고전역학 (Lagrange multiplier, Lagrangian mechanics) 리뷰

Lagrange multiplier 라그랑지 곱수법은 어떤 constraint $\phi(x,y) = const.$가 주어져 있을 때 함수 $f(x,y)$의 최대,최솟값을 간단하게 구할 수 있는 방법이다.

먼저, $f(x,y)$의 최대/최소 점을 찾고 싶으므로 $df = 0$으로 둔다.($\phi(x,y) = const.$는 당연히 $d\phi = 0$ 이다.)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = 0$$

그 다음, $d\phi$에 lagrange multiplier λ를 곱하고 df에 더한다. (이제 우리가 할 일은 λ를 찾아서 알맞은 x, y 값을 구하는 것이다.)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)dy = 0$$

이제 우리에게는 다음 세 개의 식과 세 개의 미지수(x, y, λ)가 남았다.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \phi(x,y) = 0$$

앞의 두 식은 constraint $\phi(x,y)$와 함수 $f(x,y)$로 이루어진 함수 $F(x,y) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y)$의 두 편미분이다.

Example. 모서리가 각 축에 평행하고 타원체

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

안에 접하는 직육면체의 최대 부피를 구하여라.(Boas p.224)

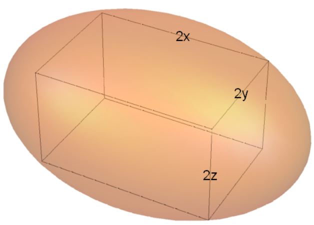

Figure 1: 타원체에 접하는 상자

Solution. 그림에서 볼 수 있듯이 타원체에 접하는 상자의 부피는 $f(x,y,z) = (2x)(2y)(2z) = 8xyz$ 이고 constraint는 타원의 방정식이다. 따라서 $F(x,y,z)$는 다음과 같다.

$$F(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda\phi(x,y,z) = 8xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$

세 개의 편미분을 구하면,

$$\partial_x F = 8yz + \lambda\frac{2x}{a^2} = 0$$

$$\partial_y F = 8zx + \lambda\frac{2y}{a^2} = 0$$

$$\partial_z F = 8xy + \lambda\frac{2z}{a^2} = 0$$

첫 번째 식에 x, 두 번째 식에 y, 세 번째 식에 z를 곱하고 더하면,

$$3(8xyz) + 2\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = 0$$

$\phi(x,y,z) = 1$ 을 이용하면,

$$24xyz + 2\lambda = 0, \quad \lambda = -12xyz$$

이제 우리가 구한 λ를 $\partial_x F$에 넣어서 x를 구하자.

$$8yz - 12xyz\frac{2x}{a^2} = 0$$

양변을 yz로 나누면,

$$x^2 = \frac{1}{3}a^2$$

대칭성에 의해,

$$y^2 = \frac{1}{3}b^2, \quad z^2 = \frac{1}{3}c^2$$

즉, $f(x,y,z) = 8xyz$의 최댓값은 $8abc/3\sqrt{3}$ 이다.

한편, constraint가 2개 이상일 땐 $F(q_1, q_2, \cdots)$을 다음과 같이 두면 된다.

$$F(q_1, q_2, \cdots) = f(q_1, q_2, \cdots) + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \cdots$$

Lagrangian mechanics

1. 어떤 입자의 운동 에너지가 T, 포텐셜 에너지가 V일 때, 이 입자의 Lagrangian L은 $T - V$이다.

2. Lagrangian equation of motion for a conservative system

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

3. Force of constraint $f(q_1, q_2, \cdots, t) = 0$ 가 있을 때, Lagrange multiplier의 응용

$$dL = \sum_i^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) dq_i = 0$$

$$df = \sum_i^{3N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) dq_i = 0$$

위에서 했던 것처럼 constraint의 variation df에 Lagrange multiplier $\lambda(t)$를 곱하고 dL과 더해준다.

$$\sum_i^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) dq_i = 0$$

따라서,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial q_i} = 0$$

을 풀면 된다. 이때

$$Q_i = \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

를 generalized force of constraint 라고 부른다. (e.g. q_i가 angular coordinate일 때 Q_i는 토크이다.)

4. Generalized forces (Fowles 책 chap.10 참고!)
D'Alembert's principle은 뉴턴의 운동 제 2법칙(가속도의 법칙)에 해당하는 원리이다. "구속력 혹은 반작용 힘의 가상 변위에 대한 일은 0 이다."(위키피디아)

$$\sum_i^{3N} (F_i - \dot{p}_i)dx_i = 0, \quad F_i = \dot{p}_i$$

한편, 위 식의 첫 항은 virtual work라고 부르고 두 번째 항은 inertial term이라고 한다.

$$\text{virtual work} \;\rightarrow\quad dW = \sum_i F_i dx_i = \sum_j \left[\sum_i \left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)\right] dq_j = \sum_j Q_j dq_j$$

$$\text{inertial term} \;\rightarrow\quad \sum_i \dot{p}_i dx_i = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right] dq_j \quad \text{:Fowles 10.8.14식}$$

여기서 Q_j를 generalized forces corresponding to the generalized coordinates q_j 라고 한다. 일반화 좌표 q_j에 대한 일반화 된 힘으로 해석할 수 있다.

5. 어떤 입자의 운동에너지가 T이고, 포텐셜 에너지가 V일 때, 그 입자의 Hamiltonian은 $H = T + V$이다.
6. 다음 Hamiltonian function을 생각하자.

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L, \quad L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i)$$

note that generalized momenta conjugate to the generalized coordinate q_i is

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

그러면 Lagrange's e.o.m 은

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}(p_i) = 0$$

$$\Longrightarrow \dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Hamiltonian H의 variataion을 구하면,

$$dH = \sum_i \left[p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right]$$

$$= \sum_i \left[p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right]$$

$$= \sum_i \left[\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i \right]$$

한편 $dH(p_i, q_i)$을 아래와 같이 나타낼 수 있으므로,

$$dH = \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right]$$

다음이 성립한다. (Hamiltion's equation)

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$