1개의 탄도 미사일이 요격될 확률을 p라고 하자. N개의 탄도 미사일이 발사 되었을 때, 이중 n개의 탄도미사일이 요격될 (a)확률, (b)그것의 특성함수는?

(a) n개의 미사일이 요격될 확률은 다음과 같다.

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{(N-n)}$$

(b) 특성함수를 구하기 위해 먼저 probability density $\mathcal{P}(x)$를 구한다.

$$\mathcal{P}(x) = \sum_n \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{(N-n)}\delta(x-n)$$

note that

$$\int_{x=0}^{N}\mathcal{P}(x)dx = \int_0^N \frac{N!}{0!(N-0)!}p^0(1-p)^{(N-0)}\delta(x-0) + \frac{N!}{1!(N-1)!}p^1(1-p)^{(N-1)}\delta(x-1) + \cdots$$

$$+\frac{N!}{N!(N-N)!}p^N(1-p)^{(N-N)}\delta(x-N)dx$$

$$= \frac{N!}{0!(N-0)!}p^0(1-p)^{(N-0)} + \frac{N!}{1!(N-1)!}p^1(1-p)^{(N-1)} + \cdots + \frac{N!}{N!(N-N)!}p^N(1-p)^{(N-N)}$$

$$= (1+(1-p))^N = 1 \text{....make sense!}$$

이제,

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx}Q^N(k)$$

로부터,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx}\mathcal{P}(x) = Q^N(k) \text{..........F.T}$$

$$Q^N(k) = \sum_n \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{(N-n)}\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x-n)e^{ikx}$$

$$= \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{(N-n)}e^{ikn} = \frac{N!}{n!(N-n)!}(pe^{ik})^n(1-p)^{(N-n)}$$

$$= (pe^{ik}+(1-p))^N$$

따라서 특성함수는 다음과 같다.

$$Q(k) = pe^{ik} + 1 - p = p(1 + ik - k^2/2 + \cdots) + 1 - p$$

$$= 1 + ikp - \frac{k^2}{2}p + \cdots$$

이때, $< x >$,$< x^2 >$이 각각 p인 것을 알 수 있다.(수업시간에 배운 특성함수의 성질 p.14)

$$< n >= N < x >, \quad < n^2 > - < n >^2 = N(< x^2 > - < x >^2)$$

로부터 (p.11) $< n >= Np, < n^2 > - < n >^2 = Np(1-p)$임을 알 수 있다.