Autoevaluación parcial 1

sábado, 17 de abril de 2021 19:48

1) Sean $u = 0.092$ y $v = 0.008$. Se aproxima el valor de uv utilizando las siguientes aritméticas:

- Sistema de punto flotante con dos decimales, aplicando redondeo.
- Sistema de punto fijo con tres decimales, aplicando redondeo.
- Sistema de punto flotante con dos decimales, aplicando truncamiento.
- Sistema de punto fijo con tres decimales, aplicando truncamiento.

El menor error absoluto se obtiene al usar ________ .

El mayor error absoluto se obtiene al usar ________ .

punto fijo y truncamiento | punto flotante y truncamiento | punto fijo y redondeo | punto flotante y redondeo

$$U = 0.092$$

$$V = 0.008$$

$$U \cdot V = 0.000736$$

$$Fl_{r2}(U) = 0.92 \cdot 10^{-1}$$

$$Fl_{r2}(V) = 0.80 \cdot 10^{-2}$$

$$Fl_{r2}(Fl_{r2}(U) \cdot Fl_{r2}(V)) = Fl_{r2}(0.92 \cdot 10^{-1} \cdot 0.80 \cdot 10^{-2})$$

$$= Fl_{r2}(0.736 \cdot 10^{-3})$$

$$= 0.74 \cdot 10^{-3}$$

error absoluto: $|0.74 \cdot 10^{-3} - 0.000736| = 0.000004$

$$fl_{r3}(u) = 0.092$$

$$fl_{r3}(v) = 0.008$$

$$fl_{r3}(fl_{r3}(u) \cdot fl_{r3}(v)) = fl_{r3}(0.092 \cdot 0.008)$$

$$= fl_{r3}(0.000736)$$

$$= 0.001$$

error absoluto: $|0.001 - 0.000736| = 0.00254$

$$fl_{t2}(u) = 0.92 \cdot 10^{-1}$$

$$fl_{t2}(v) = 0.80 \cdot 10^{-2}$$

$$fl_{t2}(fl_{t2}(u) \cdot fl_{t2}(v)) = fl_{t2}(0.92 \cdot 10^{-1} \cdot 0.80 \cdot 10^{-2})$$

$$= fl_{t2}(0.736 \cdot 10^{-3})$$

$= 0.73 \cdot 10^{-3}$

error absoluto: $|0.73 \cdot 10^{-3} - 0.000736| = 0.000006$

$Fi_{+3}(u) = 0.092$

$Fi_{+3}(v) = 0.008$

$$fi_{+3}(Fi_{+3}(u) \cdot Fi_{+3}(v)) = fi_{+3}(0.092 \cdot 0.008)$$

$$= fl_{+3}(0.000736)$$

$$= 0.000$$

error absoluto: $|0.000 - 0.000736| = 0.000736$

Parcial 2 lab - ej2

lunes, 7 de junio de 2021 19:03

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = 2k(x_2 - x_1) + m_1 g - kx_1,$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_3 - x_2) + m_2 g - 2k(x_2 - x_1),$$

$$m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} = m_3 g - k(x_3 - x_2),$$

Estas ecuaciones sirven para calcular los desplazamientos de las masas como función del tiempo. Si igualamos a cero las derivadas con respecto al tiempo, es decir $\frac{d^2x_i}{dt^2} = 0$ para $i = 1, 2, 3$, y resolvemos el sistema, obtenemos el desplazamiento cuando el sistema llega al reposo.

Plantee el sistema $Kx = w$ con $w = [gm_1, gm_2, gm_3]^T$, correspondiente para encontrar los desplazamientos x_1, x_2 y x_3 en estado de reposo del sistema. Si $g = 9.8$ m/s2, $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 3$ kg, $m_3 = 2.5$ kg , y todas las $k = 10$ kg/s2, use descomposición LU para este propósito.

A partir de la descomposición LU calculada en el item anterior, encuentre la inversa de la matriz K planteando 3 sistemas de ecuaciones. Cada elemento ij de esta matriz nos indica el desplazamiento de la masa i debido a una fuerza unitaria impuesta sobre la masa j, de allí su importancia.

$$\begin{cases} 2K(X_2 - X_1) + m_1 g - K X_1 = 0 \\ K(X_3 - X_2) + m_2 g - 2K(X_2 - X_1) = 0 \\ m_3 g - K(X_3 - X_2) = 0 \end{cases}$$

$$K \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

Hago descomposición LU:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 + 2F_1/3} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 + 3F_2/2} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \xleftarrow{F_2 - 2F_1/3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \xleftarrow{F_3 - 3F_2/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Parcial 2 teórico-práctico

miércoles, 9 de junio de 2021 09:20

1. Dada la siguiente tabla de datos, obtenida experimentalmente, hallar la constante g que relaciona las variables t y d, mediante el modelo $d \approx gt^2/2$ en el sentido de cuadrados mínimos:

t	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
d	0.1960	0.7850	1.7665	3.1405	4.9075

$$\min_g \sum_{i=1}^{5} \left(d_i - \frac{gt_i^2}{2}\right)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g} \sum_{i=1}^{5} \left(d_i - \frac{gt_i^2}{2}\right)^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g} \left(d_i - \frac{gt_i^2}{2}\right)^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{5} 2\left(d_i - \frac{gt_i^2}{2}\right)\left(-\frac{t_i^2}{2}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{5} \left(-t_i^2 d_i + \frac{gt_i^4}{2}\right) = 0$$

$$\frac{g}{2} \sum_{i=1}^{5} t_i^4 = \sum_{i=1}^{5} t_i^2 d_i$$

$$\frac{g}{2}(0.2^4 + 0.4^4 + 0.6^4 + 0.8^4 + 1^4)$$
$$= (0.2^2 0.196 + 0.4^2 0.785 + 0.6^2 1.7665 + 0.8^2 3.1405 + 1^2 4.9075)$$
$$g = \frac{1747}{178}$$

2)

2. Hallar por lo menos una regla de cuadratura de grado de precisión máximo para aproximar $\int_{-3}^{3} f(x)dx$, de las siguientes formas:

a) $A[f(x_0) + f(x_1)]$.

b) $Af(x_0) + Bf(x_0 + 4)$.

2a)
Por teorema, la precisión máxima es 2*n + 1, en este caso 2*1 + 1 = 3

Haga que la igualdad valga para la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$
Osea, para:
$f(x) = 1$
$f(x) = x$
$f(x) = x^2$
$f(x) = x^3$

$$\int_{-3}^{3} 1\,\mathrm{d}x = A(1+1)$$
$$\int_{-3}^{3} x\,\mathrm{d}x = A(x_0 + x_1)$$
$$\int_{-3}^{3} x^2\,\mathrm{d}x = A(x_0^2 + x_1^2)$$
$$\int_{-3}^{3} x^3\,\mathrm{d}x = A(x_0^3 + x_1^3)$$

$$3 - (-3) = 2A$$
$$\frac{9}{2} - \frac{9}{2} = A(x_0 + x_1)$$
$$\frac{27}{3} - \left(-\frac{27}{3}\right) = A(x_0^2 + x_1^2)$$
$$\frac{81}{4} - \frac{81}{4} = A(x_0^3 + x_1^3)$$

$$6 = 2A$$
$$0 = A(x_0 + x_1)$$

$$18 = A(x_0^2 + x_1^2)$$
$$0 = A(x_0^3 + x_1^3)$$

$$A = 3$$
$$0 = 3x_0 + 3x_1$$
$$18 = 3x_0^2 + 3x_1^2$$
$$0 = 3x_0^3 + 3x_1^3$$

$$A = 3$$
$$0 = x_0 + x_1$$
$$6 = x_0^2 + x_1^2$$
$$0 = x_0^3 + x_1^3$$

$$A = 3$$
$$x_0 = -x_1$$
$$6 = (-x_1)^2 + x_1^2$$
$$0 = (-x_1)^3 + x_1^3$$

$$A = 3$$
$$x_0 = -x_1$$
$$6 = 2x_1^2$$

$$A = 3$$
$$x_0 = -\sqrt{3}$$
$$x_1 = \sqrt{3}$$

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \simeq 3\left(f(-\sqrt{3}) + f(\sqrt{3})\right)$$

Teorema:
Sea:
$w(x)$ una función de peso
q de grado $n + 1$
q otrogonal a todo $p \in \mathbb{R}_n[x]$ con respecto a w

$x_0, x_1, \dots, x_n$ las raices de q

$$a_i = \int_a^b w(x) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$\forall f \in \mathbb{R}_{2n+1}[x] : \int_a^b f(x)w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

La función de peso es $w(x) = 1$

$n = 1$

La base ortogonal respecto a w de $\mathbb{R}_3[x]$ es:

$\varphi_0(x) = 1$

$\varphi_1(x) = x$

$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$

Y $\varphi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ es otrogonal a todos los polinomios de $\mathbb{R}_1[x]$

Raices de φ_2:

$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$a_0 = \int_{-3}^{3} \frac{x + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}\,\mathrm{d}x = 3$$

$$a_1 = \int_{-3}^{3} \frac{x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}\,\mathrm{d}x = 3$$

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \simeq 3\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

2b)
Teorema:
Sea:
$w(x)$ una función de peso
q de grado $n+1$
q otrogonal a todo $p \in \mathbb{R}_n[x]$ con respecto a w
$x_0, x_1, \dots, x_n$ las raices de q

$$a_i = \int_a^b w(x) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$\forall f \in \mathbb{R}_{2n+1}[x] : \int_a^b f(x)w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

La función de peso es
Voy a usar los polinomios de Legendre:
$w(x) = 1$
$n = 1$
La base ortogonal respecto a w de $\mathbb{R}_2[x]$, en $[-1,1]$:
$\varphi_0(x) = 1$
$\varphi_1(x) = x$

Y uso como q:

$$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

2b)

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = Af(x_0) + Bf(x_0+4)$$

Haga que la igualdad valga para la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$

Osea, para:

$f(x) = 1$

$f(x) = x$

$f(x) = x^2$

$f(x) = x^3$

$$\int_{-3}^{3} 1\,\mathrm{d}x = A1 + B1$$

$$\int_{-3}^{3} x\,\mathrm{d}x = Ax_0 + B(x_0+4)$$

$$\int_{-3}^{3} x^2\,\mathrm{d}x = Ax_0^2 + B(x_0+4)^2$$

$$\int_{-3}^{3} x^3\,\mathrm{d}x = Ax_0^3 + B(x_0+4)^3$$

$$6 = A + B$$
$$0 = Ax_0 + B(x_0+4)$$
$$18 = Ax_0^2 + B(x_0+4)^2$$
$$0 = Ax_0^3 + B(x_0+4)^3$$

$$6 = A + B$$
$$0 = Ax_0 + Bx_0 + B4$$
$$18 = Ax_0^2 + B(x_0+4)^2$$
$$0 = Ax_0^3 + B(x_0+4)^3$$

$$0 = (6-B)x_0 + Bx_0 + B4$$
$$0 = 6x_0 - Bx_0 + Bx_0 + B4$$
$$0 = 6x_0 + B4$$
$$0 = 3x_0 + 2B$$
$$B = -\frac{3x_0}{2}$$

$$18 = Ax_0^2 + Bx_0^2 + B8x_0 + 16B$$
$$18 = 6x_0^2 - \left(-\frac{3x_0}{2}\right)x_0^2 + \left(-\frac{3x_0}{2}\right)x_0^2 + \left(-\frac{3x_0}{2}\right)8x_0 + 16\left(-\frac{3x_0}{2}\right)$$
$$0 = 6x_0^2 - 12x_0^2 - 24x_0 - 18$$
$$0 = -x_0^2 - 4x_0 - 3$$

$$x_0 = -3$$
$$x_0 = -1$$

$$B = -\frac{3(-3)}{2} = \frac{9}{2}$$
$$B = -\frac{3(-1)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$A = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$$
$$A = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

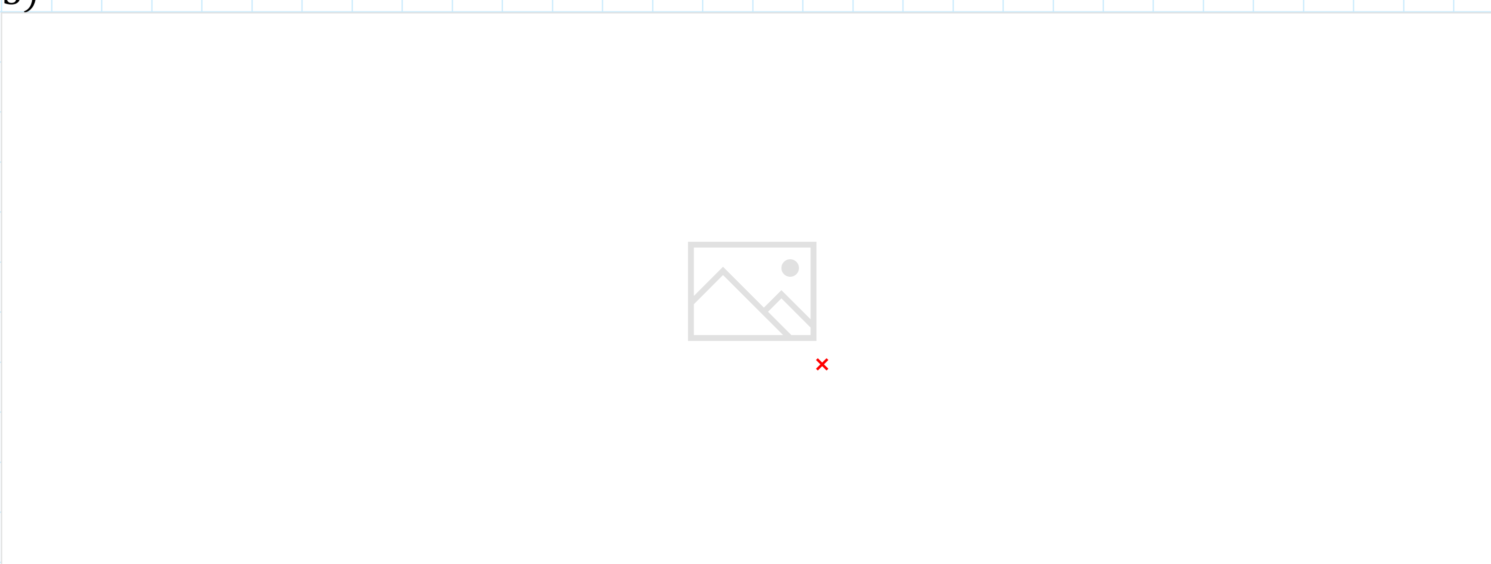
$$x_0 = -3, B = \frac{9}{2}, A = \frac{3}{2}$$
$$x_0 = -1, B = \frac{3}{2}, A = \frac{9}{2}$$

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}f(-3) + \frac{9}{2}f(-3+4)$$
$$\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}f(-1) + \frac{3}{2}f(-1+4)$$

$$0 = \frac{3}{2}(-3)^3 + \frac{9}{2}(-3+4)^3$$
$$0 = -\frac{81}{2} + \frac{9}{2}$$
False

$$0 = \frac{9}{2}(-1)^3 + \frac{3}{2}(-1+4)^3$$
$$0 = -\frac{9}{2} + \frac{81}{2}$$
False

3)



$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + y + z = 1 \\ by + z = 1 \end{cases}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tiene una única solución $\Leftrightarrow$ la matriz asociada es invertible $\Leftrightarrow$ su determinante es no nulo

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix}\right) \neq 0$$

$$1 + 1b0 + 0a1 - 0 * 1 * 0 - 1b1 - 1a1 \neq 0$$

$$1 - b - a \neq 0$$

$$a \neq 1 - b$$

3b)

Por definición, la iteración de Jacovi está dada por:

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}$$

Esto es:

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por teorema:

$$\forall \left(x^{(0)} \in \mathbb{R}^3 : x^{(k)} \text{ converge}\right) \Leftrightarrow \rho(M^{-1}N) < 1$$

Trabajo con esto:

$$\rho\left(\begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}\right) < 1$$

$\Leftrightarrow \{$ Calculo los autovalores de la matríz:

$$\det\left(\begin{bmatrix}-\lambda & -a & 0\\ -1 & -\lambda & -1\\ 0 & -b & -\lambda\end{bmatrix}\right)=0$$
$$(-\lambda)^3-1(-b)0+0(-a)(-1)-0(-\lambda)0-(-1)(-b)(-\lambda)-(-\lambda)(-a)(-1)=0$$
$$-\lambda^3+b\lambda+a\lambda=0$$
$$\lambda(-\lambda^2+b+a)=0$$
$$\lambda=0\ \vee\ \lambda^2=b+a$$
$$\lambda=0\ \vee\lambda=\pm\sqrt{b+a}$$

Dependiendo de los valores de b y a, podría haber autovalores complejos

⦄

$$\max\{0,\left|\sqrt{b+a}\right|,\left|-\sqrt{b+a}\right|\}<1$$
$$\left|\sqrt{b+a}\right|<1$$

$\Leftrightarrow$ ⦃Para autovalores complejos, se toma la norma habitual de $\mathbb{C}$
para calcular el radio espectral.
Con esta norma vale la propiedad $\left|\sqrt{x}\right|=\sqrt{|x|}$

⦄

$$|b+a|<1$$

3b)

Por definición, la iteración de Gauss-Seidel está dada por:

$$x^{(k+1)}=M^{-1}Nx^{(k)}+M^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Donde:

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & b & 1\end{bmatrix}$$
$$N=\begin{bmatrix}0 & -a & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Calculo la inversa de M:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-bF_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & b & -b & 1\end{array}\right)$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ b & -b & 1 \end{bmatrix}$$

Con esto queda la iteración:

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ b & -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ b & -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & -ab & b \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por teorema:

$\left(\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^3 : x^{(k)} \text{ converge}\right) \Leftrightarrow \rho(M^{-1}N) < 1$

Trabajo con esto:

$$\rho\left(\begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & -ab & b \end{bmatrix}\right) < 1$$

$\Leftrightarrow$ ⟦ Calculo los autovalores de la matríz:

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & -a & 0 \\ 0 & a-\lambda & -1 \\ 0 & -ab & b-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$-\lambda\left((a-\lambda)(b-\lambda) - (-1)(-ab)\right) = 0$$

$$\lambda = 0 \lor \lambda^2 - a\lambda - b\lambda + ab - ab = 0$$

$$\lambda = 0 \lor \lambda(\lambda - a - b) = 0$$

$$\lambda = 0 \lor \lambda = a + b$$

⟧

$$\max\{0, |a+b|\} < 1$$

$\Leftrightarrow$

$$|b+a| < 1$$

Parcial 1 2021-6-19

viernes, 2 de julio de 2021 17:56

1. Consideramos la ecuación

$$x - e^{-x} = 0$$

a) Verifica, mediante una representación gráfica, que la ecuación tiene una solución en el intervalo [0, 1].

b) Demuestra que la ecuación tiene una única solución en el intervalo [0, 1].

c) Si usamos el método de la bisección con intervalo inicial [0, 1], ¿cuántas iteraciones nos hacen falta para asegurar 4 decimales exactos?

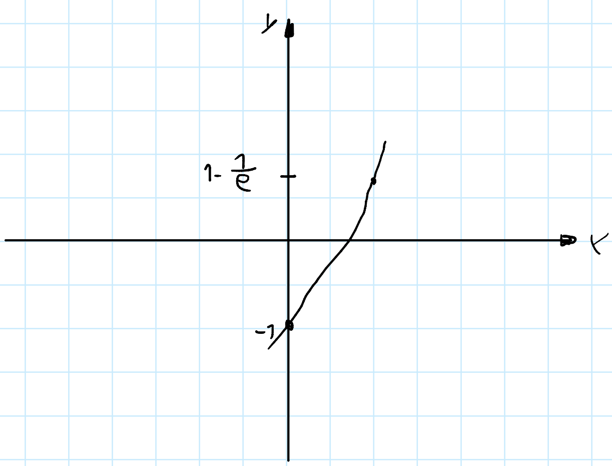
d) Calcula las 5 primeras iteraciones

1a) $x - e^{-x} = 0$

Gráfico $f(x) = x - e^{-x}$

$f(0) = -1 < 0$

$f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$



1b) $f(0) = -1 < 0$

$f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$

$\Rightarrow$ (f es continua)

Hay al menos una raíz en $[0, 1]$

Ahora pruebo que f es crecinte en [0, 1]

$f'(x) = 1 + e^{-x}$

$\Rightarrow \forall x : f'(x) > 0$ ← $1 > 0$, $\forall x : e^{-x} > 0$

$\Rightarrow \forall x \in [0,1] : f'(x) > 0$

$\Rightarrow f$ es creciente en $[0,1]$

$\Rightarrow f$ tiene 1 sola raíz en $[0,1]$ ← ya probé que hay al menos 1

1c) Una presición de $5 \cdot 10^{-5}$

Por teorema:

Bisección empezando en a, b con n iteraciones tiene una presición de $\frac{|b-a|}{2^n}$

Asi que para este caso:

$$\frac{|1-0|}{2^n} \leq 5 \cdot 10^{-5}$$

Busco el n

$$\frac{|1-0|}{2^n} \leq 5 \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{1}{2^n} \leq 5 \cdot 10^{-5}$$

$2^n <$

$$\frac{10^5}{5} \leq 2^n$$

$$n \geq \log_2\left(\frac{10^5}{5}\right)$$

$$n \geq 14.2877\ldots$$

$$\boxed{n \geq 15}$$

d) $f(x) = x - e^{-x}$

$a_0 = 0$: $\quad \operatorname{sgn}(f(0)) = -$

$b_0 = 1$: $\quad \operatorname{sgn}(f(1)) = +$

$$\operatorname{sgn}\left(f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(\tfrac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}}\right) = -$$

$$\Rightarrow a_1 = \tfrac{1}{2},\ b_1 = 1$$

$$\operatorname{sgn}\left(f\left(\tfrac{3}{4}\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(\tfrac{3}{4} - e^{-\frac{3}{4}}\right) = +$$

$$\Rightarrow a_2 = \tfrac{1}{2},\ b_2 = \tfrac{3}{4}$$

$$\operatorname{sgn}\left(f\left(\tfrac{5}{8}\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(\tfrac{5}{8} - e^{-\frac{5}{8}}\right) = +$$

$$\Rightarrow a_3 = \tfrac{1}{2},\ b_3 = \tfrac{5}{8}$$

$$\operatorname{sgn}\left(f\left(\tfrac{9}{16}\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(\tfrac{9}{16} - e^{-\frac{9}{16}}\right) = -$$

$$\Rightarrow a_4 = \tfrac{9}{16},\ b_4 = \tfrac{5}{8}$$

Queda que la raíz está en $\left(\frac{9}{16}, \frac{5}{8}\right)$

2)

2a) $\alpha \geq 1$

$f(x) = x^{\alpha}$

$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$

Por ende la iteración de Newton es:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^{\alpha}}{\alpha x_n^{\alpha-1}} \\
&= x_n - \frac{1}{\alpha} x_n^{\alpha-(\alpha-1)} \\
&= x_n - \frac{1}{\alpha} x_n \\
&= x_n \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

Inductivamente se puede concluir que:

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^n x_0$$

Calculó el límite dividiendo en casos de $\alpha > 1$ y $\alpha = 1$:

Caso $\alpha > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^n x_0$$

$= \{\!\{\alpha > 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\alpha} \in (0,1)\}\!\}$

$0x_n$

$=$

0

Caso $\alpha = 1$:

$\lim_{n\to\infty} x_n$

$=$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{1}\right)^n x_0$

$=$

$\lim_{n\to\infty} 0^n x_0$

$=$

0

Por ende, en el caso $\alpha \geq 1$ el metodo de newton converge a 0

2b) $\alpha = \frac{1}{3}$

$\lim_{n\to\infty} x_n$

$=$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^n x_0$

$=$

$\lim_{n\to\infty} (-2)^n x_0$

Esto no converge, por lo tanto, si $\alpha = \frac{1}{3}$ el metodo de Newton diverge

2c) $\alpha = \frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty} x_n$

$=$

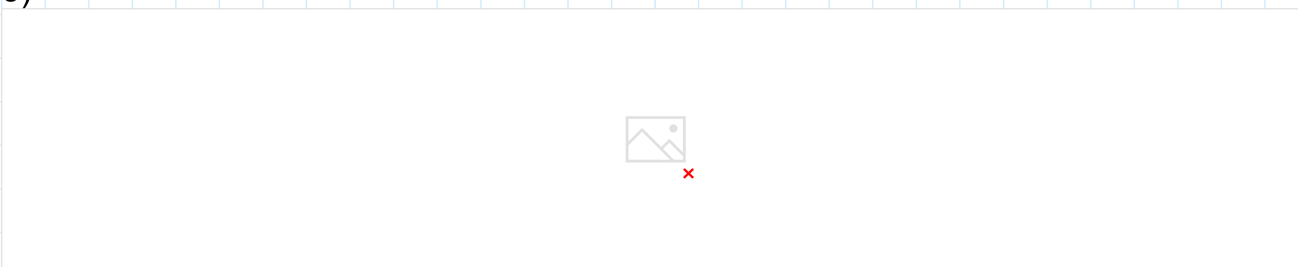
$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^n x_0$

$=$

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n x_0$

Esto no converge (se queda pasando de x_0 a $-x_0$), por ende, si $\alpha = \frac{1}{2}$ el metodo de Newton diverge

3)



Sea:

$$p(x) = a_1 + b_1 x - 4x^2 \quad \Rightarrow \quad p'(x) = b_1 - 8x$$

$$q(x) = a_2 + b_2(x-1) + c_2(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad q'(x) = b_2 + 2c_2(x-1)$$

Para que sea un spline cuadrático que qué interpole a f en $\left\{0, \frac{1}{2}, 2\right\}$ tiene que cumplirse:

$$\begin{cases} p(1) = q(1) \\ p'(1) = q'(1) \\ s(0) = f(0) \\ s\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \\ s(2) = f(2) \end{cases}$$

Trabajo con esto:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 - 4 = a_2 \\ b_1 - 8 = b_2 \\ a_1 = 2 \\ a_1 + b_1 \frac{1}{2} - 4 \frac{1}{2^2} = 1 \\ a_2 + b_2 + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = 2$$

$$b_1 = 2 \cdot (2 - 1 \cdot 2) = 0$$

$$a_2 = -(4 - 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2) = -2$$

$$b_2 = -(8 - 1 \cdot 0) = -8$$

$$c_2 = 0 - (1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-8)) = 10$$

Entonces queda:

$$s(x) = \begin{cases} 2 + 0\,x - 4x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ -2 + (-8)(x-1) + 10\,(x-1)^2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 - 4x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ -2 - 8(x-1) + 10\,(x-1)^2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

🛠️ Parcial 2 2021-6-19

viernes, 23 de julio de 2021 16:04

1. Ajustar los datos de la tabla siguiente mediante una parábola por el método de mínimos cuadrados.

x_i	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

Tengo que encontrar un ajuste de la forma $a + bx + cx^2$

Por teorema del teorico de ajuste por cuadrados mínimos de polinomios:

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{4} x_j^0 & \sum_{j=0}^{4} x_j^1 & \sum_{j=0}^{4} x_j^2 \\ \sum_{j=0}^{4} x_j^1 & \sum_{j=0}^{4} x_j^2 & \sum_{j=0}^{4} x_j^3 \\ \sum_{j=0}^{4} x_j^2 & \sum_{j=0}^{4} x_j^3 & \sum_{j=0}^{4} x_j^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{4} x_j^0 y_j \\ \sum_{j=0}^{4} x_j^1 y_j \\ \sum_{j=0}^{4} x_j^3 y_j \end{bmatrix}$$

Trabajo con esto:

(sumatorias calculadas con calculadora)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2.5 & 1.875 \\ 2.5 & 1.875 & 1.5625 \\ 1.875 & 1.5625 & 1.3828125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.768 \\ 5.4514 \\ 4.4015375 \end{bmatrix}$$

2)

2. Hallar una regla de cuadratura de la forma

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx Af(-2) + Bf(0) + Cf(2),$$

del grado máximo posible.

Voy haciendo que vaya valiendo la igualdad
para los polinomios de la base canonica

$\underline{f(x) = 1}$

$$\int_{-1}^{1} 1\, dx = A\,1 + B\,1 + C\,1$$

$$2 = A + B + C$$

$$B = 2 - A - C$$

$\underline{f(x) = x}$

$$\int_{-1}^{1} x\, dx = A(-2) + B\,0 + C\,2$$

$$0 = -2A + 2C$$

$$0 = -A + C$$

$\underline{f(x) = x^2}$

$$\int_{-1}^{1} x^2\, dx = A(-2)^2 + B\,0^2 + C\,2^2$$

$$\frac{2}{3} = 4A + 4C$$

De x y x^2 se tiene:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$) F_2 + 4F_1$

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$F_2 + 4F_1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$$

$$A = -\left(0 - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \quad B = 2 - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{11}{6}$$

Queda entonces:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{12} f(-2) + \frac{11}{6} f(0) + \frac{1}{12} f(2)$$

3)

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$Av = b$$

La iteración de Jacobi esta dada por:

$$x^{(k+1)} = M^{-1} N x^{(k)} + M^{-1} b$$

Donde $M = \text{diagonal}(A)$

$N = -(A - M)$

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -70 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

🛠️ Final 2019-12-18

miércoles, 23 de junio de 2021 19:05

1. Considere un software que trabaja con el sistema de punto flotante con base 10 y 3 dígitos decimales (usando redondeo). Dé un ejemplo de tres números x, y, z tales que

$$(x+y)+z=x \quad \text{y} \quad x+(y+z)>x.$$

$x = 0.1 \cdot 10^{1}$

$y = 0.4 \cdot 10^{-2}$

$z = 0.4 \cdot 10^{-2}$

$$x+y = fl(0.1 \cdot 10^{1} + 0.4 \cdot 10^{-2})$$
$$= fl(1 + 0.004)$$
$$= fl(1.004)$$
$$= 0.1 \cdot 10^{1}$$

$$(x+y)+z = fl(0.1 \cdot 10^{1} + 0.4 \cdot 10^{-2})$$
$$= 0.1 \cdot 10^{1}$$

Misma cuanta que en x + y

$\Rightarrow \; x = (x+y)+z$

$$y+z = fl(0.4 \cdot 10^{-2} + 0.4 \cdot 10^{-2})$$
$$= fl(0.8 \cdot 10^{-2})$$
$$= 0.8 \cdot 10^{-2}$$

$$x+(y+z) = fl(0.1 \cdot 10^{1} + 0.8 \cdot 10^{-2})$$
$$= fl(1 + 0.008)$$
$$= fl(1.008)$$
$$= 0.101 \cdot 10^{1}$$

$\Rightarrow \; x < x+(y+z)$

2)

2a) Es falso:

Para $F(x) = x + 1$ no se cumple

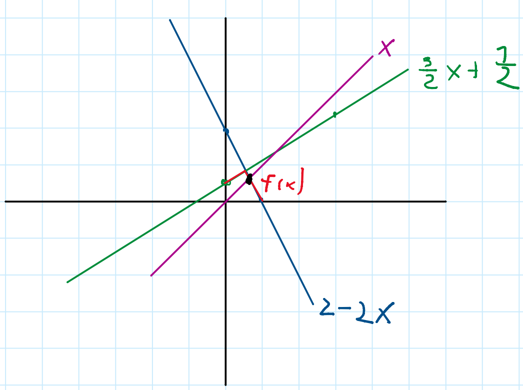
2b) Es verdadero:

Por terema de exsistencia del punto fijo:

$F([a,b]) \subseteq [a,b] \Rightarrow f$ tiene un punto fijo en $[a,b]$

2c) $F(x) = \min\{\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}, 2 - 2x\}$

$I = [0, 1]$



Si hay. Es verdadero

Sea:
$f \in C^{2n+2}[x_0, x_n]$
$x_0 < x_1 < \cdots < x_n$
$p \in \mathbb{R}[2n+1]$
$\forall k \in \{0, \dots, n\} : p(x_k) = f(x_k) \wedge p'(x_k) = f'(x_k)$
$x \in [x_0, x_n]$

$$\exists \eta \in (x_0, x_n) : f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)^2$$

Demostración:

Divido en casos:

Caso $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, trabajo sin el $\exists$:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)^2$$

$\Leftrightarrow$ ⟦$p(x_k) = f(x_k)$, uno de los terminos de la $\prod$ se vuelve 0⟧

$$0 = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} 0$$

$\Leftrightarrow$

$$0 = 0$$

Caso $x \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$:
Sea:

$$w(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\prod_{k=0}^{n} (x - x_k)^2} \prod_{k=0}^{n} (t - x_k)^2$$

w está bien definida en $[x_0, x_n]$, ya que f lo está, y $\prod_{k=0}^{n} (x - x_k)^2$ es no nulo, porque $x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Hago varias demostraciones sobre esta función:

1 $x_0, x_1, \dots, x_n$ son raices de w

Demostración:
Sea $j \in \{0, \dots, n\}$:

$$w(x_j)$$

$$= f(x_j) - p(x_j) - \frac{f(x)-p(x)}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2}\prod_{k=0}^{n}(x_j - x_k)^2$$

$= \{p(x_k) = f(x_k)$, uno de los terminos de la $\prod$ se vuelve $0\}$

$$0 - \frac{f(x)-p(x)}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2}0$$

$$= 0$$

② x es una raíz de w

Demostración:

$$\begin{aligned} & w(x) \\ = \; & f(x) - p(x) - \frac{f(x)-p(x)}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2 \\ = \; & f(x) - p(x) - \big(f(x) - p(x)\big) \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

③ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son raices de w'

Demostración:
Primero calculo w':

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2}\prod_{k=0}^{n}(t-x_k)^2\right) \\ = \; & f'(t) - p'(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\prod_{k=0}^{n}(t-x_k)\right)^2 \\ = \; & f'(t) - p'(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2}2\prod_{k=0}^{n}(t-x_k)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\prod_{k=0}^{n}(t-x_k) \end{aligned}$$

Ahora sea $j \in \{0, \ldots, n\}$:

$$w'(x_j)$$

$$= f'(x_j) - p'(x_j) - \frac{f(x)-p(x)}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2}2\prod_{k=0}^{n}(x_j - x_k)\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\prod_{k=0}^{n}(t-x_k)\right)\bigg| t=0\right)$$

$= \{p'(x_k) = f'(x_k)$, uno de los terminos de la segunda $\prod$ se vuelve $0\}$

$$0 - \frac{f(x)-p(x)}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2}2 * 0\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\prod_{k=0}^{n}(t-x_k)\right)\bigg| t=0\right)$$

$$= 0$$

④ w' tiene al menos $2n+2$ raices en $[x_0, x_1]$

Desmotración:

$x_0, x_1, \dots, x_n$ son $n+1$ raices de w' por ③. Ademas, como $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ son $n+2$ raices de w (por ① y ②) por el teorema de Rolle, w' tiene $n+1$ raices distintas de $x, x_0, x_1, \dots, x_n$, por lo cuál w' tiene al menos $2n+2$ raices

Parto de ④:

w' tiene $2n+2$ raices en $[x_0, x_1]$

$\Rightarrow$ ⟦Teorema generalizado de Rolle⟧

$w^{(1+2n+1)}$ tiene 1 raíz en $[x_0, x_1]$

$\Rightarrow$

$\exists \eta \in [x_0, x_n] : w^{(2n+2)}(\eta) = 0$

$\Rightarrow$ ⟦Calculo la derivada $2n+2$ de w

$$\frac{\mathrm{d}^{(2n+2)}}{\mathrm{d}^{(2n+2)}t}\left(f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2}\prod_{k=0}^{n}(t-x_k)^2\right)$$

$= ⟦p \in \mathbb{R}[2n+1] \Rightarrow\ p^{(2n+2)} = 0⟧$

$$f^{(2n+2)}(t) - 0 - \frac{f(x)-p(x)}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2}\frac{\mathrm{d}^{(2n+2)}}{\mathrm{d}^{(2n+2)}t}\prod_{k=0}^{n}(t-x_k)^2$$

$=$ ⟦En la productora solo queda el coeficiente de $t^{(2n+2)}$, el cuál es 1⟧

$$f^{(2n+2)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2} 1 * (2n+2)!$$

$=$

$$f^{(2n+2)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2}(2n+2)!$$

⟧

$$\exists \eta \in [x_0, x_n] :\ f^{(2n+2)}(\eta) - \frac{f(x)-p(x)}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2}(2n+2)! = 0$$

$\Rightarrow$

$$\exists \eta \in [x_0, x_n] :\ f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2$$

4)

Final 2020-12-16

miércoles, 30 de junio de 2021 09:47

1. Considere la regla de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(\alpha) + f(-\alpha).$$

(a) ¿Para qué valores de α (si existe) esta fórmula es exacta para polinomios de grado menor o igual a 1.

(b) ¿Para qué valores de α (si existe) esta fórmula es exacta para polinomios de grado menor o igual a 3.

(c) ¿Para qué valores de α (si existe) esta fórmula es exacta para polinomios de la forma $a + bx + cx^3 + dx^4$?

1a)

Para ser exacta tiene que valer para la base canonica, osea para $f(x) = 1$ y $f(x) = x$

$F(x) = 1$

$$\int_{-1}^{1} 1\, dx = 1 + 1$$

$$2 = 2$$

No restringe los valores de α

$F(x) = x$

$$\int_{-1}^{1} x\, dx = \alpha - \alpha$$

$$0 = 0$$

Tampoco restringe los valores de α

⇒

La formula es exacta para polinomios de grado 1 sin importar el valor de α

1b) Ahora hago que valga para $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^3$

$$\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \alpha^2 + (-\alpha)^2$$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \alpha^2 + (-\alpha)^2$$

$$\frac{2}{3} = 2\alpha^2$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \alpha^3 + (-\alpha)^3$$

$$0 = 0$$

$\Rightarrow$

La formula es exacta para polinomios de grado 3 $\Leftrightarrow \alpha = \pm 1/\sqrt{3}$

c) $f(x) = a + bx + cx^3 + dx^4$

$$\int_{-1}^{1} (a + bx + cx^3 + dx^4)\,dx = (a + b\alpha + c\alpha^3 + d\alpha^4) + (a - b\alpha - c\alpha^3 + d\alpha^4)$$

$$\left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{d}{5}\right) - \left(-a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} - \frac{d}{5}\right) = 2a + 2d\alpha^4$$

$$2a + 2\frac{d}{5} = 2a + 2d\alpha$$

$$0 = \left(2\alpha - \frac{2}{5}\right) d$$

$$d = 0 \quad \vee \quad 2\alpha - \frac{2}{5} = 0$$

$$d = 0 \quad \vee \quad \alpha = \frac{1}{5}$$

$\Rightarrow$

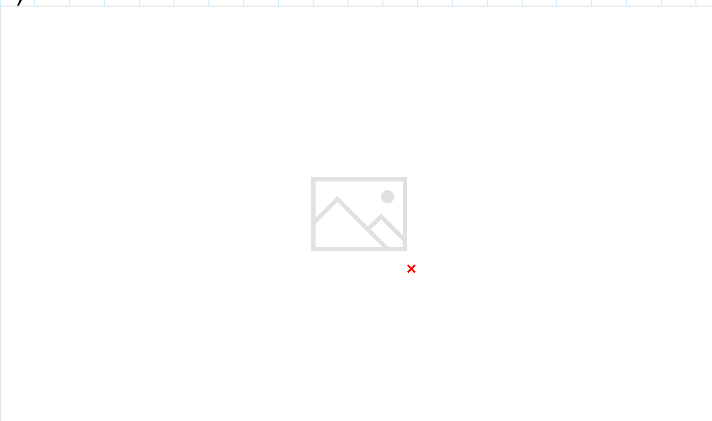
Si $d = 0$:

La formula es exacta si importar el valor de α

Si $d \neq 0$:

La formula es exacta $\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{5}$

2)



a)

$$P(t) = P_0 \, e^{k(t-2016)}$$

$$\ln(P(t)) = \ln(P_0) + k(t-2016)$$

Por teorema:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0+1+2+3 \\ 0+1+2+3 & 0^2+1^2+2^2+3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln(P_0) \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(2981)+\ln(4915)+\ln(8103)+\ln(17155) \\ 0+\ln(4915)+2\cdot\ln(8103)+3\cdot\ln(17155) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln(P_0) \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(2981)+\ln(4915)+\ln(8103)+\ln(17155) \\ \ln(4915)+2\ln(8103)+3\ln(17155) \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{8181783846576825}{26039908024603}\right)}{10} \simeq 0.575$$

$$\ln(P_0) = \frac{\ln\left(\frac{5420144825941184006039817033391457347275}{161257}\right)}{10}$$

$$P_0 = \frac{47^{\frac{4}{5}} \cdot 73^{\frac{9}{10}} \cdot 983^{\frac{2}{5}} \cdot 2981^{\frac{7}{10}} \sqrt[5]{5} \sqrt[10]{111}}{3431} \simeq 2835.62784$$

Queda:

$$P(t) = \frac{47^{\frac{4}{5}} \cdot 73^{\frac{9}{10}} \cdot 983^{\frac{2}{5}} \cdot 2981^{\frac{7}{10}} \sqrt[5]{5} \sqrt[10]{111}}{3431} e^{\frac{\ln\left(\frac{8181783846576825}{26039908024603}\right)}{10}(t-2016)}$$

$$P(t) \simeq 2835.62784 \, \mathrm{e}^{0.575(t-2016)}$$

b)

$$P(2019) \simeq 2835.62784 \, \mathrm{e}^{0.575(2019-2016)} \simeq 15915.02088$$

c)
Quero interpolar con un polinomio de grado 2:
$(2017{,}4915), (2018{,}8103), (2019{,}17155)$

Hago la tabla de diferencias divididas:

2017	4915		
		3188	
2018	8103		2932
		9052	
2019	17155		

Polinomio:

$$q(x) = 4915 + 3188\,(x-2017) + 2932\,(x-2017)(x-2018)$$

$q(x) = 4915 + 3188(x - 2017) + 2932(x - 2017)(x - 2018)$

$q(2016) = 4915 + 3188(-1) + 2932(-1)(-2) = 7591$

Es una mala estimación, por varios motivos:
- Se están tomando solo algunos de los puntos
- Se está tratando de usar un polinomio para aproximar algo con forma de exponencial

Parte teórica:

Final 2021-2-10

martes, 27 de julio de 2021 09:53

1)

1. Encuentre una aproximación de $\sqrt{3}$ que sea correcta con una exactitud de 10^{-3} usando el algoritmo de bisección y el método de Newton. Justificar sin calcular el valor real de $\sqrt{3}$.

El método de bisección tiene una presición de $\frac{|b_0-a_0|}{2^{n+1}}$

Uso la función x^2-3, ya que $(\sqrt{3})^2 - 3 = 0$

$\sqrt{3}$ está entre 1 y 2, así que empiezo con $a_0 = 1, b_0 = 2$

Calculo el n:

$$\frac{|2-1|}{2^{n+1}} \geqslant 10^{-3}$$

$$\frac{10^3}{2} \leqslant 2^n$$

$$n \geqslant \log_2(5 \cdot 10^2)$$

$$n \geqslant 8.965\ldots$$

$$n \geqslant 9$$

Osea que tengo que hacer 10 iteraciones

$a_0 = 1, \quad b_0 = 2$

x^2-3

$\operatorname{sgn}(f(1)) = \operatorname{sgn}(1^2-3)$

$= -$

$\operatorname{sgn}(f(2)) = \operatorname{sgn}(1)$

$= +$

$\operatorname{sgn}(f(1.5)) = -$

$\Rightarrow a_1 = 1.5, \quad b_1 = 2$

$\operatorname{sgn}(f(1.75)) = +$

$\Rightarrow a_2 = 1.5, \quad b_2 = 1.75$

$\operatorname{sgn}(f(1.625)) = -$

$\Rightarrow a_3 = 1.625, \quad b_3 = 1.75$

$\operatorname{sgn}(f(1.6875)) = -$

$\Rightarrow a_4 = 1.6875,\ b_4 = 1.75$

$sgn(f(1.71875)) = -$

$\Rightarrow a_5 = 1.71875,\ b_5 = 1.75$

$\vdots$

Con Newton:

$f(x) = x^2 - 3$

$f'(x) = 2x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$x_0 = 2$

$$x_1 = 2 - \frac{2^2 - 3}{2 \cdot 2} = 1.75$$

$$x_2 = 1.75 - \frac{1.75^2 - 3}{2 \cdot 1.75} = 1.6953125$$

$$x_3 = x_3 - \frac{x_3^2 - 3}{2 \cdot x_3} = 1.7324877\ldots$$

2)

Sea

$p(x) = ax^3 + cx$

$q(x) = -ax^3 + bx^2 - 5cx + 1$

$p'(x) = 3ax^2 + c$

$p''(x) = 6ax$

$q'(x) = -3ax^2 + 2bx - 5c$

$q''(x) = -6ax + 2b$

Por definición de spline, para que s sea un spline cubico necesito que:

$$\begin{cases} p(1) = q(1) \\ p'(1) = q'(1) \\ p''(1) = q''(1) \end{cases}$$

Trabajo con esto:

$$\begin{cases} a + c = -a + b - 5c + 1 \\ 3a + c = -3a + 2b - 5c \\ 6a = -6a + 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - b + 6c = 1 \\ 6a - 2b + 6c = 0 \\ 12a - 2b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Redusco la matríz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 6 & 1 \\ 6 & -2 & 6 & 0 \\ 12 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_1 - F_3/2]{F_2 - F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 6 & 1 \\ -6 & 0 & 6 & 0 \\ 12 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 6 & 0 \\ 12 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \\ 12 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{0 - (-6) \cdot \frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{0 - 12 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 3$$

Queda entonces:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2} x & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} x^3 + 3 x^2 - \frac{5}{2} x + 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Ahora veo si s interpola a f en $\{0,1,2\}$

$$f(x) = 2^x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x - 1$$

$$f(0) = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$f(1) = 2^1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = 1$$

$$f(2) = 2^2 + \frac{1}{2} 4 - \frac{1}{2} 2 - 1 = 4 + 2 - 1 - 1 = 4$$

$s(0) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}0 = 0$

$s(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$s(2) = -\frac{1}{2}2^3 + 3 \cdot 2^2 - \frac{5}{2}2 + 1 = -4 + 12 - 5 + 1 = 4$

$\Rightarrow f(0) = s(0) \wedge f(1) = s(1) \wedge f(2) = s(2)$

$\Rightarrow$ s interpola a f en $\{0, 1, 2\}$

Parte teórica:

1) La definición de combergencia cuadratica es:

$\{x_n\}$ comberge cuadraticamente a z

$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_{>0}, N \in \mathbb{N} : (\forall n \geq N : |x_{n+1} - z| \leq c|x_n - z|^2)$

9) La definición de presición de una regla es:

Una regla tiene presición n

$\Leftrightarrow$ integra exactamente a $1, x, x^2, \dots, x^n$

Final 2021-2-24

viernes, 23 de julio de 2021 19:33

1)

1. Para cinco instantes de tiempo se un experimento se registró la siguiente tabla:

t	-2	-1	0	1	2
u	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2

Mostrar que si los datos se ajustan mediante cuadrados mínimos por una función cuadrática $\Psi(t)$, la aproximación en $t=0$ es dada por:

$$\Psi(0) = \frac{1}{35}(-3u_{-2} + 12u_{-1} + 17u_0 + 12u_1 - 3u_2)$$

Los datos se ajustan de la forma:

$$\psi(t) = a + bx + cx^2$$

Y se minimiza:

$$\sum_{j=-2}^{2} (u_j - \psi(j))^2$$

Para que esté en un mínimo las derivadas parciales con respecto a a, b y c tienen que ser 0. Trabajo con eso:

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{j=-2}^{2} (u_j - \psi(j))^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=-2}^{2} \frac{\partial}{\partial a} (v_j - a - bj - cj^2)^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=-2}^{2} 2(v_j - a - bj - cj^2)(-1) = 0$$

$$\Longleftrightarrow V_{-2} - a + \cancel{2b} - 4c + V_{-1} - a + \cancel{b} - c + v_0 - a + V_1 - a - \cancel{b} - c + V_2 - a - \cancel{2b} - 4c = 0$$

$$\Longleftrightarrow -5a - 10c + V_{-2} + V_{-1} + V_0 + V_1 + V_2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow c = (V_{-2} + V_{-1} + V_0 + V_1 + V_2 - 5a)\frac{1}{10}$$

$$\Longleftrightarrow c = (V_{-2} + V_{-1} + V_0 + V_1 + V_2)\frac{1}{10} - \frac{1}{2}a$$

$$\frac{\partial}{\partial c} \sum_{j=-2}^{2} (u_j - \psi(j))^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=-2}^{2} \frac{\partial}{\partial c} (v_j - a - bj - cj^2)^2 = 0$$

Por acá sin darme cuanta empecé a poner v en lugar de u 🤦‍♂️

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=-2}^{2} 2(v_j - a - bj - cj^2)(-j^2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (V_{-2} - a + \cancel{2b} - 4c)(-4) + (V_1 - a + \cancel{b} - c)(-1) + (V_1 - a - \cancel{b} - c)(-1) + (V_2 - a - \cancel{2b} - 4c)(-4) = 0$$

$$\Longleftrightarrow 10a + 34c - 4V_{-2} - V_{-1} - V_1 - 4V_2 = 0$$

$$\iff 10a + 34\left(\left(v_{-2} + v_{-1} + v_0 + v_1 + v_2\right)\frac{1}{10} - \frac{1}{2}a\right) - 4v_{-2} - v_{-1} - v_1 - 4v_2 = 0$$

$$\iff 10a - 17a + \frac{1}{5}\left(-3v_{-2} + 12v_{-1} + 17v_0 + 12v_1 - 3v_2\right)$$

$$\iff a = \frac{1}{35}\left(-3v_{-2} + 12v_{-1} + 17v_0 + 12v_1 - 3v_2\right)$$

Ahora calculo $\Psi(0)$:

$$\Psi(0) = a + b0 + c0^2$$
$$= a$$
$$= \frac{1}{35}\left(-3v_{-2} + 12v_{-1} + 17v_0 + 12v_1 - 3v_2\right)$$

2)

2a)

La definición de a iteración de Gauss-Seidel asociada a $Ax = b$ es:

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

Donde:

$M = \text{trianguloInferior(A)}$

$N = -\text{trianguloSuperiorEstricto(A)}$

En este caso:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculo M^{-1}:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2/8]{F_1/3} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

$$X^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} X^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

2 b) Por teorema, la sucesión converge para todo $x^{(0)}$ si y solo si:

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

En este caso:

$$M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Calculo los autovalores:

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} - \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(-\lambda)\left(\frac{1}{4} - \lambda\right) - 0 = 0$$

$$\lambda\left(\frac{1}{4} - \lambda\right) = 0$$

$$\lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ $\rho(M^{-1}N) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$

La suseción converge para todo $x^{(0)}$

3)

Por teorema sobre el error ($E(n)$):

$$\exists t \in (a,b) : E(n) = -\frac{b-a}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 f''(t)$$

En este caso:

$b = 1$

$a = 0$

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x)$$

$$= -2x\,e^{-x^2}$$

$$f''(x) = -2\left(e^{-x^2} + x\,e^{-x^2}(-2x)\right)$$

$$= (-2 + 2x^2)\,e^{-x^2}$$

$$= 2(2x^2 - 1)\,e^{-x^2}$$

Ahora trabajo con la formula del error:

$$\exists t \in (0,1) \ : \ E(n) = -\frac{1-0}{12}\left(\frac{1-0}{n}\right)^2 2\,(2t^2 - 1)\,e^{-t^2}$$

$$\Rightarrow \exists t \in (0,1) \ : \ |E(n)| = \left|\frac{(2t^2-1)\,e^{-t^2}}{6n^2}\right|$$

$$\Downarrow \left|\begin{array}{l}
0 < t < 1 \\
\Rightarrow 0 < t^2 < 1 \\
\Rightarrow 0 < 2t^2 < 2 \quad \wedge \quad -1 < -t^2 < 0 \\
\Rightarrow -1 < 2t^2 - 1 < 1 \quad \wedge \quad e^{-1} < e^{-t^2} < e^0 \\
\Rightarrow |2t^2 - 1| < 1 \quad \wedge \quad \frac{1}{e} < e^{-t^2} < 1 \qquad 0 < \frac{1}{e} < 1 \\
\Rightarrow |(2t^2-1)\,e^{-t^2}| < 1
\end{array}\right.$$

$$|E(n)| < \frac{1}{6n^2}$$

Ahora busco el n:

$$|E(n)| \leq \frac{10^{-6}}{2}$$

$$\Leftarrow \frac{10^{-6}}{2} < \frac{1}{6n^2}$$

$$n^2 > \frac{10^6}{3}$$

$$n > \sqrt{\frac{10^6}{3}}$$

$$n > \frac{10^3}{\sqrt{3}}$$

$$n > 577.35027\ldots$$

$$n \geq 578$$

Osea que hace falta que $N = 578$

Final 2021-3-10

jueves, 22 de julio de 2021 14:14

1. Un vendedor prepara combos de regalo de tres modelos distintos para vender durante el día. El combo A incluye un peluche, 6 bombones y una rosa, y se vende por \$1000. El combo B incluye un peluche y 24 bombones, y se vende por \$2000. El combo C incluye 18 bombones y 6 rosas, y se vende por \$800. Tiene un stock de 16 peluches, 240 bombones y 15 rosas.

   a. El vendedor quiere preparar las cantidades de cada combo que maximice sus ganancias. Determinar cuáles son las incógnitas y cuál es la función objetivo del problema.

   b. Escribir las restricciones del problema.

   c. Escribir el problema de programación lineal en forma estándar, y construir la matriz de simplex asociada (sin resolver).

a)
Las incógnitas son la cantidad de cada combo que se deben preparar, las voy a llamar a, b y c respectivamente.
La función objetivo es:

$$1000a + 2000b + 800c$$

b)

maximisar $1000a + 2000b + 800c$

sujeto a:

$$1 \cdot a + 1 \cdot b + 0c \leq 16$$

$$6a + 24b + 18c \leq 240$$

$$1 \cdot a + 0b + 6c \leq 15$$

$$a, b, c \geq 0$$

c) Llevo el problema a la forma estandar:

$$a + b \leq 16$$

$$\equiv \exists s_0 \geq 0 : \quad a + b + s_0 = 16$$

$$6a + 24b + 18c \leq 240$$

$$\equiv \exists s_1 \geq 0 : \quad 6a + 24b + 18c + s_1 = 240$$

$$a + c \leq 15$$

$$\equiv \exists s_2 \geq 0 : \quad a + c + s_2 \leq 15$$

Queda la forma estandar:

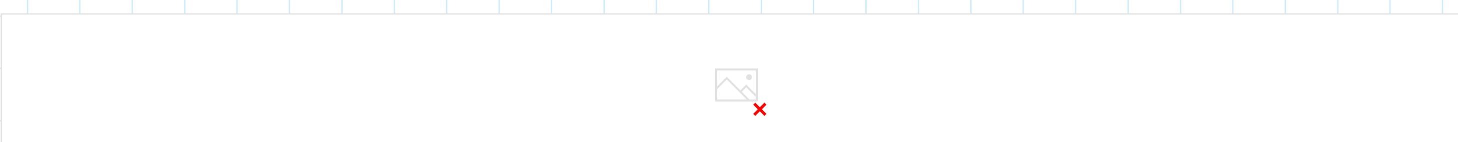
minimizar $-1000a - 2000b - 800c$

sujeto a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 24 & 18 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 240 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$a, b, c, s_0, s_1, s_2 \geq 0$$

2)



$$f(x) = \cos(2\pi x) - 2x$$

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 1$$

$$\operatorname{sgn}(f(0)) = \operatorname{sgn}(\cos(0) - 0) = \operatorname{sgn}(1)$$
$$= +$$

$$\operatorname{sgn}(f(1)) = \operatorname{sgn}(\cos(2\pi) - 2) = \operatorname{sgn}(-2)$$
$$= -$$

$$\operatorname{sgn}(f(\tfrac{1}{2})) = \operatorname{sgn}(\cos(2\pi \tfrac{1}{2}) - 2\tfrac{1}{2}) = \operatorname{sgn}(\cos(\pi) - 1)$$
$$= -$$

$$\Rightarrow a_1 = 0, \quad b_1 = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sgn}(f(\tfrac{1}{4})) = \operatorname{sgn}(\cos(\tfrac{\pi}{2}) - \tfrac{1}{2}) = \operatorname{sgn}(-\tfrac{1}{2})$$
$$= -$$

$$\Rightarrow a_2 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{sgn}(f(\tfrac{1}{8}) = \operatorname{sgn}(\cos(\tfrac{\pi}{4}) - \tfrac{1}{4})$$
$$= +$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{1}{8}, \quad b_3 = \frac{1}{4}$$

Puedo asegurar que la raíz está en $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

3)

Para determinar el grado de precisión de una regla, hay que ver hasta que elemento de la base canonica de $\mathbb{R}[x]$ (polinomios) vale:

$\underline{f(x) = 1}$

$$\int_0^2 1 \, dx \stackrel{?}{=} \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3} f(1) + \frac{1}{3} f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}$$

$$2 \stackrel{?}{=} 2$$

True

La regla es exacta para polinomios de grado 0

$\underline{f(x) = x}$

$$\int_0^2 x\,dx \stackrel{?}{=} \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{4}{3}1 + \frac{1}{3}\frac{3}{2}$$

$$\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}$$

$$2 \stackrel{?}{=} \frac{1+8+3}{6}$$

$$2 \stackrel{?}{=} 2$$

True

La regla es exacta para polinomios de grado 1

$\underline{f(x) = x^2}$

$$\int_0^2 x^2\,dx \stackrel{?}{=} \frac{1}{3}\frac{1}{2^2} + \frac{4}{3}1^2 + \frac{1}{3}\frac{3^2}{2^2}$$

$$\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \stackrel{?}{=} \frac{1}{12} + \frac{4}{3} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{8}{3} \stackrel{?}{=} \frac{1+16+9}{12}$$

$$\frac{8}{3} \stackrel{?}{=} \frac{13}{6}$$

False

La regla no es exacta para polinomios de grado 2

$\Rightarrow$

El grado de presición de la regla es 1

Final 2021-7-5

martes, 13 de julio de 2021 11:02

1. Si se aplica la regla de Simpson compuesta a la integral $\int_1^x \frac{1}{t}dt$ para obtener una aproximación de $log(2)$, determinar el número de subintervalos a considerar para que el error cometido en esa aproximación sea menor que 10^{-3}.

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln(|t|)\Big|_{t=1}^{t=x}$$
$$= \ln(|x|) - \ln(|1|)$$
$$= \ln(|x|) - 0$$
$$= \ln(|x|)$$

$$\Rightarrow \ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$$

Por teorema:
Cuando se aproximar con la regla de Simpson con n sub-intervalos en (a, b) es:

$$-\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\mu)$$
Para algún $\mu \in (a, b)$

En este caso $(a, b) = (1,2)$, $f(\mu) = \frac{1}{\mu}$, calculo $f^{(4)}$:

$$f'(\mu) = -\frac{1}{\mu^2}$$

$$f''(\mu) = 2\,\frac{1}{\mu^3}$$

$$\mu^3$$

$$f'''(\mu) = -6\,\frac{1}{\mu^4}$$

$$f^{(4)}(\mu) = 24\,\frac{1}{\mu^5}$$

Trabajo con esto, acotando el error con 10^{-3}. A mi me interesa el valor absoluto:

$$\left| -\frac{(b-a)^5}{180\,h^4}\, f^{(4)}(\mu) \right| < 10^{-3}$$

$$\iff \frac{(2-1)^5}{180\,h^4}\, 24\, \frac{1}{\mu^5} < 10^{-3}$$

$$\iff \frac{1^5\; 2}{15\,h^4}\, \frac{1}{\mu^5} < 10^{-3}$$

$$\Uparrow \quad \begin{array}{|l} 1 < \mu < 2 \\ 1^5 < \mu^5 < 2^5 \\ 1 > \dfrac{1}{\mu^5} > \dfrac{1}{2^5} \\ \\ \text{Acoto } \frac{1}{\mu^5} \text{ con } 1 \end{array}$$

$$\frac{2}{15\,h^4} < 10^{-3}$$

$$\iff \frac{2 \cdot 10^3}{15} < n^4$$

$$\iff n > \sqrt[4]{\frac{400}{3}}$$

$$\iff n \geq 4$$

Como la regla de Simpson se aplica a una cantidad par de subintervalos, ademas, n debe ser par

2)

2a)

$$p(x) = ax + bx^2$$

$$E(a,b) = \int_{-1}^{1} (f(x) - p(x))^2 \, dx$$

Busco a, b que minimicen $E(a,b)$

Para eso necesito que el gradiente sea 0, así que hago que las derivadas parciales sean 0

$$\frac{\partial}{\partial a} E(a,b) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{d}{da} \int_{-1}^{1} (1 - a x - b x^2)^2 \, dx = 0$$

$$\Longleftrightarrow \int_{-1}^{1} \left(\frac{d}{da} (1 - a x - b x^2)^2 \right) dx = 0$$

$$\Longleftrightarrow \int_{-1}^{1} 2 \cdot (1 - a x - b x^2)(-x) \, dx = 0$$

$$\Longleftrightarrow 2 \int_{-1}^{1} (-x + a x^2 + b x^3) \, dx = 0$$

$$\Longleftrightarrow 2 \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{a x^3}{3} + \frac{b x^4}{4} \right]_{x=-1}^{x=1}$$

$$\Longleftrightarrow 2 \left(\frac{a}{3} + \frac{a}{3} \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{4a}{3} = 0$$

$$\Longleftrightarrow a = 0$$

$$\frac{d}{db} E(a, b) = 0 \qquad a = 0$$

$$\Longleftrightarrow \int_{-1}^{1} \left(\frac{d}{db} (1 - 0x - b x^2)^2 \right) dx = 0$$

$$\Longleftrightarrow \int_{-1}^{1} 2 (1 - b x^2)(-x^2) \, dx = 0$$

$$\Longleftrightarrow -2 \int_{-1}^{1} (x^2 - b x^4) \, dx = 0$$

$$\Longleftrightarrow -2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{b x^5}{5} \right]_{x=-1}^{x=1} = 0$$

$$\iff -2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{b\,x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=1} = 0$$

$$\iff -2\left(\frac{1}{3} - \frac{\;}{5} + \frac{1}{3} - \frac{b}{5}\right) = 0$$

$$\iff -2\left(\frac{2}{3} - \frac{2b}{5}\right) = 0$$

$$\iff -\frac{4}{3} + \frac{4}{5}\,b = 0$$

$$\iff b = \frac{5}{4}\cdot\frac{4}{3}$$

$$\iff b = \frac{5}{3}$$

Queda:

$$p(x) = \frac{5}{3}x^2$$

2 b)

$$f(x) = 1$$

$$p(x) = a x + b x^2$$

$$E(a,b) = \sum_{i=-1}^{1} \left(f(i) - p(i)\right)^2$$

Busco a, b que minimicen $E(a,b)$

Para eso necesito que el gradiente sea 0, así que hago que las derivadas parciales sean 0

$$\frac{\partial}{\partial a} E(a,b) = 0$$

$$\iff \sum_{i=-1}^{1} \frac{\partial}{\partial a} (1 - a i - b i^2)^2 = 0$$

$$\iff \sum_{i=-1}^{1} 2(1 - a i - b i^2)(-i) = 0$$

$$\iff 2(-1 - a + b + 1 - a - b) = 0$$

$$\iff 2(-2a) = 0$$

$$\iff a = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b} E(a,b) = 0$$

$a = 0$

$$\iff \sum_{i=-1}^{1} \frac{\partial}{\partial b} (1 - 0 i - b i^2)^2 = 0$$

$$\iff \sum_{i=-1}^{1} 2(1 - b i^2)(-i^2) = 0$$

$$\iff -2(1 - b + 1 - b) = 0$$

$$\iff -2(2 - 2b) = 0$$

$$\iff b = 1$$

Queda:

$$P(x) = x^2$$

3)

Por teorema el metodo converge con orden (al menos k) si las primeras k-1 raices se anulan en el punto, en este caso k es 3

Osea, se tiene que cumplir:

$$g'(r) = 0$$

$$g''(r) = 0$$

Trabajo con eso:
Primero calculo las derivadas:

$$g'(x) = 1 - f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)$$

$$= 1 - (f'(x))^2 - f(x)f''(x)$$

$$g''(x) = -2f'(x)\cdot f''(x) - f'(x)f''(x) - f(x)f'''(x)$$

$$= -3f'(x)f''(x) - f(x)f'''(x)$$

$g'(r) = 0$

$1 - (f'(r))^2 - f(r) f''(r) = 0$ $\qquad f(r) = 0$

$1 - (f'(r))^2 = 0$

$(f'(r))^2 = 1$

$f'(r) = 1$

$g''(r) = 0$

$-3 f'(r) f''(r) - f(r) f'''(r) = 0$ $\qquad f(r) = 0$

ya encontre que: $f'(r) = 1$

$-3 f''(r) = 0$

$f''(r) = 0$

Entonces queda que el metodo converge con orden 3 si:

$f'(r) = 1$

$f''(r) = 0$

4)

4a) 🛠️
Es falso, ya que la regla del rectángulo tiene una precisión de 0, y la regla del punto medio tiene una precisión de 1

4b) 🛠️
Es verdadero, ya que la regla de simpson tiene una presición de 3, lo que significa que es exacta para polinomios de grado menor o igual que 3, y por ende, es exacta para polinomios de grado 1

4c) (el ejercicio se refiere a las reglas dadas en el teorico)
Las reglas dadas en el teorico son:
Rectángulo
Punto medio
Trapecio
Simpson

De estás reglas, las únicas de presición 1 son la del punto medio y la del trapecio, sin embargo, de estás, la única basada en 2 puntos es la del trapecio (de hecho, es la única de 2 puntos vista en el teorico). La del punto medio uso 1 solo punto.

5)

La respuesta correcta es la a. Es decir, es valido:

$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_n, \dots, x_1, x_0]$

Voy a demostrar algo un poco mas general:

$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, x_k] = f[x_k, x_{k-1}, \dots, x_{j+1}, x_j]$

Demostración por indución en la cantidad de elementos, es decir, en $k - j$:

Caso base para $k = j$:

Es trivial, ya que lógicamente se cumple $f[x_j] = f[x_k]$

Caso inductivo cuando $k - j = n + 1$, suponiendo que vale cuando $k - j = n$:

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, x_k]$$

= {Definición diferencias divididas}

$$\frac{f[x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, x_k] - f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}]}{x_j - x_k}$$

= {HI}

$$\frac{f[x_k, x_{k-1}, \dots, x_{j+1}] - f[x_{k-1}, \dots, x_{j+1}, x_j]}{x_j - x_k}$$

=

$$\frac{-(f[x_k, x_{k-1}, \dots, x_{j+1}] - f[x_{k-1}, \dots, x_{j+1}, x_j])}{-(x_j - x_k)}$$

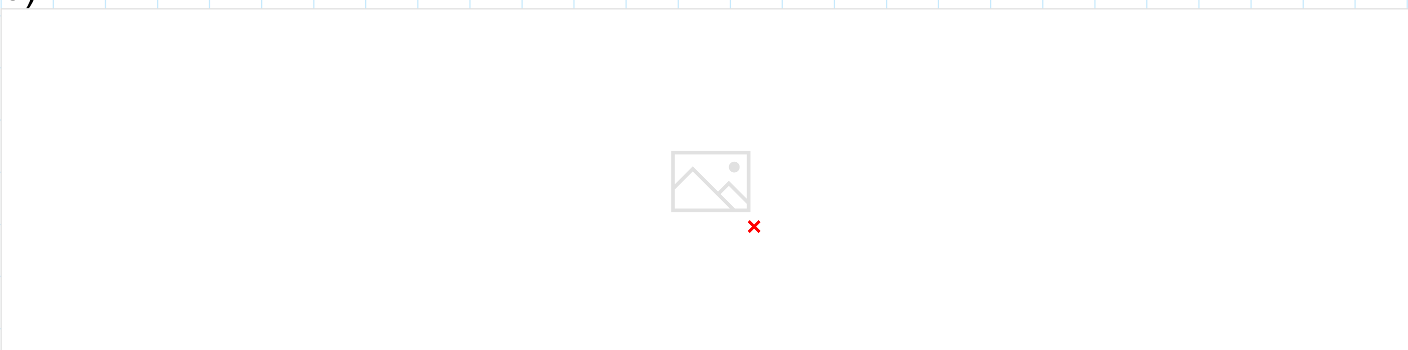
=

$$\frac{f\left[x_{k-1},\dots,x_{j+1},x_j\right]-f\left[x_k,x_{k-1},\dots,x_{j+1}\right]}{x_k-x_j}$$

$$= \{\!\!\{\text{Definición de diferencias divididas}\}\!\!\}$$

$$f\left[x_k,x_{k-1},\dots,x_{j+1},x_j\right]$$

6)



La respuesta correcta es la e, ya que la definición de convergencia cuadrática si $\{x_n\}$ converge z es:

$$x_n \text{ converge con orden } q \Leftrightarrow \left\langle \exists r \in \mathbb{R}_{>0}, N \in \mathbb{N} : \langle \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N} : |x_{n+1}-z| \leq r|x_n-z|^2 \rangle \right\rangle$$

Final de ejemplo

lunes, 26 de julio de 2021 10:30

1)

1. Considere la sucesión de números $x_k = 2^k + 2^{-k}$ y suponga que el software usado trabaja con el sistema de punto flotante en base 10, usando redondeo y con 4 dígitos decimales. Encuentre un entero k_0 tal que en ese software $x_k = 2^k$ para todo $k \geq k_0$.

Para que $x_k = 2^k$ tiene que pasar que $2^k - 2^{-k} = 2^k$, para esto, 2^k tiene que ser $2 * 10^4$ o mas veces mas grande que 2^{-k}

Esto es:

$$2^k \geq 2 \cdot 10^4 \, 2^{-k}$$

Trabajo con esto:

$$\frac{2^k}{2^{-k}} \geq 2 \cdot 10^4$$

$$2^{2k} \geq 2 \cdot 10^4$$

$$4^k \geq 2 \cdot 10^4$$

$$k \geq \log_4 (2 \cdot 10^4)$$

$$k \geq 7.143\ldots$$

$$k \geq 8$$

Verifico que efectivamente se cumpla que $2^8 - 2^{-8} = 2^8$

$$fl(2^8) = fl(256)$$

$$= 2.5600 \cdot 10^2$$

$$fl(2^{-8}) = fl(0.00390625)$$

$$= 3.9062 \cdot 10^{-3}$$

$$fl(2^8 - 2^{-8}) = fl(2.56 \cdot 10^2 - 3.9062 \cdot 10^{-3})$$

$$= fl(256 - 0.0039062)$$

$$= fl(255.9960938)$$

$$= 2.5600 \cdot 10^2$$

2)

Las raices de f son $-2, -1, 0, 1, 2$

Si queda una sola raíz en un intervalo, significa que el metodo converge si o si a esa raíz, por lo tanto, necesito iterar hasta que haya una sola raíz en el intervalo

2a)

$a_0 = -3, \quad b_0 = 2.5$

$$\operatorname{sgn}(f(-3)) = - \cdot - \cdot - \cdot - \cdot -$$
$$= -$$

$$\operatorname{sgn}(f(2.5)) = + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot +$$
$$= +$$

$$\operatorname{sgn}\left(f\left(\frac{-3+2.5}{2}\right)\right) = \operatorname{sgn}(f(0.25)) = + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot - \cdot -$$
$$= -$$

$$\Rightarrow a_1 = 0.25, \quad b_1 = 2.5$$

$$\operatorname{sgn}\left(f\left(\frac{0.25+2.5}{2}\right)\right) = \operatorname{sgn}(f(1.375)) = + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot -$$
$$= -$$

$$\Rightarrow a_2 = 1.375, \quad b_2 = 2.5$$

La única raíz en $[1.375, 2.5]$ es 2

$\Rightarrow$ Comberge a 2

3)

Sea

$f \in C^2[a, b]$ (f es continua y derivable en $[a, b]$)

$x_0 \in [a, b]$

$x_{n+1} = f(x_n)$

$$g([a,b]) \subseteq [a,b] \ \wedge \quad \exists K < 1 : (\forall x \in [a,b] \ : |f'(x)| \leqslant K)$$
$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n \text{ es un punto fijo de } f$$

Demostración:

Por teorema, hay un único punto pijo de f en $[a,b]$

sea:

p ese punto fijo

$K \in (0,1)$ un valor tal que $\forall x \in [a,b] \ : \ |f'(x)| \leqslant K$

(K exsiste por antecedente)

① Primero pruebo por inducción $|x_n - p| \leqslant K^n |x_0 - p|$

caso base $n = 0$:

$$|x_0 - p|$$
$$= 1 \cdot |x_0 - p|$$
$$= K^0 \cdot |x_0 - p|$$

caso indutivo para $n+1$ suponiendo que vale para n:

Por teorema del valor medio:

$$\exists c \text{ entre } p \text{ y } x_n \ : \ \frac{|f(x_n) - f(p)|}{|x_n - p|} = f'(c)$$

$\forall x \in [a,b] \ : \ |f'(x)| \leqslant K$

$$\Rightarrow \frac{|f(x_n) - f(p)|}{|x_n - p|} \leqslant K$$

$x_{n+1} = f(x_n)$, $f(p) = p$

$$\Rightarrow |x_{n+1} - p| \leqslant K |x_n - p|$$

Hipótesis inductiva

$$\Rightarrow |x_{n+1} - p| \leqslant K \cdot K^n |x_0 - p|$$
$$\Rightarrow |x_{n+1} - p| \leqslant K^{n+1} |x_0 - p|$$

$$\Rightarrow |x_{n+1} - p| \leqslant k \cdot k^{n} |x_0 - p|$$

$$\Rightarrow |x_{n+1} - p| \leqslant k^{n+1} |x_0 - p|$$

Ahora hago la demostración en si suponiendo el antesedente

$$\lim_{n \to \infty} x_n \text{ es un punto fijo en } f \qquad \big) \ p \text{ es un punto fijo}$$

$$\Leftarrow \lim_{n \to \infty} x_n = p$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} (x_n - p) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} |x_n - p| = 0 \qquad \big) \text{ Teorema del sandwich, } |x_n - p| \leqslant k^{n} |x_0 - p|$$

$$\Leftarrow \lim_{n \to \infty} k^{n} |x_0 - p| = 0 \qquad \big) \ k \in (0,1)$$

$$\Leftrightarrow 0 |x_0 - p| = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{True}$$

queda probado el teorema, ya que es consecuencia de True

4)

El error de la regla del trapecio está dado por:

$$\exists t \in (a,b) : E(h) = -\frac{b-a}{12} \left(\frac{b-a}{h}\right)^{2} \cdot f''(t)$$

En este caso:

$a = 0$

$b = \frac{\pi}{4}$

$f(x) = \tan(x)$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$f''(x) = \frac{-2}{\cos^3(x)} \cdot (-\sin(x)) = 2 \cdot \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}$

$\exists t \in (0, \frac{\pi}{4}) : E(n) = -\frac{\frac{\pi}{4} - 0}{12} \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 0}{n}\right)^2 \cdot 2 \cdot \frac{\tan(t)}{\cos^2(t)}$

$\Rightarrow \exists t \in (0, \frac{\pi}{4}) : |E(n)| = \frac{\pi^3}{384 n^2} \left|\frac{\tan(t)}{\cos^2(t)}\right|$

$$\Downarrow \left| \begin{array}{l} 0 < t < \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow 0 < \tan(t) < 1 \quad \wedge \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < \cos(t) < 1 \\ \Rightarrow 0 < \tan(t) < 1 \quad \wedge \quad \frac{1}{2} < \cos^2(t) < 1 \\ \Rightarrow 0 < \tan(t) < 1 \quad \wedge \quad 1 < \frac{1}{\cos^2(t)} < 2 \\ \Rightarrow |\tan(t)| < 1 \wedge \left|\frac{1}{\cos^2(t)}\right| < 2 \\ \Rightarrow \left|\frac{\tan(t)}{\cos^2(t)}\right| < 2 \end{array} \right.$$

$|E(n)| < \frac{\pi^3}{384 n^2} \cdot 2$

$\Rightarrow E(n) < \frac{\pi^3}{192 n^2}$

Ahora hago que $E(n) < \frac{10^{-6}}{2}$

$E(n) < \frac{10^{-6}}{2}$

$\Leftarrow \frac{\pi^3}{192 n^2} < \frac{10^{-6}}{2}$

$\Leftarrow \frac{\pi^3 \cdot 10^6 \cdot 2}{192} < n^2$

$$\Leftarrow \quad h > \sqrt{\frac{\pi^3 10^6}{96}}$$

$$\Leftarrow \quad h > 568.315\ldots$$

$$\Leftarrow \quad \boxed{h \geq 569}$$

5)

$$f(x) = \frac{1}{(Ax + \frac{1}{B})^2}$$

$$(f(x))^{-\frac{1}{2}} = A x \ \frac{1}{B}$$

Trabajo con el sistema lineal:

$$p(x) = Ax + b$$

con

$$p(x) = (f(x))^{-\frac{1}{2}}$$

$$b = \frac{1}{B} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{b}$$

Tengo que minimizar:

$$\sum_{j=-1}^{2} ((y_j)^{-\frac{1}{2}} - p(j))^2$$

Por teorema de mejor aproximación por cuadrados mínimos:

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=-1}^{2} j^0 & \sum_{j=-1}^{2} j^1 \\ \sum_{j=-1}^{2} j^1 & \sum_{j=-1}^{2} j^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=-1}^{2} j^0 (y_j)^{-\frac{1}{2}} \\ \sum_{j=-1}^{2} j^1 (y_j)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.45^{-1/2} + 3.01^{-1/2} + 0.67^{-1/2} + 0.15^{-1/2} \\ -13.45^{-1/2} + 0.67^{-1/2} + 2 \cdot 0.15^{-1/2} \end{bmatrix} \quad F_1 - 2F_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 13.15^{-1/2} + 3.01^{-1/2} - 0.67^{-1/2} - 3\cdot 0.15^{-1/2} \\ -13.15^{-1/2} + 0.67^{-1/2} + 2\cdot 0.15^{-1/2} \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.5733 \\ 6.1130 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{-7.5733}{-10} = 0.75733$$

$$b = \frac{6.113 - 6\cdot 0.75733}{2} = 0.78457 \quad \Rightarrow \quad B = 1.2768$$

Queda entonces:

$$f(x) = \frac{1}{\left(0.75533\,X + \frac{1}{1.2768}\right)^2}$$

6)

c = cantidad de calculadoras científicas dirías
g = cantidad de calculadoras graficas dirías

maximizar $\quad -2\cdot c + 5\cdot g$

sujeto a $\quad c + g \geq 200$

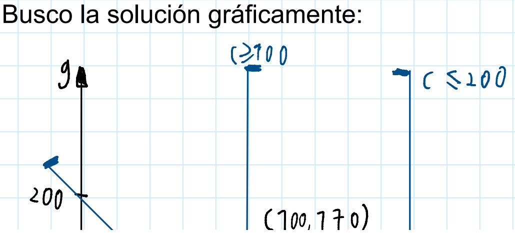
$c \leq 200$

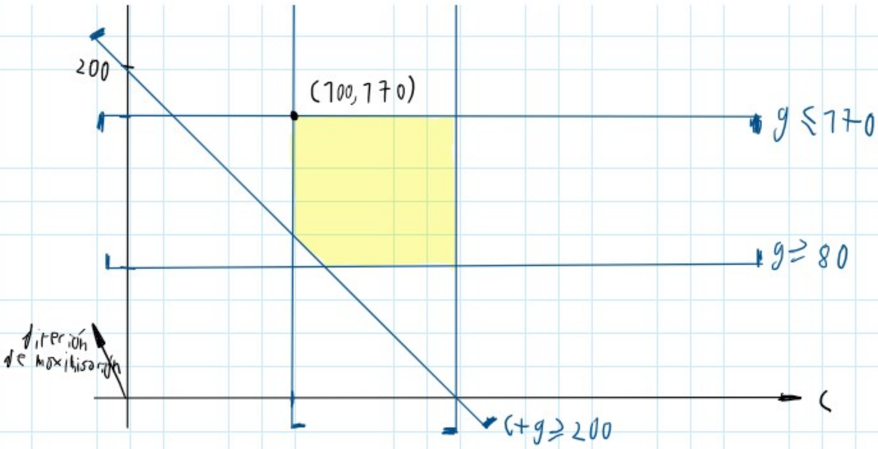
$g \leq 170$

$c \geq 100$

$g \geq 80$

Busco la solución gráficamente:





La solución optima son 100 calculadoras cientificas y 170 graficas