Part I

Repaso Analisis

1 Series

1.1 Serie Geometrica

La serie geometrica, dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

es convergente si $|r| < 1$ y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

Si $|r| \geq 1$, la serie es divergente

1.2 Serie Armonica

La serie armonica, dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

es divergente.

1.3 Teorema de divergencia convergencia

- Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **convergente**, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ o no existe, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **divergente**.

1.4 Serie p

La serie p, dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

es **convergente** si $p > 1$ y **divergente** si $p \leq 1$.

1.5 Prueba por comparacion

Supongamos que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con terminos positivos.

- Si $\sum b_n$ es **convergente** y $a_n \leq b_n$ para toda n, entonces $\sum a_n$ tambien es **convergente**.
- Si $\sum b_n$ es **divergente** y $a_n \geq b_n$ para toda n, entonces $\sum a_n$ tambien es **divergente.**

1.6 Prueba por comparacion del limite

Supongamos que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con terminos positivos. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

donde c es un numero finito y $c > 0$, entonces ambas series **convergen** o ambas **divergen.**

1.7 Series alternantes

Si la serie alternante dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$$

cumple con

1. $b_{n+1} \leq b_n$ para toda n
2. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

entonces la serie es **convergente**.

1.8 Prueba de la razon

1. Si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** (y, por lo tanto, **convergente**).
2. Si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L > 1$ o bien $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **divergente**.
3. Si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$, la prueba de la razon **no es concluyente**.

1.9 Prueba de la raiz

1. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absoluta**Sea**mente convergente** (y, por lo tanto, **convergente**).
2. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$ o bien $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **divergente**.
3. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, la prueba de la raiz **no es concluyente**.

Part II
Serie de Taylor

2 Serie de Taylor en terminos de $(x - c)$

Si la funcion de f tiene derivadas continuas de ordenes $0, 1, 2, ..., (n + 1)$ en un intervalo cerrado $I = [a, b]$, entonces para cualquier c y x en I

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)(x-c)^k}{k!} + E_{(n+1)}$$

Donde $E_{(n+1)}$ es el error y esta dado de la forma

$$E_{(n+1)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

Aqui ξ es un punto que se encuentra entre x y c.

3 Serie de Taylor en terminos de $(x + h)$

Esta forma se obtiene de reemplazar x por $x+h$ y c por x en la formula anterior, entonces tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)((x+h)-x)^k}{k!} + E_{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)(h)^k}{k!} + E_{(n+1)} \end{aligned}$$

Donde $E_{(n+1)}$ esta dato entonces por

$$\begin{aligned} E_{(n+1)} &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)((x+h)-x)^{(n+1)}}{(n+1)!} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)(h)^{(n+1)}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Aqui ξ es un punto que se encuentra entre x y c.

Part III
Erorres

4 Errores absolutos y relativos

Cuando un numero real r es aproximado por otro $\bar{r}$ se define el error por $r - \bar{r}$. Definimos

Error	Simbolo	Expresion
Error Absoluto	Δr	$\lvert r - \bar{r}\rvert$
Error Relativo	δr	$\frac{\lvert r-\bar{r}\rvert}{\lvert r\rvert} = \frac{\Delta r}{r}$
Error Porcentual	-	$100 \cdot \delta r$

5 Redondeo y truncado

Redondeo Sea $\tilde{r}$ la aproximacion por redondeo a n digitos decimales de r. Se sigue que

$$|r - \tilde{r}| \leq \frac{1}{2}10^{-n}$$

Truncado Sea $\hat{r}$ la aproximacion por truncado a n digitos decimales de r. Se sigue que

$$|r - \hat{r}| \leq 10^{-n}$$

6 Digitos significativos

Diremos que el numero $\bar{r}$ aproxima al numero r con m digitos significativos si

$$\delta r = \frac{\Delta r}{|r|} \leq 5 \cdot 10^{-m} = \frac{1}{2}10^{1-m}$$

Esto dice que el error relativo es del orden de 10^{-m}.

7 Errores en las operaciones

7.1 Error en la suma y resta

Sean $y = x_1 + x_2, \bar{y} = \bar{x_1} + \bar{x_2}$. Podemos ver lo siguiente:

El error por la suma esta dado por

$$y - \bar{y} = (x_1 + \bar{x_1}) + (x_2 - \bar{x_2})$$

El error absoluto

$$\Delta y \leq \Delta x_1 + \Delta x_2$$

El error relativo

$$\delta y = \frac{\Delta y}{|y|} \leq \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{|x_1 + x_2|}$$

En general si $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$, entonces $\Delta y \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$

7.2 Error de la multiplicacion y la divicion

Sean $y = x_1 * x_2, \bar{y} = \bar{x_1} * \bar{x_2}, z = x_1/x_2, \bar{z} = \bar{x_1}/\bar{x_2}$. Se puede decir

$$\begin{array}{llll} \Delta y \lessapprox & |x_2|\Delta x_1 + |x_1|\Delta x_2 & \delta y & \lessapprox \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|} \\ \Delta z \lessapprox & \frac{1}{|x_2|}\Delta x_1 + \frac{|x_1|}{|x_2^2|}\Delta x_2 & \delta z & \lessapprox \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|} \end{array}$$

Part IV

Representacion de numeros en una computadora

Sea $\beta \in Nat, \beta > 2$, todo numero real r se puede escribir de la forma:

$$(\pm d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} \dots)_\beta$$

donde cada d_i es un numero natural entre 0 y $\beta - 1$. el valor del numero r es

$$\pm d_n \beta^n + d_{n-1}\beta^{n-1} + \dots + d_0\beta^0 + d_{-1}\beta^{-1} + d_{-2}\beta^{-2} + \dots$$

8 Errores de redondeo en aritmetica de punto flotante

Supongamos un sistema de punto flotante (β, t, L, U) que escribirmos un numero real x de la forma

$$x = m\beta^e$$

con $1/\beta \leq |m| \leq 1$ y $L \leq e \leq U$. Sea $fl(x) = x_r = m_r\beta^e$, donde m_r es la mantisa que se obtiene redondeando a t digitos la parte fraccionaria de m, luego tenemos

$$\begin{array}{rcl} |m_r - m| & \leq & \frac{1}{2}\beta^{-t} \\ |m_r - m|\beta^e & \leq & \frac{1}{2}\beta^{-t}\beta^e \\ |\beta^e m_r - \beta^e m| & \leq & \frac{1}{2}\beta^{-t}\beta^e \end{array}$$

Y por lo tanto obtenemos la cota del **error absoluto** dado por

$$|x_r - x| \leq \frac{1}{2}\beta^{-t}\beta^e$$

Para el **error relativo** tenemos

$$\frac{|x_r - x|}{|x|} \leq \frac{\frac{1}{2}\beta^{-t}\beta^{e}}{|m|\beta^{e}} = \frac{\frac{1}{2}\beta^{-t}}{|m|} \leq \frac{1}{2}\beta^{1-t}$$

pues $|m| \geq \frac{1}{\beta}$, entonces $\beta \geq \frac{1}{|m|}$.

Part V

Soluciones de ecuaciones no lineales

9 Analisis de error en el metodo de Biseccion

Si el algoritmo de biseccion se aplica a una funcion continua f en un intervalo $[a, b]$, donde $f(a)f(b) < 0$, entonces, despues de n pasos se habra calcuado una raiz aproximada con un error a lo mas de $(b-a)/2^{n+1}$. (pag. 82 Kincaid)

Part VI

Interpolacion polinomial

10 Forma de Newton del polinomio interpolante

Dados $n+1$ puntos $x_0, \ldots x_n$. La forma de newton compacta para el polinomio interpolante resulta en

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Si utilizamos diferencias divididas, obtenemos

$$\sum_{i=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_n] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Donde la diferencia dividida esta definida sin importar la permutacion de sus argumentos, luego

$$f[x_i, \ldots, x_n] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

11 Error de interpolacion

Si p es el polinomio de grado a los mas n que interpola a f en los $n+1$ puntos $x_0, \ldots x_n$ pertenecientes a el intervalo $[a, b]$ y ademas $f^{(n+1)}$ es continua, entonces para cada $x \in [a, b]$ existe un $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

(pag. 156 Kinkaid)

Part VII
Splines

12 Spline lineal o de primer grado

Dados los $n+1$ nodos tales que $x_0 < \cdots < x_n$, un **spline lineal** ($k = 1$) es una funcion S definida en $[x_0, x_n]$ que satisface:

- S es un polinomio de grado ≤ 1 en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1})$, para $0 \leq i \leq (n-1)$.
- La funcion S es continua en $[x_0, x_n]$.

Es decir, tiene la siguiente forma

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 x + b_0 & x \in [x_0, x_1) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1} x + b_{n-1} & x \in [x_{n-1}, x_n\} \end{cases}$$

Donde

$$a_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$
$$b_i = f(x_i) - a_i x_i$$

Error: El error de una spline lineal en un intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ esta dado por

$$|e(x)| = \frac{1}{8} f^{''}(\xi) |x_{i+1} - x_i|^2 = \frac{M_2}{8} h^2$$

para un ξ entre $[x_0, x_n]$.

13 Spline Cubico

Dados los $n+1$ nodos tales que $x_0 < \cdots < x_n$, un **spline cubico** ($k = 3$) es una funcion S definida en $[x_0, x_n]$ que satisface:

- S es un polinomio de grado ≤ 3 en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1})$, para $0 \leq i \leq (n-1)$. \

- Las funciones S, S' y S'' son continuas en $[x_0, x_n]$

Es decir, tiene la forma

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0x^3 + b_0x^2 + c_0x + d_0 & x \in [x_0, x_1) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1}x^3 + b_{n-1}x^2 + c_{n-1}x + d_{n-1} & x \in [x_{n-1}, x_n\} \end{cases}$$

Donde las condiciones a cumplir son:

Condicion de interpolacion Se aplican a todos los nudos, es decir $i = 0, \ldots, n$

$$S(x_i) = f(x_i)$$

Condiciones de continuidad Se aplican solo a los nudos interiores, es decir $i = 0, \ldots, n-2$

$$\begin{array}{c} S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \\ S_i^{'}(x_{i+1}) = S_{i+1}^{'}(x_{i+1}) \\ S_i^{''}(x_{i+1}) = S_{i+1}^{''}(x_{i+1}) \end{array}$$

Condiciones extras Son condiciones extrras asociadas a caracteristicas del problema, las mas comunes son las siguientes

- **Condiciones normales**

$$S^{''}(x_0) = S_0^{''}(x_0) = 0 \quad \textbf{y} \quad S^{''}(x_n) = S_{n-1}^{''}(x_n) = 0$$

- **Condiciones correctas**

$$S^{'}(x_0) = S_0^{'}(x_0) = f(x_0) \quad \textbf{y} \quad S^{'}(x_n) = S_{n-1}^{'}(x_n) = f(x_n)$$

Part VIII
Aproximacion de funciones

14 Aproximacion de nodos por cuadrados minimos

Sea $\{(x_i, y_i) : i = 0, \ldots, m-1\}$ un **conjunto de puntos**, llamados nodos, queremos obtener un polinomio $p(x) = a_0 + \cdots + a_nx^n$ de grado a lo mas n tal que minimice el error

$$E_2(a_0, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{m} [y_i - p(x_i)]^2$$

Para minimizar E_2 se deben calcular las derivadas parciales $\frac{\partial E_2}{\partial a_j}$ para $j = 0, \ldots, n$ e igualar a 0. Luego de resolver esto, nos quedan las ecuaciones normales

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{m} x^{j+k} = \sum_{i=0}^{m} x^j f(x) \text{para cada}\, j = 0, \ldots, m$$

que las podemos expresar como el siguiente sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m x_i^0 & \sum_{i=0}^m x_i^1 & \sum_{i=0}^m x_i^2 & \ldots & \sum_{i=0}^m x_i^n \\ \sum_{i=0}^m x_i^1 & \sum_{i=0}^m x_i^2 & \sum_{i=0}^m x_i^3 & \ldots & \sum_{i=0}^m x_i^{n+1} \\ \sum_{i=0}^m x_i^2 & \sum_{i=0}^m x_i^3 & \sum_{i=0}^m x_i^4 & \ldots & \sum_{i=0}^m x_i^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^m x_i^n & \sum_{i=0}^m x_i^{n+1} & \sum_{i=0}^m x_i^{n+2} & \ldots & \sum_{i=0}^m x_i^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m y_i x_i^0 \\ \sum_{i=0}^m y_i x_i^1 \\ \sum_{i=0}^m y_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^m y_i x_i^n \end{pmatrix}$$

(pag. 369 Burden)

15 Aproximacion de funciones por cuadrados minimos

Sea f una **funcion** continua en un intervalo $[a, b]$, queremos obtener un polinomio $p(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$ de grado a lo mas n tal que minimice el error

$$E_2(a_0, \ldots, a_n) = \int_a^b [f(x) - p(x)]^2 \, dx$$

El problema es encontrar los coeficientes reales $a_0, \ldots, a_n$ que minimizarian E_2. Una condicion necesaria es calcular las derivadas parciales $\frac{\partial E_2}{\partial a_j}$ para $j = 0, \ldots, n$ e igualar a 0. Luego de resolver esto nos quedan las ecuaciones normales

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x) \text{para cada}\, j = 0, \ldots, n$$

que las podemos expresar como el siguiente sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \int_a^b x^0 & \int_a^b x^1 & \int_a^b x^2 & \ldots & \int_a^b x^n \\ \int_a^b x^1 & \int_a^b x^2 & \int_a^b x^3 & \ldots & \int_a^b x^{n+1} \\ \int_a^b x^2 & \int_a^b x^3 & \int_a^b x^4 & \ldots & \int_a^b x^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b x^n & \int_a^b x^{n+1} & \int_a^b x^{n+2} & \ldots & \int_a^b x^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b x^0 f(x) \\ \int_a^b x^1 f(x) \\ \int_a^b x^2 f(x) \\ \vdots \\ \int_a^b x^n f(x) \end{pmatrix}$$

(pag. 378 Burden)

16 Conjunto Ortogonal de funciones

Definition. El conjunto $\{\phi_0, \phi_1, \ldots \phi_n\}$ es un conjunto **ortogonal de funciones** en el intervalo $[a,b]$, con respecto de la funcion de peso ω, si se cumple

$$\int_a^b \omega(x)\phi_k(x)\phi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \alpha_j & j = k \end{cases}$$

Particularmente si $\alpha_j = 1$ para todo $j = 0, \ldots, n$ se dice que el conjunto es **ortonormal**.

Lemma. Si $\{\phi_0, \phi_1, \ldots \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo I con respecto a una funcion de peso ω definida en I entonces son linealmente independientes.

Theorem. Si $\{\phi_0, \phi_1, \ldots \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en un intervalo $[a,b]$ con respecto a una funcion de peso ω definida en $[a,b]$, entonces la aproximacion por cuadrados minimos a una funcion continua f respecto al peso ω esta dada por

$$p(x) = \sum_k^n a_k\phi_k(x)$$

donde para cada a_k con $k = 0, \ldots, n$ se cumple

$$a_k = \frac{\int_a^b \omega(x)f(x)\phi_k(x)\,dx}{\int_a^b \omega(x)(\phi_k(x))^2\,dx} = \frac{1}{\alpha_k}\int_a^b \omega(x)f(x)\phi_k(x)\,dx$$

Theorem. El conjunto de funciones polinomiales $\{\phi_0, \phi_1, \ldots \phi_n\}$ que se define a continuacion es un conjunto ortogonal en el intervalo $[a,b]$ con respecto a una funcion de peso ω

$$\phi_0(x) = 1 \qquad \phi_1(x) = x - B_1 \qquad \text{para cada } x \in [a,b]$$

donde

$$B_1 = \frac{\int_a^b x\omega(x)(\phi_k(x))^2\,dx}{\int_a^b \omega(x)(\phi_k(x))^2\,dx}$$

y para $k \geq 2$ definimos

$$\phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x) \qquad \text{para cada } x \in [a,b]$$

donde

$$B_k = \frac{\int_a^b x\omega(x)(\phi_{k-1}(x))^2\,dx}{\int_a^b \omega(x)(\phi_{k-1}(x))^2\,dx} \qquad C_k = \frac{\int_a^b x\omega(x)\phi_{k-1}(x)\phi_{k-2}(x)\,dx}{\int_a^b \omega(x)(\phi_{k-2}(x))^2\,dx}$$