PRACTICO 2

1) Notar que f es continua $\forall x$

a)

iteración 1

$a_0 = -1{,}5$, $b_0 = 2{,}5$ $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = 0{,}5$

$f(a_0) = f(-1{,}5) = (+)(+)(-)(-)(-) < 0$
$f(b_0) = f(2{,}5) = (+)(+)(+)(+)(+) > 0$
$f(c_0) = f(0{,}5) = (+)(+)(+)(-)(-) > 0$

Esto* implica que el método de bisección va a converger.

* También es necesario que f esté definida en todo $x \in [a_0, b_0]$. Además si la función es continua (como en este caso) el método convergerá a una raíz. Si es discontinua puede que no converja a una raíz

Redefino: $a_1 = -1{,}5$, $b_1 = c_0 = 0{,}5$

Iteración 2

$c_1 = \frac{b_1+a_1}{2} = -0{,}5$

$f(a_1) = f(-1{,}5) < 0$
$f(b_1) = f(c_0) \quad 0$
$f(c_1) = f(-0{,}5) = (+)(+)(-)(-)(-) < 0$

Redefino: $a = c_1 = -0{,}5$ $b_2 = 0{,}5 \Rightarrow [-0{,}5, 0{,}5]$

Sabemos que el método convergerá, f es continua por lo tanto va a converger a una raíz. $x=0$ es una raíz y es la única que pertenece a $[-0{,}5, 0{,}5]$. $\therefore$ Converge a $x=0$

b) Iteración 1

$a_0 = -0,5$ $b_0 = 2,4$ $c_0 = 0,95$

$f(a_0) = f(-0,5) = (+)(+)(-)(-)(-) < 0$

$f(b_0) = f(2,4) = (+)(+)(+)(+)(+) > 0$

$f(c_0) = f(0,95) = (+)(+)(+)(-)(-) > 0$

Redefino $a_1 = a_0$, $b =$

Iteración 2

$a_1 = -0,5$ $b_1 = 0,95$ $c_1 = 0,225$

$f(a_1) = f(a_0) < 0$

$f(b_1) = f(c_0) > 0$

$f(c_1) = (+)(+)(+)(-)(-) > 0$

Redefino: $a_2 = (-0,5)$ $b_2 = c_1 = 0,225 \Rightarrow [-0,5, 0,225]$

Por lo dicho anteriormente, converge a $x=0$

c) Iteración 1

$a_0 = -0,5$ $b_0 = 3$ $c_0 = 1,25$

$f(a_0) = (+)(+)(-)(-)(-) < 0$

$f(b_0) = (+)(+)(+)(+)(+) > 0$

$f(c_0) = (+)(+)(+)(+)(-) < 0$

Redefino: $a_1 = c_0 = 1,25$ $b_1 = b_0 \Longrightarrow [1,25 , 3]$

$\therefore$ Converge a $x = 2$

d) Iteración 2

$a_0 = -3$ $b_0 = -0,5$ $c_0 = -1,75$

$f(a_0) = (-)(+)(-)(-)(-) > 0$

$f(b_0) = (+)(+)(-)(-)(-) < 0$

$f(c_0) = (+)(+)(-)(-)(-) < 0$

Redefino: $a_1 = a_0 = -3$ $b_1 = c_0 = -1,75 \Longrightarrow [-3, -1,75]$

$\therefore$ Converge a -2.

2

a)

$$|X_k - X^*| \leq \frac{1}{2^{k+1}}(b_0 - a_0) \leq \varepsilon$$

$$(b_0 - a_0) \leq \varepsilon . 2^{k+1}$$

$$\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \leq 2^{k+1}$$

$$\ln\left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right) \leq (k+1) . \ln(2)$$

$$\frac{\ln\left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1 \leq k$$

b) Por lo anterior:

$$K \geq \frac{\ln\left(\frac{1-0}{10^{-5}}\right)}{\ln(2)} - 1 = \frac{\ln(10^5)}{\ln(2)} - 1 \approx 15,6$$

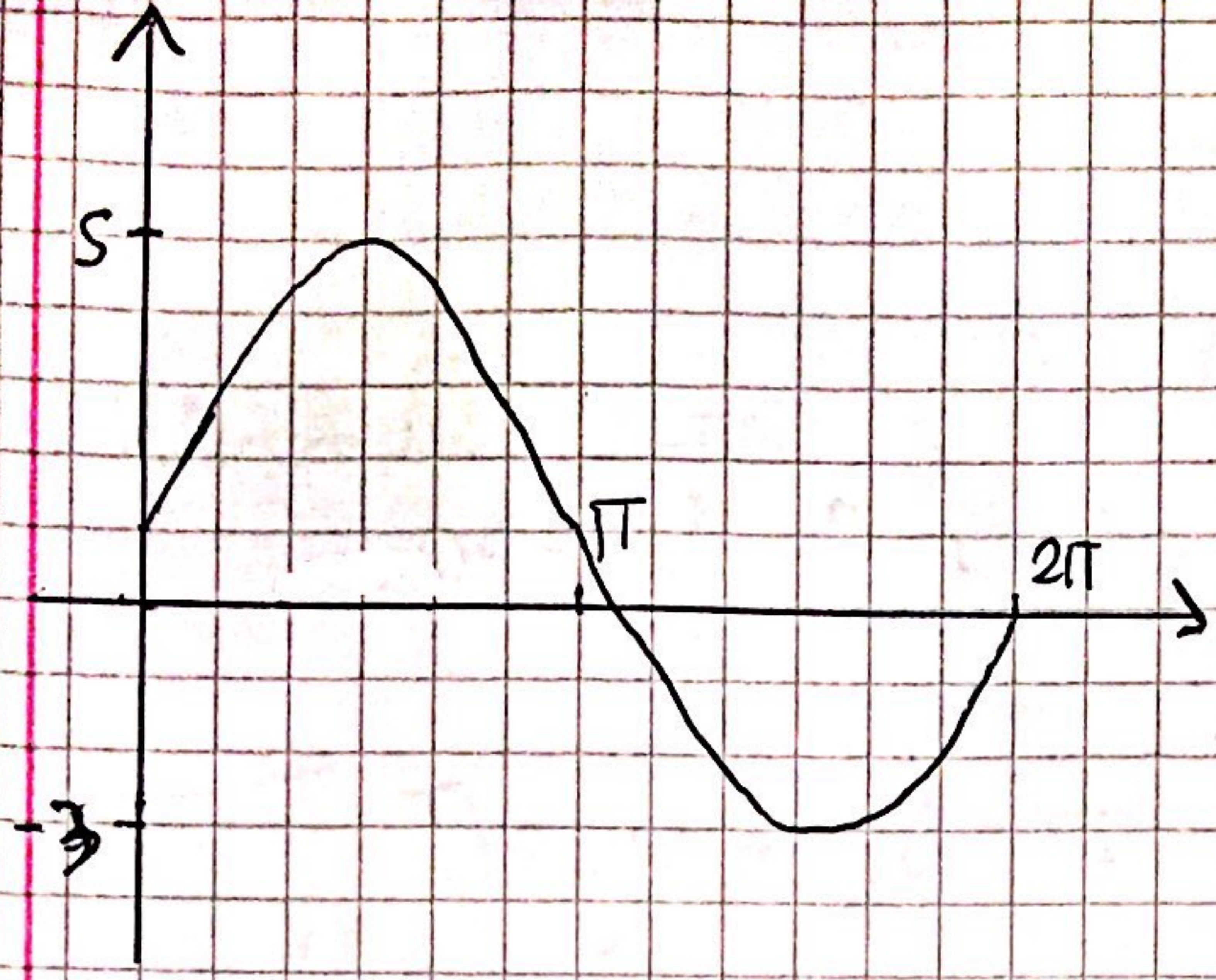
resultan por lo menos 16 iteraciones

3

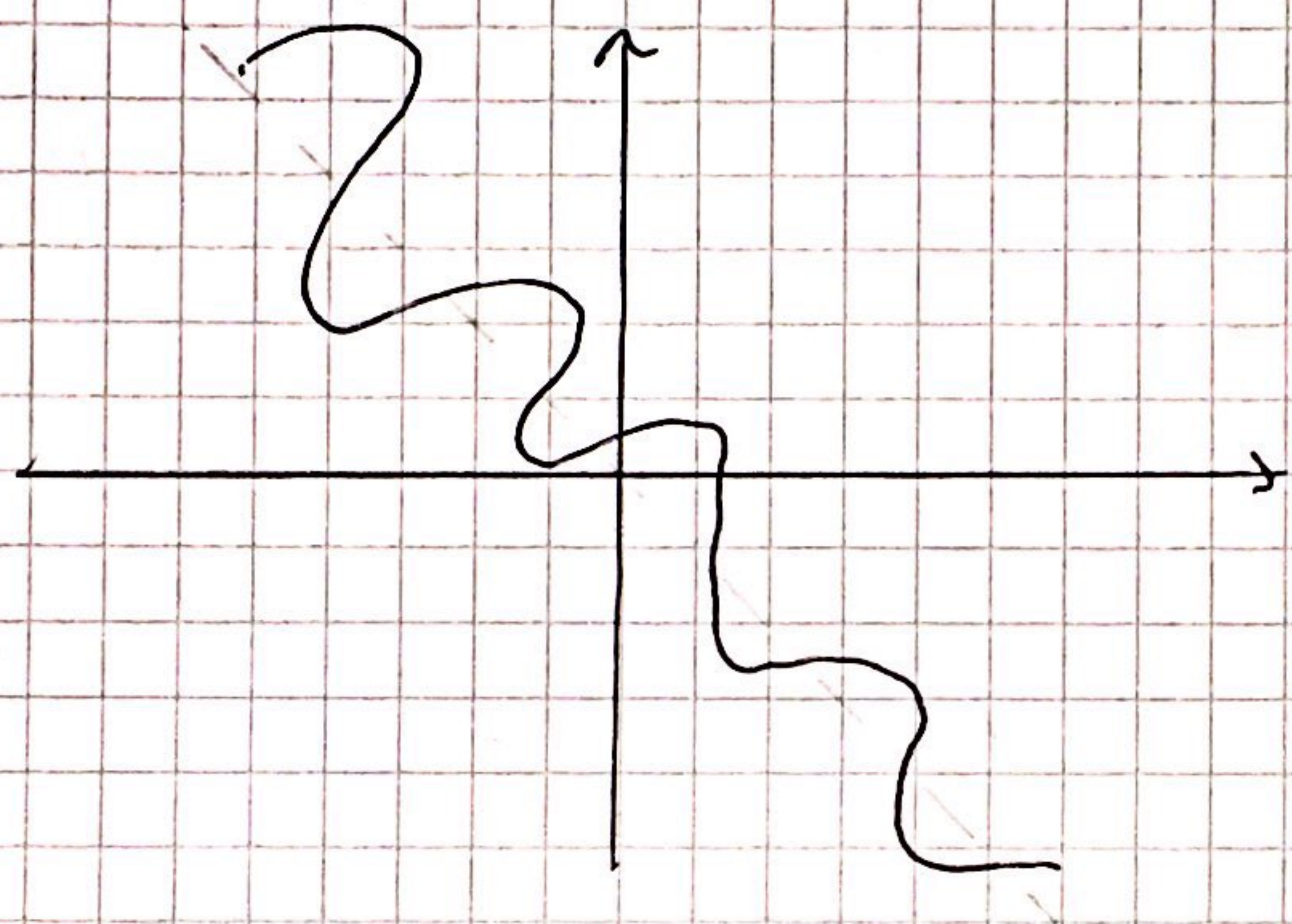
$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$-4 \leq 4\sin(x) \leq 4$$

$$-3 \leq 4\sin(x) + 1 \leq 5$$



Luego si a cada valor le resto X:



Parece que la raiz se corrio un poco hacia la izquierda. Tal vez $X_1 \in [0, \pi]$

b) Iteracion 1

$a_0 = 0 \qquad b_0 = \pi \qquad c_0 = \frac{\pi}{2}$

$f(a_0) = 1 > 0$

$f(b_0) = 1 - \pi \simeq -2{,}14 < 0$

$f(c_0) = 4 + 1 - \frac{\pi}{2} = 5 - \frac{\pi}{2} > 0$

Redefino: $a_1 = c_0 = \frac{\pi}{2} \qquad b_1 = b_0 = \pi$

Iteracion 2

$a_1 = \frac{\pi}{2} \qquad b_1 = \pi \qquad c_1 = \frac{3\pi}{4}$

$f(a_1) = f(c_0) > 0$

$f(b_1) = f(b_0) < 0$

$f(c_1) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} + 1 - \frac{3\pi}{4} \simeq 1{,}47 > 0$

Redefino: $a_2 = c_1 = \frac{3\pi}{4}$, $b_2 = b_1 = b_0 = \pi$

Iteración 3

$a_2 = \frac{3\pi}{4}$ $\quad b_2 = \pi \quad c_2 = \frac{7\pi}{8}$

$f(a_2) > 0$

$f(b_2) < 0$

$f(c_2) \simeq -0{,}21 < 0$

Redefino: $a_3 = a_1 = \frac{3\pi}{4}$, $b_3 = c_2 = \frac{7\pi}{8} \Rightarrow \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}\right]$

$\therefore c_n \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}\right]$

4 a)

$f(x_n) = x_n^2 - a$, $f'(x_n) = 2x_n$

Entonces:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} + \frac{a}{2x_n}$$

$$= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

b)

$$X_n \geq \sqrt{a} \iff \frac{1}{2}\left(X_{n-1} + \frac{a}{X_{n-1}}\right) \geq \sqrt{a}$$

$$\iff X_{n-1} + \frac{a}{X_{n-1}} \geq 2\sqrt{a}$$

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(\underbrace{X_0}_{>0} + \underbrace{\frac{a}{X_0}}_{>0}\right) > 0$$

$$X_2 = \frac{1}{2}\left(\underbrace{X_1}_{>0} + \underbrace{\frac{a}{X_1}}_{>0}\right) > 0$$

$\vdots$

$X_n > 0 \ \forall n \geq 1$

~~Esta~~

$$\iff X_{n-1} + \frac{a}{X_{n-1}} - 2\sqrt{a} \geq 0$$

$$\iff \frac{X_{n-1}^2 + a - 2\sqrt{a}X_{n-1}}{X_{n-1}} \geq 0$$

$$\iff X_{n-1}^2 + a - 2\sqrt{a}X_{n-1} \geq 0$$

$$\iff \left(X_{n-1} - \sqrt{a}\right)^2 \geq 0$$

Esto es verdadero $\forall n$, dado que son todos si y solo si, se cumple $X_n \geq \sqrt{a}$

c)

$$X_n \overset{?}{\geq} X_{n+1} \qquad (X_n > 0 \ \forall n)$$

$$X_n \geq \frac{1}{2}\left(X_n + \frac{a}{X_n}\right)$$

$$2X_n \geq X_n + \frac{a}{X_n}$$

$$X_n \geq \frac{a}{X_n}$$

$X_n^2 \geq a \rightsquigarrow$ verdadero $\forall n$ por item b.

d) Es decreciente y acotada inferiormente por $\sqrt{a}$, entonces converge a $\sqrt{a}$.

5

Quiero calcular $\frac{1}{\sqrt{r}}$, es decir que busco $\bar{x}$ (*) tal que es raiz de $f(x) = x^2 - \frac{1}{r}$, pues $f(\bar{x}) = 0 = x^2 - \frac{1}{r}$

$$\frac{1}{r} = x^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = x$$

(*) Positivo

$$f(x_n) = x_n^2 - \frac{1}{r}$$

$$f'(x_n) = 2x_n$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \left(\frac{x_n^2 - \frac{1}{r}}{2x_n}\right)$$

$$= x_n - \left(\frac{x_n}{2} - \frac{1}{2r\, x_n}\right) = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{2r \cdot x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{r \cdot x_n}\right)$$

buscamos que $|\varepsilon_r| = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{5}} - x_n\right|}{\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|} \leq 10^{-4} = 0{,}001$

Iteración 1

$$x_1 = \frac{\left(x_0 + \frac{1}{r x_0}\right)}{2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{5}\right)}{2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Probamos:

$|e_r| = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{3}{5}\right|}{\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|} \simeq 0{,}34 \rightsquigarrow$ No es menor que $0{,}0001$

Iteración 2

$$X_2 = \left(\frac{3}{10} + \frac{5}{30}\right) = \frac{7}{15}$$

$$|\varepsilon_r| = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{7}{15}\right|}{\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|} \simeq 0{,}04 \rightsquigarrow \text{No se cumple}$$

Iteración 3

$$X_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{15} + \frac{15}{7.5}\right) = \frac{94}{210}$$

$$|e_r| = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{94}{210}\right|}{\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|} \simeq 0{,}0009 < 10^{-4}$$

$\therefore$ Hacen falta 3 iteraciones

6

$$f(x) = x^3 - R$$

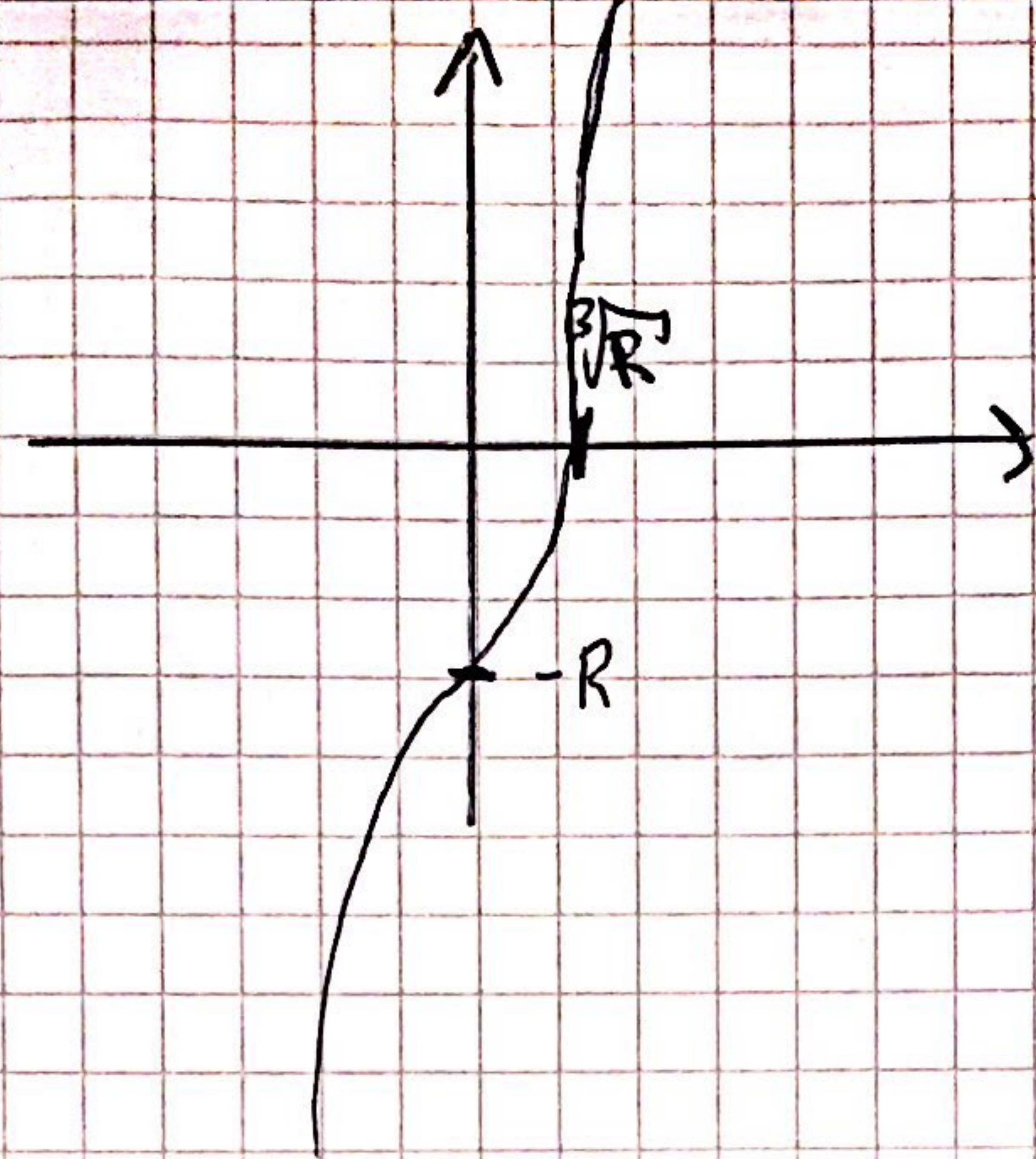
$$f(X_n) = (X_n)^3 - R$$

$$f'(X_n) = 3X_n^2$$

$$X_{n+1} = X_n - \left(\frac{f(X_n)}{f'(X_n)}\right) = X_n - \left(\frac{X_n^3 - R}{3X_n^2}\right) = X_n - \frac{X_n}{3} + \frac{R}{3X_n^2}$$

$$= \frac{2X_n}{3} + \frac{R}{3X_n^2}$$

$$\boxed{X_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2X_n + \frac{R}{X_n^2}\right)}$$



Si $X>0$

- $f(X)$ creciente $\forall x \in (0,\infty)$
- $f''(x) = 6X > 0 \ \forall x \in (0,\infty) \Rightarrow$ convexa en $(0,\infty)$
- $f''(X)$ continua $\forall x \in (0,\infty)$

$\therefore$ Por teorema, el método de Newton converge

Si $X=0$

$f'(x) = 3X^2 \rightsquigarrow f'(0) = 0 \Rightarrow$ No se puede aplicar el método de Newton

Si $X<0$

No puedo asegurar nada

7

a)

$$\left.\begin{array}{l} g(1) \approx -0{,}21 < 0 \\ g(\sqrt{3}) \approx 0{,}181 > 0 \\ g(x) \text{ es continua } \forall x \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in [1, \sqrt{3}] \,/\, (c) = 0$$

b) Es de notar que por a), $\exists \alpha \in [1, \sqrt{3}] \,/\, (\alpha) = 0$

$$g(\alpha) = \arctan(\alpha) - \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = 0$$

$$\arctan(\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \qquad (\gamma)$$

Por otro lado:

$$X_{n+1} = X_n - \left(\arctan(X_n) : \frac{1}{X_n^2+1}\right)$$

$\underline{X_0 = \alpha}$

$$X_1 = \alpha - (\alpha^2+1) . \arctan(\alpha)$$

$$X_1 = \alpha - (\alpha^2+1) . \frac{2\alpha}{\alpha^2+1} \quad \rightarrow \text{Por } (\gamma)$$

$$X_1 = \alpha - 2\alpha = -\alpha$$

$\underline{X_1 = -\alpha}$

$$X_2 = -\alpha - (\alpha^2+1) . \arctan(-\alpha)$$

dado que $\arctan(x)$ es impar, $\arctan(-\alpha) = -\arctan(\alpha)$

$$X_2 = -\alpha - \left((\alpha^2+1) \cdot \frac{(-2\alpha)}{\alpha^2+1} \right) \longrightarrow \text{Por } (\gamma)$$

$$= -\alpha - (-2\alpha) = \alpha$$

De esta manera...

$$X_n = (-1)^n \cdot \alpha$$

8 a)

Buscamos $\bar{x} > 0$ tal que $f(\bar{x}) = 0$. Entonces:

$$\bar{x}^3 - \bar{x} - 1 = 0$$

$$\bar{x} = \sqrt[3]{\bar{x}+1}$$

Es decir que al definir $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$, encontrar $\bar{x}$ se vuelve un problema de punto fijo.

$$g'(x) = \frac{1}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}$$

Ahora veamos para qué valores de x existe un k tal que:

$$|g'(x)| \leq k < 1$$

$$\left| \frac{1}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}} \right| < 1$$

$$1 \leq |3(x+1)^{\frac{2}{3}}|$$

$3(x+1)^{\frac{2}{3}} > 1$

$(x+1)^{\frac{2}{3}} > \frac{1}{3}$

$x+1 > \frac{1}{\sqrt{27}}$

$x > \frac{1}{\sqrt{27}} - 1$

$3(x+1)^{\frac{2}{3}} < -1$

$(x+1)^{\frac{2}{3}} < -\frac{1}{3}$

$x+1 < \left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

↳ absurdo

$\therefore$ Se cumple que $|g'(x)| \leq K < 1 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{\sqrt{27}} - 1, \infty\right)$

Ahora busco acotar $g(x)$ en algun intervalo cerrado $I \subset \left(\frac{1}{\sqrt{27}} - 1, \infty\right)$

Dado que $g(x)$ es creciente, busco b tal que $g(b) \leq b$

$$\sqrt[3]{b+1} \leq b$$

<u>Si $b=1$</u> $\sqrt[3]{2} \overset{?}{\leq} 1$ falso

<u>Si $b=2$</u> $\sqrt[3]{3} \leq 2$ Verdadero

- Dado que g es continuamente creciente $\forall x$, $g(0) = 1 > 0$ y $g(2) \cong 1{,}44 < 2 \Longrightarrow \underbrace{g(x) \in [0,2]}_{(\alpha)} \quad \forall x \in [0,2]$
- Además g es continua $\forall x \in [0,2]$ (β)
- $g'(x)$ existe $\forall x \in (0,2)$ (γ)
- $\forall x \in (0,2)$ existe K tal que $|g'(x)| \leq K < 1$ (δ)

$\therefore$ Por $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ existe punto fijo P en $[0,2]$ y es único en $(0,2)$.

Dado que dicho punto fijo P es la raiz de f y que $(0,2) \subset \mathbb{R}^+$, la raiz es positiva. Es la menor, pues otro punto fijo positivo q deberá estar en $(2,\infty)$. Es decir

$$p < 2 < q$$

$$\underline{p < q}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Función de iteración: } g(x) = \sqrt[3]{x+1} \\ \text{intervalo: } [0,2]\end{array}}$$

b)

$$2x - \tan(x) = 0$$

$$2x = \tan(x)$$

$$\arctan(2x) = x$$

$g(x) = \arctan(2x)$

$g'(x) = \dfrac{1}{4x^2+1} \cdot 2$

$$|g'(x)| \leq k < 1$$

$$\frac{2}{|4x^2+1|} < 1$$

$$2 < |4x^2+1|$$

$4x^2+1 > 2 \quad \vee \quad 4x^2+1 < -2$

$4x^2 > 1 \qquad\qquad 4x^2 < -3$

$x^2 > \frac{1}{4} \qquad\qquad \hookrightarrow$ absurdo

$x > \frac{1}{2} \quad \vee \quad x < -\frac{1}{2}$

$\therefore \ \forall x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$

Sabemos que $-\frac{\pi}{2} < \arctan(2x) < \frac{\pi}{2}$ y que además es creciente $\forall x > 0$, y continua

$g(\frac{1}{2}) = \arctan(1) \simeq 0{,}78 > \frac{1}{2}$

$\therefore \ g(x) \in [\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \forall x \in [\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad (\alpha)$

- Además g es continua $\forall x \in [\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad (\beta)$
- $g'(x)$ existe $\forall x \in (\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}) \qquad (\gamma)$
- $\forall x \in (1, \frac{\pi}{2})$ existe k tal que $|g'(x)| \leq k < 1. \quad \delta$

Por $\alpha, \gamma, \delta, \beta$ existe $p \in [\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}]$, y es único en $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$

Veamos que dicho punto fijo es la menor raíz positiva:

$f(0) = 0 - 0 = 0 \geq 0$

$f(\frac{1}{2}) = 1 - \arctan(\frac{1}{2}) \approx 0{,}4 > 0$

$2x$ es continua $\forall x$, $-\tan(x)$ es continua $\forall x \in (0, \frac{1}{2})$ entonces

f es continua en $(0, \frac{1}{2})$

f es creciente en $(0, \frac{1}{2})$

es decir que f no tiene raíces en $(0,1)$.

9

a)

<u>i</u>

$$g_1(x) = x - f(x)$$

$$g_1(r) = r - f(r) = r - 0 = r \qquad \therefore \ r \text{ es punto fijo de } g_1$$

<u>ii</u>

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

$$\frac{f(x)}{x} = x^2 + 4x - \frac{10}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x} - x^2 = 4x - \frac{10}{x}$$

Entonces:

$$g_2(x) = \left(x^2 - \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$g_2(r) = \left(r^2 - \frac{f(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(r^2 - \frac{0}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = (r^2)^{\frac{1}{2}} = r$$

<u>iii</u>

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

$$f(x) - 4x^2 = x^3 - 10$$

Entonces:

$$g_3(x) = \frac{1}{2}(4x^2 - f(x))^{\frac{1}{2}}$$

$$g_3(r) = \frac{1}{2}(4r^2 - f(r))^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(4r^2)^{\frac{1}{2}} = r$$

<u>iiii.</u>

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

$$-\left(\frac{f(x) - x^3 - 4x^2}{4+x}\right) = \frac{10}{4+x}$$

entonces:

$$g_4(x) = \left(\frac{x^3 + 4x^2 - f(x)}{x+4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$g_4(r) = \left(\frac{r^3 + 4r^2}{r+4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{r^2(r+4)}{r+4}\right)^{\frac{1}{2}} = r$$

<u>iiiii</u>

$$g_5(x) = x - \frac{f(x)}{3x^2 + 8x}$$

$$g_5(r) = r - \frac{f(r)}{3r^2 + 8r} = r$$

10

$$x = 2^{x-1} = \frac{2^x}{2}$$

tomo $f(x) = \frac{2^x}{2}$, luego:

$f'(x) = 2^x \cdot \frac{\ln(2)}{2}$ $\rightsquigarrow$ >0 $\forall x$ Luego:

$$\left|2^x \frac{\ln(2)}{2}\right| < 1$$

$$2^x \frac{\ln(2)}{2} < 1$$

$$2^x < \frac{2}{\ln(2)}$$

$$x \cdot \ln(2) < \ln\left(\frac{2}{\ln(2)}\right) = \ln(2) - \ln(\ln(2))$$

$$x < 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(2)} \approx 1{,}52$$

elegimos $I = [0, 1{,}52]$

f es creciente $\forall x \in I$.

$f(0) = \frac{1}{2}$ $\quad \Longrightarrow f(x) \in I \ \forall x \in I$

$f(1{,}52) \approx 1{,}43$

$\therefore I = [0, 1{,}52]$

11

$$|X_{n+1}-X^*| \overset{\text{cuando } n\to\infty}{=} |g(X_n)-g(X^*)| \underset{\text{Lhipsters}}{\leq} \lambda |X_n - X^*|$$

Entonces:

$$|X_{n+1}-X^*| \leq \lambda |X_n - X^*| = \lambda | X_n - X^* + X_{n+1} - X_{n+1}|$$

$$= \lambda |(X_n - X_{n+1}) + (X_{n+1}-X^*)|$$

$$\leq \lambda |X_n - X_{n+1}| + \lambda |X_{n+1}-X^*|$$

$$\Rightarrow |X_{n+1}-X^*| \leq \lambda |X_n - X_{n+1}| + \lambda |X_{n+1}-X^*|$$

$$\underbrace{(1-\lambda)}_{>0 \text{ pues } \lambda\in(0,1)} |X_{n+1}-X^*| \leq \lambda |X_n - X_{n+1}|$$

$$|X_{n+1}-X^*| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} |X_n - X_{n+1}|$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{\lambda}{1-\lambda}}$$

(12) a) $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 - 3(1-a)x_n + 2}{3a} = \dfrac{x_n^2 - 3x_n + 2 + 3ax_n}{3a} = \dfrac{f(x_n) + 3ax_n}{3a}$

Sea x^* a donde converge:

$$x^* = \frac{f(x^*) + 3ax^*}{3a}$$

$$3ax^* = f(x^*) + 3ax^* \to \boxed{f(x^*) = 0}$$

b) Veamos para $x=1$:

$$g(x) = \frac{x^2 + (3a-3)x + 2}{3a}$$

$$g'(x) = \frac{2}{3a}x + 1 - \frac{1}{a}$$

$$g'(1) = \frac{2}{3a} + 1 - \frac{1}{a} = \frac{2+3a-3}{3a} = \frac{3a-1}{3a}$$

Luego:

$$|g'(1)| < 1$$

$$\left|\frac{3a-1}{3a}\right| < 1$$

Sea $a>0$:

$$-1 < \frac{3a-1}{3a} < 1$$

$$-3a < 3a-1 < 3a$$

$$-6a < -1 < 0$$

$$\boxed{a > \frac{1}{6}}$$

Sea $a<0$

$$-1 < \frac{3a-1}{3a} < 1$$

$$-1 < \frac{3a-1}{3a} \quad \wedge \quad \frac{3a-1}{3a} < 1$$

$$-3a > 3a-1$$

$$>$$

$$3a-1 > 3a$$

$$-1 > 0$$

absurdo

$$\left(0, \frac{1}{6}\right) \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\Longrightarrow I = \left(\frac{1}{6}, \infty\right)$$

Con demostrar eso ya podemos decir que para ese intervalo converge, pues demostramos que es único. La exitencia no es necesaria, pues lo sabíamos de antemano.

Scanned with CamScanner

13

a)

$X = X^2 - 1$ → buscamos punto fijo

$0 = X^2 - X - 1 \quad \begin{cases} X_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ X_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$$g(X_1) = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} - 1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4} - 1 = \frac{6-4}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$g(X_2) = \frac{(1-\sqrt{5})^2}{4} - 1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4} - 1 = \frac{6-4}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$\therefore$ tiene 2 puntos fijos y son X_1, X_2

Luego:

$g'(X) = 2X$

$g'(X_1) = 1+\sqrt{5} > 1$

$g'(X_2) = 1-\sqrt{5} \approx -1{,}23 \quad , \quad |g'(X_2)| = 1{,}23 > 1$

b) es decreciente en $(-\infty, 0]$, luego:

máximo: $g(-1) = 0$
mínimo: $g(0) = -1$ $\Rightarrow g(x) \in [-1,0] \ \forall x \in [-1,0]$

Además g es continua $\forall x \in [-1,0]$

$\therefore$ Existe punto fijo en $[-1,0]$

c) Pf: $-0{,}61\ldots$

$X_0 = -\frac{1}{2}$

$g(X_0) = -\frac{3}{4} = -0{,}75 = X_1$
$g(X_1) = -\frac{7}{16} \approx -0{,}43 = X_2$
$g(X_2) = -\frac{207}{256} \approx -0{,}8$

No tiene pinta de que converja

Scanned with CamScanner

14

$$|f(x_n)| = \left(1+\frac{1}{n+1}-1\right)^{10} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{10}$$

$$n \geq 1$$
$$n+1 \geq 2$$
$$(n+1)^{10} \geq 2^{10}$$
$$\frac{1}{(n+1)^{10}} \leq 2^{-10} = (1024)^{-1} \approx 0{,}00097 < 0{,}001 = 10^{-3}$$

$$\therefore \ |f(x_n)| < 10^{-3}$$

Por otro lado:

$$|x_n - x_*| = \left|1+\frac{1}{n+1}-1\right| = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} < 10^{-3}$$
$$10^{3} < n+1$$
$$10^{3}-1 < n$$
$$999 < n$$

$$\therefore \ n \geq 1000$$