

학습 보고서

활동날짜	
활동장소	
스터디 참석자	
학습주제	6장 연습문제 풀이 (1번 ~ 8번) Microcanonical ensemble의 응용 - 상자성
학습내용	<p>1. 7번 문제의 답안에 오류가 있음을 확인했다. 계의 에너지가</p> $U = -\bar{N}\epsilon$ <p>이고, 주어진 계의 엔트로피는</p> $\begin{aligned} S &= k_B \ln \Omega = k_B [\ln N! - \ln \bar{N}! - \ln (N - \bar{N})!] \\ &= k_B [N \ln N - \bar{N} \ln \bar{N} - (N - \bar{N}) \ln (N - \bar{N})] \end{aligned}$ <p>이다. 한편, 온도의 정의로부터,</p> $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{\partial S}{\partial \bar{N}} \frac{\partial \bar{N}}{\partial U} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial S}{\partial \bar{N}}$ <p>이고, 엔트로피를 미분하면</p> $-\frac{\partial S}{\partial \bar{N}} = -k_B [-\ln \bar{N} + \ln (N - \bar{N})] = k_B \ln \frac{N}{N - \bar{N}}$ <p>이므로,</p> $\frac{1}{T} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial S}{\partial \bar{N}} = \frac{k_B}{\epsilon} \ln \frac{N}{N - \bar{N}}$ <p>이다. 로그의 분모 분자에 ϵ를 곱해주면 다음과 같이 나타낼 수 있다.</p> $\frac{1}{T} = \frac{k_B}{\epsilon} \ln \frac{\epsilon N}{\epsilon N - \epsilon \bar{N}} = \frac{k_B}{\epsilon} \ln \frac{-U}{\epsilon N + U}$ <p>원래 답안은 에너지의 부호가 바뀌어져서 나와 있었다.</p> <p>2. 8번 문제도 해설이 애매하게 나와서 함께 이야기해 보았다. N개의 주사위를 던졌을 때 가능한 state들은 눈의 수가 각각 1,2,3,4,5,6일 때, 총 6개이다. 각각의 비둘기 집에 비둘기들을 넣을 때처럼 각각 state들에 해당하는 횟수를 $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$이라고 하면, 다음이 성립한다.</p> $\sum_i^6 n_i = N, \quad W\{n_i\} = \frac{N!}{\prod_i^6 n_i!}$ <p>이미 앞선 수업시간에 Lagrange multiplier를 이용해 $\ln[W\{n_i\}]$의 최댓값을 갖게 하는 n_i를 구한 바 있다. 엔트로피가 최대가 되게 하는 n_i는 다음의 관계식</p> $\sum_i^6 (\ln n_i - \lambda) dn_i = 0$ <p>을 만족해야 한다. 그 전에 위의 관계식은 factorial 의 로그를 Stirling formula를 이용</p>



해 근사시켜서 나온 결과다. Stirling formula는 언제 쓰는가? $N!$ 이 무한대로 접근할 때 자유롭게 쓸 수 있다. 즉 $N!$ 이 무한대로 간다면 $n! \approx \exp[n \ln n]$ 로 전부 갈아진다. 따라서 1부터 6까지 나올 경우의 수가 전부 같을 때 엔트로피가 가장 크고, 엔트로피가 가장 크다는 것은 가장 자연스럽다는 것을 말한다. 정리하면, $N!$ 이 무한대에 접근함에 따라서 1부터 6까지 나올 확률은 모두 같은 것이 가장 자연스럽다.

3. 상자성 (교과서 연습문제 3-1 참고)

단위 부피당 N_0 의 자기 원자를 갖는 물질을 생각하자. 자기 원자들은 외부 자기장 H 에 놓여 있다. 각 원자는 스핀 $1/2$ 과 자기 모멘트 μ 를 갖는다고 할 때, 각 원자의 자기 모멘트는 외부 자기장에 대해 나란히, 혹은 거꾸로 배열된다. 물질이 절대온도 T 에 있다면 이러한 원자의 평균 자기 모멘트가 어떻게 될까? 언뜻 생각해 보면 왠지 나란히 배열되어 있을 것 같다. 사실 이것은 옳은 추측이다. 정량적으로 이 추측을 증명하려면 먼저 한 원자를 따로 떼어내어야 한다. 이 원자는 H 에 나란한 $+$ 상태에 있거나 H 에 거꾸로인 $-$ 상태에 있을 수 있다. 특정 에너지를 가질 확률이 다음과 같으므로(canonical ensemble)

$$p_i = C e^{-\beta E_i}$$

(+) 상태에 있을 확률은

$$p_+ = C e^{-\beta \epsilon_+} = C e^{\beta \mu H}$$

이고,

(-) 상태에 있을 확률은

$$p_- = C e^{-\beta \epsilon_-} = C e^{-\beta \mu H}$$

이다. 따라서 μ 가 양수일 때 원자가 H 와 나란히 배열될 확률은 거꾸로 배열될 확률보다 크다 (β 가 0보다 크기 때문에). 여기서 확률을 결정하는 주요 변수는

$$y = \beta \mu H = \frac{\mu H}{k_B T}$$

으로, 특정 열 에너지에 대한 자기 에너지의 비이다. T 가 매우 크다면 y 가 아주 작아져 p_+ 가 p_- 와 같아진다. 즉 온도가 아주 커지면 원자들의 자기 모멘트들이 완전히 random하게 배열된다. 반면 T 가 매우 작다면 y 가 아주 커져서 p_+ 가 p_- 보다 훨씬 커진다. 즉 온도가 낮아지면 평균 자기 모멘트는 μ 에 가까워진다. 이 결과를 실제로 계산해 볼 수도 있다.

$$\bar{\mu}_H = \frac{p_+ \mu + p_- (-\mu)}{p_+ + p_-} = \mu \frac{e^{\beta \mu H} - e^{-\beta \mu H}}{e^{\beta \mu H} + e^{-\beta \mu H}} = \mu \tanh \beta \mu H = \mu \tanh \frac{\mu H}{k_B T}$$

사실 이 결과는 우리가 이미 3단원 연습문제 3-1번 문제를 풀면서 알아낸 결과이다. 단위 부피당 평균 자기 모멘트 \bar{M}_0 는 H 의 방향과 나란하고 그 크기는

$$\bar{M}_0 = N_0 \bar{\mu}_H$$

이다. \tanh 함수의 어림을 이용해서 앞서 했던 논의를 확인할 수 있다.



$y \ll 1$ 일 때, $\tanh y = y$

$\mu H/k_B T \ll 1$ 일 때, $\tanh \mu H/k_B T = \mu H/k_B T$

$$\therefore \bar{\mu}_H = \frac{\mu^2 H}{k_B T}, \quad \bar{M}_0 = N_0 \bar{\mu}_H = \frac{N_0 \mu^2}{k_B T} H = \chi H$$

χ 를 magnetic susceptibility라고 부르고 절대온도에 반비례한다.(Curie의 법칙)

$y \gg 1$ 일 때, $\tanh y = 1$

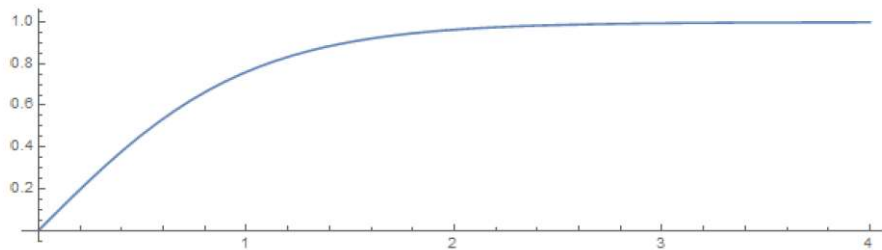
$\mu H/k_B T \gg 1$ 일 때, $\tanh \mu H/k_B T = 1$

$$\therefore \bar{\mu}_H = \mu, \quad \bar{M}_0 = N_0 \bar{\mu}_H = N_0 \mu \text{ (independent of } H\text{)}$$

한편, magnetization을 식으로 다음과 같이 나타낼 수 있으므로,

$$\bar{M}_0 = N_0 \bar{\mu} = \mu N_0 \tanh \frac{\mu H}{k_B T}, \quad \frac{\bar{M}_0}{\mu N_0} = \tanh \frac{\mu H}{k_B T}$$

이것에 대한 그림을 그려보면 다음과 같다.



온도 T , 자기장 H 에 대한 magnetization의 의존성을 확인할 수 있다.

활동성찰

오늘로 전공스터디 활동이 끝났다. 8주간 쉬지 않고 스터디 모임에 참석한 모두 정말 수고 많았고, 그간 해왔던 대로 2학기 남은 일정도 열심히 마무리해서 풍성한 한 해를 보낼 것으로 믿어 의심치 않는다. 화이팅!

