Hamiltonian mechanics

Lagrangian mechanics

1. 어떤 입자의 운동 에너지가 T, 포텐셜 에너지가 V일 때, 이 입자의 Lagrangian L은 $T-V$이다.

2. Lagrangian equation of motion for a conservative system

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0$$

4. Generalized forces (Fowles 책 chap.10 참고!)

D'Alembert's principle은 뉴턴의 운동 제 2법칙(가속도의 법칙)에 해당하는 원리이다. "구속력 혹은 반작용 힘의 가상 변위에 대한 일은 0 이다."(위키피디아)

$$\sum_i^{3N}(F_i-\dot{p}_i)dx_i=0, \quad F_i=\dot{p}_i$$

한편, 위 식의 첫 항은 virtual work라고 부르고 두 번째 항은 inertial term이라고 한다.

$$\text{virtual work} \rightarrow \quad dW=\sum_i F_i dx_i=\sum_j\left[\sum_i\left(F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)\right]dq_j=\sum_j Q_j dq_j$$

$$\text{inertial term} \rightarrow \quad \sum_i \dot{p}_i dx_i=\sum_j\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right]dq_j \quad \text{:Fowles 10.8.14식}$$

Lagrangian mechanics

5. 어떤 입자의 운동에너지가 T이고, 포텐셜 에너지가 V일 때, 그 입자의 Hamiltonian은 $H = T + V$이다.
6. 다음 Hamiltonian function을 생각하자.

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L, \quad L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i)$$

note that generalized momenta conjugate to the generalized coordinate q_i is

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

그러면 Lagrange's e.o.m 은

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}(p_i) = 0$$

$$\Longrightarrow \dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Lagrangian mechanics

Hamiltonian H의 variataion을 구하면,

$$dH = \sum_i \left[p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right]$$

$$= \sum_i \left[p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right]$$

$$= \sum_i \left[\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i \right]$$

한편 $dH(p_i, q_i)$을 아래와 같이 나타낼 수 있으므로,

$$dH = \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right]$$

다음이 성립한다. (Hamiltion's equation)

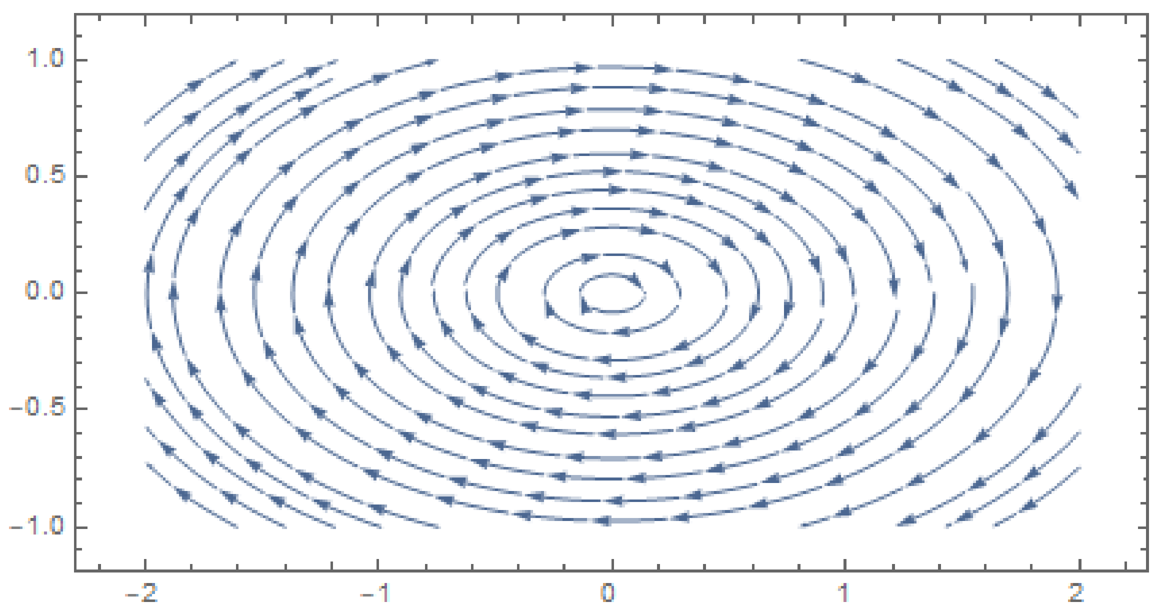
$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

Phase space 란?

Canonical coordinates 와 Canonical momenta를 엮은 것

2dN 차원의 공간 {(p,q)} 혹은 {P(p,q)}



1dim H.O 안에 놓여있는 1개의 입자의 phase space velocity field

Harmonic oscilator : $\frac{1}{2}m\omega^2 q^2$

Phase space – 1dim H.O

Harmonic oscilator : $\frac{1}{2}m\omega^2 q^2$

해밀토니안이 시간에 대한 상수라고 하고 q_0을 -1이라 하자.

Hamilton eqaution에서 phase space위의 점에 대한 움직임을 알아낼 수 있다.

$$-\frac{\partial H}{\partial q} = \dot{p}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$$

1-dim harmonic oscilator의 경우에 쉽게 계산할 수 있다.

$$\dot{p} = -m\omega^2 q, \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

두 식을 연립하면 2차 미방 두 개가 나온다.

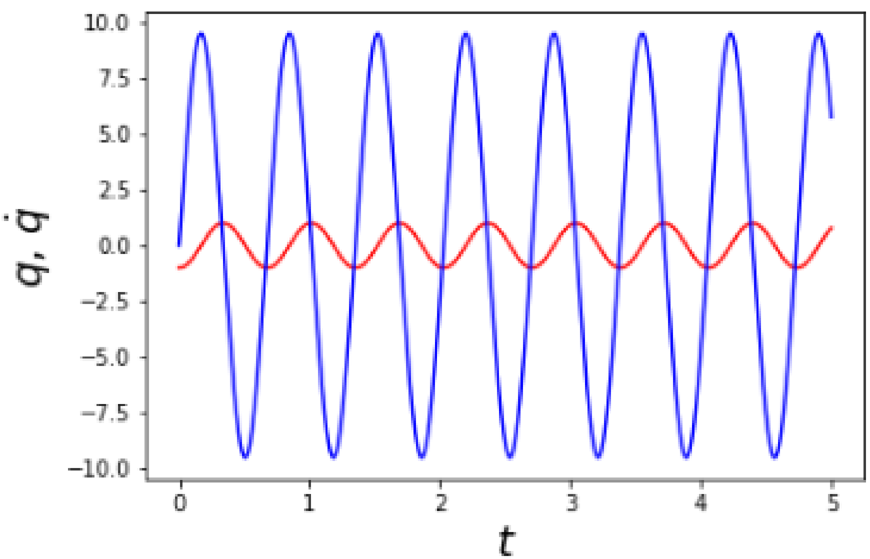
$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad \ddot{p} + \omega^2 p = 0$$

지금 상황을 정리하면,

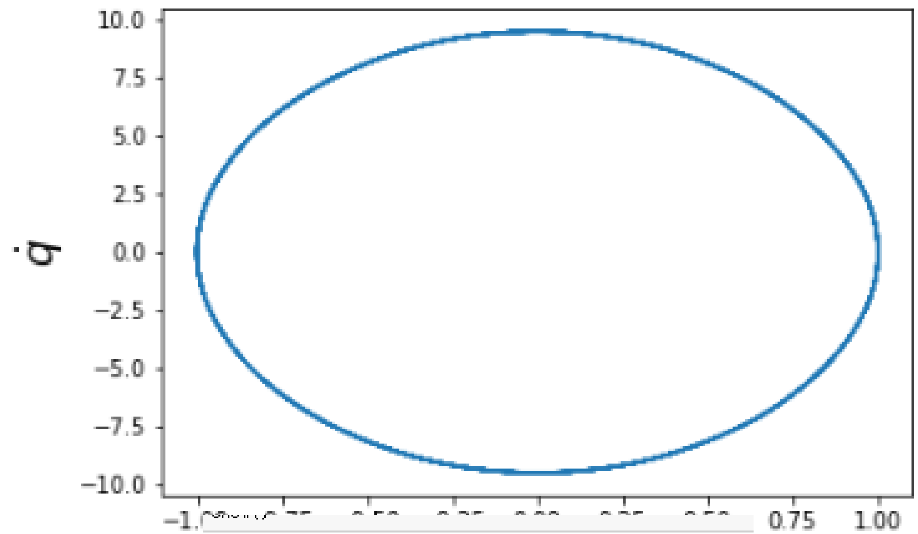
$$q_0 = -1, \quad p_0 = 0, \quad H_0 = H(-1, 0) = const.$$

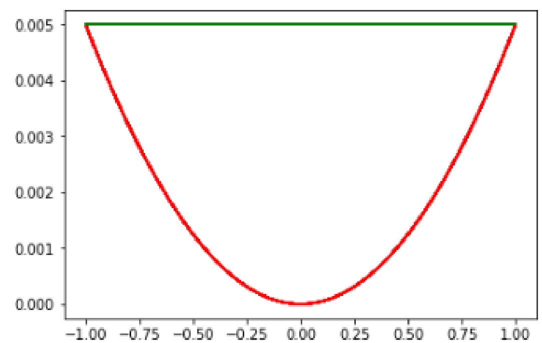
입자 1개의 Phase space

```
plot(pt,pq,'r')  #red
plot(pt,pv,'b')  # blue
xlabel(r'$t$', fontsize=20)
ylabel(r'$q$, $\dot{q}$', fontsize=20)
show()
```

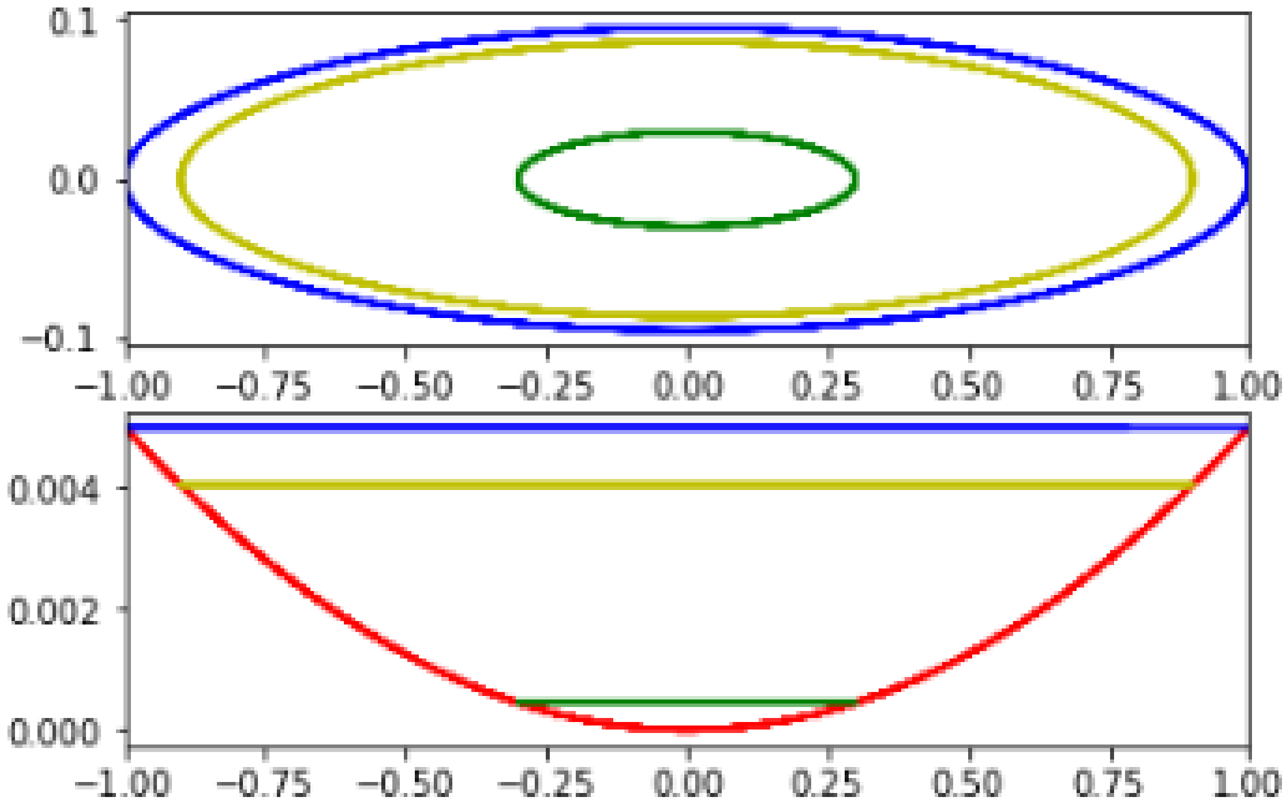



```
plot(pq, pv)
xlabel(r'$q$', fontsize=20)
ylabel(r'$\dot{q}$', fontsize=20)
show()
```





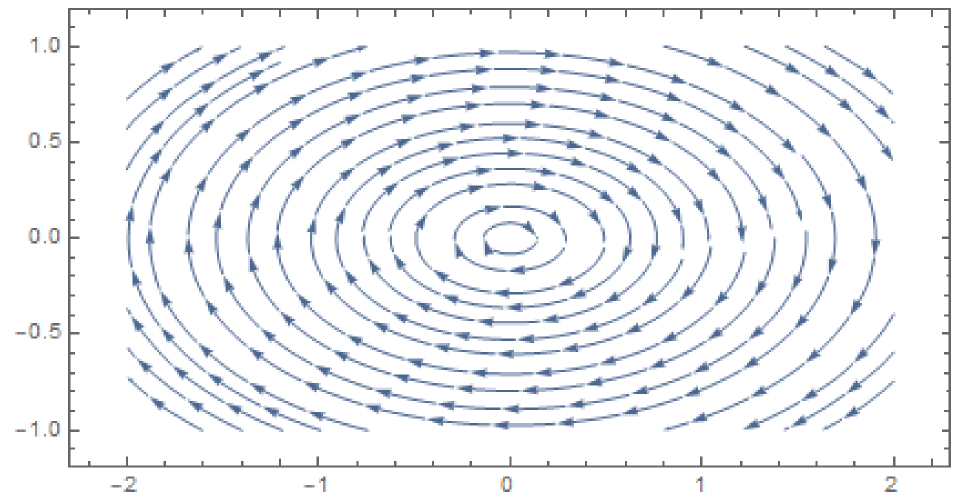
입자 3개 q1_i=-1, q2_i=-0.9, q3_i=-0.3



왔다 갔다 함 https://en.wikipedia.org/wiki/Phase_space

Hamiltonian flow

- Hamiltonian eq. 으로부터 velocity field를 구할 수 있음



연속 방정식의 등장