학습 보고서

활동날짜	
활동장소	
스터디 참석자	
학습주제	6장 연습문제 풀이 (1번 ~ 8번) Microcanonical ensemble의 응용 - 상자성

학습내용

1. 7번 문제의 답안에 오류가 있음을 확인했다. 계의 에너지가

$$U = -\bar{N}\epsilon$$

이고, 주어진 계의 엔트로피는

$$S = k_B \ln \Omega = k_B[\ln N! - \ln \bar{N}! - \ln(N - \bar{N})!]$$

$$= k_B[N \ln N - \bar{N} \ln \bar{N} - (N - \bar{N}) \ln(N - \bar{N})]$$

이다. 한편, 온도의 정의로부터,

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{\partial S}{\partial \bar{N}} \frac{\partial \bar{N}}{\partial U} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial S}{\partial \bar{N}}$$

이고, 엔트로피를 미분하면

$$-\frac{\partial S}{\partial \bar{N}} = -k_B[-\ln \bar{N} + \ln(N - \bar{N})] = k_B \ln \frac{N}{N - \bar{N}}$$

이므로,

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial S}{\partial \bar{N}} = \frac{k_B}{\epsilon} \ln \frac{\bar{N}}{N - \bar{N}}$$

이다. 로그의 분모 분자에 ε을 곱해주면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{T} = \frac{k_B}{\epsilon} \ln \frac{\epsilon N}{\epsilon N - \epsilon \bar{N}} = \frac{k_B}{\epsilon} \ln \frac{-U}{\epsilon N + U}$$

원래 답안은 에너지의 부호가 바뀌어져서 나와 있었다.

2. 8번 문제도 해설이 애매하게 나와서 함께 이야기해 보았다. N개의 주사위를 던졌을 때 가능한 state들은 눈의 수가 각각 1,2,3,4,5,6일 때, 총 6개이다. 각각의 비둘기 집에 비둘기들을 넣을 때처럼 각각 state들에 해당하는 횟수를 n1, n2, n3, n4, n5, n6이라고 하면, 다음이 성립한다.

$$\sum_i^6 n_i = N, \quad W\{n_i\} = \frac{N!}{\prod_i^6 n_i!}$$

이미 앞선 수업시간에 Lagrange multiplier를 이용해 ln[W{ni}]의 최댓값을 갖게 하는 ni를 구한 바 있다. 엔트로피가 최대가 되게 하는 ni는 다음의 관계식

$$\sum_i^6 (\ln n_i - \lambda) dn_i = 0$$

을 만족해야 한다. 그 전에 위의 관계식은 factorial 의 로그를 Stirling formula를 이용

	해 근사시켜서 나온 결과다. Stirling formula는 언제 쓰는가? N이 무한대로 접근할 때 자유롭게 쓸 수 있다. 즉 N이 무한대로 간다면 ni=exp[λ]로 전부 같아진다. 따라서 1부터 6까지 나올 경우의 수가 전부 같을 때 엔트로피가 가장 크고, 엔트로피가 가장 크다는 것은 가장 자연스럽다는 것을 말한다. 정리하면, N이 무한대에 접근함에 따라서 1부터 6까지 나올 확률은 모두 같은 것이 가장 자연스럽다. 3. 상자성 (교과서 연습문제 3-1 참고) 단위 부피당 N0의 자기 원자를 갖는 물질을 생각하자. 자기 원자들은 외부 자기장 H에 놓여 있다. 각 원자는 스핀 1/2과 자기 모멘트 μ를 갖는다고 할 때, 각 원자의 자기 모멘트는 외부 자기장에 대해 나란히, 혹은 거꾸로 배열된다. 물질이 절대온도 T에 있다면 이러한 원자의 평균 자기 모멘트가 어떻게 될까? 언뜻 생각해 보면 왠지 나란히 배열되어 있을 것 같다. 사실 이것은 옳은 추측이다. 정량적으로 이 추측을 증명하려면 먼저 한 원자를 따로 떼어내어야 한다. 이 원자는 H에 나란한 + 상태에 있거나 H에 거꾸로인 - 상태에 있을 수 있다. 특정 에너지를 가질 확률이 다음과 같으므로(canonical ensemble) $$p_i = Ce^{-\beta E_i}$$ (+) 상태에 있을 확률은 $$p_+ = Ce^{-\beta\epsilon_+} = Ce^{\beta\mu H}$$ 이고, (-) 상태에 있을 확률은 $$p_- = Ce^{-\beta\epsilon_-} = Ce^{-\beta\mu H}$$ 이다. 따라서 μ가 양수일 때 원자가 H와 나란히 배열될 확률은 거꾸로 배열될 확률보다 크다 (β가 0보다 크기 때문에). 여기서 확률을 결정하는 주요 변수는 $$y = \beta\mu H = \frac{\mu H}{k_B T}$$ 으로, 특정 열 에너지에 대한 자기 에너지의 비이다. T가 매우 크다면 y가 아주 작아져 p+가 p-와 같아진다. 즉 온도가 아주 커지면 원자들의 자기 모멘트들이 완전히 random하게 배열된다. 반면 T가 매우 작다면 y가 아주 커져서 p+가 p-보다 훨씬 커진다. 즉 온도가 낮아지면 평균 자기 모멘트는 μ에 가까워진다. 이 결과를 실제로 계산해 볼 수도 있다. $$\bar{\mu}_H = \frac{p_+\mu + p_-(-\mu)}{p_+ + p_-} = \mu\frac{e^{\beta\mu H} - e^{-\beta\mu H}}{e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}} = \mu\tanh\beta\mu H = \mu\tanh\frac{\mu H}{k_B T}$$ 사실 이 결과는 우리가 이미 3단원 연습문제 3-1번 문제를 풀면서 알아낸 결과이다. 단위 부피당 평균 자기 모멘트 $\overline{M_0}$는 H의 방향과 나란하고 그 크기는 $$\bar{M}_0 = N_0\bar{\mu}_H$$ 이다. tanh함수의 어림을 이용해서 앞서 했던 논의를 확인할 수 있다.

$y \ll 1$ 일 때, $\tanh y = y$

$\mu H/k_BT \ll 1$일 때, $\tanh \mu H/k_BT = \mu H/k_BT$

$$\therefore \bar{\mu}_H = \frac{\mu^2 H}{k_BT}, \quad \bar{M}_0 = N_0\bar{\mu}_H = \frac{N_0\mu^2}{k_BT}H = \chi H$$

χ를 magnetic susceptibility라고 부르고 절대온도에 반비례한다.(Curie의 법칙)

$y \gg 1$ 일 때, $\tanh y = 1$

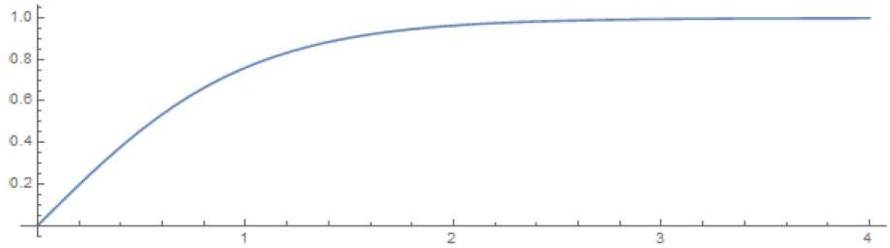
$\mu H/k_BT \gg 1$일 때, $\tanh \mu H/k_BT = 1$

$$\therefore \bar{\mu}_H = \mu, \quad \bar{M}_0 = N_0\bar{\mu}_H = N_0\mu \text{ (independent of } H)$$

한편, magnetization을 식으로 다음과 같이 나타낼 수 있으므로,

$$\bar{M}_0 = N_0\bar{\mu} = \mu N_0 \tanh\frac{\mu H}{k_BT}, \quad \frac{\bar{M}_0}{\mu N_0} = \tanh\frac{\mu H}{k_BT}$$

이것에 대한 그림을 그려보면 다음과 같다.



온도 T, 자기장 H에 대한 magnetization의 의존성을 확인할 수 있다.

활동성찰

오늘로 전공스터디 활동이 끝났다. 8주간 쉬지 않고