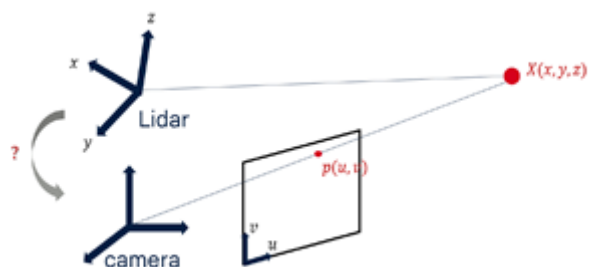
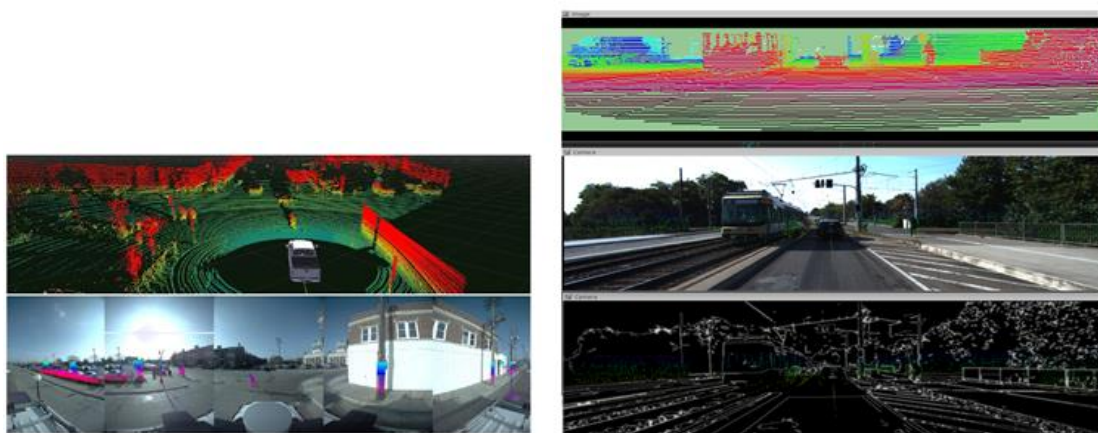


相机和激光雷达的动态联合标定简单分享

3D视觉工坊

1. 背景:



课程链接



公众号

2. 基于粗略-精确两步外参标定:

2.1 基于 Motion-based 和 Mutual-information-based 的外参标定

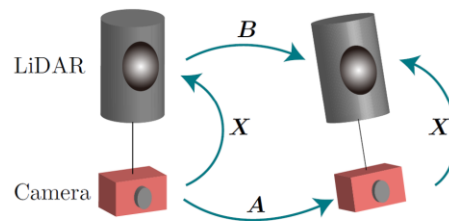
基于Motion-based和Mutual-information-based的外参标定

Step1 Motion-based

- 基本原理 $AX = XB$

- 约束方程 $g_t(x, l_i) \stackrel{\text{def}}{=} [R(r_{ai}) - I_3]\xi + t_{ai} - R(\eta)t_{ci}$,
 $g_r(x, l_i) \stackrel{\text{def}}{=} r_{ai} - R(\eta)r_{ci}$.

- 优化函数 $\argmin_{x, \{\epsilon_i\}} \sum_i \|\epsilon_i\|_{W_i}^2 \quad \epsilon_i = l_i - l_i^0$
subject to $g(x, \epsilon_i + l_i^0) = 0, \quad \forall i$,



- 单目相机尺度 $\argmin_{\lambda} \sum_{i=1}^M (\|\lambda t_{ci}\| - \|t_{ai}\|)^2, \quad i = 1, \dots, M,$
 $2 \sum_{i=1}^M \|t_{ci}\| (\lambda \|t_{ci}\| - \|t_{ai}\|) = 0. \quad i = 1, \dots, M.$

基于Motion-based和Mutual-information-based的外参标定

Step2 Mutual-information-based

- 共同观测点的信息：距离、反射率、图像强度
- 关联度计算

$$MI(S, C) \stackrel{\text{def}}{=} H(S) + H(C) - H(S, C),$$

$$H(S) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{S_i \in S} p_S(S_i) \log p_S(S_i),$$

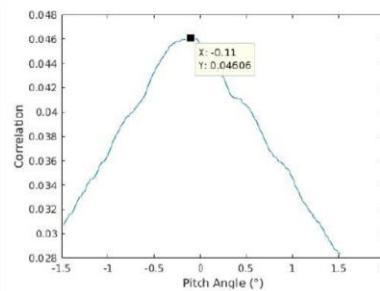
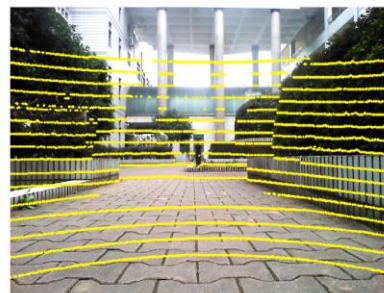
$$H(C) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{C_i \in C} p_C(C_i) \log p_C(C_i),$$

$$H(S, C) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{S_i \in S} \sum_{C_i \in C} p_{SC}(S_i, C_i) \log p_{SC}(S_i, C_i),$$

$$p_S(S = S_i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n G_{\omega}(S - S_j),$$

$$p_C(C = C_i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n G_{\omega}(C - C_j),$$

$$p_{SC}(S = S_i, C = C_i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n G_{\Omega} \left(\begin{bmatrix} S \\ C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_j \\ C_j \end{bmatrix} \right)$$

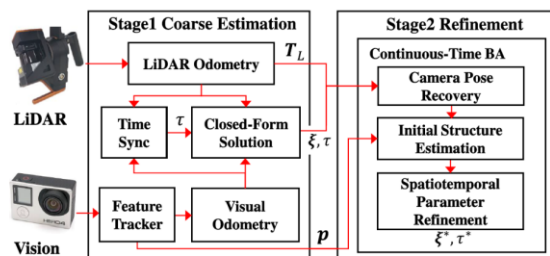


2.2 基于 Motion-based 和重投影模型的外参标定与时间同步

基于Motion-based和重投影模型的外参标定与时间同步

Step1 粗略外参计算

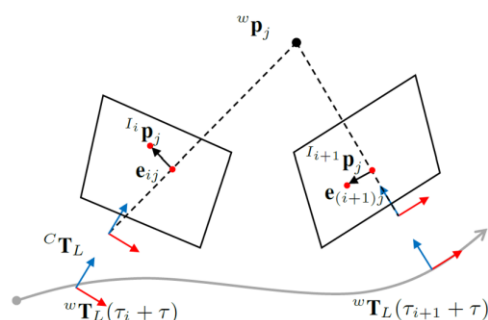
假设时间同步，基于手眼标定粗略计算外参



Step2 精确计算外参与同步时间

- 重投影误差 $\mathbf{e}_{ij} = {}^{I_i}\mathbf{p}_j - \pi({}^C\mathbf{T}_L {}^L\mathbf{T}_W(\tau_i + \tau) {}^w\mathbf{p}_j)$

- 目标函数
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \mathbf{e}_{ij}^\top \Sigma_{ij}^{-1} \mathbf{e}_{ij}$$



课程链接



公众号

3. 基于轮廓信息与扰动和概率模型的外参监测与标定

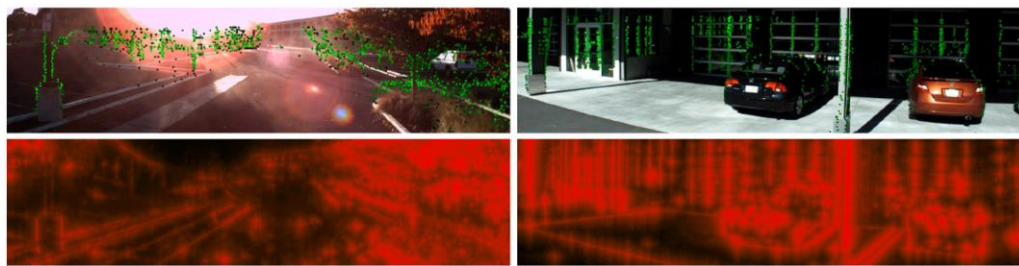
基于轮廓信息与扰动和概率模型的外参监测与标定

算法概括

基于图像和激光点云提取场景轮廓信息进行融合
使用扰动和概率模型分析解的最优性

Step1 数据预处理

- 图像预处理 $D_{i,j} = \alpha \cdot E_{i,j} + (1 - \alpha) \cdot \max_{x,y} E_{x,y} \cdot \gamma^{\max(|x-i|, |y-j|)}$
- 激光预处理 $X_p^i = \max(P_{p-1}^i \cdot r - P_p^i \cdot r, P_{p+1}^i \cdot r - P_p^i \cdot r, 0)^\gamma$



基于轮廓信息与扰动和概率模型的外参监测与标定

Step2 外参在线实时监测评估

• 关联度

$$J_C = \sum_{f=n-w}^n \sum_{p=1}^{|X^f|} X_p^f \cdot D_{i,j}^f$$

• 准确度评估指标

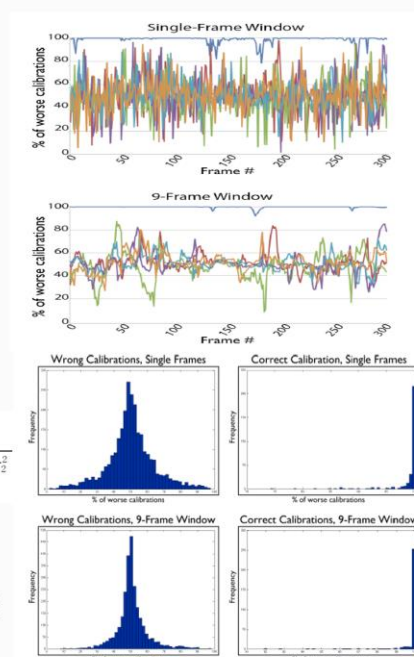
$$F_C = \frac{F_{worse}}{F_{total}}$$

• 外参有效概率

$$P_{Calibrated} = \frac{e^{-0.5(x-\mu_1)^2 / \sigma_1^2}}{e^{-0.5(x-\mu_1)^2 / \sigma_1^2} + e^{-0.5(x-\mu_2)^2 / \sigma_2^2}}$$

• 外参修正

贪心算法、蒙特卡洛粒子群算法

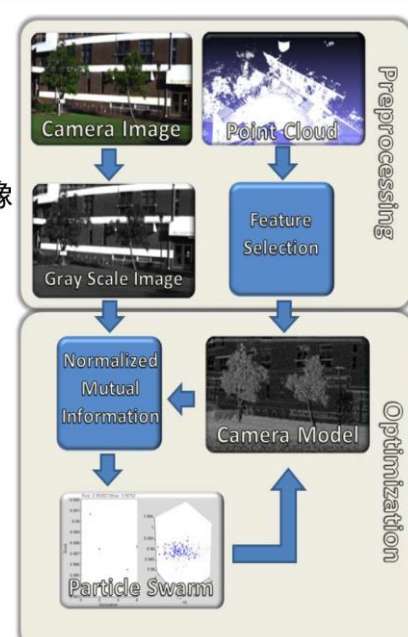
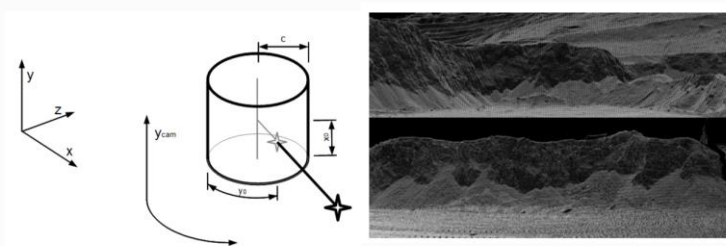


4. 基于 Mutual-Information 优化的外参标定

4.1 基于 Normalized-Mutual-Information 外参标定与评价

基于 Normalized-Mutual-Information 外参标定

- **图像预处理** 转换成灰度图
- **激光预处理** 计算点云法向量 $C = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 (p_i - c)(p_i - c)^T$
- **相机模型** 使用点云法向量或反射率投影柱形图像
- **NMI 模型**
$$NMI(M, N) = \frac{H(M) + H(N)}{H(M, N)}$$
- **优化** 粒子群优化算法



课程链接

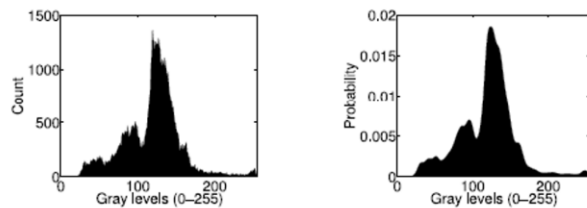


公众号

4.2 基于 Mutual-Information 梯度模型的外参标定

基于Mutual-Information梯度模型的外参标定

- **激光预处理** 3d-2d投影 $\tilde{p}_i = K[R | t] \tilde{P}_i, \quad Y_i = I(p_i)$
- **联合概率分布** 计算激光反射率与像素联合直方图分布
- **计算MI** $MI(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y), \quad \hat{\Theta} = \arg \max_{\Theta} MI(X, Y; \Theta)$
- **外参优化** 使用梯度法 $G \equiv \nabla MI(X, Y; \Theta),$
- **评价外参** 计算外参方差的克拉美-罗下界值



Algorithm 1 Automatic Calibration by maximization of MI

```

1: Input: 3D Point cloud  $\{P_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ ,
   Reflectivity  $\{X_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ , Image  $\{I\}$ ,
   Initial guess  $\{\Theta_0\}$ .
2: Output: Estimated parameter  $\{\hat{\Theta}\}$ .
3: while  $(\|\Theta_{k+1} - \Theta_k\| > THRESHOLD)$  do
4:    $\Theta_k \rightarrow [R | t]$ 
5:   for  $i = 1 \rightarrow n$  do
6:      $\tilde{p}_i = K[R | t] \tilde{P}_i$ 
7:      $Y_i = I(p_i)$ 
8:   end for
9:   Calculate the joint histogram:  $Hist(X, Y)$ .
10:  Calculate the kernel density estimate of the joint
   distribution:  $p(X, Y; \Theta_k)$ .
11:  Calculate the MI:  $MI(X, Y; \Theta_k)$ .
12:  Calculate the gradient:  $G_k = \nabla MI(X, Y; \Theta_k)$ .
13:  Calculate the step size  $\gamma_k$ .
14:   $\Theta_{k+1} = \Theta_k + \gamma_k \frac{G_k}{\|G_k\|}$ .
15: end while

```



课程链接



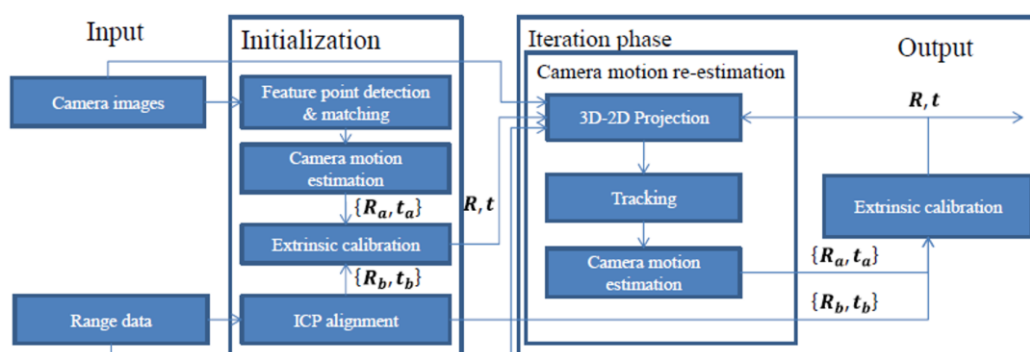
公众号

5. 基于外参与相机位姿估计交替迭代优化的外参标定

5.1 基于 Motion-based 和重投影模型的交替迭代标定

基于Motion-based和重投影模型的交替迭代标定

算法总框图

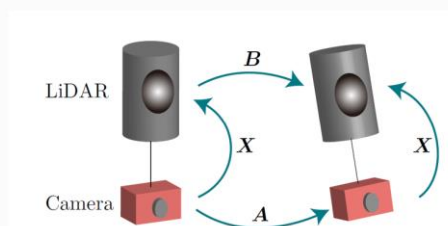


基于3d-2d投影与外参交替迭代标定

Step1 初始化外参计算

- 基本原理 $AX = XB$
- 约束方程 $R_a^i t + s^i t_a^i = R t_b^i + t$

$$R = \arg \min_R \sum_i |R_a^i R - R R_b^i|$$

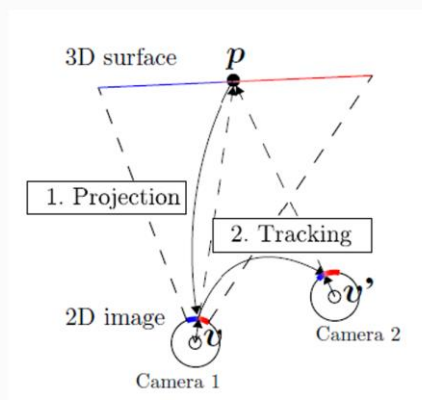


Step2 相机运动估算与外参迭代

- 3d-2d $v = Proj(Rp + t)$
- 相机运动估计 $R_a^i, t_a^i = \arg \min_{R_a, t_a} \sum_j |v_j' \times Proj(R_a(Rp_j + t) + t_a)|$

$$R = \arg \min_R \sum_i |R_a^i R - R R_b^i|$$

$$t = \arg \min_t \sum_i |(R_a^i t + t_a^i) - (R t_b^i + t)|$$
- 外参迭代



5.2 基于多种优化模型的交替迭代标定

基于多种优化模型的交替迭代标定

总体优化目标函数

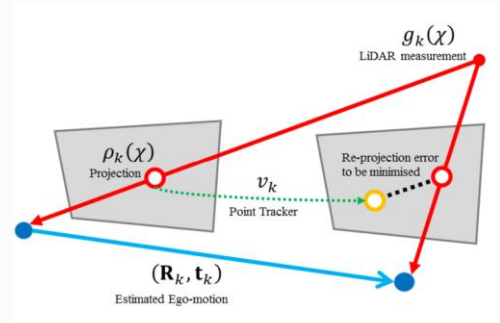
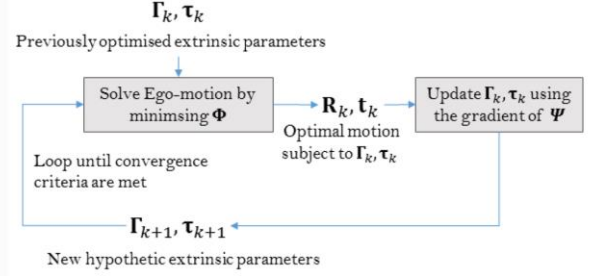
$$\min_{\Gamma, \tau} \Psi(\Gamma, \tau; \mathbf{R}, \mathbf{t}) \text{ s.t. } (\mathbf{R}, \mathbf{t}) \in \arg \min \Phi(\mathbf{R}, \mathbf{t}; \Gamma, \tau)$$

Step1 内迭代

- **目的**：通过给定外参，优化相机位姿
- **优化函数**：最小化重投影误差

$$\hat{\phi}_{\text{EPI}}(\mathbf{R}, \mathbf{t}) = \sum_j \left\| \varepsilon(\hat{\chi}_{j,k}, \hat{\chi}_{j,k+1}; \mathbf{K}^{-\top} [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \mathbf{K}^{-1}) \right\|^2$$

$$\Phi(\mathbf{R}, \mathbf{t}) = \phi_{\text{RPE}}(\mathbf{R}, \mathbf{t}) + \lambda \hat{\phi}_{\text{EPI}}(\mathbf{R}, \mathbf{t})$$



基于多种优化模型的交替迭代标定

Step2 外迭代

- **总体优化函数** $\Psi(\Gamma, \tau; \mathbf{R}, \mathbf{t}) = \bar{\phi}_{\text{RPE}}(\mathbf{R}, \mathbf{t}; \Gamma, \tau) + \alpha \phi_{\text{MI}}(\Gamma, \tau) + \beta \phi_{\text{EG}}(\Gamma, \tau)$

- **重投影** $\bar{\phi}_{\text{RPE}}(\mathbf{R}, \mathbf{t}) = \sum_i \left\| \rho_k(\chi_i) - \pi(\mathbf{R}^{\top} g_{k+1}(\chi_i) - \mathbf{R}^{\top} \mathbf{t}) \right\|_{\Omega_i}^2$

- **MI 优化** $MI(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_i \sum_j p(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) \log \left(\frac{p(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j)}{p(\mathbf{a}_i)p(\mathbf{b}_j)} \right)$

$$\phi_{\text{MI}}(\Gamma, \tau) = \frac{1}{MI\{\mathcal{R}_k(\chi_i), \mathcal{I}_k[\rho_k(\chi_i)]\}}$$

- **连续性** $\delta_k(\chi_i) = \max\{z_k(\chi'_i) - z_k(\chi_i), z_k(\chi''_i) - z_k(\chi_i), 0\}^{\gamma}$

$$\phi_{\text{EG}}(\Gamma, \tau) = \frac{1}{\sum_i \delta_k(\chi_i) \mathcal{J}_k[\rho_k(\chi_i)]}$$

6. 基于目标检测的外参标定

基于目标检测的外参标定

Step1 目标检测

- 点云目标检测 MEGVII网络，输出三维位置、大小、方向、速度、类别和检测分数。
- 图像目标检测 CenterNet网络，输出类似，不包含速度。

Step2 目标跟踪

- 目标跟踪 全局最近邻法和匈牙利算法
- 目标轨迹 扩展卡尔曼滤波

Step3 目标关联

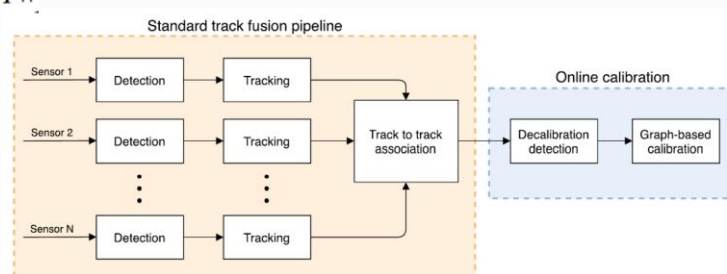
- 位移范数 $\|\delta p\|^2 = \|\delta p\|^2 R^1 \delta p\| = \|\delta p\|$.
- 速度范数

Step4 标定衰减监测

- 基本原理 $H = (x_i - \bar{x}_i)(x_i - \bar{x}_i)^T$,
 $[U, S, V] = \text{SVD}(H)$,
 $R = VU^T$.

Step5 外参标定

- 基本原理 基于图优化



课程链接



公众号

7. 总结与概括

总结与概括

- 外参标定方法

基于 $AX = BX$ 建立优化模型，提供初始外参

基于点云与相机图像的匹配度，评价信息主要包括边缘信息、Mutual-Information、点云配准，建立优化模型，通过最小二乘、牛顿、LM、梯度等方法求解。

通过全局或者局部搜索方法进行求解，例如粒子群、贪心算法等。

基于特征匹配，通过深度学习的方法进行外参标定。

- 外参标定流程

可通过给定初始外参通过优化模型优化。

可进行外参与相机运动估计的交替迭代优化。

可对外参进行实时监测以及评价。

3D视觉工坊