = \left\|d\rho \vec{u}_\rho \wedge \rho d\theta \vec{u}_\theta\right\| = \rho d\rho d$$

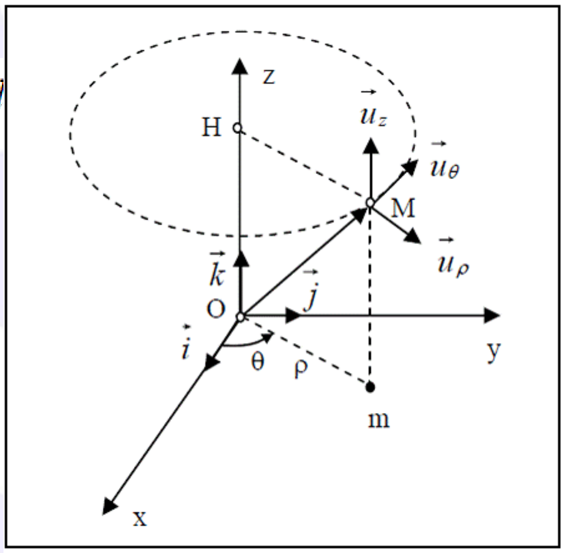

Figure A1-6

A1-3.2 Coordonnées cylindriques

A1-3.2.1 Définition

Dans le système des coordonnées cylindriques, un point M est repéré par deux distances et un angle M(ρ, θ, z).

Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OH}$

avec, m=proj Oxy (M) et H=proj Oz (M)

Puisque le plan Oxy est muni d'un système de coordonnées polaires, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$$

avec, ρ et θ ont la même signification que celles en coordonnées polaires. z la même signification en coordonnées cartésiennes.

* $\rho = \left\|\overrightarrow{Om}\right\|$; $0 \le \rho < +\infty$
* $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om})$: anglepolaire; $0 \le \theta \le 2\pi$
* z : cote

Les vecteurs de base du système cylindriques ($\vec{u}\rho$, $\vec{u}\theta$, $\vec{u}z$) sont définis par :

* $\vec{u}\rho$, $\vec{u}\theta$ sont les vecteurs de base d'un système des coordonnées polaires associé au point m ($\vec{u}\rho$ vecteur unitaire porté par le vecteur Om ; $\vec{u}\theta$ vecteur unitaire dirigé suivant θ croissants)

Le système des coordonnées cylindriques est obtenus par une rotation d'un angle θ des vecteurs de base cartésiennes autour de l'axe Oz.

Les vecteurs $\vec{u}\rho$ et $\vec{u}\theta$ changent de direction d'un point à un autre, alors que $\vec{u}z$ est un vecteur constant.

A1-3.2.2 Relations entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

Avec x=ρcosθ ; y=ρsinθ ; z = z

A partir de ces deux relations (ou géométriquement), nous obtenons : $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

En projetant les vecteurs ($\vec{u}\rho$,$\vec{u}\theta$) dans le système de coordonnées cartésiennes, nous obtenons (Figures A1-3 et A1-4) :

$$\vec{u}_\rho=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}\ ;\ \vec{u}_\theta=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}\ ;\ \vec{u}_z=\vec{k}\,.$$

A1-3.1.3 Expressions du vecteur position

A1-3.2.4 Déplacement élémentaire

Considérons un point M(ρ, θ, z) et le point M'(ρ + dρ, θ + dθ, z + dz) obtenu en faisant déplacer les trois composantes de M respectivement de dρ, dθ et dz parallèlement aux vecteurs de base $\vec{u}\rho$,$\vec{u}\theta$ et $\vec{u}z$ (Figure A1-6).

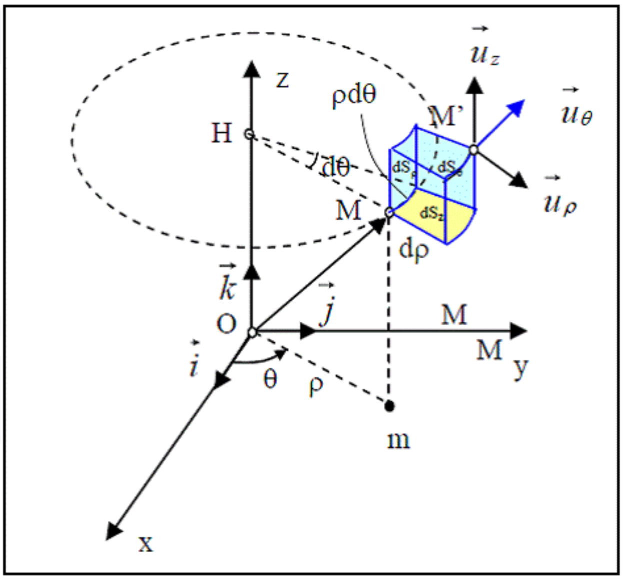

Figure A1-6

Puisque le vecteur $\vec{u}z$ ne change pas de direction d'un point à un autre d $\vec{u}z$ =$\vec{0}$ et le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{r}=d(\rho\vec{u}_\rho+z\vec{u}_z)=d\rho\vec{u}_\rho+\rho d\vec{u}_\rho+dz\vec{u}_z$$

$$\text{Or, } d\vec{u}_\rho=d\theta\vec{u}_\theta$$

$$d\vec{r}=d\rho\vec{u}_\rho+\rho d\theta\vec{u}_\theta+dz\vec{u}_z$$

Ce vecteur déplacement élémentaire peut être déterminé géométriquement

suivant la figure A1-6.

A1-3.2.5 Surfaces élémentaires

La surface élémentaire Sρ à ρconstant est : $dS_{\rho}=\left\|d\vec{r}_{\theta}\wedge d\vec{r}_{z}\right\|=\left\|\rho d\theta\vec{u}_{\theta}\wedge dz\vec{u}_{z}\right\|=\rho d\theta dz$

La surface élémentaire Sθ à θ constant est : $dS_{\theta}=\left\|d\vec{r}_{\rho}\wedge d\vec{r}_{z}\right\|=\left\|d\rho\vec{u}_{\rho}\wedge dz\vec{u}_{z}\right\|=d\rho dz$

La surface élémentaire Sz à z constant est : $dS_{z}=\left\|d\vec{r}_{\rho}\wedge d\vec{r}_{\theta}\right\|=\rho d\rho d\theta$

A1-3.2.6 Volume élémentaire

$$d\tau=d\rho\vec{u}_{\rho}.(\rho d\theta\vec{u}_{\theta}\wedge dz\vec{u}_{z})$$
$$=\rho d\rho\vec{u}_{\rho}.(d\theta dz\vec{u}_{\rho})$$
$$=\rho d\rho d\theta dz$$

A1-4 COORDONNÉES SPHÉRIQUES

A1-4.1 Définition

Dans ce système un point M(r, θ, ϕ) est repéré par deux angles et une distance définis par (Figure A1-7) :

* $r=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ distance de O à M ; $0 \leq r < +\infty$
* $\theta=(\overrightarrow{Oz},\overrightarrow{OM})$: colatitude de M ; $0 \leq \theta \leq \pi$
* $\varphi=(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Om})$, avec $m=proj_{Oxy}(M)$.

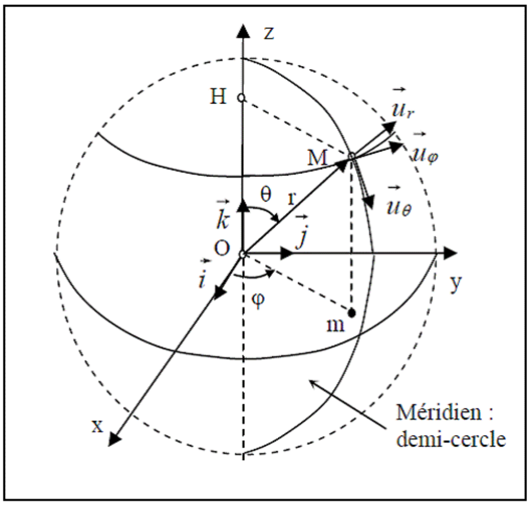

Figure A1-7

ϕ : longitude ou azimuth de M ; comme en coordonnées cylindriques $0 \leq \phi \leq 2\pi$

Les vecteurs de base du système sphérique ($\vec{u}_r$,$\vec{u}_{\theta}$,$\vec{u}_{\phi}$) sont définis par :

* $\vec{u}_r$: vecteur unitaire porté par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$

* $\vec{u}_{\theta}$: vecteur unitaire tangent au méridien et contenu dans le demi-plan méridien (Ozm) et il est dirigé suivant θ croissants.

$\vec{u}_{\phi}$: est un vecteur ⊥ Om (plan méridien) dirigé dans le sens de ϕ croissant. Ce vecteur est perpendiculaire aux deux autres vecteurs de base et tel que le trièdre ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_{\theta}$, $\vec{u}_{\phi}$) est direct :

$$\vec{u}_{\phi}= \vec{u}_r \wedge \vec{u}_{\theta}$$

Le système des coordonnées sphériques est obtenus par une double rotation des vecteurs de base cartésiennes ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). La première rotation d'un angle ϕ autour de k ; la deuxième d'un angle θ autour de $\vec{u}_{\phi}$.

A1-4.2 Relations entre les coordonnées cartésiennes et sphériques

Considérons le plan Oxy, et projetant le vecteur $\overrightarrow{Om}$ suivant les vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (Figure A1-8) :

En projetant le vecteur $\overrightarrow{Om}$ nous avons :

x=r* sinθ*cosϕ ; y=r*sinθ*sinϕ

La cote z n'est autre que la projection

du vecteur position sur l'axe Oz :

z=r*cosθ

avec, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

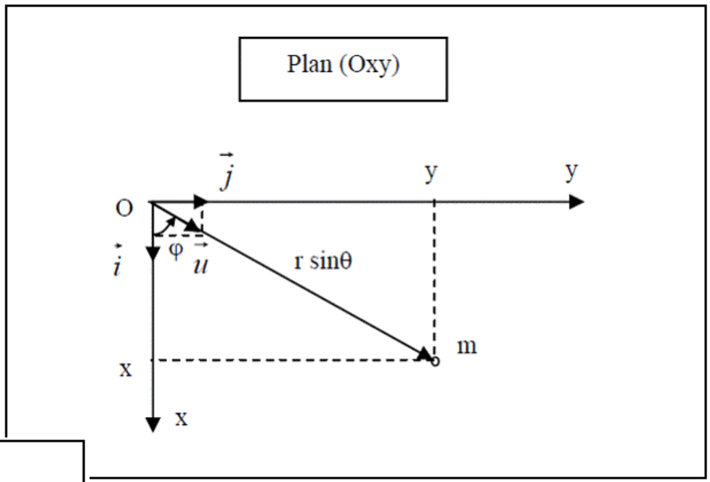

Figure A1-8

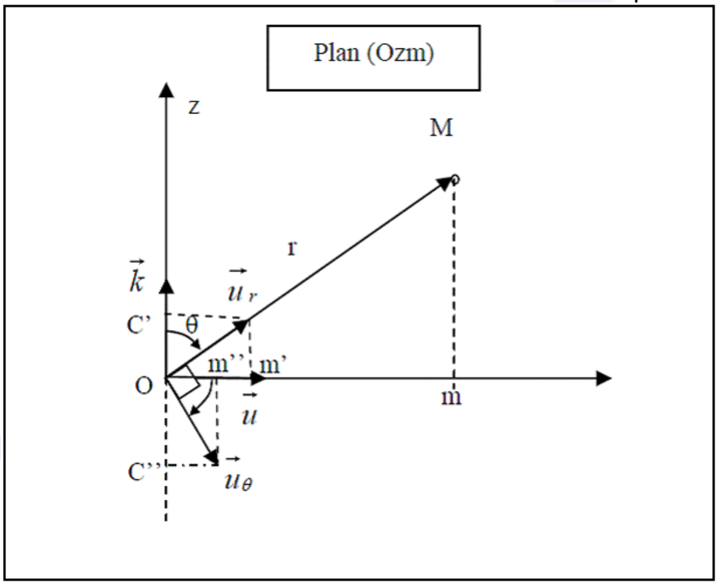

Figure A1-9

Pour trouver l'expression des vecteurs de base sphériques en fonction des vecteurs de base cartésiennes, considérons le plan (Ozm), avec m= $proj_{Oxy}$ j (M) et soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire porté par la droite Om.

$$\vec{u}_r=\overline{Om'}\vec{u}+\overline{OC'}\vec{k}=\sin\theta\vec{u}+\cos\theta\vec{k}$$
$$\vec{u}_\theta=\overline{Om''}\vec{u}+\overline{OC''}\vec{k}=\cos\theta\vec{u}-\sin\theta\vec{k}$$

Pour exprimer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par $\overrightarrow{Om}$ en fonction des vecteurs de base cartésienne, nous considérons le plan Oxy de la Figure A1-9.

$$\vec{u}=\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j}$$

d'où:

$$\vec{u}_r=\sin\theta(\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j})+\cos\theta\vec{k}=\sin\theta\cos\varphi\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\vec{j}+\cos\theta\vec{k}$$
$$\vec{u}_\theta=\cos\theta(\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j})-\sin\theta\vec{k}=\cos\theta\cos\varphi\vec{i}+\cos\theta\sin\varphi\vec{j}-\sin\theta\vec{k}$$

Connaissant $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, le troisième vecteur de base est donné par :

$$\vec{u}_\varphi=\vec{u}_r\wedge\vec{u}_\theta=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\end{vmatrix}=-\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j}$$

Le vecteur déplacement s'écrit :

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=r(\sin\theta\cos\varphi\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\vec{j}+\cos\theta\vec{k})=r\vec{u}_r$$

A1-4.4 Déplacement élémentaire

Considérons un point M(r, θ, ϕ) et le point M'(r + dr, θ+ dθ, ϕ + dϕ) obtenu en faisant déplacer les trois composantes de M respectivement de dr, dθ et dϕ parallèlement aux vecteurs de base sphériques $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\phi$ (Figure A1-10).

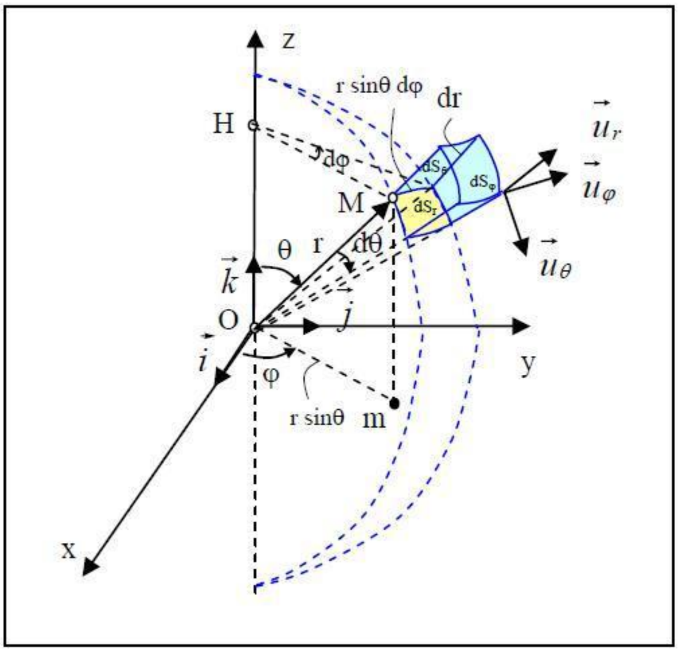

Figure A1-10

Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{r}=d(r\vec{u}_r)=dr\vec{u}_r+rd\vec{u}_r$$

$$\vec{u}_r=\sin\theta\cos\varphi\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\vec{j}+\cos\theta\vec{k}$$

$$d\vec{u}_r=\frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\varphi}d\varphi$$

$$=(\cos\theta\cos\varphi\vec{i}+\cos\theta\sin\varphi\vec{j}-\sin\theta\vec{k})d\theta+(-\sin\theta\sin\varphi\vec{i}+\sin\theta\cos\varphi\vec{j})d\varphi$$

d'où,

$$d\vec{u}_r=d\theta\vec{u}_\theta+\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

$$d\vec{r}=dr\vec{u}_r+rd\theta\vec{u}_\theta+r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

Les projections du vecteur déplacement élémentaire sur la base ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\phi$) s'obtiennent comme en coordonnées cylindriques en faisant varier de façon infinitésimale une des coordonnées en laissant les deux autres constantes :

* La variation de r à θ et ϕ constants : d $\vec{r}_r$ =dr $\vec{u}_r$

* La variation de θ à r et ϕ constants : d$\vec{r}_\theta$=rdθ $\vec{u}_\theta$

* La variation de ϕ à r et θ constants : d$\vec{r}_\phi$ =rsinθdϕ $\vec{u}_\phi$

A1-4.5 Surface élémentaire

Les vecteurs déplacements élémentaires d$\vec{r}_r$, d$\vec{r}_\theta$ et d $\vec{r}_\phi$ permettent de considérer les surfaces élémentaires suivantes:

$$dS_r=\left\|d\vec{r}_\theta\wedge d\vec{r}_\varphi\right\|=\left\|rd\theta\vec{u}_\theta\wedge r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi\right\|=r^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$dS_{\theta}=\left\|\vec{dr}_{\varphi}\wedge\vec{dr}_{r}\right\|=\left\|r\sin\theta d\varphi\vec{u}_{\varphi}\wedge dr\vec{u}_{r}\right\|=r\sin\theta dr d\varphi$$

$$dS_{\varphi}=\left\|\vec{dr}_{r}\wedge\vec{dr}_{\theta}\right\|=\left\|dr\vec{u}_{r}\wedge rd\theta\vec{u}_{\theta}\right\|=rdrd\theta$$

A1-4.6 Volume élémentaire

Les six surfaces élémentaires délimitent un volume élémentaire donné par :

$$d\tau=dr\vec{u}_{r}.(rd\theta\vec{u}_{\theta}\wedge r\sin\theta d\varphi\vec{u}_{\varphi})=r^{2}\sin\theta dr d\theta d\varphi$$

A1-6 CONCLUSION

Nous pouvons vérifier que les vecteurs de base qui définissent les différents systèmes des coordonnées sont unitaires, qu'ils sont orthogonaux deux à deux et formes des bases directes.

Les vecteurs position, déplacements élémentaires, surfaces élémentaires dépendent du système des coordonnées choisis pour les exprimer.

Les systèmes des coordonnées cylindriques sont utilisés dans les problèmes présentant une symétrie axiale de révolution.

Les systèmes des coordonnées sphériques sont utilisés dans les problèmes présentant une symétrie sphérique autour d'un point O.