RESUMEN ANALISIS MATEMÁTICO:

ANALISIS DE ERRORES:

PREELIMINARES MATEMÁTICOS:

Teorema del valor intermedio: Sea f continua en [a,b], d entre f(a) y f(b) entonces existe un c ϵ [a,b] tal que f(c) = d.

Teorema del valor medio: Sea f continua en [a,b] y derivable en (a,b), entonces para todo par x, c ϵ [a,b] se cumple que $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f^{'}(\xi)$, para algún ξ entre x y c.

Teorema de Taylor: Sea f ϵ C^n en [a,b], y existe $f^{(n+1)}$ en (a,b), entonces para todo par x, c ϵ [a,b] se cumple que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(c)}{k!}(x - c)^{k} + (En(x) \vee Rn(x))$$

donde,

$$En(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - c)^{(n+1)}, \text{ para algún } \xi \text{ entre x y c}$$

$$Rn(x) = \frac{1}{n!}\int_{c}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^{n}\,dt$$

ORDENES DE CONVERGENCIA:

Definición ordenes de convergencia: Sea {Xn} una sucesión que converge a X* entonces:

Se dice que la tasa de convergencia de {Xn} es al menos lineal si existe una constante C tal que 0<C<1 y un N ϵ N tal que:

$$\left|X_{n+1} - X^*\right| \leq C\left|X_{n} - X^*\right| \qquad \frac{\left|X_{n+1}-X^*\right|}{\left|X_{n}-X^*\right|} = C$$

Se dice que la tasa de convergencia de {Xn} es al menos superlineal si existe una sucesión {En} que converge a 0 y un N ϵ N tal que:

$$\left|X_{n+1} - X^*\right| \leq E_n\left|X_{n} - X^*\right| \qquad \frac{\left|X_{n+1}-X^*\right|}{\left|X_{n}-X^*\right|} = 0$$

Se dice que la tasa de convergencia de {Xn} es al menos cuadrática si existe una constante C positiva y un N ϵ N tal que:

$$\left|X_{n+1} - X^*\right| \leq C\left|X_{n} - X^*\right|^2 \qquad \frac{\left|X_{n+1}-X^*\right|}{\left|X_{n}-X^*\right|^2} = C$$

NOTACIÓN O GRANDE Y o CHICA:

Definición notación O grande y o chica: Sean {An} y {Xn} dos sucesiones distintas se dice que Xn = O(An) si existe una constante C y un r ϵ N tal que:

$$\left|X_{n}\right| \leq C\left|A_{n}\right| \qquad \frac{\left|X_{n}\right|}{\left|A_{n}\right|} = C$$

Se dice que Xn = o(An) si existe una sucesión {En} que converge a 0, con En ≥ 0, y un r ϵ N tal que:

$$\left|X_{n}\right| \leq E_n\left|A_{n}\right| \qquad \frac{\left|X_{n}\right|}{\left|A_{n}\right|} = 0$$

EVALUACIÓN DE POLINOMIOS:

Algoritmo de Horner: Sea p(x) = $a_n x^n + \ldots + a_0 x^0$ con $a_n \neq 0$, la evaluación de p(x) en x = z es:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} = a_{n-1} + z * b_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$b_0 = a_1 + z * b_1$$

$$p(z) = a_0 + z * b_0$$

ERRORES:

Definición errores: Cuando un valor r (exacto) se aproxima a otro valor r', se define el error por r – r'. Llamaremos respectivamente:

- Error absoluto: $\Delta r = \left|r - r'\right|$
- Error relativo: $\delta r = \frac{\Delta r}{|r|}$
- Error porcentual: $\delta r * 100$

Definición dígitos significativos: Un numero r' aproxima a r con m dígitos significativos si:

$$\delta r \leq \frac{1}{2} 10^{1-m}$$

Es importante evitar la resta de números próximos para así también evitar la cancelación de dígitos significativos.

Errores en las operaciones: Si y = x1 + x2, y nosotros hacemos y' = x1' + x2' entonces el error absoluto de la suma es:

$$\Delta y = |y - y'| \leq |x1 + x2| - |x1' + x2'| = |x1 - x1'| + |x2 - x2'| = \Delta x1 + \Delta x2$$

Y el error relativo de la suma es:

$$\delta y = \frac{\Delta y}{|y|} \leq \frac{\Delta x1 + \Delta x2}{|x1 + x2|}$$

Si y = x1 - x2, y nosotros hacemos y' = x1' - x2' entonces el error absoluto de la resta es:

$$\Delta y = \left|y - y'\right| \leq |x1 - x2| - \left|x1' - x2'\right| = \left|x1 - x1'\right| - \left|x2 - x2'\right| = \Delta x1 + \Delta x2$$

Y el error relativo de la resta es:

$$\delta y = \frac{\Delta y}{|y|} \leq \frac{\Delta x1 + \Delta x2}{|x1 - x2|}$$

Si y = x1 * x2, y nosotros hacemos y' = x1' * x2' entonces el error absoluto de la multiplicación es:

$$\Delta y = \left|y - y'\right| \leq |x2| \Delta x1 + |x1| \Delta x2$$

Y el error relativo de la multiplicación es:

$$\delta y = \frac{\Delta y}{|y|} \leq \frac{\Delta x1}{|x1|} + \frac{\Delta x2}{|x2|}$$

Si y = x1 / x2, y nosotros hacemos y' = x1' / x2' entonces el error absoluto de la división es:

$$\Delta y = \left|y - y'\right| \leq \frac{1}{|x2|}\Delta x1 + \frac{|x1|}{|x2^2|}\Delta x2$$

Y el error relativo de la división es:

$$\delta y = \frac{\Delta y}{|y|} \leq \frac{\Delta x1}{|x1|} + \frac{\Delta x2}{|x2|}$$

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS EN LA COMPUTADORA:

Definición sistema de punto fijo: Sea β ∈ N, β ≥ 2, todo número real r puede ser escrito en la forma:

$$(\pm d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} \dots)\beta$$

donde dn, dn−1, ... d0, d−1 ... son números naturales entre 0 y (β −1) y

$$r = \pm d_n\beta^n + d_{n-1}\beta^{n-1} + \dots + d_2\beta^2 + d_1\beta^1 + d_0\beta^0 + d_{-1}\beta^{-1} + d_{-2}\beta^{-2} + \dots$$

Las desventajas de este sistema es que según la cantidad de dígitos que tengamos para representar un número, se nos va a limitar la cantidad de números que podamos representar.

Definición sistema de punto flotante: Un sistema de punto flotante (β, t, L, U) es el conjunto de números normalizados en punto flotante en el sistema de numeración con base β, y t dígitos para la parte fraccionaria, es decir, números de la forma:

$$x = m\beta^e$$

donde

- $m = \pm d_0 . d_{-1} d_{-2} \dots d_{-t}$
- $d_{-i} \in \{0, \dots, \beta - 1\}$
- i = 1, ..., t
- $d_{-1} \neq 0$
- L ≤ e ≤ U
- 1 ≤ |m|β ≤ β → 1/β ≤ |m| < 1

Errores de redondeo en aritmética de punto flotante: Supongamos que podemos escribir un número real (exacto) de la forma:

$$x = m\beta^e, \; 1/\beta \leq |m| \leq 1$$

y donde L ≤ e ≤ U. Ahora escribimos su representación en sistema de punto flotante:

$$fl(x) = m_r\beta^e, \; 1/\beta \leq |m_r| \leq 1$$

y donde m_r es la mantisa que se obtiene de redondear a t dígitos la parte fraccionaria de m. Entonces está claro que:

$$|m_r - m| \leq \frac{1}{2}\beta^{-t}$$

y, por lo tanto, una cota del error del absoluto de representación en x es:

$$|x_r - x| \leq \frac{1}{2}\beta^{-t}\beta^e$$

Para el error relativo, tenemos lo siguiente:

$$\frac{|x_r - x|}{|x|} \leq \frac{\frac{1}{2}\beta^{-t}\beta^e}{|m|\beta^e} = \frac{1}{2|m|}\beta^{-t} \leq \frac{1}{2}\beta^{1-t}$$

pues si $|m| \geq \frac{1}{\beta}$ entonces $\frac{1}{|m|} \leq \beta$.

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES:

METODO DE BISECCIÓN:

Idea general método de bisección: El método de bisección se basa fuertemente en el teorema del valor intermedio, el cual nos asegura que si f es continua en [a,b] y f(a)f(b) < 0, entonces existe una raíz r en (a,b).

Si estas hipótesis se cumplen se calcula c = $\frac{a+b}{2}$ y f(c), si c = x_0 es una aproximación de r y $|e_0| = \left|x_0 - r\right| \leq \frac{b-a}{2}$ se tienen 3 posibilidades:

1. Si f(a)f(c) < 0 entonces hay una raíz en el intervalo [a,c], reasignamos b←c y se repite el procedimiento en el nuevo intervalo [a,b].
2. Si f(b)f(c) < 0 entonces hay una raíz en el intervalo [c,b], reasignamos a←c y se repite el procedimiento en el nuevo intervalo [a,b].
3. Si f(a)f(c) = 0 entonces c es la raíz buscada.

Teorema 1 (Método de bisección): *El siguiente teorema por un lado muestra que el método es global, y por el otro, de la demostración se puede deducir que la sucesión generada por el algoritmo converge linealmente.*

Si [a0,b0], [a1,b1], …, [an,bn] denotan los sucesivos intervalos en el método de bisección, entonces:

1. $\exists\, an,\ bn \wedge an = bn = r\ (con\ r\ raiz\ de\ f)$.
2. Sea Cn = $\frac{an+bn}{2}$, $si\ Cn = r \rightarrow |r - Cn| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b0 - a0)$.

Demostración: Si [a0,b0], [a1,b1], …, [an,bn] denotan los sucesivos intervalos en el método de bisección se tiene que:

$$a0 \leq a1 \leq \ldots \leq an \leq b0$$

$$b0 \geq b1 \geq \ldots \geq bn \geq a0$$

Luego {an} es una sucesión creciente y acotada superiormente, por lo tanto, converge. Análogamente {bn} es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, por lo tanto, también converge. Además:

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$$

y si se aplica repetidamente se obtiene:

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$$

Luego:

$$an - bn = (an - bn) = \frac{1}{2^n}\left(b_0 - a_0\right) = (b_0 - a_0)\,\frac{1}{2^n} = 0$$

Sea r =$an = bn$. Luego tomando que f(an)f(bn) < 0, y f(r) = $f(an) = f(bn)$ se obtiene que:

$$f(an) * f(bn) = f(r) * f(r) = f(r)^2 \leq 0 \rightarrow f(r)^2 = 0 \rightarrow f(r) = 0$$

es decir, r es una raíz de f . Por último, siendo Cn = $\frac{1}{2}(a_n + b_n)$:

$$|r - Cn| \leq \frac{1}{2}|bn - an| \leq \frac{1}{2} * \frac{1}{2^n}\left(b_0 - a_0\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\left(b_0 - a_0\right)$$

METODO DE NEWTON:

Idea general método de Newton:

Supongamos r raíz de f y x una aproximación a r a una distancia h (r = x + h → h = r – x). Supongamos que f'' existe y es continua en un entorno de x que contiene a r. Entonces el desarrollo de Taylor de f centrado x es:

$$0 = f(r) = f(x) + f'(x)h + O(h^2)$$

Cuando x se aproxima a r el valor de h se hace pequeño y por lo tanto h^2 se hace aún más pequeño, y podemos despreciar el término $O(h^2)$:

$$0 = f(r) = f(x) + f'(x)h$$

$$h = \frac{-f(x)}{f'(x)}$$

Está claro que no se conoce h porque de otra manera conoceríamos r, sin embargo, si la aproximación a x está cerca de r , entonces la nueva aproximación debería esta aún más cerca de r:

$$(h + x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Es decir, comenzando con una aproximación x_0 de r, la iteración del método de Newton consiste en calcular:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Teorema 1 (Método de Newton): El siguiente teorema muestra que bajo ciertas hipótesis la sucesión generada por el método de Newton converge local y cuadráticamente. Esto es que si se comienza con una aproximación a r suficientemente próxima el método converge cuadráticamente.

Si f'' es continua en un entorno de una raíz r de f y si f'(r) ≠ 0 entonces existe δ > 0 tal que si el punto inicial x0 satisface |r − x0| ≤ δ luego:

1. Todos los puntos de la sucesión {xn} generados por el algoritmo del método de Newton satisfacen que |r − xn| ≤ δ para todo n.
2. La sucesión {xn} converge a r }.
3. La convergencia es cuadrática. Existe una constante C = C(δ) y un natural N tal que |r − xn+1| ≤ C |r −xn|^2 , para n ≥ N.

Demostración: Sea $e_n = r - x_n$ el error en la iteración n entonces:

$$e_{n+1} = r - x_{n+1}$$

$$e_{n+1} = r - \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)$$

$$e_{n+1} = r - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$e_{n+1} = e_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$e_{n+1} = \frac{e_n f'(x_n) + f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1)$$

Por otro lado, tomando el desarrollo de Taylor de f alrededor de x_n:

$$0 = f(r) = f(x_n + h) = f(x_n) + f'(x_n)e_n + \frac{1}{2}f''(\xi_n)e_n^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}f''(\xi_n)e_n^2 = f(x_n) + f'(x_n)e_n$$

Si remplazo dicha expresión en (1) tenemos:

$$e_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)e_n^{\ 2}}{f'(x_n)} \quad (2)$$

Siendo δ > 0 definimos la constante C(δ) como:

$$C(\delta) = \frac{1}{2}\frac{\underset{|x-r|\le\delta}{MAX}\ |f''(x)|}{\underset{|x-r|\le\delta}{MIN}\ |f'(x)|}$$

Como f' y f'' son funciones continuas entonces |f'| y |f''| alcanzan sus valores extremos en un intervalo cerrado y acotado alrededor de r. Luego, dado δ > 0, para todo par x y ξ tal que |ξ −r| ≤ δ y |x−r| ≤ δ existe una constante c = c(δ) tal que:

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(x)}\right| \le c = c(\delta).$$

Notemos que si δ -> 0, entonces C(δ) -> $\frac{f''(r)}{f'(r)}$ finito ya que por hipótesis f'(r) ≠ 0, entonces si δ -> 0 => δ.C(δ) -> 0. Por lo tanto, podemos elegir un δ lo suficientemente pequeño tal que δ.C(δ) < 1 (ϱ).

Ahora supongamos x0 tal que e0 = |x0 −r| ≤ δ, y como ξ_0 está entre x0 y r, entonces $|\xi_0 - r| \le \delta$:

$$e_0 = |x_0 - r| < \delta$$

$$e_1 = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)}e_0^{\ 2} \le c(\delta)|e_0|^2 \le \delta c(\delta)|e_0| \le \varrho|e_0|$$

$$e_2 \le \varrho|e_1| \le \varrho^2|e_0|$$

$$\vdots$$

$$e_n \le \varrho^n|e_0|$$

Esto nos dice:

1. Xn esta a una distancia de r < δ.
2. Si la sucesión converge los hace cuadráticamente.
3. Como 0 < ϱ < 1 => $\varrho^n = 0 \implies e_n = 0 \implies x_n = r$

Teorema 2 (Método de Newton): Si f´´ es continua en R, f es creciente y convexa en R y tiene una raíz, entonces esa raíz es única y la iteración de Newton convergerá a esa raíz independientemente del punto inicial x0.

METODO DE LA SECANTE:

Ide a general método de la secante: Es la misma idea que el método de Newton solo que se remplaza la recta tangente dada por la f´ de la función por el cociente incremental dado por la recta secante que pasa por los puntos $(x_n, f(x_n))$ y $(x_n + h, f(x_n + h))$.

$$pendiente = \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h}$$

Para tener en cuenta los valores ya valuados de f se elige: h = $x_{n-1} - x_n$. Entonces finalmente queda:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{pendiente} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}} = x_n - f(x_n)\left(\frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}\right)$$

METODO DE PUNTO FIJO:

Definición punto fijo: Un punto fijo p en una función g, es un número en el dominio de g tal que g(p) = p.

Teorema 1 (Método de punto fijo):

1. Sea g continua en [a,b] tal que g(x) ∈ [a,b] para todo x ∈ [a,b] => existe p ∈ [a,b] / g(p) = p (EXISTENCIA).
2. Si además existe g'(x) para todo x ∈ (a,b) y existe una constante positiva k < 1 tal que |g'(x)| ≤ k para todo x ∈ (a,b), entonces el punto fijo en (a,b) es único.

Demostración:

(1) Si g(a) = a o g(b) = b ya se cumple. Para el caso contrario supongamos que g(a) > a y g(b) < b. Sea h(x) = g(x) – x una función continua en [a,b]:

h(a) = g(a) – a > 0 y h(b) = g(b) – b < 0

Luego por teorema de valor intermedio tenemos que existe p ∈ (a,b) tal que h(p) = 0 => g(p) = p.

(2) Supongamos que existen puntos fijos p, q ∈ [a,b] con p ≠ q. Sea q > p, por teorema de valor medio, en [p,q] existe c ∈ [p,q] tal que:

$$\frac{g(p)-g(q)}{p-q} = g'(c)$$

$$g(p) - g(q) = g'(c)(p - q)$$

Por hipótesis |g'(x)| ≤ k < 1 entonces:

|p – q| = |g(p) – g(q)| = g'(c)|p – q| ≤ k |p – q| < |p – q|

Absurdo por suponer que hay dos puntos fijos distintos.

Idea general punto fijo: Para calcular aproximadamente el punto fijo p de una función g, primero se inicia con una aproximación inicial p_0 y calculando $p_n = g(p_{n-1})$ se obtiene una sucesión de aproximaciones {Pn}. Si g es continua en [a,b] y la sucesión converge lo hace a un punto fijo p de g.

Teorema 2 (Método de punto fijo): Sea g ∈ C[a,b] tal que g(x) ∈ [a,b] para todo x ∈ [a,b]. Supongamos que existe g'(x) para todo x ∈ (a,b) y existe una constante positiva 0 < k < 1 tal que |g'(x)| ≤ k para todo x ∈ (a,b), entonces para cualquier p0 ∈ [a,b] la sucesión definida por$p_n = g(p_{n-1})$, para n ≥ 1, converge al único punto fijo p en (a,b).

Demostración: La existencia y la unicidad ya se probaron en el teorema anterior. La idea ahora es probar la convergencia.

Notemos que:

$$|p_n - p| = \left|g\left(p_{n-1}\right) - g(p)\right| = \left|g'(c)\right||p_{n-1} - p| \leq k|p_{n-1} - p|$$

con 0 < k < 1 y c ∈ $[p_{n-1}, p]$ o $[p, p_{n-1}]$.

Si se aplica repetidamente el mismo análisis se obtiene que:

$$|p_n - p| \leq k|p_{n-1} - p| \leq k^2|p_{n-2} - p| \leq \ldots \leq k^n|p_0 - p|$$

Luego dado que 0 < k < 1 => $k^n = 0$, entonces:

$$p_n - p| \leq k^n\left|p_0 - p\right| = 0 \;\; => \;\; p_n - p = 0 \;\; => \;\; p_n = p$$

Corolario 1 (Método de punto fijo): Si g es una función que satisface las hipótesis del teorema anterior, se tienen las siguientes cotas de error:

- $|p_n - p| \leq k^n$ max{p0 −a,b− p0}
- $|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k}\,||p_1 - p_0|$ para todo n ≥ 1

Corolario 2 (Método de punto fijo): Si f es una función que tiene una raíz simple p, entonces el método de Newton es un método de punto fijo y tiene orden de convergencia (al menos) 2.

Demostración: Sea g(x) = $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, la función de iteración del método de Newton. Es claro que si p es una solución de f(x) = 0, entonces p es un punto fijo de g pues:

$$g(p) = p - \frac{f(p)}{f'(p)} = p$$

ya que f(p) = 0 y f'(p) ≠ 0. Ahora calculemos g'(x) y luego evaluemos en p:

$$g'(x) = 1 - \left(\frac{(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}\right) = 1 - 1 + \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$$

entonces:

$$g'(p) = \frac{f''(p)f(p)}{(f'(p))^2} = 0$$

y por lo tanto el método tiene orden de convergencia al menos 2. (Por resultado de análisis de error en método de punto fijo).

Corolario 3 (Método de punto fijo): Si p es una raíz de multiplicidad r ≥ 2 de f , entonces el método de Newton tiene orden 1.

Demostración: Ya vimos que si g(x) = $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ entonces $g'(x) = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$

Ahora, supongamos que p es una raíz de multiplicidad r de f tal que:

$$f(x) = (x - p)^r h(x),\ con\ h\ una\ función\ tal\ que\ h(p) \neq 0\ y\ r \geq 2.$$

La derivada primera de f es:

$$f'(x) = r(x - p)^{r-1} h(x) + (x - p)^r h'(x)$$

$$f'(x) = (x - p)^{r-1} [rh(x) + (x - p)h'(x)]$$

y la derivada segunda de f es:

$$f''(x) = r(r - 1)(x - p)^{r-2} h(x) + 2r(x - p)^{r-1} h'(x) + (x - p)^r h''(x)$$

$$f''(x) = (x - p)^{r-2} [r(r - 1)h(x) + 2r(x - p)h'(x) + (x - p)^2 h''(x)]$$

Luego:

$$g'(x) = \frac{[(x-p)^{r-2} [r(r-1)h(x) + 2r(x-p)h'(x) + (x-p)^2 h''(x)]][(x-p)^r h(x)]}{[(x-p)^{r-1} [rh(x) + (x-p)h'(x)]]^2}$$

$$g'(x) = \frac{[(x-p)^{2r-2} h(x) [r(r-1)h(x) + 2r(x-p)h'(x) + (x-p)^2 h''(x)]}{(x-p)^{2r-2} [rh(x) + (x-p)h'(x)]^2}$$

$$g'(x) = \frac{h(x) [r(r-1)h(x) + 2r(x-p)h'(x) + (x-p)^2 h''(x)]}{[rh(x) + (x-p)h'(x)]^2}$$

entonces:

$$g'(p) = \frac{h(p)\,[r(r-1)h(p)+2r(p-p)h'(p)+(p-p)^2h''(p)]}{[rh(x)+(p-p)h'(p)]^2}$$

$$g'(p) = \frac{r(r-1)h(p)^2}{r^2h(p)^2}$$

$$g'(p) = \frac{r-1}{r} \neq 0,\ pues\ r \geq 2$$

=> No tiene convergencia cuadrática, si lineal.

Corolario 4 (Método de punto fijo): Si p es una raíz de multiplicidad r ≥ 2 de f , entonces la siguiente modificación del método de Newton recupera la convergencia cuadrática:

$$x_{n+1} = x_n - r\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ g(x) = x - r\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Demostración: Usaremos los cálculos de f, f’ y f’’ calculados en la demostración anterior:

$$g'(x) = 1 - r + r\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$g'(x) = 1 - r + r\frac{h(x)\,[r(r-1)h(x)+2r(x-p)h'(x)+(x-p)^2h''(x)]}{[rh(x)+(x-p)h'(x)]^2}$$

Luego, si evaluamos g’(x) en x = p obtenemos:

$$g'(p) = 1 - r + r\frac{h(p)\,[r(r-1)h(p)+2r(p-p)h'(p)+(p-p)^2h''(p)]}{[rh(p)+(p-p)h'(p)]^2}$$

$$g'(p) = 1 - r + r\frac{h(p)\,[r(r-1)h(p)]}{[rh(p)]^2}$$

$$g'(p) = 1 - r + r\frac{r(r-1)}{r^2} = 1 - r + r\frac{r-1}{r} = 1 - r + \frac{r^2-r}{r} = 1 - r + r - 1 = 0$$

=> Tenemos convergencia al menos cuadrática.

INTERPOLACIÓN NUMÉRICA:

Teorema 1 (Polinomio interpolante): Dados $x_0, x_1, ..., x_n$ números reales distintos con valores asociados $y_0, y_1, ..., y_n$ entonces existe un único polinomio p_n de grado menor o igual a n tal que $p_n(x_i) = y_i$, para i = 0, ..., n.

Demostración:

- Existencia:

Para n = 0, es el caso obvio pues el polinomio constante p_0(x) = y_0 satisface que tiene grado (menor o) igual a 0 y que $p_0(x_0) = y_0$.

Ahora supongamos, por hipótesis inductiva que se tiene un polinomio p_{k-1} de grado ≤ k−1 con $p_{k-1}(x_i) = y_i$ para i = 0, ..., k −1. Vamos a construir el polinomio p_k de grado ≤ k, tal que $p_k(x_i) = y_i$ para i = 0, ..., k, de la forma:

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})$$

donde c es una constante a determinar. Notar que este polinomio tiene grado ≤ k. Además p_k interpola los primeros k puntos que interpola p_{k-1} pues:

$$p_k(x_i) = p_{k-1}(x_i) = y_i, \text{ para i = 0, ..., k} -1$$

El coeficiente c se determina usando la condición de interpolación $p_k(x_k) = y_k$, es decir:

$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + c(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1}) = y_k$$

de donde se deduce que

$$c = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})}$$

- Unicidad:

Supongamos que existen dos polinomios interpolantes p_n y p_q de grado ≤ n, esto es, $p_n(x_i) = y_i$ y $q_n(x_i) = y_i$ para i = 0, ..., n. Sea h $= p_n - q_n$. Claramente h es un polinomio de grado ≤ n. Además, h(x_i) = 0 para i = 0, ..., n, por lo tanto, h es un polinomio de grado ≤ n y tiene (n+1) raíces reales. Luego, por el Teorema Fundamental del Álgebra, h(x) = 0 para todo x y por lo tanto $p_n = q_n$.

FORMA DE NEWTON DEL POLINOMIO INTERPOLANTE:

La forma de Newton compacta del polinomio interpolante resulta en:

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

Diferencias divididas: En general, para calcular el coeficiente c_k se requieren conocer x_0, ..., x_k, y_0, ..., y_k, o si estamos interpolando a una función f se requieren: x_0, ..., x_k, f(x_0), ..., f(x_k). Este coeficiente se denota por c_k = f [x_0, ..., x_k], para k = 0, ..., n y se denomina diferencias divididas.

Teorema 1 (Diferencias divididas): Dados x_0, ..., x_n números reales distintos, las diferencias divididas satisfacen la siguiente ecuación:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Demostración:

- Sea p_{n-1} un polinomio de grado ≤ n-1 que interpola a f en los puntos x_0, ..., x_{n-1} ($p_{n-1}(x_i) = f(x_i)$ para i = 0, …, n-1).
- Sea q un polinomio de grado ≤ n-1 que interpola a f en los puntos x_1, ..., x_n ($q(x_i) = f(x_i)$ para i = 1, …, n)

Para la primera parte de la demostración, demostraremos que el polinomio de grado ≤ n que interpola a f en x_0, ..., x_n es:

$$p_n(x) = q(x) + \frac{(x - x_n)}{(x_n - x_0)}[q(x) - p_{n-1}(x)]$$

Para i = 0 tenemos:

$$p_n(x_0) = q(x_0) - q(x_0) + p_{n-1}(x_0)$$

$$p_n(x_0) = p_{n-1}(x_0) = f(x_0)$$

Para i = 1, …, n-1 tenemos:

$$p_n(x_i) = q(x_i) + \frac{(x_i - x_n)}{(x_n - x_0)} 0$$

$$p_n(x_i) = q(x_i) = f(x_i)$$

Para i = n tenemos:

$$p_n(x_n) = q(x_n) + 0[q(x_n) - p_{n-1}(x_n)]$$

$$p_n(x_n) = q(x_n) = f(x_n)$$

Por ambos lados de la ecuación se tienen polinomios de grado ≤ n que interpolan a f en los mismos (n+1) puntos, por lo que por unicidad de polinomios interpolantes se deduce que ambos polinomios son iguales. Con esto sabemos que los coeficientes de ambos polinomios deben coincidir, en particular el coeficiente de $x_{n.}$

Tabla de diferencias divididas:

x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

Propiedades de diferencias divididas:

Teorema 1 (Diferencias divididas): Sean x_0, ..., x_n números reales distintos y z_0, ..., z_n un reordenamiento de x_0, ..., x_n. Entonces f[z_0, ..., z_n] = f[x_0, ..., x_n].

Demostración: Como el polinomio que interpola a f en x_0, ..., x_n es el mismo que interpola a f en z_0, ..., z_n, entonces sus coeficientes son iguales y f[z_0, ..., z_n] = f[x_0, ..., x_n].

Teorema 2 (Diferencias divididas): Sea p el polinomio de grado ≤ n que interpola a f en los n+1 nodos distintos x_0, ..., x_n. Si t es un número real distinto de los nodos, entonces:

$$f(t) - p(t) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j).$$

Demostración: Sea q el polinomio de grado ≥ n+1 que interpola f en x_0, ..., x_n, t, entonces es la forma:

$$q(x) = p(x) + f[x_0, ..., x_n] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

entonces:

$$q(t) = f(t) = p(x) + f[x_0, ..., x_n] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j)$$

$$f(t) - p(t) = f[x_0, ..., x_n] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j)$$

Teorema 3 (Diferencias divididas): Si f es una función n veces continuamente diferenciable en [a,b] y $x_0, ..., x_n$ son n+1 nodos distintos en [a,b], entonces existe un punto ξ ∈ (a,b) tal que:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Demostración: Sea p el polinomio de grado ≤ n−1 que interpola a f en $x_0, ..., x_{n-1}$. Por el teorema del error en el polinomio interpolante de la clase anterior, aplicado a x = x_n, se sabe que:

$$f(x_n) - p(x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j).$$

Ahora por teorema 2 tenemos que:

$$f(x_n) - p(x_n) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j),$$

Por lo tanto:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

FORMA DE HERMITE DEL POLINOMIO INTERPOLANTE:

Método: Es posible extender la definición de diferencias divididas para números repetidos de la siguiente manera:

$$f[x_0 x_0] = f'(x_0)$$

Se pueden construir un polinomio interpolante de grado 3, con sólo 2 puntos de interpolación y agregando 2 condiciones de interpolación de la derivada en esos mismos puntos, esto es:

$$\begin{array}{c|llll}
x_0 & f[x_0] & f'(x_0) & f[x_0,x_0,x_1] & f[x_0,x_0,x_1,x_1] \\
x_0 & f[x_0] & f[x_0,x_1] & f[x_0,x_1,x_1] & \\
x_1 & f[x_1] & f'(x_1) & & \\
x_1 & f[x_1] & & &
\end{array}$$

Ahora, el polinomio interpolante basado en esta tabla está dado por

$$p(x) = f[x_0] + f'(x_0)(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2 (x - x_1).$$

FORMA DE LAGRANGE DEL POLINOMIO INTERPOLANTE:

Ahora definimos la forma de Lagrange del polinomio interpolante por:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x).$$

donde:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \quad \text{para} \quad i = 0,\dots,n.$$

FORMULA DEL ERROR PARA POLINOMIOS INTERPOLANTES:

Teorema 2 (Polinomio interpolante): Sea f una función en C^{n+1} [a,b] y p un polinomio de grado ≤ n que interpola a f en (n+1) puntos distintos x_0, x_1, ..., x_n en [a,b]. Entonces para cada x ∈ [a,b] existe un ξ = ξx ∈ (a,b) tal que:

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Demostración: Si x = x_i para i = 0, …, n es trivialmente cierto. Ahora supongamos que x (fijo) ≠ x_0, x_1, ..., x_n y definimos:

$$\begin{aligned} w(t) &= \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) && \text{(polinomio en } t\text{)} \\ c &= \frac{f(x)-p(x)}{w(x)} && \text{(constante, pues } x \text{ está fija)} \\ \varphi(t) &= f(t) - p(t) - cw(t) && \text{(función en } t\text{),} \end{aligned}$$

(Notar que c está bien definida pues x es un número fijo y w(x) ≠ 0 cuando x ≠ x_0, x_1, ..., x_n).

Ahora, teniendo en cuenta que si tomamos t = x_0, x_1, ..., x_n entonces $\varphi(t) = 0$, notamos que $\varphi(t)$ tiene (n+1) ceros. Luego $\varphi^{(n+1)}(t)$ tiene al menos 1 cero. Sea $\xi = \xi x \in (a, b)$ tal raíz:

$$0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - p^{(n+1)}(\xi) - cw^{(n+1)}(\xi)$$

$$0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{w(x)}(n+1)!$$

$$\frac{f(x)-p(x)}{w(x)}(n+1)! = f^{(n+1)}(\xi)$$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

SPLINES:

Definición (Splines): Dados n + 1 puntos tales que x_0 < ... < x_n, que denominaremos nodos, y un entero k ≥ 0, un spline de grado k es una función S definida en [x0, xn] que satisface:

- S es un polinomio de grado ≤ k en cada subintervalo [x_i , x_{i+1}), para i = 0, ..., n−1;

- las derivadas S(i) son continuas en [x_0, x_n], para i = 0, ..., k −1.

Método spline lineal: Dados los n+1 nodos tales que x_0 < ... < x_n, un spline lineal (k = 1) es una función S definida en [x0, xn] que satisface:

- S es un polinomio de grado ≤ 1 (recta) en cada subintervalo [x_i , x_{i+1}), para i = 0, ..., n−1;

- la función S es continua en [x0, xn].

donde los 2n coeficientes a_i, b_i , para i = 0, ..., n − 1 son las incógnitas para determinadas.

$$a_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}, \qquad b_i = f(x_i) - a_i x_i.$$

Método spline cúbico: Dados los n+1 nodos tales quex_0 < ... < x_n, un spline cúbico (k = 3) es una función S definida en [x0, xn] que satisface:

- S es un polinomio de grado ≤ 3 en cada subintervalo [x_i , x_{i+1}), para i = 0, ..., n−1;

- las funciones S, S’ y S’’ son continuas en [x0, xn].

donde los 4n coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i, para i = 0, ..., n−1 son las incógnitas para determinadas. Para eso, se deben tener 4n condiciones.

$$\begin{array}{lll}
S(x_i) = f(x_i), & i = 0, \dots, n & \text{((n+1) condiciones de interpolación)} \\
S_i(x_{i+1}) = \lim\limits_{x \to x_{i+1}} S_i(x) = S_{i+1}(x_{i+1}), & i = 0, \dots, n-2 & \text{((n-1) condiciones de continuidad de } S\text{)} \\
S_i'(x_{i+1}) = \lim\limits_{x \to x_{i+1}} S_i'(x) = S_{i+1}'(x_{i+1}), & i = 0, \dots, n-2 & \text{((n-1) condiciones de continuidad de } S'\text{)} \\
S_i''(x_{i+1}) = \lim\limits_{x \to x_{i+1}} S_i''(x) = S_{i+1}''(x_{i+1}), & i = 0, \dots, n-2 & \text{((n-1) condiciones de continuidad de } S''\text{)}
\end{array}$$

Esto da un total de (n + 1) + 3(n − 1) = 4n − 2 condiciones. Para poder determinar una única solución se deben imponer dos condiciones adicionales: (elegimos entre)

- Condiciones naturales:

$$S''(x_0) = S_0''(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad S''(x_n) = S_{n-1}''(x_n) = 0.$$

- Condiciones correctas:

$$S'(x_0) = S_0'(x_0) = f'(x_0) \quad \text{y} \quad S'(x_n) = S_{n-1}'(x_n) = f'(x_n).$$

APROXIMACIÓN DE FUNCIONES:

APROXIMACIÓN POR CUADRADOR MÍNIMOS (DISCRETA):

Método: El método de cuadrados mínimos para ajustar a un modelo polinomial donde se tienen los puntos {(x_i , y_i)} para i = 1, ..., m consiste en determinar los coeficientes a_0, ..., a_n tales que minimicen la función:

$$E\left(a_0, \dots, a_n\right) = \sum_{i=0}^{m} [y_i - P_n\left(x_i\right)]^2$$

Para minimizar E se deben calcular las derivadas parciales ∂E/∂aj para j = 0, ..., n e igualar a cero:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}\right) = 0, \quad \text{para} \quad j = 0, \dots, n.$$

Así tenemos las n+1 ecuaciones normales en las n+1 incógnitas a_0, ..., a_n:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j, \quad \text{para} \quad j = 0, \ldots, n.$$

A partir de ellas se crea un sistema lineal y se puede resolver a través de una matriz.

APROXIMACIÓN POR CUADRADOR MÍNIMOS (FUNCIONES):

Método: Sea f ∈ C[a,b] y se desea determinar el mejor polinomio (en el sentido de cuadrados mínimos) P_n(x) de grado ≤ n que minimice la siguiente medida del error entre la función f y Pn en el intervalo [a,b]:

$$E\left(a_0, \ldots, a_n\right) = \int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx = \int_a^b [f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k]^2 dx$$

es decir, se deben determinar los coeficientes a_0, ..., a_n que definen el polinomio Pn(x) de manera que E sea mínima.

Al igual que antes, una condición necesaria para encontrar un minimizador en a_0, ..., a_n es que ∂E/∂aj = 0 para todo j = 0, ..., n. Antes de calcular estas derivadas, vamos a reescribir convenientemente la expresión E:

$$\begin{aligned} E = E(a_0, \ldots, a_n) &= \int_a^b [f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k]^2 dx \\ &= \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^k f(x)\, dx + \int_a^b [\sum_{k=0}^{n} a_k x^k]^2 dx, \end{aligned}$$

luego para j = 0, ..., n:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2\int_a^b x^j f(x)\, dx + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{k+j} dx = 0.$$

Así, se obtienen las ecuaciones normales:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{k+j} dx = \int_a^b x^j f(x)\, dx \qquad \text{para} \quad j = 0, \ldots, n.$$

APROXIMACIÓN POR CUADRADOR MÍNIMOS (FUNCIONES DE PESO):

Preliminares:

Definición (Conjunto de funciones linealmente independientes): El conjunto de funciones {ϕ_0, ..., ϕ_n} es linealmente independiente en el intervalo [a,b], si siempre que $c_0\phi_0(x) + \ldots + c_n\phi_n(x)$ = 0 para cualquier x ∈ [a,b], se tiene que $c_0 = \ldots = c_n$ = 0. En caso contrario se dice que ese conjunto de funciones es linealmente dependiente.

Teorema 1 (Conjuntos linealmente independientes): Si ϕ_j(x) es un polinomio en x de grado igual a j para j = 0, ..., n, entonces {ϕ_0, ..., ϕ_n} es un conjunto linealmente independiente para cualquier intervalo [a,b].

Demostración: Sean c_0, ..., c_n números reales tales que:

$$P(x) = c_0\phi_0(x) + \ldots + c_n\phi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j\phi_j = 0$$

para cualquier x ∈ [a,b]. Como P(x) se anula en todo el intervalo [a,b], los coeficientes de todas las potencias de x son iguales a cero. Como $c_n\phi_n$ (x) es el único término que incluye x_n entonces el coeficiente:

$$c_n = 0 \text{ y, por lo tanto, } \sum_{j=0}^{n-1} c_j\phi_j.$$

De igual forma se obtiene que $c_{n-1} = \cdots = c_0 = 0$, y, en consecuencia, $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Teorema 2 (Conjuntos linealmente independientes): Si $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ es un conjunto de polinomios linealmente independiente para cualquier intervalo [a,b] en el espacio de polinomios de grado ≤ n, entonces todo polinomio de grado ≤ n puede escribirse, de manera única, como combinación lineal de $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$.

Definición (Función de peso): Una función (integrable) ω se llama función de peso en el intervalo I si ω(x) ≥ 0 para todo x ∈ I, pero ω(x) ≠ 0 para todo x en cualquier subintervalo de I, es decir ω no puede ser constantemente cero en un subintervalo de I.

Método: Dados $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ un conjunto de funciones linealmente independientes en [a,b], una función de peso ω definida en [a,b] y f una función continua en [a,b], se desean determinar los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ de la combinación lineal que definen:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(x)$$

tal que minimizan la medida del error:

$$E\left(a_0, \ldots, a_n\right) = \int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx = \int_a^b [f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(x)]^2 dx$$

Nuevamente, una condición necesaria para encontrar un minimizador en $(a_0, \ldots, a_n)$ es que ∂E/∂aj = 0 para todo j = 0, ..., n, esto es:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 2\int_a^b \omega(x)[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\,\phi_k(x)]\,\phi_j(x)\,dx = 0, \qquad \text{para} \qquad j = 0, \ldots, n.$$

Así, obtenemos las ecuaciones normales para el caso general:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b \omega(x)\phi_k(x)\phi_j(x)\,dx = \int_a^b \omega(x)f(x)\phi_j(x)\,dx, \qquad \text{para} \qquad j = 0, \ldots, n.$$

La ide también es elegir $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ tal que:

$$\int_a^b \omega(x)\phi_k(x)\phi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq k \\ \alpha_j > 0 & \text{si} \quad j = k \end{cases}$$

para así poder reducir las ecuaciones normales a:

$$a_j \int_a^b \omega(x)(\phi_j(x))^2\,dx = \int_a^b \omega(x)f(x)\phi_j(x)\,dx, \qquad \text{para} \qquad j = 0, \ldots, n.$$

Definición (Conjunto ortogonal y ortonormal): El conjunto $\{\phi_0, ..., \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo [a,b], con respecto a la función de peso ω, si:

$$\int_a^b \omega(x)\phi_k(x)\phi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0 & si \quad j \neq k \\ \alpha_j & si \quad j = k. \end{cases}$$

Si $\alpha_j = 1$ para todo j = 0, ..., n se dice que el conjunto es ortonormal.

Lema 1 (Conjuntos ortogonales): Si $\{\phi_0, ..., \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo I con respecto a una función de peso ω definida en I entonces son linealmente independientes.

Demostración: Supongamos que:

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j(x) = 0$$

Entonces:

$$0 = \int_a^b 0\varphi_k(x)w(x)dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j(x)\varphi_k(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^{n} c_j \int_a^b \phi_j(x)\varphi_k(x)w(x)dx = c_k a_k$$

Luego como $a_k > 0$, entonces $c_k = 0$ para todo k = 0, …, n.

Lema 2 (Conjuntos ortogonales): Sea el conjunto de funciones polinomiales $\{\phi_0, ..., \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal en el intervalo [a,b] con respecto a una función de peso ω, con grado de ϕ_k igual a k y Q_k(x) es un polinomio de grado k menor estricto que n entonces:

$$\int_a^b \phi_n(x)Q_k(x)w(x)dx = 0$$

Demostración: Como $Q_k(x)$ tiene grado k se sabe que existen coeficientes c_0, ..., c_k tales que:

$$Q_k(x) = \sum_{j=0}^{k} c_k \phi_k(x)$$

Luego:

$$\int_a^b \phi_n(x)Q_k(x)w(x)dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{k} c_k \phi_k(x)\phi_n(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^{k} c_k \int_a^b \phi_j(x)\phi_n(x)w(x)dx = 0$$

Pues ϕ_n es ortogonal a ϕ_j para j = 0, …, k.

Teorema 1 (Conjuntos ortogonales): Si $\{\phi_0, ..., \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo [a,b] con respecto a una función de peso ω definida en [a,b], entonces la aproximación por cuadrados mínimos a una función continua f respecto al peso ω está dada por:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)$$

Donde para cada k = 0, …, n:

$$a_k = \frac{\int_a^b \omega(x) f(x) \phi_k(x)\, dx}{\int_a^b \omega(x)(\phi_k(x))^2\, dx} = \frac{1}{\alpha_k}\int_a^b \omega(x) f(x) \phi_k(x)\, dx.$$

Teorema 2 (Conjuntos ortogonales): El conjunto de funciones polinomiales $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ que se define a continuación es un conjunto ortogonal en el intervalo [a,b] con respecto a una función de peso ω:

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = x - B_1 \quad \text{para cada } x \in [a,b],$$

donde:

$$B_1 = \frac{\int_a^b x\omega(x)(\phi_0(x))^2\, dx}{\int_a^b \omega(x)(\phi_0(x))^2\, dx},$$

y para k ≥ 2:

$$\phi_k(x) = (x - B_k)\,\phi_{k-1}(x) - C_k\,\phi_{k-2}(x) \qquad \text{para cada } x \in [a,b],$$

donde:

$$B_k = \frac{\int_a^b x\omega(x)(\phi_{k-1}(x))^2\, dx}{\int_a^b \omega(x)(\phi_{k-1}(x))^2\, dx} \quad y \quad C_k = \frac{\int_a^b x\omega(x)\phi_{k-1}(x)\phi_{k-2}(x)\, dx}{\int_a^b \omega(x)(\phi_{k-2}(x))^2\, dx}.$$

Demostración ...:

INTEGRACIÓN NUMÉRICA:

REGLAS SIMPLE:

En la siguiente tabla se resumen las reglas simples de integración numérica para estimar $\int_a^b f(x)dx$:

Regla	Puntos	Fórmula	Error	Precisión
Rectángulo	1	$f(a)(b-a)$	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$	0
Punto medio	1	$f(\frac{a+b}{2})(b-a)$	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$	1
Trapecio	2	$\frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)]$	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$	1
Simpson	3	$\frac{(b-a)/2}{3}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$	$-\frac{((b-a)/2)^5}{90} f^{(4)}(\xi)$	3

Definición (Precisión o grado de exactitud): La precisión de una fórmula o regla de cuadratura es el mayor entero no negativo n tal que la fórmula de integración es exacta para x^k, para todo k = 0, ..., n.

Como llegar a cada fórmula: Los métodos de cuadratura numérica se basan en interpolación numérica. Consideremos el conjunto de nodos distintos $\{x_0, \ldots, x_n\}$ en el intervalo [a,b]. Sea P_n el polinomio, que interpola a f en esos puntos, en la forma de Lagrange y en el término del error correspondiente:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x), \qquad e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i),$$

Luego integrando:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b P_n(x)\,dx + \int_a^b e_n(x)\,dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)\,dx + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi_x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,dx\end{aligned}$$

Teorema 2 (Reglas simples): Supongamos que f ∈ C[a,b], que g es una función integrable en [a,b] y que g no cambia de signo en [a,b]. Entonces existe c ∈ (a,b) tal que:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

Aplicación del teorema al error de la regla del trapecio: Sabemos que su correspondiente error es:

$$e_1 = \frac{f^2(\xi_x)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)$$

Por lo que luego si queremos integrar hacemos:

$$\frac{1}{2!}\int_a^b f''\left(\xi_x\right)(x - x_0)(x - x_1)dx$$

Luego si tomamos g(x) = $\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right) = (x - a)(x - b)$ notamos que no cambia de signo en [a,b], entonces aplicando el teorema anterior sabemos que existe un ξ independiente de x tal que:

$$\frac{1}{2!}\int_a^b f''\left(\xi_x\right)(x - x_0)(x - x_1) = \frac{1}{2!}f''(\xi)\int_a^b (x - a)(x - b)dx$$

$$= \frac{1}{2!}f''(\xi)\int_a^b x^2 - x(b + a) + abdx$$

$$\frac{1}{2!}f''(\xi)\left[\frac{x^3}{3} - (b + a)\frac{x^2}{2} + abx\right]\frac{b}{a}$$

Luego:

$$\left[\frac{x^3}{3} - (b + a)\frac{x^2}{2} + abx\right]\frac{b}{a} = \frac{b^3}{3} - (b + a)\frac{b^2}{2} + ab^2 - \frac{a^3}{3} + (b + a)\frac{a^2}{2} - a^2b$$

$$= \frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2} - \frac{ab^2}{2} + ab^2 - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2b}{2} + \frac{a^3}{2} - a^2b$$

$$= \frac{1}{6}\left[2b^3 - 3b^3 - 3ab^2 + 6ab^2 - 2a^3 + 3a^3 + 3a^2b - 6a^2b\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[- b^3 + 3ab^2 + a^3 - 3a^2b\right]$$

$$= \frac{(a-b)^3}{6} = -\frac{(b-a)^3}{6} = -\frac{h^3}{6}$$

Por último, si agrupamos todo queda:

$$-\frac{h^3}{12}f''(\xi) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$$

REGLAS COMPUESTAS:

Teorema 1 (Regla de Simpson compuesta): Sean f ∈ C^4 [a,b], n entero positivo, h = (b − a)/(2n) y x j = a + jh, para j = 0, ..., 2n. Entonces existe μ ∈ (a,b) tal que la regla compuesta de Simpson para n subintervalos está dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left\{f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right\} - \frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\mu).$$

Teorema 2 (Regla del trapecio compuesta): Sean f ∈ C^2 [a,b], n un número entero positivo, h = (b − a)/n y x j = a + jh, para j = 0, ..., n. Entonces existe μ ∈ (a,b) tal que la regla compuesta del Trapecio para n subintervalos está dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left\{f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right\} - \frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\mu).$$

Teorema 3 (Regla del punto medio compuesta): Sean f ∈ C^2 [a,b], n un número par, h = (b − a)/(n + 2) y x j = a + (j + 1)h, para j = −1, 0, ..., n+1. Entonces existe μ ∈ (a,b) tal que la regla compuesta del Punto Medio para n+2 subintervalos está dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) + \frac{(b-a)}{6}h^2 f''(\mu).$$

Teorema 4 (Regla del rectángulo compuesta): Sean f ∈ C^1 [a,b], n un número entero positivo, h = (b−a)/n y x j = a+ jh, para j = 0, ..., n. Entonces existe μ ∈ (a,b) tal que la regla compuesta del Rectángulo para n subintervalos está dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) + \frac{(b-a)}{2}h f'(\mu).$$

En la siguiente tabla se resumen las reglas simples de integración numérica para estimar $\int_a^b f(x)dx$:

Regla	Fórmula	Error
Rectángulo	$h\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)$	$\frac{(b-a)}{2}hf'(\mu)$
Punto medio	$2h\sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j})$	$\frac{(b-a)}{6}h^2 f''(\mu)$
Trapecio	$\frac{h}{2}\left\{f(a)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)+f(b)\right\}$	$-\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\mu)$
Simpson	$\frac{h}{3}\left\{f(x_0)+2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j})+4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1})+f(x_n)\right\}$	$-\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\mu)$

Como llegar a cada fórmula: Carpeta, ahí se entiende mejor.

REGLAS GAUSIANAS:

La precisión de cada regla de cuadratura es (n+1) o n. Por otro lado, las reglas gaussianas permiten seleccionar convenientemente los nodos, además de los coeficientes, de manera óptima en el sentido que la regla de integración sea exacta para polinomios del grado más alto posible (precisión). Es decir que se deberán determinar los (n+1) nodos x_0, ..., x_n y los (n+1) coeficientes a_0, ..., a_n de manera que la regla de cuadratura con funciones de peso:

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i),$$

sea exacta para polinomios de grado ≤ 2n+1.

Teorema 1 (Reglas Gaussianas (explica lo anterior)): Sea w una función de peso positiva definida en [a,b] y q un polinomio no nulo de grado exactamente (n+1) que es ortogonal a todo polinomio p de grado ≤ n (con respecto a w), es decir:

$$\int_a^b q(x)p(x)w(x)dx = 0$$

Si x_0, ..., x_n son las (n+1) raíces de q, entonces la fórmula:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f\left(x_i\right)$$

Con $\int_a^b w(x) \prod_{j=0\, j\neq i}^{n} \frac{x-xj}{xi-xj} dx$ será exacta para todo polinomio f de grado $\leq 2n + 1$.

Demostración: Veamos que es exacta para polinomios de grado $\leq n$.

Si f es un polinomio de grado $\leq n$ => f es el único polinomio que interpola a los (n+1) nodos, entonces puedo escribir:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(x_i\right) \prod_{j=0\, j\neq i}^{n} \frac{x-xj}{xi-xj}$$

Luego:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f\left(x_i\right) \prod_{j=0\, j\neq i}^{n} \frac{x-xj}{xi-xj} w(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f\left(x_i\right) \int_a^b \prod_{j=0\, j\neq i}^{n} \frac{x-xj}{xi-xj} w(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f\left(x_i\right) a_i$$

Ahora supongamos que f es un polinomio tal que $n + 1 \leq grado\ de\ f \leq 2n + 1$. Si dividimos f por el polinomio q se obtiene:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x) \quad (1)$$

Como por teorema se sabe que el grado de q(x) es de grado n+1, entonces el grado de p ≤ n (pues grado(f) ≤ 2n+1) y grado(r) ≤ n o r(x) ≡ 0. Luego por hipótesis:

$$\int_a^b q(x)p(x)w(x)dx = 0 \quad (2)$$

Además, como x_i es una raíz de q(x) para i = 0, …, n se tiene que:

$$f\left(x_i\right) = p\left(x_i\right)q\left(x_i\right) + r\left(x_i\right) = r\left(x_i\right) \quad (3)$$

Luego como grado r ≤ n entonces:

$$\int_a^b r(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) \quad (4)$$

Luego finalmente por (1), (2), (3) y (4) se tiene que:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \int_a^b (p(x)q(x) + r(x))w(x)dx$$

$$= \int_a^b p(x)q(x)w(x)dx + \int_a^b r(x)w(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

ECUACIONES LINEALES:

MÉTODOS FIJOS:

Preliminares:

Teorema 1 (Matrices): Para toda matriz A ∈ R^{nxn}, las siguientes propiedades son equivalentes:

1. existe A^{-1}, la inversa de A, tal que A^{-1}A = AA^{-1} = I;
2. la matriz A es no singular, es decir, si Ax = 0 entonces x = 0;
3. det(A) ≠ 0;
4. las columnas de A forman una base de R^n;
5. las filas de A forman una base de R^n;
6. para cada b ∈ R^n existe un único x ∈ R^n solución de A x = b.

Definición (Sistemas diagonales): Una matriz A es diagonal si y sólo si a_{ij} = 0 para i ≠ j. Luego A es no singular si y sólo sí a_{ii} ≠ 0, i = 1, ..., n si y sólo si det(A) = a_{11} ... a_{nn} ≠ 0. Entonces Ax = b si y sólo si $a_{ii}x_i = b_i$, para i = 1, ..., n, si y sólo si $x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$, para i = 1, ..., n.

Definición (Sistemas triangulares): Una matriz A es triangular inferior (superior) si y sólo si a_{ij} = 0 para i < j (a_{ij} = 0 para i > j).

Si A es una matriz triangular inferior entonces resolver Ax = b es equivalente a:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ii}x_i & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & b_1/a_{11} \\ x_2 & = & \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_i & = & \dfrac{1}{a_{ii}}(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j) \end{array}\right.$$

Si A es una matriz triangular superior entonces resolver Ax = b es equivalente a:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_n & = & b_n/a_{nn} \\ x_{n-1} & = & \dfrac{1}{a_{n-1,n-1}}(b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ x_i & = & \dfrac{1}{a_{ii}}(b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & = & \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - \displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j) \end{cases}$$

ELIMINACIÓN GAUSSIANA:

Método: Dado un sistema lineal Ax = b, la idea consiste en transformarlo en otro sistema equivalente Ux = y, que sea más fácil de resolver. Aplicando operaciones elementales entre matrices buscamos formar una matriz triangular superior para luego resolverla de la manera vista anteriormente.

Teorema 1 (Eliminación Gaussiana): Sean A_k = A(1 : k,1 : k) es la submatriz de A formada por las primeras k filas y k columnas de A para todo k = 1, ..., n. Si det(A_k) $\neq$ 0 para k = 1, ..., n, entonces es posible realizar el proceso completo de eliminación gaussiana y, por lo tanto, el sistema Ax = b tiene única solución.

FACTORIZACIÓN LU:

Método: La idea de la factorización LU consiste en factorizar la matriz como un producto de dos matrices más simples: A = LU, donde L es una matriz triangular inferior con elementos diagonales iguales a uno y U triangular superior. Así:

$$Ax = b \iff LUx = b \iff \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Método para calcular las matrices L y U:

Filas de U	Columnas de L
$u_{1j} = a_{1j}, \quad \text{para } j = 1, \ldots, n.$	$l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}}, \quad \text{para } i = 2, \ldots, n.$
$u_{kj} = a_{kj} - \displaystyle\sum_{m=1}^{k-1} l_{km}u_{mj}, \quad \text{para } j = k, \ldots, n.$	$l_{ik} = \dfrac{1}{u_{kk}}(a_{ik} - \displaystyle\sum_{m=1}^{k-1} l_{im}u_{mk}) \quad \text{para } i = k+1, \ldots, n.$

Teorema 1 (Método LU): Sea A ∈ R^{nxn} tal que las submatrices A_k = A(1 : k,1 : k) para k = 1, ..., n−1 son no singulares. Entonces existen únicas matrices L,U ∈ R^{nxn} tal que L es triangular inferior con 1 en la diagonal y U es triangular superior. Además, det(A) = $u_{11} \ldots u_{nn}$.

Demostración: La demostración se hará por inducción. Cuando n = 1:

Si A = LU, basta con tomar L = [1] y U = [a_{11}]. También se puede notar que det(A) = u_{11}.

Supongamos que la factorización es válida para n = k – 1, es decir existen L y U tal que $A_{k-1} = L_{k-1}U_{k-1}$. Veamos que para n = k existen L y U tal que $A_k = L_kU_k$:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{k-1} & a \\ \hline b^T & c \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L_{k-1} & 0 \\ \hline d^T & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} U_{k-1} & e \\ \hline 0^T & u_{kk} \end{array}\right]$$

Realizando los productos en bloques del lado derecho e igualando al lado izquierdo, obtenemos:

1. $L_{k-1}U_{k-1} = A_{k-1}$
2. $L_{k-1}e = a$
3. $d^tU_{k-1} = b^t$
4. $d^te + u_{kk} = c$

1) Por hipótesis es verdadera.
2) Como L_{k-1} es triangular inferior con unos en la diagonal entonces existe un único e tal que se cumple la condición.
3) Aplicando la transpuesta de ambos lados obtenemos $U_{k-1}{}^td = b$. Como U tiene inversa por hipótesis, entonces existe un único d tal que se cumple la condición.
4) $u_{kk} = c - d^te$ está bien definido y unívocamente determinado.

Por último, como A = LU entonces:

det(A) = det(LU) = det(L)det(U) = 1 $(u_{11}\ldots u_{nn}) = u_{11}\ldots u_{nn}$

MÉTODOS ITERATIVOS:

Preliminares:

Definición (Matriz diagonalmente dominante): Una matriz A, de orden n×n, es diagonalmente dominante si:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad para \quad i = 1,\ldots,n.$$

Definición (Norma Vectorial): Una norma vectorial en R^n es una función que asigna a cada x ∈ R^n un número real no negativo denotado por ||x|| y llamado norma de x, tal que se satisfacen las siguientes tres propiedades para todo x, y ∈ R^n y para todo α ∈ R:

1. ||x|| > 0 si x ≠ 0, y ||0|| = 0;

2. ||αx|| = |α|||x||;

3. ||x + y|| ≤ ||x||+||y||.

Definición (Norma Matricial): Una norma matricial en R^{nxn} es una función que asigna a cada A ∈ R^{nxn} un número real no negativo denotado por ||A|| y llamado norma de A, tal que se satisfacen las siguientes cuatro propiedades para todo A,B ∈ R^{nxn} y para todo α ∈ R:

1. ||A|| > 0 si A ≠ 0, y ||0|| = 0;

2. ||αA|| = |α|||A||;

3. ||A + B|| ≤ ||A|| + ||B||;

4. ||AB|| ≤ ||A||.||B||.

Definición (Norma Matricial Inducida): Dada una norma vectorial en R^n y una matriz A ∈ R^{nxn} se define la norma matricial inducida por:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

1. $||Ax|| \leq ||A|| \; ||x||$ para todo $x \in R^n$;

2. existe x con $||x'|| = 1$ tal que $||Ax'|| = ||A||$

Ejemplos de normas matriciales:

1. $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|;$

2. $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|;$

3. $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)},$
   donde $\rho(B)$ es el radio espectral de B y se define por $\max\{|\lambda| : \lambda$ es autovalor de $B\}$.

Idea general de los métodos: Parte de una misma idea que consiste en escribir la matriz A como A = M – N, donde M es una matriz no singular.

$$b = Ax = (M - N)x = Mx - Nx$$

$$Mx = b + Nx$$

$$x = M^{-1}(b + Nx) \quad (1)$$

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \quad (2)$$

SEA A = L + D + U CON L LA PARTE TRIANGULAR INFERIOR DE A SIN LA DIAGONAL, D LA DIAGONAL DE A Y U LA PARTE TRIANGULAR SUPERIOR DE A SIN LA DIAGONAL

MÉTODO DE JACOBI:

Método: En el método de Jacobi se toma M = D y por lo tanto N = - (L + D):

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad N = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Si miramos la i-esima componente tenemos que:

$$[Dx^{(k+1)}]_i = [b - (L + U)x^{(k)}]_i$$

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - [a_{i1} \dots a_{ii-1} 0 a_{ii+1} \dots a_{in}] \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

MÉTODO DE GAUS-SEIDEL:

Método: El método de Gaus-Seidel toma M = L + D y por lo tanto N = -U:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad N = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Si miramos la i-esima componente tenemos que:

$$[(L + D)x^{(k+1)}]_i = [b - Ux^{(k)}]_i$$

$$[Lx^{(k+1)} + Dx^{(k+1)}]_i = [b - Ux^{(k)}]_i$$

$$[Dx^{(k+1)}]_i = [b - Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)}]_i$$

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = b - \left[a_{i1} \dots a_{ii-1} 0 \dots 0\right]x^{(k+1)} - \left[0 \dots 0 a_{ii+1} \dots a_{in}\right]x^{(k)}$$

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

CONVERGENCIA DE LOS MÉTODOS:

Teorema 1: Sea b ∈ R n y A = M − N ∈ R^{nxn} donde A y M son matrices no singulares. Si $||M^{-1}N|| < 1$ para alguna norma matricial inducida entonces la sucesión generada por la ecuación converge a la solución de Ax = b para cualquier vector inicial $x^{(0)}$.

Demostración: Restando la ecuación (1) de (2), donde en (1) ponemos la solución x^* se obtiene:

$$x^{(k+1)} - x^* = (M^{-1}N)(x^{(k)} - x^*), \quad \text{para} \quad k \geq 0.$$

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \|(M^{-1}N)\| \|x^{(k)} - x^*\|, \quad \text{para} \quad k \geq 0.$$

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \|(M^{-1}N)\|^{k+1} \|x^{(0)} - x^*\|,$$

Luego, como por hipótesis tenemos que $||M^{-1}N|| < 1$, entonces:

$$\lim_{k \to \infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0,$$

Teorema 2: Si A es diagonalmente dominante, entonces la sucesión generada por el método de Jacobi o la Gaus-Seidel convergen a la solución de Ax = b, para cualquier vector inicial $x^{(0)} \in R^n$.

Teorema 3: Una condición necesaria y suficiente para que la sucesión generada por el método iterativo $x^{(k+1)} = (M^{-1}N)\, x^{(k)} + M^{-1}b$, para k ≥ 0, converja a la única solución de Ax = b para todo $x^{(0)}$ inicial, es que $\rho(M^{-1}N) < 1$