Análisis Numérico I — **Práctico N°2 - 2022**

Solución de ecuaciones no lineales: Método de bisección, Método de Newton y Método de Punto fijo

Método de Bisección

1. Sea $f(x) = (x+2)(x+1)^2 x(x-1)^3(x-2)$. ¿A cuál raíz de f converge el método de bisección en cada unos de los siguientes intervalos?

   a) $[-1.5, 2.5]$, *b*) $[-0.5, 2.4]$, *c*) $[-0.5, 3]$, *d*) $[-3, -0.5]$.

2. Se quiere calcular la raíz de una función continua en un intervalo $[a, b]$ mediante el método de bisección, de forma tal que el error cometido no exceda una tolerancia prefijada denotada por ε. Es decir, si x_n es el último valor calculado se debe satisfacer $|x_n - x^*| \leq \varepsilon$, donde x^* es la raíz en cuestión.

   a) Estimar el número de iteraciones k que son suficientes para satisfacer este requerimiento en términos de la tolerancia ε y la longitud del intervalo $[a, b]$.

   b) ¿Cuántas iteraciones resultan si $[a, b] = [0, 1]$ y $\varepsilon = 10^{-5}$?.

3. *a*) Determinar gráficamente un intervalo que contenga la raíz positiva de
$$f(x) = 4\,\mathrm{sen}(x) + 1 - x.$$

   b) Realizar tres iteraciones del método de bisección para aproximar dicha raíz.

   c) ¿Cuántos pasos serán necesarios para garantizar que el error sea menor a 10^{-3}?

Método de Newton

4. Dado $a > 0$, para calcular $\sqrt{a}$ se debe hallar la raíz de $f(x) = x^2 - a$.

   a) Mostrar que la iteración de Newton genera la siguiente sucesión: $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$.

   b) Probar que para cualquier $x_0 \in (0, \infty)$, las aproximaciones generadas por el método de Newton satisfacen $x_n \geq \sqrt{a}$ para $n \geq 1$.

   c) Probar que la sucesión es decreciente ($x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \geq 1$).

   d) Finalmente concluya que la sucesión generada por el algoritmo converge a $\sqrt{a}$.

5. Proponer una fórmula de iteración para aproximar el recíproco de la raíz cuadrada de un número positivo r utilizando el Método de Newton. Decidir cuántas iteraciones son necesarias para que el error relativo de dicha aproximación sea menor que 10^{-4} partiendo de $x_0 = 1$ y considerando $r = 5$.

6. Proponer una fórmula de iteración de Newton para calcular $\sqrt[3]{R}$, donde $R > 0$. Realizar un análisis gráfico de la función f para determinar cuáles son los puntos iniciales para los que la iteración converge.

7. *a*) Utilizando el Teorema del Valor Intermedio demostrar que la función $g(x) = \arctan(x) - \frac{2x}{1+x^2}$ tiene una raíz α en el intervalo $[1, \sqrt{3}]$.

   b) Mostrar que si $\{x_n\}$ es la sucesión generada por el método de Newton para la función $f(x) = \arctan(x)$ con $x_0 = \alpha$, se cumple que $x_n = (-1)^n \alpha$.

Método de Punto Fijo

8. Se desea hallar la mínima raíz positiva de las siguientes funciones mediante el método de iteración de punto fijo. Para cada una de ellas determinar una función de iteración y un intervalo que garanticen la convergencia del método.

   a) $f(x) = x^3 - x - 1$, *b*) $f(x) = 2x - \tan(x)$, *c*) $f(x) = e^{-x} - \cos(x)$.

9. Sea $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ y r la única raíz de f en $[1, 2]$.

   a) Mostrar que las siguientes funciones tienen un punto fijo en r:

   - $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$,
   - $g_2(x) = \left(\dfrac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$,
   - $g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$,
   - $g_4(x) = \left(\dfrac{10}{4+x}\right)^{1/2}$,
   - $g_5(x) = x - \dfrac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$.

   b) Realizar 4 iteraciones del método de punto fijo (i.e., $x_{k+1} = g(x_k)$), si es posible hacerlo, en las funciones definidas en $9a$ comenzando con $x_0 = 1.5$.

   c) Para cada función en $9a$, encontrar un intervalo I tal que si $x_0 \in I$ entonces el método converge a r.

10. Se quiere usar la fórmula de iteración $x_{n+1} = 2^{x_n - 1}$ para resolver la ecuación $2x = 2^x$. Determinar los intervalos donde debe tomarse x_0 para que la sucesión sea convergente y calcular su límite.

11. Suponer que $\{x_n\}$ converge a x^* y que $x_{n+1} = g(x_n)$ donde $|g(y) - g(x)| \leq \lambda|y - x|$ para todo x, y con $\lambda \in (0, 1)$. Determinar una cota del error que se comete en cada iteración en función de la diferencia entre los dos últimos valores de la sucesión, es decir, hallar C tal que $|x_{n+1} - x_*| \leq C|x_{n+1} - x_n|$.

12. Considerar la sucesión:
$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 3(1-a)x_n + 2}{3a}$$
    donde a es una constante a determinar.

    a) Demostrar que si la sucesión converge, lo hace a una de las raíces de la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

    b) Para cada una de las raíces de f, hallar un intervalo de valores para la constante a tal que la sucesión converge a dicha raíz.

13. *a*) Verificar que la función $g(x) = x^2 - 1$ tiene dos puntos fijos, y que la derivada de g en uno de los puntos fijos tiene valor absoluto mayor que 1. Notar que la existencia de un punto fijo no implica que la derivada en dicho punto tiene valor absoluto menor que 1.

    b) Mostrar que g en el intervalo $[-1, 0]$ satisface las condiciones de existencia de un punto fijo.

    c) Elegir x_0 próximo al punto fijo de g en $[-1, 0]$, analizar la convergencia de la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$.

14. Sea $f(x) = (x-1)^{10}$, $x_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ y $x_* = 1$. Demostrar que $|f(x_n)| < 10^{-3}$ siempre que $n \geq 1$, pero que $|x_n - x_*| < 10^{-3}$ requiere que $n \geq 1000$. Concluir que el criterio de parada a elegir a la hora de aplicar un método para aproximar el cero de una función debe ser analizado en cada caso en particular.