

Projekt 2

Układy równań liniowych

Jakub Jabłoński
184938

9 maja 2022

1 Opis projektu

Celem projektu jest implementacja metod iteracyjnych - Jacobi i Gaussa-Seidla oraz bezpośrednio - faktoryzacja LU (Dekompozycja LU).

2 Postać układów równań

W projekcie układy (dla Jacobiego i Gaussa-Seidla) mają następującą postać:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

gdzie:

- \mathbf{A} - macierz systemowa oraz jest w formacie pełnym
- \mathbf{x} - wektor rozwiązań
- \mathbf{b} - wektor pobudzenia

Natomiast w faktoryzacji LU będzie używany następujący format:

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Ly} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Ux} &= \mathbf{y}\end{aligned}$$

\mathbf{A} , \mathbf{x} , \mathbf{b} są tym samym co wyżej, ale: gdzie:

- \mathbf{U} - Macierz trójkątna górna
- \mathbf{L} - Macierz trójkątna dolna, z jedynkami na diagonalu

Układ $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ jest rozwiązywany poprzez podstawianie wprzód, natomiast $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ jest rozwiązywany poprzez podstawienie wstecz.

3 Norma wektora residuum

W projekcie po obliczeniu wektora residuum została zaimplementowana norma 2:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n e_j^2}$$

Natomiast dla metody Jacobiego i Gaussa-Seidla będziemy dążyć do uzyskania normy z wektora residuum równej 10^{-9}

4 Dane początkowe dla podpunktu A

Dane dla numeru indeksu 184938 prezentują się następująco:
N = 938

x - wektor o długości N wypełniony "1",
Macierz A o wymiarach NxN:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 14 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 14 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 14 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 14 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 14 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

Wektor b długości N:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0.959 \\ -0.544 \\ \vdots \\ 0.387 \end{bmatrix} \quad (2)$$

5 Porównanie wyników algorytmów iteracyjnych

Wyniki danych z podpunktu A wyniki prezentują się następująco:

```

=====Jacobi=====
Czas trwania:  3.8809449672698975
Liczba iteracji:  22
=====Gauss-Seidel=====
Czas trwania:  2.8871655464172363
Liczba iteracji:  15

```

Rysunek 1: Wyniki Jacobi i Gauss-Seidl

Co pokazuje, że dla tego przypadku metoda Gaussa-Seidla okazała się lepsza, potrzebowała ona 7(46%) iteracji mniej od metody Jacobiego oraz na komputerze na którym była testowana potrzebowała sekundy(25%) mniej.

6 Wygląd macierzy A dla podpunktu C

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

Natomiast w tym przypadku dla algorytmów iteracyjnych norma wektora residuum rośnie zamiast maleć, co wskazuje na to, że rozwiązanie przybliżone oddala się od wartości dokładnej, przez co wynik nigdy nie zbiegnie się do dokładnej wartości.

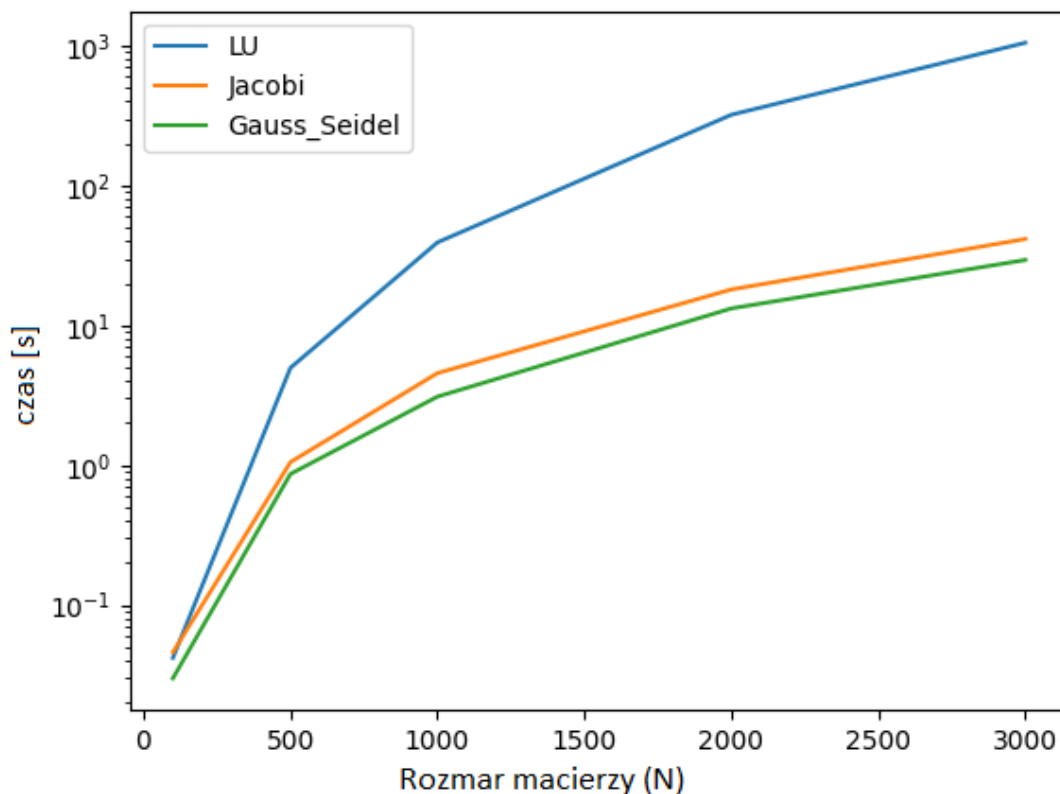
7 Wyniki algorytmu LU dla podpunktu C

```
=====LU=====
Norma residuum:  2.30851796998895e-15
Czas trwania:   34.81933879852295
```

Rysunek 2: Wyniki LU

Po zastosowaniu algorytmu dekompozycji LU, wynik normy wektora residuum zbiegł się do bardzo małej wartości, mniejszej niż zakładaliśmy w podpunkcie B. Wtedy zakładaliśmy, że wynik jest dokładny dla normy wektora residuum równej 10^{-9} . Czyli mamy wynik bardzo dokładny, ale było potrzebne 31 sekund (1100%) więcej.

8 Wykresy czasu dla różnych algorytmów



Rysunek 3: Wykres zależności czasu od N

Możemy zaobserwować szybki wzrost dla każdego z algorytmów przy wzroście N , ale dla metody LU wzrost jest dużo większy. Algorytmy Jacobiego i Gaussa-Seidla rosną z podobnym trendem.

9 Wnioski

Metody iteracyjne są szybsze, lecz nie zawsze zbiegają się. Metoda dekompozycji LU, potrzebuje więcej czasu, ale mogą być obliczone dla dowolnej prawej strony. Czyli jak mamy pewność, że wyniki dla metody iteracyjnej będą się zbiegać, to powinniśmy je użyć. W innym przypadku podejmujemy ryzyko, że pomimo spędzenia dużej ilości czasu, to nie uzyskamy odpowiedzi.