Projekt 3
Aproksymacja profilu wysokościowego

Jakub Jabłoński
184938

20 maja 2022

1 Opis projektu

Celem projektu jest implementacja metod aproksymacji funkcji profilu wysokościowego, z użyciem metody Lagrange'a i z użyciem funckji sklejających.

2 Dane

W projekcie zostały użyte 3 profile wysokościowe, dla:

- Wielkiego Kanionu
- spacerniaku w Gdańsku
- Mount Everestu

3 Ilość punktów

Ostatnim punktem na którym będziemy przeprowadzać interpolację, będzie ostatni węzeł podany na początku, czyli:

- 11 próbek, 500 wszystkich punktów
- 21 próbek, 500 wszystkich punktów
- 52 próbek, 510 wszystkich punktów
- 103 próbek, 510 wszystkich punktów
- 256 próbek, 510 wszystkich punktów

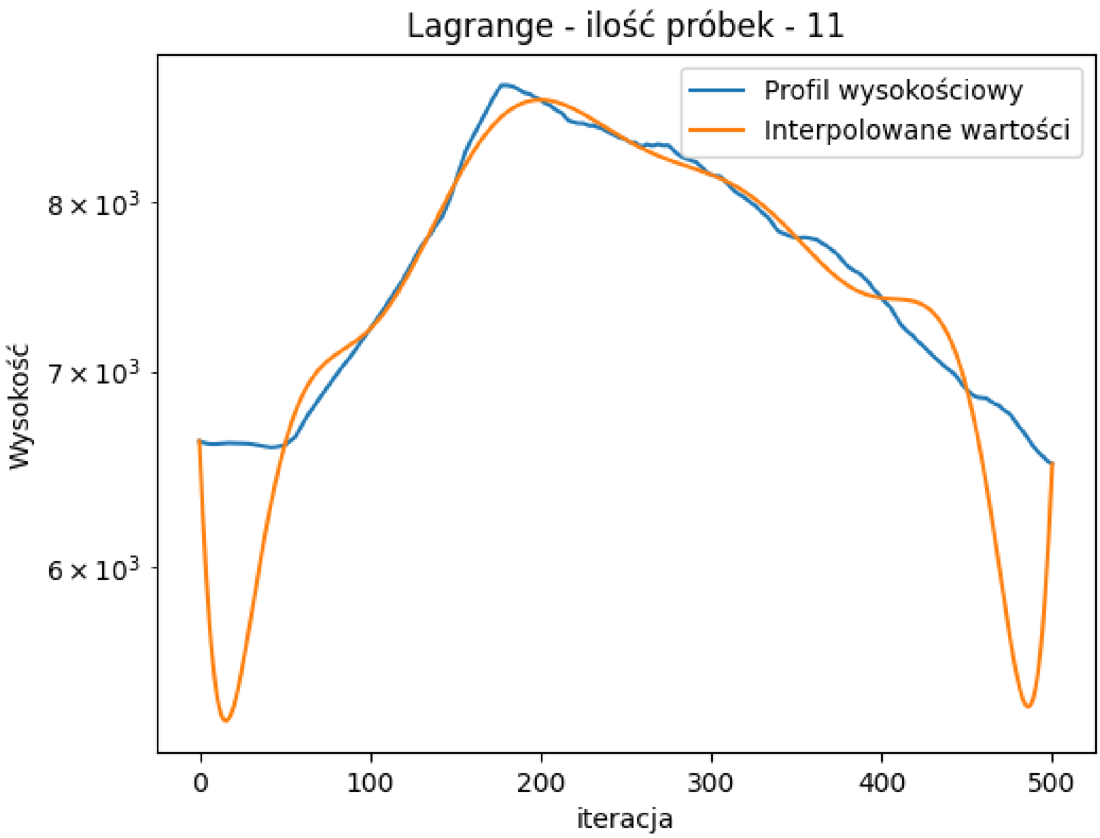
4 Metoda Lagrange'a

W metodzie Lagrange'a, będziemy tworzyć wielomian n stopnia, do czego potrzebujemy n+1 punktów. Wzór z którego będziemy korzystać to:

$$\phi_i = \prod_{i=1, j\neq i}^{n+1} (\frac{x - x_j}{x_i - x_j})$$

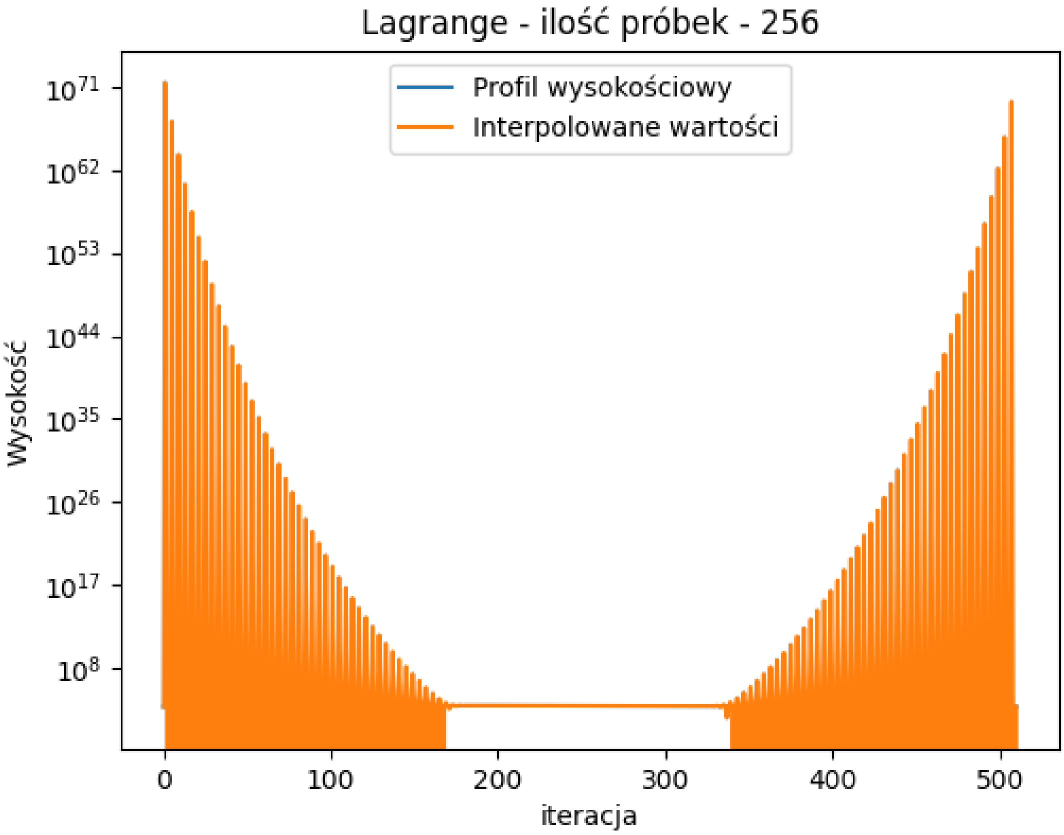
5 Wyniki dla metody Lagrange'a

Poniżej przedstawione wyniki dla interpolacji Lagrange'a dla różnych profili i różnej ilości puntków początkowych.



Rysunek 1: Mount Everest Interpolacja Lagrange'a dla 11 puntków

Dla małej ilości punktów i profili stale rosnących lub malejących, możemy zauważyć, że interpolacja poza błędami na krańcach przedziału (efekt Rungego), spisuje się nienajgorzej, dobrze wychwytując zmiany, czy dana funkcja rośnie czy maleje.
Problem pojawia się jednak dla dużej ilości węzłów początkowych:



Rysunek 2: Mount Everest Interpolacja Lagrange'a dla 256 puntków

Wykres jest nieczytelny, oraz błędy są zbyt duże do czytelnego określenia wartości dla puntków, które nie były podane.

6 Metoda funkcjami sklejanymi 3 stopnia

W metodzie splynowej, będziemy tworzyć układ równań, czyli macierz o wymiarach 4*(n-1) x 4*(n-1), oraz wektor o wymiarach 4*(n-1), gdzie n to ilość punktów początkowych. Pierwsze 2n równań jest wyliczane ze wzorów:

$$S_j(x_j) = f(x_j), dla j = 0, 1, ..., n-1$$
$$S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}), dla j = 0, 1, ..., n-1$$

Kolejne 2n-2 równań natomiast z:

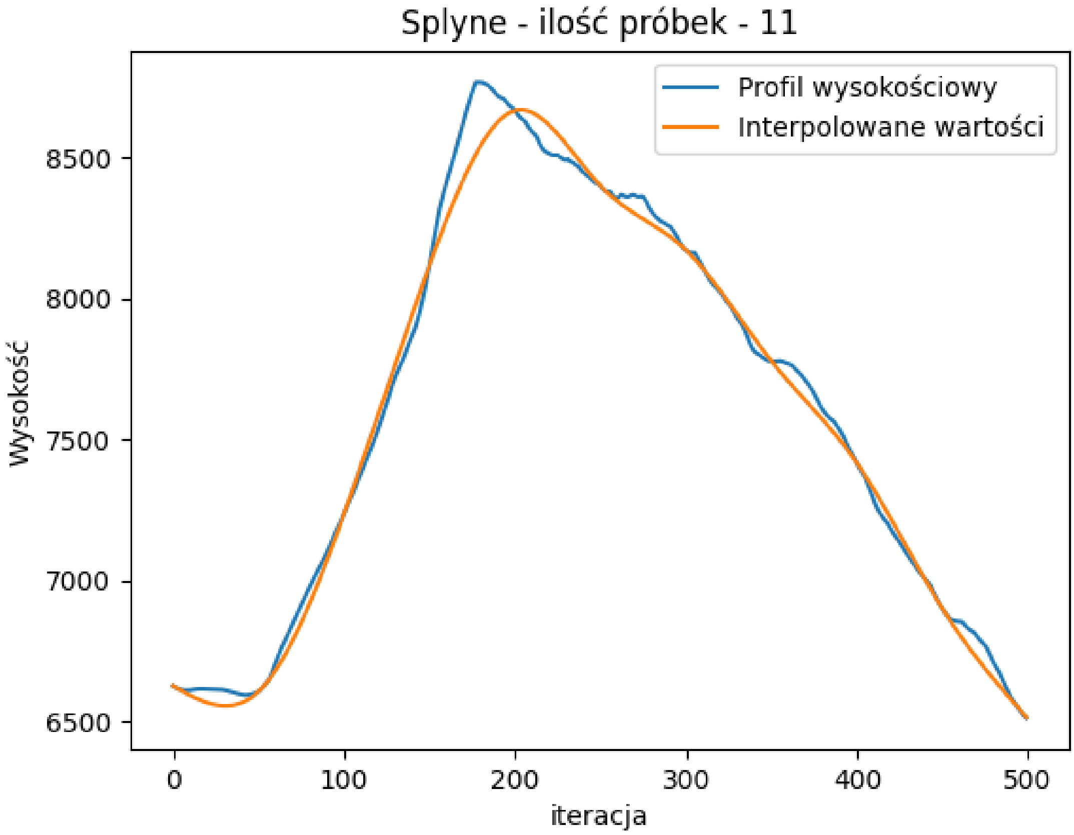
$$S'_{j-1}(x_j) = S'_j(x_j), dla j = 1, ..., n-1$$
$$S''_{j-1}(x_j) = S''_j(x_j), dla j = 1, ..., n-1$$

Ostatnie 2 równania ze wzorów:

$$S''_0(x_0) = 0$$
$$S''_{n-1}(x_n) = 0$$

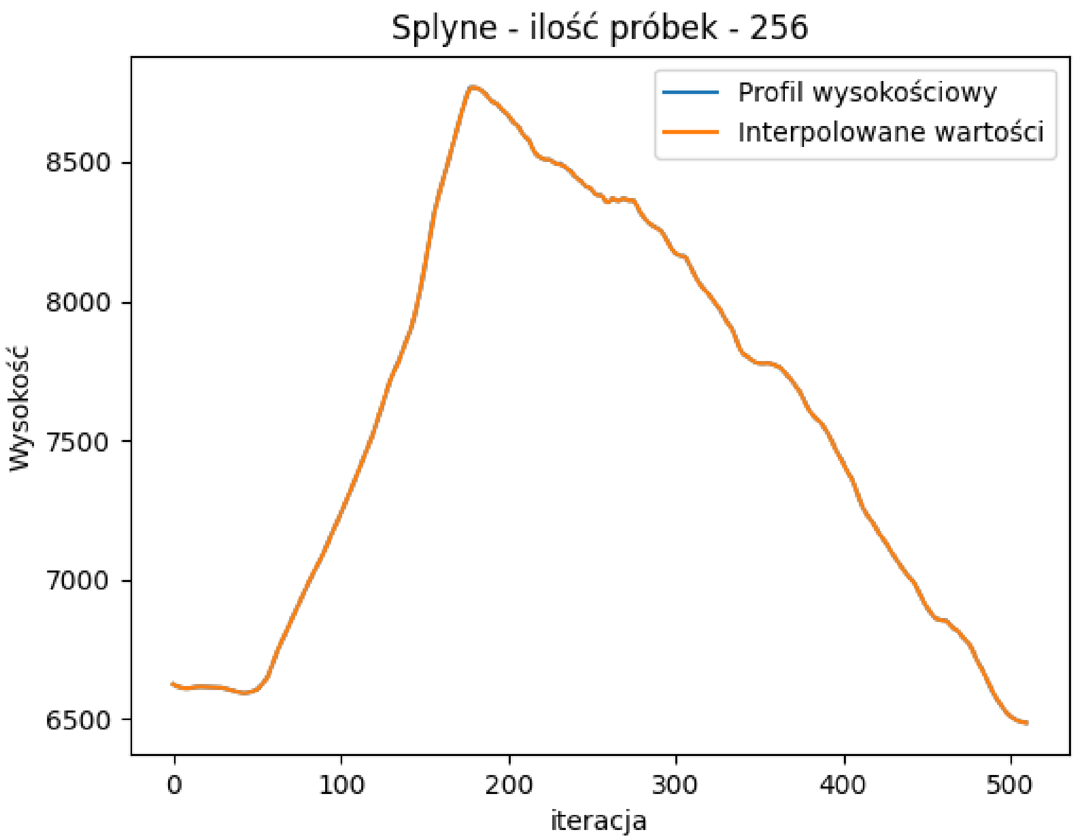
7 Wyniki na metody splajnowej

Tak jak dla metody Lagrange'a poniżej są przedstawione wyniki dla Mount Everestu dla 11 i 256 próbek:



Rysunek 3: Mount Everest Interpolacja splajnami dla 11 puntków

Już na pierwszy rzut oka można zauważyć, że funkcja jest lepiej interpolowana, między innymi ze względu na brak efektu Runggego.



Rysunek 4: Mount Everest Interpolacja splajnami dla 256 puntków

W przypadku 256 próbek mamy przeciwieńtwo tego co było w przypadku metody Lagrange'a, ponieważ interpolacja jest bardzo dokładna, i widzimy całkowity trend funkcji.

8 Wnioski

8.1 Wpływ liczby punktów węzłowych na wyniki

W przypadku metody Lagrange'a im większa liczba puntów tym większy efekt Rungego, najlepiej funkcja jest interpolowana w środku przedziału. Natomiast w przypadku metody splajnowej im więcej punktów węzłowych, tym większa dokładność funkcji interpolowanej.

8.2 Wpływ rozmieszczenia punktów węzłowych na wyniki

Ma to duże znaczenie w momencie gdy wysokość nagle rośnie i po kilku iteracjach spada, wtedy jest możliwość dla obu metod, że w momencie gdy żaden z punktów nie będzie w tym przedziale nagłego wzrostu, to będzie to pominięte w naszej funkcji. I zamiast skoku będzie funkcja stale rosnąca\malejąca. Nie ma to, aż tak dużego wpływu, gdy odchylenia są małe.

8.3 Wpływ charakteru trasy na wyniki

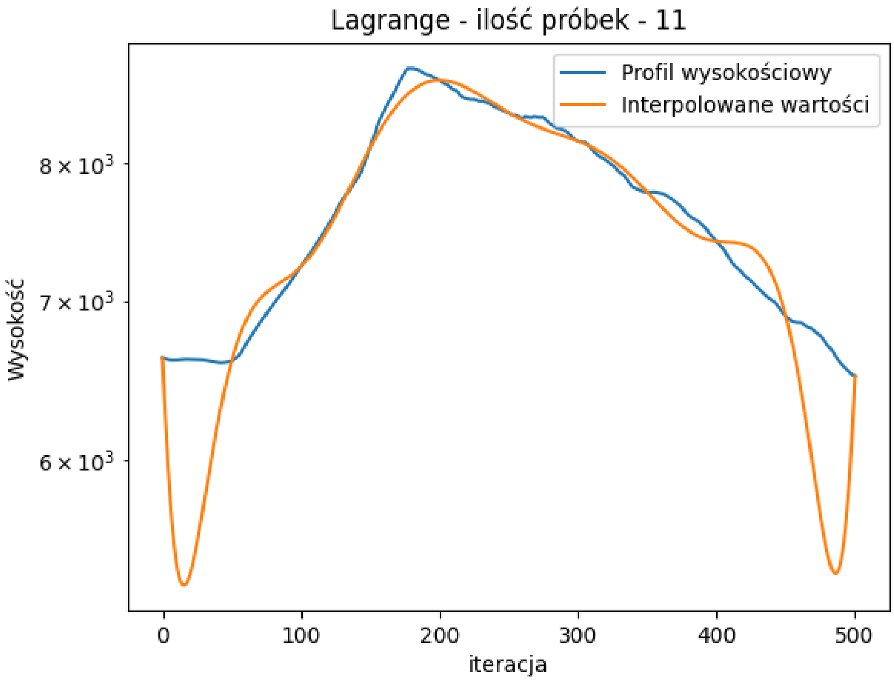
W przypadku małej ilości punktów trasa która ma bardzo duże skoki będzie źle interpolowana. Natomiast jeśli wysokości stale rosną\maleją, to nawet mała liczba punktów może pokazać trendy. Natomiast nawet jak trasa ma duże odchylenia, ale ma dużą ilość punktów kontrolnych, to dla metody funkcjami sklejanymi, jesteśmy w stanie przeprowadzić bardzo dobre przybliżenie funkcji.

9 Podsumowanie

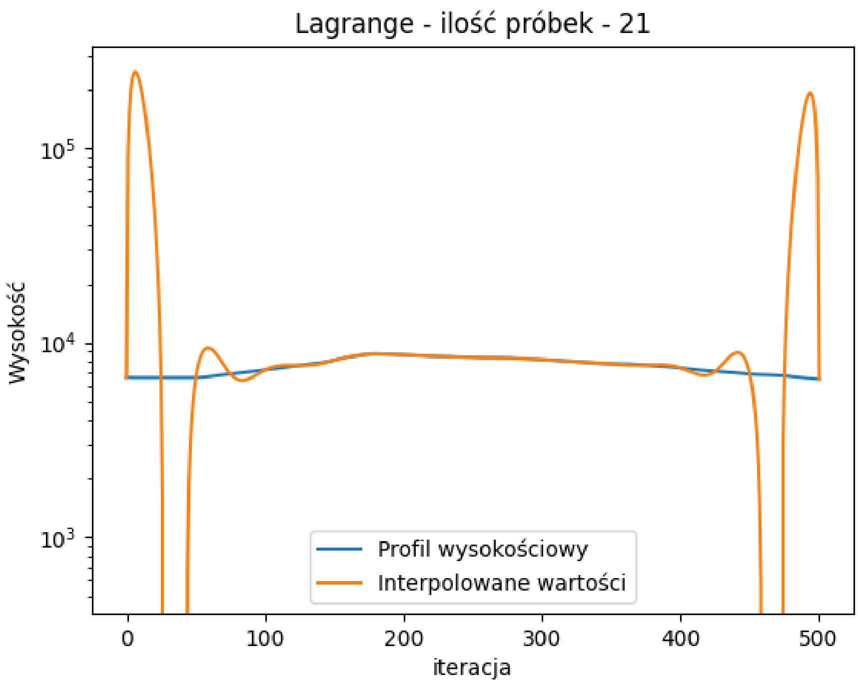
Jeśli mamy dużą ilość węzłow i potrzebujemy wartości z całego przedziału, to powinniśmy wybrać metodę splynową. Zajmie to trochę czasu ponieważ trzeba rozwiązać układ równań, ale wyniki będą zadowalające. Natomiast w przypadku, gdy mamy małą ilość punktów i chcemy poznać ogólny trend funckji, to użycie metody Lagrange'a nie będzie błędem.

10 Wszystkie wyniki

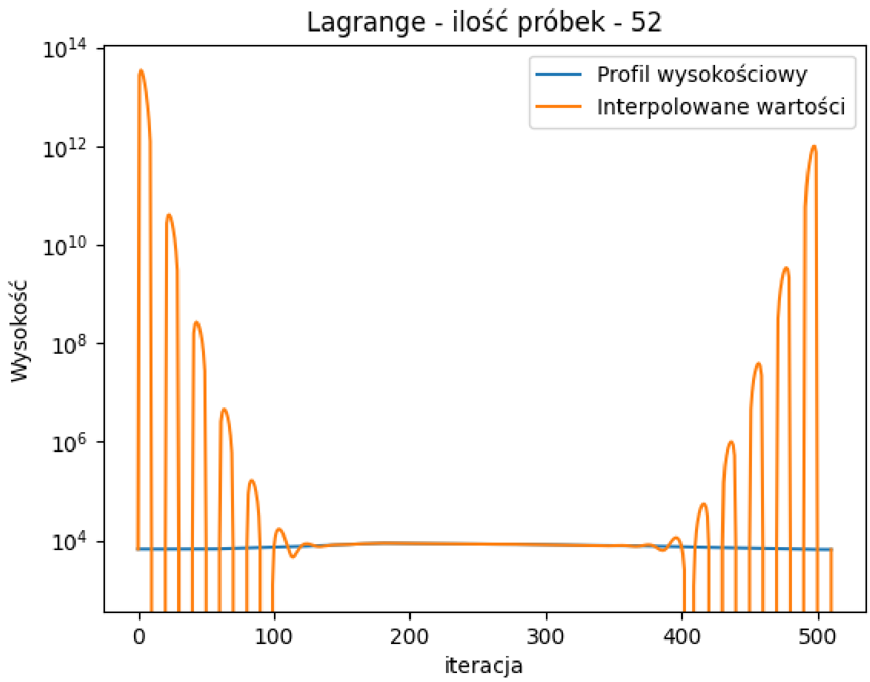
10.1 Mount Everest metoda Lagrange'a



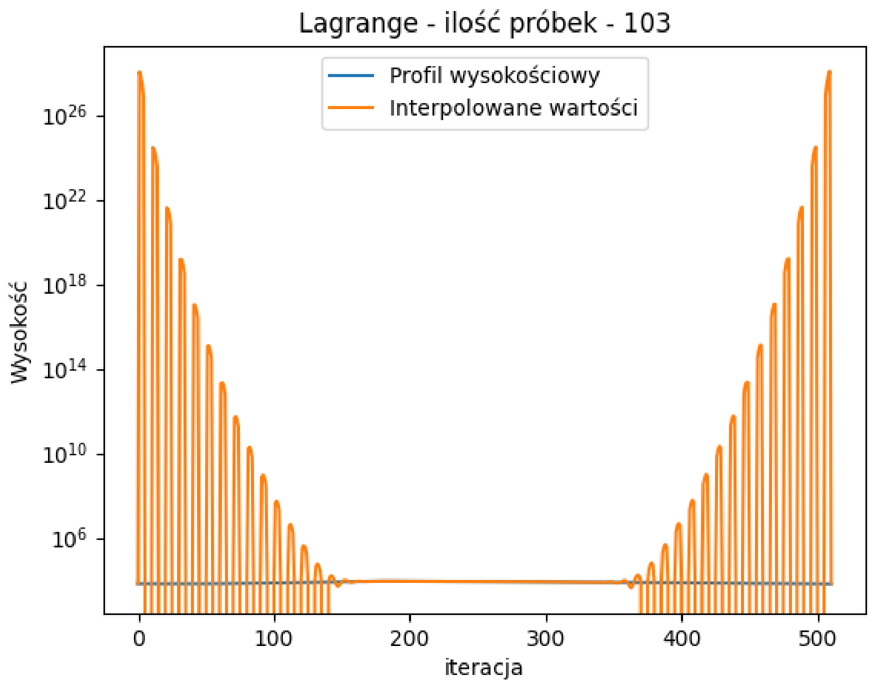
Rysunek 5: Mount Everest Interpolacja Lagrange'a dla 11 puntków



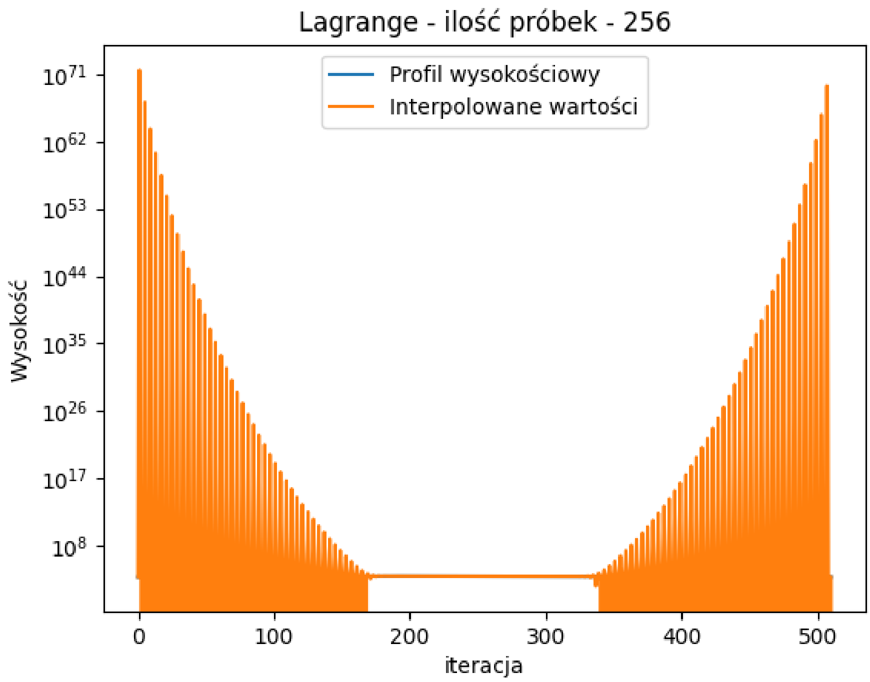
Rysunek 6: Mount Everest Interpolacja Lagrange'a dla 21 puntków



Rysunek 7: Mount Everest Interpolacja Lagrange'a dla 52 puntków

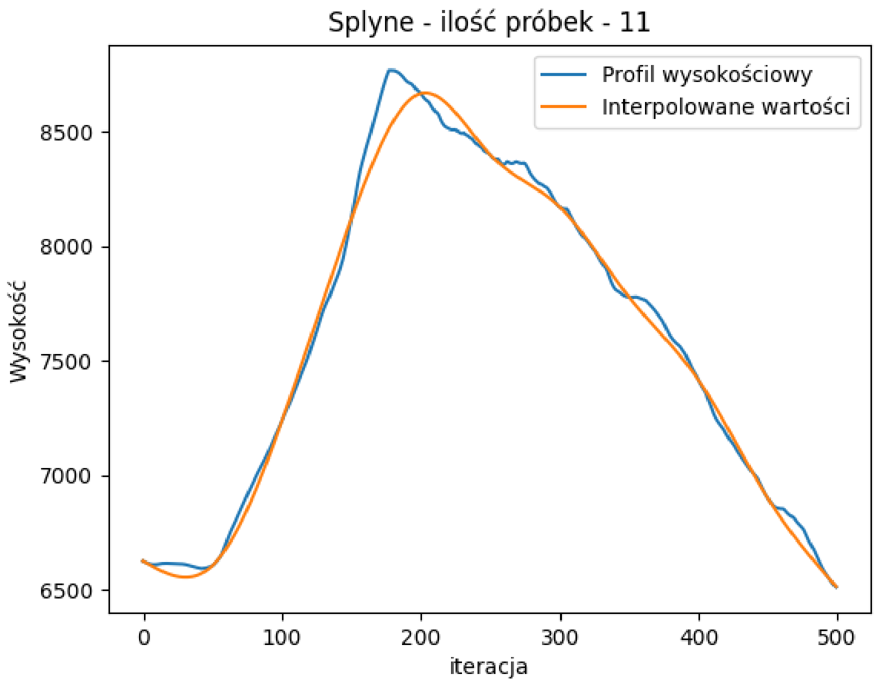


Rysunek 8: Mount Everest Interpolacja Lagrange'a dla 103 puntków

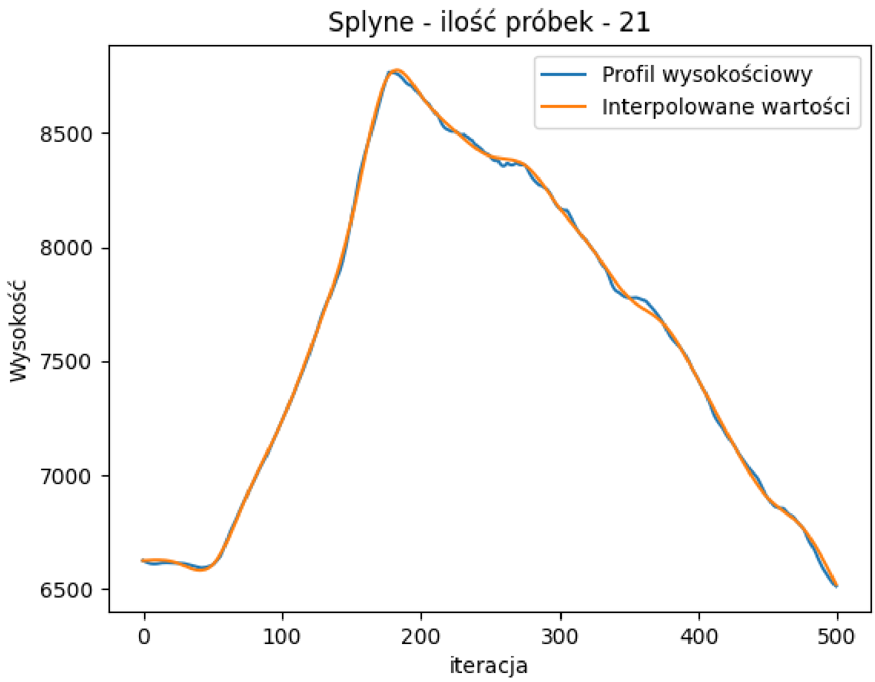


Rysunek 9: Mount Everest Interpolacja Lagrange'a dla 256 puntków

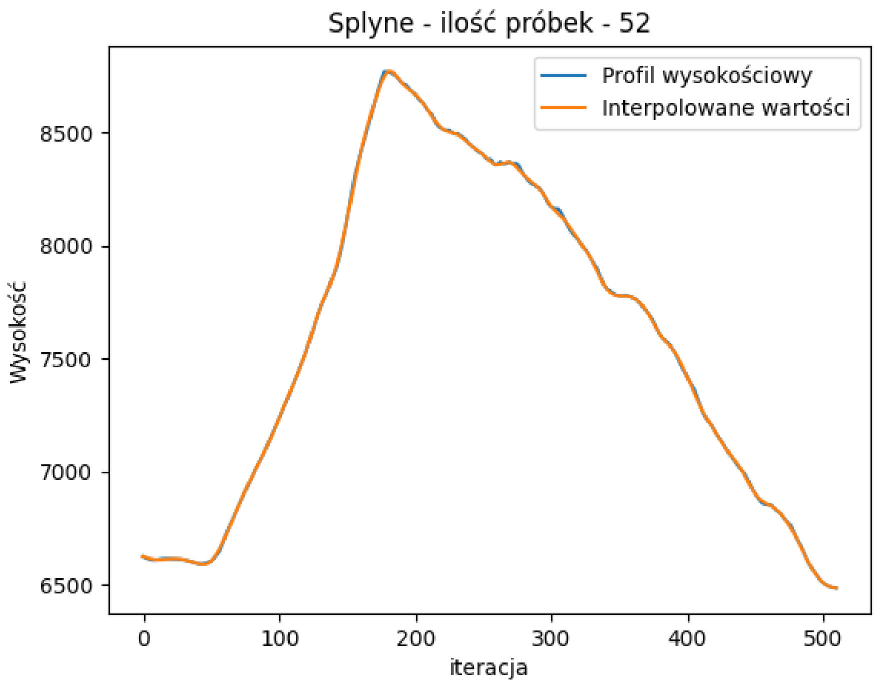
10.2 Mount Everest metoda funkcjami sklejanymi



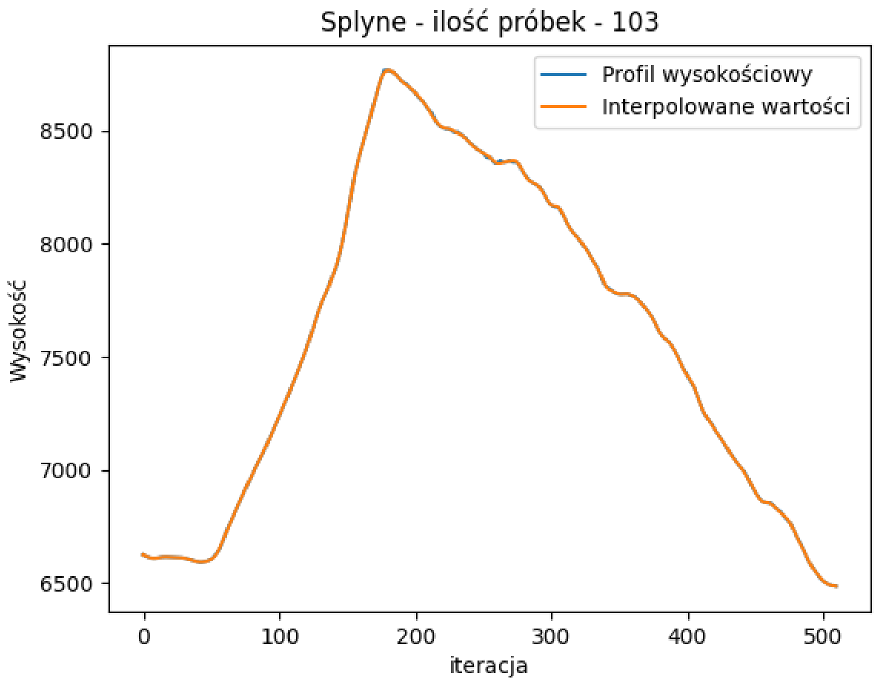
Rysunek 10: Mount Everest Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 11 puntków



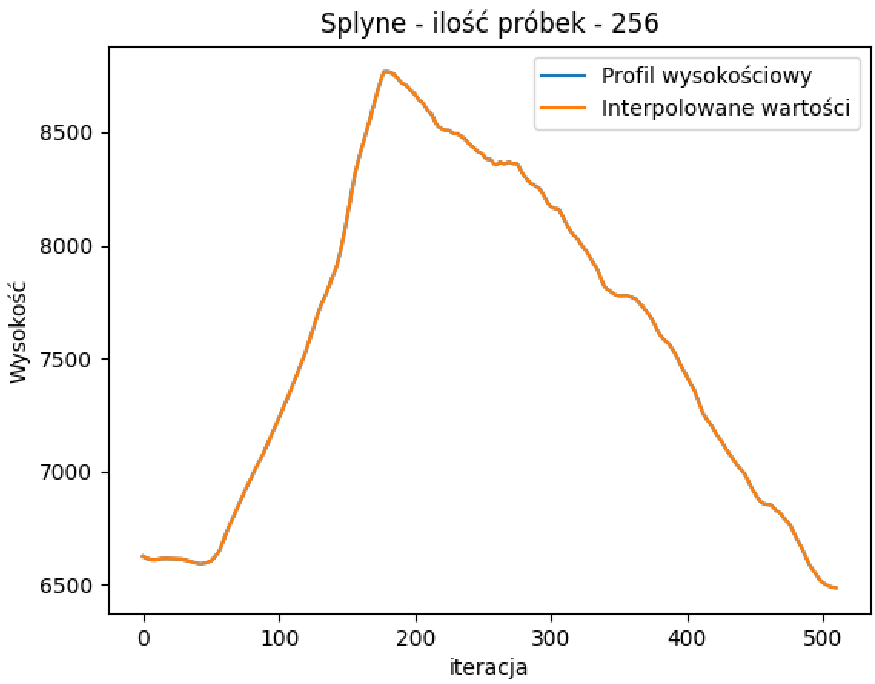
Rysunek 11: Mount Everest Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 21 puntków



Rysunek 12: Mount Everest Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 52 puntków

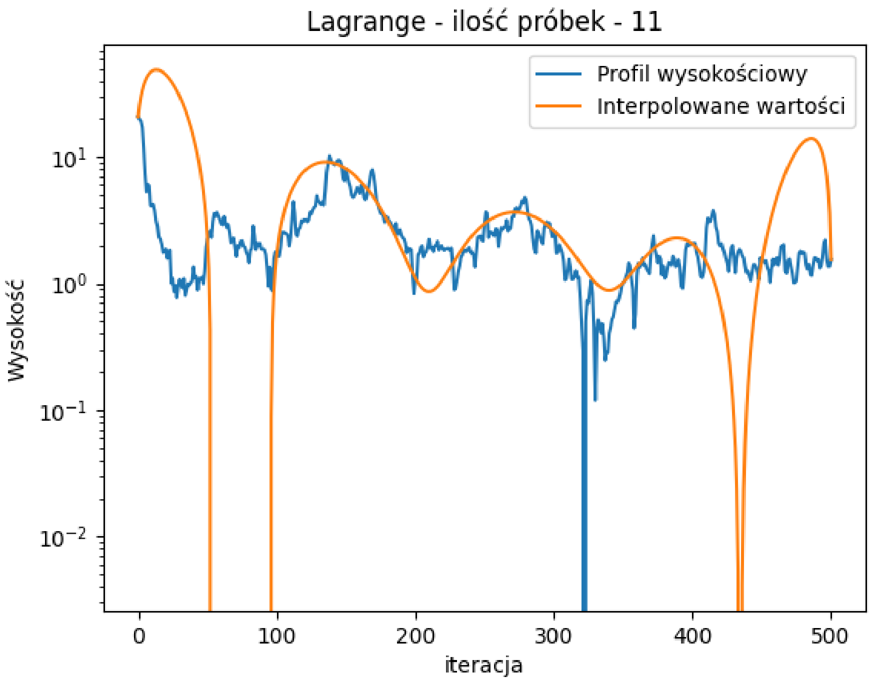


Rysunek 13: Mount Everest Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 103 puntków

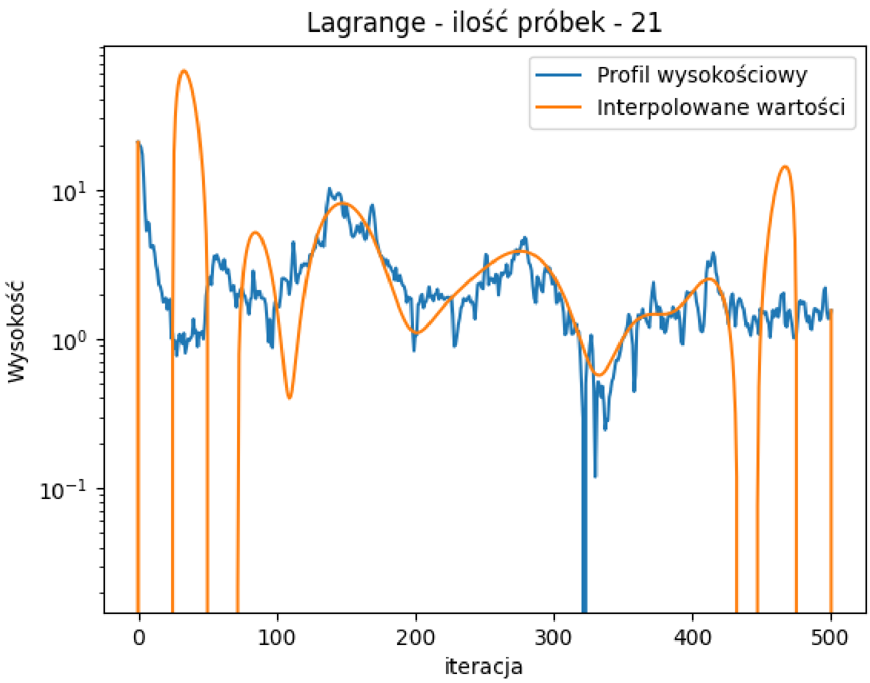


Rysunek 14: Mount Everest Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 256 puntków

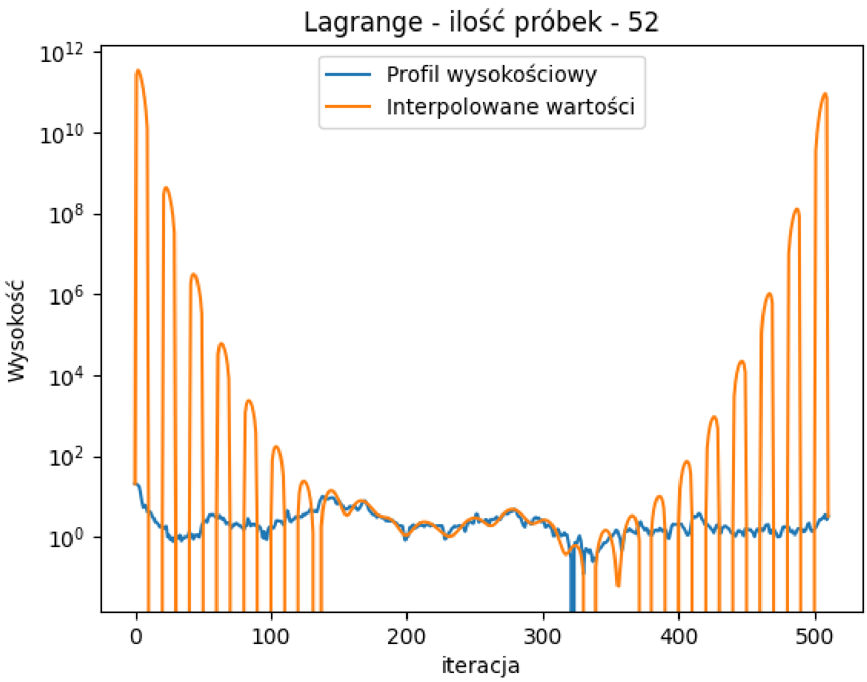
10.3 Spacerniak Gdańsk metoda Lagrange'a



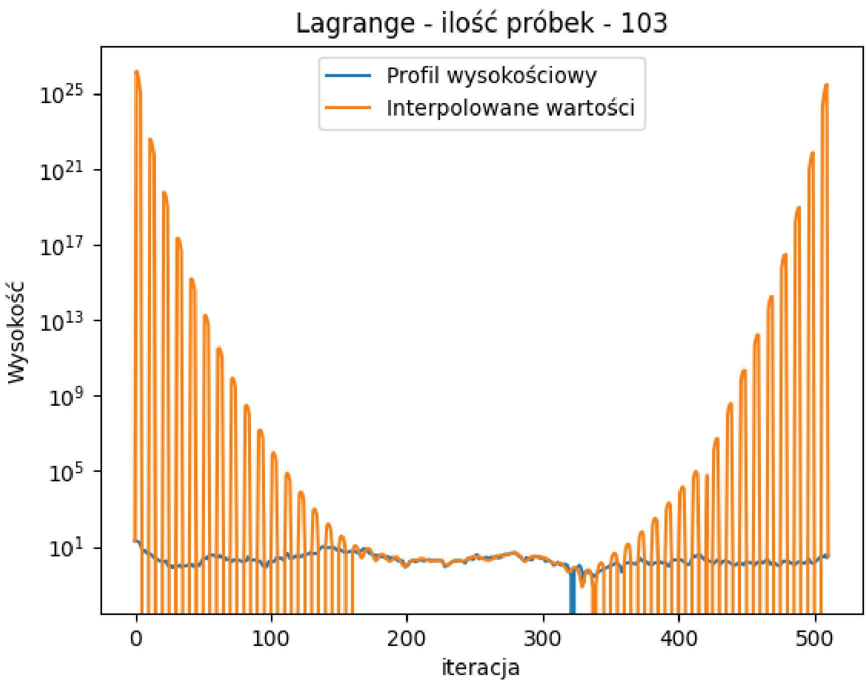
Rysunek 15: Spacerniak Gdańsk Interpolacja Lagrange'a dla 11 puntków



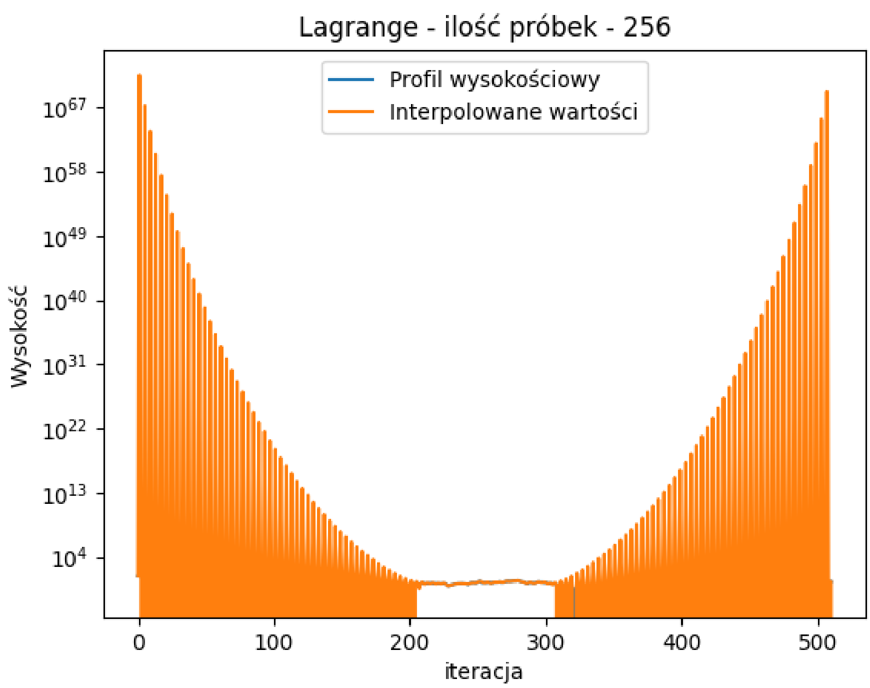
Rysunek 16: Spacerniak Gdańsk Interpolacja Lagrange'a dla 21 puntków



Rysunek 17: Spacerniak Gdańsk Interpolacja Lagrange'a dla 52 puntków

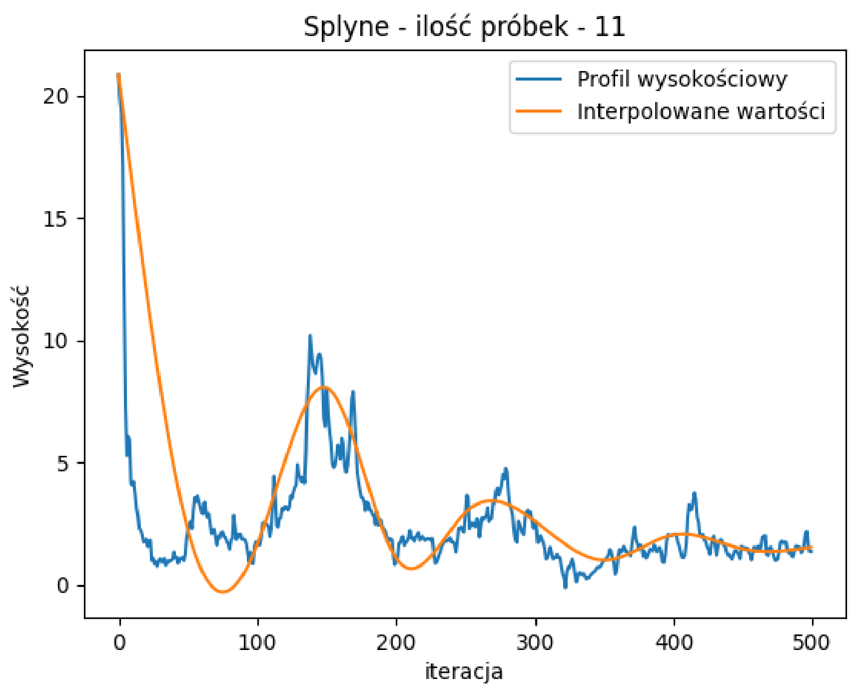


Rysunek 18: Spacerniak Gdańsk Interpolacja Lagrange'a dla 103 puntków

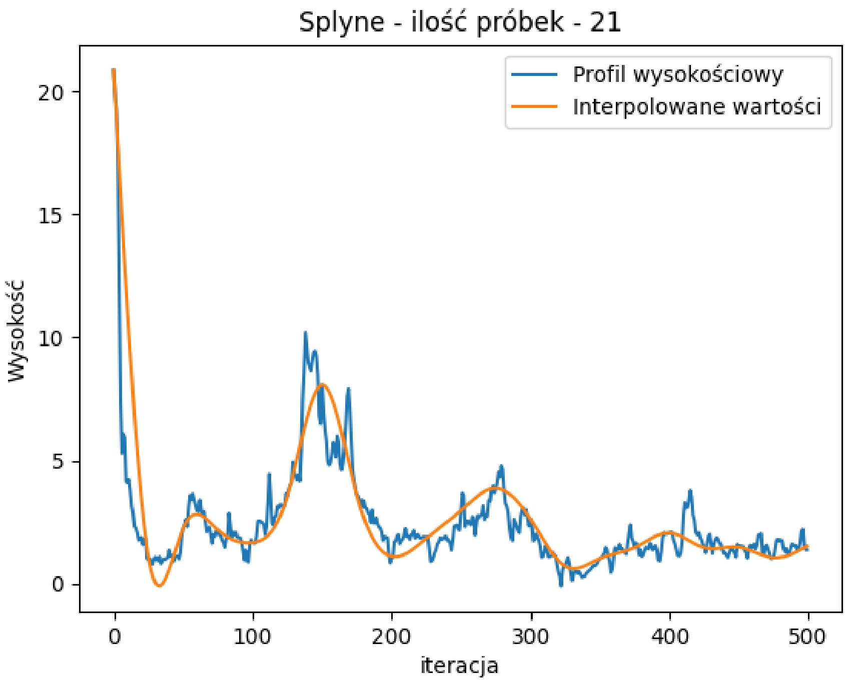


Rysunek 19: Spacerniak Gdańsk Interpolacja Lagrange'a dla 256 puntków

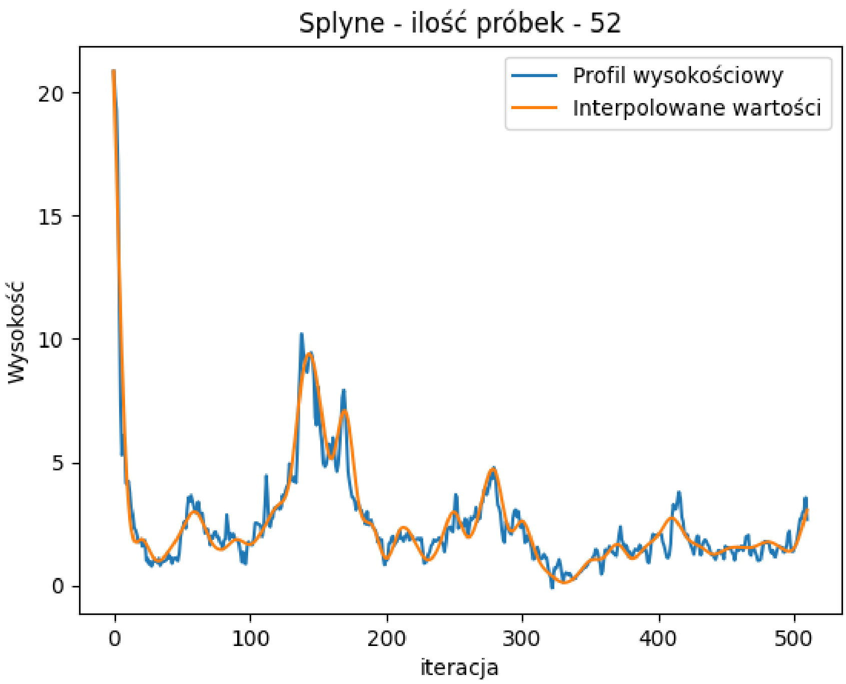
10.4 Spacerniak Gdańsk Metoda funckjami sklejanymi



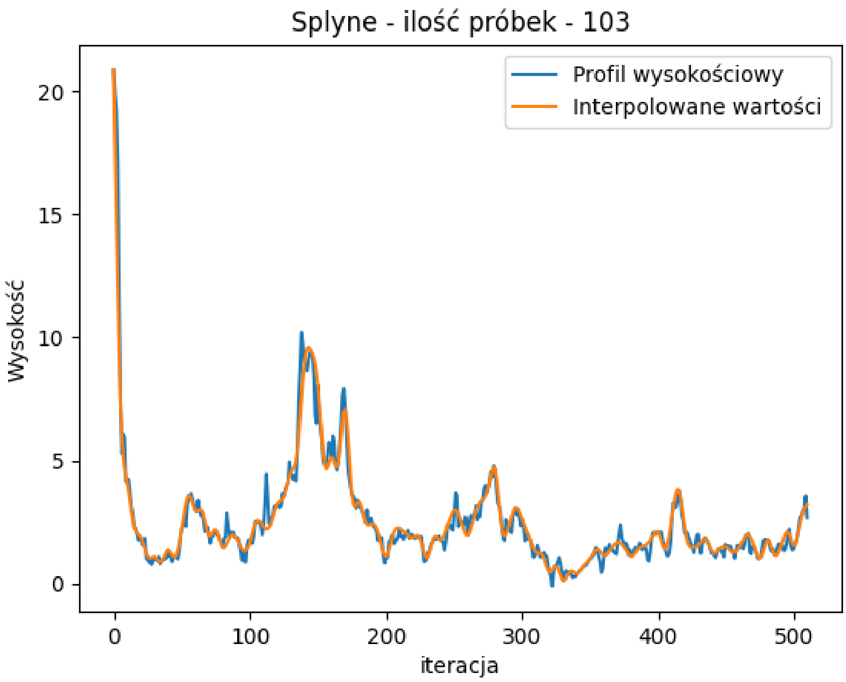
Rysunek 20: Spacerniak Gdańsk Interpolacja funckjami sklejanymi dla 11 puntków



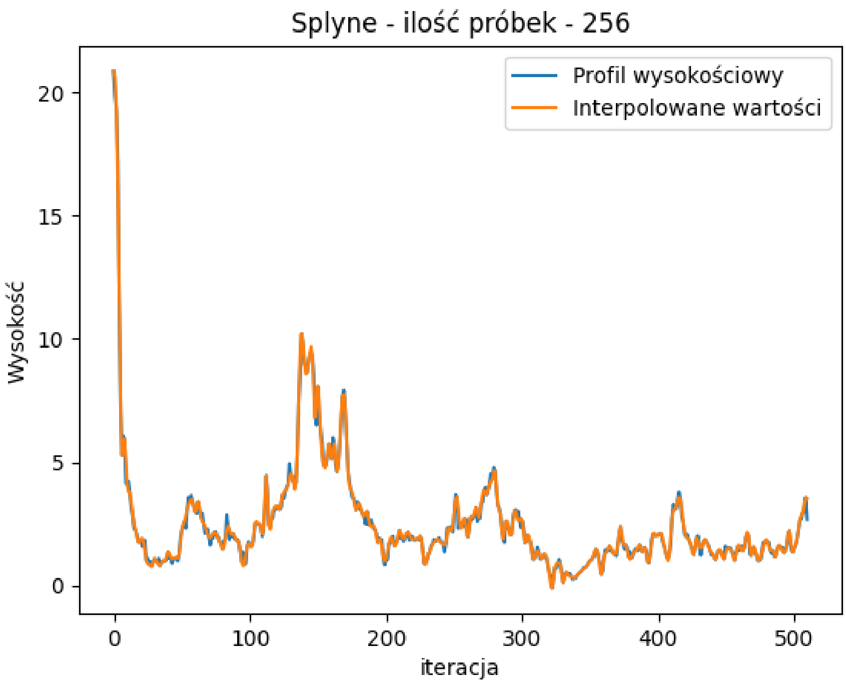
Rysunek 21: Spacerniak Gdańsk Interpolacja funckjami sklejanymi dla 21 puntków



Rysunek 22: Spacerniak Gdańsk Interpolacja funckjami sklejanymi dla 52 puntków

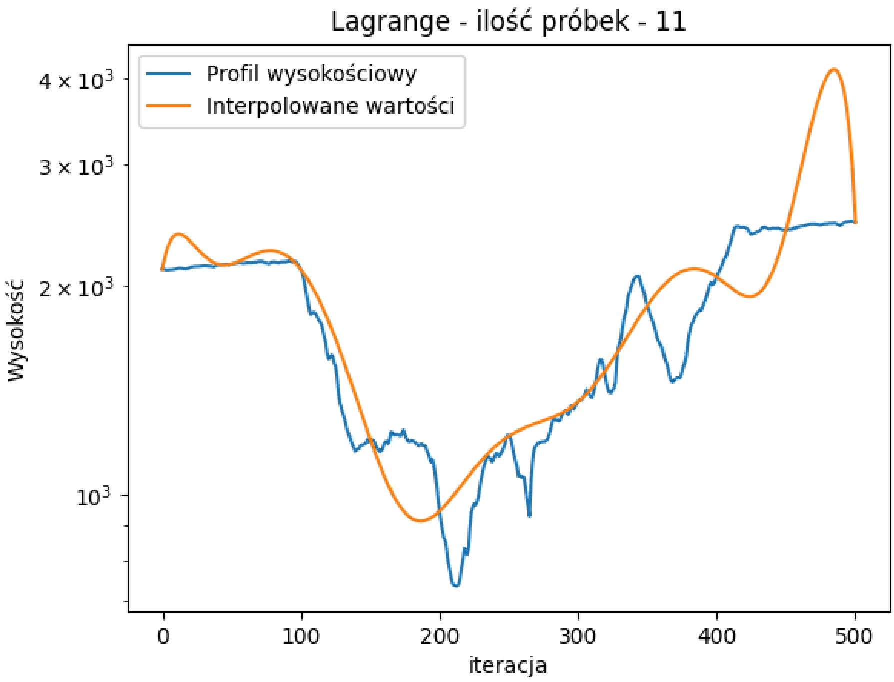


Rysunek 23: Spacerniak Gdańsk Interpolacja funckjami sklejanymi dla 103 puntków

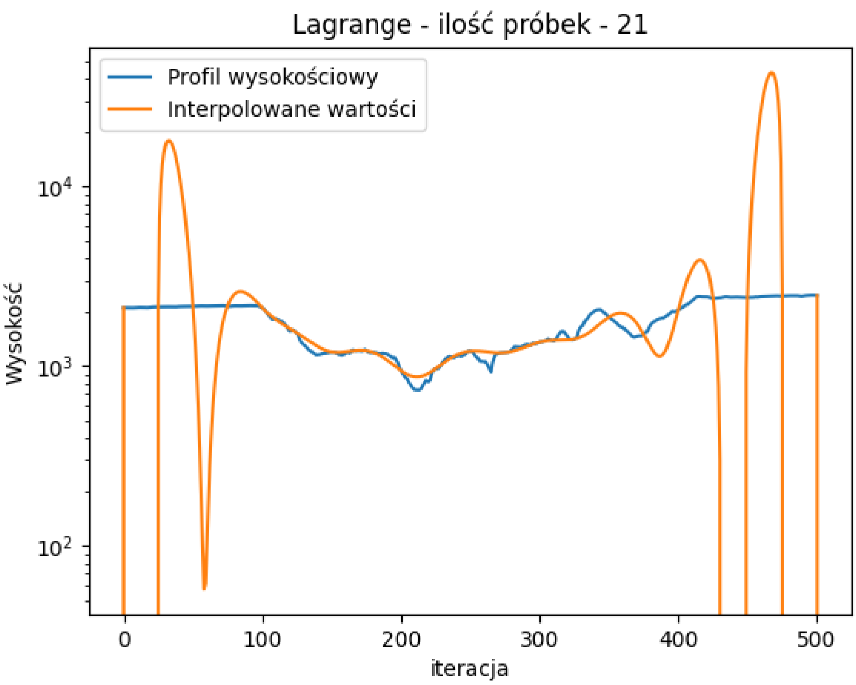


Rysunek 24: Spacerniak Gdańsk Interpolacja funckjami sklejanymi dla 256 puntków

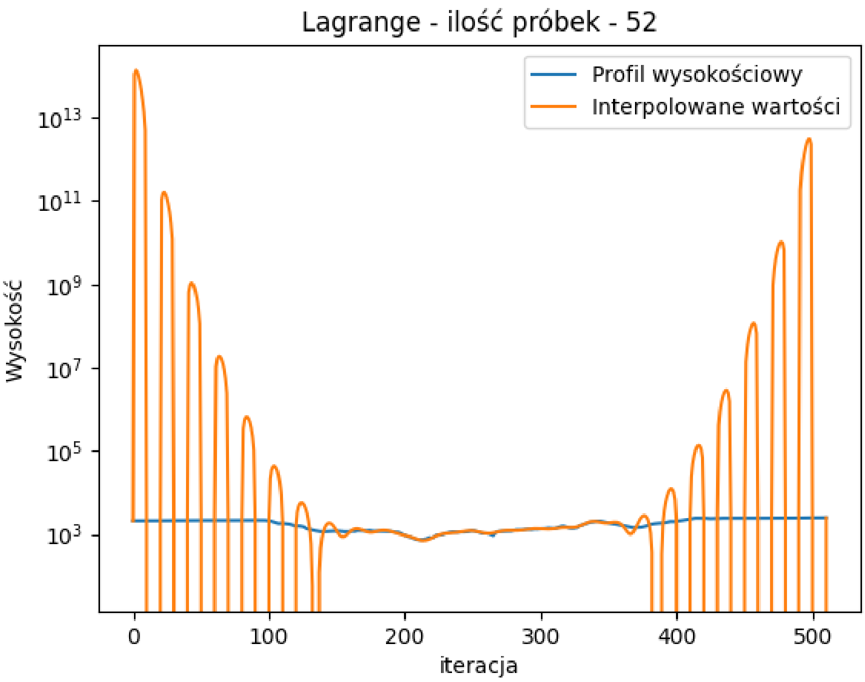
10.5 Wielki Kanion metoda Lagrange'a



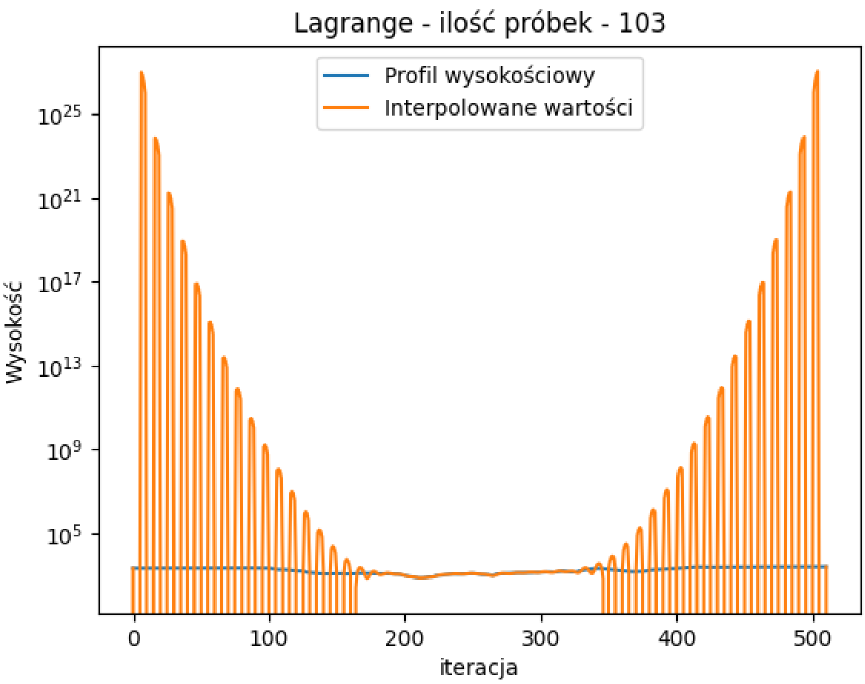
Rysunek 25: Wielki Kanion Interpolacja Lagrange'a dla 11 puntków



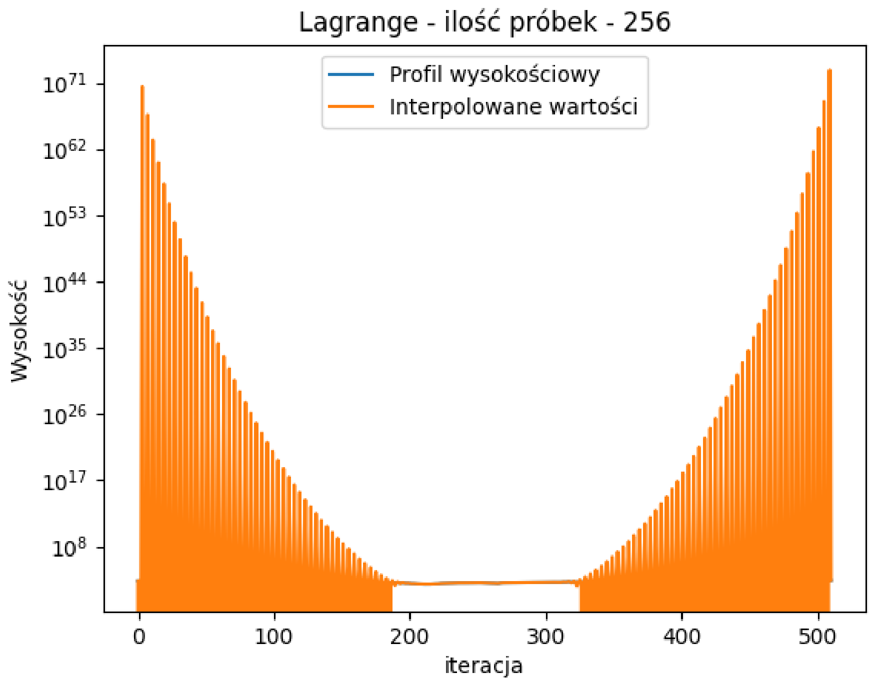
Rysunek 26: Wielki Kanion Interpolacja Lagrange'a dla 21 puntków



Rysunek 27: Wielki Kanion Interpolacja Lagrange'a dla 52 puntków

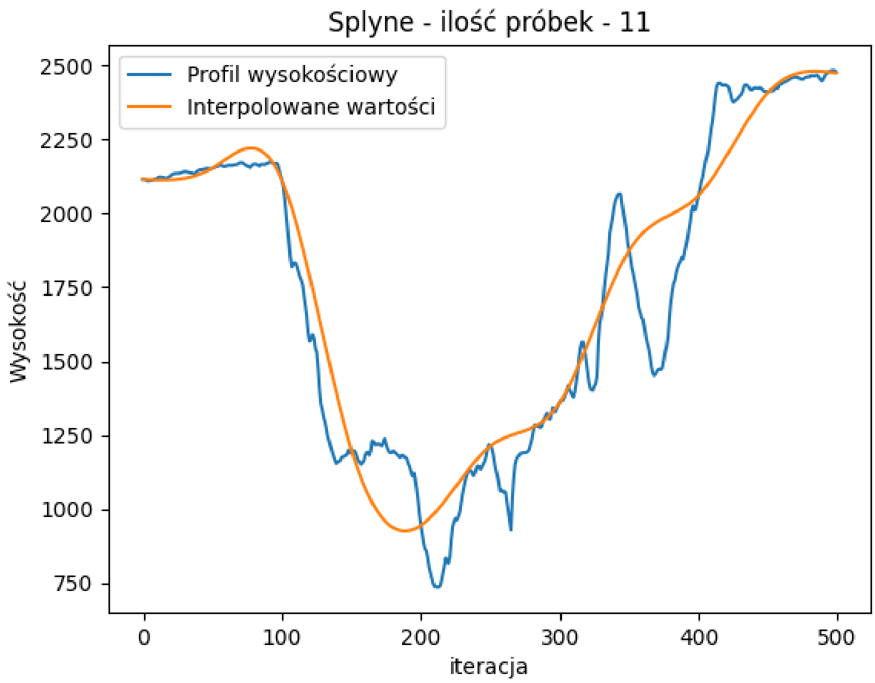


Rysunek 28: Wielki Kanion Interpolacja Lagrange'a dla 103 puntków

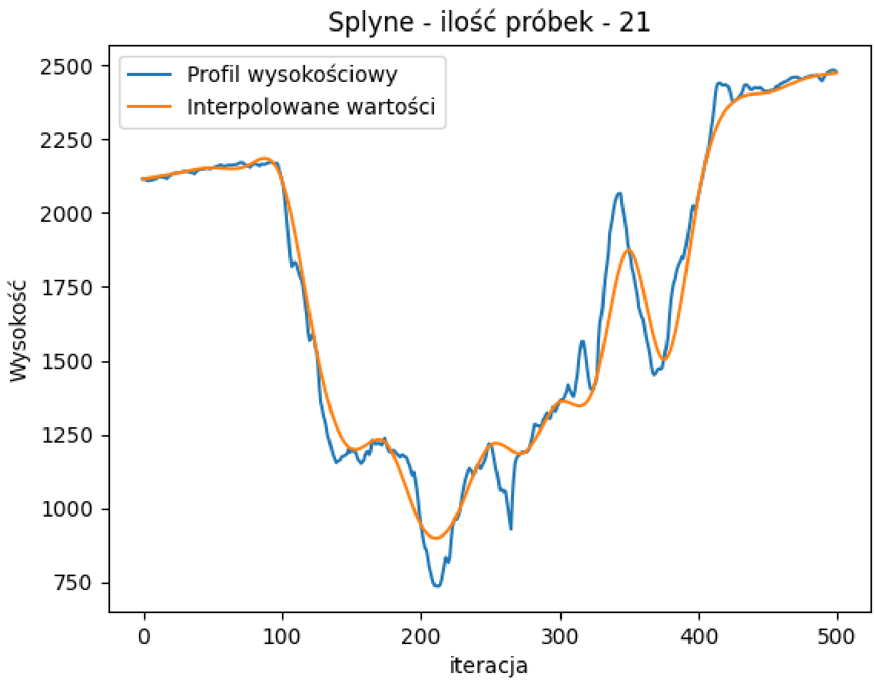


Rysunek 29: Wielki Kanion Interpolacja Lagrange'a dla 256 puntków

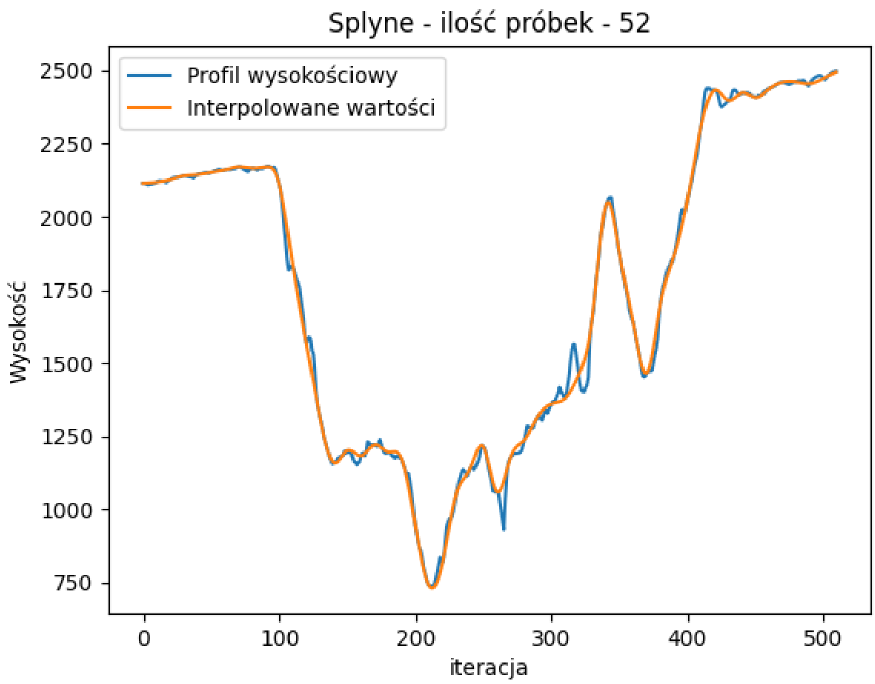
10.6 Wielki Kanion metoda funckjami sklejanymi



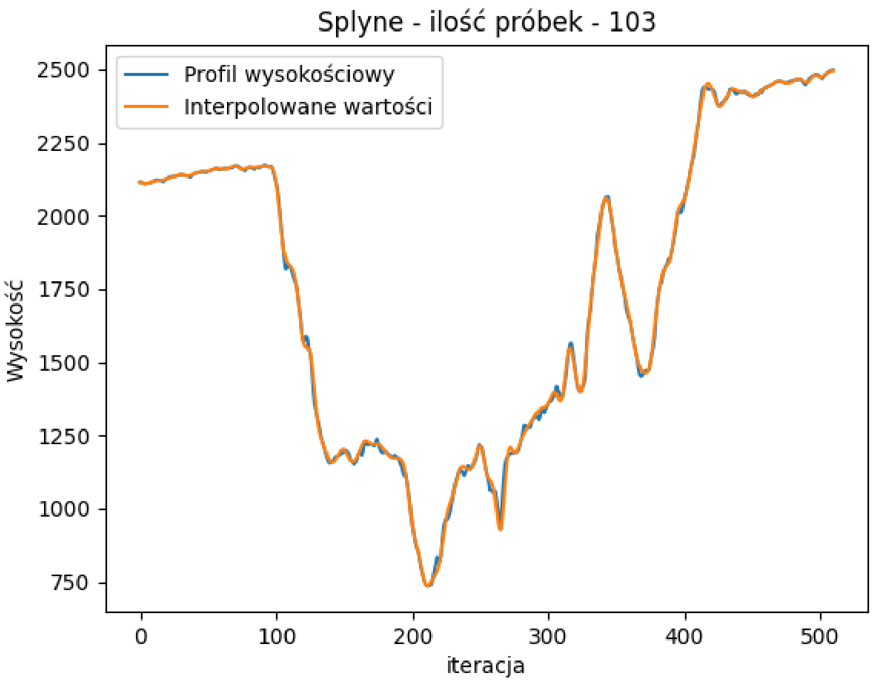
Rysunek 30: Wielki Kanion funkcjami sklejanymi dla 11 puntków



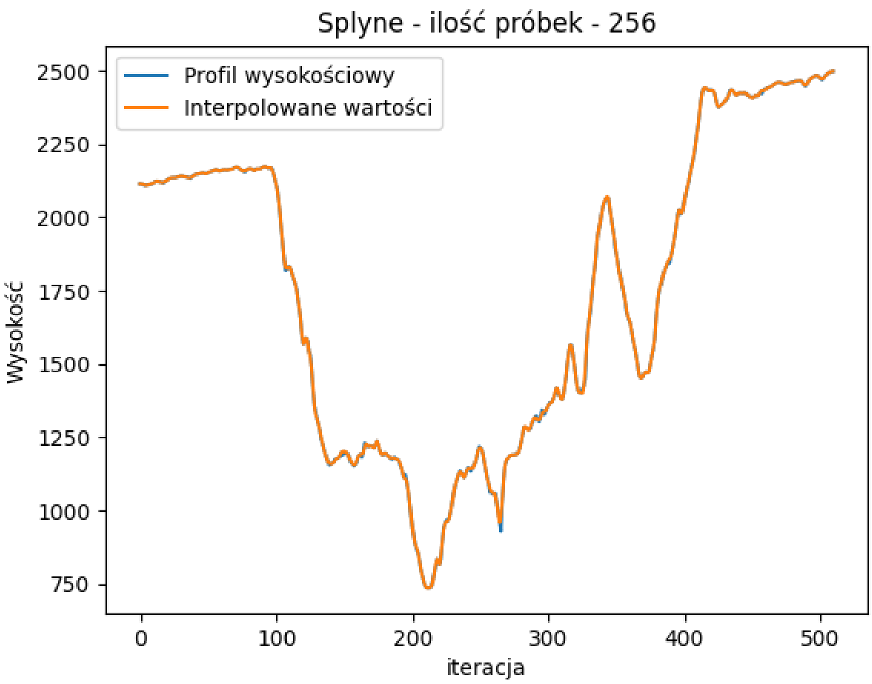
Rysunek 31: Wielki Kanion Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 21 puntków



Rysunek 32: Wielki Kanion Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 52 puntków



Rysunek 33: Wielki Kanion Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 103 puntków



Rysunek 34: Wielki Kanion Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 256 puntków