Definiciones y teoremas

jueves, 3 de junio de 2021 18:46

Forma estándar de problemas de programación lineal:
Sea:
$c \in \mathbb{R}^n$
$b \in \mathbb{R}^m$
$b \geqq 0$
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c, x \rangle$
Que cumple:
$Ax = b$
$x \geqq 0$

Teorema:
Todo problema de la siguiente forma puede ser expresado en la forma estándar:
Sea:
$c \in \mathbb{R}^n$
$d \in \mathbb{R}^m$
$s \in \mathbb{R}^p$
$C \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$R \in \mathbb{R}^{p \times n}$
$\mathrm{m} \in \{\min, \max\}$

$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\mathrm{m}} \langle c, x \rangle$
Que cumple:
$Cx = d$
$Rx \geqq s$
$x \geqq 0$

Sea un problema de programación lineal:
$c \in \mathbb{R}^n$
$b \in \mathbb{R}^m$
$b \geqq 0$
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$m < n$
$\mathrm{rango}(A) = m$

$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c, x \rangle$
Que cumple:
$Ax = b$
$x \geqq 0$

La región factible del problema es $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \ \wedge \ x \geqq 0\}$

Vértices:
Sean:
$b \in \mathbb{R}^m$
$s \in \mathbb{R}^p$
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$R \in \mathbb{R}^{p \times n}$

$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \wedge Rx \leq s\}$
$n = i + j$

Los vértices de Ω son los puntos $v \in \Omega$ que son solución de un sistema de n ecuaciones, con i ecuaciones de $Ax = b$ y j ecuaciones de $Rx = s$

Soluciones basicas:
Sea un problema de programación lineal:
$c \in \mathbb{R}^n$
$b \in \mathbb{R}^m$
$b \geqq 0$
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$m < n$
$\text{rango}(A) = m$

$\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c, x \rangle$
Que cumple:
$Ax = b$
$x \geqq 0$

Y sea:
$v \in \mathbb{R}^n$

v es una solución basica del problema

$$\Leftrightarrow \exists i_1, i_2, \dots, i_m \in \mathbb{N}_{\leq n} : \langle \forall j, k \in \mathbb{N}_{\leq m} : i_j \neq i_k \rangle : \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathrm{C}_{i_1}(A) & \mathrm{C}_{i_2}(A) & \cdots & \mathrm{C}_{i_m}(A) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i_1} \\ v_{i_2} \\ \vdots \\ v_{i_m} \end{bmatrix} = b \wedge \langle \forall j \in (\mathbb{N}_{\leq n} - \{i_1, i_2, \dots, i_m\}) : v_j = 0 \rangle$$

Aclaraciones:
$\mathrm{C}_i(A)$ representa la columna i de A

La parte de $\langle \forall j, k \in \mathbb{N}_{\leq m} : i_j \neq i_k \rangle$ es para que todos los i sean distintos entre ellos

La parte de $\langle \forall j \in (\mathbb{N}_{\leq n} - \{i_1, i_2, \dots, i_m\}) : v_j = 0 \rangle$ es que todos los componentes de v que no están en $\begin{bmatrix} v_{i_1} \\ v_{i_2} \\ \vdots \\ v_{i_m} \end{bmatrix}$ tienen que ser nulos

Solución básica factible:
v es una solución factible $\Leftrightarrow$ $Av = b \wedge v \geqq 0$
v es una solución basica factible $\Leftrightarrow$ v es una solución basica $\wedge$ v es una solución factible
v es una solución basica degenerada $\Leftrightarrow$ v es una solución basica $\wedge$ $|\{j : v_j \neq 0\}| < m$
v es una solución optima factible $\Leftrightarrow$ v es una solución factible $\wedge$ $\langle \nexists w \in \mathbb{R}^n : w$ es una solución factible $: \langle c, w \rangle < \langle c, v \rangle \rangle$
v es una solución basica factible optima $\Leftrightarrow$ v es una solución basica factible $\wedge$ $\langle \nexists w \in \mathbb{R}^n : w$ es una solución basica factible $: \langle c, w \rangle < \langle c, v \rangle \rangle$

Demostraciones
viernes, 25 de junio de 2021 12:23

Sea un problema de programación lineal:
$c \in \mathbb{R}^n$
$b \in \mathbb{R}^m$
$b \geqq 0$
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$\text{rango}(A) = m$

$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c, x \rangle$
Que cumple:
$Ax = b$
$x \geqq 0$

(1) Exsiste una solución factible $\Leftrightarrow$ Exsiste una solución basica factible
(2) Exsiste una solución factible optima $\Leftrightarrow$ Exsiste una solución basica factible optima

Demostración (1):
Vuelta ($\Leftarrow$):

Exsiste una solución basica factible
$\Leftrightarrow$ ⟦Definición de solución basica factible⟧
$\exists v \in \mathbb{R}^n :$ v es una solución basica $\wedge$ v es una solución factible
$\Rightarrow$
$\exists v \in \mathbb{R}^n :$ v es una solución factible
$\Leftrightarrow$
Exsiste una solución factible

Ida ($\Rightarrow$):

Exsiste una solución factible
$\Leftrightarrow$ ⟦Definición de solución factible⟧
$\exists v \in \mathbb{R}^n : \; Av = b \; \wedge \; v \geqq 0$

$$\exists v \in \mathbb{R}^n : \left\langle \exists i_1, i_2, \dots, i_m \in \mathbb{N}_{\leq n} : \langle \forall j, k \in \mathbb{N}_{\leq m} : i_j \neq i_k \rangle : \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_{i_1}(A) & C_{i_2}(A) & \cdots & C_{i_m}(A) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i_1} \\ v_{i_2} \\ \vdots \\ v_{i_m} \end{bmatrix} = b \right\rangle \wedge \; v \geqq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists v \in \mathbb{R}^n : \left\langle \exists i_1, i_2, \dots, i_m \in \mathbb{N}_{\leq n} : \langle \forall j, k \in \mathbb{N}_{\leq m} : i_j \neq i_k \rangle : \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_{i_1}(A) & C_{i_2}(A) & \cdots & C_{i_m}(A) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i_1} \\ v_{i_2} \\ \vdots \\ v_{i_m} \end{bmatrix} = b \wedge \langle \forall j \in (\mathbb{N}_{\leq n} - \{i_1, i_2, \dots, i_m\}) : \; v_j = 0 \rangle \right\rangle \wedge \; v \geqq 0$$

Sea:
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$x \in \mathbb{R}^n$
$b \in \mathbb{R}^m$
$m \leq n$

$$Ax = b \Leftrightarrow \left\langle \exists i_1, i_2, \dots, i_m \in \mathbb{N}_{\leq n} : j \neq k \Rightarrow i_j \neq i_k : \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_{i_1}(A) & C_{i_2}(A) & \cdots & C_{i_m}(A) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i_1} \\ v_{i_2} \\ \vdots \\ v_{i_m} \end{bmatrix} = b \right\rangle$$

Test de optimalidad:
Sea un problema de programación lineal:
$c \in \mathbb{R}^n$
$b \in \mathbb{R}^m$
$b \geqq 0$
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$\text{rango}(A) = m$

$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c, x \rangle$
Que cumple:
$Ax = b$
$x \geqq 0$

Y sea:
$x \in \mathbb{R}^n$
x es una solución basica factible asociada a la matriz B

x es una solución optima $\Leftrightarrow c_N - (B^{-1}N)^{\mathrm{t}} c_B \geqq 0$

$$\min i_1, i_2, \dots, i_m \in \mathbb{N}_{\leq n} : \langle \forall j, k \in \mathbb{N}_{\leq m} : i_j \neq i_k \rangle : \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_{i_1}(A) & C_{i_2}(A) & \cdots & C_{i_m}(A) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i_1} \\ v_{i_2} \\ \vdots \\ v_{i_m} \end{bmatrix} = b \wedge \langle \forall j \in (\mathbb{N}_{\leq n} - \{i_1, i_2, \dots, i_m\}) : \; v_j = 0 \rangle$$

Y sea:
$x \in \mathbb{R}^n$
x es una solución basica factible, asociada a la matriz B

$y = (B^{-1})^{\mathrm{t}} c_B$
$\tilde{x} = c_N - N^{\mathrm{t}} y$

x es una solución optima $\Leftrightarrow \tilde{x} \geqq 0$
x es una solución optima $\Leftrightarrow c_N - N^{\mathrm{t}} (B^{-1})^{\mathrm{t}} c_B \geqq 0$
x es una solución optima $\Leftrightarrow c_N - (B^{-1}N)^{\mathrm{t}} c_B \geqq 0$

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$
$x_B = B^{-1}(b - Nx_N)$
$Bx_B = b - Nx_N$
$Bx_B + Nx_N = b$

Sea:
$x \in \mathbb{R}^n$ una solución basica factible que se divide en $x = (x_B, x_N)$

Se reescribe:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c_B, x_B \rangle + \langle c_N, x_N \rangle$$
Que cumple:
$Bx_B + Nx_N = b$

Esto es como $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c_B, B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \rangle + \langle c_N, x_N \rangle$$
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c_B, B^{-1}b \rangle - \langle c_B, B^{-1}Nx_N \rangle + \langle c_N, x_N \rangle$$
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c_B, B^{-1}b \rangle + (c_N^{\mathrm{t}} - c_B^{\mathrm{t}}B^{-1}N)x_N$$
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c_B, B^{-1}b \rangle + \langle (c_N - (B^{-1}N)^{\mathrm{t}}c_B), x_N \rangle$$

El algoritmo simplex:
Sea un problema de programación lineal:
$c \in \mathbb{R}^n$
$b \in \mathbb{R}^m$
$b \geqq 0$
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$\text{rango}(A) = m$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c, x \rangle$$
Que cumple:
$Ax = b$
$x \geqq 0$

En cada paso k:
$I_k \in \mathbb{R}^m$
$I_{k,0}, I_{k,1}, \dots, I_{k,m}$ son las columnas de A que forman la solución basica actual

Denoto en cada paso:

$$B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathrm{C}_{I_{k,0}} & \mathrm{C}_{I_{k,1}} & \cdots & \mathrm{C}_{I_{k,m}} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$N =$ "La matríz formada por las columnas de A que no están en B"
$x = B^{-1}b$ (x es la solución basica actual)

Para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^n$:
v_B a el vector formado por los coeficientes de v, con los mismos indices que las columnas de A que conforman B
v_N a lo mismo pero con las columnas que conforman N

Estas cosas se "resetean" para cada paso

En cada paso k se hace:
1)
Calcular $\tilde{c} \in \mathbb{R}^n$ así:
$\hat{c}_N := c_N - (B^{-1}N)^{\mathrm{t}}c_B$
$\hat{c}_B := 0$ (En realidad el valor este no importa, pero no se puede hacer que sea directamente un vector como $\tilde{c}_N$, en $\mathbb{R}^{n-m}$, para que coincidan los índices)

Si $\hat{c}_N \geqq 0$ entonces x es la solución optima
Si no:
$$j := \operatorname*{argmin}_{j' \in \mathbb{N}_{\leq n} - \{i_{k,0}, i_{k,1}, \dots, i_{k,m}\}} \hat{c}_{j'}$$
(j es la columna de A que va a entrar a B, o dicho de otro modo, un valor que va a ser uno de los I_{k+1})

El algoritmo del método simplex:
Sea un problema de programación lineal:
$c \in \mathbb{R}^n$
$b \in \mathbb{R}^m$
$b \geqq 0$
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$\text{rango}(A) = m$

$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c, x \rangle$
Que cumple:
$Ax = b$
$x \geqq 0$

En los i, el primer subindice representa la iteración en la que se está. Son número en $\mathbb{N}_{\leq n}$

B es la submatriz $m \times m$ de A que forma una solución basica factible $x^{(0)}$
$B\, x^{(0)} = b$

Denoto:
N a la matris fromada por las otras columnas de A, que no están en B
Para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^n$:
v_B a el vector formado por los coeficientes de v, con los mismos indices que las columnas de A que conforman B
v_N a lo mismo pero con las columnas que conforman N

En cada paso k:
1)
Calcular $\tilde{c} \in \mathbb{R}^n$ así:
$\tilde{c}_N = c_N - (B^{-1}N)^{\mathrm{t}} c_B$
$\tilde{c}_B = 0$ (En realidad el valor este no importa, no se puede hacer que sea directamente un vector como $\tilde{c}_N$, en $\mathbb{R}^{n-m}$, para que coincidan los índices)

Si $\tilde{c}_N \geqq 0$ entonces, $x^{(k)}$ es la solución optima
Si no:
$j \coloneqq j'$ que es el indice de una de la columnas de A que forman N que minimiza $\tilde{c}_{j'}$
2)
$s \coloneqq s' \in \{1, \dots, m\}$ tal que $[B^{-1}A]_{s',j} > 0$ que minimiza $\frac{\left(\left(x^{(k)}\right)_B\right)_{s'}}{[B^{-1}A]_{s',j}}$
3)
Se actualizan las cosas:
$i_{k+1,s} \coloneqq j$
para $r \in \{1, \dots, s-1, s+1, \dots, m\} : i_{k+1,r} \coloneqq i_{k,r}$

2)
Calcular:
$\hat{a} \coloneqq B^{-1}\mathrm{C}_j(A)$

$s \coloneqq \underset{s' \in \mathbb{N}_{\leq m} \,:\, \hat{a}_{s'} > 0}{\operatorname{argmin}} \dfrac{(x_B)_{s'}}{\hat{a}_{s'}}$

(s es la columna de A que está en B, pero que va a salir)

3)
$I_{k+1,s} \coloneqq j$
para $r \in \{1, \dots, s-1, s+1, \dots, m\} : I_{k+1,r} \coloneqq I_{k,r}$

Demostraciones:
Uso i_r para $I_{k,r}$
Si se eligió un j:
($\mathrm{C}_j(A)$ se puede escribir como combinación lineal de las columnas de B)

$$\left\langle \exists y_1, y_2, \dots, y_m \in \mathbb{R} :\ \mathrm{C}_j(A) = \sum_{r=1}^{m} y_r \mathrm{C}_r(A) \right\rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle \exists y \in \mathbb{R}^m :\ \mathrm{C}_j(A) = By \rangle$$

$\Leftrightarrow$ ⟦$\forall \varepsilon$⟧

$$\langle \exists y \in \mathbb{R}^m : \varepsilon \mathrm{C}_j(A) = B\varepsilon y \rangle$$

Ademas:

$$Bx_B = b$$

$\Leftrightarrow$

$$b = Bx_B$$

Combinando:

$$\langle \exists y \in \mathbb{R}^m : \varepsilon \mathrm{C}_j(A) + b = B\varepsilon y + Bx_B \rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle \exists y \in \mathbb{R}^m :\ \mathrm{C}_j(A) + b = B(\varepsilon y + x_B) \rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle \exists y \in \mathbb{R}^m :\ B(\varepsilon y + x_B) = \varepsilon \mathrm{C}_j(A) + b \rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle \exists y \in \mathbb{R}^m :\ B(\varepsilon y + x_B) - \varepsilon \mathrm{C}_j(A) = b \rangle$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\langle \exists y_1, y_2, \dots, y_m \in \mathbb{R} :\ \sum_{r=1}^{m} \mathrm{C}_{i_r}(A)(\varepsilon y_r + x_{i_r}) - \varepsilon \mathrm{C}_j(A) = b \right\rangle$$

$\Rightarrow$ ⟦Elijo $\varepsilon = \frac{x_{i_{r'}}}{y_{r'}}$ para algun $r' \in \mathbb{N}_{\leq m}$⟧

Pruebas

martes, 15 de junio de 2021 11:18

$$\min_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} x+2y+3z$$

Sujeto a:

$$\begin{bmatrix}0 & 5 & 6\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 8\end{bmatrix}$$

Soluciones basicas:

$v \in \mathbb{R}^3$

v es una solución basica del problema

$$\Leftrightarrow \exists i_1, i_2 \in \mathbb{N}_{\leq 3} : i_1 \neq i_2 : \begin{bmatrix} | & | \\ C_{i_1}(A) & C_{i_2}(A) \\ | & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{i_1}\\ v_{i_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 8\end{bmatrix} \wedge \langle \forall j \in (\mathbb{N}_{\leq n} - \{i_1, i_2\}) : v_j = 0\rangle$$

1,2
1,3
2,3

$$\begin{bmatrix}0 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 8\end{bmatrix}$$

$y = \frac{7}{5}$

$x = \frac{8 - 3\cdot\frac{7}{5}}{2} = \frac{19}{10}$

$v = \left(\frac{19}{10}, \frac{7}{5}, 0\right)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$x = 4$

$z = \frac{7}{6}$

$v = \left(4, 0, \frac{7}{6}\right)$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$y = \frac{8}{3}$

$$z = \frac{7 - \frac{8}{3} \cdot 5}{6} = -\frac{19}{18}$$

$v = \left(0, \frac{8}{3}, -\frac{19}{18}\right)$

Es no factible

(19/10, 7/5, 0)
(4, 0, 7/6)
(0, 8/3, -19/18) (no factible)

$$\max_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,\in\,\mathbb{R}^4} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

Sujeto a:

$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 20$$
$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \le 30$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

Lo llevo a la forma estandar:

$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 20$$
$$\equiv \exists s_1 \ge 0 : 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + s_1 = 20$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \le 30$$
$$\equiv \exists s_2 \ge 0 : 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 + s_2 = 30$$

Queda la forma estandar:

$$\max_{(x_1,x_2,x_3,x_4,s_1,s_2)\,\in\,\mathbb{R}^6} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

Sujeto a:

$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + s_1 = 20$$
$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 + s_2 = 30$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2 \ge 0$$

O en forma matricial:

$$\max_{(x_1,x_2,x_3,x_4,s_1,s_2)\,\in\,\mathbb{R}^6} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

Sujeto a:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Voy eligiendo 2 columnas LI de la matríz para buscar una solución básica factible:

Pruebo elegir (C_5, C_6):

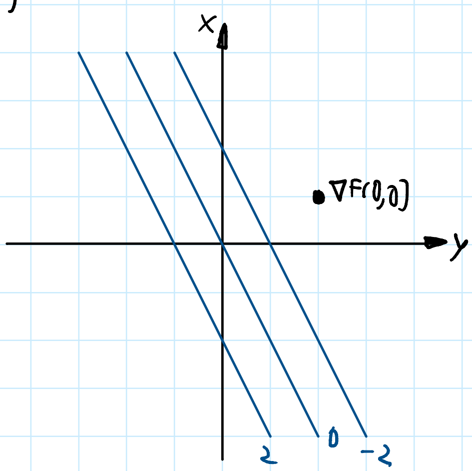
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$s_1 = 20$
$s_2 = 30$

1)

jueves, 3 de junio de 2021 10:44

a)



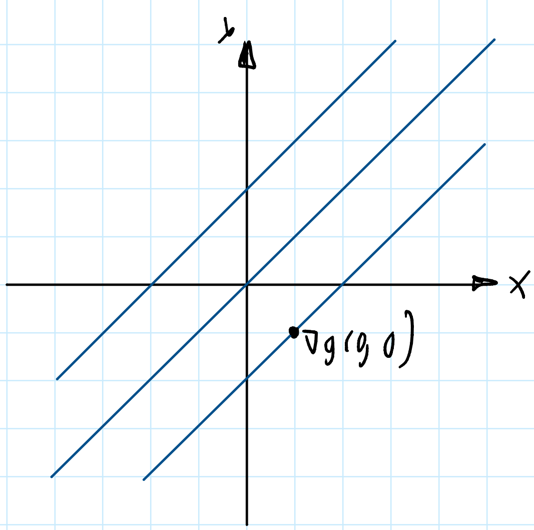
$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = 2 \qquad \frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = 1$$

$$\nabla F(x,y) = (2,1)$$

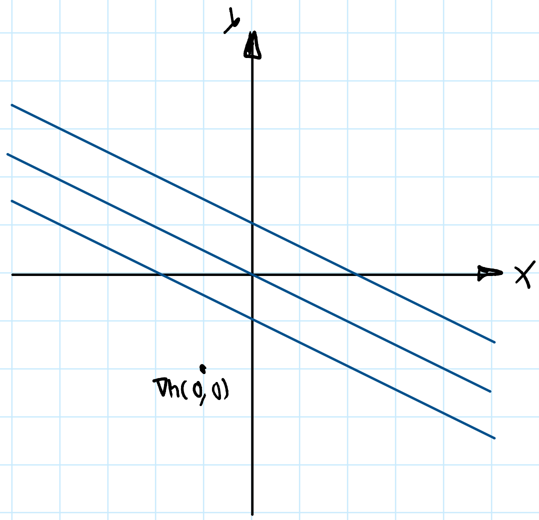
b) $g(x,y) = x - y$

$$\nabla g(x,y) = (1,-1)$$

$$\nabla g(0,0) = (1,-1)$$



c) $h(x,y) = -x - 2y$ $\nabla h(x,y) = (-1, -2)$



2)

jueves, 3 de junio de 2021 19:45

2a)

$z = 3x_1 + 5x_2 - 4x_3$

$7x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 4$
$-2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -3$
$5x_1 - 3x_2 + 8x_3 \leq 9$
$x_1 \geq 1$
$x_2 \leq 7$
$x_3 \geq 0$

$\text{Minimizar } \mathrm{z} = 3x_1 + 5x_2 - 4x_3$
$\equiv \text{Minimizar } \tilde{z} = -3x_1 - 5x_2 + 4x_3$
$z = -\tilde{z}$

$7x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 4$
$\equiv \exists s_1 \geq 0 : 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 - s_1 = 4$

$5x_1 - 3x_2 + 8x_3 \leq 9$

$\equiv \exists s_2 \geq 0 : \; 5x_1 - 3x_2 + 8x_3 + s_2 = 9$

$x_1 \geq 1$
$\equiv \exists s_3 \geq 0 : \; x_1 - s_3 = 1$

$x_2 \leq 7$
$\equiv \tilde{x}_2 - x_2^* \leq 7$
$\equiv \exists s_4 \geq 0 : \; \tilde{x}_2 - x_2^* + s_4 = 7$
$x_2 = \tilde{x}_2 - x_2^*$

Queda entonces la forma estándar:

Minimizar $\tilde{z} = -3x_1 - 5(\tilde{x}_2 - x_2^*) + 4x_3$
Sujeto a:
$7x_1 - 2\tilde{x}_2 + 2x_2^* - 3x_3 - s_1 = 4$
$-2x_1 + 4\tilde{x}_2 - 4x_2^* + 8x_3 = -3$
$5x_1 - 3\tilde{x}_2 + 3x_2^* + 8x_3 + s_2 = 9$
$x_1 - s_3 = 1$
$\tilde{x}_2 - x_2^* + s_4 = 7$
$x_1, \tilde{x}_2, x_2^*, x_3, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

O en forma matricial:
Minimizar $\tilde{z} = -3x_1 - 5(\tilde{x}_2 - x_2^*) + 4x_3$
Sujeto a:

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_2 \\ x_2^* \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 9 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2b)

$z = x_1 - 5x_2 - 7x_3$

$5x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq 5$
$3x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 3$
$7x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 9$
$x_1 \geq -2$
$x_2 \geq 0$

$x_1 \geq -2$
$\equiv \tilde{x}_1 \geq 0$
$\tilde{x}_1 = x_1 + 2$

x_3 libre
$\equiv \tilde{x}_3, x_3^* \geq 0$
$x_3 = \tilde{x}_3 - x_3^*$

$5x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq 5$
$\equiv \exists s_1 \geq 0 : 5(\tilde{x}_1 + 2) - 2x_2 + 6(\tilde{x}_3 - x_3^*) - s_1 = 5$

$\equiv \exists s_1 \geq 0 : 5\tilde{x}_1 - 2x_2 + 6\tilde{x}_3 - 6x_3^* - s_1 = -5$
$\equiv \exists s_1 \geq 0 : -5\tilde{x}_1 + 2x_2 - 6\tilde{x}_3 + 6x_3^* + s_1 = 5$

$3x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 3$
$\equiv 3(\tilde{x}_1 + 2) + 4x_2 - 9(\tilde{x}_3 - x_3^*) = 3$
$\equiv 3\tilde{x}_1 + 4x_2 - 9\tilde{x}_3 + 9x_3^* = -3$
$\equiv -3\tilde{x}_1 - 4x_2 + 9\tilde{x}_3 - 9x_3^* = 3$

$7x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 9$
$\equiv \exists s_2 \geq 0 :\ 7(\tilde{x}_1 + 2) + 3x_2 + 5(\tilde{x}_3 - x_3^*) + s_2 = 9$
$\equiv \exists s_2 \geq 0 :\ 7\tilde{x}_1 + 3x_2 + 5\tilde{x}_3 - 5x_3^* + s_2 = -5$
$\equiv \exists s_2 \geq 0 : -7\tilde{x}_1 - 3x_2 - 5\tilde{x}_3 + 5x_3^* - s_2 = 5$

$z = x_1 - 5x_2 - 7x_3$
$\equiv z = \tilde{x}_1 - 2 - 5x_2 - 7\tilde{x}_3 + 7x_3^*$
$\equiv \tilde{z} = \tilde{x}_1 - 5x_2 - 7\tilde{x}_3 + 7x_3^*$
$z = \tilde{z} - 2$

Queda entonces la forma estándar:

Minimizar $\tilde{z} = \tilde{x}_1 - 5x_2 - 7\tilde{x}_3 + 7x_3^*$
Sujeto a:
$-5\tilde{x}_1 + 2x_2 - 6\tilde{x}_3 + 6x_3^* + s_1 = 5$
$-3\tilde{x}_1 - 4x_2 + 9\tilde{x}_3 - 9x_3^* = 3$
$-7\tilde{x}_1 - 3x_2 - 5\tilde{x}_3 + 5x_3^* - s_2 = 5$
$\tilde{x}_1, x_2, \tilde{x}_3, x_3^*, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

O en forma matricial:

Minimizar $\tilde{z} = \tilde{x}_1 - 5x_2 - 7\tilde{x}_3 + 7x_3^*$

Sujeto a:

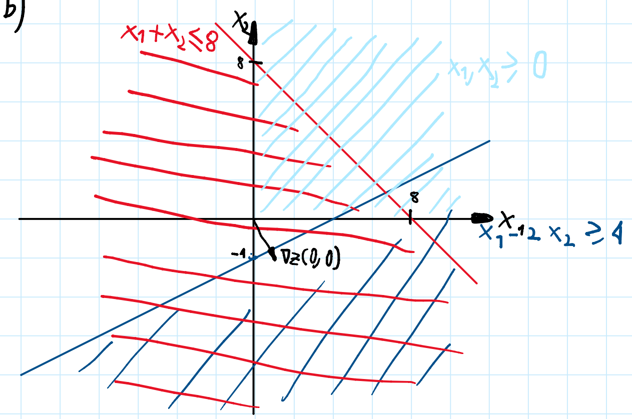
$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & -6 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 9 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & -5 & 5 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \tilde{x}_3 \\ x_3^* \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$x_1, x_2, \tilde{x}_3, x_3^*, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

3)

jueves, 3 de junio de 2021 11:21

b)



$$z(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$$

$$\nabla z(x_1, x_2) = (1, -2)$$

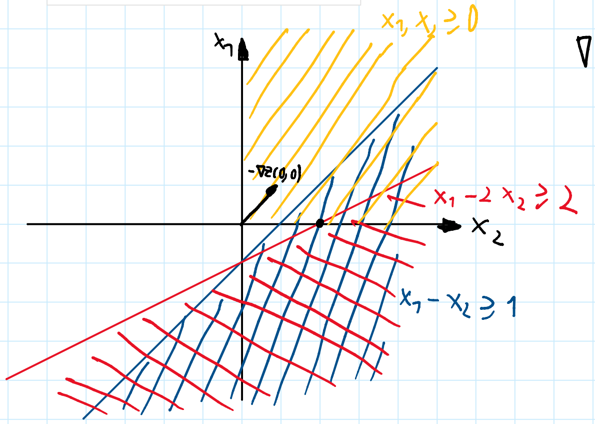
La solución en (8, 0)

$$z = 8 - 2 \cdot 0 = 8$$

d)

$$z(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$$

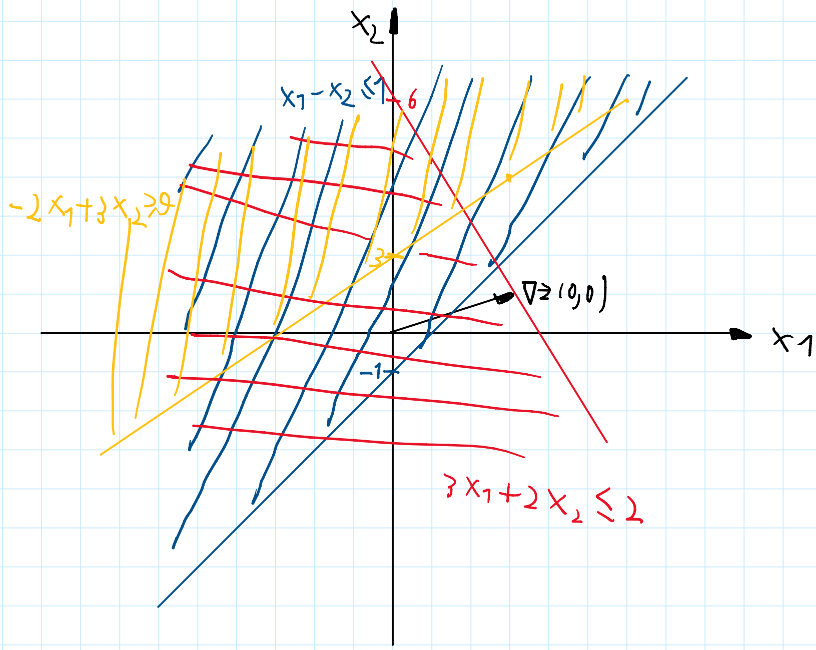
$$\nabla z(x_1, x_2) = (-1, -1)$$



Solución:
z(2, 0) = -2

a)

$$z(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2$$
$$\nabla z(x_1, x_2) = (3, 1)$$

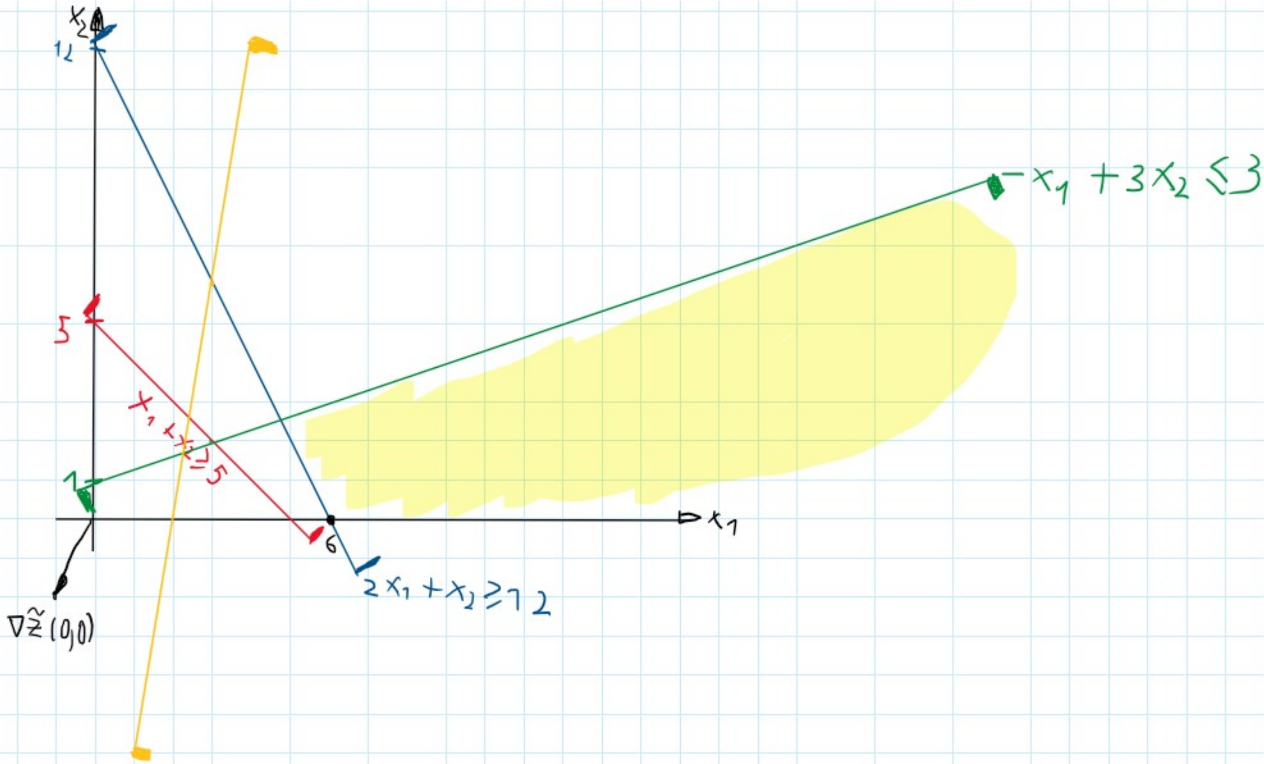


No hay solución

c)

Minimizar $\tilde{z} = -x_1 - 2x_2$

$$\nabla \tilde{z}(x, y) = (-1, -2)$$



Solución en (6, 0)
z(6, 0) = 6

4)

sábado, 5 de junio de 2021 10:06

Los vértices son las soluciones de los siguientes sistemas, que estén en la región:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y-z=2 \\ x-2y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y-z=2 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-2y=1 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-z=2 \\ x-2y=1 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y-z=2 \\ x-2y=1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3-F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3+3F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-F_3/4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$z=-1$

$y=2-(-1)(-1)=1$

$x = 3 - 1\cdot 1 - 1(-1) = 3$

$x = 3 \geq 0 \Rightarrow (3, 1, -1)$ es un vértice

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - z = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 + F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$z = \frac{1}{2}$

$y = 2 - (-1)\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$x = 3 - 1\cdot\frac{1}{2} - 1\cdot\frac{5}{2} = 0$

$x - 2y = 0 - 2\cdot\frac{5}{2} = -5 \leq 1 \Rightarrow (0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ es un vértice

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x = 0$

$$y = \frac{1 - 1\cdot 0}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$z = 3 - 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\cdot 0 = \frac{7}{2}$$

$$y - z = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -4 \leqslant 2 \Rightarrow \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) \text{ es un vértice}$$

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ x - 2y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x = 0$$

$$y = \frac{1 - 1\cdot 0}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{2 - 0\cdot 0 - 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{-1} = -\frac{5}{2}$$

$$x + y + z = 0 - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3 \leqslant 3 \Rightarrow \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right) \text{ es un vértice}$$

Los vértices son:
(3, 1, -1), (0, 5/2, 1/2), (0, -1/2, 7/2), (0, -1/2, -5/2)

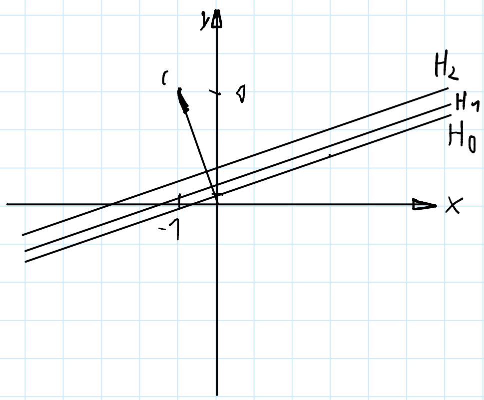
5)

lunes, 7 de junio de 2021 09:48

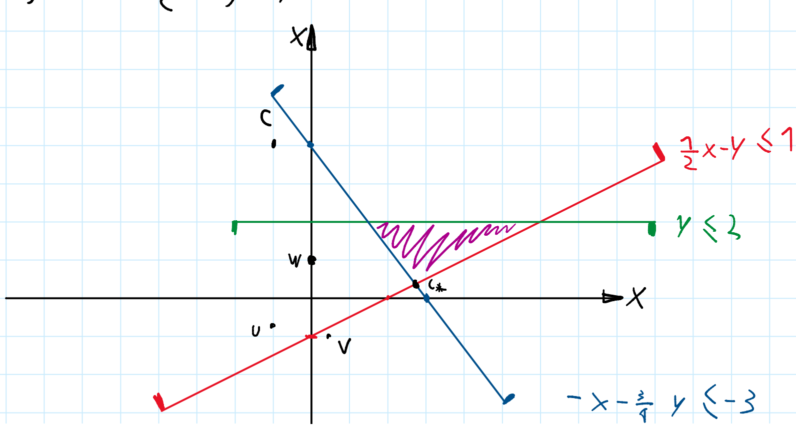
5 a) $H_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x + 4y = 1\}$

$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x + 4y = 2$

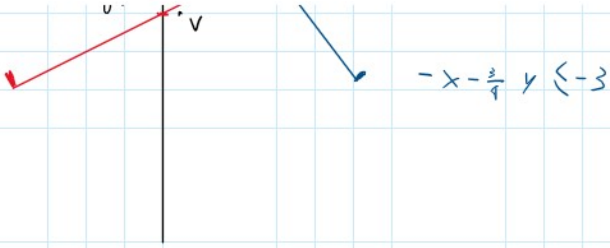
$H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x + 4y = 4\}$



b) $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x - \frac{3}{4}y \leq -3 \ \wedge \ \frac{1}{2}x - y \leq 1 \ \wedge \ y \leq 2\}$



$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 + 2F_1} \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right]$



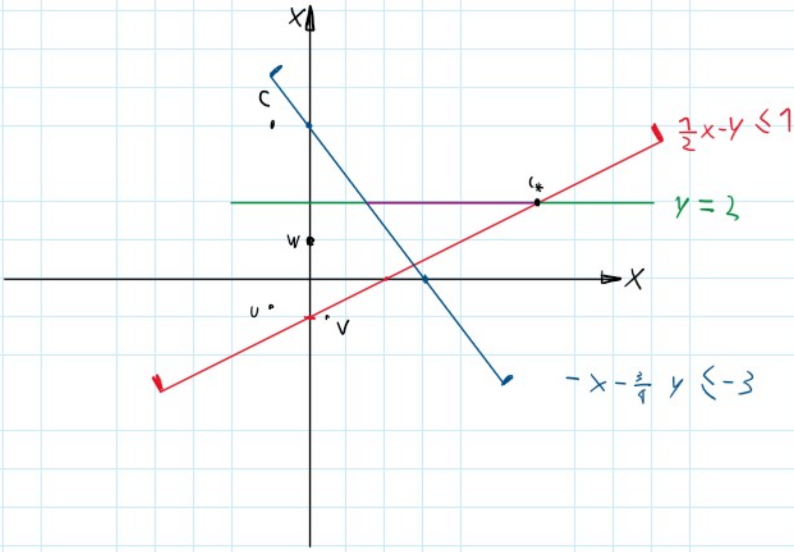
$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{4} & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 + 2F_1} \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{11}{4} & -1 \end{array}\right]$$

$y = \frac{4}{11}$

$x = \left(1 - (-1)\frac{4}{11}\right) \cdot 2 = \frac{30}{11}$

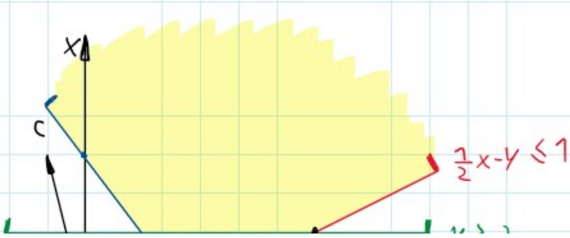
$C_* = \left(\frac{30}{11}, \frac{4}{11}\right)$

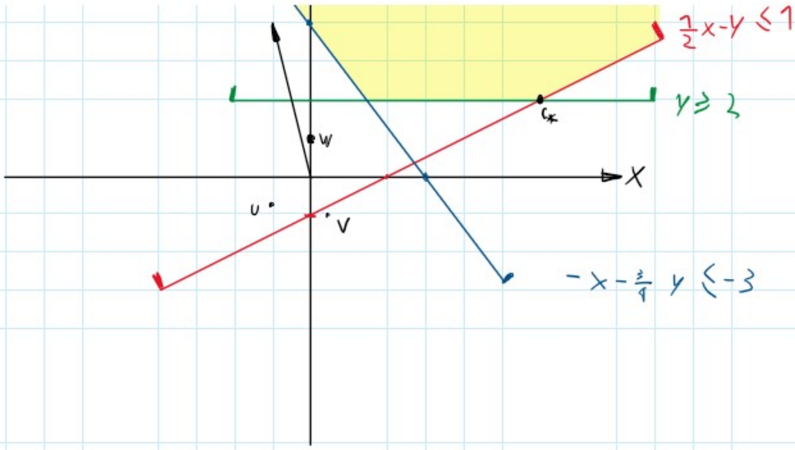
$C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x - \frac{3}{4}y \leq -3 \ \wedge \ \frac{x}{2} - y \leq 1 \ \wedge \ y = 2\}$



$C_* = (6, 2)$

$C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x - \frac{3}{4}y \leq -3 \ \wedge \ \frac{x}{2} - y \leq 1 \ \wedge \ y \geq 2\}$

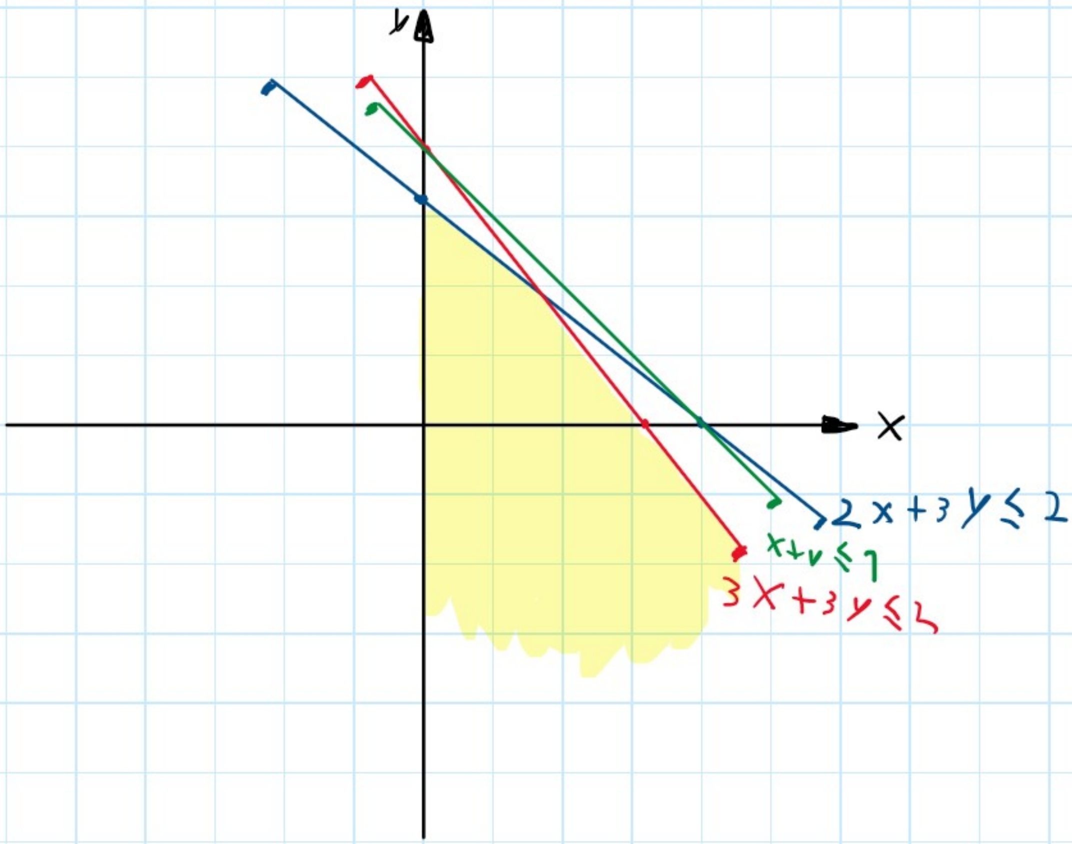




$c_* = (6, 2)$

6) 🤔

lunes, 7 de junio de 2021 11:05



Vértices:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - \frac{3}{2} F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{array}\right]$$

$$x = \frac{2}{5}$$

$$y = \frac{2 - 3 \cdot \frac{2}{5}}{2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

(2/5, 2/5) si está en la región ⇒ (2/5, 2/5) es un vertice

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$y = 0$

$x = 1$

(1, 0) no está en la region

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$x = 0$

$y = 1$

(0, 1) no está en la región

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x = 0$

$y = \frac{2}{3}$

(0, 2/3) está en la región ⇒ (0, 2/3) es un vértice

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x = 0$

$y = 1$

(0, 1) no está en la región

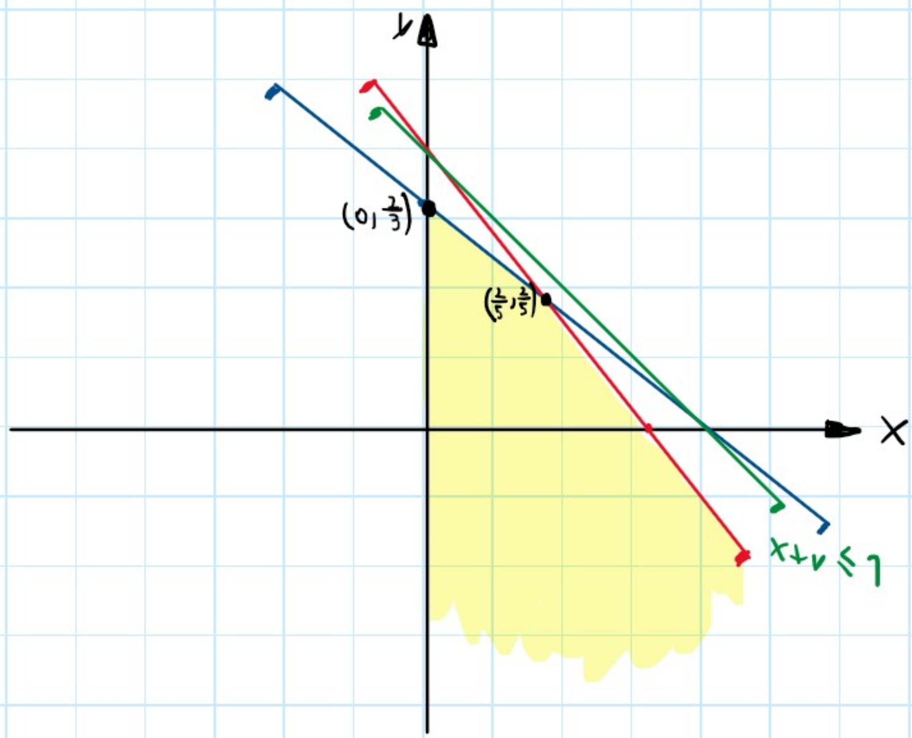
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x = 0$

$y = 1$

(0, 1) no está en la región

Vértices:
(2/5, 2/5), (0, 2/3)



7)

lunes, 7 de junio de 2021 20:29

$2x + y \leq 100$
$x + y \leq 80$
$x \leq 40$
$x, y \geq 0$

Lo llevo a la forma estándar:
$2x + y \leq 100$
$\equiv \exists s_1 \geq 0 : \; 2x + y + s_1 = 100$

$x + y \leq 80$
$\equiv \exists s_2 \geq 0 : \; x + y + s_2 = 80$

$x \leq 40$
$\equiv \exists s_3 \geq 0 : \; x + s_3 = 40$

Queda la forma estandar:
$2x + y + s_1 = 100$
$x + y + s_2 = 80$
$x + s_3 = 40$
$x, y, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

O en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$x, y, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Busco las soluciones básicas
$v \in \mathbb{R}^n$

v es una solución basica del problema

$$\Leftrightarrow \exists i_1, i_2, \ldots, i_m \in \mathbb{N}_{\leq n} : \langle \forall j, k \in \mathbb{N}_{\leq m} : i_j \neq i_k \rangle : \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_{i_1}(A) & C_{i_2}(A) & \cdots & C_{i_m}(A) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i_1} \\ v_{i_2} \\ \vdots \\ v_{i_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix} \wedge \langle \forall j \in (\mathbb{N}_{\leq n} - \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}) : \; v_j = 0 \rangle$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$x = 40$

$y = 80 - 40 = 40$

$s_1 = 100 - 40 - 2 \cdot 40 = -20$

$v = (40, 40, -20, 0, 0)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$x = 40$

$y = 100 - 2 \cdot 40 = 20$

$s_2 = 80 - 20 - 40 = 20$

$v = (40, 20, 0, 20, 0)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$x = 40$

$s_2 = 80 - 40 = 40$

$s_1 = 100 - 2 \cdot 40 = 20$

$v = (40, 0, 20, 40, 0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

No es invertible

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$y = 80$

$s_3 = 40$

$s_1 = 100 - 80 = 20$

$v = (0, 80, 20, 0, 40)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$y = 100$

$s_2 = 80 - 100 = -20$

$s_3 = 40$

$v = (0, 100, 0, -20, 40)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$v = (0, 0, 100, 80, 40)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$x = 50$

$s_2 = 80 - 50 = 30$

$s_3 = 40 - 50 = -10$

$(50, 0, 0, 30, -10)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$x = 80$

$s_1 = 100 - 2 \cdot 80 = -60$

$s_3 = 40 - 80 = -40$

$v = (80, 0, -60, 0, -40)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 100 \\ 1 & 1 & 0 & 80 \\ 1 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 1 & 1 & 0 & 80 \\ 1 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right]$$

$x = 20$

$y = 80 - 20 = 60$

$s_2 = 40 - 20 = 20$

$v = (20, 60, 0, 0, 20)$

(40, 40, -20, 0, 0)
(40, 20, 0, 20, 0)
(40, 0, 20, 40, 0)
(0, 80, 60, 0, 40)
(0, 100, 0, -20, 40)
(0, 0, 100, 80, 40)
(50, 0, 0, 30, -10)
(80, 0, -60, 0, -40)
(20, 60, 0, 0, 20)

b)
Las soluciones básicas son:
(40, 40, -20, 0, 0)
(40, 20, 0, 20, 0)
(40, 0, 20, 40, 0)
(0, 80, 60, 0, 40)
(0, 100, 0, -20, 40)
(0, 0, 100, 80, 40)
(50, 0, 0, 30, -10)
(80, 0, -60, 0, -40)
(20, 60, 0, 0, 20)

Para ser básicas factibles, además tienen que cumplir
$x, y, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Por ende, las soluciones básicas factibles son:
(40, 20, 0, 20, 0)
(40, 0, 20, 40, 0)
(0, 80, 60, 0, 40)
(0, 0, 100, 80, 40)
(20, 60, 0, 0, 20)

Por ende, los puntos extremos de $\left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix} \right\}$ son:
(40, 20, 0, 20, 0)
(40, 0, 20, 40, 0)
(0, 80, 60, 0, 40)
(0, 0, 100, 80, 40)
(20, 60, 0, 0, 20)

8)

martes, 15 de junio de 2021 08:37

$$\min_{(a_1,b_1,c_1)\in\mathbb{R}^3} a_1 450 + b_1 425 + c_1 480$$

Sujeto a:

$a_1 + b_1 + c_1 = 185$
$a_1 \leq 70$
$b_1 \leq 100$
$c_1 \leq 100$
$a_1, a_2, a_3 \geq 0$

Lo llevo a la forma estandar

$a_1 \leq 70$
$\equiv \exists s_1 \geq 0 : a_1 + s_1 = 70$

$b_1 \leq 100$
$\equiv \exists s_2 \geq 0 : b_1 + s_2 = 100$

$c_1 \leq 100$
$\equiv \exists s_3 \geq 0 : c_1 + s_3 = 100$

Queda la forma estandar:

$$\min_{(a_1,b_1,c_1,s_1,s_2,s_3)\in\mathbb{R}^6} a_1 450 + b_1 425 + c_1 480$$

Sujeto a:

$a_1 + b_1 + c_1 = 185$
$a_1 + s_1 = 70$
$b_1 + s_2 = 100$
$c_1 + s_3 = 100$
$a_1, b_1, c_1, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

O en forma matricial:

$$\min_{(a_1,b_1,c_1,s_1,s_2,s_3)\in\mathbb{R}^6} \langle (450,425,480,0,0,0), (a_1,b_1,c_1,s_1,s_2,s_3)\rangle$$

Sujeto a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 185 \\ 70 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$a_1, b_1, c_1, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Busco una primera solución basica factible:
Pruebo elegir $I = \{1,2,3,5\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 185 \\ 70 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$a_1 = 70$
$b_1 = 15$
$c_1 = 100$
$s_1 = 85$

Es factible

Iteración 1:
1)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}_N = c_N - (B^{-1}N)^t c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 450 \\ 425 \\ 480 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ -55 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -25 \\ 0 \\ -55 \end{bmatrix}$$

Voy eligiendo 4 columnas LI de la matríz para buscar una so
básica factible:

Pruebo elegir (C_3, C_4, C_5, C_6):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 185 \\ 70 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$c_1 = 185$
$s_1 = 70$
$s_2 = 100$
$s_3 = 100 - 185 = -85$

Es no factible

Pruebo elegir (C_1, C_2, C_3, C_5):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 185 \\ 70 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$a_1 = 70$
$b_1 = 15$
$c_1 = 100$
$s_1 = 85$

Es factible

Una solución básica factible es:
(70,15,100,0,85,0)

La función objetivo en está solución básica factible:
$a_1 450 + b_1 425 + c_1 480 = 70 * 450 + 15 * 425 + 100 * 480 =$

lución

85875

$j = 6$

2)

$$\tilde{a} = B^{-1}\mathrm{C}_j(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 70 \\ 15 \\ 100 \\ 85 \end{bmatrix}$$

$$s = \underset{s' \in \mathbb{N}_{\leq m}\, :\, \tilde{a}_{s'} > 0}{\operatorname{argmin}} \frac{(x_B)_{s'}}{\tilde{a}_{s'}} = \underset{s' \in \{3,4\}}{\operatorname{argmin}} \frac{(x_B)_{s'}}{\tilde{a}_{s'}} = 4$$

3)
La columna 6 remplaza a la cuarta columna de la base (osea la 5), queda:
$I = \{1,2,3,6\}$

Iteración 2:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}_N = c_N - (B^{-1}N)^{\mathrm{t}} c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 450 \\ 425 \\ 480 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$\tilde{c}_N \geqq 0 \Rightarrow$ estoy en la solución optima

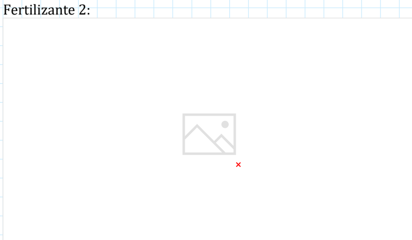
Calculo el x:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 185 \\ 70 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 100 \\ 15 \\ 85 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 70 \\ 100 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ 85 \end{bmatrix}$$

Por lo cuál queda:
$a_1 = 70$
$b_1 = 100$
$c_1 = 15$

Fertilizante 2:



La tienda A ni aparece acá
Minimizar $b_2 180 + c_2 200$
Sujeto a

$b_2 + c_2 = 50$
$b_2 \leq 20$
$c_2 \leq 40$
$b_2, c_2 \geq 0$

Lo llevo a la forma estandar:
$b_2 \leq 20$
$\equiv \exists s_1 \geq 0 : b_2 + s_1 = 30$

$c_2 \leq 40$
$\equiv \exists s_2 \geq 0 : c_2 + s_2 = 40$

Queda la forma estandar:
Minimizar $\langle (b_2, c_2, s_1, s_2), (180,200,0,0) \rangle$
Sujeto a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_2 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$b_2, c_2, s_1, s_2 \geq 0$

Busco una primera solución basica:

Elijo las columnas 1,2,3

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_2\\c_2\\s_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}50\\30\\40\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&50\\1&0&1&30\\0&1&0&40\end{array}\right]\xrightarrow{F_1-F_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&10\\1&0&1&30\\0&1&0&40\end{array}\right]\xrightarrow{F_2-F_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&10\\0&0&1&20\\0&1&0&40\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_2\\c_2\\s_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\20\\40\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}b_2\\c_2\\s_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\40\\20\end{bmatrix}$$

Una solución basica factible es (10,40,20,0)

1)
Calcular $\tilde{c}\in\mathbb{R}^n$ así:
$\tilde{c}_N := c_N-(B^{-1}N)^t c_B$
$\tilde{c}_B := 0$

Si $\tilde{c}_N \geqq 0$ entonces x es la solución optima
Si no:
$j := \underset{j'\in\mathbb{N}_{\leq n}-\{i_{k,0},i_{k,1},\dots,i_{k,m}\}}{\operatorname{argmin}} \tilde{c}_{j'}$

2)
Calcular:
$\tilde{a} := B^{-1}C_j(A)$
$s := \underset{s'\in\mathbb{N}_{\leq m}\,:\,\tilde{a}_{s'}>0}{\operatorname{argmin}} \dfrac{(x_B)_{s'}}{\tilde{a}_{s'}}$

3)
$I_{k+1,s} := j$
para $r\in\{1,\dots,s-1,s+1,\dots,m\}$: $I_{k+1,r} := I_{k,r}$

Iteración 1:
1) Test de optimalidad

$$B=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$N=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}N=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_N=c_N-(B^{-1}N)^t c_B=[0]-[-1\quad 1\quad 1]\begin{bmatrix}180\\200\\0\end{bmatrix}=[-20]$$

$$\hat{c}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-20\end{bmatrix}$$

Elijo la variable 4 para entrar a la base

2) Busco la variable que sale de la base:

$$\tilde{a}=B^{-1}C_4(A)=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$x=(10,40,20,0)$

$$x_B=\begin{bmatrix}10\\40\\20\end{bmatrix}$$

Busco el s tal que $\tilde{a}_s>0$ que minimiza $\frac{(x_B)_s}{\tilde{a}_s}$

Si s = 2, $\frac{(x_B)_s}{\tilde{a}_s}=\frac{40}{1}=40$

Si s = 3, $\frac{(x_B)_s}{\tilde{a}_s}=\frac{20}{1}=20$

El que minimiza es 3

La columna 3 de B (que también es la 3 de A) sale de la base

Test de optimalidad para $x = (0,10,40,20,0)$:

$$B=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$N=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}N=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\0&1\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_N=c_N-(B^{-1}N)^t c_B=[0]-\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}180\\200\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-20\\0\end{bmatrix}$$

Quedan en la base las columnas 1,2,4
1) Test de optimalidad:

$$B=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$N=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}N=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}_N=c_N-(B^{-1}N)^t c_B=[0]-[1\quad -1\quad 0]\begin{bmatrix}180\\200\\0\end{bmatrix}=20$$

$\tilde{c}_N\geq 0 \Rightarrow$ La solución actual es la optima

Calculo la solución:

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\c_1\\s_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}50\\30\\40\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}b_1\\c_1\\s_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\20\\20\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

(30,20,0,20) es una solución optima