Teoremas

martes, 13 de julio de 2021 11:53

Convergencia del método de bisección:

Sean:

$[a_0, b_0], [a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ los intervalos del metodo de biseción

$c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

$r = \lim_{n\to\infty} c_n$

$$|r - c_n| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

Convergencia del método de Newton:

Sea:

$f \in C^{(2)}(\mathbb{R})$

r una raíz de f

$f'(r) \neq 0$

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

($\{x_n\}$ es la sucesión de newton)

$$\left\langle \exists\delta > 0 : \langle \forall x_0 \in [r-\delta, r+\delta] : \langle \exists c : |r - x_{n+1}| \leq c|r - x_n|^2 \rangle\rangle \right\rangle$$

$$\left\langle \exists\delta > 0 : \left\langle \forall x_0 \in [r-\delta, r+\delta] : \lim_{n\to\infty} \frac{|r - x_{n+1}|}{|r - x_n|^2} \in (0, \infty) \right\rangle \right\rangle$$

$$\langle \exists\delta > 0 : \langle \forall x_0 \in [r-\delta, r+\delta] : \{x_n\} \text{ convere a } r \text{ cuadraticamente} \rangle\rangle$$

Aclaraciones:

Esto lo que está diciendo es que si se empieza suficientemente de la raíz, entonces el metodo de Newton converge cuadráticamente

No está puesto, pero hay un $\forall n \in \mathbb{N}$ implícito adentro del $\exists c$

Punto fijo:

Sea:

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a, b \in \mathbb{R}$

g continua en $[a, b]$

$$\langle \forall x \in [a,b] : g(x) \in [a,b] \rangle \Rightarrow \langle \exists p \in [a,b] : g(p) = p \rangle \qquad \text{(Existencia)}$$

g derivable en $[a, b]$

$$\langle \forall x \in [a,b] : g(x) \in [a,b] \rangle \wedge \langle \forall x \in (a,b) : |g'(x)| < 1 \rangle \Rightarrow \langle \exists!\, p \in [a,b] : g(p) = p \rangle \qquad \text{(Unicidad)}$$

$x_0 \in [a, b]$

$x_n = g(x_{n-1})$

$$\langle \forall x \in [a,b] : g(x) \in [a,b] \rangle \wedge \langle \exists k < 1 : \langle \forall x \in (a,b) : |g'(x)| \leq k \rangle\rangle \Rightarrow \{x_n\} \text{ converge a un punto fijo de } g$$

(Convergencia)

$p = \lim_{n\to\infty} x_n$
$j \in \mathbb{N}$

$$\langle \forall x \in [a,b] : g(x) \in [a,b] \rangle \wedge \left\langle \exists k < 1 : \langle \forall x \in (a,b) : |g'(x)| \le k \rangle \right\rangle \wedge \left\langle \forall i \in \mathbb{N}_{<j} : g^{(i)}(p) = 0 \right\rangle \wedge g^{(j)}(p) \neq 0$$
$$\Rightarrow \ \{x_n\} \text{ converge con orden } j$$

(Orden de convergencia)

Teoremas y demostraciones

martes, 30 de marzo de 2021 09:13

Bisección:

Sean:

$[a_0, b_0], [a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ los intervalos del metodo de biseción

$c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

$r = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$

$$|r - c_n| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

Demostración:

Se tiene:

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq b_0$$
$$b_0 \geq b_1 \geq \cdots \geq a_0$$

Por ende a_n y b_n son convergentes

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Ahora pruebo por inducción:

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

Caso base es trivial, caso inductivo:

$b_{n+1} - a_{n+1}$

$= \dfrac{b_n - a_n}{2}$

= {HI}

$\dfrac{\frac{b_0 - a_0}{2^n}}{2}$

$= \dfrac{(b_0 - a_0)}{2^{n+1}}$

Ahora voy a probar:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_\mathrm{n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_\mathrm{n}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_\mathrm{n} = 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0$$
$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

Sea:

$$s = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Sabemos que:

$$f(a_n)f(b_n) < 0$$

Desarrollo eso:

$$f(a_n)f(b_n) < 0$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow f(s)f(s) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow f(s)^2 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow f(s) = 0$$

Newton:
Sucesión de Newton:
Sea:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Teorema de convergencia:
Sea:
$f \in C^{(2)}(\mathbb{R})$
r una raíz de f
$f'(r) \neq 0$
$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
($\{x_n\}$ es la sucesión de newton)

$$\left\langle \exists \delta > 0 : \langle \forall x_0 \in [r-\delta, r+\delta] : \langle \exists c : |r - x_{n+1}| \leq c|r - x_n|^2 \rangle\rangle \right\rangle$$
$$\left\langle \exists \delta > 0 : \left\langle \forall x_0 \in [r-\delta, r+\delta] : \lim_{n\to\infty} \frac{|r - x_{n+1}|}{|r - x_n|^2} \in (0,\infty) \right\rangle \right\rangle$$
$$\langle \exists \delta > 0 : \langle \forall x_0 \in [r-\delta, r+\delta] : \{x_n\} \text{ convere a } r \text{ cuadraticamente} \rangle\rangle$$

Aclaraciones:
Esto lo que está diciendo es que si se empieza suficientemente de la raíz, entonces el metodo de Newton converge cuadráticamente

No está puesto, pero hay un $\forall n \in \mathbb{N}$ implícito adentro del $\exists c$

Demostración: (no me salió)

Por teorema de Taylor:

$$\left\langle \exists \xi \text{ entre } r \text{ y } x_n : f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(r - x_n)^2 \right\rangle$$

Trabajo con el termino de este $\exists$:

$$f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(r - x_n)^2$$

$\Rightarrow$ {r es una raíz de f}

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(r - x_n)^2$$

$\Rightarrow$

$$(r - x_n)f'(x_n) + f(x_n) = -\frac{f''(\xi)}{2}(r - x_n)^2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{(r - x_n)f'(x_n) + f(x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{\frac{f''(\xi)}{2}(r - x_n)^2}{f'(x_n)}$$

$\Rightarrow$

$$(r - x_n) + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{f''(\xi)(r - x_n)^2}{2f'(x_n)}$$

$\Rightarrow$

$$r - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{f''(\xi)(r - x_n)^2}{2f'(x_n)}$$

$\Rightarrow$ {$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$}

$$r - x_{n+1} = -\frac{f''(\xi)(r - x_n)^2}{2f'(x_n)}$$

$\Rightarrow$

$$r - x_{n+1} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|r - x_{n+1}|}{|r - x_n|^2}$$

$=$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|(r - x_n)f'(x_n) + f(x_n)|}{|r - x_n|^2}$$

$$\left\langle \exists \delta > 0 : \left\langle \forall x_0 \in [r - \delta, r + \delta] : \langle \exists c \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N} : \langle \forall n \geq N : |r - x_{n+1}| \leq c|r - x_n|^2 \rangle \rangle \right\rangle \right\rangle$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\right) \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(r) &= r - \frac{f(r)}{f'(r)} \\ &= r - 0 \\ &= r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(r) &= \frac{f(r)f''(r)}{\left(f'(r)\right)^2} \\ &= \frac{0f''(r)}{\left(f'(r)\right)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Punto fijo:

Sea:
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$a, b \in \mathbb{R}$
g continua en $[a, b]$

$$\langle \forall x \in [a,b] :\ g(x) \in [a,b] \rangle \Rightarrow \langle \exists p \in [a,b] : g(p) = p \rangle \qquad \text{(Existencia)}$$

g derivable en $[a, b]$

$\langle \forall x \in [a,b] : g(x) \in [a,b] \rangle \wedge \langle \forall x \in (a,b) : |g'(x)| < 1 \rangle \Rightarrow \langle \exists!\, p \in [a,b] : g(p) = p \rangle$ (Unicidad)

$x_0 \in [a,b]$
$x_n = g(x_{n-1})$

$\langle \forall x \in [a,b] : g(x) \in [a,b] \rangle \wedge \left\langle \exists k < 1 : \langle \forall x \in (a,b) : |g'(x)| \le k \rangle \right\rangle \Rightarrow \{x_n\}$ converge a un punto fijo de g
(Convergencia)

$p = \lim_{n\to\infty} x_n$
$j \in \mathbb{N}$

$\langle \forall x \in [a,b] : g(x) \in [a,b] \rangle \wedge \left\langle \exists k < 1 : \langle \forall x \in (a,b) : |g'(x)| \le k \rangle \right\rangle \wedge \left\langle \forall i \in \mathbb{N}_{<j} : g^{(i)}(p) = 0 \right\rangle \wedge g^{(j)}(p) \neq 0$
$\Rightarrow \{x_n\}$ converge con orden j
(Orden de convergencia)

Demostración:
Existencia:

$\langle \exists p \in [a,b] : g(p) = p \rangle$
$\Leftrightarrow$ ⦃Divido en casos $p = a \vee p = b \vee p \in (a,b)$⦄
$g(a) = a \vee g(b) = b \vee \langle \exists p \in (a,b) : g(p) = p \rangle$
$\Leftrightarrow$ ⦃Definición $\Rightarrow$⦄
$g(a) \neq a \wedge g(b) \neq b \Rightarrow \langle \exists p \in (a,b) : g(p) = p \rangle$

Pruebo esto suponiendo el antecedente:

$\langle \exists p \in (a,b) : g(p) = p \rangle$
$\Leftrightarrow$ ⦃Sea: $h(x) = g(x) - x$⦄
$\langle \exists p \in (a,b) : g(p) - p = 0 \rangle$
$\Leftarrow$ ⦃Teorema del valor intermedio⦄
$g(a) - a > 0 \wedge g(b) - b < 0$
$\Leftrightarrow$
$g(a) > a \wedge g(b) < b$
$\Leftrightarrow$ ⦃Antecedentes: $\langle \forall x \in [a,b] : g(x) \in [a,b] \rangle \wedge g(a) \neq a \wedge g(b) \neq b \Rightarrow g(a) > a \wedge g(b) < b$⦄
True

Unicidad:
Lo pruebo suponiendo el antecedente, y por el absurdo, osea, probando: $\langle \exists p, q \in [a,b] : p \neq q : g(p) = p \wedge g(q) = q \rangle \Rightarrow$ False
Sean $p, q \in [a,b]$ con $p < q$ (si existen p y q distintos, existen tal que $p < q$)
Tal que $g(p) = p \wedge g(q) = q$
Trabajo suponiendo el antecedente:

Por teorema del valor medio:
$$\left\langle \exists c \in (p,q) : g'(c) = \frac{g(q) - g(p)}{q - p} \right\rangle$$
$\Rightarrow$ ⦃Antecedente: $|g'(x)| < 1$⦄
$$\frac{g(q) - g(p)}{q - p} < 1$$
$\Rightarrow$ ⦃Antecedente: $g(p) = p \wedge g(q) = q$⦄
$$\frac{q - p}{q - p} < 1$$
$\Rightarrow$

$1 < 1$

$\Rightarrow$

False

Convergencia:

$\langle \forall x \in [a,b] : g(x) \in [a,b] \rangle \wedge \langle \exists k < 1 : \langle \forall x \in (a,b) : |g'(x)| \leq k \rangle \rangle \Rightarrow \{x_n\}$ converge a un punto fijo de g

Los antecedentes del teorema cumplen los antecedentes del teorema de unicidad, por lo cuál hay un único punto fijo en $[a,b]$

Sea:

p el único punto fijo en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$

$k < 1$ tal que $\langle \forall x \in (a,b) : |g'(x)| \leq k \rangle$ (Exsiste por antecedente)

① Primero pruebo por indución $|x_n - p| \leq k^n |x_0 - p|$:

Caso base: $(n = 0)$

$|x_0 - p|$

$=$

$1|x_0 - p|$

$=$

$k^0 |x_0 - p|$

Caso inductivo para $n + 1$ suponiendo que vale para n:

Por teorema del valor medio:

$$\left\langle \exists c \text{ entre } x_n \text{ y } p : g'(c) = \left| \frac{g(x_n) - g(p)}{x_n - p} \right| \right\rangle$$

$\Rightarrow$ {Estoy suponiendo: $|g'(x)| \leq k$}

$$\left| \frac{g(x_n) - g(p)}{x_n - p} \right| \leq k$$

$\Rightarrow$ {Definición x_n, estoy suponiendo que p es un punto fijo de g}

$$\left| \frac{x_{n+1} - p}{x_n - p} \right| \leq k$$

$\Rightarrow$

$|x_{n+1} - p| \leq k |x_n - p|$

$\Rightarrow$ {Hipótesis inductiva}

$|x_{n+1} - p| \leq k * k^n |x_0 - p|$

$\Rightarrow$

$|x_{n+1} - p| \leq k^{n+1} |x_0 - p|$

Ahora hago la demostración principal suponiendo el antecedente:

$\{x_n\}$ converge a un punto fijo de g

$\Leftrightarrow$

$g\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) = \lim_{n \to \infty} x_n$

$\Leftarrow$ {p es un punto de g}

$\lim_{n \to \infty} x_n = p$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - p) = 0$$
$\Leftrightarrow$
$$\lim_{n\to\infty}|x_n - p| = 0$$
$\Leftarrow$ ⦃Teorema del sandwich, ①⦄
$$\lim_{n\to\infty} k^n|x_0 - p| = 0$$
$\Leftrightarrow$
$$0\,|x_0 - p| = 0$$
$\Leftrightarrow$
$$0 = 0$$
$\Leftrightarrow$

True

Orden de convergencia:

Sea:

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a, b \in \mathbb{R}$

$j \in \mathbb{N}$

$g \in C^{(j)}[a,b]$

$x_0 \in [a,b]$

$x_n = g(x_{n-1})$

$p = \lim_{n\to\infty} x_n$

$$\langle \forall x \in [a,b] : g(x) \in [a,b] \rangle \wedge \langle \exists k < 1 : \langle \forall x \in (a,b) : |g'(x)| \leq k \rangle \rangle \wedge \langle \forall i \in \mathbb{N}_{<j} : g^{(i)}(p) = 0 \rangle \wedge g^{(j)}(p) \neq 0$$
$$\Rightarrow \{x_n\} \text{ converge con orden } j$$

Parto de la serie Taylor de $j-1$ términos centrada en p evaluada en x_n:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left\langle \exists \xi \text{ entre } p \text{ y } x_n : g(x_n) = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{g^{(i)}(p)(x_n - p)^i}{i!} + \frac{g^{(j)}(\xi)(x_n - p)^j}{j!} \right\rangle$$
$\Rightarrow$ ⦃Antecedente: $\langle \forall i \in \mathbb{N}_{<j} : g^{(i)}(p) = 0 \rangle$⦄
$$\forall n \in \mathbb{N} : \left\langle \exists \xi \text{ entre } p \text{ y } x_n : g(x_n) = \frac{g(p)(x_n - p)^0}{0!} + \frac{g^{(j)}(\xi)(x_n - p)^j}{j!} \right\rangle$$
$\Rightarrow$
$$\forall n \in \mathbb{N} : \left\langle \exists \xi \text{ entre } p \text{ y } x_n : g(x_n) - p = g(p) + \frac{g^{(j)}(\xi)(x_n - p)^j}{j!} - p \right\rangle$$
$\Rightarrow$ ⦃$g(p) = p$⦄
$$\forall n \in \mathbb{N} : \left\langle \exists \xi \text{ entre } p \text{ y } x_n : g(x_n) - p = \frac{g^{(j)}(\xi)(x_n - p)^j}{j!} \right\rangle$$
$\Rightarrow$ ⦃Si tomo $\lim_{n\to\infty}$, $x_n \to p$, y por ende, $\xi = p$⦄ 🤔
$$\lim_{n\to\infty}(g(x_n) - p) = \lim_{n\to\infty} \frac{g^{(j)}(p)(x_n - p)^j}{j!}$$
$\Rightarrow$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - p}{(x_n - p)^j} = \lim_{n\to\infty} \frac{g^{(j)}(p)}{j!}$$
$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-p}{(x_n-p)^j}=\frac{g^{(j)}(p)}{j!}$$

$\Rightarrow$ ⦃Antecedente: $g^{(j)}(p)\neq 0$⦄

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-p}{(x_n-p)^j}\right|\in(0,\infty)$$

$\Rightarrow$

$\{x_n\}$ converge con orden j

Sea:
r un punto fijo de g
$x_{n+1}=g(x_n)$

$$g'(r)<1\Rightarrow\left\langle\exists x_0: \lim_{n\to\infty}x_n=r\right\rangle$$

$$g'(r)<1\Rightarrow\left\langle\exists a,b\in\mathbb{R}:r\in[a,b]:\left\langle\forall x_0\in(a,b):\lim_{n\to\infty}x_n=r\right\rangle\right\rangle$$

Esto se demuestra trivialmente usando que:
Sea:
g continua

$$g'(r)<1\Rightarrow\langle\exists a,b:r\in[a,b]:\langle\forall x\in[a,b]:g(x)\in[a,b]\rangle\rangle$$

r un punto fijo de g

$$g'(r)<1\Rightarrow\langle\exists a,b:r\in[a,b]:\langle\forall x\in[a,b]:g(x)\in[a,b]\rangle\rangle$$

1)

jueves, 25 de marzo de 2021 11:07

Raices:

$-2, -1, 0, 1, 2$

a) $\text{signo}(F(-1.5)) = + \cdot + \cdot - \cdot - \cdot - = -$

$\text{signo}(F(2.5)) = + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + = +$

$\text{signo}\left(F\left(\frac{-1.5+2.5}{2}\right)\right) = \text{signo}(F(0.5))$

$= + \cdot + \cdot + \cdot - \cdot - = + \Rightarrow$ Raíz $\in (-1.5, 0.5)$

$\text{signo}\left(F\left(\frac{-1.5+0.5}{2}\right)\right) = \text{signo}(F(-0.5))$

$= + \cdot + \cdot - \cdot - \cdot - = - \Rightarrow$ Raíz $\in (-0.5, 0.5)$

La única raíz en $(-0.5, 0.5)$ es 0

$\Rightarrow$ Convergue a la raíz en 0

b) $\text{signo}(F(-0.5)) = -$

$\text{signo}(F(2.4)) = + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + = 0$

$\text{signo}\left(F\left(\frac{-0.5+2.4}{2}\right)\right) = \text{signo}(F(0.95))$

$= + \cdot + \cdot + \cdot - \cdot - = + \Rightarrow$ Raiz $\in (-0.5, 0.95)$

La única raiz en $(-0.5, 0.95)$ es 0

$\Rightarrow$ Convergue a la raíz en 0

$\Rightarrow$ Converge a la raíz en 0

c) $\text{signo}(f(-0.5)) = -$

$\text{signo}(f(3)) = + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + = +$

$\text{signo}\left(f\left(\frac{-0.5+3}{2}\right)\right) = \text{signo}(f(1.25))$

$= + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot - = - \Rightarrow \text{Raiz} \in (1.25, 3)$

La única raiz en $(1.25, 3)$ es 2

$\Rightarrow$ Converge a la raiz en 2

d) $\text{signo}(f(-0.5)) = -$

$\text{signo}(f(-3)) = - \cdot + \cdot - \cdot - \cdot - = +$

$\text{signo}\left(f\left(\frac{-0.5-3}{2}\right)\right) = \text{signo}(f(-1.75))$

$= + \cdot + \cdot - \cdot - \cdot - = - \Rightarrow \text{Raiz} \in (-3, -1.75)$

La única raiz en $(-3, -1.75)$ es -2

$\Rightarrow$ convergen a la raíz en -2

2)

martes, 30 de marzo de 2021 11:09

Si se empieza por a_0, b_0

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

$$\Leftarrow \quad XTOL \geq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{n+1} \geq \frac{b_0 - a_0}{XTOL}$$

$$\Leftarrow \quad n = \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{XTOL}\right) - 1$$

3)

martes, 30 de marzo de 2021 11:22

Una raiz está en $(0, \pi$

3b) $\text{signo}(F(\pi)) = -$

$\text{signo}(F(0)) = +$

$\text{signo}\left(f\left(\frac{0+\pi}{2}\right)\right) = \text{signo}\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$= \text{signo}\left(4 + 1 - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= + \Rightarrow \quad \text{Raiz} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

$$\text{signo}\left(f\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi}{2}\right)\right) = \text{signo}\left(f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \text{signo}\left(2 \cdot \sqrt{2} + 1 - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= + \Rightarrow \quad \text{Raiz} \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$$

$$\text{signo}\left(f\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + \pi}{2}\right)\right) = \text{signo}\left(f\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$$

$$= - \Rightarrow \quad \boxed{\text{Raiz} \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}\right)}$$

3c)

Sea r la raiz

$$\left| r - \frac{b_n - a_n}{2} \right| \leq 10^{-3}$$

Teorema

$$\Leftarrow 10^{-3} \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

$$\iff 2^{n+1} \leq 10^3 \cdot (\pi - 0)$$

$$\iff n \leq \log_2 (10^3 \cdot \pi) - 1$$

$$\Longleftarrow \quad n = 11$$

4)

martes, 30 de marzo de 2021 12:34

4 a)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

$$= x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} + \frac{a}{2x_n}$$

$$= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}$$

$$= \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

4 b)

$$x_n \geq \sqrt{a}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) \geq \sqrt{a}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)\right)^2 \geq a$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 + 2\,x_{n-1}\,\frac{a}{x_{n-1}} + \left(\frac{a}{x_{n-1}}\right)^2\right) \geq a$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x_{n-1}^2}{4} + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4x_{n-1}^2} - a \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x_{n-1}^2}{4} + \frac{a^2}{4x_{n-1}^2} - \frac{a}{2} \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a^2}{x_{n-1}^2} - 2a + x_{n-1}^2 \geq 0$$

El polinomio en función de a es positivo $(1/x_{n-1}^2 > 0)$, así que el resultado es siempre ≥ 0 si el discriminante es ≤ 0

$$\iff \frac{a^2}{x_{n-1}^2} - 2a + x_{n-1}^2 \geq 0$$

El polinomio en función de a es positivo ($1/x_{n-1}^2 > 0$), así que el resultado es siempre $\geq$ 0 si el discriminante es $\leq$ 0

$$\Leftarrow 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{x_{n-1}^2} \cdot x_{n-1}^2 \leq 0$$

Teorema: $\langle \forall x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c \geq 0 \rangle \; \Leftarrow \; a > 0 \land b^2 - 4ac \leq 0$

$$\iff 4 - 4 \leq 0$$

$$\iff 0 \leq 0$$

Queda probado $x_n \geq \sqrt{a}$ ya que es consecuencia de $0 \leq 0$, lo cual es trivialmente cierto

4c) $x_n \geq x_{n+1}$

$$\iff x_n \geq \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

$$\iff x_n - \frac{x_n}{2} - \frac{a}{2x_n} \geq 0$$

$$\iff \frac{x_n}{2} - \frac{a}{2x_n} \geq 0$$

$$\iff x_n \geq \frac{a}{x_n}$$

x_n > 0 ya que x_0 > 0, y en cada paso se suman cosas positivas

$$\iff x_n^2 \geq a$$

$$\iff x_n \geq \sqrt{a}$$

Demostración de ejercicio 4c

$$\iff \text{True}$$

4d) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\right)$$

$$\lim x_n = \frac{1}{2}\left(\lim x_n + \frac{a}{\lim x_n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{a}{\lim_{n\to\infty} x_n}\right)$$

$$2\cdot\lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a}{\lim_{n\to\infty} x_n}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\cdot \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

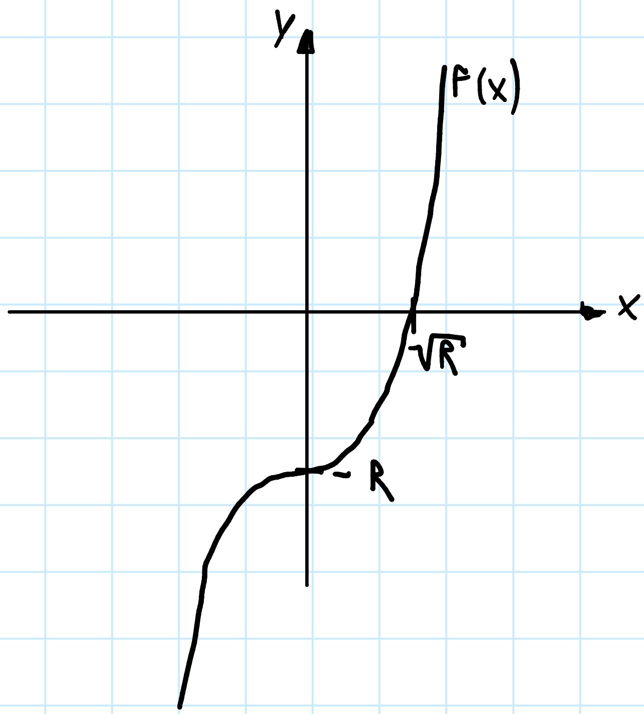
$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 = a$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$$

5)

jueves, 1 de abril de 2021 14:44

$$F(x) = x^3 - R$$



Converge siempre y cuando se empiece en un punto en el cuál no se acabe pasando por el 0, ósea en todos los positivos y algunos de los negativos

Recta tangente que pasa por x_0:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = 3x_0^2 x - 3x_0^3 + x_0^3 - R$

$y = 3x_0^2 x - 2x_0^3 - R$

Busco el x_0 para que la recta pase por (0, 0)

$0 = 3 \cdot x_0^2 \cdot 0 - 2x_0^3 - R$

$2x_0^3 = -R$

$x_0 = -\sqrt[3]{\frac{R}{2}}$

Sea p_n la suseción de números en los que no se podría empezar

$p_0 = 0$

$0 = f'(p_{n+1})(p_n - p_{n+1}) + f(p_{n+1})$

$$0 = 3p_{n+1}^2 p_n - 2p_{n+1}^3 - R$$

6)

viernes, 2 de abril de 2021 10:09

6 a)

$$g(1) = \operatorname{arctg}(1) - \frac{2 \cdot 1}{1+1^2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \text{signo}(g(1)) = -$$

$$g(\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1+\sqrt{3}^2}$$

$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\qquad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \text{signo}(g(\sqrt{3})) = +$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{1+x^2} \neq 0$

$\Rightarrow$ $\frac{2x}{1+x^2}$ es continua en $[1, \sqrt{3}]$ $\qquad$ arctg es continua

$=$ g es continua en $[1, \sqrt{3}]$

$\Rightarrow$ Hay una raíz de g en $[1, \sqrt{3}]$

6 b) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Inducción en n (caso base cierto por definición de x_0):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

$$= (-1)^n \alpha - \frac{\operatorname{arctg}((-1)^n \alpha)}{\frac{1}{1+((-1)^n \alpha)^2}}$$

$$= (-1)^n \alpha - \operatorname{arctg}((-1)^n \alpha) \cdot (1 + \alpha^2)$$

$$= (-1)^n \alpha - (-1)^n \operatorname{arctg}(\alpha) \cdot (1 + \alpha^2) \qquad \Big\} \; 0 = \operatorname{arctg}(\alpha) - \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \Rightarrow \operatorname{arctg}(\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$$

$$= (-1)^n \alpha - \frac{(-1)^n \cdot 2\alpha}{1+\alpha^2}(1+\alpha^2)$$

$$= (-1)^n \alpha - (-1)^n \cdot 2\alpha$$

$$= (-1)^n (\alpha - 2\alpha)$$

$$= (-1)^{n+1} \alpha$$

7)

martes, 6 de abril de 2021 10:19

7a) $0 = x^3 - x - 1$

$x^3 = x + 1$

$x = \sqrt[3]{x+1}$

Sea $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$ (g es continua y creciente)

$g(0) = 1$

$g(2) = \sqrt[3]{3} < 2$

} g es creciente

$\Rightarrow \forall x \in [0, 2] : g(x) \in [0, 2]$

$g'(x) = -\frac{1}{3(x+1)^{2/3}}$

El máximo de |g'| en [0, 2] es en 0, porque es lo vuelve mas chico el denominador

$|g'(0)| = \left|-\frac{1}{3(0+1)^{2/3}}\right| = \frac{1}{3} < 1$

$\Rightarrow \forall x \in [0,2] : |g'(x)| < 1$

Función de iteración:

$g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

Intervalo:

$[0, 2]$

7b) $F(x) = 2x - tg(x)$

$0 = 2x - tg(x)$

$tg(x) = 2x$

$x = arctg(2x)$

} La menor raíz positiva es < π/2 ⇒ x ∈ [0, π/2)

Sea:

$g(x) = arctg(2x)$

$g'(x) = \frac{2}{1 + 4x^2}$

Busco un I en el que |g'| < 1:

$|g'(x)| < 1$

$\left|\frac{2}{1+4x^2}\right| < 1$

$2 < 1 + 4x^2$

7b) $F(x) = 2x - tg(x)$

$0 = 2x - tg(x)$

$x = \frac{tg(x)}{2}$

Sea:

$g(x) = \frac{tg(x)}{2}$

$g'(x) = \frac{1}{2 \cdot \cos^2(x)}$

Como la raíz es > 0, I

Busco I en el que $|g'| < 1$

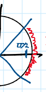
$|g'(x)| < 1$

$\left|\frac{1}{2 \cdot \cos^2(x)}\right| < 1$

$\frac{1}{\sqrt{2}} < |\cos(x)|$

}

$\subseteq [0, \infty)$



$x \in \left(\frac{\pi}{4} + k2\pi, -\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) \quad : \quad k \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{4} < x^2$

$\frac{1}{2} < x$ } Estoy buscando una raíz positiva ⇒ x > 0

Con esto queda que I ⊂ [1/2, ∞) (los extremos no importan para lo de la derivada)

Ahora veo ∀x ∈ I : g(x) ∈ I:

Propongo $I = [1/2, 2]$

g es creciente en $[1/2, 2]$

$$\Rightarrow \min_{x \in [1/2, 2]} g(x) = g(1/2) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$$

$$\max_{x \in [1/2, 2]} g(x) = g(2) = \operatorname{arctg}(4) < \frac{\pi}{2} < 2$$

} ∀x : $\operatorname{arctg}(x) < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \forall x \in [1/2, 2] : g(x) \in [1/2, 2]$

Por ende queda:

Función:

$g(x) = \operatorname{arctg}(2x)$

Intervalo:

$I = [1/2, 1]$

Ahora busco que $g(I) \subseteq$

Propongo $[0, \frac{\pi}{4}]$

$g(0) = \frac{tg(0)}{2} = 0$

$g(\frac{\pi}{4}) = \frac{tg(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$

g es creciente en $[0, \frac{\pi}{4}]$

$\Rightarrow \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}] : g(x) \in$

Por ende queda:

Función:

$g(x = \frac{tg(x}{2}$

Intervalo:

$[0, \frac{\pi}{4}]$

7c) $f(x) = e^{-x} - \cos(x)$

$f(0) = 1 - 1 = 0$

$0 = e^{-x} - \cos(x)$

$\cos(x) = e^{-x}$

$x = \arccos(e^{-x})$ } Asumo que la primera raíz es ≤ π

sea:

$g(x) = \arccos(e^{-x})$

$$g'(x) = -\frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$$

Como f(0) = 0 y por el despeje I ⊆ (0, π]

Busco que ∀x ∈ I : |g'(x)| < 1

$|g'(x)| < 1$

$\Leftrightarrow \left| \frac{e^{-x}}{\dots} \right| < 1$

$[0, \frac{\pi}{4}]$

Busco que ∀x ∈ I : |g'(x)| < 1

$|g'(x)| < 1$

$\iff \left| \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \right| < 1$

$\iff e^{-x} < \sqrt{1-e^{-2x}}$

$\Leftarrow (e^{-x})^2 < 1 - e^{-2x} \quad \wedge \quad 1 - e^{-2x} \geq 0$

$\iff e^{-2x} + e^{-2x} < 1 \quad \wedge \quad 1 \geq e^{-2x}$

$\iff 2e^{-2x} < 1 \quad \wedge \quad e^{-2x} \leq 1$

$\iff e^{-2x} < \frac{1}{2} \quad \wedge \quad e^{-2x} \leq 1$

$\iff e^{-2x} < \frac{1}{2}$

$\iff -2x < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\iff x > \frac{\ln(1) - \ln(2)}{-2}$

$\iff x > -\frac{0}{2} + \frac{\ln(2)}{2}$

$\iff x > \ln(\sqrt{2})$ $\quad \big) \; e > \sqrt{2} \Rightarrow 1 > \ln(\sqrt{2})$

$\Leftarrow x > 1$

Con esto queda I ⊆ [1, π/2]

Ahora veo ∀x ∈ I : g(x) ∈ I:

g es creciente en $[1, \pi]$

$\Rightarrow \max_{x \in [1,\pi]} g(x) = g(\pi)$

$= \arccos(e^{-\pi})$ $\quad \big) \; \forall x \in \mathrm{dom}(\arccos) : \arccos(x) \leq \pi$

$\leq \pi$

$\min_{x \in [1,\pi]} g(x) = g(1)$

$= \arccos\left(\frac{1}{e}\right)$ $\quad \big) \; \frac{1}{e} < \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \arccos$ es decreciente

$> \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{\pi}{3} > 1$

Por ende queda:

Función

$g(x) = \arccos(e^{-x})$

Intervalo

$I = [1, \pi]$

8)

martes, 6 de abril de 2021 19:50

a) $g_1(r) = r - r^3 - 4r^2 + 10$

$= r - f(r)$

$= r - 0$ Hipótesis: r es una raíz de f

$= r$

$\Rightarrow$ $\boxed{g_1 \text{ tiene un punto fijo en } r}$

b) $X_0 = 1.5$

$X_1 = g_1(1.5)$

$= 1.5 - (1.5)^3 - 4 \cdot (1.5)^2 + 10$

$= -0.875$

$X_2 = g_1(-0.875)$

$= 6.732421875$

c) $g'(x) = -3X^2 - 8X + 1$

Se sobre I que r ∈ I

Además el I tiene que cumplir:

$\forall x \in I : |g_1'(x)| < 1$

$1 \leqslant r \leqslant 2$

$\Rightarrow 3 \leqslant 3r^2 \leqslant 12 \quad \wedge \quad 8 \leqslant 8r \leqslant 16$

$\Rightarrow 11 \leqslant 3r^2 + 8r \leqslant 28$

$\Rightarrow 10 \leqslant 3r^2 + 8r - 1 \leqslant 27$

$\Rightarrow 10 \leqslant |-3r^2 - 8r + 1| \leqslant 27$

$\Rightarrow 10 \leqslant |g(r)| \leqslant 27$

$\Rightarrow \exists x \in I : |g(x)| > 1$

$\Rightarrow$ No hay un intervalo posible

a) Trabajo f(r):

$$0 = r^3 + 4r^2 - 10$$
$$10 = r(r^2 + 4r)$$
$$\frac{10}{r} - 4r = r^2$$
$$r = \left(\frac{10}{r} - 4r\right)^{1/2}$$

Ahora trabajo $g_2(r)$:

$$g_2(r) = \left(\frac{10}{r} - 4r\right)^{1/2}$$

Desarrollo sobre f(r)

$$= r$$

$\Rightarrow$ $\boxed{g_2 \text{ tiene un punto fijo en } r}$

b) $x_0 = 1.5$

$$x_1 = g_2(1.5)$$
$$= \left(\frac{10}{1.5} - 4 \cdot 1.5\right)^{1/2}$$
$$= 9^{1/2}$$
$$= 3$$
$$x_2 = g(3)$$
$$= \left(\frac{10}{3} - 4.3\right)^{1/2}$$

Esto no esta bien definido

c)
$$g_2'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{-1/2} \cdot \left(-\frac{10}{x^2} - 4\right)$$

$$\mathrm{Dom}(g_2) = \{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge \underbrace{\frac{10}{x} - 4x > 0}\}$$

$$\frac{10}{x} > 4x$$
$$(x > 0 \wedge \tfrac{5}{2} > x^2) \vee (x < 0 \wedge \tfrac{5}{2} < x^2)$$
$$(x > 0 \wedge \sqrt{\tfrac{5}{2}} > x) \vee (x < 0 \wedge \sqrt{\tfrac{5}{2}} < -x)$$
$$0 < x < \sqrt{\tfrac{5}{2}} \vee (x < 0 \wedge x < -\sqrt{\tfrac{5}{2}})$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} : 0 < x < \sqrt{\tfrac{5}{2}} \vee x < -\sqrt{\tfrac{5}{2}} \}$$
$$= \left(-\infty, -\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow I \subseteq \left[0, \sqrt{\tfrac{5}{2}}\right]$$

$$1 < r < \sqrt{\tfrac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow 10 > \frac{10}{r} > \frac{10}{\sqrt{\frac{5}{2}}} \quad \wedge \quad 4 < 4r < 4\sqrt{\frac{5}{2}} \quad \wedge \quad 1 < r^2 < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 10 + 4\sqrt{\frac{5}{2}} > \frac{10}{r} + 4r > \frac{10}{\sqrt{\frac{5}{2}}} + 4 \quad \wedge \quad 10 > \frac{10}{r^2} > 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(10 + 4\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^{-1/2} < \frac{1}{2}\left(\frac{10}{r} + 4r\right)^{-1/2} < \frac{1}{2}\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{5}{2}}} + 4\right)^{-1/2} \quad \wedge \quad 14 < \frac{10}{r^2} + 4 < 8$$

$$\Rightarrow \left(10 + 4\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^{-1/2} \cdot 7 < \frac{1}{2}\left(\frac{10}{r} - 4r\right)^{-1/2} \cdot \left(-\frac{10}{r^2} + 4\right) < \left(\frac{10}{\sqrt{\frac{5}{3}}} + 4\right)^{-1/2} \cdot 8$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{2}\left(\frac{10}{r} - 4r\right)^{-1/2} \cdot \left(-\frac{10}{r^2} - 4\right)\right| > \left(10 + 4\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^{-1/2} \cdot 7$$

$$\Rightarrow |g_2'(r)| > 1$$

$$\Rightarrow \exists x \in I : |g_2'(x)| > 1$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{No hay un intervalo posible}}$

---

a) Trabajo f(r):

$$0 = r^3 + 4r^2 - 10$$

$$4r^2 = 10 - r^3$$

$$r = \left(\frac{10 - r^3}{4}\right)^{1/2}$$

$$r = \frac{(10 - r^3)^{1/2}}{2}$$

Ahora trabajo $g_3(r)$:

$$g_3(r) = \frac{(10 - r^3)^{1/2}}{2}$$ Desarrollo sobre f(r)

$$= r$$

$\Rightarrow$ $\boxed{g_3 \text{ tiene un punto fijo en } r}$

b)

$$g_3(1.5) = \frac{(10 - 1.5^3)^{1/2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6.625}}{2} \simeq 1.2869538$$

c) $$g_3(x) = \frac{(10 - x^3)^{1/2}}{2}$$

$$g_3'(x) = -\frac{(10-x^3)^{-1/2}}{4} \cdot 3x^2$$

$$\begin{aligned} Dom(g_3) &= \{x \in \mathbb{R} : 10 - x^3 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant \sqrt[3]{10}\} \\ &= (-\infty, \sqrt[3]{10}] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I \subset (-\infty, \sqrt[3]{10}]$$

Busco que ∀x ∈ I : $g_3(x)$ ∈ I:

Propongo $I = [1, g_3(1)] = [1, \frac{3}{2}]$

g_3 es decreciente

$$\Rightarrow \max_{x \in I} g_3(x) = g_3(0) = \frac{(10-1)^{1/2}}{2} = \frac{3}{2} \leqslant \frac{3}{2}$$

$$\min_{x \in I} g_3(x) = g_3\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{(10-(\frac{3}{2})^3)^{1/2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{53}{8}}}{2} \geqslant 1$$

$$\Rightarrow \forall x \in I : g_3(x) \in I$$

Verifico ∀x ∈ (0, 2) : $|g_3'(x)| < 1$

$$1 < x < \tfrac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -1 > -x^3 > -\tfrac{27}{8} \quad \wedge \quad 1 < x^2 < \tfrac{9}{4}$$

$$\Rightarrow 9 > 10 - x^3 > \tfrac{53}{8} \quad \wedge \quad \tfrac{3}{4} < \tfrac{3}{4}x^2 < \tfrac{27}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} < (10-x^3)^{-1/2} < \left(\frac{8}{53}\right)^{1/2} \quad \wedge \quad \frac{3}{4} < \frac{3}{4}x^2 < \frac{27}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{(10-x^3)^{-1/2} \cdot 3x^2}{4} < \frac{27}{16} \cdot \left(\frac{8}{53}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow |g_3'(x)| < \frac{27}{16} \cdot \left(\frac{8}{53}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow |g_3'(x)| < 1$$

queda:

$$\boxed{I = [1, 3/2]}$$

---

a) Trabajo f(r):

$$0 = r^3 + 4r^2 - 10$$

$$r^2 (r + 4) = 10$$

$$r^2 = \frac{10}{r+4}$$

$$r = \left(\frac{10}{r+4}\right)^{1/2}$$

Ahora trabajo $g_4(r)$:

$$g_4(r) = \left(\frac{10}{r+4}\right)^{1/2}$$

Desarrollo sobre f(r)

$$= r$$

$$\Rightarrow \boxed{g_4 \text{ tiene un punto fijo en } r}$$

b) $g_4(1.5) = \sqrt{\frac{10}{5.5}} = \sqrt{\frac{20}{11}}$

c) $g_4(x) = \left(\frac{10}{x+4}\right)^{1/2}$

$$g_4'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{x+4}\right)^{-1/2} \cdot \left(-\frac{10}{(x+4)^2}\right)$$

Busco que $\forall x \in I : g_4(x) \in I$:

Propongo $I = [1, 2]$

g_4 es decreciente en $[1, 2]$

$$\Rightarrow \max_{x \in I} g_4(x) = g_4(1)$$

$$= \left(\frac{10}{1+4}\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2} \leq 2$$

$$\min_{x \in I} g_4(x) = g_4(2)$$

$\leqslant 2$

$$\min_{x \in I} g_4(x) = g_4(2) = \left(\frac{10}{2+4}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{5}{3}} \geqslant 1$$

$$\Rightarrow \forall x \in I : g_4(x) \in I$$

Verifico $\forall x \in (1, 2) : |g_4'(x)| < 1$

$$1 < x < 2$$
$$\Rightarrow 5 < x+4 < 6$$
$$\Rightarrow 2 > \frac{10}{x+4} > \frac{5}{3} \quad \wedge \quad 25 < (x+4)^2 < 36$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}} < \left(\frac{10}{x+4}\right)^{-1/2} < \sqrt{\frac{3}{5}} \quad \wedge \quad \frac{2}{5} > \frac{10}{(x+4)^2} > \frac{5}{18}$$
$$\Rightarrow \frac{5}{18}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} < \left(\frac{10}{x+4}\right)^{-1/2} \frac{10}{(x+4)^2} < \frac{2}{5}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}$$
$$\Rightarrow |g_4'(x)| < \frac{2}{5}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}$$
$$\Rightarrow |g_4'(x)| < 1$$

Quedo: $\boxed{I = [1, 2]}$

---

a) $g_5(r) = r - \dfrac{r^3+4r^2-10}{3r^2+8r}$) Hipótesis: r es una raíz de f

$= r - \dfrac{f(r)}{3r^2+8r}$

$= r - \dfrac{0}{3r^2+8r}$) $3r^2+8r \neq 0 \Leftarrow r>0 \;\wedge\; 3x^2+8x$ es >0 en $x>0$

$= r - 0$

$= r$

b) $g_5(1.5) = 1.5 - \dfrac{1.5^3+4\cdot 1.5^2-10}{3\cdot 1.5^2+8\cdot 1.5}$

$= 1.5 - \dfrac{2.375}{18.75}$

c) $g_5(x) = x - \dfrac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$

$g_5'(x) = 1 - \dfrac{(3x^2+8x)(3x^2+8x)-(x^3+4x^2-10)(6x+8)}{(3x^2+8x)^2}$

$$g_5'(x) = 1 - \frac{(3x^2+8x)(3x^2+8x) - (x^3+4x^2-10)(6x+8)}{(3x^2+8x)^2}$$

$$= \frac{(x^3+4x^2-10)(6x+8)}{(3x^2+8x)^2}$$

9)

jueves, 8 de abril de 2021 11:40

$$g(x) = 2^{x-1} = e^{\ln(2^{x-1})} = e^{(x-1)\cdot\ln(2)} = e^{x\cdot\ln(2)-\ln(2)}$$

$$g'(x) = \ln(2)\cdot e^{x\cdot\ln(2)-\ln(2)}$$

$$= \ln(2)\cdot 2^{x-1}$$

Busco que |g'(x)| < 1

$$|g'(x)| < 1$$

$$|\ln(2)\cdot 2^{x-1}| < 1$$

$$2^x < \frac{2}{\ln(2)}$$

$$x < \log_2(2)$$

$$x < \log_2(2) - \log_2(\ln(2))$$

$$x < 1 - \log_2(\ln(2))$$

$$\Rightarrow \quad I \subset (-\infty, 1-\log_2(\ln(2))]$$

Ahora busco que $\forall x \in I \quad g(x) \in I$

Propongo $I = [0, 1]$

g es creciente

$$\Rightarrow \min_{x\in[0,1]} g(x) = g(0)$$

$$= 2^{0-1}$$

$$= \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\max_{x\in[0,1]} g(x) = g(1)$$

$$= 2^{1-1}$$

$= 1 \leq 1$

$\Rightarrow \boxed{x_0 \in I \Rightarrow x_n \text{ converge}}$

Ahora tengo que probar:

$\lim_{n\to\infty} x_n$ es un punto fijo de g

g' es reciente $\wedge$ g' es positiva

$\Rightarrow$

$$\max_{x \in I} |g'(x)| = |g'(1)|$$

$$= \ln(2) \cdot x^{1-1}$$

$$= \ln(2) < 1$$

$\Rightarrow \forall x \in I : |g'(x)| \leq \ln(2) < 1$

Osea que tengo que:

$\langle \forall x \in I : |g'(x)| \leq \ln(2) < 1 \rangle \wedge \langle \forall x \in I : g(x) \in I \rangle \wedge x_0 \in I$

Teorema

$\Rightarrow$

$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n \text{ es un punto fijo de } g}$

10)

sábado, 10 de abril de 2021 19:55

$x_{n+1} = g(x_n)$

$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$

$\lambda \in (0,1)$

$\langle \forall x, y : |g(y) - g(x)| \leq \lambda |y - x| \rangle$

$$\langle \exists C : |x_{n+1} - x^*| \leq C |x_{n+1} - x_n| \rangle$$

$$
\begin{aligned}
& |x_{n+1} - x^*| \\
= \quad & \\
& |g(x_n) - g(x^*)| \\
\leq \quad & \\
& \lambda |x_n - x^*| \\
= \quad & \\
& \lambda |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x^*| \\
\leq \quad & \{\!\!\{\text{Desigualdad triangular}\}\!\!\} \\
& \lambda (|x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x^*|) \\
= \quad & \\
& \lambda |x_{n+1} - x_n| + \lambda |x_{n+1} - x^*|
\end{aligned}
$$

Ahora uso este resultado:

$$
\begin{aligned}
& |x_{n+1} - x^*| \leq \lambda |x_{n+1} - x_n| + \lambda |x_{n+1} - x^*| \\
\Leftrightarrow \quad & \\
& |x_{n+1} - x^*| - \lambda |x_{n+1} - x^*| \leq \lambda |x_{n+1} - x_n| \\
\Leftrightarrow \quad & \\
& (1 - \lambda) |x_{n+1} - x^*| \leq \lambda |x_{n+1} - x_n|
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow$

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}|x_{n+1} - x_n|$$

$\Rightarrow$ ⦃En particular $C = \frac{\lambda}{1-\lambda}$⦄

$$\langle \exists C : |x_{n+1} - x^*| \leq C|x_{n+1} - x_n| \rangle$$

11)

lunes, 12 de abril de 2021 12:13

a)

Sea:

$$g(x) = \frac{x^2 - 3(1-a)x + 2}{3a}$$

Sea r tal que $f(r) = 0$

$$g(r) = \frac{r^2 - 3(1-a)r + 2}{3a}$$

$$= \frac{r^2}{3a} - \frac{3r}{3a} + \frac{3ar}{3a} + \frac{2}{3a}$$

$$= \frac{r^2}{3a} - \frac{3r}{3a} + r + \frac{2}{3a}$$

$$= \frac{r^2 - 3r + 2}{3a} + r$$

$$= \frac{0}{3a} + r$$

$$= r$$

$\Rightarrow$ Las raíces de f son puntos fijos de g

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

$\Rightarrow$ Si x_n converge lo hace a una raíz de f

b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$$0 = r^2 - 3r + 2$$

$$r = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$r = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$r = 2 \lor r = 1$$

$$r_1 = 2$$

$$r_2 = 1$$

Para cada raíz de f hay que encontrar un intervalo de valores de a talque existe un x_0 tal que x_n converge

Con que $|g'(r)| < 1$ alcanza, por los siguientes teoremas:

Sea:
g continua

$$g'(r) < 1 \Rightarrow \langle \exists a, b : r \in [a,b] : \langle \forall x \in [a,b] : g'(x) < 1 \rangle \rangle$$

r un punto fijo de g

$$g'(r) < 1 \Rightarrow \langle \exists a, b : r \in [a,b] : \langle \forall x \in [a,b] : g(x) \in [a,b] \rangle \rangle$$

Ósea, hay un intervalo que satisface las hipótesis del teorema de convergencia y unicidad

$$g(x) = \frac{x^2 - 3(1-a)x + 2}{3a}$$

$$g'(x) = \frac{2x - 3(1-a)}{3a}$$

$$|g'(2)| < 1$$

$$\left| \frac{2 \cdot 2 - 3 + 3a}{3a} \right| < 1$$

$$\left|\frac{1}{3\partial} + \frac{3\partial}{3\partial}\right| < 1$$

$$\left|\frac{1}{3\partial} + 1\right| < 1$$

$$-1 < \frac{1}{3\partial} + 1 < 1$$

$$-2 < \frac{1}{3\partial} < 0$$

$$-6 < \frac{1}{\partial} < 0$$

$$-6 < \frac{1}{\partial} \quad \wedge \quad \frac{1}{\partial} < 0$$

$$\partial < -\frac{1}{6} \quad \wedge \quad \partial < 0$$

$$\partial < -\frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{1}{3\partial} + 1 > 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{3\partial} + 1 < 1\right) \quad \vee \quad \left(\frac{1}{3\partial} + 1 < 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{3\partial} - 1 < 1\right.$$

$$-1 < \frac{1}{3\partial} < 0 \quad \vee \quad \left(\frac{1}{3\partial} < -1 \quad \wedge \quad \frac{1}{3\partial} > -2\right)$$

$$-3 < \frac{1}{\partial} < 0 \quad \vee \quad -6 < \frac{1}{\partial} < -3$$

$$\left(-\frac{1}{3} > \partial \quad \wedge \quad \partial < 0\right) \quad \vee \quad -\frac{1}{6} > \frac{1}{\partial} > -\frac{1}{3}$$

$$\partial < -\frac{1}{3} \quad \vee \quad -\frac{1}{3} < \partial < -\frac{1}{6}$$

$$\partial \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$$

$$|g'(1)| < 1$$

$$\left|\frac{2 \cdot 1 - 3 + 3\partial}{3\partial}\right| < 1$$

$$\left|\frac{-1 + 3\partial}{3\partial}\right| < 1$$

$$-1 < -\frac{1}{3\partial} + 1 < 1$$

$$-2 < -\frac{1}{3\partial} < 0$$

$$6 > \frac{1}{\partial} > 0$$

$$\partial > \frac{1}{6}$$

12)

martes, 13 de abril de 2021 09:13

a) $x = x^2 - 1$

$0 = x^2 - x - 1$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\Rightarrow$ g tiene 2 puntos fijos

$g'(x) = 2x$

$$g'\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 1 + \sqrt{5} > 1$$

$$g'\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=1-\sqrt{5}<-1$$

b) $g(x)=x^2-1$

g es decreciente en $[-1,0]$

$\Rightarrow$

$$\max_{x\in[-1,0]} g(x) = g(-1)$$

$$=(-1)^2-1$$

$$=0\leq 0$$

$$\min_{x \in [-1,0]} g(x) = g(0)$$

$$= 0^2 - 1$$

$$= -1 \geq -1$$

$$\Rightarrow \forall x \in [-1,0] : g(x) \in [-1, 0]$$

$$\Rightarrow \exists x \in [-1,0] : g(x) = x$$

13)

martes, 13 de abril de 2021 09:58

$$|x_n - x_*| < 10^{-3}$$

$$\iff \left|1 + \frac{1}{n+1} - 1\right| < 10^{-3}$$

$$\iff \frac{1}{n+1} < 10^{-3}$$

$$\iff 10^3 < n+1$$

$$\iff 1000 - 1 < n$$

$$\iff n \geqslant 1000$$

$$|f(x_n)| < 10^{-3}$$

$$|(x_n - 1)^{10}| < 10^{-3}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1} - 1\right)^{10} < 10^{-3}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1} - 1\right)^{10} < 10^{-3}$$

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)^{10} < 10^{-3}$$

$$10^{3} < (n+1)^{10}$$

$(n+1)^{10}$ es creciente

$\wedge \quad (1+1)^{10} = 1025 > 10^3$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 : 10^3 < (n+1)^{10}$$