

Consenso con líder virtual en sistemas de múltiples agentes inerciales

Eber J. Ávila-Martínez* Juan G. Barajas-Ramírez*

* *Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, División de Matemáticas Aplicadas, Camino a la presa San José 2055, San Luis Potosí, S. L. P., México (e-mail: eber.avila@ipicyt.edu.mx, jgbarajas@ipicyt.edu.mx).*

Resumen: Se proponen dos algoritmos para resolver el problema de consenso en un sistema de múltiples agentes inerciales. En el primero, se logra el consenso a una posición fija dada por el líder virtual. El segundo protocolo resuelve el problema para una referencia variable en el tiempo descrita como el movimiento del líder virtual. Los resultados disponibles en la literatura se extienden para considerar la dependencia de la estabilidad del seguimiento del líder virtual en la ganancias de control y la estructura de comunicación del sistema. La efectividad de los protocolos propuestos se ilustran mediante simulaciones numéricas.

Keywords: Sistemas multiagente, consenso, agente inercial, control distribuido.

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas multiagente han atraído recientemente la atención de una gran cantidad investigadores, esto debido a que son una forma de representar y estudiar fenómenos biológicos, sociales y de ingeniería, tales como la formación y movimiento en grupos de animales o la coordinación de equipos de robots móviles para la solución de tareas conjuntas. Los sistemas multiagentes están formado por un grupo de subsistemas dinámicos, llamados agentes, que interactúan entre sí dentro de vecindades formas por conexiones locales y a través de su estructura de comunicación actualizan su estado interno en base a la información recibida según el algoritmo o controlador local. Desde la perspectiva de teoría de control los sistemas multiagentes pueden verse como procesos de control distribuido. Algunos de los comportamientos más estudiados en este contexto han sido, el consenso, la sincronización y el movimiento en parvada (flocking) [Jadbabaie *et al.* (2002); Fax y Murray (2004); Ren *et al.* (2005, 2007); Yu *et al.* (2010); Wang *et al.* (1999); Wu (2005); Ren *et al.* (2008); Yu *et al.* (2009); Chen (2014); Reynolds (1987); Olfati-Saber (2006); Su *et al.* (2009); Wang (2013); Su *et al.* (2009)].

El problema de consenso en sistemas multiagente, se puede describir como el proponer un algoritmo de interacción de modo que todos los agentes alcancen un acuerdo en términos de una variable de interés. Es decir, que los estados internos de todos los agentes dentro de un grupo tomen un valor común, el cual es llamado el *estado de consenso*. La mayor parte de los trabajos en consenso consideran agentes con dinámicas de primer orden. Utilizando resultados de la teoría de grafos, se ha mostrado que la estructura de comunicación juega un rol clave en la solución del problema de consenso, usualmente se requiere que la estructura de comunicación contenga un árbol de

expansión dirigido [Olfati-Saber y Murray (2004); Jadbabaie *et al.* (2002)]. Sin embargo, se ha mostrado que para dinámicas de orden mayor a uno, aún cuando la estructura de comunicación contenga un árbol de expansión dirigido, el estado de consenso podría no ser alcanzado [Ren y Atkins (2007)]. Considerar agentes de segundo orden conduce a dinámicas más realista, esto es especialmente significativo desde la perspectiva del campo de la ingeniería, debido a que los actuadores (e.g. motores, turbinas, etc.), en general, pueden afectar solamente la aceleración a través de la inercia de los agentes. Además, se ha mostrado que incluir el efecto de la inercia en el modelo de la dinámica de cada agente, llamado agente inercial, puede causar que el estado de consenso no sea alcanzado bajo las mismas condiciones en las cuales agentes de segundo orden sí [Li y Spong (2010)]. El problema de consenso en sistemas de agentes de segundo orden con parte no lineal también han sido considerado [Yu *et al.* (2010)]. Por otro lado, es de especial interés poder imponer el valor final al que convergen los estados de los agentes, principalmente en aplicaciones de tareas colaborativas. A este problema se le llama consenso con líder, desde esta perspectiva se considera la existencia de un agente, físico o virtual, que establece el *estado de consenso* deseado. Algunos trabajos han considerado agentes de primer orden, obteniendo condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales el consenso con líder virtual es alcanzado cuando la estructura de comunicación contiene un árbol de expansión dirigido [Ren (2007)]. Otros, considerando agentes de segundo orden con parte no lineal, han propuesto algoritmos de control basados en *pinning* tal que el grupo siga a un agente líder como en [Lu y Chen (2010)]. El problema de consenso con líder en sistemas de múltiples agentes inerciales, fue investigado en [Liu *et al.* (2008)]. En dicho trabajo, se considera que todos los agentes de conocen la velocidad deseada establecida por un líder virtual que se

desplaza a velocidad constante. En el presente artículo, se extiende este resultado para considerar que el líder virtual, es un agente aislado del grupo, el cual puede cambiar su velocidad con el tiempo. Más aún, se asume que solo unos cuantos agentes puede recibir información de directa del líder.

2. PRELIMINARES

En esta sección, se introducen los conceptos básicos y la notación utilizada en el resto del documento. Para mayores detalles, se recomienda al lector consultar [Mesbahi y Egerstedt (1954)].

Sea \mathbb{R} al conjunto de los números reales y \mathbb{C} el de los complejos, se denota como \mathbb{R}^+ al conjunto de los reales positivos. Para $\mu \in \mathbb{C}$ se escribe como $Re(\mu)$ ($Im(\mu)$) su parte real (imaginaria). Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, se denota como $Rank(A)$ al rango de A . $I_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ($0_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$) es la matriz identidad (cero) y $\mathbf{1}_N \in \mathbb{R}^N$ ($\mathbf{0}_N \in \mathbb{R}^N$) el vector con todas sus entradas igual a uno (cero).

Un grafo esta descrito por un par de conjuntos $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ en donde $\mathcal{V} = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N\}$ es un conjunto finito de nodos y $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ un conjunto de pares ordenados sobre los nodos (ν_i, ν_j) , llamados enlaces. El par (ν_i, ν_j) con $i, j = 1, 2, \dots, N$ nos indica que el nodo j recibe información del nodo i , pero no viceversa, esto es, \mathcal{G} es un grafo dirigido. Al nodo i se le llama padre y al j hijo. Un camino dirigido de longitud k es una secuencia de enlaces dentro de un grafo dirigido de la forma $(\nu_{i,0}, \nu_{i,1}), (\nu_{i,1}, \nu_{i,2}), \dots, (\nu_{i,k-1}, \nu_{i,k})$. Un árbol dirigido es un grafo (dirigido) donde cada nodo tiene un solo nodo padre, excepto por un nodo, llamado raíz, el cual no tiene padre. Además, la raíz de un árbol dirigido tiene un camino dirigido hacia todos los otros nodos. Un árbol de expansión dirigido de \mathcal{G} es un árbol dirigido que contiene todos los nodos de \mathcal{G} . Un grafo dirigido tiene o contiene un árbol de expansión dirigido si existe un árbol de expansión dirigido como un subconjunto del grafo dirigido, esto es, existe cuando menos un nodo raíz que tiene un camino dirigido hacia todos los demás nodos.

Las matrices asociadas a un grafo dirigido \mathcal{G} son:

- La matriz de adyacencia $\mathcal{A}(\mathcal{G}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ que se define como $a_{ii} = 0$ y $a_{ij} > 0$ si $(\nu_j, \nu_i) \in \mathcal{E}$, en donde $i \neq j$.
- La matriz Laplaciana $\mathcal{L}(\mathcal{G}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ que se define como $l_{ii} = -\sum_{j \neq i} a_{ij}$ y $l_{ij} = -a_{ij}$, donde $i \neq j$. Note que $\sum_{j=1}^N l_{ij} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, N$, por lo tanto $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ es una matriz difusiva.

Un resultado importante relacionados con la matriz Laplaciana, $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, o \mathcal{L} por simplicidad, es el siguiente.

Lemma 1. [Ren y Beard (2008)] La matriz Laplaciana \mathcal{L} tiene un único valor propio 0 y todos los demás tienen parte real positiva, si y solo si, el grafo \mathcal{G} contiene un árbol de expansión dirigido. Además, si $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, entonces el $Rank(\mathcal{L}) = N - 1$.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En esta sección, se plantea el problema principal de este trabajo, así como el sentido en que se propone extender resultados previos del problema de consenso con líder virtual.

Considere el sistema multiagente compuesto por N agentes inerciales

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= v_i, \\ m_i \dot{v}_i &= u_i, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1)$$

donde $p_i, v_i, m_i, u_i \in \mathbb{R}^n$ son la posición, velocidad, la masa y la entrada (o protocolo) de control del i -ésimo agente, respectivamente. Además, considere que el grupo de agentes interactúa a través de una red de comunicación representada por un grafo dirigido $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. En este trabajo solo son considerados grafos fijos, es decir, la red de comunicación no cambia en ningún momento.

Note que la dinámica de cada uno de los agentes se ve afectada por su propia inercia, esto hace que el grupo de agentes no sea homogéneo. Más aún, si $m_i = 1 \forall i = 1, \dots, N$, la dinámica de los agentes es equivalente al caso de segundo orden estudiado por [Yu *et al.* (2010)].

La dinámica del agente líder virtual esta dada por:

$$\begin{aligned} \dot{p}_l &= v_l, \\ \dot{v}_l &= f(p_l, v_l, t) \end{aligned} \quad (2)$$

donde $p_l, v_l \in \mathbb{R}^n$ son la posición y velocidad del líder virtual, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ es una función no lineal que describe la aceleración del líder. En este trabajo realizamos la siguiente suposición

Suposición 1. La función no lineal en (2) es continua por pedazos y localmente Lipschitz.

En el contexto presentado el problema de consenso con un líder virtual se define como

Consenso con líder virtual: Se dice que un sistema multiagente alcanza un *estado de consenso* con un líder virtual si para cualquier condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|p_i(t) - p_l(t)\| = 0, \quad (3a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i(t) - v_l(t)\| = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3b)$$

4. RESULTADOS PRINCIPALES

En primera instancia se trata el problema cuando de consenso a líder con velocidad constante y, posteriormente, para el caso de velocidad variante con el tiempo.

4.1 Líder sin aceleración

Sea un sistema de múltiples agentes (1), y un líder virtual con modelo (2) cuya aceleración es $f(p_l, v_l, t) \equiv 0$.

Note que si las condiciones iniciales del líder virtual son $v_l(0) = 0$ y $p_l(0) = p_d$, entonces, el líder describe una posición deseada estática a la cual deben converger el grupo de agentes seguidores. Mientras que, si $v_l(0) = v_d$, el líder describe una trayectoria deseada a la velocidad constate a la que el grupo de agentes debe desplazarse.

Sea el protocolo de control, también llamado algoritmo de consenso, dado por:

$$\begin{aligned} u_i = & -k \sum_{j=1}^N a_{ij}(p_i - p_j) - b \sum_{j=1}^N a_{ij}(v_i - v_j) \\ & - d_i [k(p_i - p_l) + b(v_i - v_l)], \end{aligned} \quad (4)$$

$$i = 1, \dots, N,$$

donde $k, b \in \mathbb{R}^+$ son ganancias por diseñar, a_{ij} es el ij -ésimo elemento de la matriz de adyacencia asociada a la estructura de comunicación $\mathcal{A}(\mathcal{G})$. La variable d_i se utiliza para establecer cuales agentes obtienen información directamente del líder de la siguiente manera $d_i > 0$ si el agente i recibe información del líder virtual y $d_i = 0$ en caso contrario. Observe que (4) es un algoritmo distribuido, es decir, solo utiliza información local, ya que $a_{ij} \neq 0$ únicamente cuando el enlace de comunicación (ν_j, ν_i) existe.

Los errores en posición y velocidad, son $p_i^e = p_i - p_l$ y $v_i^e = v_i - v_l$, respectivamente. Tomando (1) y (4) la dinámica del error puede reescribirse en términos de los elementos de la matriz Laplaciana $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ como

$$\begin{aligned} \dot{p}_i^e = & v_i^e, \\ m_i \dot{v}_i^e = & -k \sum_{j=1}^N (l_{ij} + d_i) p_j^e - b \sum_{j=1}^N (l_{ij} + d_i) v_j^e, \end{aligned} \quad (5)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

Definiendo $P^e = [(p_1^e)^T, \dots, (p_N^e)^T]^T$ como el vector error de posición y $V^e = [(v_1^e)^T, \dots, (v_N^e)^T]^T$ como el vector de error de velocidad. Entonces, el error del sistema completo (5) se puede reescribe en forma matricial como

$$\dot{P}^e = V^e,$$

$$(M \otimes I_n) \dot{V}^e = -k(\mathcal{L}_{\mathcal{D}} \otimes I_n) P^e - b(\mathcal{L}_{\mathcal{D}} \otimes I_n) V^e \quad (6)$$

donde $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz de inercias del grupo de agentes, $\mathcal{L}_{\mathcal{D}} = \mathcal{L} + \mathcal{D}$ con $\mathcal{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, y \otimes denota el producto de Kronecker.

Antes de continuar, se realiza la siguiente definición:

Se llama **grafo extendido** G^+ , al grafo que representa la estructura de comunicación que considera al agente líder como el elemento $N+1$ dentro de la red de agentes. Adicionalmente $\mathcal{L}^+ \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ es la matriz Laplaciana asociada a G^+ .

En relación con la anterior definición, se tiene lo siguiente.

Lemma 2. La matriz $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ es invertible si y solo si G^+ contiene un árbol de expansión dirigido con el líder virtual como raíz. Más aún, los eigenvalues de $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ son todos positivos.

Demostración: Sea \mathcal{L}^+ la matriz Laplaciana asociada al grafo G^+ . Note que $\mathcal{L}^+ = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{N \times (N+1)} \\ \mathbf{0}_{1 \times (N+1)} \end{bmatrix}$, y que, por construcción, es una matriz con suma por renglones igual a cero. Más aún, por el Lemma 1, se sabe que $\text{Rank}(\mathcal{L}^+) = N$. Lo anterior implica que $\text{Rank}(\mathcal{L}_{N \times (N+1)}) = N$ si G^+

contiene un árbol de expansión dirigido, ya que el ultimo renglón de \mathcal{L} tiene todos sus elementos iguales a cero. Note que $\mathcal{L}_{N \times (N+1)} = [H|b]$, donde $H \in \mathbb{R}^{N \times N}$ esta dado como $h_{ij} = -a_{ij}$, cuando $i \neq j$, $h_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^{N+1} a_{ij}$ y $b = [-a_{1(N+1)}, \dots, -a_{N(N+1)}]^T$. Observando que $\mathcal{L}_{N \times (N+1)}$ tiene $N+1$ columnas y que todos sus renglones suman cero, consiguientemente se tiene que la última columna de $\mathcal{L}_{N \times (N+1)}$ depende de sus primeras N columnas, donde $b = -H\mathbf{1}_N$. Como resultado, el $\text{Rank}(H) = \text{Rank}([H|b]) = N$ si y solo si G^+ contiene un árbol de expansión dirigido. Además, dado que H es de rango completo, entonces H es invertible. Por ultimo, se posible observar que la matriz $H = \mathcal{L} + \mathcal{D} = \mathcal{L}_{\mathcal{D}}$, esto implica que $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ es de rango completo, y por lo tanto invertible. Ya que G^+ contiene un árbol de expansión dirigido, por el Lemma 1, se sabe que \mathcal{L}^+ tiene un único valor propio cero y los demás con parte real positiva. Luego entonces, existe una matriz P tal que $\mathcal{L}^+ = P\Delta^+P^{-1}$, con $\Delta^+ = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1})$. Sin pérdida de generalidad es posible ordenar los valores propios como $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N > \lambda_{N+1} = 0$. Dado que $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ es de rango completo, todos sus valores propios son distintos de cero. Entonces, todos los valores propios distintos de cero de \mathcal{L}^+ corresponden a los valores propios de $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$, esto implica que todos los valores propios de $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ tienen parte real positiva. ■

Note que M es una matriz diagonal con todos sus elementos $m_i \in \mathbb{R}_{>0}$ y que, por lo tanto, existe su inversa que tiene la forma $M^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_N})$. Más aún, M^{-1} es definida positiva ya que sus valores propios son $\sigma_i = \frac{1}{m_i}$ para todo $i = 1, \dots, N$. Por lo tanto, la matriz $M^{-1}\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ es definida positiva.

Sea $X^e = [(P^e)^T, (V^e)^T]^T \in \mathbb{R}^{2N}$, y $\Gamma = M^{-1}\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$, es posible escribir (6) como

$$\dot{X}^e = (\Xi_1 \otimes I_n) X^e \quad (7)$$

donde $\Xi_1 = \begin{bmatrix} 0_N & I_N \\ -k\Gamma & -b\Gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$. Los valores propios de Ξ_1 juegan un rol muy importante en el análisis de convergencia de (7). Suponga que $\mu_{i,j} (i = 1, \dots, N, j = 1, 2)$ y $\lambda_i (i = 1, \dots, N)$ son los valores propios de Ξ_1 y Γ , respectivamente. Para encontrar dichos valores propios de Ξ_1 se debe resolver la ecuación característica $\det(\mu I_{2N} - \Xi_1) = 0$, luego entonces

$$\begin{aligned} \det(\mu I_N - \Xi_1) &= \det \begin{pmatrix} \mu I_N & -I_N \\ k\Gamma & \mu I_N + b\Gamma \end{pmatrix} \\ &= \det(\mu^2 I_N + (k + b\mu)\Gamma) \end{aligned} \quad (8)$$

Además, observe que

$$\det(\mu I_N + \Gamma) = \prod_{i=1}^N (\mu + \lambda_i) \quad (9)$$

en donde λ_i es el i -ésimo valor propio de Γ [Ren y Beard (2008)]. De la ecuación (9) se observa que (8) puede reescribirse como

$$\det(\mu^2 I_N + (k + b\mu)\Gamma) = \prod_{i=1}^N (\mu^2 + (k + b\mu)\lambda_i) \quad (10)$$

lo cual implica que las raíces de (8) se obtiene resolviendo (10). De forma directa, los valores propios de Ξ_1 están

dados por

$$\mu_{i,1} = \frac{-b\lambda_i + \sqrt{b^2\lambda_i^2 - 4k\lambda_i}}{2} \quad (11a)$$

$$\mu_{i,2} = \frac{-b\lambda_i - \sqrt{b^2\lambda_i^2 - 4k\lambda_i}}{2} \quad (11b)$$

El siguiente teorema muestra las condiciones necesarias y suficientes para el problema de consenso con líder virtual bajo el algoritmo (4).

Teorema 1. El estado de consenso (3a) y (3b) es alcanzado en un grupo de múltiples agentes inerciales (1) con protocolo (4) si, y solo si, la estructura de comunicación \mathcal{G} contiene un árbol de expansión dirigido y

$$\frac{b^2}{k} > \max_{1 \leq i \leq N} \frac{Im(\lambda_i)^2}{Re(\lambda_i)(Re(\lambda_i)^2 + Im(\lambda_i)^2)} \quad (12)$$

donde λ_i son los valores propios de Γ .

Demostración: Note que las soluciones de la dinámica del error son $X^e(t) = e^{(\Xi_1 t \otimes I_N)} X^e(0) = (e^{\Xi_1 t} \otimes I_N) X^e(0)$. Además, (3a) y (3b) implica mostrar que la dinámica del error asintóticamente converge a cero. Para ello, es suficiente con mostrar que Ξ_1 es Hurwitz. Del Lemma 2, sabemos que todos los valores propios de Γ tienen parte real positiva si y solo si G^+ contiene un árbol de expansión dirigido con el líder virtual como raíz. Entonces, solo queda dar condiciones sobre k y b tal que Ξ_1 es Hurwitz. De tal forma que se debe mostrar que (12) se cumple si y solo si $Re(\mu_{i,j}) < 0$, para $(i = 1, \dots, N, j = 1, 2)$.

Sea $\sqrt{b^2\lambda_i^2 - 4k\lambda_i} = \alpha + \mathbf{i}\beta$, donde α y β son números reales e $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$. Ahora, de (11), se observa que $Re(\mu_{i,j}) < 0$ con $(i = 2, \dots, N, j = 1, 2)$ si y solo si $-bRe(\lambda_i) < \alpha < bRe(\lambda_i)$, lo que es equivalente a $\alpha^2 < b^2 Re(\lambda_i)^2$. Entonces es suficiente mostrar que (12) se mantiene si y solo si $\alpha^2 < b^2 Re(\lambda_i)^2$. Es fácil observar que

$$b^2\lambda_i^2 - 4k\lambda_i = (\alpha + \mathbf{i}\beta)^2$$

Separando partes reales e imaginarias de la expresión anterior se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= b^2 (Re(\lambda_i)^2 - Im(\lambda_i)^2) - 4kRe(\lambda_i) \\ \alpha\beta &= b^2 (Re(\lambda_i)Im(\lambda_i)) - 2kIm(\lambda_i) \end{aligned}$$

manipulando las ecuaciones anteriores,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^4 - [b^2 (Re(\lambda_i)^2 - Im(\lambda_i)^2) - 4kRe(\lambda_i)] \alpha^2 \dots \\ &\quad - Im(\lambda_i)^2 (b^2 Re(\lambda_i) - 2k)^2 = 0 \end{aligned}$$

al substituir la condición $\alpha^2 < b^2 Re(\lambda_i)^2$ en la expresión anterior, se puede observar que dicha condición se mantiene si y solo si (12) se cumple. ■

Note que el Teorema 1 da condiciones necesarias y suficientes tales que el estado de consenso (3) es alcanzado. Estas condiciones están dadas en términos de la estructura de comunicación \mathcal{G}^+ , así como sobre las ganancias k y b , que dependen de las partes reales e imaginarias de los valores propios de la matriz Γ . Condiciones similares sobre las ganancias son presentadas en [Yu *et al.* (2010)] para resolver un problema de consenso entre agentes.

4.2 Líder con aceleración

En esta sección se considera que el líder tiene aceleración distinta de cero. Ahora, considere el siguiente protocolo de consenso:

$$\begin{aligned} u_i &= -\frac{k}{\eta_i} \sum_{j=1}^N a_{ij}(p_i - p_j) - \frac{b}{\eta_i} \sum_{j=1}^N a_{ij}(v_i - v_j) \\ &\quad + \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^N a_{ij}\dot{v}_j - \frac{d_i}{\eta_i} (k(p_i - p_l) + b(v_i - v_l) - \dot{v}_l), \\ i &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (13)$$

en donde $\eta_i = \frac{1}{m_i}(d_i + \sum_{j=1}^N a_{ij})$. Note que este algoritmo considera que la aceleración de los agentes y el líder virtual es información disponible y que es transmitida a través de los enlaces de comunicación.

Definiendo de la misma manera los errores de posición y velocidad del agente i , es decir, $p_i^e = p_i - p_l$ y $v_i^e = v_i - v_l$, respectivamente. Entonces, de (1) y (13), la dinámica del error puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{p}_i^e &= v_i^e \\ m_i \dot{v}_i^e &= -\frac{k}{\eta_i} \sum_{j=1}^N (l_{ij} + d_i) p_j^e - \frac{b}{\eta_i} \sum_{j=1}^N (l_{ij} + d_i) v_j^e \\ &\quad + \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^N a_{ij} \dot{v}_j^e, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

o bien, de forma matricial como

$$\begin{aligned} \dot{p}^e &= v^e \\ (\mathcal{L}_{\mathcal{D}} \otimes I_n) \dot{v}^e &= -k(\mathcal{L}_{\mathcal{D}} \otimes I_n) p^e - b(\mathcal{L}_{\mathcal{D}} \otimes I_n) v^e \end{aligned} \quad (14)$$

donde $p^e = [(p_1^e)^T, \dots, (p_N^e)^T]^T$ es el vector de error de posición, y $v^e = [(v_1^e)^T, \dots, (v_N^e)^T]^T$ como error velocidad. Nuevamente, las propiedades de $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ son claves en el desarrollo de la prueba de estabilidad de la dinámica del error.

El siguiente resultado muestra condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales el estado de consenso con un líder virtual es alcanzado

Teorema 2. Sea un sistema de múltiples agentes inerciales con dinámica (1), un líder virtual con dinámica (2) que cumple con la suposición 1, y algoritmo de consenso (13). El problema de consenso con un líder virtual (3) es resuelto si y solo si el grafo \mathcal{G}^+ contiene un árbol de expansión dirigido con el agente líder como raíz. Más aún, si $b \geq 2\sqrt{k}$ para cualquier $k \in \mathbb{R}^+$, la convergencia es exponencial.

Demostración: Considere la dinámica del error mostrada en (14). Note que, por suposición \mathcal{G}^+ contiene un árbol de expansión dirigido, entonces por el Lemma 2 $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ tiene inversa. Por lo tanto, la dinámica del error puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{p}^e &= v^e \\ \dot{v}^e &= -k(I_N \otimes I_n) p^e - b(I_N \otimes I_n) v^e \end{aligned}$$

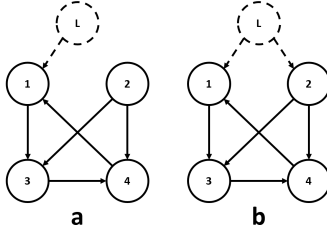


Figura 1. Red de agentes inerciales y un líder virtual.

donde se hace uso de las propiedades del producto de Kronecker. Reescribiendo lo anterior de forma más compacta se tiene

$$\dot{X}^e = (\Xi_2 \otimes I_n) X^e$$

donde $X^e = [(p^e)^T, (v^e)^T]^T$ y $\Xi_2 = \begin{bmatrix} 0_N & I_N \\ -kI_N & -bI_N \end{bmatrix}$.

Para mostrar que el error converge asintóticamente a cero, se debe mostrar que Ξ_2 es Hurwitz. Sean μ los valores propios de Ξ_2 , note que es posible calcularlos de la siguiente forma

$$\det(\mu I_{2N} - \Xi_2) = \det \begin{pmatrix} \mu I_N & -I_N \\ kI_N & \mu I_N + bI_N \end{pmatrix} = \mu^2 + b\mu + k$$

observe que la expresión anterior es similar a la ecuación (8), sin embargo, se sabe que I_N tiene todos sus valores propios iguales a uno. Por lo tanto, las raíces del polinomio característico de Ξ_2 son

$$\mu_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2}, \quad i = 1, \dots, 2N$$

Note que con $k, b > 0$, los valores propios de Ξ_2 tienen parte real negativa, por lo que Ξ_2 es Hurwitz. Más aún, dado que $k, b \in \mathbb{R}^+$, si la desigualdad $b \geq 2\sqrt{k}$ se cumple, todos los valores propios de Ξ_2 tienen $Re(\mu_i) < 0$ y $Im(\mu_i) = 0$. Entonces, los errores convergen a cero exponencialmente si y solo si $b \geq 2\sqrt{k}$. ■

Note que el algoritmo (13) considera a la aceleración como una medida que puede ser compartida entre agentes vecinos. Esto se supone debido a que en algunas aplicaciones, principalmente en robótica, la aceleración de cada uno de los agentes puede ser medida. Es decir, es posible que la información compartida por agentes, como robots móviles, sean la posición, velocidad y la aceleración de cada uno de ellos.

5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección se muestran un par de ejemplos numéricos que ilustran los resultados teóricos presentados en la sección anterior. En ambos casos, se supone un grupo de $N = 4$ agentes inerciales de dimensión $n = 1$ con masas $m_i = i + 1$ donde $i = 1, \dots, 4$, y las estructuras de comunicación se muestran en la Figura 1. Además, sean Γ_a y Γ_b las matrices correspondientes a la estructura de comunicación mostrada en la Figura 1a y 1b, respectivamente.

5.1 Líder sin aceleración

Considere la estructura de comunicación mostrada en la Figura 1b aplicando el algoritmo (4). Observe que el grafo

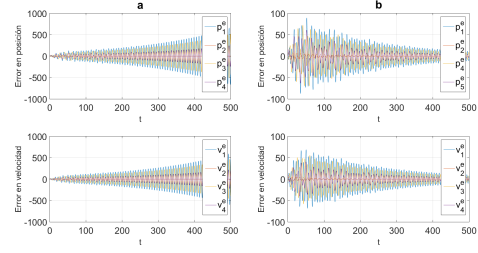


Figura 2. Posición y velocidad de una red de agentes con un líder virtual sin aceleración.

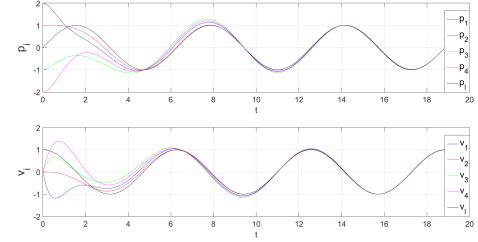


Figura 3. Posición y velocidad de una red de agentes con un líder virtual con aceleración.

\mathcal{G}^+ de la red mostrada en la Figura 1b contiene un árbol de expansión dirigido con el agente líder como raíz, donde, los valores propios de la matriz Γ_b asociada a la red de agentes son: 0.3333, 0.2596 y 0.8202 ± 0.0380 . Suponga que la ganancia $k = 1$, entonces la condición (12) del Teorema 1 se cumple si $b > 0.0511$. La Figura 2a y 2b, muestran la dinámica del error en posición y velocidad de la red de agentes cuando $b = 0.0411$ y $b = 0.0611$, respectivamente.

5.2 Líder con aceleración

Es claro que el algoritmo de consenso (13), no está bien definido para la red de la Figura 1a, ya que el agente 2 no recibe información del líder virtual y de ningún otro agente, por lo que $\eta_2 = 0$. Lo anterior ilustra la importancia de la existencia de un árbol de expansión dirigido en la red \mathcal{G}^+ cuando se aplica el algoritmo (13). El caso contrario se muestra en la Figura 1b, donde el algoritmo (13) sí está bien definido. Luego entonces, según el Teorema 2, para cualquier $k, b > 0$ el estado de consenso con un líder virtual es alcanzado. En la Figura 3 se muestra que el estado de consenso (3a) y (3b) es alcanzado, aún cuando su velocidad cambia con el tiempo debido a una aceleración $f(p_i, v_i, t) = -\sin(t)$.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se investigan dos algoritmos de consenso para sistemas de múltiples agentes inerciales con un líder virtual. Primero se considera que la posición del líder es fija con velocidad cero, o con velocidad constante, es decir, agente líder con aceleración cero. El algoritmo de consenso utiliza solo información local. Se muestra que, el grafo que incluye al líder virtual como parte del grupo, debe contener un árbol de expansión dirigido con el líder como raíz, para garantizar la convergencia de las posiciones y velocidades del grupo al valor deseado.

Además, se hace notar que las partes reales e imaginarias de los valores propios de la matriz Laplaciana sumada a una matriz diagonal que indica la conexión de un agente con el líder virtual, juegan un rol importante en el análisis de la estabilidad del estado de consenso. Adicionalmente, se considera un agente líder con aceleración distinta de cero, tal que la velocidad del líder cambia con el tiempo. El algoritmo de consenso propuesto considera las aceleraciones de los agentes vecinos y el líder virtual (en caso que el agente pueda recibir información del líder). Se muestra que, si el grafo extendido contiene un árbol de expansión dirigido con el líder como raíz, el estado de consenso con un líder virtual es alcanzado. A diferencia de los resultados mostrados por [Liu *et al.* (2008)], donde se considera que todos los agentes tienen acceso al valor deseado de consenso, en este trabajo se considera que solo una pequeña porción del grupo (inclusive solo un agente) tiene acceso a dicha información. Además, se extienden los resultados presentados por [Yu *et al.* (2010)], en donde se estudia el problema de consenso sin líder en grupos de agentes idénticos de segundo orden, para casos de modelos de agentes inerciales con un líder virtual. En futuras publicaciones se ampliarán estos resultados a los casos de agentes con dinámica no lineal y estructura de comunicación cambiante en el tiempo, por ejemplo, grafos que dependen de la posición relativa entre agentes.

AGRADECIMIENTOS

Durante este trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (No. 279217) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

REFERENCIAS

- Chen, G., "Pinning control and synchronization on complex dynamical networks", *Int. J. Control. Autom. Syst.*, **12**(2), 221–230, 2014.
- Fax, J. A. y Murray, R. M., "Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **49**(9), 1465–1476, 2004.
- Jadbabaie, A. y Lin, J. y Morse, A. S., "Mobile Autonomous Agents Using Nearest Neighbor Rules", *Proc. 41st IEEE Conf. Decis. Control*, 2953–2958, 2002.
- Li, W. y Spong, M. W., "Stability of general coupled inertial agents", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **55**(6), 1411–1416, 2010.
- Liu, Y. y Jia, Y. y Du, J. y Yu, F., "Consensus problem of multiple inertial agents with fixed and switching topologies", *Proc. World Congr. Intell. Control Autom.*, 1470–1475, 2008.
- Lu, X.-Q. y Chen, S.-H., "Cluster consensus of second-order multi-agent systems via pinning control", *Chinese Phys. B*, **19**(12), 120506, 2010.
- Mesbahi, M. y Egerstedt, M., **Graph theoretic methods in multiagent networks**, pages 403, Princeton University Press, New York, 2010.
- Olfati-Saber, R. y Murray, R. M., "Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **49**(9), 1520–1533, 2004.
- Olfati-Saber, R., "Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **51**(3), 401–420, 2006.
- Ren, W. y Atkins, E., "Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange", *Int. J. Robust Nonlinear Control*, **17**(11), 1002–1033, 2007.
- Ren, W., "Multi-vehicle consensus with a time-varying reference state", *Syst. Control Lett.*, **56**(8), 474–483, 2007.
- Ren, W. y Beard, R. W., **Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control: Theory and Applications**, pages 297, Springer-verlag, New York, 2008.
- Ren, W. y Beard, R. W. y McLain, T. W., "Coordination Variables and Consensus Building in Multiple Vehicle Systems", *Lect. Notes Control Inf. Sci.*, **309**, 171–188, 2005.
- Ren, W. y Beard, R. W. y Atkins, E. M., "Information consensus in multivehicle cooperative control", *IEEE Control Syst. Mag.*, **27**(2), 71–82, 2007.
- Ren, W. y Beard, R. W. y McLain, T. W., "Synchronization of coupled harmonic oscillators with local interaction", *Automatica*, **44**(12), 3195–3200, 2008.
- Reynolds, C. W., "Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model", *ACM SIMGRAPH Comput. Graph.*, **21**(4), 25–34, 1987.
- Su, H. y Wang, X. F. y Chen, G., "A connectivity preserving flocking algorithm for multi-agent systems based only on position measurements", *Int. J. Control*, **82**(7), 1334–1343, 2009.
- Wang, X.F. y Wang, Z. Q. y Chen, G., "A New Criterion for Synchronization of Coupled Chaotic Oscillators With Application To Chua's Circuits", *Int. J. Bifurc. Chaos*, **9**(6), 1169–1174, 1999.
- Wang, H., "Flocking of networked uncertain Euler Lagrange systems on directed graphs", *Automatica*, **49**(9), 2774–2779, 2013.
- Wang, M. y Su, H. y Zhao, M. y Chen, M. Z. Q. y Wang, H., "Flocking of multiple autonomous agents with preserved network connectivity and heterogeneous nonlinear dynamics", *Neurocomputing*, **115**, 169–177, 2013.
- Wu, C. W., "Synchronization in networks of nonlinear dynamical systems coupled via a directed graph", *Nonlinearity*, **18**(3), 1057–1064, 2005.
- Yu, W. y Chen, G. y Cao, M., "Synchronization of coupled harmonic oscillators with local interaction", *Automatica*, **46**(6), 1089–1095, 2010.
- Yu, W. y Chen, G. y Lü, J., "On pinning synchronization of complex dynamical networks", *Automatica*, **45**(2), 429–435, 2009.
- Yu, W. y Chen, G. y Cao, M. y Kurths, J., "Second Order consensus for multiagent systems with directed topologies and nonlinear dynamics", *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern. Part B Cybern.*, **40**(3), 881–891, 2010.