Practico 6:

1) Resolver los sistemas lineales $Ax=b$ para los A y b dados, utilizando sustitución hacia atrás o adelante según corresponde:

a- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix}$

Como se trata de una matriz triangular superior realizamos sustitución hacia atrás:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 4x_2 + 5x_3 = 13 \\ 6x_3 = 6 \end{cases}$$

$6x_3 = 6$

$\boxed{x_3 = 1}$

$$\begin{cases} 4x_2 + 5x_3 = 13 \\ 4x_2 + 5 = 13 \\ 4x_2 = 8 \\ \boxed{x_2 = 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 + 4 + 3 = 10 \\ \boxed{x_1 = 3} \end{cases}$$

b- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$

Como se trata de una matriz triangular inferior realizamos sustitución hacia adelante

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ 2x_2 = 8 \\ -1x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{x_1 = 2}$

$$\begin{cases} 2x_2 = 8 \\ \boxed{x_2 = 4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2 + 20 - 3x_3 = 0 \\ 3x_3 = 18 \\ \boxed{x_3 = 6} \end{cases}$$

c- $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 21 \\ 6 \\ -5 \\ 40 \end{bmatrix}$

Como tenemos una matriz triangular superior hacemos sustitución hacia atrás.

$$\begin{cases} 2x_1 - 1x_2 + x_3 + 3x_5 = 5 \\ 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 2x_5 = 21 \\ -5x_3 + 11x_5 = 6 \\ 2x_4 - 7x_5 = -5 \\ 40x_5 = 40 \end{cases}$$

$40x_5 = 40$

$\boxed{x_5 = 1}$

$$\begin{cases} 2x_4 - 7x_5 = -5 \\ 2x_4 - 7 = -5 \\ 2x_4 = 2 \\ \boxed{x_4 = 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x_3 + 11x_5 = 6 \\ -5x_3 + 11 = 6 \\ -5x_3 = -5 \\ \boxed{x_3 = 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 2x_5 = 21 \\ 4x_2 + 5 + 10 + 2 = 21 \\ 4x_2 = 4 \\ \boxed{x_2 = 4} \end{cases}$$

$2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_5 = 5$

$2x_1 - 1 + 1 + 3 = 5$

$2x_1 = 2$

$\boxed{x_1 = 1}$

2) En un supermercado Martín compra 5 paquetes de un producto A, 4 de B y 3 de C, pagando en total C$53 (peso cordobas). Natalia compra 2 paquetes de A, 7 de B y 4 de C, gastando C$46. Un tercer cliente, Oscar, compra 8 de A, B de B y 5 de C, pagando C$99 ¿Cuanto vale cada producto?

$$\begin{cases} 5A + 4B + 3C = C\$53 \\ 2A + 7B + 4C = C\$46 \\ 8A + 13B + 5C = C\$99 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 8 & 13 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 \\ 46 \\ 99 \end{bmatrix}$$

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 8 & 13 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_2 \leftarrow f_2 - \frac{2}{5} f_1 \\ f_3 \leftarrow f_3 - \frac{8}{5} f_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 27/5 & 14/5 \\ 0 & 33/5 & 1/5 \end{bmatrix} f_3 \leftarrow f_3 - \frac{11}{9} f_2 \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 27/5 & 14/5 \\ 0 & 0 & \frac{-29}{5} \end{bmatrix}$$

$$b \rightarrow \begin{bmatrix} 53 \\ 46 \\ 99 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 53 \\ 124/5 \\ 71/5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 53 \\ 124/5 \\ -145/9 \end{bmatrix}$$

?

3) Mostrar que el costo total de operaciones del método de eliminación gaussiana para resolver un sistema $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es $\mathcal{O}(\frac{2}{3}n^3)$ flops

recordar $= \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Algoritmo

for $k = 1, \ldots n-1$ do $\longrightarrow \sum_{k=1}^{n-1}$

for $i = k+1, \ldots n$ do $\longrightarrow \sum_{i=k+1}^{n}$

if $(a_{kk} = 0)$ STOP!

$m \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$ $\longrightarrow$ 1 división

for $j = k+1, \ldots, n$ do $\longrightarrow \sum_{j=k+1}^{n}$

$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m a_{kj}$ $\longrightarrow$ 1 resta y 1 producto

endfor (j)

$b_i \leftarrow b_i - m b_k$ $\longrightarrow$ 1 resta y 1 producto

endfor (i)

endfor (k)

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\sum_{i=k+1}^{n} 1 + \left(\sum_{j=k+1}^{n} 2\right) + 2\right] = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\sum_{i=k+1}^{n} 1 + 2(n-k) + 2\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\sum_{i=k+1}^{n} 2(n-k) + 3\right] = \sum_{k=1}^{n-1}\left[2(n-k)(n-k) + 3(n-k)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)^2 + 3(n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} 3(n-k)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 + 3\sum_{k=1}^{n-1} n-k = \cancel{2}^{1}\,\frac{n(n-1)(2n-1)}{\cancel{6}_{3}} + 3\,\frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{2n^3}{3} - n^2 + \frac{n}{3} + \frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n = \mathcal{O}\left(\frac{2}{3}n^3\right)$$

4) Considerar el sistema lineal $Ax = b$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a- Encontrar una solución usando el método de eliminación Gaussiana

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 \leftarrow f_2 - \frac{1}{2} f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5/2 & 13/2 \\ 0 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3 \leftarrow f_3 - 2 f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5/2 & 13/2 \\ 0 & 0 & -4 & -9 \end{array}\right]$$

$-4x_3 = -4$

$\boxed{x_3 = 1}$

$2x_2 + 5/2\, x_3 = 13/2$

$2x_2 + 5/3 = 13/2$

$2x_2 = 4$

$\boxed{x_2 = 2}$

$2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$

$2x_1 - 2 \cdot 2 + 1 = -1$

$2x_1 - 4 + 1 = -1$

$2x_1 = 2$

$\boxed{x_1 = 1}$

b- Encontrar una solución usando descomposición LU.

Para encontrar las matrices L y U hacemos

(*) fila k de U: $\quad U_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} U_{mj}. \qquad j = k, \dots n$

(*) columna k de L: $\quad l_{ik} = \frac{1}{U_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} U_{mk} \right) \qquad i = k+1, \dots n$

$k = 1 \quad U_{1j} = a_{1j} \rightarrow [2 \;\; -2 \;\; 1]$

$k = 2 \quad U_{2j} = (*) \rightarrow [0 \;\; 2 \;\; 5/2]$

$k = 3 \quad U_{3j} = (*) \rightarrow [0 \;\; 0 \;\; -4]$

$k = 1 \quad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{U_{11}} \rightarrow [1 \;\; 1/2 \;\; 0]$

$k = 2 \quad l_{i2} = (*) \rightarrow [0 \;\; 1 \;\; 2]$

$$\begin{array}{cc} L & U \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot & \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = A \end{array}$$

$Ly = b \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right]$ haciendo sustitucion hacia adelante obtenemos $[-1 \quad 13/2 \quad -4]$

$Ux = b \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5/2 & 13/2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right]$ haciendo sustitucion hacia atras obtenemos $[1 \quad 2 \quad 1]$

5) Demostrar las siguientes afirmaciones

a- El producto de matrices triangulares inferiores (superiores) es triangular inferior (superior). Ademas si las matrices tienen 1 en la diagonal su producto tambien los tiene.

Probamos por induccion.

Caso base: $n=2$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$

Si $a_{11}, a_{22}, b_{11}, b_{22}$ es 1 $\Longrightarrow a_{11}b_{11} = 1$
$a_{22}b_{22} = 1$

hipotesis: Suponemos que vale para $n=p$

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & & a_{pp} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & & \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdot & b_{pp} \end{bmatrix}$ AB es triangular inferior y la diagonal es $=1$

Probemos que vale para $n = p+1$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{p\times p} & O_{p\times 1} \\ \hline A_{1\times p} & A_{p+1\,p+1} \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{p\times p} & O_{p\times 1} \\ \hline B_{1\times p} & B_{p+1\,p+1} \end{array}\right]$$

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{p\times p} B_{p\times p} + \overset{0}{O_{p\times 1} B_{1\times p}} & \overset{0}{A_{p\times p} O_{p\times 1}} + \overset{0}{O_{p\times 1} B_{p+1\,p+1}} \\ \hline A_{1\times p} B_{p\times p} + A_{p+1\,p+1} B_{1\times p} & \underset{0}{A_{1\times p} O_{p\times 1}} + A_{p+1\,p+1} B_{p+1\,p+1} \end{array}\right]$$

tiene 1 en la diagonal por hip. es triangular inferior

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{p\times p} B_{p\times p} & 0 \\ \hline A_{1\times p} B_{p\times p} + A_{p+1\,p+1} B_{1\times p} & \underbrace{\underbrace{A_{p+1\,p+1}}_{1} \underbrace{B_{p+1\,p+1}}_{1}}_{1} \end{array}\right] = AB \text{ es triangular inferior}$$

tiene 1 en la diagonal

b- La inversa de una matriz triangular inferior (superior) es triangular inferior (superior). Además, si la matriz tiene 1 en la diagonal su inversa también los tiene.

c- Supongamos que $A = LU$ donde L tiene unos en la diagonal y U elementos diagonales no nulos. Demostrar que la descomposición LU es única.

Supongamos que existen U' y L' descomposición de A como pide el ejercicio, y por lo tanto invertibles:

$$A = LU \quad y \quad A = L'U' \quad \Rightarrow \quad LU = L'U'$$

$$L^{-1} L U U'^{-1} = L^{-1} L' U' U'^{-1}$$

$$U U'^{-1} = L^{-1} L'$$

Como ya probamos que el producto de 2 matrices triangular superior es triangular superior (idem inferior) y que la inversa de triangular superior es triangular superior (idem inferior) nos queda:

- U triangular superior y U'^{-1} triangular superior $= UU'^{-1}$ triangular superior
- L^{-1} triangular inferior y L' triangular inferior $= L^{-1}L'$ triangular inferior

una matriz triangular superior igual a una matriz triangular inferior, lo que nos dice q entonces esa matriz es diagonal. Más aún, como la diagonal de L^{-1} son todos unos, nos queda la matriz identidad. Luego como la inversa es única entonces $U = U'$ y $L = L'$

6) Decidir si las siguientes afirmaciones son V o F.

a- Sea $A = LU$ la descomposición LU de A. Entonces $\det(A) = \det(U)$

Verdadero: ya que como L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal entonces $\det(L) = 1$. Luego tenemos

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\,\det(U) = \det(U)$$

b- La matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ no tiene descomposición LU.

Verdadero puesto que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ l_{21}U_{11} & l_{21}U_{12} + U_{22} \end{bmatrix}$$

Entonces $U_{11} = 0$ lo que implica que $l_{21}U_{11} = 0$ lo cual es absurdo.

c- La matriz $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ no tiene descomposición LU.

Falso. (nos basamos en esto)

7) Probar que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & r & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

tiene una única descomposición LU para $r \neq 0$ e infinitas para $r = 0$.

Hagamos la descomposición LU:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{U_{11}}^{=1} & \overbrace{U_{12}}^{=1} & \overbrace{U_{13}}^{=1} \\ \overbrace{l_{21}U_{11}}^{=0} & \overbrace{l_{21}U_{12} + U_{22}}^{r} & \overbrace{l_{21}U_{13} + U_{23}}^{2} \\ \overbrace{l_{31}U_{11}}^{=0} & \overbrace{U_{12}l_{31} + U_{22}l_{32}}^{0} & U_{13}l_{31} + U_{23}l_{32} + U_{33} \end{bmatrix}$$

Nos queda que como $U_{22} = r$ entonces

$$\begin{cases} l_{32} r = 0 \\ 2 l_{32} + U_{33} = 3 \end{cases}$$

si $r \neq 0 \Rightarrow l_{32} = 0$ y $U_{33} = 3$

si $r = 0 \Rightarrow$ queda un sistema con infinitas soluciones.

8) Considerar el sistema $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ obtener los autovalores y autovectores de la matriz de iteración asociada al método de Gauss-Seidel para decidir si el método es convergente independientemente del x_0.

tenemos 3 teoremas de convergencia

1) $\|M^{-1}N\| < 1$ para alguna norma matricial inducida.

2) $\rho(M^{-1}N) < 1$ (radio espectral) $\quad / \rho(A) = \inf\{\|A\|\}$

3) A diagonalmente dominante (Jacobi)

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \longrightarrow Ax = b \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para Gauss-Seidel $M = L + D$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $N = -U$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Calculamos M^{-1}.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 \leftarrow f_2 - f_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calculamos $M^{-1}N =$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{M^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{M^{-1} \cdot N}$$

para calcular los autovalores buscamos las raíces de

$$\det(M^{-1}N - Id\,h) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -h & 1 \\ 0 & -1-h \end{bmatrix}\right) = -h(-1-h)$$

$$= h + h^2 = h(1+h) \to \boxed{h_1 = 0}\ \boxed{h_2 = -1}$$

En este caso el radio espectral $p(M^{-1}N) = \max\{|0|, |-1|\} = 1$. Como no se cumple que $p(M^{-1}N) < 1$; no converge $\forall x^0$.

para calcular los autovectores buscamos:

$$(M^{-1}N - h_1 I)v_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \underline{(x, 0)} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(M^{-1}N - h_2 I)v_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \underline{(-y, y)} \quad y \in \mathbb{R}$$

escribamos $(x, 0)$ como $(t, 0)$ y $(-y, y)$ como $(-s, s)$

$$x^0 = (x, y) = (t, 0) + (-s, s) = (t - s, s) \Rightarrow \begin{cases} x = t - s \Rightarrow t = x + y \\ y = s \end{cases}$$

Entonces obtengo que:

$$M^{-1}.N\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1}.N\left((x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= (x+y)\,M^{-1}.N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\,M^{-1}N\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (x+y)\,h_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\,h_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{(x+y)\,0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + y\,(-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y \\ -y \end{pmatrix}$$

NOTAS:

Con esto pruebo que si:

Si $x^{(0)} = (x, 0) \rightarrow x^{(1)} = (0, 0)$ (a)

Si $x^{(0)} = (x, y) \rightarrow x^{(1)} = (y, -y) \rightarrow x^{(k+1)} = -x^{(k)}$

$$x^{(k)} \begin{cases} (y, -y) & \text{si } k \text{ es impar} \\ (-y, y) & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$ (b) y (c)

9) Dado el sistema $Ax = b$ donde $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

a- Deducir la iteración de Jacobi y Gauss-Seidel para resolver el sistema lineal $Ax = b$

Jacobi tomo $M = D$ y por lo tanto $N = -(L+U)$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad M^{-1} N = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego si hacemos

$$Ax = b$$
$$(M - N)x = b$$
$$Mx - Nx = b$$
$$Mx = b + Nx$$
$$x = M^{-1}(b + Nx)$$
$$x = N^{-1} N x + M^{-1} b$$

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2/3 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 5/3 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

HOJA N°

FECHA

Gauss - Seidel tomo $M = L + D$ y por lo tanto $N = -U$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/6 & 1/2 \end{bmatrix} \quad M^{-1} N = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$X^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/6 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

b- Justifico con diagonalmente dominante.

10)
Igual a lo anterior

11) Sea A una matriz $\mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior e invertible. Probar que tanto el método de Jacobi como el de Gauss convergen a lo sumo n pasos.