Definiciones

jueves, 8 de julio de 2021 15:26

Definición de polinomio interpolante

Sea:

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$p \in \mathbb{R}[x]$

$$p \text{ interpola a } f \text{ en } x_1, x_2, \dots, x_n \Leftrightarrow \langle \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n} : p(x_i) = f(x_i) \rangle$$

Splines:

Sea:

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

$k \in \mathbb{N}$

$$S \text{ es un spline de grado } k \text{ con respecto a los nodos } x_1, x_2, \dots, x_n$$
$$\Leftrightarrow S \in C^{(k)}[x_1, x_n] \wedge \langle \forall i \in \mathbb{N}_{<n} : S \text{ es un polnomio de grado } k \text{ en } [x_i, x_{i+1}] \rangle$$

Teoremas

jueves, 15 de abril de 2021 09:44

Interpolación de Lagrange:

Para interpolar:
$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k \prod_{j=1, j \neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right)$$

Interpolación de Neville:

Para interpolar:
$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

$$P_{x_i}(x) = y_i$$

$$P_{x_j,\dots,x_k}(x) = \frac{(x - x_j) P_{x_{j+1},\dots,x_k}(x) - (x - x_k) P_{x_j,\dots,x_{k-1}}(x)}{(x_k - x_j)}$$

Interpolación de Newton:

Para interpolar:
$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(c_{1,\dots,i} \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j) \right)$$

Donde:

$$c_{i,i} = y_i$$

$$c_{i,\dots,j} = \frac{c_{i+1,\dots,j} - c_{i,\dots,j-1}}{x_j - x_i}$$

Definición de diferencias divididas:

$$f[x_j] = f(x_j)$$

$$f[x_j, \dots, x_k] = a \Leftrightarrow \left(\sum_{i=j}^{k-1} \left(f[x_j, \dots, x_i] \prod_{i'=j}^{i-1} (x - x_{i'}) \right) + a \prod_{i=j}^{k-1} (x - x_i) \text{ interpola a } f \text{ en } x_j, \dots, x_k \right)$$

Definición alternativa:

$$f[x_j] = f(x_j)$$

$$f[x_j, \dots, x_k] = \frac{f[x_{j+1}, \dots, x_k] - f[x_j, \dots, x_{k-1}]}{x_j - x_k}$$

Error de los polinomios interpolantes:

Sea:
$f \in C^{n+1}[a, b]$
p intrpola a f en $n + 1$ puntos en $[a, b], x_0, x_1, \dots, x_n$
$x \in [a, b]$

$$\exists \xi \in (a, b) : \; f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Demostraciones

jueves, 24 de junio de 2021 20:10

Exsistencia y unisidad del polinomio interpolante:
Sean:
$x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Con todos los x_i distintos entre si

$$\langle \exists!\, p \in \mathbb{R}_n[x] : \langle \forall i \in \{0,1,\dots,n\} : p(x_i) = f(x_i) \rangle \rangle$$

Primero pruebo la exsistencia, y después la unisidad

Exsistencia por indución en n:

Caso base para $n = 0$:

Si existe, y es: $p(x) = f(x_0)$

Caso inductivo para n + 1 suponiendo que vale para n:

Trabajo sin el $\exists$:

$$\langle \forall i \in \{0,1,\dots,n+1\} : p(x_i) = f(x_i) \rangle$$

$\Leftarrow$ {Sea $q \in \mathbb{R}[n]$ el polinomio que interpola a f en $x_0, x_1, \dots, x_n$ (exsiste por hipótesis inductiva), ahora trabajo con $\exists c \in \mathbb{R}$}

$$\left\langle \forall i \in \{0,1,\dots,n+1\} : q(x_i) + c\prod_{j=0}^{n}(x_i - x_j) = f(x_i) \right\rangle$$

$\Leftarrow$ {Divido en casos}

$$\left\langle \forall i \in \{0,1,\dots,n\} : q(x_i) + c\prod_{j=0}^{n}(x_i - x_j) = f(x_i) \right\rangle \wedge\ q(x_{n+1}) + c\prod_{j=0}^{n}(x_{n+1} - x_j) = f(x_{n+1})$$

$\Leftarrow$ {Algun $(x_i - x_j)$ siempre es 0 para $i \in \{0,1,\dots,n\}$}

$$\langle \forall i \in \{0,1,\dots,n\} : q(x_i) = f(x_i) \rangle \wedge\ c\prod_{j=0}^{n}(x_{n+1} - x_j) = f(x_{n+1}) - q(x_{n+1})$$

$\Leftarrow$ {q interpola a f en $x_0, x_1, \dots, x_n$}

$$\text{True} \wedge\ c = \frac{f(x_{n+1}) - q(x_{n+1})}{\prod_{j=0}^{n}(x_{n+1} - x_j)}$$

$\Leftarrow$ {Este c está bien definido, ya que f y q lo están, y $x_{n+1} \neq x_0, x_1, \dots, x_n$, por lo cuál si exsiste un c}

True

Pruebo la unisidad, probando que si hay dos, entonces esos 2 son iguales:
Sea:
$p, q \in \mathbb{R}[n]$

$$\langle \forall i \in \{0,1,\dots,n\} : p(x_i) = f(x_i)\ \wedge\ q(x_i) = f(x_i) \rangle$$

$\Rightarrow$

$$\langle \forall i \in \{0,1,\dots,n\} : p(x_i) - q(x_i) = 0 \rangle$$

$\Rightarrow$

$p - q$ tiene al menos $n + 1$ raices

$\Rightarrow$ {Teorema fundamental del álgebra, p y q son de grado $\leq n$}

$$p - q = 0$$

$\Rightarrow$

$$p = q$$

Polinomio de grado n a partir de grado n-1:
Sea:
$p_{x_j,\dots,x_k}$ el polinomio de grado $k - j$ que interpola a f en $x_j, \dots, x_k$

$$p_{x_j,\dots,x_k}(x) = p_{x_{j+1},\dots,x_k}(x) + \left(p_{x_{j+1},\dots,x_k}(x) - p_{x_j,\dots,x_{k-1}}(x)\right)\frac{x - x_k}{x_k - x_j}$$

Demostración:
Tengo que demostrar que la parte de la derecha interpola a f en $x_j, \dots, x_k$:

Para x_j:

$$p_{x_{j+1},\dots,x_k}(x_j) + \left(p_{x_{j+1},\dots,x_k}(x_j) - p_{x_j,\dots,x_{k-1}}(x_j)\right)\frac{x_j - x_k}{x_k - x_j}$$

$=$ {$p_{x_j,\dots,x_{k-1}}$ interpola a f en x_j}

$$p_{x_{j+1},\dots,x_k}(x_j) + \left(p_{x_{j+1},\dots,x_k}(x_j) - f(x_j)\right)$$

$=$

$$f(x_j)$$

Para $x_i \in \{x_{j+1}, \dots, x_{k-1}\}$

$$p_{x_{j+1},\dots,x_k}(x_i) + \left(p_{x_{j+1},\dots,x_k}(x_i) - p_{x_j,\dots,x_{k-1}}(x_i)\right)\frac{x_i - x_k}{x_k - x_j}$$

$=$

$$f(x_i) + \left(f(x_i) - f(x_i)\right)\frac{x_i - x_k}{x_k - x_j}$$

$=$

$$f(x_i) + 0\frac{x_i - x_k}{x_k - x_j}$$

$=$

$$f(x_i)$$

Para x_k:

$$p_{x_{j+1},\dots,x_k}(x_k) + \left(p_{x_{j+1},\dots,x_k}(x_k) - p_{x_j,\dots,x_{k-1}}(x_k)\right)\frac{x_k - x_k}{x_k - x_j}$$

$=$

$$f(x_k) + \left(f(x_k) - p_{x_j,\dots,x_{k-1}}(x_k)\right)\frac{0}{x_k - x_j}$$

$=$

$$f(x_k)$$

Interpolación de Lagrange:

Para interpolar:
$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right)$$

p interpola a $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

Demostración:

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} p \text{ interpola a } (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \\ \langle \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n} : \ p(x_i) = y_i \rangle \end{array}$$

Pruebo eso último trabajando sin el $\forall$:

$$\begin{array}{l} p(x_i) \\ = \\ \sum_{k=1}^{n} \left(y_k \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j} \right) \\ = \\ \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \left(y_k \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j} \right) + \ y_i \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} \end{array}$$

$= \{$Si o si un termino de la $\prod$ es para $j \ = \ i$, ya que cubre todos los $j \ \neq \ k$ e i es uno de esos $(i \ \neq \ k)\}$

$$\begin{array}{l} \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \left(y_k \frac{x_i - x_i}{x_k - x_i} \prod_{j=1, j\neq i,k}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j} \right) + \ y_i \prod_{j=1, j\neq k}^{n} 1 \\ = \\ \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \left(y_k \frac{0}{x_k - x_i} \prod_{j=1, j\neq i,k}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j} \right) + \ y_i \\ = \\ \sum_{k=1, k\neq i}^{n} 0 + \ y_i \\ = \\ y_i \end{array}$$

Interpolación de Newton:
Para interpolar f en:
$x_1, x_2, \dots, x_n$

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(f[x_1, \dots, x_i] \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j) \right)$$

P_n interpola a f en $x_1, x_2, \dots, x_n$

Demostración por inducción:

Caso base $n = 1$:

$$P_1(x_1)$$
$$= \sum_{i=1}^{1} \left(f[x_1, \dots, x_i] \prod_{j=1}^{i-1} (x_1 - x_j) \right)$$
$$= f[x_1] \prod_{j=1}^{1-1} (x_1 - x_j)$$
$$= f(x_1)$$

Caso inductivo para n+1 suponiendo que vale para n:
Tengo que probar $\forall i \in \mathbb{N}_{\leq n+1} : p_{n+1}(x_i) = f(x_i)$

Trabajo si el $\forall$:

$$p_{n+1}(x_i) = f(x_i)$$
$\Leftrightarrow$
$$\sum_{i=k}^{n+1} \left(f[x_1, \dots, x_k] \prod_{j=1}^{k-1} (x_i - x_j) \right) = f(x_i)$$
$\Leftrightarrow$
$$\sum_{k=1}^{n} \left(f[x_1, \dots, x_k] \prod_{j=1}^{k-1} (x_i - x_j) \right) + f[x_1, \dots, x_n] \prod_{j=1}^{n} (x - x_n) = f(x_i)$$
$\Leftrightarrow$
$$p_n(x_i) + f[x_1, \dots, x_n] \prod_{j=1}^{n} (x_i - x_j) = f(x_i)$$

Divido en casos ($i \neq n + 1$ e $i = n + 1$):

Caso $i \neq n + 1$:

$$p_n(x_i) + f[x_1, \dots, x_n] \prod_{j=1}^{n} (x_i - x_j) = f(x_i)$$
$\Leftrightarrow$ {P_n interpola a f en $x_1, x_2, \dots, x_n$, en particular en x_i}
$$f(x_i) + f[x_1, \dots, x_n]0 = f(x_i)$$
$\Leftrightarrow$
$$f(x_i) = f(x_i)$$
$\Leftrightarrow$
True

Caso $i = n + 1$:

$$p_n(x_{n+1}) + f[x_1, \dots, x_n] \prod_{j=1}^{n} (x_{n+1} - x_j) = f(x_{n+1})$$

$\Leftrightarrow$

$$p_n(x_{n+1}) + \frac{f[x_2, \dots, x_n] - f[x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_1 - x_n} \prod_{j=1}^{n} (x_{n+1} - x_j) = f(x_{n+1})$$

$$\sum_{i=j}^{k} \left(f[x_j, \dots, x_i] \prod_{i'=1}^{i-1} (x - x_{i'}) \right) = p_{x_{j+1},\dots,x_k}(x) + \left(p_{x_{j+1},\dots,x_k}(x) - p_{x_j,\dots,x_{k-1}}(x) \right) \frac{x - x_k}{x_k - x_j}$$

$\Rightarrow$ {Si los polinomios son iguales, su coeficiente mayor grado tambien lo es}

$$f[x_j, \dots, x_k] = \left(f[x_{j+1}, \dots, x_k] - f[x_j, \dots, x_{k-1}] \right) \frac{1}{x_k - x_j}$$

$$f[x_j, \dots, x_k] = \frac{f[x_{j+1}, \dots, x_k] - f[x_j, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_j}$$

Error del polinomio interpolante:
Sea:
$f \in C^n[a, b]$
$x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$
$p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ un polinomio que interpola a f en $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\forall x \in [a, b] : \left\langle \exists \xi \in (a, b) : f(x) - p(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \right\rangle$$

Divido en casos de x:
Caso $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, trabajo sin el $\forall$ y el $\exists$:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

$\Leftrightarrow$ {p interpola a f en $x_1, x_2, \dots, x_n \Rightarrow f(x) - p(x)$. Algún elemento del pa $\prod$ se vuelve 0}

$$0 = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} 0$$

$\Leftrightarrow$

$0 = 0$

$\Leftrightarrow$

True

Caso $x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$:
Trabajo con el x cuantificado universalmente:
Sea:

$$w(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)} \prod_{i=1}^{n}(t - x_i)$$

w está bien definida en $[a, b]$, ya que f lo está, y $\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$ es no nulo, porque $x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Notar que $x_1, x_2, \dots, x_n$ son raices de w, ya que $f(t) - p(t)$ es 0 ya que p interpola a f en $x_1, x_2, \dots, x_n$, y lo otro es 0, porque algún termino de la $\prod$ es 0. También notar que x es una raíz:

$$f(x) - p(x) - \frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)} \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$
$$= f(x) - p(x) - f(x) - p(x))$$
$$= 0$$

Parto de esto:

$x, x_1, x_2, \dots, x_n$ son raices de w

$\Rightarrow$

w tiene $n + 1$ raices en $[a, b]$

$\Rightarrow$ {Teorema generalizado de Rolle}

$w^{(n)}$ tiene 1 raíz en (a, b)

$\Rightarrow$

$\exists \xi \in (a, b) : w^{(n)}(\xi) = 0$

$\Rightarrow$ {Calculo la derivada n-écima de w:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}^n t}\left(f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)} \prod_{i=1}^{n}(t - x_i)\right)$$

$=$ {p es un polinomio de grado $n - 1$, por ende su n-écima es 0. De la productorio solo queda el coeficiente de grado n}

$$f^{(n)}(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)} n!$$

}

$$\exists \xi \in (a, b) : f^{(n)}(\xi) - \frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)} n! = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists \xi \in (a, b) : f^{(n)}(\xi) = \frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)} n!$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists \xi \in (a, b) : f(x) - p(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

* Teorema generalizado de Rolle:
Sea:
$f \in C^{(n-1)}[a,b]$

f tiene n raices en $[a,b] \Rightarrow f^{n-1}$ tiene 1 raíz en (a,b)

Aclaración:
Cuando digo tiene m raices, pueden ser m o mas

Demostración por inducción en n:

Caso base $n = 1$:

f tiene 1 raíz en $[a,b]$
$\Rightarrow$
$f^{(0)}$ tiene 1 raíz en (a,b)
$\Rightarrow$
$f^{(1-1)}$ tiene 1 raíz en (a,b)

Caso inductivo para $n+1$ suponiendo que vale para n:

f tiene $n+1$ raices en $[a,b]$
$\Rightarrow$ {ⓘ $(n+1 \geq 2)$}
$f^{(1)}$ tiene n raices en (a,b)
$\Rightarrow$ {Hipótesis inductiva}
f^{1+n-1} tiene 1 raíz en (a,b)
$\Rightarrow$
f^{n+1-1} tiene 1 raíz en (a,b)

ⓘ Teorema:
Sea $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$
$g \in C^{(1)}[a,b]$

g tiene k raices en $[a,b] \Rightarrow$ g' tiene $k-1$ raices en (a,b)

Demostración por inducción en k:

Caso base $k = 2$:

g tiene 2 raices en $[a,b]$
$\Rightarrow$ {Teorema de Rolle}
g' tiene 1 raíz en (a,b)

Caso inductivo para $k+1$ suponiendo que vale para k:

g tiene $k+1$ raices en $[a,b]$
$\Rightarrow$ {Sean x_1, x_2, x_{k+1} esas raices en orden}
g tiene 2 raices en $[x_1, x_2]$ $\wedge$ g tiene k raices en $[x_2, x_{k+1}]$
$\Rightarrow$ {Teorema de Rolle, hipotesis inductiva}
g' tiene 1 raíz en (x_1, x_2) $\wedge$ g'tiene $k-1$ raices en (x_2, x_{k+1})
$\Rightarrow$

g' tiene $1 + k - 1$ raices en $(x_1, x_2) \cup (x_2, x_{k+1})$

$\Rightarrow \{\!\{(x_1, x_2) \cup (x_2, x_{k+1}) \subset (a, b)\}\!\}$

g' tiene k raices en (a, b)

1)

jueves, 15 de abril de 2021 09:39

a) $$p(x) = \sum_{k=0}^{2} \left(f(x_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{2} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} + \frac{1}{2.5} \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} + \frac{1}{4} \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)}$$

$$= \frac{(x-\frac{5}{2})(x-4)}{2} - \frac{8}{15}(x-2)(x-4) + \frac{(x-2)(x-\frac{5}{2})}{12}$$

grado$(p) = 2$

2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	
4	$\frac{1}{4}$		

$$q(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}(x-2) + \frac{1}{20}(x-2)(x-2.5)$$

grado$(q) = 2$

$P(3) = \frac{13}{40}$

b)

$$P_{n,1}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(1)}{i!} (x-1)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \, i! \cdot 1^{-i}}{i!} (x-1)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x-1)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (1-x)^i$$

2)

viernes, 16 de abril de 2021 18:16

Voy a demostrar que no existen 2 polinomios de grado ≤ n que pasen por los mismos n+1 puntos (distintos en x), ósea:

Sea:
$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$
$x_0 \neq x_1 \neq \cdots \neq x_n$
$\mathbb{N}$ incluye al 0

$$\exists!\, p \in \mathbb{P}_n : \langle \forall j \in \mathbb{N}_{\leq n} : p(x_j) = y_j \rangle$$

Esto es como probar que si $f, g \in \mathbb{P}_n$:

$$\langle \forall j \in \mathbb{N}_{\leq n} : f(x_j) = y_j \wedge g(x_j) = y_j \rangle = y_j \Rightarrow \ f = g$$

Demostración:

$$\langle \forall j \in \mathbb{N}_{\leq n} : f(x_j) = y_j \wedge g(x_j) = y_j \rangle$$
$\Rightarrow$
$$\langle \forall j \in \mathbb{N}_{\leq n} : f(x_j) - g(x_j) = y_j - y_j \rangle$$
$\Rightarrow$
$$\langle \forall j \in \mathbb{N}_{\leq n} : f(x_j) - g(x_j) = 0 \rangle$$
$\Rightarrow$
$f - g$ tiene al menos n raices
$\Rightarrow$ {Teorema fundamental del álgebra, $f - g$ es de grado $\leq n$}
$f - g = 0$
$\Rightarrow$
$f = g$

3)

viernes, 16 de abril de 2021 18:56

Sea:

$x_0 \neq x_1 \neq \cdots \neq x_n$

g interpola a f en $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$

h interpola a f en $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}\big(g(x) - h(x)\big) \text{ interpola a } f \text{ en } x_0, x_1, \dots, x_n$$

Demostración:

Para x_0:

$$g(x_0) + \frac{x_0 - x_0}{x_n - x_0}\big(g(x_0) - h(x_0)\big)$$

$=$

$$g(x_0) + \frac{0}{x_n - x_0}\big(g(x_0) - h(x_0)\big)$$

$=$

$$g(x_0)$$

$=$

$$f(x_0)$$

Para x_j con $1 \leq j \leq n-1$:

$$g(x_j) + \frac{x_0 - x_j}{x_n - x_0}\left(g(x_j) - h(x_j)\right)$$

$$= f(x_j) + \frac{x_0 - x_j}{x_n - x_0}\left(f(x_j) - f(x_j)\right)$$

$$= f(x_j) + \frac{x_0 - x_j}{x_n - x_0} 0$$

$$= f(x_j)$$

Para x_n:

$$g(x_n) + \frac{x_0 - x_n}{x_n - x_0}\left(g(x_n) - h(x_n)\right)$$

$$= g(x_n) - \frac{x_n - x_0}{x_n - x_0}\left(g(x_n) - f(x_n)\right)$$

$$= g(x_n) - \left(g(x_n) - f(x_n)\right)$$

$$= g(x_n) - g(x_n) + f(x_n)$$

$$= f(x_n)$$

4)

viernes, 16 de abril de 2021 19:15

Sea:

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

$$= \left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) \prod_{j=k+1}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

4a)

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1$$

Demostración: $\mathbb{N}$ incluye al 0

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} l_k(x) - 1 = 0$$

$\Leftarrow$ {Teorema fundamental del álgebra, $\sum_{k=0}^{n} l_k(x) - 1$ es de grado $n - 1$}

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) - 1 \text{ tiene } n \text{ o mas raices}$$

$$\Leftarrow \forall j \in \mathbb{N}_{\leq n} : \sum_{k=0}^{n} l_k(x_j) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}_{\leq n} : \sum_{k=0}^{n} l_k(x_j) = 1$$

$\Leftarrow$ {Que un termino de la $\sum$ sea 1, y el resto 0}

$$\forall j \in \mathbb{N}_{\leq n} : l_j(x_j) = 1 \wedge \langle \forall k \in \mathbb{N}_{\leq n} : k \neq j : l_k(x_j) = 0 \rangle$$

Pruebo esto por partes:

$$l_j(x_j)$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x_j - x_i}{x_j - x_i}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} 1$$

$$= 1$$

$$l_k(x_j)$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x_j - x_i}{x_k - x_i}$$

$=$ {Como $j \neq k$, saco el termino en el que $i = j$}

$$\frac{x_j - x_j}{x_k - x_j} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k,j}}^{n} \frac{x_j - x_i}{x_k - x_i}$$

$$= 0 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k,j}}^{n} \frac{x_j - x_i}{x_k - x_i}$$

$$= 0$$

Queda probado:

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1$$

4c)

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^m l_k(x) = x^m$$

Demostración:

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^m l_k(x) = x^m$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} x_k^m l_k(x) - x^m = 0$$

$\Leftarrow$ {Teorema fundamental del álgebra, $\sum_{k=0}^{n} x_k^m l_k(x) - x^m$ es de grado $n - 1$}

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^m l_k(x) - x^m \text{ tiene } n+1 \text{ o mas raices}$$

$\Leftarrow$ {Este $\mathbb{N}$ incluye al $0 \Rightarrow |\mathbb{N}_{\leq n}| = n+1$}

$$\forall j \in \mathbb{N}_{\leq n} : \sum_{k=0}^{n} x_k^m l_k(x) - x_j^m = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}_{\leq n} : \sum_{k=0}^{n} x_k^m l_k(x_j) = x_j^m$$

$\Leftarrow$ {Que un termino de la $\sum$ sea x_j^m, y el resto 0}

$$\forall j \in \mathbb{N}_{\leq n} : x_j^m l_j(x_j) = x_j^m \wedge \langle \forall k \in \mathbb{N}_{\leq n} : k \neq j : x_k^m l_k(x_j) = 0 \rangle$$

Pruebo esto por partes:

$$x_j^m l_j(x_j)$$
$$= x_j^m \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x_j - x_i}{x_j - x_i}$$
$$= x_j^m \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} 1$$
$$= x_j^m 1$$
$$= x_j^m$$

$$x_k^m l_k(x_j)$$
$$= x_k^m \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x_j - x_i}{x_k - x_i}$$

$=$ {Como $j \neq k$, saco el termino en el que $i = j$}

$$x_k^m \frac{x_j - x_j}{x_k - x_j} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k,j}}^{n} \frac{x_j - x_i}{x_k - x_i}$$
$$= x_k^m 0 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k,j}}^{n} \frac{x_j - x_i}{x_k - x_i}$$

$= 0$

5)

viernes, 16 de abril de 2021 20:23

f g

5a) $$f(x) = -\frac{x(x-2)(x-3)}{(-1)(-1-2)(-1-3)} + 3\frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{1(-2)(-3)} + 11\frac{(x+1)x(x-3)}{(2+1)\,2\,(2-3)} + 27\frac{(x+1)x(x-2)}{(3+1)\,3\,(3-2)}$$

$$= \frac{x(x-2)(x-3)}{12} + \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{2} - \frac{11}{6}(x+1)x(x-3) + \frac{9}{4}(x+1)x(x-2)$$

$$g(x) = -3\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-1-1)(-1-2)} + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1\cdot(-1)\cdot(-2)} + \frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)\,1\,(1-2)} + 3\frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)\,2\,(2-1)}$$

$$= \frac{x(x-1)(x-2)}{2} + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} - \frac{(x+1)x(x-2)}{2} + \frac{(x+1)x(x-1)}{2}$$

5b)

-1	-1			
		4		
0	3		0	
		4		1
2	11		4	
		16		
3	27			

$$f(x) = -1 + 4(x+1) + (x+1)x(x-2)$$

-1	-3			
		4		
0	1		-2	
		0		1
1	1		1	
		2		
2	3			

$$g(x) = -3 + 4(x+1) - 2(x+1)x + 1(x+1)x(x-1)$$

5 c)

-1	-1				
		4			
0	3		0		
		4		1	
2	11		4		$\frac{29}{20}$
		16		$-\frac{25}{4}$	
3	27		-27		
		-26			
4	1				

$$F(x) = -1 + 4(x+1) + (x+1)x(x-2) - \frac{29}{20}(x+1)x(x-2)(x-3)$$

-1	-3				
		4			
0	1		-2		
		0		1	
1	1		1		$-\frac{3}{10}$
		2		$-\frac{1}{2}$	
2	3		-1		
		-1			
4	1				

$$g(x) = -3 + 4(x+1) - 2(x+1)x + 1(x+1)x(x-1)$$
$$- \frac{3}{10}(x+1)x(x-1)(x+2)$$

6)

martes, 20 de abril de 2021 09:08

Sea:

$f(x) = 2^x$

P_n interpola a f en $n+1$ puntos en $[0,5], x_0, x_1, \dots, x_n$

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{32 \cdot 5^{n+1}}{(n+1)!}$$

Demostración:

Primero calculo la derivada k-ecima de f:

$$f(x) = 2^x$$

$$f'(x) = \frac{2^x}{\log_2(e)}$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{2^x}{(\log_2(e))^k}$$

Por teorema:

$$\exists \xi \in (0,5) : \ f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$\Rightarrow \ \exists \xi \in (0,5) : |p_n(x) - f(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

$\Rightarrow \{\{f$ es exponencial $\Rightarrow f^{(n)}$ es creciente $\Rightarrow$ el ξ que mas grande vuelve $f^{(n+1)}(\xi)$ es $5\}\}$

$$|p_n(x) - f(x)| < \frac{f^{(n+1)}(5)}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

$$\Leftrightarrow \ |p_n(x) - f(x)| < \frac{\frac{2^x}{(\log_2(e))^{n+1}}}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|$$

$$\Leftrightarrow \ |p_n(x) - f(x)| < \frac{2^x}{(\log_2(e))^{n+1}(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|$$

$\Rightarrow$ {El x mas grande hace 2^x es 5}

$$|p_n(x) - f(x)| < \frac{2^5}{(\log_2(e))^{n+1}(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|$$

$\Rightarrow$ {Siempre pasa que $|(x - x_i)| \leq 5$}

$$|p_n(x) - f(x)| < \frac{2^5 \cdot 5^{n+1}}{(\log_2(e))^{n+1}(n+1)!}$$

$\Rightarrow$ {$\log_2(e) > 1 \Rightarrow \ (\log_2(e))^{n+1} > 1$}

$$|p_n(x) - f(x)| < \frac{2^5 \cdot 5^{n+1}}{(n+1)!}$$

7)

martes, 20 de abril de 2021 10:06

Por teorema:

$$\exists \xi \in (-1,1): \ f(x) - p(x) = \frac{f^{(22+1)}(\xi)}{(22+1)!} \prod_{i=0}^{22} (x - x_i)$$

$$\Rightarrow \exists \xi \in (-1,1): |f(x) - p(x)| = \left| \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2 \cdot 23!} \prod_{i=0}^{22} (x - x_i) \right|$$

$$\Rightarrow \exists \xi \in (-1,1): |f(x) - p(x)| = \frac{|e^{\xi} - e^{-\xi}|}{2 \cdot 23!} \prod_{i=0}^{22} |x - x_i|$$

$\Rightarrow \{\text{Siempre vale que } |x - x_i| \leq 2\}$

$$\exists \xi \in (-1,1): |f(x) - p(x)| \leq \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2 \cdot 23!} \prod_{i=0}^{22} 2$$

$\Rightarrow \{e^{\xi} + e^{-\xi} \text{ es cereciente} \Rightarrow \text{se puede acotar con } \xi = 1\}$

$$|f(x) - p(x)| < \frac{e^{1} - e^{-1}}{2 \cdot 23!} 2^{23}$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - p(x)| < \frac{e - e^{-1}}{23!} 2^{22}$$

$\Rightarrow \{e - e^{-1} < 3\}$

$$|f(x) - p(x)| < \frac{3 \cdot 2^{22}}{23!}$$

$\Rightarrow \{\frac{3 \cdot 2^{22}}{23!} < 5 \cdot 10^{-16}\}$

$$|f(x) - p(x)| < 5 \cdot 10^{-16}$$

8)

martes, 20 de abril de 2021 11:11

8a)

Sean:

$a < b$

$m = \dfrac{a+b}{2}$

$h \in \left[0, \dfrac{b-a}{2}\right]$

$p = m - h$

$q = m + h$

$x \in [a, b]$

$$|(x-p)(x-q)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$\max_{x \in [a,b]} |(x-p)(x-q)|$$

$= \{$El máximo del valor absoluto un polinomio de grado 2 en un intervalo, es un extremo, o el vértice (el vértice es en el medio de las raices)$\}$

$$|(a-p)(a-q)| \max\ |(m-p)(m-q)|\ \max\ |(b-p)(b-q)|$$

Trabajo estos por separado (para a y b juntos, ya que el vértice está a la mitad de estos):

$$\begin{aligned} & |(a-p)(a-q)| \\ = & |(a-m+h)(a-m-h)| \\ = & \left|\left(a - \frac{a+b}{2} + h\right)\left(a - \frac{a+b}{2} - h\right)\right| \\ = & \left|\left(\frac{a-b}{2} + h\right)\left(\frac{a-b}{2} - h\right)\right| \end{aligned}$$

$$= \left|\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - h^2\right|$$

$$\leq \left\{\left(\frac{a-b}{2}\right) > 0, h < \frac{b-a}{2}\right\}$$

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$|(m-p)(m-q)|$$
$$= |(m-m+h)(m-m-h)|$$
$$= h^2$$
$$\leq \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

b)

Sean:

$n \in \mathbb{N}_0$

$i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$x_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$

$x \in [a, b]$

$$\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}$$

Demostración:

Caso n par:

$$\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

$$= \prod_{i=0}^{n/2}\left|(x-x_{n/2-1+i})(x-x_{n/2+i})\right|$$

$\leq$ {{Ejercicio 8a}}

$$\prod_{i=0}^{n/2}\left|\frac{(b-a)^2}{2^2}\right|$$

$$= \left(\frac{(b-a)^2}{2^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$= \frac{(b-a)^n}{2^n}$$

Caso n impar:

$$\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

$$= \left|x-x_{\lfloor n/2\rfloor}\right|\prod_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\left|(x-x_{\lfloor n/2\rfloor-1+i})(x-x_{\lfloor n/2\rfloor+1+i})\right|$$

$\leq$ {{Ejercicio 8a}}

$$\left|x-x_{\lfloor n/2\rfloor}\right|\prod_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\left|\frac{(b-a)^2}{2^2}\right|$$

$\leq$ {{$x \in [a,b] \wedge x_{\lfloor n/2\rfloor} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow x - x_{\lfloor n/2\rfloor} \leq \frac{b-a}{2}$}}

$$\frac{b-a}{2}\frac{(b-a)^{2\lfloor n/2\rfloor}}{2^{2\lfloor n/2\rfloor}}$$

$=$ {{n es impar}}

$$\frac{(b-a)^n}{2^n}$$

9)

martes, 27 de abril de 2021 09:31

a)

$$f(x) = \cos(\pi x)$$

$$f(-1) = \cos(-\pi) = -1$$

$$f(0) = \cos(0) = 1$$

$$f(1) = \cos(\pi) = -1$$

$$f'(x) = -\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi x)$$

$$f'(1) = -\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi)$$

$$= 0$$

Diferencias divididas:

-1	-1			
		2		
0	1		-2	
		-2		2
1	-1		2	
		0		
1	-1			

$$P(x) = -1 + 2(x+1) - 2(x+1)x + 2(x+1)x(x-1)$$

b) $f''(x) = -\pi^2 \cdot \cos(\pi x)$

$$f''(1) = -\pi^2 \cdot \cos(\pi)$$

$$= \pi^2$$

Diferencias divididas:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
-1 & -1 & & & & \\
 & & 2 & & & \\
0 & 1 & & -2 & & \\
 & & -2 & & 2 & \\
1 & -1 & & 2 & \frac{\pi^2}{2}-2 & \frac{\pi^2}{4}-2 \\
 & & 0 & \frac{\pi^2}{2} & & \\
1 & -1 & & & & \\
 & & 0 & & & \\
1 & -1 & & & &
\end{array}
$$

$$P(x) = -1 + 2(x+1) - 2(x+1)x + 2(x+1)x(x-1) + \left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)(x+1)x(x-1)^2$$

10)

miércoles, 28 de abril de 2021 20:36

10a)

Sea:

p_i el polinomio de grado 1 que interpola a f en x_i y x_{i+1}

$$|f(x) - p_i(x)| \leq 5 * 10^{-8}$$

$$\Leftrightarrow \{\text{Teorema: } \exists \xi \in (x_i, x_{i+1}) : |f(x) - p_i(x)| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1})\right|\}$$

$$\exists \xi \in (x_i, x_{i+1}) : \left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1})\right| \leq 5 * 10^{-8}$$

$$\Leftarrow \{\text{Ejercicio 8 } |(x - x_i)(x - x_{i+1})| \leq \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4} \Rightarrow \left(\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4} \leq 5 * 10^{-8} \Rightarrow |(x - x_i)(x - x_{i+1})| \leq 5 * 10^{-8}\}\right)$$

$$\exists \xi \in (x_i, x_{i+1}) : \frac{\xi^{-\frac{3}{2}}}{8}\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4} \leq 5 * 10^{-8}$$

$$\Leftarrow \{\xi^{-\frac{3}{2}} \text{ es decreciente, acoto } \xi \text{ por } 1\ ((x_i, x_{i+1}) \subset (1, 2))\}$$

$$\frac{1^{-\frac{3}{2}}}{8}\frac{\left(1 + \frac{i+1}{n} - 1 - \frac{i}{n}\right)^2}{4} \leq 5 * 10^{-8}$$

$$\Leftarrow \frac{1}{32n^2} \leq 5 * 10^{-8}$$

$$\Leftarrow n^2 \geq \frac{10^8}{5 \cdot 32}$$

$$\Leftarrow n \geq \sqrt{\frac{10^8}{5 \cdot 32}}$$

$$\Leftarrow \{\sqrt{\frac{10^8}{5 \cdot 32\sqrt{8}}} = 250\sqrt{10} \approx 790.56942\}$$

$$n > 790$$

10b)

Sea:

p_i el polinomio de grado 2 que interpola a f en x_i, x_{i+1} y x_{i+2}

Por teorema:

$$|f(x) - p_i(x)| \leq 5 \cdot 10^{-8}$$

$\Leftrightarrow$ {Por teorema $\exists \xi \in (x_i, x_{i+2}) : |f(x) - p_i(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{(2+1)!} \prod_{j=0}^{2} (x - x_{i+j})\right|$}

$$\exists \xi \in (x_i, x_{i+2}) : \left|\frac{3\xi^{-5/2}}{8 \cdot 6}(x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})\right| \leq 5 \cdot 10^{-8}$$

$\Leftarrow$ {$\xi^{-5/2}$ es decreciente, hago que valga para el $\xi = 1$, y va a valer para todos los mas grandes}

$$\left|\frac{1^{-5/2}}{16}(x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})\right| \leq 5 \cdot 10^{-8}$$

$$\Leftrightarrow |(x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})| \leq 16 \cdot 5 \cdot 10^{-8}$$

$\Leftarrow$ {Ejercicio 8: $|(x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})| \leq \frac{(x_{i+2} - x_i)^3}{2^3}$}

$$\frac{(x_{i+2} - x_i)^3}{2^3} \leq 16 \cdot 5 \cdot 10^{-8}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{i+2}{n} - 1 - \frac{i}{n}\right)^3 \leq 8 \cdot 16 \cdot 5 \cdot 10^{-8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n} \leq \sqrt[3]{8 \cdot 16 \cdot 5 \cdot 10^{-8}}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{2}{\sqrt[3]{8 \cdot 16 \cdot 5 \cdot 10^{-8}}}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 50\sqrt[3]{10}$$

$$\Leftrightarrow n > 107$$

11)

jueves, 29 de abril de 2021 12:30

Sea:

$p_i(x)$ interpola linealmente a f en $\left[\frac{i}{n}2\pi, \frac{(i+1)}{n}2\pi,\right)$para $i = 0, 1 \dots, n-1$

Trabajo con $\left|f(x) - p_{i(x)}\right|$:

Por teorema:

$$\exists \xi \in \left(\frac{i}{n}2\pi, \frac{(i+1)}{n}2\pi\right) : |f(x) - p_i(x)| = \left|\frac{f^{(1+1)}(\xi)}{(1+1)!}\prod_{j=0}^{1}\left(x - \frac{i+j}{n}2\pi\right)\right|$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists \xi \in \left(\frac{i}{n}2\pi, \frac{(i+1)}{n}2\pi\right) : |f(x) - p_i(x)| = \left|\frac{-\cos(\xi)}{2}\left(x - \frac{i}{n}2\pi\right)\left(x - \frac{i+1}{n}2\pi\right)\right|$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists \xi \in \left(\frac{i}{n}2\pi, \frac{(i+1)}{n}2\pi\right) : |f(x) - p_i(x)| = \frac{|\cos(\xi)|}{2}\left|\left(x - \frac{i}{n}2\pi\right)\left(x - \frac{i+1}{n}2\pi\right)\right|$$

$\Rightarrow$ {Ejercicio 8}

$$\exists \xi \in \left(\frac{i}{n}2\pi, \frac{(i+1)}{n}2\pi\right) : |f(x) - p_i(x)| \leq \frac{|\cos(\xi)|}{2}\frac{\left(\frac{i+1}{n}2\pi - \frac{i}{n}2\pi\right)^2}{4}$$

$\Rightarrow$ {Acoto $|\cos(\xi)| \leq 1$}

$$|f(x) - p_i(x)| \leq \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2}{4}$$

$\Leftrightarrow$

$$|f(x) - p_i(x)| \leq \frac{4\pi^2}{8n^2}$$

$\Leftrightarrow$

$$|f(x) - p_i(x)| \leq \frac{\pi^2}{2n^2}$$

Ahora resuelvo lo del error:

$$|f(x) - p_i(x)| \leq 5 \cdot 10^{-7}$$

$$\Leftarrow \{\!\{|f(x) - p_i(x)| \leq \tfrac{\pi^2}{2n^2}\}\!\}$$

$$\frac{\pi^2}{2n^2} \leq 5 \cdot 10^{-7}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{10^7\pi^2}{2 \cdot 5} \leq n^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n \geq \sqrt{10^6\pi^2}$$

$$\Leftarrow \{\!\{\sqrt{\tfrac{10^7\pi^2}{5}} = 1000\pi \approx 3141.59265\}\!\}$$

$$n \geq 1000\pi$$

$$\Leftarrow$$

$$n \geq 3142$$

12)

lunes, 3 de mayo de 2021 10:41

a)

Derivadas de S:

$0 \leq x \leq 1$:

$S(x) = \alpha x^3 + \gamma x$

$S'(x) = 3\alpha x^2 + \gamma$

$S''(x) = 6\alpha x$

$1 \leq x \leq 2$

$S(x) = -\alpha x^3 + \beta x^2 - 5\alpha x + 1$

$S'(x) = -3\alpha x^2 + 2\beta x - 5\alpha$

$$s''(x) = -6\alpha x + 2\beta$$

Busco α, β, γ

$$\begin{cases} \alpha 1^3 + \gamma 1 = -\alpha 1^3 + \beta 1^2 - 5\alpha 1 + 1 \\ 3\alpha 1^2 + \gamma = -3\alpha 1^2 + 2\beta 1 - 5 \cdot \alpha \\ 6\alpha 1 = -6\alpha 1 + 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7\alpha - \beta + \gamma = 1 \\ 11\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ 12\alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 11 & -2 & 1 \\ 12 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduzco la matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 1 & 1 \\ 11 & -2 & 1 & 0 \\ 12 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$F_2 - F_1$

$-F_3/2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -1 \\ -6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad -F_3/2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} F_1 + F_3 \\ F_2 + F_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad -F_2/2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} F_1 - F_2 \\ F_3 + 6F_2 \end{array}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$\beta = 3$

$\gamma = \frac{1}{2}$

12 b)

S es un spline cubico, por ende:

S interpola a f en 0, 1, 2 si sin derivar y las primeras 2 derivadas coinciden en 1

$$f(x) = 2^x + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 1$$

$$s(1) = \frac{1}{2} 1^3 + \frac{1}{2} 1$$

$$= 1$$

$$f(1) = 2^1 + \frac{1^2}{2} - \frac{1}{2} - 1$$

$$= 1$$

$$f'(x) = \ln(2)\, 2^x + x - \frac{1}{2}$$

$$f'(1) = \ln(2)\, 2^1 + 1 - \frac{1}{2}$$

$$= 2\ln(2) + \frac{1}{2}$$

$$s'(1) = \frac{3}{2} 1^2 + \frac{1}{2}$$

$= 2$

$\Rightarrow$ S no es un spline cubico de f

13)

lunes, 3 de mayo de 2021 09:21

Derivadas:

$0 \leq x \leq 1$:

$s'(x) = b_1 + 2c_1 x + 3d_1 x^2$

$s'' = 2c_1 + 6d_1 x$

$1 \leq x \leq 2$:

$s'(x) = b_2 + 2c_2(x-1) + 3d_2(x-1)^2$

$s''(x) = 2c_2 + 6d_2(x-1)$

Busco los valores:

$$\begin{cases} 1 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0^2 + d_1 \cdot 0^3 = 1 \\ 1 + b_1 \cdot 1 + c_1 \cdot 1^2 + d_1 \cdot 1^3 = 0 \\ b_2 (1-1) + c_2 (1-1)^2 + d_2 (1-1)^3 = 0 \\ b_1 + 2c_1 1 + 3d_1 1^2 = b_2 + 2c_2 (1-1) + 3d_2 (1-1)^2 \\ 2c_1 + 6d_1 1 = 2c_2 + 6d_2 (1-1) \\ b_2 (2-1) + c_2 (2-1)^2 + d_2 (2-1)^3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ b_1 + 2c_1 + 3d_1 - b_2 = 0 \\ 2c_1 + 6d_1 - 2c_2 = 0 \\ b_2 + c_2 + d_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 + c_1 + d_1 = 0 \\ b_1 + 2c_1 + 3d_1 - b_2 = 0 \\ 2c_1 + 6d_1 - 2c_2 = 0 \\ b_2 + c_2 + d_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Reduzco la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$F_2 - F_1$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$F_1 - F_2$
$F_3 - 2F_1$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$F_3/2$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$F_1 + F_3$
$F_2 - 2F_3$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$F_1 - 2F_4$
$F_2 + 3F_4$
$F_3 - F_4$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -6 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} F_2 + 3F_4 \\ F_3 - F_4 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_1 &= -6 + 3c_2 + 2d_2 \\ c_1 &= 9 - 5c_2 - 3d_2 \\ d_1 &= -3 + 2c_2 + d_2 \\ b_2 &= 3 - c_2 - d_2 \end{aligned}}$$