Euler-Simulation eines waagerechten Wurfs mit und ohne Luftwiderstand

Ein Protokoll für IMP-Physik in Klasse 10A bei Frau Heilman

Inhaltsverzeichnis

Einführung

In diesem Protokoll wird das iterative Euler-Verfahren zur Simulation eines waagerechten Wurfs mit und ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes erläutert. Das Euler-Verfahren ist ein einfaches iteratives Verfahren zur Lösung von Änderungen und wird häufig in der Physik und anderen wissenschaftlichen Anwendungen verwendet. In diesem Fall wird es verwendet, um die Bewegung eines Körpers in einem zweidimensionalen Raum (x- und z-Richtung) zu berechnen.

Aufgaben

A:

Wurfweite, wenn der Ball aus 10m Höhe und mit v_0 =10m/s geschossen wird.

B:

Abschusshöhe, wenn der Ball 25m weit kommen soll (v_0 = 20m/s)

C:

Abschussgeschwindigkeit, wenn der Ball 10m weit kommen soll (h_0 = 3m)

D:

Die Geschwindigkeit in y-Richtung nach 2,5s.

Vorgehen

Grundlagen des Euler-Verfahrens

Das Euler-Verfahren basiert auf der Idee, dass die Änderung einer Funktion in vielen kleinen Intervallen durch die Steigung der Funktion an dieser Stelle annähernd dargestellt werden kann. In diesem Fall wird die Beschleunigung des Körpers verwendet, um die Geschwindigkeit und daraus folgend die jeweils neue Position des Körpers in kleinen Zeitschritten zu aktualisiert.

Genutzte Formeln

Für die Simulation des waagerechten Wurfs unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes werden die folgenden mathematischen Formeln verwendet:

1. Beschleunigung in x-Richtung: $a_x = \left(F - F_{Luft_x}\right) / m$
2. Beschleunigung in z-Richtung: $a_z = \left(F - F_{Luft_z}\right) / m$
3. Geschwindigkeit in x-Richtung: $vel_x = vel_x + a_x * d_t$
4. Geschwindigkeit in z-Richtung: $vel_z = vel_z + a_z * d_t$
5. Strecke in x-Richtung: $x = x + vel_x * d_t$
6. Strecke in z-Richtung: $z = z + vel_z * d_t$

Tabelle 1: Erklärung der Variablen

Symbol	Erklärung	Einheit
m	Masse des Körpers	Kilogramm
d_t	Iterationintervall	Sekunden
a_x/a_z	Beschleunigungen in x- oder z-Richtung	Meter pro Sekunde im Quadrat
F_{Luft_x}/F_{Luft_z}	Luftwiderstandskräfte in x- und z-Richtung	Newton
vel_x/vel_z	Geschwindigkeiten in x- und z-Richtung	Meter pro Sekunde
x/z	Positionen in x- und z-Richtung	Metern

Durchführung

Parameter der Simulation

Vorgaben

- Für die Luftdichte Rho ρ wurden 1,29 kg/m³ genutzt
- Für die Erdanziehung g habe ich wie in Tracker simuliert 9,81m/s² genutzt

Annahmen

- Der Strömungswiderstandskoeffizient C_w (spezifischer Luftwiderstandskoeffizient) ist wie im Unterricht besprochen 0,45.
- Querschnittsfläche in m² mit der Formel: $A = 2 * \pi * r$
  Da ich eine Kugel von 2,5 cm Radius modellieren gilt:
  $A = 2 * 2{,}5\,cm * \pi = 0.1963\,m^2$

Variablen

Tabelle 2: Startgeschwindigkeiten für die Simulation

Aufgabe 3	A	B	C	D
Startgeschwindigkeit in x-Richtung (in m/s)	10	20	15	20

Startgeschwindigkeit in z-Richtung ist trivial, da es jeweils ein waagerechter Wurf ist.
Die vorgegebenen Startgeschwindigkeiten dienen jeweils als Variablen für vel_x.

Implementierung des Euler-Verfahrens in Python

In dem Python-Code wird das Euler-Verfahren verwendet, um die Trajektorie eines Körpers zu berechnen, der unter dem Einfluss der Schwerkraft und des Luftwiderstandes abgefeuert wird.
Die Berechnung wird in einer Schleife durchgeführt, die solange ausgeführt wird, bis die gesuchte Zeit/Höhe/Weite erreicht ist. In jedem Schritt werden die oben genannten mathematischen Formeln verwendet, um die Geschwindigkeiten und Positionen des Körpers mit Luftwiderstand zu aktualisieren. Nach der Berechnung, werden die Werte auf der Z-Achse so nach oben verschoben, sodass der Graph immer auf Z = 0 endet.
Von dem nun errechneten Startwert wird nun mithilfe von einem erneuten Euler-Verfahren eine neue Simulation für das Objekt ohne Luftwiderstand.

Die berechneten Werte werden in einem DataFrame(Zwischenschritt zur Tabelle) gespeichert und dann in eine Tabelle exportiert. Zusätzlich werden zwei Grafik mithilfe von Matplotlib erstellt, um die Trajektorie oder Geschwindigkeit des Körpers darzustellen.
Die Grafiken enthalten jeweils eine Legende, Annotationen, Parameter und die Abweichung zwischen dem simulierten Fall ohne Luftwiederstand im Vergleich zu den durch die später genannten Formel errechneten Werte.

Aufgabe 3A

Verweis: *Wurfweite, wenn der Ball aus 10m Höhe und mit v0 =10m/s geschossen wird.*

Hierfür wird die Iteration so lange wiederholt bis z gleich 10 ist und somit 10 Meter tief gefallen ist.

- siehe Code3a

Aufgabe 3B

Verweis: *Abschusshöhe, wenn der Ball 25m weit kommen soll (v0 = 20m/s)*

Hier wird die Iteration so lange wiederholt bis x größer 25 ist und somit 25 Meter weit geflogen ist.

- siehe Code3b

Aufgabe 3C

Verweis: *Abschussgeschwindigkeit, wenn der Ball 10m weit kommen soll (h0 = 3m)*

Hier wird die Iteration so lange wiederholt bis x größer 10, z kleiner 3 ist und dadurch mehr als 10 Meter weit geflogen ist, aber weniger als 3 Meter tief gefallen

- siehe Code3c

Aufgabe 3D

Verweis: *Die Geschwindigkeit in y-Richtung nach 2,5s.*

Hier wird die Iteration so lange wiederholt bis t größer t_{max} ist und da t_{max} 2,5 ist dadurch 2,5 Sekunden lang gefallen ist

- siehe Code3d

Auswertung

Erklärung der Graphen

Für jede der folgenden Aufgaben wurden je zwei Graphen erstellt je einer davon für die x-Z-Position und ein V-t-Diagramm.
Auf der linken Seite sind nochmals die Parameter und Ergebnisse angegeben und die Legende ist entweder unter oder rechts dieser genannten Angaben.
Die berechneten Ergebnisse zeigen, dass der Körper eine Trajektorie in Form einer (Wurf-)Parabel erhält. Die Abwurfhöhe und die Wurfweite können durch Änderung der Anfangsbedingungen verändert werden.

Lösung zu Aufgabe 3A

Verweis: *Wurfweite, wenn der Ball aus 10m Höhe und mit v0 =10m/s geschossen wird.*

Der Ball fliegt 12,47 Meter weit wenn er mit v_0=10m/s geschossen wird.

Ohne Luftwiderstand: $\sqrt{\frac{2*10\,m}{9{,}81\,m/s^2}}\times 10\,m/s \;=\; 14{,}28\,m$

- siehe Position3a
- siehe Geschwindigkeit3a
- siehe Waagerechter_Wurf3a

Lösung zu Aufgabe 3B

Verweis: *Abschusshöhe, wenn der Ball 25m weit kommen soll (v0 = 20m/s)*

Der Ball muss auf 14,59 Metern Höhe starten wenn er mit v_0=20m/s geschossen wird.

Ohne Luftwiderstand: $0{,}5*9{,}81*\left(25\,m \;/\; 20\,m/s^2\right) \;=\; 6{,}13\,m$

- siehe Position3b
- siehe Geschwindigkeit3b
- siehe Waagerechter_Wurf3b

Lösung zu Aufgabe 3C

Verweis: *Abschussgeschwindigkeit, wenn der Ball 10m weit kommen soll (h0 = 3m)*

Der Ball, welcher mit 3 Metern Höhe startet und mit v_0=15m/s geschossen wird, fliegt mehr als 10 Meter, da er schon nach 2,94 Meter Höhe über 10,07 Meter weit fliegt.

Ohne Luftwiderstand: $\sqrt{\frac{2*3m}{9,81m/s^2}} \cdot \; 15m/s \; = \; 11,73m \; > \; 10m$

- siehe Position3c
- siehe Geschwindigkeit3c
- siehe Waagerechter_Wurf3c

Lösung zu Aufgabe 3D

Verweis: *Die Geschwindigkeit in y-Richtung nach 2,5s.*

Der Ball fliegt nach 2,5 Sekunden mit 8,21m/s in z-Richtung

Ohne Luftwiderstand: $2,5 \times 9,81 m/s^2 = 24,53 m$

- siehe Position3d
- siehe Geschwindigkeit3d
- siehe Waagerechter_Wurf3d

Ausblick

Viel interessanter als die Lösungen für die Aufgabe sind der deutliche Unterschied zwischen dem abgebremsten und ungebremsten Wurf.

Tabelle 3: Simulationsdistanzdifferenz

Aufgabe 3:	A	B	C	D
Differenz zwischen simulierten Wurf mit und ohne Luftwiderstand	1,83m	9,11m	1,33m	13,74m

Auch kann man sehr gut die Geschwindigkeiten und die dazugehörigen Informationen ablesen, dabei erkennt man wie viel die Geschwindigkeit ohne den Luftwiderstand möglich wäre.

Tabelle 4: Abbremsung durch die Luft

Aufgabe 3:	A	B	C	D
Differenz zwischen vertikaler Endgeschwindigkeit mit und ohne Luftwiderstand	3,00m/s 29,99%	10,26m/s 51,28%	3,76m/s 25,07%	11,79m/s 58,94%
Differenz zwischen horizontaler Endgeschwindigkeit mit und ohne Luftwiderstand	1,86m/s 13,18%	2,94m/s 17,42%	0,30m/s 3,99%	5,94m/s 26,91%
Differenz simulierter resultierender Endgeschwindigkeit mit und ohne Luftwiderstand	3,19m/s 18,40%	9,16m/s 35,02%	3,42m/s 20,35%	11,68m/s 39,22%

Hier errechneten ich die Positionsabweichungen zwischen den simulierten Werten und den mithilfe der Formel: $t = \sqrt{\frac{2 * Höhe}{g}}$, $x = t \cdot vel_{x_{start}}$, $z = 0{,}5 \cdot t^2 \cdot g + t \cdot vel_{¿}$

Tabelle 5: Positionsabweichung von Fällen mit und ohne Luftwiderstand

Aufgabe 3:	A	B	C	D
Simulierte x-Endposition mit Luftwiderstand	12,47m	25,09m	10,07m	31,06m
Simulierte Z-Startposition mit Luftwiderstand	10,11m	14,59m	2,94m	24,74m
Simulierte x- Endposition ohne Luftwiderstand	14,30m	34,20m	11,40m	44,80m
Errechnete x-Endposition ohne Luftwiderstand	14,36m	34,49m	11,62m	44,92m
Absolute Abweichung zwischen Simulation und Errechnung bei keinem Luftwiderstand	0,06m	0,29m	0,22m	0,12m
Relative Abweichung bei keinem Luftwiderstand	0,42%	0,85%	1,86%	0,27%

Ich zeige nur die x-Position drei Mal, da diese sich jeweils unterscheidet, da die Abwurfposition Z_0 ein Mal ausrechnet und immer Startpunkt genutzt wird.

Da es scheinbar keine einfache lineare Formel (bei kleinen Geschwindigkeiten die Stokes-Reibung bei großen die Newton-Reibung) gibt gehe ich von keinem Luftwiderstand aus, um meine simulierten Werte mit dem freien Fall zu vergleichen können und damit die Abweichung zu zeigen.

Die Veränderungen der horizontalen und vertikalen Geschwindigkeiten sowie die Endgeschwindigkeit des Körpers werden ebenfalls gezeigt, unter Beachtung des Lustwiderstand wird die Parabel gestaucht, da der Körper sowohl in x- als auch z-Richtung abgebremst wird.

Fazit

In diesem Dokument wurde das Euler-Verfahren zur Simulation eines waagerechten Wurfs unter Berücksichtigung der komplexen Auswirkungen des Luftwiderstands erläutert. Das Verfahren basiert auf der Annäherung der Änderung einer Funktion durch die Steigung der Funktion an einer bestimmten Stelle. Die Ergebnisse verdeutlichen, dass die Abweichungen vom idealen Fall signifikant sind und unterstreichen die Notwendigkeit, solche Faktoren in physikalischen Modellen zu berücksichtigen. Die berechneten Ergebnisse zeigen, dass der Körper eine Trajektorie in Form einer Parabel erhält und dass die Veränderungen der Geschwindigkeiten die Trajektorie und die physikalischen Eigenschaften des Körpers beeinflussen.

Hierbei fällt auf dass es immer bei iterativen Verfahren einen Restfehler gibt, diesen kann man jedoch durch eine Erhöhung der Iterationenanzahl variabel verringern, dabei steigt aber auch die Simulationsberrechnungsdauer, dies sieht man an der verringerten Abweichung und Dauer in dem Ordner „Genauigkeit“.

Quellen

https://rechneronline.de/g-beschleunigung/fallgeschwindigkeit.php
https://knowunity.de/knows/natur-und-technik-der-freie-fall-3676797a-c105-499c-a628-cbc71a510b58
https://de.wikipedia.org/wiki/Fall_mit_Luftwiderstand
https://de.wikipedia.org/wiki/Freier_Fall
https://www.leifiphysik.de/mechanik/freier-fall-senkrechter-wurf/grundwissen/freier-fall
https://www.lernort-mint.de/physik/mechanik/anwendungen/der-freie-fall/