학습 보고서

활동날짜	
활동장소	
스터디 참석자	
학습주제	3단원 연습문제 풀이- 입자와 자기장의 상호작용/상태수 1단원 복습- 확률밀도함수로부터 특성함수 끌어내기
학습내용	(아래)

1. 3단원 연습문제 풀이- 입자와 자기장의 상호작용/상태수

이 문제는 우리 5명이 전부 쉽사리 접근하지 못했다. 계의 에너지가 주어진 값으로 주어졌을 때의 상태수는 $\frac{N!}{n_1!n_2!}$ 으로 쉽게 구할 수 있지만, 에너지가 E부터 E+dE 사이에 있는 총 상태수를 구하는 문제는 생각하기 다소 까다롭다. 이것을 설명하기 위해 그럴듯한 설명들을 많이 이야기해 보았다. 그중 하나는 위상공간 개념에 대응해서 에너지 격자들과 입자수 격자들로 이루어진 방들을

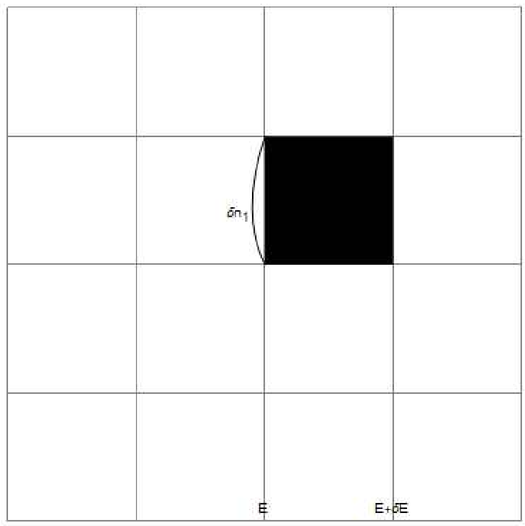
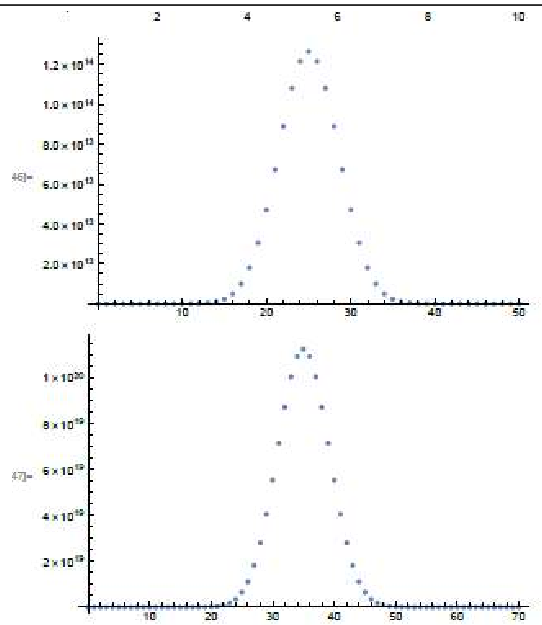


그림 1
스터디 시간에 생각해 보았던 에너지-상태수 격자

생각해 보았는데 사실 이 설명은 석연치 않은 구석이 한두 가지가 아니다. 그림을 조금만 수정한다면 맞게 설명할 수 있겠는데 아직 배움이 부족한 우리는 그것을 생각해내기 어려웠다. 직접 N에 숫자도 대입해서 에너지 구조를 생각하는 등 분투했지만 끝내 우리 힘으로는 생각할 수 없었다. 그래서 교수님께 직접 물어보았다. 교수님은 probability density개념과 같다는 뉘앙스로 설명해 주셨다. 정리하자면 다음과 같다.

에너지가 $E=-(2n_1-N)\mu B$ 일때 이 에너지를 해밀토니안으로 갖는 상태의 총 개수 = $N C n_1$
이것을 하나의 함수로 생각해보자. $f(n_1) = N C n_1$ 엄밀하게 이 아이는 discrete한 아이지만, N이 아주 클땐, 사실상 연속적인 함수와 비슷하다. 다음 그림을 보자.



그러면 생각하기 더 쉬워진다. 아니면 그냥 받아들이는 것도 하나의 방법이다. 따라서 에너지가 E 부터 E+dE 까지 변할때 총 상태의 수는 $f(n_1)\,dn_1$ 와 같다.

그림 2 교수님 버전의 설명

2. 1단원 복습- 확률밀도함수로부터 특성함수 끌어내기

binomial distribution을 탄도미사일과 그것을 요격하는 일에 빗대어 표현한 문제를 함께 생각해 보았다. 풀이는 다음과 같을 것으로 결론지었다.

(a) n개의 미사일이 요격될 확률은 다음과 같다.

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{(N-n)}$$

(b) 특성함수를 구하기 위해 먼저 probability density $\mathcal{P}(x)$를 구한다.

$$\mathcal{P}(x) = \sum_n \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{(N-n)}\delta(x-n)$$

note that

$$\int_{x=0}^{N}\mathcal{P}(x)dx = \int_0^N \frac{N!}{0!(N-0)!}p^0(1-p)^{(N-0)}\delta(x-0) + \frac{N!}{1!(N-1)!}p^1(1-p)^{(N-1)}\delta(x-1) + \cdots$$

$$+\frac{N!}{N!(N-N)!}p^N(1-p)^{(N-N)}\delta(x-N)dx$$

$$= \frac{N!}{0!(N-0)!}p^0(1-p)^{(N-0)} + \frac{N!}{1!(N-1)!}p^1(1-p)^{(N-1)} + \cdots + \frac{N!}{N!(N-N)!}p^N(1-p)^{(N-N)}$$

$$= (1+(1-p))^N = 1 \text{....make sense!}$$

이제,

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx}Q^N(k)$$

로부터,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx}\mathcal{P}(x) = Q^N(k) \text{..........F.T}$$

$$Q^N(k) = \sum_n \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{(N-n)}\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x-n)e^{ikx}$$

$$= \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{(N-n)}e^{ikn} = \frac{N!}{n!(N-n)!}(pe^{ik})^n(1-p)^{(N-n)}$$

$$= (pe^{ik}+(1-p))^N$$

따라서 특성함수는 다음과 같다.

$$Q(k) = pe^{ik} + 1 - p = p(1 + ik - k^2/2 + \cdots) + 1 - p$$

$$= 1 + ikp - \frac{k^2}{2}p + \cdots$$

그림 5 탄도미사일 문제의 풀이

활동성찰	뭉치면 살고 흩어지면 죽는다는 말도 있지만 뭉쳐도 잘 풀리지 않는 일이 있기 마련이다. 그렇지만 우리는 학생이기 때문에 질문을 통해서 궁금증을 해결할 수 있다. 질문의 중요함을 느꼈다.