<교과서 4-9번 (교과서에 오타 있음!!)>

교과서에 제시된 상황은 $dU = TdS + BdM$이다. 그리고 각각의 비열은 다음과 같다.

$$C_M = \frac{\partial Q}{\partial T}\Big)_M = T\frac{\partial S}{\partial T}\Big)_M$$

$$C_B = \frac{\partial Q}{\partial T}\Big)_B = T\frac{\partial S}{\partial T}\Big)_B$$

문제에서 주어진 상수는 (교과서에 잘못된 부분)

$$\alpha_M = \frac{\partial M}{\partial T}\Big)_B$$

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B}\Big)_T$$

여기서 우리에게 주어진 실험이 거시변수인 온도와 자기장$(T, B)$을 쓰는 실험임을 알 수 있다. MRI와 히터를 동시에 쓰는가보다. 불을 올리거나 스위치를 돌리는 것이 엔트로피와 magnetization을 조작하는 것보다는 쉬운 일이다.
고체가 받는 열을 실험에서 쓸 변수인 자기장과 온도에 대해서 표현할 수 있다.

$$dQ = TdS(B,T) = T\ \frac{\partial S}{\partial B}\Big)_T dB + T\ \frac{\partial S}{\partial T}\Big)_B dT$$

$$= T\ \frac{\partial S}{\partial B}\Big)_T dB + C_B dT$$

이때,

$$dB(T,M) = \frac{\partial B}{\partial T}\Big)_M dT + \frac{\partial B}{\partial M}\Big)_T dM$$

를 이용해서 $dB$자리에 대입하면,

$$dQ = T\ \frac{\partial S}{\partial B}\Big)_T \left[\frac{\partial B}{\partial T}\Big)_M dT + \frac{\partial B}{\partial M}\Big)_T dM\right] + C_B dT$$

$$= \left[C_B + T\ \frac{\partial S}{\partial B}\Big)_T \frac{\partial B}{\partial T}\Big)_M\right] dT + \left[\frac{\partial S}{\partial B}\Big)_T \frac{\partial B}{\partial M}\Big)_T\right] dM$$

$C_M$은 magnetization이 일정할 때 고체의 열용량을 측정해놓은 것이므로 이것을 구하려면 $dM = 0$으로 두어야 한다. 따라서

$$C_M = \frac{\partial Q}{\partial T}\Big)_M = \left[C_B + T\ \frac{\partial S}{\partial B}\Big)_T \frac{\partial B}{\partial T}\Big)_M\right]$$

$$\begin{Bmatrix} dU = TdS + BdM \\ dF = -SdT + BdM \\ dH = TdS - MdB \\ dG = -SdT - MdB \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} \partial_S B|_M = \partial_M T|_S \\ \partial_T B|_M = -\partial_M S|_T \\ \partial_B T|_S = -\partial_S B|_M \\ \partial_B S|_T = \partial_T M|_B \end{Bmatrix}$$

위는 맥스웰 관계식들을 나타낸 것이다. 여기서 우리가 쓸 것은 gibbs free energy에서 나온 $\partial_B S|_T = \partial_T M|_B$ 이다.

$$C_M = \left[ C_B + T \left.\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T \left.\frac{\partial B}{\partial T}\right)_M \right] = \left[ C_B + T \left.\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B \left.\frac{\partial B}{\partial T}\right)_M \right]$$

$$= \left[ C_B + T\alpha_M \left.\frac{\partial B}{\partial T}\right)_M \right]$$

한편, $dM(B,T) = 0$ 에서

$$dM(B,T) = \left.\frac{\partial M}{\partial B}\right)_T dB + \left.\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B dT = 0$$

$$\left.\frac{\partial M}{\partial B}\right)_T dB = -\left.\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B dT$$

이므로,

$$\left.\frac{\partial B}{\partial T}\right)_M = \frac{-\partial M/\partial T|_B}{\partial M/\partial B|_T} = -\frac{\alpha_M}{\chi}$$

따라서,

$$C_M = C_B + T\alpha_M \left.\frac{\partial B}{\partial T}\right)_M = C_B - \frac{T{\alpha_M}^2}{\chi}$$

또는

$$C_B = C_M + \frac{T{\alpha_M}^2}{\chi}$$