Análisis Numérico I / Análisis Numérico
Práctico N°5 - 2024

Temas: Integración numérica.

1. Usando interpolación polinomial deducir la regla de Simpson calculando

$$I(p_2) = \int_a^b p_2(x)\, dx,$$

donde p_2 es el polinomio que interpola f en los puntos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$.

2. La función f se define en el intervalo $[0, 1]$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Calcular los resultados de aplicar las siguientes reglas para hallar $\int_0^1 f(x)\, dx$:

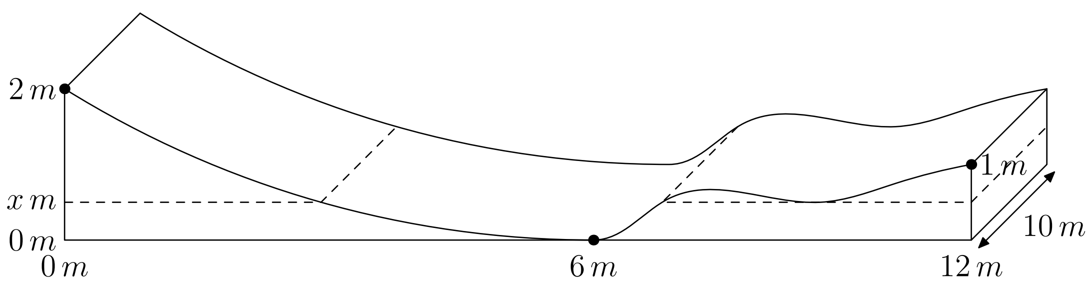
a) La regla del trapecio sobre el intervalo $[0, 1]$.

b) La regla del trapecio, primero sobre el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ y luego sobre el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$.

c) La regla de Simpson sobre el intervalo $[0, 1]$.

d) ¿Qué se puede concluir de los resultados obtenidos en los tres items anteriores?

3. Se desea emparejar el siguiente terreno de $12\, metros \times 10\, metros$:



a) Usando la regla de Simpson, dar una estimación de los metros cúbicos de tierra que posee el terreno.

b) Estimar la altura x que tendrá el terreno si lo emparejamos sin remover nada de tierra.

4. *a*) Construir una regla de la forma

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(-0.5) + A_1 f(0) + A_2 f(0.5)$$

que sea exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que 2.

b) Determinar el grado de precisión de la fórmula para

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{4}{3} f(-0.5) - \frac{2}{3} f(0) + \frac{4}{3} f(0.5).$$

5. Determinar el número de subintervalos n de modo que la regla del trapecio compuesta aproxime el valor de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con un error menor que $\frac{1}{2}\, 10^{-6}$, suponiendo que e^{-x^2} se puede calcular de manera precisa.
Repetir este ejercicio para la regla de Simpson compuesta.

6. Un automóvil recorre una pista de carreras en 24 segundos. Su velocidad se determina cada 6 segundos mediante una pistola de radar y está dada, en metros/segundos [m/s], desde el principio del recorrido, por los datos de la siguiente tabla:

Tiempo	0	6	12	18	24
Velocidad	38	41	46	48	45

¿Cuál es la longitud aproximada de la pista?

Ayuda: usar la regla del trapecio y recordar que $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$*, donde* $v(t)$ *y* $x(t)$ *son la velocidad y posición al tiempo* t*.*

7. Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ mediante una regla de cuadratura de la forma

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3),$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 5. Aplicar la regla a la función $f(x) = cos(x)$ y comparar con el valor real de la integral.

Aclaración: Se puede utilizar calculadora para comparar los resultados. Recordar utilizar radianes.

8. Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)x^2dx$ mediante una regla de cuadratura de la forma

$$\int_{-1}^{1} f(x)x^2dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2),$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

Ayuda: Utilizar el ejercicio 11 *del práctico 4.*

1. Usando interpolación polinomial deducir la regla de Simpson calculando

$$I(p_2) = \int_a^b p_2(x)\,dx,$$

donde p_2 es el polinomio que interpola f en los puntos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$.

Usando la Forma de Lagrange

$P_2(x)$ va a interpolar a f en $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}$ y $x_2 = b$, primero calculo los polinomios de lagrange:

$$P_2(x) = f(x_0)\,\ell_0(x) + f(x_1)\,\ell_1(x) + f(x_2)\,\ell_2(x)$$

- $\ell_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \dfrac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}$

- $\ell_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \dfrac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}$

- $\ell_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \dfrac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}$

$$\Rightarrow p_2(x) = f(a)\cdot\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)} + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} + f(b)\,\frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}$$

Luego, integrando obtengo la regla de simpson:

$$\int_a^b\left(f(a)\cdot\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)} + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} + f(b)\,\frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}\right)dx$$

$$= \int_a^b\left(f(a)\cdot\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}\right)dx + \int_a^b\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}\right)dx + \int_a^b\left(f(b)\,\frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}\right)dx$$

$$= f(a)\cdot\int_a^b\left(\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}\right)dx + f\left(\frac{b+a}{2}\right)\int_a^b\left(\frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}\right)dx + f(b)\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$$

$$= \underbrace{\frac{f(a)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx}_{1} + \underbrace{\frac{f\left(\frac{b+a}{2}\right)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx}_{2} + \underbrace{\frac{f(b)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx}_{3}$$

1) $f(a)\cdot\dfrac{1}{\left(\frac{a-b}{2}\right)(a-b)}\displaystyle\int_a^b\left(x^2-bx-\frac{a+b}{2}\cdot x+\frac{a+b}{2}\cdot b\right)dx =$

$$= f(a)\cdot\frac{1}{\left(\frac{a-b}{2}\right)(a-b)}\left(\int_a^b x^2\,dx - b\int_a^b x\,dx - \frac{a+b}{2}\int_a^b x\,dx + \frac{a+b}{2}b\int_a^b dx\right)$$

$$= f(a)\cdot\frac{1}{\left(\frac{a-b}{2}\right)(a-b)}\left(\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}-b\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)-\frac{a+b}{2}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)+\frac{a+b}{2}\,b\,(b-a)\right)$$

$$= f(a)\cdot \frac{1}{\left(\frac{a-b}{2}\right)(a-b)}\left(\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{b^3-a^2b}{2}-\frac{ab^2+b^3-a^3-a^2b}{4}+\frac{ab+b^2}{2}(b-a)\right)$$

$$= f(a)\cdot \frac{1}{\left(\frac{a-b}{2}\right)(a-b)}\left(\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{b^3-a^2b}{2}-\frac{ab^2+b^3-a^3-a^2b}{4}+\frac{ab^2+b^3}{2}-\frac{a^2b+ab^2}{2}\right)$$

$$= f(a)\cdot \frac{1}{\left(\frac{a-b}{2}\right)(a-b)}\left(\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{b^3-a^2b}{2}-\frac{ab^2+b^3-a^3-a^2b}{4}+\frac{\cancel{ab^2}+b^3-a^2b-\cancel{ab^2}}{2}\right)$$

$$= f(a)\cdot \frac{1}{\left(\frac{a-b}{2}\right)(a-b)}\left(\frac{4b^3-4a^3-\cancel{6b^3}+6a^2b-3ab^2-3b^3+3a^3+3a^2b+\cancel{6b^3}-6a^2b}{12}\right)$$

$$= f(a)\cdot \frac{1}{\left(\frac{a-b}{2}\right)(a-b)}\left(\frac{b^3-a^3-3ab^2+3a^2b}{12}\right) = f(a)\cdot\frac{2}{(a-b)^2}\left(\frac{b^3-3b^2a+3ba^2-a^3}{12}\right)$$

$$= f(a)\cdot\frac{(b-a)^{\cancel{3}}}{\underbrace{\cancel{(a-b)^2}}\cdot 6} = \boxed{f(a)\cdot\frac{(b-a)/2}{3}}$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 = b^2-2ab+a^2 = (b-a)^2$$

$$2)\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}\cdot\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot 4}{-(b-a)^2}\cdot\int_a^b (x^2-bx-ax+ab)\,dx$$

$$= \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot 4}{-(b-a)^2}\cdot\left(\int_a^b x^2\,dx - b\int_a^b x\,dx - a\int_a^b x + ab\int_a^b dx\right)$$

$$= \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot 4}{-(b-a)^2}\cdot\left(\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}-(a+b)\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)+ab\,(b-a)\right)$$

$$= \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot 4}{-(b-a)^2}\cdot\left(\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{(a+b)b^2-(a+b)a^2}{2}+ab^2-a^2b\right)$$

$$= \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot 4}{-(b-a)^2}\cdot\left(\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{ab^2+b^3-a^3-a^2b}{2}+ab^2-a^2b\right)$$

$$= \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot 4}{-(b-a)^2}\cdot\left(\frac{2b^3-2a^3-3ab^2-3b^3+3a^3+3a^2b+6ab^2-6a^2b}{6}\right)$$

$$= \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot 4}{-(b-a)^2}\cdot\left(\frac{-b^3+a^3+3ab^2-3a^2b}{6}\right) = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot \cancel{4}^{\,2}}{\cancel{(-1)}(b-a)^2}\cdot\cancel{(-1)}\cdot\frac{b^3-3b^2a+3ba^2-a^3}{\cancel{6}\ 3}$$

$$= \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot 2}{\cancel{(b-a)^2}}\cdot\frac{(b-a)^{\cancel{3}}}{3} = \boxed{f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}\,(b-a)}$$

3) $\frac{f(b)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx = \frac{2f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b\left(x^2-\frac{a+b}{2}\cdot x - ax + a\cdot\frac{a+b}{2}\right)dx$

$$= \frac{2f(b)}{(b-a)^2}\left(\int_a^b x^2dx - \frac{a+b}{2}\int_a^b x\,dx - a\int_a^b x\,dx + \frac{a^2+ab}{2}\int_a^b dx\right)$$

$$= \frac{2f(b)}{(b-a)^2}\left(\frac{b^3-a^3}{3} - \frac{(a+b)(b^2-a^2)}{4} - a\,\frac{b^2-a^2}{2} + \frac{a^2+ab}{2}(b-a)\right)$$

$$= \frac{2f(b)}{(b-a)^2}\left(\frac{b^3-a^3}{3} - \frac{ab^2-a^3+b^3-a^2b}{4} - \frac{ab^2-a^3}{2} + \frac{a^2b+ab^2}{2} - \frac{a^3+a^2b}{2}\right)$$

$$= \frac{2f(b)}{(b-a)^2}\left(\frac{4b^3-4a^3+3a^3-3b^3-\cancel{6ab^2}+\cancel{6a^3}+\cancel{6a^2b}+\cancel{6ab^2}-\cancel{6a^3}-\cancel{6a^2b}-3ab^2+3a^2b}{12}\right)$$

$$= \frac{2f(b)}{(b-a)^2}\left(\frac{b^3-3b^2a+3ab^2-a^3}{12}\right) = \frac{\cancel{2}^{1}f(a)}{\cancel{(b-a)^2}}\cdot\frac{(b-a)^{\cancel{3}}}{\cancel{12}\;6} = \boxed{f(b)\cdot\frac{(b-a)}{6}}$$

se llega a la fórmula de la regla de simpson:

$$\boxed{f(a)\cdot\frac{(b-a)/2}{3} + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}(b-a) + f(b)\cdot\frac{(b-a)}{6}}$$

2. La función f se define en el intervalo $[0,1]$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1-x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Calcular los resultados de aplicar las siguientes reglas para hallar $\int_0^1 f(x)\,dx$:

a) La regla del trapecio sobre el intervalo $[0,1]$.

b) La regla del trapecio, primero sobre el intervalo $[0,\frac{1}{2}]$ y luego sobre el intervalo $[\frac{1}{2},1]$.

c) La regla de Simpson sobre el intervalo $[0,1]$.

d) ¿Qué se puede concluir de los resultados obtenidos en los tres items anteriores?

a) La regla del trapecio está dada por:

$$\frac{b-a}{2}\left(\underbrace{f(a)}_{f(0)=0}+\underbrace{f(b)}_{f(1)=0}\right) \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \approx 0$$

b) Sobre el intervalo $[0,1/2]$: $\int_0^{1/2} f(x)\,dx \approx \frac{1/2}{2}(0+1/2) = \frac{1}{8}$

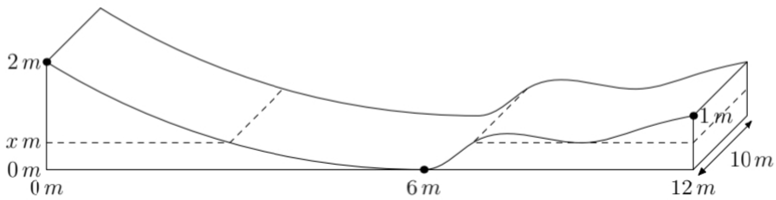
Sobre el intervalo $[1/2,1]$: $\int_{1/2}^1 f(x)\,dx \approx \frac{1/2}{2}(1/2+0) = \frac{1}{8}$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{1/2} f(x)\,dx\;\int_{1/2}^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{4}$$

c) La regla de Simpson está dada por:

$$\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{b+a}{2}\right)+f(b)\right),\quad \int_0^1 f(x) \approx \frac{1}{6}\left(0+4\cdot 1/2+0\right) = \frac{1}{3}$$

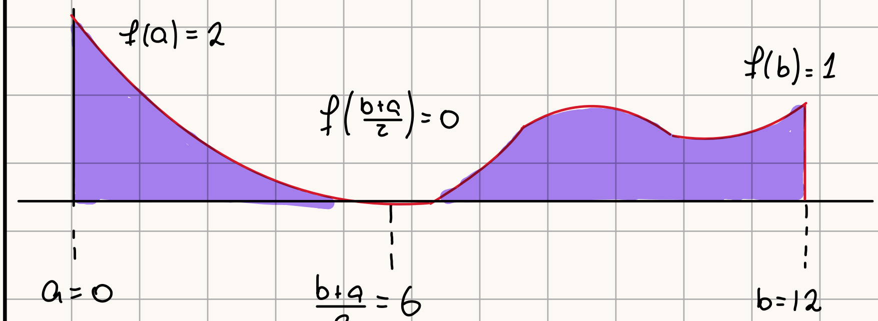
3. Se desea emparejar el siguiente terreno de $12\,metros \times 10\,metros$:



a) Usando la regla de Simpson, dar una estimación de los metros cúbicos de tierra que posee el terreno.

b) Estimar la altura x que tendrá el terreno si lo emparejamos sin remover nada de tierra.

a) Los m^3 de tierra pueden verse como:



Lo que se busca es el área bajo la curva multiplicada por la profundidad: 10m.

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot 10m$$

Luego:

$$\int_0^{12} f(x)\,dx \cdot 10m \approx \frac{12}{6}\cdot m\,(2+4\cdot 0+1)\cdot 10m = 60m^3$$

b) $60m^3 = 12m \cdot x \cdot 10m$

$\Rightarrow x = 1/2\,m$

4. *a)* Construir una regla de la forma

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(-0.5) + A_1 f(0) + A_2 f(0.5)$$

que sea exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que 2.

b) Determinar el grado de precisión de la fórmula para

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{4}{3}f(-0.5) - \frac{2}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(0.5).$$

a) Tomo $B(1, x, x^2)$, luego formo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} 1\,dx = A_0 + A_1 + A_2 \\ \int_{-1}^{1} x\,dx = -\frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_2 \\ \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{4}A_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2 \\ -\frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_2 = 0 \\ \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{4}A_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Resuelvo el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 2/3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-1/4F_1]{F_2+1/2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1/6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1/6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+1/4F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{array}\right) \qquad A_0 = \frac{4}{3},\ A_1 = -\frac{2}{3},\ A_2 = \frac{4}{3}$$

La regla de cuadratura es $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{4}{3} f(-0,5) - \frac{2}{3} f(0) + \frac{4}{3}\cdot f(0,5)$

b) Por inciso anterior, tiene presición 2, veamos si tiene de grado 3:

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8} = 0 \checkmark$$

La regla tiene grado de presición 3.

5. Determinar el número de subintervalos n de modo que la regla del trapecio compuesta aproxime el valor de $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ con un error menor que $\frac{1}{2}10^{-6}$, suponiendo que e^{-x^2} se puede calcular de manera precisa.
Repetir este ejercicio para la regla de Simpson compuesta.

El error producido al integrar mediante la regla del trapecio, tomando $h = \frac{b-a}{n}$, está dado por $|E_T| = -\frac{b-a}{12}\cdot h^2\cdot f''(\xi)$ que es lo mismo que $-\frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot f''(\xi)$, como en este caso los datos son: $f(x) = e^{-x^2}$, $f''(x) = (4x^2-2)\cdot e^{-x^2}$, $b=1$, $a=0$, la expresión a acotar es:

$$-\frac{1}{12n^2}\cdot\underbrace{(4x^2-2)}\cdot\underbrace{e^{-x^2}} \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-6} \Rightarrow -\frac{1}{12n^2}\cdot(4x^2-2)\cdot e^{-x^2} \le \frac{1}{\cancel{12}_6 n^2}\cdot\cancel{2}\cdot 1 \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-6}$$

Polinomio creciente, el máximo está en el extremo derecho, $4x^2-2 \le 2$.

Como e^x es creciente, e^{-x} es decreciente, el máximo va a estar en el extremo izquierdo $e^{-x^2} \le 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1/2\cdot 10^{-6}\cdot 6} \le n^2 \Rightarrow n \ge 577,35$$

La cantidad de subintervalos n que habrá que tomar es de al menos 578.

6. Un automóvil recorre una pista de carreras en 24 segundos. Su velocidad se determina cada 6 segundos mediante una pistola de radar y está dada, en metros/segundos [m/s], desde el principio del recorrido, por los datos de la siguiente tabla:

Tiempo	0	6	12	18	24
Velocidad	38	41	46	48	45

¿Cuál es la longitud aproximada de la pista?

Ayuda: usar la regla del trapecio y recordar que $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$, donde $v(t)$ y $x(t)$ son la velocidad y posición al tiempo t.

Como $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$, donde $v(t)$ es la velocidad y $x(t)$ el tiempo, entonces $v(t)\cdot dt = dx(t)$, y aplicando integral de ambos lados resulta:

$$\int_0^{24} v(t)\,dt = \underbrace{\int_0^{24} dx(t)}_{} = x(24)$$

donde esta es la longitud aproximada de la piste, tomando $x(24)$, posicion a los 24 segundos.

Entonces aplico la regla del trapecio del lado izquierdo con los datos dados:

$$\int_0^{24} v(t)\,dt \approx \frac{h}{2}\left(v(0) + 2(38+41+46+48) + v(24)\right) = 1059.$$

$\Rightarrow$ La pista mide aproximadamente 1173.

7. Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ mediante una regla de cuadratura de la forma

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3),$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 5. Aplicar la regla a la función $f(x) = cos(x)$ y comparar con el valor real de la integral.

Aclaración: Se puede utilizar calculadora para comparar los resultados. Recordar utilizar radianes.

Debo hallar una cuadratura que con 3 puntos x_1, x_2, x_3 aproxime $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ de manera exacta para polinomios de grado ≤ 5.

$$\int_{-1}^{1} f(x)w(x) \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3),$$

voy a utilizar una regla gaussiana con $n=3$, es decir, será exacta para polinomios de grado $2\cdot 3 - 1 = 5$. Busco los tres puntos mediante la familia de polinomios Legendre. Por teoremas varios:

- Cada polinomio de grado n, perteneciente a una familia de polinomios, tiene n raíces reales.
- y de ser necesarios 3 puntos para la cuadratura, basta tomar las 3 raíces del polinomio de grado 3 como dichas x_1, x_2 y x_3.

Tomo φ_3 de la familia Legendre donde $w(x) = 1$: $\varphi_3 = 1/2 \cdot (5x^3 - 3x)$, las tres raíces son: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3/5}$ y $x_3 = -\sqrt{3/5}$.

$$\boxed{\ell_i = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}$$

Luego:

- $A_1 = \int_{-1}^{1} \ell_1(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x-\sqrt{3/5})(x+\sqrt{3/5})}{(-\sqrt{3/5})\cdot(\sqrt{3/5})}\,dx$

$$= \int_{-1}^{1} (x-\sqrt{3/5})(x+\sqrt{3/5})\cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}\cdot \int_{-1}^{1}(x^2 + \cancel{\sqrt{3/5}\,x} - \cancel{\sqrt{3/5}\,x} - 3/5)\,dx$$

$$= \frac{5}{3}\int_{-1}^{1}(x^2 - 3/5)\,dx = \frac{5}{3}\cdot\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x}{5}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\cancel{5}^{1}}{3}\cdot\left(-\frac{8}{\cancel{15}_{3}}\right) = -\frac{8}{3}$$

- $A_2 = \int_{-1}^{1} \ell_2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x\cdot(x+\sqrt{3/5})}{\sqrt{3/5}\cdot 2\cdot\sqrt{3/5}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2+\sqrt{3/5}\cdot x}{2\cdot 3/5}\,dx$

$$= \frac{5}{6}\cdot\int_{-1}^{1}(x^2+\sqrt{3/5}\cdot x)\,dx = \frac{5}{\cancel{6}_{3}}\cdot\frac{\cancel{2}^{1}}{3} = \frac{5}{9}$$

- $A_3 = \int_{-1}^{1} \ell_3(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x\cdot(x-\sqrt{3/5})}{(-\sqrt{3/5})(-2\sqrt{3/5})}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2-\sqrt{3/5}\cdot x}{2\cdot 3/5}\,dx$

$$= \frac{5}{6}\cdot\int_{-1}^{1}(x^2-\sqrt{3/5}\cdot x)\,dx = \frac{5}{\cancel{6}_{3}}\cdot\frac{\cancel{2}^{1}}{3} = \frac{5}{9}$$

$$\boxed{\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \left(-\frac{8}{3}\right)\cdot f(0) + \frac{5}{9}\cdot\left(f\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) + f\left(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right)\right) \quad \text{exacta para polinomios de grado } \leq 5.}$$

Ahora pruebo con $f(x) = \cos(x)$:

$$\int_{-1}^{1} \cos(x)\,dx \approx -\frac{8}{3}\cdot\cos(0) + \frac{5}{9}\cdot\left(\cos(\sqrt{3/5}) + \cos(-\sqrt{3/5})\right)$$

$\text{sen}(-1) - \text{sen}(1) \approx -1{,}68$, la regla nos aproxima a $-1{,}87$.

8. Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)x^2dx$ mediante una regla de cuadratura de la forma

$$\int_{-1}^{1} f(x)x^2dx \approx A_1f(x_1) + A_2f(x_2),$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

Ayuda: Utilizar el ejercicio 11 del práctico 4.

Debo hallar una cuadratura gaussiana con 2 puntos para aproximar $\int_{-1}^{1} f(x)x^2dx$ mediante una regla de la forma $A_1 f(x_1) + A_2(x_2)$, para ello uso la familia de polinomios ortogonales obtenida en el ejercicio 11 del práctico anterior donde $\phi_0(x)=1$, $\phi_1(x)=x$, $\underbrace{\phi_2(x)=x^2-3/5}$

$\phi_2(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$, entonces se tiene: tomo las dos raíces reales

$x_1=\frac{\sqrt{15}}{5}$ y $x_2=-\frac{\sqrt{15}}{5}$ para obtener los polinomios de lagrange.

Luego obtengo los coeficientes A_1 y A_2:

- $A_0 = \int_{-1}^{1} \ell_0(x)\cdot\omega(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x+\frac{\sqrt{15}}{5}}{2\frac{\sqrt{15}}{5}}\cdot x^2dx = \frac{1}{2\frac{\sqrt{15}}{5}}\cdot\int_{-1}^{1}\left(x^3+\frac{\sqrt{15}}{5}x^2\right)dx = \frac{\sqrt{15}}{6}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{\sqrt{15}}{5}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}$

$= \frac{\sqrt{15}}{6}\left(\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{15}}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{15}}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{3}$

- $A_1 = \int_{-1}^{1} \ell_0(x)\cdot\omega(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x-\frac{\sqrt{15}}{5}}{-2\frac{\sqrt{15}}{5}}\cdot x^2dx = -\frac{1}{2\frac{\sqrt{15}}{5}}\cdot\int_{-1}^{1}\left(x^3-\frac{\sqrt{15}}{5}x^2\right)dx = \frac{\sqrt{15}}{6}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{\sqrt{15}}{5}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}$

$= \frac{\sqrt{15}}{6}\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{15}}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{15}}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{3}$

Ahora construyo la cuadratura con los coeficientes, queda exacta para polinomios de grado ≤ 3:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)x^2dx \approx \frac{1}{3}\cdot f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+\frac{1}{3}\cdot f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)}$$