

Part I

Repaso Analisis

1 Series

1.1 Serie Geometrica

La serie geometrica, dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

es convergente si $|r| < 1$ y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

Si $|r| \geq 1$, la serie es divergente

1.2 Serie Armonica

La serie armonica, dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

es divergente.

1.3 Teorema de divergencia convergencia

- Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **convergente**, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ o no existe, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **divergente**.

1.4 Serie p

La serie p , dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

es **convergente** si $p > 1$ y **divergente** si $p \leq 1$.

1.5 Prueba por comparacion

Supongamos que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con terminos positivos.

- Si $\sum b_n$ es **convergente** y $a_n \leq b_n$ para toda n , entonces $\sum a_n$ tambien es **convergente**.
- Si $\sum b_n$ es **divergente** y $a_n \geq b_n$ para toda n , entonces $\sum a_n$ tambien es **divergente**.

1.6 Prueba por comparacion del limite

Supongamos que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con terminos positivos. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

donde c es un numero finito y $c > 0$, entonces ambas series **convergen** o ambas **divergen**.

1.7 Series alternantes

Si la serie alternante dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$$

cumple con

1. $b_{n+1} \leq b_n$ para toda n
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

entonces la serie es **convergente**.

1.8 Prueba de la razon

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** (y, por lo tanto, **convergente**).
2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$ o bien $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **divergente**.
3. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, la prueba de la razon **no es concluyente**.

1.9 Prueba de la raiz

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** (y, por lo tanto, **convergente**).
2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$ o bien $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **divergente**.
3. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, la prueba de la raiz **no es concluyente**.

Part II

Serie de Taylor

2 Serie de Taylor en terminos de $(x - c)$

Si la funcion de f tiene derivadas continuas de ordenes $0, 1, 2, \dots, (n + 1)$ en un intervalo cerrado $I = [a, b]$, entonces para cualquier c y x en I

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)(x-c)^k}{k!} + E_{(n+1)}$$

Donde $E_{(n+1)}$ es el error y esta dado de la forma

$$E_{(n+1)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

Aqui ξ es un punto que se encuentra entre x y c .

3 Serie de Taylor en terminos de $(x + h)$

Esta forma se obtiene de reemplazar x por $x + h$ y c por x en la formula anterior, entonces tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)((x+h)-x)^k}{k!} + E_{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)(h)^k}{k!} + E_{(n+1)} \end{aligned}$$

Donde $E_{(n+1)}$ esta dato entonces por

$$\begin{aligned} E_{(n+1)} &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)((x+h)-x)^{(n+1)}}{(n+1)!} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)(h)^{(n+1)}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Aqui ξ es un punto que se encuentra entre x y c .

Part III

Errores

4 Errores absolutos y relativos

Cuando un numero real r es aproximado por otro \bar{r} se define el error por $r - \bar{r}$. Definimos

Error	Símbolo	Expresión
Error Absoluto	Δr	$ r - \bar{r} $
Error Relativo	δr	$\frac{ r - \bar{r} }{ r } = \frac{\Delta r}{r}$
Error Porcentual	-	$100 \cdot \delta r$

5 Redondeo y truncado

Redondeo Sea \tilde{r} la aproximación por redondeo a n dígitos decimales de r . Se sigue que

$$|r - \tilde{r}| \leq \frac{1}{2} 10^{-n}$$

Truncado Sea \hat{r} la aproximación por truncado a n dígitos decimales de r . Se sigue que

$$|r - \hat{r}| \leq 10^{-n}$$

6 Dígitos significativos

Diremos que el número \bar{r} aproxima al número r con m dígitos significativos si

$$\delta r = \frac{\Delta r}{|r|} \leq 5 \cdot 10^{-m} = \frac{1}{2} 10^{1-m}$$

Esto dice que el error relativo es del orden de 10^{-m} .

7 Errores en las operaciones

7.1 Error en la suma y resta

Sean $y = x_1 + x_2, \bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$. Podemos ver lo siguiente:

El error por la suma está dado por

$$y - \bar{y} = (x_1 + \bar{x}_1) + (x_2 - \bar{x}_2)$$

El error absoluto

$$\Delta y \leq \Delta x_1 + \Delta x_2$$

El error relativo

$$\delta y = \frac{\Delta y}{|y|} \leq \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{|x_1 + x_2|}$$

En general si $y = \sum_{i=1}^n x_i$, entonces $\Delta y \leq \sum_{i=1}^n \Delta x_i$

7.2 Error de la multiplicacion y la divicion

Sean $y = x_1 * x_2$, $\bar{y} = \bar{x}_1 * \bar{x}_2$, $z = x_1/x_2$, $\bar{z} = \bar{x}_1/\bar{x}_2$. Se puede decir

$$\begin{aligned} \Delta y &\lesssim |x_2|\Delta x_1 + |x_1|\Delta x_2 & \delta y &\lesssim \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|} \\ \Delta z &\lesssim \frac{1}{|x_2|}\Delta x_1 + \frac{|x_1|}{|x_2|^2}\Delta x_2 & \delta z &\lesssim \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|} \end{aligned}$$

Part IV

Representacion de numeros en una computadora

Sea $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta > 2$, todo numero real r se puede escribir de la forma:

$$(\pm d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} \dots)_\beta$$

donde cada d_i es un numero natural entre 0 y $\beta - 1$. el valor del numero r es

$$\pm d_n \beta^n + d_{n-1} \beta^{n-1} + \dots + d_0 \beta^0 + d_{-1} \beta^{-1} + d_{-2} \beta^{-2} + \dots$$

8 Errores de redondeo en aritmetica de punto flotante

Supongamos un sistema de punto flotante (β, t, L, U) que escribimos un numero real x de la forma

$$x = m\beta^e$$

con $1/\beta \leq |m| \leq 1$ y $L \leq e \leq U$. Sea $fl(x) = x_r = m_r \beta^e$, donde m_r es la mantisa que se obtiene redondeando a t digitos la parte fraccionaria de m , luego tenemos

$$\begin{aligned} |m_r - m| &\leq \frac{1}{2} \beta^{-t} \\ |m_r - m| \beta^e &\leq \frac{1}{2} \beta^{-t} \beta^e \\ |\beta^e m_r - \beta^e m| &\leq \frac{1}{2} \beta^{-t} \beta^e \end{aligned}$$

Y por lo tanto obtenemos la cota del **error absoluto** dado por

$$|x_r - x| \leq \frac{1}{2} \beta^{-t} \beta^e$$

Para el **error relativo** tenemos

$$\frac{|x_r - x|}{|x|} \leq \frac{\frac{1}{2}\beta^{-t}\beta^e}{|m|\beta^e} = \frac{\frac{1}{2}\beta^{-t}}{|m|} \leq \frac{1}{2}\beta^{1-t}$$

pues $|m| \geq \frac{1}{\beta}$, entonces $\beta \geq \frac{1}{|m|}$.

Part V

Solucio de ecuaciones no lineales

9 Analisis de error en el metodo de Biseccion

Si el algoritmo de biseccion se aplica a una funcion continua f en un intervalo $[a, b]$, donde $f(a)f(b) < 0$, entonces, despues de n pasos se habra calculado una raiz aproximada con un error a lo mas de $(b - a)/2^{n+1}$. (pag. 82 Kincaid)

Part VI

Interpolacion polinomial

10 Forma de Newton del polinomio interpolante

Dados $n + 1$ puntos x_0, \dots, x_n . La forma de newton compacta para el polinomio interpolante resulta en

$$\sum_{i=0}^n c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Si utilizamos diferencias divididas, obtenemos

$$\sum_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_n] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Donde la diferencia dividida esta definida sin importar la permutacion de sus argumentos, luego

$$f[x_i, \dots, x_n] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_j] - f[x_i, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

11 Error de interpolacion

(pag. 156 Kinkaid) Si p es el polinomio de grado a los mas n que interpola a f en los $n + 1$ puntos x_0, \dots, x_n pertenecientes a el intervalo $[a, b]$ y ademas $f^{(n+1)}$

es continua, entonces para cada $x \in [a, b]$ existe un $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$