Definiciones

martes, 13 de julio de 2021 11:22

Cuadratura genérica:
Sea:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$a, b \in \mathbb{R}$
$a < b$
$x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$

Una cuadratura de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ usando $x_1, x_2, \dots, x_n$ es $\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$

Donde:
$p \in \mathbb{R}_n[x]$ interpola a f en $x_1, x_2, \dots, x_n$

Precisión de una regla de integración:
Una regla de integración tiene precisión $n \Leftrightarrow$ es exacta para polinomios de grado menor o igual que n

Teoremas

martes, 27 de julio de 2021 18:23

Error en cuadratura general:

Sea:

$f : C^{(n)}(a,b)$

$a, b \in \mathbb{R}$

$a < b$

$x_1, x_2, \dots, x_n \in (a,b)$

$p \in \mathbb{R}_n[x]$ interpola a f en $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\left\langle \exists \xi_x \in (a,b) : \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^b p(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n)}(\xi_x) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)\, \mathrm{d}x \right\rangle$$

Aclaración:

ξ_x significa que ξ es un valor que depende de x

Si una regla vale para la base, vale para cualquiera del espacio:

Sea:

$B_n = \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}_n[x]$

f continua en $[c,d]$

$A_0, A_1, \dots A_n \in \mathbb{R}$

$x_0, x_1, \dots, x_n \in [c,d]$

$$\left\langle \forall b \in B_n : \int_c^d b(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} A_j b(x_j) \right\rangle \Rightarrow \left\langle \forall p \in \mathbb{R}_n[x] : \int_c^d p(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} A_j p(x_j) \right\rangle$$

Demostraciones

jueves, 13 de mayo de 2021 09:44

Error en cuadratura general:

Sea:

$f : C^{(n)}(a,b)$

$a, b \in \mathbb{R}$

$a < b$

$x_1, x_2, \dots, x_n \in (a,b)$

$p \in \mathbb{R}_n[x]$ interpola a f en $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\left\langle \exists \xi_x \in (a,b) : \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n)}(\xi_x) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)\,\mathrm{d}x \right\rangle$$

Aclaración:

ξ_x significa que ξ es un valor que depende de x

Demostración:

Por teorema del error del polinomio interpolante:

$$\left\langle \forall x \in (a,b) : \left\langle \exists \xi \in (a,b) : f(x) - p(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \right\rangle \right\rangle$$

Trabajo con esto:

$$\left\langle \forall x \in (a,b) : \left\langle \exists \xi \in (a,b) : f(x) - p(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \right\rangle \right\rangle$$

$\Rightarrow$

$$\left\langle \exists \xi_x \in (a,b) : \int_a^b \left(f(x) - p(x)\right) \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \ \mathrm{d}x \right\rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\langle \exists \xi_x \in (a,b) : \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x - \int_a^b p(x) \ \mathrm{d}x = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n)}(\xi_x) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \ \mathrm{d}x \right\rangle$$

Si una regla vale para la base, vale para cualquiera del espacio:

Sea:
$B_n = \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}_n[x]$
f continua en $[c,d]$
$A_0, A_1, \dots A_n \in \mathbb{R}$
$x_0, x_1, \dots, x_n \in [c,d]$

$$\left\langle \forall b \in B_n : \int_c^d b(x) \ \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} A_j b(x_j) \right\rangle \Rightarrow \left\langle \forall p \in \mathbb{R}_n[x] : \int_c^d p(x) \ \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} A_j p(x_j) \right\rangle$$

Demostración suponiendo el antecedente:

$$\int_c^d p(x)\,\mathrm{d}x$$

= ⦃Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tal que $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j b_j(x)$⦄

$$\int_c^d \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_j(x)\right) \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j \int_c^d b_j(x)\,\mathrm{d}x$$

= ⦃Estoy suponiendo $\forall b \in B_n : \int_c^d b(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} A_j b(x_j)$, $b_j \in B_n$⦄

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{n} A_k b_j(x_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_k \sum_{j=0}^{n} a_j b_j(x_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_k p(x_k)$$

Sea:

$w(x)$ una función de peso

q de grado $n+1$

q otrogonal a todo $p \in \mathbb{R}_n[x]$ con respecto a w

$x_0, x_1, \dots, x_n$ las raices de q

$$a_i = \int_a^b w(x) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$\forall f \in \mathbb{R}_{2n+1}[x] : \int_a^b f(x)w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

Reglas

martes, 13 de julio de 2021 12:21

Reglas simples y sus errores:
Para aproximar:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Nombre	Puntos	Regla	Error	Precisión
Rectángulo	1	$f(a)(b-a)$	$\frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi)$	0
Punto medio	1	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$	$\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$	1
Trapecio	2	$\frac{b-a}{2}f\left((a)+f(b)\right)$	$-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$	1
Simpson	3	$\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$	$-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi)$	3

El error es con un $\exists \xi \in (a,b)$

Reglas compuestas:
Para aproximar $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ con m subinterbalos:
Sea:

$$h=\frac{b-a}{m}$$

Nombre	Regla	Error	Precisión
Rectángulo	$\sum_{j=0}^{m-1} hf(a+hj)$	Escribe aquí la ecuación.	0
Punto medio	$\sum_{j=0}^{m-1} hf\left(a+h\left(j+\frac{1}{2}\right)\right)$	Escribe aquí la ecuación.	1
Trapecio	$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{h}{2}\left(f(a+hj)+f(a+h(j+1))\right)$	Escribe aquí la ecuación.	1
Simpson	$\sum_{j=0}^{m-1} \square$	Escribe aquí la ecuación.	3

El error es con un $\exists \xi \in (a,b)$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} j - \frac{b-a}{2n}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}\left(j - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} hf\left(a + h\left(j - \frac{1}{2}\right)\right)$$

Donde:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

1)

martes, 11 de mayo de 2021 10:57

$$\frac{\frac{a+b}{2}-a}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}=\frac{\frac{b-a}{2}}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}$$

$$\frac{b-\frac{a+b}{2}}{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}=\frac{\frac{b-a}{2}}{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$\begin{array}{c|c c}
f(a) & a & \\
 & & \dfrac{\frac{b-a}{2}}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)} \\
f\left(\frac{a+b}{2}\right) & \frac{a+b}{2} & \\
 & & \dfrac{\frac{b-a}{2}}{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)} \\
f(b) & b &
\end{array}
\qquad
\frac{\dfrac{\frac{b-a}{2}}{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}-\dfrac{\frac{b-a}{2}}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}}{f(b)-f(a)}$$

$$p_2(x)=f(a)\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}+f(b)\frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$p_2(x)=f(a)\frac{x^2-x\frac{a+3b}{2}+b\frac{a+b}{2}}{\frac{(a-b)^2}{2}}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{x^2-x(a+b)+ab}{\frac{(a-b)^2}{4}}+f(b)\frac{x^2-\frac{3a+b}{2}x+a\frac{a+b}{2}}{\frac{(b-a)^2}{2}}$$

$$\int_a^b p_2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(f(a)\frac{\frac{x^3}{3}-x^2\frac{a+3b}{4}+b\frac{a+b}{2}x}{\frac{(a-b)^2}{2}}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}(a+b)+abx}{\frac{(a-b)^2}{4}}+f(b)\frac{\frac{x^3}{3}-\frac{3a+b}{4}x^2+a\frac{a+b}{2}x}{\frac{(b-a)^2}{2}}\right)\begin{matrix}x=a\\x=b\end{matrix}$$

$$=f(a)\frac{\frac{b^3}{3}-b^2\frac{a+3b}{4}+b\frac{a+b}{2}b-\left(\frac{a^3}{3}-a^2\frac{a+3b}{4}+b\frac{a+b}{2}a\right)}{\frac{(a-b)^2}{2}}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{\frac{b^3}{3}-\frac{b^2}{2}(a+b)+abb-\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}(a+b)+aba\right)}{\frac{(a-b)^2}{4}}+f(b)\frac{\frac{b^3}{3}-\frac{3a+b}{4}b^2+a\frac{a+b}{2}b-\left(\frac{a^3}{3}-\frac{3a+b}{4}a^2+a\frac{a+b}{2}a\right.}{\frac{(b-a)^2}{2}}$$

$$=f(a)\frac{b-a}{6}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)2\frac{b-a}{3}+f(b)\frac{b-a}{6}$$

$$=\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\frac{b-a}{6}$$

2)

martes, 11 de mayo de 2021 12:32

2 a) $\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \frac{(1-0)}{2}\left(f(0)+f(1)\right) = \frac{1}{2}(0+0)$

$= 0$

2 b) $\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \frac{\left(\frac{1}{2}-0\right)}{2}\left(f(0)+f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) + \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)}{2}\left(f\left(\tfrac{1}{2}\right)+f(1)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(0+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+0\right)$

$= 2 \cdot \frac{1}{8}$

$= \frac{1}{4}$

2 c) $\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \frac{1-0}{6}\left(f(0)+4\cdot f\left(\tfrac{1}{2}\right)+f(1)\right)$

$$= \frac{1}{6}\left(0 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 0\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

3)

martes, 11 de mayo de 2021 12:51

3 a)

$$\text{area} \simeq (2 + 4 \cdot 0 + 1)\,\frac{12-0}{6} = 6$$

Volumen:

$$6\,m^2 \cdot 10\,m = 60\,m^3$$

3 b) $$\frac{60\,m^3}{120\,m^2} = 0.5\,m$$

4)

martes, 11 de mayo de 2021 19:04

4a)

Hago que la igualdad valga para los polinomios de la base canónica a de $\mathbb{R}_2$[x]:

$$\int_{-1}^{1} 1 \, \mathrm{d}x = A_0 1 + A_1 1 + A_2 1$$
$$\int_{-1}^{1} x \, \mathrm{d}x = A_0 \left(-\frac{1}{2}\right) + A_1 0 + A_2 \frac{1}{2}$$
$$\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = A_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + A_1 0^2 + A_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$2 = A_0 + A_1 + A_2$$
$$0 = -\frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{2} A_2$$
$$\frac{2}{3} = \frac{1}{4} A_0 + \frac{1}{4} A_2$$

$$A_0 + A_1 + A_2 = 2$$
$$-A_0 + A_2 = 0$$
$$A_0 + A_2 = \frac{8}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8/3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 + F_2]{F_1 + F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{8}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[F_3/2]{-F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 + F_3]{F_1 - 2F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \frac{4}{3}$$
$$A_1 = -\frac{2}{3}$$
$$A_2 = \frac{4}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) \, \mathrm{d}x = A_0 f\left(-\frac{1}{2}\right) + A_1 f(0) + A_2 f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Por teorema vale la igualdad para todos los polinomios en $\mathbb{R}_2[x]$

4b)

Por como fue construida, vale hasta para grado 2.

Para grado 3:

$$\int_{-1}^{1} x^3 \, dx = 0$$

$$A_0\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + A_1 0^3 + A_2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0$$

Para grado 4:

$$\int_{-1}^{1} x^4 \, dx = \frac{2}{5}$$

$$A_0\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + A_1 0^4 + A_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2}{16}$$

$$\frac{2}{5} \neq \frac{2}{16}$$

6)

jueves, 13 de mayo de 2021 10:21

$f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$

Por teorema:

$$\exists \mu \in (0,1) : \text{error} = -\frac{1-0}{12}\left(\frac{1-0}{n}\right)^2 2\left(e^{-\mu^2}(2\mu^2-1)\right)$$

Primero trabajo esto:

$$\exists \mu \in (0,1) : \text{error} = -\frac{1-0}{12}\left(\frac{1-0}{n}\right)^2 2\left(e^{-\mu^2}(2\mu^2-1)\right)$$

$$\Rightarrow \exists \mu \in (0,1) : |\text{error}| = \left|\frac{1}{6n^2}e^{-\mu^2}(2\mu^2-1)\right|$$

$\Rightarrow \{0 < \mu < 1$

$\Rightarrow \ 0 < \mu^2 < 1$

$\Rightarrow 0 > -\mu^2 > -1 \ \wedge \ 0 < 2\mu^2 < 2$

$\Rightarrow e^0 > e^{-\mu^2} > e^{-1} \ \wedge \ -1 < 2\mu^2 - 1 < 1$

$\Rightarrow 1 > e^{-\mu^2} > e^{-1} \ \wedge \ -1 < 2\mu^2 - 1 < 1$

$\Rightarrow \left|e^{-\mu^2}\right| < 1 \ \wedge \ |2\mu^2 - 1| < 1$

Acoto con esto

}

$$|\text{error}| < \frac{1}{6n^2}1 * 1$$

$$|\text{error}| < \frac{1}{6n^2}$$

Ahora busco el n:

$$|\text{error}| < \frac{10^{-6}}{2}$$

$$\Leftarrow \frac{1}{6n^2} < \frac{10^{-6}}{2}$$

$$\frac{10^6}{3} < n^2$$

$$n > \sqrt{\frac{10^6}{3}}$$

$$n > \frac{1000\sqrt{3}}{3}$$
$$n > 577$$

Con regla de Simpson:

$$f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$
$$f'''(x) = -2 * 2xe^{-x^2}(2x^2 - 1) + 2e^{-x^2}4x = 4e^{-x^2}(-2x^3 + x + 2x) = 4e^{-x^2}x(-2x^2 + 3)$$
$$f''''(x) = 4\left(-2xe^{-x^2}x(-2x^2 + 3) + \ e^{-x^2}(-6x^2 + 3)\right) = 4e^{-x^2}(4x^4 - 6x^2 - 6x^2 + 3) = 4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3)$$

Por teorema:

$$\exists \mu \in (0,1) : \text{error} = -\frac{1-0}{180}\left(\frac{1-0}{n}\right)^4 \left(4e^{-\mu^2}(4\mu^4 - 12\mu^2 + 3)\right)$$

Primero trabajo esto:

$$\exists \mu \in (0,1) : \text{error} = -\frac{1-0}{180}\left(\frac{1-0}{n}\right)^4 \left(4e^{-\mu^2}(4\mu^4 - 12\mu^2 + 3)\right)$$
$$\Rightarrow \ \exists \mu \in (0,1) : |\text{error}| = \left|\frac{1}{180n^4} 4e^{-\mu^2}(4\mu^4 - 12\mu^2 + 3)\right|$$

$\Rightarrow \{0 < \mu < 1$

$\Rightarrow 0 < \mu^2 < 1$

$\Rightarrow -1 < -\mu^2 < 0$

$\Rightarrow e^{-1} < e^{-\mu^2} < e^0$

$\Rightarrow \frac{4}{e} < 4e^{-\mu^2} < 4$

$\Rightarrow \left|4e^{-\mu^2}\right| < 4$

$0 < \mu < 1$

$\Rightarrow 0 < \mu^2 < 1 \ \wedge \ \ 0 < \mu^4 < 1$

$\Rightarrow -12 < -12\mu^2 < 0 \ \wedge \ \ 0 < 4\mu^4 < 4$

$\Rightarrow 0 - 12 + 3 < 4\mu^4 - 12\mu^2 + 3 < 4 + 0 + 3$

$\Rightarrow -9 < 4\mu^4 - 12\mu^2 + 3 < 7$

$\Rightarrow |4\mu^4 - 12\mu^2 + 3| < 9$

$\}$

$$|\text{error}| < \frac{1}{180n^4} 4 * 9$$
$$\Rightarrow |\text{error}| < \frac{1}{5n^4}$$

Ahora busco el n:

$$|\text{error}| < \frac{10^{-6}}{2}$$

$$\Leftarrow \frac{1}{5n^4} < \frac{10^{-6}}{2}$$

$$\frac{10^6 2}{5} < n^4$$

$$n > \sqrt[4]{\frac{10^6 2}{5}}$$

$$n > 10\sqrt[4]{40}$$

$$n > 25$$

7)

jueves, 13 de mayo de 2021 10:50

Aplico la regla del trapecio:

$$\frac{6}{2}\left(y_0 + 2\left(y_1 + y_2 + y_3\right) + y_4\right)$$

$$= \frac{6}{2}\left(38 + 2\left(47 + 46 + 48\right) + 45\right)$$

$$= 6\left(14 + 133 + 22.5\right)$$

$$= 1077$$

8)

jueves, 13 de mayo de 2021 11:14

Tengo la función de peso $\mathrm{w}(x) = 1$, y la base ortoganl de $\mathbb{R}_2$ con respecto a esta función:
$\varphi_0(x) = 1$
$\varphi_1(x) = x$
$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$

Ademas:

$\varphi_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x = x(x - \sqrt{3/5})(x + \sqrt{3/5})$ es ortoganal respecto a esa base

Por teorema:

$$\forall f \in \mathbb{R}_5[x] : \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{2} a_i f(x_i)$$

Donde $a_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,\mathrm{d}x$, y x_i son las raices de φ_3

Las raices de φ_3 son $0, \sqrt{3/5}, -\sqrt{3/5}$

Calculo los a_i

$$a_0 = \int_{-1}^{1} \frac{x - \sqrt{3/5}}{0 - \sqrt{3/5}} \frac{x + \sqrt{3/5}}{0 + \sqrt{3/5}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{5}{3} \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{3}{5}\right) \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{5}{3}\left(\frac{1^3}{3}-\frac{3}{5}-\frac{(-1)^3}{3}-\frac{3}{5}\right)$$
$$=\frac{8}{9}$$

$$a_1 = \int_{-1}^{1}\frac{x-0}{\sqrt{3/5}-0}\,\frac{x+\sqrt{3/5}}{\sqrt{3/5}+\sqrt{3/5}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{5}{6}\int_{-1}^{1}\left(x^2+\sqrt{3/5}\,x\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3/5}}{2}+\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3/5}}{2}\right)$$
$$=\frac{5}{9}$$

$$a_1 = \int_{-1}^{1}\frac{x-0}{-\sqrt{3/5}-0}\,\frac{x-\sqrt{3/5}}{-\sqrt{3/5}-\sqrt{3/5}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{5}{6}\int_{-1}^{1}\left(x^2-\sqrt{3/5}\,x\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3/5}}{2}+\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3/5}}{2}\right)$$
$$=\frac{5}{9}$$

Entonces queda:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{9}f\left(\sqrt{3/5}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\sqrt{3/5}\right)$$

Intento con ecuación no lineal:

$$\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = A_1 1 + A_2 1 + A_3 1$$
$$\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3$$
$$\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2$$
$$\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 + A_3 x_3^3$$
$$\int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x = A_1 x_1^4 + A_2 x_2^4 + A_3 x_3^4$$

$2 = A_1 + A_2 + A_3$
$0 = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3$
$\frac{2}{3} = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2$
$0 = A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 + A_3 x_3^3$
$\frac{2}{5} = A_1 x_1^4 + A_2 x_2^4 + A_3 x_3^4$

$\mathrm{Si}\ A_1 = A_2 = A_3 = 0$
$A_1 + A_2 + A_3 = 0 + 0 + 0 = 0 \neq 2$
$\Rightarrow \neg(A_1 = A_2 = A_3 = 0)$

Ósea, $\exists j \in \{1,2,3\} : A_j \neq 0$

Si: $A_i, A_k = 0$, con $i \neq k$ y $A_j \neq 0$
$0 = A_i x_i + A_k x_k + A_j x_j$
$0 = 0x_i + 0x_k + A_j x_j$
$0 = A_j x_j$
$\Rightarrow$

$x_j = 0$

Por ende:

$$A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 = A_10 + A_20 + A_30 = 0 \neq \frac{2}{3}$$

Ósea, $\exists i, j \in \{1,2,3\} : i \neq j : A_i, A_j \neq 0$

9)

sábado, 15 de mayo de 2021 17:41

Base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ con respecto a x^2

$\Phi_0(x) = 1$
$\Phi_1(x) = x$
$\Phi_2(x) = x^2 - \frac{3}{5} = \left(x + \sqrt{3/5}\right)\left(x - \sqrt{3/5}\right)$

Por teorema:

$$\forall f \in \mathbb{R}_{2+1}[x] : \int_{-1}^{1} f(x)x^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{1} a_i f(x_i)$$

Donde $a_i = \int_{-1}^{1} x^2 \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \,\mathrm{d}x$, y x_i son las raices de Φ_2

Las raices de Φ_2 son $\sqrt{3/5}, -\sqrt{3/5}$

Calculó los a_i

$$a_0 = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{x + \sqrt{3/5}}{\sqrt{3/5} + \sqrt{3/5}} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} \int_{-1}^{1} \left(x^3 + \sqrt{3/5}\, x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3/5}}{3} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3/5}}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$a_1 = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{x - \sqrt{3/5}}{-\sqrt{3/5} - \sqrt{3/5}} \, \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} \int_{-1}^{1} \left(x^3 - \sqrt{3/5}\, x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{3} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

Queda entonces:

$$\int_{-1}^{1} f(x) x^2 \, \mathrm{d}x \simeq \frac{1}{3} f\left(\sqrt{3/5}\right) + \frac{1}{3} f\left(\sqrt{3/5}\right)$$