Análisis Numérico I — **Práctico N°4 - 2022**

Aproximación de funciones por cuadrados mínimos

1. Obtener el polinomio que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos del grado indicado en cada caso:

   a) polinomio de grado 1, para la siguiente tabla de datos

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-0.1	1.1	1.9	3.2	3.8	5.0	6.0	7.3	8.1	8.9

   b) polinomio de grado 2, para la siguiente tabla de datos

x	-1	0	1	3	6
y	6.1	2.8	2.2	6	26.9

2. Probar que si se tienen $n+1$ puntos distintos, la mejor aproximación polinomial (en el sentido de cuadrados mínimos) de grado n coincide con el polinomio interpolante.

3. Hallar el polinomio de grado cero que mejor aproxime en el sentido de cuadrados mínimos a una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en n puntos $x_1, \ldots, x_n$ del intervalo $[a,b]$.

4. Aproximar los datos de la siguiente tabla con un modelo de la forma $f(x) \sim ae^{bx}$ en el sentido de cuadrados mínimos.

x	-1	0	1	2
y	8.1	3	1.1	0.5

5. Aproximar los datos de la siguiente tabla con un modelo de la forma $f(x) \sim -e^{ax^2+bx+c}$ en el sentido de cuadrados mínimos.

x	-1	0	1	2
y	-1.1	-0.4	-0.9	-0.5

6. Un pasaje en ónmibus saliendo desde Córdoba cuesta (en pesos Cordobeses) C\$1500 hasta Bariloche y se recorren 1523 km, C\$900 hasta Jujuy recorriendo 880 km, C\$800 hasta Corrientes recorriendo 898 km, C\$1050 hasta Tandil recorriendo 960 km, C\$650 hasta Mendoza recorriendo 618 km, C\$690 hasta Buenos Aires recorriendo 709 km. Sabiendo que Viedma queda a 1150 km, usar una aproximación lineal en el sentido de cuadrados mínimos para obtener el costo aproximado del pasaje.

7. Obtener la aproximación lineal en el sentido de cuadrados mínimos de la función f en el intervalo indicado si:

   a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ en el intervalo $[0,1]$.

   b) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ en el intervalo $[-1,1]$.

   c) $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0,2]$.

8. Aproximar los datos de la siguiente tabla en el sentido de cuadrados mínimos con un modelo de la forma $f(x) \sim a\cos(x) + b\,\mathrm{sen}(x)$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1.8	3.5	2.1	-1.0	-3.3	-2.7	0.9	3.3	2.8	-0.1	-3.0

9. Considerar el conjunto de polinomios ortogonales de Legendre $\{P_0, P_1, P_2\}$ en el intervalo $[-1, 1]$, dados por $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ y $P_2(x) = x^2 - 1/3$. Verificar que $\{P_0, P_1, P_2\}$ es un conjunto ortogonal de funciones.

10. Determinar las aproximaciones lineal y cuadrática de la función $f(x) = e^x$ en el sentido de cuadrados mínimos usando los polinomios ortogonales de Legendre, en el intervalo $[-1, 1]$.

11. Hallar una base ortogonal $\{\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2\}$ del conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2 en el intervalo $[-1, 1]$ respecto a la función de peso $\omega(x) = x^2$.

    Ayuda: elegirlos de modo que $gr(\Phi_k) = k$, $k = 0, 1, 2$.