Una versión algebraica del ejercicio 1

Ej. 1 a)

Dada la tabla

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-0,1	1,1	1,9	3,2	3,8	5	6	7,3	8,1	8,9

buscamos un $p(x) = ax + b$ tal que minimize

$$J = \sum_i |p(x_i) - y_i|^2$$

Una forma es $\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\partial J}{\partial b} = 0$

Pero otra manera es pensar el sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 9 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0,1 \\ 1,1 \\ 1,9 \\ \vdots \\ 8,9 \end{bmatrix}}_{b}$$

Lo ideal sería encontrar un par (a, b) que cumpla

$$A x = b \quad (1)$$

En general esto no es posible y definimos

$$r = b - Ax \quad \text{(llamado residuo)}$$

pidiendo en lugar de (1)

$$\|r\|^2 \text{ sea mínima} \quad (2)$$

El siguiente teorema nos da la solución a (2)

<u>Teorema</u> (Ecuaciones Normales) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\|r\|^2$ es mínima $\Longleftrightarrow$ x es solución de $A^T A x = A^T b$

(Además si rango(A) = n la solución es única)

Para el caso del item a) nos queda el sistema $A^T A x = A^T b$ (ecuaciones normales) como

$$\begin{bmatrix} 285 & 45 \\ 45 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 286,7 \\ 45,2 \end{bmatrix}$$

cuando resolvemos el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0097 \\ -0.0236 \end{bmatrix}$$

con lo cual $p(x) = 1.0097 \cdot x - 0.0236$

Como una autoevaluación dejamos como tarea para subir la parte b) del ejercicio 1.