

Numerico Resumen teorico practico

Resumen teorico por unidad.

Teoria de errores (Faltan cosas de finales)

Definición 3 Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales que converge a x_* .

Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ tiene tasa de convergencia (al menos) **lineal** si existe una constante c tal que $0 < c < 1$ y un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{n+1} - x_*| \leq c|x_n - x_*| \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Se dice que la tasa de convergencia es (al menos) **superlineal** si existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}$ que converge a 0 y un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{n+1} - x_*| \leq \varepsilon_n |x_n - x_*| \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Se dice que la tasa de convergencia es (al menos) **cuadrática** si existe una constante positiva c y un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{n+1} - x_*| \leq c|x_n - x_*|^2 \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Definición 1 Cuando un número real r (valor exacto) es aproximado por otro número \tilde{r} , se define el **error** por $r - \tilde{r}$. Llamaremos, respectivamente, a

$$\text{Error absoluto: } \Delta r = |r - \tilde{r}|,$$

$$\text{Error relativo: } \delta r = \left| \frac{r - \tilde{r}}{r} \right| = \frac{\Delta r}{|r|}.$$

También se llama **error (relativo) porcentual** al producto $100 * \delta r$.

Definición 2 El número \tilde{r} aproxima a r con m dígitos significativos si

$$\delta r = \frac{\Delta r}{|r|} \leq 5 \cdot 10^{-m}.$$

Es decir que $\frac{|r - \tilde{r}|}{r} \leq 5 \cdot 10^{-m}$

Observacion: el absoluto tambien va en el r de abajo, me lo comi

Recordemos la definición de dígitos significativos: el número \tilde{a} aproxima al número real a con r **dígitos significativos** si

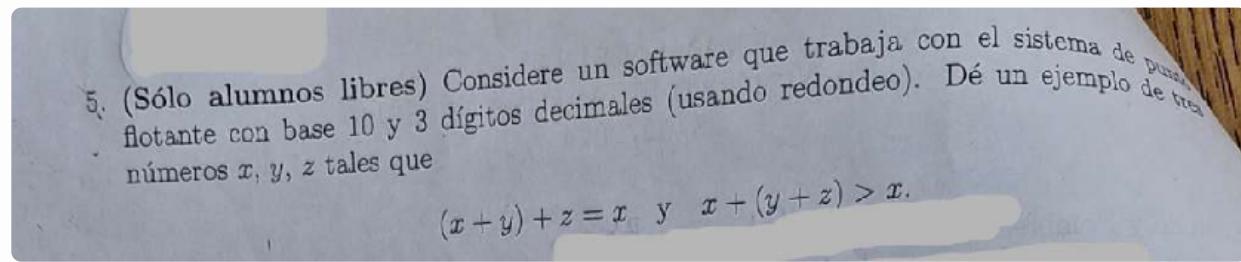
$$\frac{\Delta a}{|a|} \leq 5 \cdot 10^{-r} = \frac{1}{2} \cdot 10^{1-r}.$$

El sistema de representación de punto flotante es una forma de escribir números, tanto muy grandes como muy pequeños, en notación científica. Se utiliza ampliamente en computadoras y calculadoras para representar números reales de manera eficiente.

1. Dada una sucesión convergente de números reales, dar la definición de convergencia lineal y explicar que significa que la tasa de convergencia sea próxima a 1.

La tasa de convergencia C indica la velocidad a la que la sucesión se acerca a su límite. Si C está próxima a 1, significa que la sucesión converge muy lentamente.

Ejercicios de finales



Este ejercicio es facil, lo unico que hay que hacer es notar que la asociativa "(") hace que se haga el redondeo antes de seguir con el otro calculo, entonces podes tomar $x = 0,1$ y $y = 0,04$ $z = 0,04$ y lograr lo que te piden.

Ecuaciones no lineales (Faltan cosas de finales)

Metodo Biseccion

Este método se basa fuertemente en el teorema del valor intermedio: si f es continua en $[a, b]$ y si $f(a)f(b) < 0$, entonces f debe tener una raíz en (a, b) .

Si $f(a)f(b) < 0$, se calculan $c = \frac{a+b}{2}$ y $f(c)$. Sean $x_0 = c$: una aproximación a la raíz r de f y $|e_0| = |x_0 - r| \leq \frac{b-a}{2}$: error de aproximación inicial. Se tienen 3 posibilidades:

1. si $f(a)f(c) < 0$, entonces hay una raíz en el intervalo $[a, c]$. Reasignamos $b \leftarrow c$ y se repite el procedimiento en el nuevo intervalo $[a, b]$.

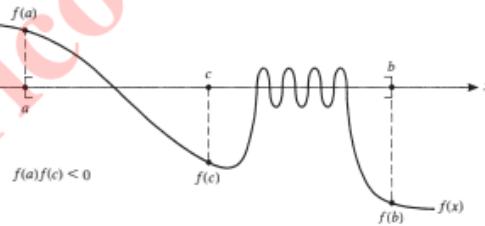


Figura 1: Caso: $f(a)f(c) < 0$

2. si $f(a)f(c) > 0$, entonces hay una raíz en el intervalo $[c, b]$. Reasignamos $a \leftarrow c$ y se repite el procedimiento en el nuevo intervalo $[a, b]$.

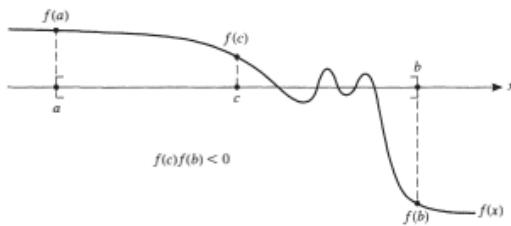


Figura 2: Caso: $f(a)f(c) > 0$

3. si $f(a)f(c) = 0$, entonces $f(c) = 0$ y $x_0 = c$ es la raíz buscada.

Este caso es casi imposible en la práctica debido a los errores de redondeo. Por lo tanto, el criterio de parada no dependerá de que $f(c) = 0$ sino de que $|f(c)| < TOL$, donde TOL es una tolerancia dada por el usuario.

Esta sucesión converge linealmente

Metodo Newton

Así, en lugar de buscar la raíz de f (**problema difícil**), se calcula la raíz de l_n , es decir, se busca x_{n+1} solución de $l_n(x) = 0$. Es decir:

$$l(x_{n+1}) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0,$$

y por lo tanto

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Newton converge **local y cuadráticamente**.

Teorema 2. Si f'' es continua en \mathbb{R} , f es creciente y convexa en \mathbb{R} y tiene una raíz, entonces esa raíz es única y la iteración de Newton convergerá a esa raíz independientemente del punto inicial x_0 .

Metodo de la secante

Así, la iteración del método secante consiste en:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \quad \text{para } n \geq 1,$$

es decir,

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right] \quad \text{para } n \geq 1.$$

donde $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618334\dots$ Como $1 < \alpha < 2$ se dice que el método de la secante tiene **convergencia superlineal**. Además, por recurrencia

$$e_{n+1} \approx c e_n^\alpha \approx c^{1+\alpha} e_{n-1}^{\alpha^2}$$

donde $\alpha^2 = (1 + \sqrt{5})^2/4 = (3 + \sqrt{5})/2 = 2.618334\dots$, esto dice que **dos iteraciones de método de la secante** es mejor que **una iteración del método de Newton**.

Metodo Punto fijo

Definición 1. un punto fijo de una función g es un número p , en el dominio de g , tal que $g(p) = p$.

1. Si $g \in C[a, b]$ (es decir, g es una función continua en el intervalo $[a, b]$) y $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$ entonces existe $p \in [a, b]$ tal que $g(p) = p$. (**EXISTENCIA**)
2. Si además existe $g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ y existe una constante positiva $k < 1$ tal que $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in (a, b)$, entonces el punto fijo en (a, b) es único. (Ver Figura 3). (**UNICIDAD**)

El método de punto fijo es un método numérico para encontrar aproximaciones de las raíces de una función.

Convergencia:

Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$. Supongamos que existe $g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ y existe una constante positiva $0 < k < 1$ tal que $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in (a, b)$, entonces para cualquier $p_0 \in [a, b]$ la sucesión definida por $p_n = g(p_{n-1})$, para $n \geq 1$, converge al único punto fijo p en (a, b) .

Ejercicios finales

1. Se sabe que la función $f(x) = e^x - 1 - 2x$ tiene 2 raíces, una en $x = 0$ y otra en el intervalo $[1, 2]$. Considere las siguientes funciones de iteración para encontrar la raíz no nula:

$$x_{n+1} = \frac{e^{x_n} - 1}{2}, \quad x_{n+1} = \ln(1 + 2x_n).$$

Decida si existe un intervalo de convergencia para cada una de ellas. Justifique.

En este ejercicio lo que tenemos que hacer es derivar cada función y ver cuál es su intervalo

de convergencia. Es decir hacer $|g(x)| < 1$ y resolver la inecuación. Si el resultado da un intervalo que cubra $[1,2]$ entonces existe un intervalo de convergencia.

2. Sea S una constante positiva y $g(x) = 2x - Sx^2$.

- Muestre que si la iteración de punto fijo converge a un límite no nulo. Luego, el límite es $p = 1/S$, entonces el inverso de un número puede ser encontrado solo con multiplicaciones y sustracciones.
- Encuentre un intervalo alrededor de $1/S$ para el cual la iteración de punto fijo converge si el punto inicial x_0 pertenece a ese intervalo.

Este es muy simple, lo que hay que hacer es considerar la propiedad de punto fijo que nos permite plantear la ecuación como $x=g(x)$. Despues de eso, restamos x en ambos lados, factorizamos y obtenemos como solución $x=0$ y $x=1/S$. Observemos que como el único punto no nulo es $1/S$, usamos ese.

Despues de esto, lo que hay que hacer es calcular la derivada de g , evaluarla en el punto y resolvemos la inecuación $|g'(1/S)| < 1$. De ahí obtenemos el intervalo y terminamos el ejercicio.

5. (Sólo alumnos libres) Sea $f(x) = (x^2-9)(x^2-3)(x-5)$. Para cada intervalo, determine a qué raíz de f converge el método de bisección, justificando adecuadamente su respuesta:

- (a) $[-2, 4]$, (b) $[-0.5, 5.5]$, (c) $[-6, 6]$.

En este ejercicio primero, conseguimos las raíces usando $f(x)$, como esta factorizada son claras de ver.

Luego agarramos cada intervalo y usamos el método de bisección, que consiste en armar una tabla de valores para ver el signo de $f(x)$ en los extremos del intervalo. Si son diferentes, el método de bisección se puede aplicar.

Luego una vez aplicado el método de bisección se calcula:

$$c = \frac{a+b}{2}$$

Una vez calculado c , vemos el signo de $f(x)$, y sustituimos c en el intervalo en lugar del que tenía el mismo signo. (Reemplazo la variable que daba negativo por negativo y viceversa.)

Repetimos este proceso hasta que en el intervalo quede una o ninguna de las raíces. (Puede quedar ninguna en caso de que no hayan raíces en ese intervalo, o hayan 2 cerca y no aproxime a ellas, nunca vi igualmente esto en finales)

Teo finales

- a) Enuncie y demuestre el teorema de convergencia del método de bisección.
- b) De ejemplos que muestren que las hipótesis para la convergencia son necesarias.

Sea f una función continua en el intervalo $[a_0, b_0]$ tal que $f(a_0)f(b_0) < 0$. Si $[a_n, b_n]$ son los intervalos sucesivos generados por el método de bisección, entonces:

Límites: Existen los límites $\lim_{(n \rightarrow \infty)} a_n$ y $\lim_{(n \rightarrow \infty)} b_n$, son iguales y representan una raíz r de f .

Convergencia: La sucesión $\{c_n\}$, donde $c_n = (a_n + b_n)/2$, converge a la raíz r .

Estimación del error: El error absoluto en la n -ésima iteración está acotado por:

$$|r - c_n| \leq (b_0 - a_0) / 2^{n+1}$$

2. Describir en qué consiste el método de la secante. Dar sus ventajas y desventajas.

El método de la secante es un método numérico para encontrar aproximaciones de las raíces de una función.

Se eligen dos puntos iniciales x_0 y x_1 cercanos a la raíz que se desea encontrar.

Se calcula un nuevo punto x_2 utilizando la siguiente fórmula:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Método	Ventajas	Desventajas
Secante	No requiere derivada, convergencia más rápida que la bisección	Convergencia no garantizada, sensible a los puntos iniciales, puede converger a una raíz diferente

Teorema 2. Sea f una función en $C^{n+1}[a, b]$ y p un polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en $(n+1)$ puntos distintos x_0, x_1, \dots, x_n en $[a, b]$. Entonces para cada $x \in [a, b]$ existe un $\xi = \xi_x \in (a, b)$ tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Interpolacion polinomial (Faltan cosas de finales)

Teorema 1. Dados x_0, x_1, \dots, x_n números reales distintos con valores asociados y_0, y_1, \dots, y_n entonces existe un único polinomio p_n de grado menor o igual a n tal que $p_n(x_i) = y_i$, para $i = 0, \dots, n$.

Forma de Newton del polinomio interpolante

Si $n = 0$: vimos que es suficiente definir el polinomio constante $p_0(x) = c_0 = y_0$.

Si $n = 1$: dados los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, se construye p_1 tal que $p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0)$ y $p_1(x_0) = c_0 = y_0$. Usando que $p_1(x_1) = y_1$, entonces $y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$ y por lo tanto, $c_1 = \frac{y_1 - c_0}{x_1 - x_0}$.

Si $n = k$: tenemos que

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c_k(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}),$$

y por recurrencia obtenemos que

$$p_k(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_k(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}).$$

La forma de Newton compacta del polinomio interpolante resulta en

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^k c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

Aquí se adopta la convención que $\prod_{j=0}^m (x - x_j) = 1$ si $m < 0$.

Es decir, diferencias divididas para generar cada c

Forma de Lagrange del polinomio interpolante

Veremos otra forma alternativa de expresar el polinomio interpolante p_n , de grado $\leq n$, asociado a los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ donde x_0, x_1, \dots, x_n son distintos.

Primero se definen los polinomios básicos de Lagrange asociado a los puntos distintos x_0, x_1, \dots, x_n :

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad \text{para } i = 0, \dots, n.$$

Ahora definimos la **forma de Lagrange** del polinomio interpolante por

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x).$$

Error polinomio interpolante

Teorema 2. Sea f una función en $C^{n+1}[a, b]$ y p un polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en $(n+1)$ puntos distintos x_0, x_1, \dots, x_n en $[a, b]$. Entonces para cada $x \in [a, b]$ existe un $\xi = \xi_x \in (a, b)$ tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Teorema 1. Dados x_0, x_1, \dots, x_n números reales distintos, las diferencias divididas satisfacen la siguiente ecuación

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Teorema 2. Sean x_0, x_1, \dots, x_n números reales distintos y z_0, z_1, \dots, z_n un reordenamiento de x_0, x_1, \dots, x_n . Entonces $f[z_0, z_1, \dots, z_n] = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

Splines

Definición 1. Una función **spline** está formada por polinomios definidos en subintervalos, los cuales se unen entre sí obedeciendo ciertas condiciones de continuidad.

Más formalmente, dados $n + 1$ puntos tales que $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, que denominaremos **nodos**, y un entero $k \geq 0$, un **spline de grado k** es una función S definida en $[x_0, x_n]$ que satisface:

- S es un polinomio de grado $\leq k$ en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, para $i = 0, \dots, n - 1$;
- las derivadas $S^{(i)}$ son continuas en $[x_0, x_n]$, para $i = 0, \dots, k - 1$.

Splines lineales

Dados los $n + 1$ nodos tales que $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, un **spline lineal** ($k = 1$) es una función S definida en $[x_0, x_n]$ que satisface:

- S es un polinomio de grado ≤ 1 (recta) en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, para $i = 0, \dots, n - 1$;
- la función S es continua en $[x_0, x_n]$.

Splines cúbicos

Dados los $n + 1$ nodos tales que $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, un **spline cúbico** ($k = 3$) es una función S definida en $[x_0, x_n]$ que satisface:

- S es un polinomio de grado ≤ 3 en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, para $i = 0, \dots, n - 1$;
- las funciones S, S' y S'' son continuas en $[x_0, x_n]$.

Es decir,

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0x^3 + b_0x^2 + c_0x + d_0, & x \in [x_0, x_1) \\ S_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1, & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1}x^3 + b_{n-1}x^2 + c_{n-1}x + d_{n-1}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases},$$

donde los $4n$ coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i , para $i = 0, \dots, n - 1$ son las incógnitas a ser determinadas. Para eso, se deben tener $4n$ condiciones.

Esto da un total de $(n+1) + 3(n-1) = 4n - 2$ condiciones. Para poder determinar una única solución se deben imponer dos condiciones adicionales:

$$S''(x_0) = S''_0(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad S''(x_n) = S''_{n-1}(x_n) = 0.$$

En este caso, se denomina **spline con condiciones naturales** o simplemente **spline natural**.

Otras veces se suele utilizar

$$S'(x_0) = S'_0(x_0) = f'(x_0) \quad \text{y} \quad S'(x_n) = S'_{n-1}(x_n) = f'(x_n).$$

En este caso, se denomina **spline con condiciones correctas**.



- 2. • (a) Dado un conjunto de datos $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$, ¿cuál es la diferencia en general entre interpolarlos y aproximarlos?

(1.)

Cuando interpolamos, buscamos una función que pase exactamente por todos los puntos de datos.

En la aproximación, no exigimos que la función pase exactamente por todos los puntos. En su lugar, buscamos una función que se ajuste a los datos de la manera más cercana posible, minimizando algún tipo de error

Teo finales

1. Enunciar y demostrar el teorema de existencia del polinomio interpolante.

Teorema: Dado un conjunto de $n + 1$ puntos distintos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, existe un único polinomio $p(x)$ de grado menor o igual a n que interpola estos puntos, es decir, $p(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

2. De una deducción de la regla de Simpson para una función en el intervalo $[0, 1]$.

$$\frac{\frac{1-0}{2}}{3} [f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)]$$

1. De la definición de una función spline en general y de las condiciones para que sea un spline cúbico natural.

Un spline es una función spline de grado k es una función f que cumple las siguientes condiciones:

1. En cada intervalo, la función f es un polinomio de grado k .
2. La función f y sus primeras $k-1$ derivadas son continuas en todo el intervalo $[a, b]$.

Un spline cúbico natural es un spline de grado 3 que cumple las siguientes condiciones adicionales:

En los puntos extremos a y b, la segunda derivada de la función spline es igual a cero. Es decir, $f''(a) = 0$ y $f''(b) = 0$.

Un spline cubico con condiciones correctas:

Se especifican valores para las primeras derivadas en los puntos extremos a y b. Es decir, $f'(a) = f'(x_0) = f_0'(x_0)$ y $f'(b) = f'(x_n) = f_{n-1}'(x_n)$.

2. Enuncie y demuestre el teorema que define la fórmula de las diferencias divididas.

Teorema 1. *Dados x_0, x_1, \dots, x_n números reales distintos, las diferencias divididas satisfacen la siguiente ecuación*

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

b) Muestre cuál es la forma del error en la interpolación lineal a trozos.

La forma de error en interpolacion lineal a trozos es:

$$|e(x)| \leq \frac{M}{8}h^2$$

Teoría de mejor aproximación. (Faltan cosas de finales)

Aproximación discreta por cuadrados mínimos

Buscamos minimizar el error al aproximar una función, buscando una función tal que el error cuadrático E , sea mínimo. Osea

$$E_1(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{10} |y_i - (a_1 x_i + a_0)|.$$

Para que este Error (Es un ejemplo el de arriba), sea mínimo, debemos buscar que las derivadas parciales con respecto a cada variable, sean 0.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_0} E(a_0, a_1) &= \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2 = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - a_1 x_i - a_0)(-1) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial a_1} E(a_0, a_1) &= \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2 = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - a_1 x_i - a_0)(-x_i) = 0. \end{aligned}$$

Para esto, una vez planteado como arriba y resuelta la derivada parcial, lo que se hace es plantear un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_0m + a_1 \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^m x_i + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{cases}$$

Y resolvelo obteniendo asi, el valor de cada incognita. Luego reemplazamos el valor obtenido de cada variable en nuestra funcion de aproximacion.

Este caso es por si tenemos n elementos en una tablita

En caso de tener un intervalo debemos hacer lo mismo pero utilizando una integral que vaya en el rango del intervalo, en vez de una sumatoria. El proceso es igual.

Definicion linealmente independiente y caso contrario:

Se dice que el conjunto de funciones $\{f_0, \dots, f_n\}$ es LI en el intervalo $[a, b]$ si se cumple que:

$c_0f_0(x) + \dots + c_nf_n(x) = 0$ con $c_0, \dots, c_n = 0$. Para cualquier x del intervalo. Caso contrario (que $c_0, \dots, c_n \neq 0$), se llama LD.

En criollo:

Linealmente independiente si la única forma de que la combinación lineal de esas funciones sea igual a cero para todo x en el intervalo, es que todos los coeficientes (c_0, c_1, \dots, c_n) sean cero.

Linealmente Dependiente si al menos una de las funciones puede ser escrita como una combinación lineal de las otras dado que es posible encontrar coeficientes (no todos cero) tal que la combinación lineal de las funciones sea igual a cero para todo x en el intervalo

Teorema 1. Si $\phi_j(x)$ es un polinomio en x de grado igual a j para $j = 0, \dots, n$, entonces $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ es un conjunto linealmente independiente para cualquier intervalo $[a, b]$.

Ejemplo, si tenemos $f(0)=1, f'(x) = x$. Entonces tenemos $1 + x$, no hay combinacion que de 0 si los coeficientes no lo son.

Aproximacion con funciones de pesos

Definición 1. Una función (integrable) ω se llama **función de peso** en el intervalo I si $\omega(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, pero $\omega(x) \neq 0$ para todo x en cualquier subintervalo de I , es decir ω no puede ser constantemente cero en un subintervalo de I .

Basicamente, una funcion de peso es una funcion que no puede ser 0 en TODO el intervalo, pero si en algunas partes. Permiten dar

más o menos importancia a las aproximaciones en ciertas partes del intervalo.

Definición 2. El conjunto $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ es un **conjunto ortogonal** de funciones en el intervalo $[a, b]$, con respecto a la función de peso ω , si

$$\int_a^b \omega(x) \phi_k(x) \phi_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ \alpha_j & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Si $\alpha_j = 1$ para todo $j = 0, \dots, n$ se dice que el conjunto es **ortonormal**.

Lema 1. Si $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo I con respecto a una función de peso ω definida en I entonces son linealmente independientes.

Lema 2. Sea el conjunto de funciones polinomiales $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal en el intervalo $[a, b]$ con respecto a una función de peso ω , con grado de ϕ_k igual a k y $Q_k(x)$ es un polinomio de grado k menor estricto que n entonces

$$\int_a^b \omega(x) \phi_n Q_k(x) dx = 0.$$

Teorema 1. Si $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[a, b]$ con respecto a una función de peso ω definida en $[a, b]$, entonces la aproximación por cuadrados mínimos a una función continua f respecto al peso ω está dada por

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x),$$

donde para cada $k = 0, \dots, n$,

$$a_k = \frac{\int_a^b \omega(x) f(x) \phi_k(x) dx}{\int_a^b \omega(x) (\phi_k(x))^2 dx} = \frac{1}{\alpha_k} \int_a^b \omega(x) f(x) \phi_k(x) dx.$$

El resultado siguiente da una relación de recurrencia que permite generar un conjunto de funciones ortogonales.

Es decir, basicamente el polinomio en una aproximacion con peso, se da por la suma de los a_k definicos ahi.

Teorema 2. El conjunto de funciones polinomiales $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ que se define a continuación es un conjunto ortogonal en el intervalo $[a, b]$ con respecto a una función de peso ω

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = x - B_1 \quad \text{para cada } x \in [a, b],$$

donde

$$B_1 = \frac{\int_a^b x \omega(x) (\phi_0(x))^2 dx}{\int_a^b \omega(x) (\phi_0(x))^2 dx},$$

y para $k \geq 2$

$$\phi_k(x) = (x - B_k) \phi_{k-1}(x) - C_k \phi_{k-2}(x) \quad \text{para cada } x \in [a, b],$$

donde

$$B_k = \frac{\int_a^b x \omega(x) (\phi_{k-1}(x))^2 dx}{\int_a^b \omega(x) (\phi_{k-1}(x))^2 dx} \quad \text{y} \quad C_k = \frac{\int_a^b x \omega(x) \phi_{k-1}(x) \phi_{k-2}(x) dx}{\int_a^b \omega(x) (\phi_{k-2}(x))^2 dx}.$$

Esto es basicamente como se define un conjunto ortogonal

Ejercicios de finales

1. Si $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, encontrar la parábola $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ que minimiza la integral

$$\int_{-1}^1 [f(x) - y]^2 dx.$$

En este ejercicio se nos pide minimizar una funcion, en este casi dicha integral. Basicamente nos esta dando el error cuadratico. Por lo que simplemente tenemos que calcular las derivadas parciales, igualarlas a 0 y resolver la matriz, sin mas.

OBSERVACION: Hay un valor absoluto, por eso, tenemos que tener en cuenta que el valor absoluto es una funcion de la forma

$-x$ si $x < 0$

x si $x >= 0$

Entonces hay que rearmar la integral, sacando $|x|/2$ fuera de la integral e integrarla por separado digamos. Consultarme cualquier cosa si no se entiende, me dio paja escribirlo aca bien.

2. Aproxime la función $f(x) = e^{-3x}$ para $x \in (0, \infty)$, por un polinomio cuadrático utilizando el método de cuadrados mínimos respecto a la función de peso $\omega(x) = e^{-x}$ y considerando los polinomios de Laguerre.

Ayuda: Los Polinomios de Laguerre están definidos como

$$\phi_k(x) = \frac{e^x}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^k e^{-x})$$

para todo $x \in [0, \infty)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Además, se sabe que para cada n natural vale que $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$

Este ejercicio es uno sacado directo de la parte teorica. Lo que hay que hacer es:

1. Calcular los polinomios hasta el grado que se nos pide, en este es cuadratico entonces calculamos de $k= 0$ hasta 2.
2. Definimos el polinomio como: $g(x) = a_0 * L_0 + a_1 * L_1 + a_2 * L_2$
3. Calculamos cada a_i usando la siguiente formula:

$$a_k = \frac{\int_a^b \omega(x) f(x) \phi_k(x) dx}{\int_a^b \omega(x) (\phi_k(x))^2 dx}$$

4. Reemplazamos los valores de cada a_k en el polinomio y listo

Integracion numerica (Faltan cosas de finales)

La integración numérica es una herramienta de gran utilidad en el cálculo de integrales definidas muy complejas o primitivas, o no se tiene la función f en forma explícita pero si algunos valores funcionales. En ambos casos se intenta aproximar la integral de f en el intervalo $[a,b]$. Los métodos básicos que vemos son conocidos como cuadraturas numéricas y tienen la siguiente forma:

$$\sum_{i=0}^n a_i f(x_i).$$

Los métodos de cuadratura numérica se basan en la interpolación numérica.

Reglas simples

Las variantes dependen de la cantidad de puntos de interpolación usados.

Definición 1. La precisión o grado de exactitud de una fórmula o regla de cuadratura es el mayor entero no negativo n tal que la fórmula de integración es exacta para x^k , para todo $k = 0, \dots, n$.

Regla del Rectángulo

Puntos	Fórmula	Error	Precisión
1	$f(a)(b-a)$	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$	0

Punto medio

Punto medio	1	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$	1
-------------	---	------------------------------------	-------------------------------	---

Regla del Trapecio

Trapecio	2	$\frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)]$	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$	1
----------	---	---------------------------------	--------------------------------	---

Regla de Simpson

Simpson	3	$\frac{(b-a)/2}{3} [f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)]$	$-\frac{((b-a)/2)^5}{90} f^{(4)}(\xi)$	3
---------	---	--	--	---

Reglas Compuestas

Son más eficientes que las reglas simples para intervalos más grandes o se requiere precisión mayor.

Regla compuesta del Rectángulo

Rectángulo	$h \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)$	$\frac{(b-a)}{2} h f'(\mu)$
------------	-----------------------------	-----------------------------

Regla compuesta del Punto medio

Punto medio	$2h \sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j})$	$\frac{(b-a)}{6} h^2 f''(\mu)$
-------------	---------------------------------	--------------------------------

Regla compuesta del Trapecio

Trapecio	$\frac{h}{2} \left\{ f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right\}$	$-\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\mu)$
----------	--	----------------------------------

Regla compuesta de Simpson

Simpson	$\frac{h}{3} \left\{ f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right\}$	$-\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\mu)$
---------	--	---------------------------------------

Reglas Gaussianas

Las fórmulas de cuadratura consideradas hasta ahora, simples y compuestas, se construyen usando valores funcionales en puntos conocidos. Es decir, todas tienen la forma

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i), \quad (1)$$

para $(n+1)$ puntos, la precisión de cada regla de cuadratura es $(n+1)$ o n .

Teorema 1. *Sea w una función de peso positiva definida en $[a, b]$ y q un polinomio no nulo de grado exactamente $(n+1)$ que es ortogonal a todo polinomio p de grado $\leq n$ (con respecto a w), es decir,*

$$\int_a^b q(x) p(x) w(x) dx = 0. \quad (8)$$

Si x_0, x_1, \dots, x_n son las $(n+1)$ raíces de q , entonces la fórmula

$$\int_a^b f(x) w(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) \quad (9)$$

con $a_i = \int_a^b w(x) \prod_{j=0}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$, será exacta para todo polinomio f de grado $\leq 2n+1$.

Ejercicios de finales

- 2. Se desea aproximar la integral de $f(x) = x \cos(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$ utilizando la regla de Simpson compuesta. Determine la cantidad de subintervalos n que deben tomarse para obtener un error menor a 10^{-4} .

Aca hay que usar la formula del error compuesto pero en absoluto.

Adjunto la tabla de formulas.

Regla	Fórmula	Error
Rectángulo	$h \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)$	$\frac{(b-a)}{2} h f'(\mu)$
Punto medio	$2h \sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j})$	$\frac{(b-a)}{6} h^2 f''(\mu)$
Trapecio	$\frac{h}{2} \left\{ f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right\}$	$-\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\mu)$
Simpson	$\frac{h}{3} \left\{ f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right\}$	$-\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\mu)$

Definiciones de h por regla:

$$\text{Rectángulo y rectangulo} = \frac{(b-a)}{n+2}$$

$$\text{Trapecio} = \frac{(b-a)}{n}$$

$$\text{Simpson} = \frac{(b-a)}{2n}$$

$$\text{En este caso, seria: } |\text{Error}| = \left| -\frac{(b-a)}{180} \left(\frac{(b-a)}{2n} \right)^4 f^{(4)}(u) \right| \leq 10^{-4}$$

Teo finales

- (b) Si una regla gaussiana es exacta para polinomios de grado 9 en el intervalo $[a, b]$ con peso $w(x)$, ¿cómo se eligieron los nodos x_i para construirla?

Para que una regla gaussiana sea exacta para polinomios de un cierto grado, los nodos se seleccionan como las raíces de un polinomio ortogonal específico.

1. Identificar el polinomio ortogonal: Se busca el polinomio ortogonal de grado 10 asociado al peso $w(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Este polinomio cumple ciertas propiedades de ortogonalidad con respecto al peso $w(x)$.
2. Encontrar las raíces: Se calculan las raíces del polinomio ortogonal. Estas raíces serán los nodos de la regla gaussiana.
3. Calcular los pesos: Una vez conocidos los nodos, se calculan los pesos asociados a cada nodo. La formula general para calcular los pesos asociados a un nodo es:

$$w_i = \int_a^b L_i(x) w(x) dx$$

2. a) Dar la definición de una familia de polinomios ortogonales.
 b) Demostrar su uso en las reglas gaussianas de integración.

Definición 2. El conjunto $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ es un **conjunto ortogonal** de funciones en el intervalo $[a, b]$, con respecto a la función de peso ω , si

a)

$$\int_a^b \omega(x) \phi_k(x) \phi_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ \alpha_j & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Si $\alpha_j = 1$ para todo $j = 0, \dots, n$ se dice que el conjunto es **ortonormal**.

- b) Las reglas gaussianas son exactas para polinomios de grado hasta $2n-1$. Esto se debe a que los polinomios ortogonales tienen la propiedad de ortogonalidad que garantiza que la regla gaussiana integre de forma exacta un espacio de polinomios lo más grande posible

2. a) Demuestre que dada una familia de polinomios ortogonales en $[a, b]$ con peso $w(x)$ cada uno de los polinomios tiene todas sus raíces reales en el intervalo $[a, b]$.
 b) Muestre cuál es la exactitud de una regla gaussiana de integración.

- a) Sea $p_n(x)$ un polinomio ortogonal de grado $n \geq 1$ en el intervalo (a, b) con peso $w(x)$. Supongamos que $p_n(x)$ tiene k raíces reales distintas x_1, x_2, \dots, x_k en (a, b) , con $0 \leq k \leq n$.

Si $k = n$, el teorema se cumple.

Si $k < n$, asumamos que $p_n(x)$ no tiene más raíces reales en (a, b) .

Consideremos el polinomio $q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)$ de grado k . Como $p_n(x)$ no tiene más raíces reales en (a, b) , los signos de $p_n(x)$ y $q(x)$ en (a, b) son iguales, excepto en las raíces x_1, x_2, \dots, x_k .

Por lo tanto, el producto $p_n(x)q(x)$ no cambia de signo en (a, b) . Esto implica que $\int_a^b p_n(x)q(x)w(x) dx \neq 0$. Sin embargo, como $k < n$, $q(x)$ es un polinomio de grado menor que n . Por la propiedad de ortogonalidad, $\int_a^b p_n(x)q(x)w(x) dx = 0$.

Luego, llegamos a un absurdo.

- b) Una regla gaussiana de integración con n puntos es exacta para polinomios de grado hasta $2n - 1$ debido a la propiedad de ortogonalidad de los polinomios.

1. De la definición de precisión de una regla de cuadratura.

La precisión de una regla de cuadratura es el mayor entero positivo n tal que la regla es exacta para integrar polinomios de grado n o menor.

En otras palabras, una regla de cuadratura tiene precisión n si puede integrar exactamente cualquier polinomio de grado n , pero falla al integrar algún polinomio de grado $n+1$.

Resolucion numerica de sistemas lineales (Faltan cosas de finales)

Definición 1. Una matriz A es diagonal si y sólo si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Luego A es no singular si y sólo si $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ si y sólo si $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn} \neq 0$.

Entonces $Ax = b$ si y sólo si $a_{ii}x_i = b_i$, para $i = 1, \dots, n$, si y sólo si $x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$, para $i = 1, \dots, n$.

En otras palabras, diagonal es que no tiene valores fuera de la diagonal. Luego si alguno de ellos es 0, NO es singular.

Definición 2. Una matriz A es triangular inferior (superior) si y sólo si $a_{ij} = 0$ para $i < j$ ($a_{ij} = 0$ para $i > j$).

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es triangular inferior y no singular si y sólo si $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn} \neq 0$, con

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Basicamente que no existe elemento distinto de 0 arriba\abajo de la diagonal.

Definición 1. Una norma vectorial en \mathbb{R}^n es una función que asigna a cada $x \in \mathbb{R}^n$ un número real no negativo denotado por $\|x\|$ y llamado norma de x , tal que se satisfacen las siguientes tres propiedades para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$, y $\|0\| = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definición 2. Dados dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ y una norma vectorial $\|\cdot\|$ se define la distancia entre x e y por:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Definición 3. Una **norma matricial** en $\mathbb{R}^{n \times n}$ es una función que asigna a cada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ un número real no negativo denotado por $\|A\|$ y llamado **norma de A**, tal que se satisfacen las siguientes cuatro propiedades para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\|A\| > 0$ si $A \neq 0$, y $\|0\| = 0$;
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Definición 4. Dada una norma vectorial en \mathbb{R}^n y una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se define la norma matricial inducida por

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Teorema 1. Sea $b \in \mathbb{R}^n$ y $A = M - N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ donde A y M son matrices no singulares. Si $\|M^{-1}N\| < 1$ para alguna norma matricial inducida entonces la sucesión generada por la ecuación (6) converge a la solución de $Ax = b$ para cualquier vector inicial $x^{(0)}$.

Definición 1. Una matriz A , de orden $n \times n$, es **diagonalmente dominante** si

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Teorema 2. Si A es diagonalmente dominante, entonces la sucesión generada por el método de Jacobi converge a la solución de $Ax = b$, para cualquier vector inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Método de Jacobi

En el método de Jacobi se toma $M = D$, y por lo tanto,

$$N = M - A = D - (L + D + U) = -(L + U),$$

Método de Gauss-Seidel

En el método de Gauss-Seidel se toma $M = L + D$, y por lo tanto,

$$N = M - A = L + D - (L + D + U) = -U,$$

Teorema 3. Si A es diagonalmente dominante, entonces la sucesión generada por el método de Gauss-Seidel converge a la solución de $Ax = b$, para cualquier vector inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Observacion: Esto tambien se cumple para Jacobi.

Teorema 4. Para cada matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se cumple que $\rho(A)$ es igual al $\inf\{\|A\|\}$ sobre todas las normas matriciales inducidas.

Teorema 5. Una condición necesaria y suficiente para que la sucesión generada por el método iterativo $x^{(k+1)} = (M^{-1}N)x^{(k)} + M^{-1}b$, para $k \geq 0$, converja a la única solución de $Ax = b$ para todo $x^{(0)}$ inicial, es que $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Observación: existen resultados que muestran que si ambos métodos convergen, el método de Gauss-Seidel lo hace más rápido que el método de Jacobi. Esto es razonable, pues al calcular la i -ésima componente, en el método de Gauss-Seidel, se utiliza información recientemente calculada en la misma iteración. Por otro lado, si ambos métodos divergen, el

Teo finales

Parte Teórica

1. • (a) ¿A qué llamamos norma matricial inducida? Dé ejemplos de ellas.

LLamaremos norma matricial inducida a una norma de una matriz definida a partir de una norma vectorial.

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{A_x}{x}$$

Ejemplos:

Norma 1 (Norma del máximo de las sumas de los valores absolutos por columna)

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_i |a_{ij}|$$

Norma ∞ (Norma del máximo de las sumas de los valores absolutos por fila)

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_i |a_{ij}|$$

Norma ?? (Norma del mínimo de las sumas de los valores absolutos por fila)

$$\|A\| = \min_{1 \leq j \leq n} \sum_i |a_{ij}|$$

3. Explicar los métodos iterativos de sistemas lineales, origen, fórmula de iteración, tipos, algoritmo, resultados de convergencia, ventajas y desventajas.

Los métodos iterativos para sistemas lineales generan una sucesión de vectores $\{x^{(k)}\}$, a partir de un vector inicial $x^{(0)}$, que convergen a la solución de $Ax = b$, bajo adecuadas hipótesis.

Los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son conocidos como métodos de separación y parten de la idea de escribir la matriz como $A = M - N$.

Teniendo así la fórmula iterativa

$$x^{k+1} = (M^{-1}N)x^k + M^{-1}b$$

La diferencia entre Jacobi y Gauss seidel es la forma de escribir M y N.

En Jacobi se toma $M = D$, y $N = -(L + U)$.

En Gauss-Seidel se toma $M = L + D$ y $N = -U$.

Ambos tienen 3 métodos de convergencia:

$$\|M^{-1}N\| < 1$$

Si la matriz original es diagonalmente dominante

$$p(M^{-1}N) < 1$$

Método	Ventajas	Desventajas
Jacobi	Fácil implementación, paralelizable	Convergencia lenta, no utiliza información actualizada
Gauss-Seidel	Convergencia más rápida, menor requerimiento de memoria	Convergencia no garantizada, sensibilidad al orden de las ecuaciones, no paralelizable de forma tan sencilla

Programación lineal (Faltan cosas de finales)

La programación lineal (PL) es uno de los mecanismos más naturales para tratar una gran cantidad de problemas del mundo real de un modo sencillo.

Es una subárea de Optimización donde, como es de esperar, todas las funciones involucradas para formular el problema son lineales.

Forma general de problemas de PL

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{sujeto a} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Forma estandar de problemas de PLS

Se denomina **forma estándar** cuando el problema de PL es formulado como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{sujeto a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Función objetivo: $c^T x$

Objetivo: **Minimizar** $c^T x$

Restricciones: **sujeto a** $Ax = b$
 $x \geq 0$

Definición 1. Solución básica: dado un conjunto de m ecuaciones lineales en n incógnitas como en (1), se llamará **base** a cualquier submatriz B , $m \times m$ de A , no singular, formada por m columnas independientes de A . Es posible reordenar columnas de A para definir B . Como $\text{rango}(A) = m$, es claro que existe tal matriz B . Sea N la submatriz $m \times (n-m)$ de A , formada por las restantes columnas. Así podemos escribir A y x particionados:

$$A = [B|N] \quad y \quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \quad \text{y por lo tanto,} \quad Bx_B + Nx_N = b.$$

Luego $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$.

Si $x = (x_B, x_N) = (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N)$ es tal que $x_N = 0$, es decir cada una de las $(n-m)$ componentes son iguales a 0, entonces $x_B = B^{-1}b$ y así $x = (x_B, x_N) = (x_B, 0)$ es llamada **solución básica** de (1), con respecto a la base B . Las componentes de x_B son llamadas **variables básicas** de x y las componentes de x_N son llamadas **variables no-básicas** de x .

How to do práctico

4. Un ceramista fabrica tazas y platos para vender. Por cada kilo de arcilla puede fabricar tres tazas o cinco platos. Cada taza se vende por \$5000 y cada plato se vende por \$3500. El costo de la arcilla es de \$10000 el kilo, y puede comprar a lo sumo 16kg. Si desea fabricar al menos tantas tazas como platos, ¿cuántas tazas y cuántos platos debe hacer para maximizar su ganancia? ¿Cuántos kilos de arcilla debe comprar?

3. Considere el problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && -x_1 - \frac{1}{2}x_2, \\ &\text{sujeto a} && x_1 - x_2 \geq 0, \\ &&& x_1 + x_2 \leq 2, \\ &&& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Grafe las restricciones, resuelva usando el método Simplex, de el minimizador y el valor mínimo.

En este tipo de ejercicio, tenes que plantear primero la función que te comentan. Luego estandarizarla y luego aplicar o el método gráfico o el método simplex.

Para lo primero, tenes en cuenta que si dice maximizar y usas el método simplex, entonces tenes que negar la función objetivo. En este caso por ejemplo para maximizar ganancias seria:

$$\min -z = -15000t - 17500p + 10000A$$

Para estandarizar, tener en cuenta que en las restricciones, no pueden haber términos independientes negativos, si esto ocurre, se multiplica por -1 la restricción, por ejemplo:

$$-x \leq -3 \quad \rightarrow \quad x \geq 3$$

Luego, para estandarizar, si tenemos \leq o \geq , lo que tenemos que hacer es agregar variables de holgura. Para el menor o igual, se agrega una variable positiva, para el mayor o igual, negativa. Cada variable es diferente en cada restricción.

Osea si tengo varias restricciones con desigualdades, en cada una agrego una variable nueva.

Si tenemos una variable sin restringir o menor a 0, o menor/mayor a un positivo, se reemplaza por $x^* - x^-$ donde ambas son mayores o iguales a 0.

Para el metodo simplex no tengo muchos consejos. Pero el paso a paso seria:

1. Elegir columna pivote que es la que tiene el z mas chico
2. Elegir la fila pivote que es la que hace que el resultado dividido por el elemento de su fila en la columna haga el b mas chico.
3. Una vez elegidos ambos, tengo que primero simplificar a 1 el elemento pivote, dividiendo a su fila entera por lo que sea necesario. Despues tengo que hacer 0 el elemento arriba del elemento pivote y luego hacer 0 el elemento de la fila z de la columna pivote.

Repite paso 1 hasta tener las variables que no hayan sido de holgura con su z NO NEGATIVO.

Teo finales

1. Enuncie la forma estándar de un problema de programación lineal con al menos tres posibles transformaciones para poder llevar un problema cualquiera a la estándar.

Maximizar: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

Sujeto a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Tres posibles transformaciones: Minimizar (Multiplicar por -1), variable de holgura, y Desigualdades a igualdades.

- b) Dar la definición de solución básica factible en un problema de programación lineal.

Se obtiene igualando a cero n-m variables (llamadas variables no básicas) y resolviendo el sistema de m ecuaciones restantes para las m variables restantes (llamadas variables básicas).

Todas las variables (básicas y no básicas) son no negativas.

