Análisis Numérico I — **Práctico N°3 - 2022**

Interpolación polinomial:

Método de Newton y de Lagrange, Error del polinomio interpolante, Splines.

1. *a*) Para la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, construir el polinomio interpolante de Lagrange p y el polinomio interpolante de Newton q. Usar como nodos los puntos $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$.
   - *(i)* Comparar los polinomios p y q y dar sus grados.
   - *(ii)* Calcular $p(3)$.
   - *(iii)* Graficar $f(x)$ y $p(x)$.
   - *(iv)* Analizar los resultados.

   b) Construir los polinomios de Taylor p_n de grado $n = 0, 1, 2, 3$ de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alrededor de $x_* = 1$.
   - *(i)* Calcular $p_n(3)$.
   - *(ii)* Graficar $p_n(x)$.

   c) Comparar los valores $p(3)$ y $p_n(3)$.

2. Demostrar que si f es un polinomio de grado menor o igual que n entonces el polinomio de grado menor o igual que n que interpola a f en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ es f.

3. Mostrar que si $g(x)$ interpola a $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ y $h(x)$ interpola a $f(x)$ en los puntos $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, entonces

$$p(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}(g(x) - h(x)) \qquad (1)$$

   interpola a $f(x)$ en $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

4. Dados $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, se definen los polinomios básicos de Lagrange l_k para $k = 0, \ldots, n$ como

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}.$$

   a) Probar que $\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   b) Probar que $\sum_{k=0}^{n} x_k l_k(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   c) Probar que $\sum_{k=0}^{n} x_k^m l_k(x) = x^m$ para todo $x \in \mathbb{R}$, con $m \leq n$.

5. Considerar los siguientes conjuntos de datos

x	-1	0	2	3
y	-1	3	11	27

x	-1	0	1	2
y	-3	1	1	3

   a) Calcular los polinomios interpolantes de grado menor o igual que 3, en la forma de Lagrange.

   b) Construir las tablas de diferencias divididas y los polinomios interpolantes en la forma de Newton.

   c) Agregar a las tablas el punto $x = 4$, $y = 1$ y actualizar las tablas de diferencias divididas para recalcular los polinomios interpolantes.

6. Sea $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$. Sea P_n un polinomio de grado menor o igual a n que interpola a f en $n + 1$ puntos distintos del intervalo $[0, 5]$. Demostrar que para cualquier x en dicho intervalo vale que

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{32 \cdot 5^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

7. Mostrar que el error obtenido al interpolar la función $f(x) = \cosh(x)$ con un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual a 22 en el intervalo [-1,1] es menor o igual a 5×10^{-16}.

8. *a*) Sea $a < b$, m el punto medio entre a y b, $p = m-h$ y $q = m+h$ para $0 \leq h \leq (b-a)/2$. Demostrar que para todo x en $[a, b]$,

$$|(x-p)(x-q)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

   b) Sean $x_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$, $i = 0, \dots, n$, $n+1$ puntos equiespaciados en el intervalo $[a, b]$. Demostrar que para todo x en $[a, b]$,

$$|(x-x_0)\dots(x-x_n)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}. \tag{2}$$

9. *a*) Sea $f(x) = \cos(\pi x)$, hallar un polinomio de grado menor o igual a 3 que verifique

$$p(-1) = f(-1),\ p(0) = f(0),\ p(1) = f(1),\ p'(1) = f'(1).$$

   b) Hallar un polinomio de grado menor o igual a 4 que verifique las condiciones del item anterior, más la condición $p''(1) = f''(1)$.

10. Se desea aproximar la función $f(x) = \sqrt{x}$ con un error de a lo sumo 5×10^{-8}, usando los siguientes métodos:

   a) Un spline lineal

   b) Interpolación cuadrática cada 3 nodos.

   Determinar para cada caso el mínimo número necesario n de nodos de la forma $x_i = 1 + \frac{i}{n}$ para $i = 0, \dots, n$, y la longitud de paso h, para satisfacer la cota del error.

11. Dada una tabla de valores igualmente espaciados de la función $f(x) = cos(x)$, determinar el valor del paso h y el mínimo número de nodos cuando $f(x)$ es aproximada por un spline lineal en el intervalo $[0, 2\pi]$ con un error menor o igual a 5×10^{-7}.

12. *a*) Determinar valores de α, β, γ para que S sea una función spline cúbica, siendo

$$S(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \gamma x, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\alpha x^3 + \beta x^2 - 5\alpha x + 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

   b) Con los valores de α, β, γ obtenidos en el ítem anterior, decida si S interpola a la función $f(x) = 2^x + 0.5x^2 - 0.5x - 1$ en el intervalo $[0, 2]$ respecto de los nodos $\{0, 1, 2\}$.

   c) Grafique simultáneamente f y S en el intervalo $[0, 2]$.

13. Supongamos que

$$s(x) = \begin{cases} 1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ b_2(x-1) + c_2(x-1)^2 + d_2(x-1)^3, & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

   es un spline cúbico natural para una función f que satisface

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 3.$$

   Encontrar los coeficientes b_1,c_1, d_1, b_2, c_2 y d_2.