Definiciones

jueves, 20 de mayo de 2021 09:07

Definiciones:

Matriz de iteración asociada al método de Gauss-Seidel de A

$$M^{-1}N$$

Donde:

$M = \text{trianguloInferior(A)}$

$N = -\text{trianguloSuperiorEstricto(A)}$

La iteración de Gauss-Seidel asociada a $Ax = b$ es:

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

Donde:

$M = \text{trianguloInferior(A)}$

$N = -\text{trianguloSuperiorEstricto(A)}$

Matriz de iteración asociada al método de Jacobi de A

$$M^{-1}N$$

Donde:

$M = \text{diagonal}(A)$

$N = -\text{quitarDiagonal}(A)$

La iteración de Jacobi asociada a $Ax = b$ es:

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

Donde:

$M = \text{diagonal}(A)$

$N = -\text{quitarDiagonal}(A)$

Radio espectral:

Sea:

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es un aoutovalor de } A\}$

Teoremas

martes, 27 de julio de 2021 18:26

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior:

$$Ax = y \iff x_j = \frac{y_j - \sum_{k=1}^{j-1} A_{j,k} x_k}{A_{j,j}}$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior:

$$Ax = y \iff x_j = \frac{y_j - \sum_{k=j+1}^{n} A_{j,k} x_k}{A_{j,j}}$$

Teorema:
Sea:
$A, M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$b \in \mathbb{R}^n$
$A = M - N$
$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$ (una iteración-suseción)
$\|\cdot\|$ una norma matricial indusida

$$\|M^{-1}N\| < 1 \Rightarrow \langle \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n : x^{(k)} \text{ converge a una solución } a\ Ax = b \rangle$$

Teorema:
Sea:
$A, M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$A = M - N$
$x^*, b \in \mathbb{R}^n$

$$Ax^* = b$$
$$x^{(k)} = M^{-1}Nx^{(k-1)} + M^{-1}b$$

$$\left\langle \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n : x^{(0)} - x^* \in \text{gen}\{v \in \mathbb{R}^n : M^{-1}Nv = \lambda v : |\lambda| < 1\} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \right\rangle$$

ⓐ

$$\left\langle \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n : \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \right\rangle \Leftrightarrow \rho(M^{-1}N) < 1$$

Demostraciones

jueves, 8 de julio de 2021 20:41

Descomposición LU:

$A = LU$

$U = BA$

$A = LBA$

$\mathrm{Id} = LB$

$\mathrm{Id} = BL$

$\mathrm{L} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{Id}$

$\mathrm{L} = \mathrm{B}^{-1}$

Teorema:

Sea:

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$

$$\left\langle \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n : \left\langle \exists \lambda : |\lambda| < 1 : \; Ax^{(0)} = \lambda x^{(0)} \right\rangle : \; \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = 0 \right\rangle$$

(1 Para autovectores)

$$\left\langle \forall x^{(0)} \in \mathrm{gen}\{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v : |\lambda| < 1\} : \; \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = 0 \right\rangle$$

(2 Generalización)

$$\left\langle \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n : \; \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = 0 \right\rangle \Leftrightarrow \rho(A) < 1$$

(3 Con radio espectral)

Demostraciones:

1

$$\left\langle \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n : \langle \exists \lambda : |\lambda| < 1 : \ Ax^{(0)} = \lambda x^{(0)} \rangle : \ \lim_{k \to \infty} x^{(k)} = 0 \right\rangle$$

Primero pruebo que si $Ax^{(0)} = \lambda x^{(0)}$, entonces $x^{(k)} = \lambda^k x^{(0)}$ por inducción:

Caso base $k = 0$:

$x^{(0)}$

$=$

$1x^{(0)}$

$=$

$\lambda^0 x^{(0)}$

Caso inductivo para $k + 1$ suponiendo que vale para k:

$x^{(k+1)}$

$=$

$Ax^{(k)}$

$=$ {Hipótesis inductiva}

$A\left(\lambda^k x^{(0)}\right)$

$=$

$\lambda^k \left(A x^{(0)}\right)$

$=$

$\lambda^k \lambda x^{(0)}$

$=$

$\lambda^{k+1} x^{(0)}$

Ahora hago la demostración trabajando con el termino del $\forall$:

$\lim_{k \to \infty} x^{(k)}$

$=$ {Demostración anterior}

$\lim_{k \to \infty} \lambda^k x^{(0)}$

$=$

$\left(\lim_{k \to \infty} \lambda^k\right) x^{(0)}$

$=$ {$|\lambda| < 1$}

$0x^{(0)}$

$=$

0

②

$$\left\langle \forall x^{(0)} \in \text{gen}\{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v : |\lambda| < 1\} : \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = 0 \right\rangle$$

Trabajo si el $\forall$:
Sea
$m = \dim(\text{gen}\{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v : |\lambda| < 1\})$

$x^{(0)}$ se puede escribir como combinación lineal de autovectores de autovalor con valor absoluto < 1
Así que sea:

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i$$

Con $v_1, v_2, \dots, v_m$ autovectores con autovalor $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ tal que $|\lambda_i| < 1$

Primero voy a probar que para todo k:

$$x^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \lambda_i^k v_i$$

Por inducción:

Caso base para $k = 0$ es la hipótesis.

$x^{(0)}$

$=$

$\sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i$

$=$

$\sum_{i=1}^{m} \mu_i 1 v_i$

$=$

$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \lambda_i^0 v_i$

Caso inductivo para $k+1$ suponiendo que vale para k:

$$x^{(k+1)}$$
$=$
$$Ax^{(k)}$$
$=$ {Hipótesis inductiva}
$$A\sum_{i=1}^{m} * \mu_i \lambda_i^k v_i$$
$=$
$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \lambda_i^k A v_i$$
$=$ {Los v_i son autovectores de A con autovalor λ_i}
$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \lambda_i^k \lambda_i v_i$$
$=$
$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \lambda_i^{k+1} v_i$$

Ahora hago la demostración en si:

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}$$
$=$ {Demostración anterior}
$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \mu_i \lambda_i^k v_i$$
$=$
$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \left(\lim_{k\to\infty} \lambda_i^k\right) v_i$$
$=$ {$|\lambda| < 1$}
$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i 0 v_i$$
$=$
$$0$$

③

$$\left\langle \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n : \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = 0 \right\rangle \Leftrightarrow \rho(A) < 1$$

$$\rho(A) < 1$$

$\Leftrightarrow$ { 🤔 }

$$\operatorname{gen}\{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v : |\lambda| < 1\} = \mathbb{R}^n$$

$\Leftrightarrow$ {②}

$$\left\langle \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n : \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = 0 \right\rangle$$

Teorema:

Sea:

$A, M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$A = M - N$

$x^*, b \in \mathbb{R}^n$

$Ax^* = b$

$x^{(k)} = M^{-1}Nx^{(k-1)} + M^{-1}b$

$$\left\langle \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n : x^{(0)} - x^* \in \operatorname{gen}\{v \in \mathbb{R}^n : M^{-1}Nv = \lambda v : |\lambda| < 1\} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \right\rangle$$

ⓐ

$$\left\langle \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n : \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \right\rangle \Leftrightarrow \rho(M^{-1}N) < 1$$

ⓑ

Demostración:
⊛ Antes que nada pruebo $x^{(k)} - x^* = M^{-1}N\left(x^{(k-1)} - x^*\right)$

$$x^{(k)} - x^*$$
$= \{$Definición $x^{(k)}\}$
$$M^{-1}Nx^{(k-1)} + M^{-1}b - x^*$$
$= \{b = Ax^*\}$
$$M^{-1}Nx^{(k-1)} + M^{-1}Ax^* - x^*$$
$=$
$$M^{-1}Nx^{(k-1)} + (M^{-1}A - \mathrm{Id}_n)x^*$$
$= \{A = M - N\}$
$$M^{-1}Nx^{(k-1)} + (M^{-1}(M - N) - \mathrm{Id}_n)x^*$$
$=$
$$M^{-1}Nx^{(k-1)} + (\mathrm{Id}_n - M^{-1}N - \mathrm{Id}_n)x^*$$
$=$
$$M^{-1}Nx^{(k-1)} - M^{-1}Nx^*$$
$=$
$$M^{-1}N\left(x^{(k-1)} - x^*\right)$$

ⓐ

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$$
$\Leftrightarrow$
$$\lim_{k\to\infty}\left(x^{(k)} - x^*\right) = 0$$
$\Leftarrow \{$Por ⊛ esto es un caso particular ② del teorema anterior con $A = M^{-1}N\}$
$$x^{(0)} - x^* \in \mathrm{gen}\{v \in \mathbb{R}^n : M^{-1}Nv = \lambda v : |\lambda| < 1\}$$

ⓑ

$$\left\langle \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n : \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \right\rangle$$
$\Leftrightarrow$
$$\left\langle \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n : \lim_{k\to\infty}\left(x^{(k)} - x^*\right) = 0 \right\rangle$$
$\Leftrightarrow \{$Por ⊛ esto es un caso particular de ③ del teorema anterior con $A = M^{-1}N\}$

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

Teorema: (falso)
Sea:
$A, M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$A = M - N$
$x^*, b \in \mathbb{R}^n$
$Ax^* = b$
$x^{(k)} = M^{-1}Nx^{(k-1)} + M^{-1}b$

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \Leftrightarrow \; x^{(0)} \in \operatorname{gen}\{v \in \mathbb{R}^n : M^{-1}Nv = \lambda v : |\lambda| < 1\}$$

1)

jueves, 20 de mayo de 2021 09:32

1 a)

$$X_3 = \frac{6}{6} = 1$$

$$X_2 = \frac{13 - 5 \cdot 1}{4} = 2$$

$$X_3 = \frac{10 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3}{1} = 3$$

1b)

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{8 - 0 \cdot 2}{2} = 4$$

$$x_3 = \frac{0 - (-1) \cdot 2 - 5 \cdot 4}{-3} = 6$$

1c)

$$x_5 = \frac{10}{10} = 1$$

$$x_4 = \frac{-5 - (-7) \cdot 1}{2} = 1$$

$$x_3 = \frac{6 - 0 \cdot 1 - 11 \cdot 1}{-5} = 1$$

$$x_2 = \frac{21 - 5 \cdot 1 - 10 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{4} = 1$$

$$x_1 = \frac{5 - (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 - 3 \cdot 1}{} = 1$$

$$x_1 = \frac{5 - (-1)\cdot 1 - 1\cdot 1 - 0\cdot 1 - 3\cdot 1}{2} = 1$$

2) 🛠️

jueves, 20 de mayo de 2021 10:06

$$5A + 4B + 3C = 53$$

$$2A + 7B + 4C = 46$$

$$8A + 13B + 5C = 99$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 8 & 13 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 \\ 46 \\ 99 \end{bmatrix}$$

Lo llevo a una semi-triangular:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 3 & 53 \\ 2 & 7 & 4 & 49 \\ 8 & 13 & 5 & 99 \end{array}\right] \xrightarrow[F_1 - \frac{5}{2}F_2]{F_3 - 4F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\frac{27}{2} & -7 & -\frac{139}{2} \\ 2 & 7 & 4 & 49 \\ 0 & -15 & -11 & -97 \end{array}\right]$$

3)

jueves, 20 de mayo de 2021 10:14

La cantidad de operaciones:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n}\left(1+3+\sum_{j=k+1}^{n}3\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n}4(+3(n-k-1))$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}4((n-k-1)+3n(n-k-1)-k(n-k-1)-(n-k-1))$$

$$=\frac{(n-2)(n-1)(8n+9)}{6}$$

$\in O(n^3)$

4)

jueves, 20 de mayo de 2021 20:55

1 a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & -5 & -13 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 + F_1]{F_2 + F_1/4} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & -5 & -13 \\ 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[-F_3/4]{-F_1/4} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{13}{4} \\ 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 - \frac{7}{4}F_3]{F_1 - \frac{5}{4}F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$X_1 = 1$

$X_2 = 2$

$X_3 = 1$

1 b) Factorización LU:

$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1/2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Aplico a la Id las operaciones opuestas en el sentido inverso

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xleftarrow{F_2 + F_1/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xleftarrow{F_3 + 2F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

$Ax = b$

$L(Ux) = b$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} UX = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$

$[UX]_1 = -1$

$[UX]_2 = 6 - \frac{1}{2}(-1) = \frac{13}{2}$

$[UX]_3 = 9 - 0\cdot(-1) - 2\cdot\frac{13}{2} = -4$

$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{13}{2} \\ -4 \end{bmatrix}$

$x_3 = \frac{-4}{-4} = 1$

$x_2 = \frac{\frac{13}{2} - \frac{5}{2}\cdot 1}{2} = 2$

$x_1 = \frac{-1 - (-2)\cdot 2 - 1\cdot 1}{2} = 1$

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

1c) $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} UX = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$[UX]_1 = -2$

$[UX]_2 = 1 - \frac{1}{2}(-2) = 2$

$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} \\ 0 & d_{2,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$d_{1,1} = 2$

$d_{1,2} = -2$

$d_{1,3} = 1$

$d_{1,1}\cdot L_{2,1} = 1 \Rightarrow L_{2,1} = \frac{1}{2}$

$d_{1,1}\cdot L_{3,1} = 0 \Rightarrow L_{3,1} = \frac{0}{2} = 0$

$d_{1,2}\cdot L_{2,1} + d_{2,2} = 1 \Rightarrow -2\cdot\frac{1}{2} + d_{2,2}$

$d_{1,3}\cdot L_{2,1} + d_{2,3} = 3 \Rightarrow 1\cdot\frac{1}{2} + d_{2,3}$

$d_{1,2}\cdot L_{3,1} + d_{2,2}\cdot L_{3,2} = 4 \Rightarrow -2\cdot$

$d_{1,3}\cdot L_{3,1} + d_{2,3}\cdot L_{3,2} + d_{3,3} = 1 \Rightarrow$

$$\begin{matrix} d_{3,3} \\ d_{2,3} \\ d_{1,3} \end{matrix}\Bigg]$$

$= 1 \Rightarrow d_{2,2} = 2$

$= 3 \Rightarrow d_{2,2} = \frac{5}{2}$

$0 + 2 \cdot L_{3,2} = 4 \Rightarrow L_{3,2} = 2$

$1 \cdot 0 + \frac{5}{2} \cdot 2 + d_{3,3} = 1 \Rightarrow d_{3,3} = -4$

$[Ux]_3 = 3 - 0(-2) - 2 \cdot 2 \quad = -7$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$x_3 = \frac{7}{4}$

$x_2 = \frac{2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{4}}{2} = \frac{11}{16}$

$x_1 = \frac{-2 - (-2)\frac{11}{16} - 1 \cdot \frac{7}{4}}{2} = -\frac{7}{16}$

$$x \begin{bmatrix} -\frac{7}{16} \\ \frac{11}{16} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} Ux = \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$[Ux]_1 = -10$

$[Ux]_2 = 4 - \frac{1}{2}(-10) = 9$

$[Ux]_3 = 8 - 0 \cdot (-10) - 2 \cdot 9 = -10$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -10 \\ 9 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$x_3 = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}$

$x_2 = \frac{9 - \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}}{2} = \frac{11}{8}$

$x_1 = \frac{-10 - (-2)\frac{11}{8} - 1\frac{5}{2}}{2} = -\frac{39}{8}$

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{39}{8} \\ \frac{11}{8} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

5)

viernes, 21 de mayo de 2021 20:36

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$
A es triangular inferior $\Leftrightarrow \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_{\leq n} : i < j : [A]_{i,j} = 0$

5a)

A, B son triangulares inferores $\Rightarrow \quad AB$ es triangular inferior

$$
\begin{aligned}
& \quad AB \text{ es triangular inferior} \\
\Leftrightarrow & \\
& \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_{\leq n} : i < j : [AB]_{i,j} = 0
\end{aligned}
$$

Prueba esto suponiendo la cuantificación

$$
\begin{aligned}
& \quad [AB]_{i,j} = 0 \\
\Leftrightarrow & \\
& \quad \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,j} = 0 \\
\Leftrightarrow & \ \{\!\{ i < j \}\!\} \\
& \quad \sum_{k=1}^{j-1} [A]_{i,k}[B]_{k,j} + \sum_{k=j}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,j} = 0 \\
\Leftrightarrow & \ \{\!\{ \text{En la primer } \textstyle\sum, k < j \Rightarrow [B]_{k,j} = 0, \text{ en la segunda } \textstyle\sum, j < k \Rightarrow i < k \Rightarrow [A]_{i,k} = 0 \}\!\} \\
& \quad \sum_{k=1}^{j-1} [A]_{i,k} 0 + \sum_{k=j}^{n} 0 [B]_{k,j} = 0 \\
& \quad 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

A es triangular inferor con 1s en la diagonal $\Leftrightarrow \quad A$ es triangular inferor $\wedge \ \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n} \ : [A]_{i,i} = 1$

A, B son triangulares inferores con 1s en la diagonal $\Rightarrow$ AB es triangular inferior con 1s en la diagonal

Voy a probar$\forall i \in \mathbb{N}_{\leq n}$: $[AB]_{i,i} = 1$ suponiendo el antecedente:

$$[AB]_{i,i} = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,i} = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{i-1} [A]_{i,k}[B]_{k,i} + [A]_{i,i}[B]_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,i} = 1$$

$\Leftrightarrow$ {En la primer $\sum$: $k < i \Rightarrow$ $[B]_{k,i} = 0$, en la segunda $\sum$: $i < k \Rightarrow$ $[A]_{i,k} = 0$}

$$\sum_{k=1}^{i-1} [A]_{i,k}0 + 1 \cdot 1 + \sum_{k=i+1}^{n} 0[B]_{k,i} = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{i-1} 0 + 1 + \sum_{k=i+1}^{n} 0 = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$1 = 1$$

5b)
Sea
$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$
A invertible

A es triangular inferior $\Rightarrow A^{-1}$ es triangular inferior

A^{-1} es triangular inferior
$\Leftrightarrow$
$\forall i, j \in \mathbb{N}_{\leq n} : i < j : [A^{-1}]_{i,j} = 0$

Si A es triangular inferior, se puede reducir a la Id
con operaciones elementales por fila de la forma:
$\mathrm{F}_i - a\mathrm{F}_j$ con $i > j$

$a\mathrm{F}_i$

Aplicar estás operaciones a una matriz triangular inferior da una matriz triangular inferior
Por ende, aplicar muchas de ellas a la identidad da una matriz triangular inferior

5c)

Sean:
L, U, L', U' invertibles

L y U son una descompozición LU de $A \wedge L'$ y U' son una descompozición LU de $A \quad \Rightarrow \quad L = L' \wedge \; U = U'$

Parto de una parte de la hipótesis, suponiendo el resto

$$A = LU \wedge A = L'U'$$
$\Rightarrow$
$$LU = L'U'$$
$\Rightarrow$
$$L'^{-1}LUU^{-1} = L'^{-1}L'U'U^{-1}$$
$\Rightarrow$
$$L'^{-1}L = U'U^{-1}$$
$\Rightarrow$ {[}L y L'son tringulares inferiores con 1s en la diagonal

$\Rightarrow L$ y L'^{-1}son tringulares inferiores con 1s en la diagonal

$\Rightarrow L'^{-1}L$ es tringular inferior con 1s en la diagonal

U'y U son triangulares superiores

$\Rightarrow U'$y U^{-1} son triangulares superiores

$\Rightarrow U'U^{-1}$ es triangular superior

Los únicos elementos no nulos en común entre $L'^{-1}L$ y $U'U^{-1}$ son los de la diagonal, que son todos 1

$\Rightarrow L'^{-1}L = U'U^{-1} = \mathrm{Id}$

{]}
$$L'^{-1}L = \mathrm{Id} \;\wedge\; U'U^{-1} = \mathrm{Id}$$
$\Rightarrow$ {[}Por definición de inversa{]}
$$L' = L \wedge U' = U$$

6)

miércoles, 26 de mayo de 2021 19:50

6a)

$$A = LU$$

$\Rightarrow$

$$\det(A) = \det(LU)$$

$\Rightarrow$

$$\det(A) = \det(L) * \det(U)$$

$\Rightarrow \{L \text{ tienen 1s en la diagonal} \Rightarrow \det(L) = 1\}$

$$\det(A) = \det(U)$$

6 b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot b + 0 \cdot 0 & 1 \cdot c + 0 \cdot d \\ a \cdot b + 1 \cdot 0 & a \cdot c + 1 \cdot d \end{bmatrix}$$

$b = 0$
$1 = ab$
$1 = c$
$1 = a \cdot c + d$

$b = 0$
$1 = a \cdot 0$ ✗
$1 = c$
$1 = a + d$

No tiene solución

6c) Si tiene

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

7)

jueves, 27 de mayo de 2021 09:15

Primero caso r ≠ 0

$$r \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{Id}_2 \text{ y } A \text{ son una descomposición LU de } A$$

$\Rightarrow$ {Ejercicio 5c, Id_2 y A son invertibles}

$$A \text{ tiene una única descomposición LU}$$

Caso $r = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & g & h \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ ad & ae+g & af+h \\ bd & be+gc & bf+ch+i \end{bmatrix}$$

$d, e, f = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+g & a+h \\ b & b+gc & b+ch+i \end{bmatrix}$$

$a, b = 0$

$$0 \quad 0 \quad 3 \qquad b \quad b+gc \quad b+ch+i$$

$a, b = 0$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & g & h\\ 0 & gc & ch+i\end{bmatrix}$$

$g = 0, \ h = 2$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2c+i\end{bmatrix}$$

$$3 = 2c + i$$

$$i = 3 - 2c$$

$$\forall c \in \mathbb{R} : \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & c & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3-2c\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Hay infinitas descompociciones LU

8) 🛠️

jueves, 27 de mayo de 2021 11:21

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Autovalores:

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-\lambda)(-1-\lambda) - 0 = 0$$

$$\lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda = -1$$

Auto espacio asociado a 0:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$y = 0$$

$\Rightarrow$

$$\text{gen}\{(1, 0)\}$$

9)

martes, 1 de junio de 2021 09:41

a)

Definición:

La iteración de Jacobi asociada a $Ax = b$ es:

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

Donde:

$M = \text{diagonal}(A)$

$N = -\text{quitarDiagonal}(A)$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Iteración de Jacobi:

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Definición:

La iteración de Gauss-Seidel asociada a $Ax = b$ es:

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

Donde:

$M = \text{trianguloInferior(A)}$

$N = -\text{trianguloSuperiorEstricto(A)}$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculo M^{-1}

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - F_1/3} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2/2]{F_1/3} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Iteración de Gauss-Seidel

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

b) $$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{20}{36}}$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{6} < 1$$

$\Rightarrow \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ La iteración converge

10)

jueves, 3 de junio de 2021 08:51

a)

Definición:

La iteración de Jacobi asociada a $Ax = b$ es:

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

Donde:

$$M = \text{diagonal}(A)$$

$$N = -\text{quitarDiagonal}(A)$$

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Iteración:

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} b$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} b$$

b)

Busco los autovalores de la matriz de iteración:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-\lambda)^3 + 0 + 0 - 0 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 (-\lambda) - (-\lambda)\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2} = 0$$

$$-\lambda^3 + \frac{1}{16}\lambda + \frac{3}{8}\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + \frac{7}{16}\lambda + \frac{3}{8}\lambda = 0$$

$$\lambda\left(-\lambda^2 + \frac{7}{16}\right) = 0$$

$$\lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda^2 = \frac{7}{16}$$

$$\lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \rho\left(\begin{bmatrix} -\lambda & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$\Rightarrow \quad \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \quad :$ la iteración converge

11)

jueves, 3 de junio de 2021 09:12

Primero pruebo otra cosa:
Sea:
$T \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$b \in \mathbb{R}^{n}$
$x^{(0)} \in \mathbb{R}^{n}$
$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + b$

$$x^{(k+1)} = T^{k+1} + \left(\sum_{j=0}^{k} T^{j}\right) b$$

Demostración por inducción:

Caso inductivo suponiendo que vale para k:

$$x^{(k+1)}$$
$$= Tx^{(k)} + b$$
= {Hipótesis inductiva}
$$T\left(T^{k} + \left(\sum_{j=0}^{k-1} T^{j}\right) b\right) + b$$
$$= TT^{k} + T\left(\sum_{j=0}^{k-1} T^{j}\right) b + b$$
$$= T^{k+1} + \left(\sum_{j=0}^{k-1} T^{j+1}\right) b + b$$
$$= T^{k+1} + \left(\left(\sum_{j=1}^{k} T^{j}\right) + \mathrm{Id}_{n}\right) b$$

$$= T^{k+1} + \left(\sum_{j=0}^{k} T^{j} \right) b$$

Sea:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior invertible

$x, b \in \mathbb{R}^{n}$

$M = \text{diagonal}(A)$

$N = -\text{quitarDiagonal}(A)$

La iteración de Jacobi asociada a $Ax = b$:

$x^{(k+1)} = M^{-1} N x^{(k)} + M^{-1} b$

$$x^{(n)} = x$$

Demostración:

Primero pruebo que la iteración de Jacobi y la de Gauss-Seidel son la misma:

La matriz de iteración asociada al método de Gauss-Seidel de A es:

$$M^{-1} N$$

Donde:

$M = \text{trianguloInferior(A)}$

$N = -\text{trianguloSuperiorEstricto(A)}$

La matriz de iteración asociada al método de Jacobi de A es:

$$M'^{-1} N'$$

Donde:

$M' = \text{diagonal}(A)$

$N' = -\text{quitarDiagonal}(A)$

A es triangular superior
$\Rightarrow$ trianguloInferior(A) $=$ diagonal(A)
$\Rightarrow$ $M = M'$

A es triangular superior
$\Rightarrow$ quitarDiagonal(A) $=$ trianguloSuperiorEstricto(A)
$\Rightarrow N = N'$

Ahora pruebo que para ambos converge:

M es diagonal $\wedge$ N es triangular superior estricta
$\Rightarrow M^{-1}N$ es triangular superior estricta
$\Rightarrow$ ⦃Teorema: A es triangular estricta $\Rightarrow$ A es nilpotente⦄
$M^{-1}N$ es nilpotente
$\Rightarrow$ ⦃Teorema: A es nilpotente $\Leftrightarrow$ todos sus autovalores son nulos⦄
$\rho(M^{-1}N) = 0$
$\Rightarrow$ ⦃Teorema 5⦄
la iteración converge a x

Ahora pruebo que llega a la solución en n pasos, para eso pruebo:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)}$$

Demostración:

$x^{(n+1)}$
$=$ ⦃Teorema probado antes⦄
$$(M^{-1}N)^{n+1} + \left(\sum_{j=0}^{n} (M^{-1}N)^{j}\right) M^{-1}b$$
$=$ ⦃$M^{-1}N$ es nilpotente y triangular estricta $\Rightarrow (M^{-1}N)^{n+1} = 0$⦄

$$0 + \left(0 + \sum_{j=0}^{n-1} (M^{-1}N)^j \right) M^{-1}b$$

$$= 0 + \left(\sum_{j=0}^{n-1} (M^{-1}N)^j \right) M^{-1}b$$

$= \{\!\!|\, M^{-1}N$ es nilpotente y triangular estricta $\Rightarrow (M^{-1}N)^n = 0 \,|\!\!\}$

$$(M^{-1}N)^n \left(\sum_{j=0}^{n-1} (M^{-1}N)^j \right) M^{-1}b$$

$= \{\!\!|$ Teorema probado antes $|\!\!\}$

$$x^{(n)}$$

12) 🛠️

jueves, 3 de junio de 2021 10:07

13) 🛠️

jueves, 3 de junio de 2021 10:07

14)

jueves, 3 de junio de 2021 10:07

Método de Jacobi:

La iteración de Jacobi asociada a $Ax = b$ es:

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

Donde:

$$M = \text{diagonal}(A)$$

$$N = -\text{quitarDiagonal}(A)$$

$$M = Id_3$$

$$M^{-1} = Id_3$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 11 \\ -13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 11 \\ -13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -13 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ -13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 27 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ -13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 38 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ -73 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 75 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ -73 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ -73 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 \\ 73 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ -73 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

15) 🛠️

jueves, 3 de junio de 2021 10:34

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$