Practica 1
serie de potencias y taylor

① obtene la serie de potencias centrada en 0 para la funcion $f(x)=\ln(x+1)$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(c)(x-c)^k+E_n$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$f''(x)=-(x+1)^{-2}=\frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$f'''(x)=2(x+1)^{-3}=\frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(x+1)^k}\longrightarrow f^{(k)}(c)=(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{1^k}$$

$c=1$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{1^k}(x-0)^k+E_n=\boxed{\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}+E_n}$$

error $$E_n=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\underbrace{(-1)^{n+2}\frac{n!}{(\xi+1)^{n+1}}}_{f^{n+1}(\xi)}(x)^{n+1}$$

$$=\boxed{\frac{(-1)^n\cdot(\xi+1)^{-(n+1)}x^{n+1}}{n+1}}$$

6 Estimar el numero de terminos que debe tener la serie para estimar $\ln$ con un margen no mayor que 10^{-10}

$\ln(x+1)=\ln(1,5)\longleftrightarrow x=0,5$

$0<\xi<x$

$1<\xi+1<1,5$

$$|E_n(x)|=|E_n(0,5)|=\left|\frac{(-1)^n(\xi+1)^{-(n+1)}}{(n+1)\,2^{n+1}}\right|$$

$$E_n(0,5)\leq\left|\frac{(\xi+1)^{-n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}}\right|\leq\left|\frac{1}{n+1}\right|\cdot\left|\frac{1}{2^{n+1}}\right|\leq\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\leq\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$E_n(0,5)\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\leq\frac{1}{2^{n+2}}\leq10^{-10}$$

$$\frac{1}{2^{n+2}}\leq10^{-10}$$

$$10^{10}\leq2^{n+2}\longrightarrow\frac{10\ln(10)}{\ln(2)}-2\leq n$$

$31,2192\leq n$

$n\geq32$

② Si la serie para $\ln(x)$ centrada en 1 se corta después del término $(x-1)^{1000}$ y después se utiliza para calcular $\ln(2)$, qué cota de error se puede

Serie de Taylor centrada en 1 de $\ln(x)$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x}, \quad f^{(2)}(x) = \frac{-1}{x^2}, \quad f^{(3)} = \frac{2}{x^3} \quad \dots \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$$

$$|E_n(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1} \right|$$

en este caso $n = 1000$, $c = 1$, $x = 2$

$$|E_n(2)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} (-1)^{n+2} \cdot \frac{n!}{\xi^n} (2-1)^{n+1} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\xi^n} 1^{n+1} \right| = \frac{1}{1001} \cdot \underbrace{\frac{1}{\xi^{1000}}}_{1 \geq} 1^{1001}$$

$1 < \xi < 2$

$1 = 1^{-1000} \geq \xi^{-1000}$

$1 \geq \xi^{-1000}$

$$\boxed{|E_n(2)| \leq \frac{1}{1001}}$$

③ Verificar la siguiente igualdad, mostrar que la serie converge en el intervalo $-e < x < e$

$$\ln(e+x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{x}{e}\right)^k$$

desarrollo de serie de Taylor de $f(x) = \ln(x+e)$ centrado en 0 $\quad c = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{e+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(e+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(e+x)^3}, \dots, f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(e+x)^k}$$

$$f^{(k)}(c) = f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{e^k} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k$$

$$f(x) = \frac{1}{0!} \ln(c+e)(x-c)^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{e^k} (x-c)^k$$

$$= \ln(c+e) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k-1} \frac{(x-c)^k}{e^k}$$

pero como $c = 0$

$$f(x) = \ln(e) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{e^k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{x}{e}\right)^k$$

(2) sea $f(x)$ | x | n

(4) $\sqrt{x}$ centrada en 1 y verificar $\sqrt{0{,}9999999995}$ con un error no mayor a 10^{-10}

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ en 1

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$

f

Notacion o y O

(5) Verificar que las siguientes sucesiones convergen a 1, y analizar su velocidad de convergencia

a $x_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2^{\infty}} = 1$$

• Convergencia lineal

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 1 - 1\right|}{\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 1 - 1\right|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} : \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-n}$$

$$= \frac{1}{2}$$

• Sup lin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = 0$$

- Convergencia al menos lineal
- no tiene convergencia superlineal
- " " " cuadratica

• Cuad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} < 1$$

b $x_n = 1 + \frac{1}{2^{2^n}}$

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2^{2^n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{2^{2^{(n+1)}}}\right|}{\left|\frac{1}{2^{2^{(n)}}}\right|} = \frac{2^{2^n}}{2^{2^{n+1}}} = 2^{2^n} : 2^{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} 2^{2^n - 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} 2^{2^n - 2\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^{2^n(1-2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2^{2^n(-1)} = \frac{1}{2^{2^n}}$$

$$= 0$$

Convergencia al menos superlineal

⑥ Para n fijo demostrar que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} + O(x^n)$ cuando $x \longrightarrow 0$

Serie geométrica

$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}$

si $|x|<1$

$$\frac{1}{x-1} + \sum_{k=0}^{n} x^k = O(x^n)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x-1} + \sum_{k=0}^{n} x^k}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x-1}}{x^k} + \frac{\sum_{k=0}^{n} x^k}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{x^{k+1} - x^k}_{=0}} + \sum_{k=0}^{n} x^{k-n}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=\infty}^{\infty} x^k \leq cx^n$$

⑦ Si $E = O(h^n)$ cuando $h \to 0$, $\Rightarrow E = O(h^m)$, $h \to 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $m \leq n$

9) Verdadero o falso

a) $\frac{1}{x^2} = O\left(\frac{1}{x}\right) \quad x \to 0$ $\qquad \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} \leq C \longleftrightarrow \frac{x}{x^2} \leq C \longrightarrow \frac{1}{x} \leq C$ $\qquad$ falso

b) $\left(\frac{n+1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(n+1)}{n^{\cancel{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$ Verdadero

c) $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} x = 0$$ verdadero

d) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \quad x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x) + x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)+1}{12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{24x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{24} = \frac{1}{24}$$ Verdadero

$\lim_{x\to a} \frac{0}{0} = c < \infty \qquad \lim_{x\to 0} \frac{0}{0} = 0$

O grande $\qquad$ o chica

⑥ Para n fijo demostrar que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{\ } + O(x^n)$ cuando $x \to 0$ — Serie geométrica

10
a $\sin(x) \approx x$ para x suficientemente pequeño, determinar el intervalo al rededor del cual se cumple con un error relativo de $0,5 \cdot 10^{-14}$

⑥ $\operatorname{sen}(x) = x + O(x^3)$ $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \left|\frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3}\right| = \lim_{x \to 0} \left|\frac{\cos(x) - 1}{3x^2}\right| = \lim_{x \to 0} \left|\frac{-\operatorname{sen}(x)}{6x}\right| = \lim_{x \to 0} \left|\frac{-\cos(x)}{6}\right| = \frac{1}{6}$$ verdadero

Sistema punto flotante

⑪ $U = 3,721478693$ $U - V = 0,001248121$
$V = 3,720230572$

si 5 digitos decimales en punto flotante

$Fl(U) = 0,37215 \cdot 10^1$, $Fl(V) = 0,37202 \cdot 10^1$

$Fl(Fl(U) - Fl(V)) = Fl(0,37215 \cdot 10^1 - 0,37202 \cdot 10^1)$

$= Fl(0,00013 \cdot 10^1) = Fl(0,0013) = Fl(0,13 \cdot 10^{-2})$

error relativo $= \frac{|0,13 \cdot 10^{-2} - 0,001248121|}{|0,001248121|} \approx 0,041 \approx 4\%$

⑫ Si se utiliza un sistema de punto flotante con 5 digitos, que numeros reales cumple $Fl(1 + x) = 1,0$

$Fl(1,0 + x) = 1,0 \Rightarrow |x| < 10^{-5}$

⑬ Dar formas alternativas para evaluar las siguientes expresiones

a $(\alpha + x)^n - \alpha^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} x^k \binom{n}{k} - \alpha^k = \sum_{k=1}^{n} \alpha^{n-k} x^k \binom{n}{k}$

b $\alpha - \sqrt{\alpha^2 - x} \cdot \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - x}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - x}} = \frac{\alpha^2 - \sqrt{\alpha^2 - x}^2}{\alpha^2 + \sqrt{\alpha^2 - x}} = \frac{x}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - x}}$

c $\ln(\alpha + x) - \ln(\alpha) = \ln\left(\frac{\alpha + x}{\alpha}\right) = \ln\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)$

d $\operatorname{sen}(\alpha + x) - \operatorname{sen}(\alpha - x) = \operatorname{sen}(x)\cos(\alpha) + \cos(x)\cancel{\sin(\alpha)} - [\cancel{\operatorname{sen}(\alpha)}\cos(-x) + \cos(\alpha)\sin(-x)]$

$\operatorname{sen}(x)\cos(\alpha) - \cos(\alpha)\sin(-x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(\alpha)$

no se hizo hoy el 14, 15, 16, 17, 18

Unidad 2 ecuaciones no lineales

1 Metodo de Biseccion

① $f(x) = (x+2)(x+1)^2 x (x-1)^3 (x-2)$

a que raiz converge el metodo? en cada intervalo

a) $[-1{,}5 ; 2{,}5]$ c) $[-0{,}5 , 3]$

b) $[-0{,}5 , 2{,}4]$ d) $[-3 ; -0{,}5]$

ⓐ 1) $a_0 = -1{,}5$ $f(a_0) < 0$ $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = 0{,}5$ $f(0{,}5) > 0$
$b_0 = 2{,}5$ $f(b_0) > 0$

2) $a_1 = -1{,}5$ $c_1 = -0{,}5$ $f(a_1) < 0$
$c_0 = b_1 = 0{,}5$ $f(c_1) < 0$

3) $a_1 = c_1 = -0{,}5$ Intervalo $= [-0{,}5 , 0{,}5]$ y la unica raiz ahi es
$b_1 = 0{,}5$ $x = 0$

ⓑ 1) $f(-0{,}5) < 0$ $c_0 = \frac{-0{,}5+2{,}4}{2} = 0{,}95$, $f(c_0) > 0$
$f(2{,}4) > 0$

2) $a_1 = -0{,}5$ $c_1 = 0{,}225$, $f(c_1) > 0$ Intervalo
$b_1 = c_0 = 0{,}95$ $f(a_1) < 0$ $[-0{,}5 , 0{,}225]$
$f(b_1) > 0$

② $|x_n - x^*| \leq \varepsilon$

ⓐ estimar el numero de iteraciones k para una tolerancia determinada

$|x_n - r| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0) \leq \varepsilon \longrightarrow$ Tolerancia

$(b_0 - a_0) \leq 2^{n+1} \varepsilon$

$\ln\left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right) \leq (n+1)\ln(2)$

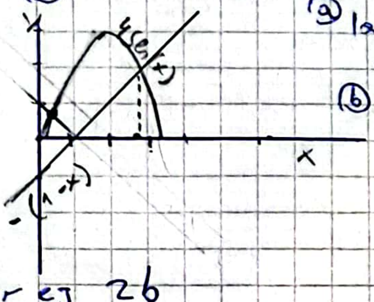
$$\boxed{\frac{\ln\left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1 \leq n}$$

b cuantas iteraciones se requieren si $[a,b] = [0,1]$ y el error es 10^{-5}

$\frac{\ln\left(\frac{1}{10^{-5}}\right)}{\ln(2)} - 1 \leq n$ $15{,}6096\ldots \leq n$

$n \geq 16$

③



ⓐ la primer raiz esta en [2,3]
$x \approx 2{,}9$

ⓑ ① $a_0 = 2$ $f(a_0) > 0$ $c_0 = \frac{5}{2}$, $f(c_0) > 0$
$b_0 = 3$ $f(b_0) < 0$

② $a_1 = 2{,}5$ $c_1 = 2{,}75$, $f(c_1) < 0$
$b_1 = 3$

③ $a_2 = 2{,}5$, $c_2 = 2{,}625$, $f(c_2) > 0$
$b_2 = 2{,}75$

intervalo $[2{,}625 ; 2{,}75]$

ⓒ Por ej 2b

$a = 2$
$b = 3$

$n \geq 17$

Escaneado con CamScanner

Metodo Newton

④ dado $\alpha > 0$ para calcular $\sqrt{\alpha}$ se debe encontrar la raíz de $f(x) = x^2 - \alpha$

ⓐ mostrar que el metodo ~~converge a la~~ genera la siguiente sucesion $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$

$$f(x_n) = x_n^2 - \alpha \Rightarrow f'(x_n) = 2x_n \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - \alpha}{2x_n} = x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{\alpha}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$$

ⓑ $\forall x_0 \in (0;\infty)$ las aproximaciones generadas por el metodo de Newton satisfacen $x_n \geq \sqrt{\alpha}$ para $n \geq 1$

Primero

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\underbrace{x_0}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\alpha}{x_0}}_{\geq 0}\right) \geq 0 \qquad x_n = \frac{1}{2}\left(\underbrace{x_{n-1}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\alpha}{x_{n-1}}}_{\geq 0}\right) \geq 0$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\underbrace{x_1}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\alpha}{x_1}}_{\geq 0}\right) \geq 0$$

$$x_{n+1} \geq \sqrt{\alpha} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) \geq \sqrt{\alpha} \longleftrightarrow x_n + \frac{\alpha}{x_n} - 2\sqrt{\alpha} \geq 0 \longrightarrow \frac{x_n^2 + \alpha - 2x_n\sqrt{\alpha}}{x_n} \geq 0$$

$$\longleftrightarrow (\underbrace{x_n}_{\geq 0} - \alpha)^2 \geq 0$$ lo cual es verdadero $\forall n$

ⓒ ~~Concluir que la sucesion generada~~ probar que es una sucesion decreciente $x_n \geq x_{n+1}$

Por ej ② $x_n \geq \sqrt{\alpha} \longrightarrow x_n^2 \geq \alpha \longleftrightarrow 2x_n^2 - x_n^2 \geq \alpha \longleftrightarrow x_n^2 \geq \frac{\alpha + x_n^2}{2}$

$$\longleftrightarrow x_n \geq \frac{\alpha + x_n^2}{2x_n} \longleftrightarrow x_n \geq \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) = x_{n+1} \longleftrightarrow x_n \geq x_{n+1}$$

ⓓ Ver que el metodo converge a $\sqrt{\alpha}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x} \qquad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$$

si queremos ver que $\bar{x} = \sqrt{\alpha}$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\left(\bar{x} + \frac{\alpha}{\bar{x}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}^2 + \alpha}{\bar{x}}\right)$$

$$2\bar{x}^2 = \bar{x}^2 + \alpha \longleftrightarrow \bar{x}^2 = \alpha \longleftrightarrow \bar{x} = \sqrt{\alpha}$$

⑤ $f(x) =$

Proponer una formula para el inverso de la raiz cuadrada de un numero

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - r = x^{-2} - r \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x^{-2} - r}{-2x^{-3}} = \frac{2x_n^{-2} + x_n^{-2} - r}{2x_n^{-3}}$$

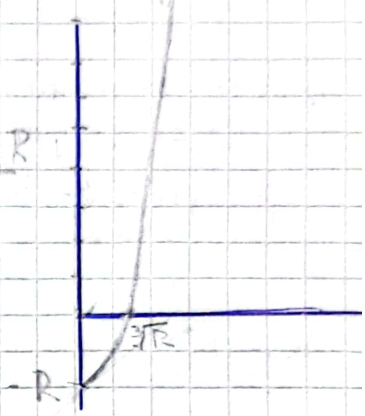
$$= \frac{3x_n^{-2} - r}{2x_n^{-3}} = \frac{3x_n - rx_n^3}{2}$$

$\frac{1}{\sqrt{R}}$

(6-7...)

6

⑥ Proponer una formula de iteracion de Newton para calcular $\sqrt[3]{R}$, con $R > 0$ y realizar un analisis grafico para ver que intervalos converge



Propongo: $f(x) = x^3 - R$, $f'(x) = 3x^2$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - R}{3x_n^2} = \frac{3x_n^3 - x_n^3 + R}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + R}{3x_n^2}$$

Creo que el metodo converge para $x_0 \in (0 ; \infty)$

⑦ Usando el Teorema del valor intermedio, mostrar que $g(x) = \arctan(x) + \frac{2x}{1+x^2}$ tiene una raiz α en $[1, \sqrt{3}]$

$g(1) < 0$
$g(\sqrt{3}) > 0$ y como $g(x)$ es continua, $\Rightarrow \exists\, \alpha \in [1, \sqrt{3}] : g(\alpha) = 0$

ⓑ mostrar que si $\{x_n\}$ es la sucesion generada por Newton para ~~la funcion~~ $f(x) = \arc$ con $x_0 = \alpha$, se cumple que $x_n = (-1)^n \alpha$

utilizando el 7a

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\arctan(x_n)}{\frac{1}{1+x_n^2}} = x_n - (1+x_n^2)\arctan(x_n)$$

Caso particular

$$x_1 = x_0 - (1+x_0^2)\arctan(x_0) = \alpha - (1+\alpha^2)\arctan(\alpha) \qquad (1)$$

por ej 5a α es raiz de $\arctan(x) - \frac{2x}{1+x^2} = 0$

$$g(\alpha) = (1+\alpha^2)\arctan(\alpha) - 2\alpha = 0$$

$$\underbrace{-\arctan(\alpha)(1+\alpha^2) + \alpha}_{(1)} + \alpha = 0 \longrightarrow x_1 + \alpha = 0$$

$$\boxed{x_1 = -\alpha}$$

Paso inductivo   Paja de completar

Punto fijo

3) se desea hallar la mínima raíz positiva de las siguientes funciones

a) $f(x) = x^3 - x - 1$

$f(x) = 0 = x^3 - x - 1 \longrightarrow x = \sqrt[3]{x+1} = g(x)$

$g(0) = 1$ y $g(x)$ es creciente

$g(1) = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}25 < 2$

$g(2) = \sqrt[3]{3} \approx 1{,}44$ $\quad \forall x \in [0,2]$, $g(x) \in [0,2]$

$\exists\, p$, tal que $g(p) = p$ es decir $\sqrt[3]{p+1} = p \longrightarrow p^3 - p - 1 = 0$

b) $f(x) = 2x - \tan(x)$

$2x - \tan(x) = 0 \longrightarrow x = \arctan(2x) = g(x)$

$g'(x) = \dfrac{2}{4x^2+1}$ $\quad |g'(x)| < 1$ $\quad \left|\dfrac{2}{4x^2+1}\right| < 1$ $\quad 2 < 4x^2 + 1$ $\quad \sqrt{\frac{1}{4}} < x \longrightarrow$ $x > 1/2$, $x > -1/2$ no sirve

$|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in (\frac{1}{2}, \infty)$

escojo $(\frac{1}{2}, 2)$

$g(1/2) = \pi/2 \in [1/2, 2]$

$g(2) \approx 1{,}32 \in [1/2, 2]$

c) $f(x) = e^{-x} - \cos(x)$

$f(x) = e^{-x} - \cos(x) = 0 \longrightarrow x = -\ln(\cos(x))$

$g'(x) = -\dfrac{1}{\cos(x)} \cdot -\operatorname{sen}(x) = \tan(x)$

$|g'(x)| < 1 \longrightarrow |\tan(x)| < 1$

$x < 0{,}78$

(7) Sea $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ y r la única raíz de f en $[1,2]$

a) mostrar que las siguientes func. tienen un punto fijo en r

1) $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$, $g_1(r) = r - r^3 - 4r^2 + 10 = r - f(r) = r - 0 = r$

2) $g_2(x) = \left(\dfrac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$, $g_2(r) = \left(\dfrac{10}{r} - 4r\right)^{1/2} = \left(\dfrac{10 - 4r^2}{r}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{r^3 + \overset{=0}{f(r)}}{r}\right)^{1/2} = (r^2)^{1/2} = r$

3) $g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$, $g_3(x) = \frac{1}{2}(f(x) + 4x^2)^{1/2} \longrightarrow g_3(r) = \frac{1}{2}(4r^2)^{1/2} = \frac{2}{2} r = r$

4) $g_4(x) = \left(\dfrac{10}{4+x}\right)^{1/2}$, $g_4(x) = \left(\dfrac{10x^2}{x^2(4+x)}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{10x^2}{f(x)+10}\right)^{1/2}$, $g_4(r) = \left(\dfrac{10r^2}{10}\right)^{1/2} = r$

5) $g_5(x) = x - \dfrac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x} =$

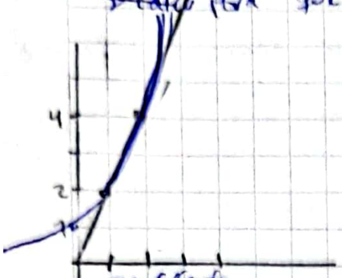
$g_5(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \longrightarrow g_5(r) = r - \dfrac{\overset{=0}{f(r)}}{f'(r)} = r$

no hice a 9 b y c

elegir

ⓒ ~~fex~~ $f(x)$ | x | Proximo ... [illegible]

(10) $x_{n+1} = 2^{x_n - 1}$ para resolver la ecuación $2x = 2^{x}$ y determinar los intervalos para que x_0 ~~tenga~~ para que la sucesión converga



graficando así nomás

$\begin{cases} \text{horizontal de la curva a la recta} \\ \text{vertical de la recta a la curva} \end{cases}$

- gráficamente si $x_0 \in (-\infty ; 2)$ el método converge a 1

$g(x) = 2^{x-1} = e^{(x-1)\ln(2)}$

$g'(x) = \ln(2)\, e^{(x-1)\ln(2)}$

$|g'(x)| < 1$

$\ln(2) e^{(x-1)\ln(2)} < 1$

$e^{(x-1)\ln(2)} < 1/\ln(2)$

$(x-1)\ln(2) < \ln\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)$

$x < \frac{\ln(1/\ln(2))}{\ln(2)} + 1$

$x < \frac{\ln(1) - \ln(\ln(2))}{\ln(2)} + 1$

$x < \frac{-\ln(\ln(2))}{\ln(2)} + 1$

$x < 1{,}52876$

Intervalo $(-\infty ; 1{,}52876)$

- el método también converge en $(1{,}52876 ; 2)$ pero el teorema no garantiza convergencia

~~por el intervalo (1, 2)~~

(11) $\{x_n\}$ converge a x^* y que $x_{n+1} = g(x_n)$ donde $|g(y) - g(x)| \leq \lambda |y - x|$ $\forall x, y$ con $\lambda \in (0, 1)$ determinar el error en cada iteración

o decir hallar C tal que $|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|$

$|x_{n+1} - x^*| = |g(x_n) - g(x^*)| \leq \lambda |x_n - x^*| = \lambda |x_n - x^* + x_{n+1} - x_{n+1}|$

$= \lambda |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x^*)| \leq \lambda |x_n - x_{n+1}| + \lambda |x_{n+1} - x^*|$

(12) Considera la sucesión $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 - 3(1-a)x_n + 2}{3a}$

a demostrar que si converge, lo hace a una de las raíces de $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 3x_n + 3a x_n + 2}{3a} = \frac{f(x_n) + 3a x_n}{3a} =$$

suponemos que converge

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{f(x^*) + 3a x^*}{3a} = x^* \longrightarrow f(x^*) + 3a x^* = 3a x^*$$

$$\longrightarrow f(x^*) = 0$$

(b) para cada una de las raíces de f, hallar un intervalo para la cte a tal que la sucesión converja a dicha raíz.

$$g(x) = \frac{f(x) + 3ax}{3a} \longrightarrow g'(x) = \frac{f'(x) + 3a}{3a} = \frac{2x - 3 + 3a}{3a}$$

para $x = 1$

$$|g'(1)| < 1$$

$$\left|\frac{2 - 3 + 3a}{3a}\right| < 1$$

$$-1 < \frac{3a - 1}{3a} < 1$$

$a > 0$ | $a < 0$

$-3a < 3a - 1 < 3a$ | $-3a > 3a - 1 > 3a$

$-6a < -1 < 0$ | $-6a > -1 > 0$ absurdo

$a > \frac{1}{6}$

$$a \in \left(\frac{1}{6}, \infty\right)$$

$$\Rightarrow x^* = 1$$

Para $x = 2$

$$|g'(2)| < 1$$

$$\left|\frac{2\cdot 2 - 3 + 3a}{3a}\right| < 1$$

$$-1 < \frac{1 + 3a}{3a} < 1$$

$a > 0$ | $a < 0$

$-3a < 1 + 3a < 3a$ | $-3a > 1 + 3a > 3a$

$-6a < 1 < 0$ absurdo | $-6a > 1 > 0$

$a < -\frac{1}{6}$

$$a \in \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right)$$

$$\Rightarrow x^* = 2$$

(13) (a) verifica que la función $f(x) = x^2 - 1$ tiene 2 pf y que g' en uno de esos puntos es mayor a 1

$$f(x) = x^2 - 1 = x$$

$$g(x) = x^2 - 1 - x = 0 \quad x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$|f'(x)| = |2x - 1|$$

$$|f'(x_1)| = \left|\cancel{2}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{\cancel{2}}\right) - 1\right| = \sqrt{5}$$

$$|f'(x_1)| < 1$$

$$\sqrt{5} < 1 \text{ absurdo}$$

$$\longrightarrow g'(x_1) > 1$$

$$\exists \text{ pf } \cancel{\longrightarrow} |f'(x)| < 1$$

(b) mostrar que en $[-1, 0]$ se satisfacen las condiciones de existencia de pf

(1) $(-1)^2 - 1 - (-1) = 1 \geq -1$

(2) $0^2 - 1 - 0 = -1 \leq 0$

Como $g(-1) \geq -1$ y $g(0) \leq 0$ y como g es continua y creciente, g posee un pf en $[-1, 0]$

elegí!

(c) ~~sea~~ $f(x)$ x_0 próximo al pf de $g f$ en $[-1, 0]$ y analizo la convergencia de la sucesión $x_{n+1} = f g(x_n)$

$x_0 = -0{,}5 \longrightarrow f(-\frac{1}{2}) = -3/4 = -0{,}75$

$x_1 = -3/4 \longrightarrow f(-3/4) = -7/16 \approx -0{,}437$

$x_2 = -\frac{7}{16} \longrightarrow f(-\frac{7}{16}) = \frac{207}{256} \approx -0{,}8085$

No converge con $x_0 = -0{,}5$

(19) $f(x) = (x-1)^{10}$, $x_n = 1 + \frac{1}{n+1}$, $x^* = 1$ demostrar que $|f(x_n)| \leq 10^{-3}$ con $n \geq 1$ pero que $|x_n - x^*| < 10^{-3}$ requiere $n \geq 1000$

$f(x) = (x-1)^{10}$

$|f(x_n)| = \left(1 + \frac{1}{n+1} - 1\right)^{10} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{10} < 10^{-3} \longrightarrow \frac{1}{10^{-3}} < (n+1)^{10}$

$10^3 < (n+1)^{10}$

$0{,}995 \approx 10^{3/10} - 1 < n$

$|x_n - x^*| < 10^{-3}$

$\left|1 + \frac{1}{n+1} - 1\right| \leq 10^{-3} \longrightarrow 10^3 - 1 \leq n \longrightarrow 999 \leq n$

la condición de $|f(x)| < tol$ no es tan buena, $|x_n - x^*| < tol$ es mejor

Unidad (3)
Interpolación numérica

1 hallar el polinomio interpolante de Newton y Lagrange para $\frac{1}{x}$

(a)

$x_0 = 2 \longrightarrow y_0 = 0{,}5$

$x_1 = 2{,}5 \longrightarrow y_1 = 0{,}4$

$x_2 = 4 \longrightarrow y_2 = 0{,}25$

(a) Lagrange

$l_0(x) = \prod_{j=1}^{2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x - 2{,}5}{2 - 2{,}5} \cdot \frac{x - 4}{2 - 4} = 2(2{,}5 - x)\frac{(4 - x)}{2}$

$l_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x-2}{2{,}5-2} \cdot \frac{x-4}{2{,}5-4} = -\frac{4}{3}(x-2)(x-4) =$

$l_2(x) = \prod_{j=0}^{1} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{x-2}{4-2} \cdot \frac{x - 2{,}5}{4 - 2{,}5} = \frac{(x-2)}{2} \cdot \frac{2}{3}(x - 2{,}5)$

$l_0(x) = 10 - \frac{13}{2}x + x^2$

$l_1(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 8x - \frac{32}{3}$

$l_2(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{2}x + \frac{5}{3}$

$P(x) = \underbrace{5 - \frac{13}{4}x + \frac{x^2}{2}}_{0{,}5 \cdot l_0(x)} + \frac{8}{15}x^2 + \frac{16}{5}x - \frac{64}{15} + \frac{1}{12}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{5}{12}$

$P(x) = \frac{23}{20} - \frac{17}{40}x + \frac{1}{20}x^2$

(b) Newton

dif divididas

2	0,5	-0,2	0,05
2,5	0,4	-0,1	
4	0,25		

$q(x) = 0{,}5 - 0{,}2(x-2) + 0{,}05(x-2)(x-2{,}5)$

$q(x) = \frac{23}{20} - \frac{17}{40}x + \frac{1}{20}x^2$

6 Construir el polinomio de taylor P_n de grado 0,1,2,3 de la función $\frac{1}{x}$ alrededor de $x^* =$

$f(x) = \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ $\qquad f^{(1)}(x) = \frac{-1}{x^2}$, $f^{(2)}(x) = \frac{2}{x^3}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!\, c^{(k+1)}}(-1)^k (x-c)^k$ $\qquad f^{(n)}(x) = \frac{n!(-1)^n}{x^{(n+1)}}$, $n \geq 0$

como $c=1$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k = P_n(x)$

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = -x + 1 + P_0 = -x + 2$
$P_2(x) = (x-1)^2 + 2 - x$
$P_3(x) = -(x-1)^3 + (x-1)^2 - x + 2$

Taylor(3) = -5, Interpolate(3) = $\frac{13}{400} = 0{,}325$

solución real $= \frac{1}{5} = 0{,}2$

2 Demostrar que si f es un polinomio de grado $\leq n$ entonces el polinomio que interpola a f en $x_0, \dots, x_n$ es el propio f

planteamos $P(x)$ tal que $P(x_i) = f(x_i)$ $\quad i = 0, \dots, n$
sabemos que $P(x)$ tiene grado $\leq n$ por interpolar en $n+1$ puntos
$h(x) = P(x) - f(x)$ tiene $n+1$ raíces, pero es resta de polinomios de grado $\leq n$
por lo que $h(x)$ tiene grado $\leq n$ y $n+1$ raíces $\Rightarrow h(x) \equiv 0$

$\therefore P(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3 mostrar que si $g(x)$ interpola a $f(x)$ en $x_0, \dots, x_{n-1}$ y $h(x)$ interpola a $f(x)$ en $x_0, \dots, x_n$ entonces

$P(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}[g(x) - h(x)]$ interpola a f en $x_0, \dots, x_n$

Por casos

si $x = x_0$
$P(x_0) = g(x_0) + \frac{x_0 - x_0}{x_n - x_0}[g(x_0) - h(x_0)] = g(x_0)$ y como $g(x)$ interpola a f en x_0
$P(x_0) = f(x_0)$

si $x_i = x_1, \dots, x_{n-1}$
$P(x_i) = g(x_i) + \frac{x_0 - x_i}{x_n - x_0}[\underbrace{g(x_i) - h(x_i)}_{\text{interpolan a } f}] = g(x_i) + \frac{x_0 - x_i}{x_n - x_0}[\cancel{f(x_i) - f(x_i)}]$
$= g(x_i)$ y como g interpola en $x_i = x_1, \dots, x_{n-1}$ $\quad g(x_i) = f(x_i)$

si $x = x_n$
$P(x_n) = g(x_n) + \underbrace{\frac{x_0 - x_n}{x_n - x_0}}_{=-1}[g(x_n) - h(x_n)] = g(x_n) - g(x_n) + h(x_n) = h(x_n)$
y como $h(x)$ interpola a f en x_n $\quad P(x_n) = f(x_n)$

$P(x)$ interpola a $f(x)$ en $x_0, \dots, x_n$

Escaneado con CamScanner

4 a Probar que $\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$

Sea $P(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x)$, $h(x) = P(x) - 1$ tiene grado $\leq n$

además $h(x_i) = P(x_i) - 1 = \sum_{k=0}^{n} l_k(x_i) - 1 = 0$ $\qquad l_k(x_p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = k \\ 0 & \text{si } p \neq k \end{cases}$

$n+1$ raíces y polinomio $gr \leq n \longrightarrow h(x) \equiv 0$

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} l_k(x) = 1$

b Probar que $\sum_{k=0}^{n} x_k\, l_k(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Sea $P(x) = \sum_{k=0}^{n} x_k\, l_k(x) \longrightarrow \begin{cases} P(x_0) = x_0 \\ \vdots \\ P(x_n) = x_n \end{cases}$

Sea $f(x) = x$ la función identidad, $P(x)$ interpola a x en $n+1$ puntos

por ejercicio 2 $f(x) \equiv P(x) = x$

c Probar que $\sum_{k=0}^{n} x_k^m\, l_k(x) = x^m \quad \forall x \in \mathbb{R}$ con $m \leq n$

Planteamos la función $P(x) = \sum_{k=0}^{n} x_k^m\, l_k(x) \longrightarrow \begin{cases} P(x_0) = x_0^m \\ \vdots \\ P(x_n) = x_n^m \end{cases}$

y planteamos la función x^m, polinomio de grado m

pero $P(x)$ también es de grado m, y P interpola a x^m en $n+1$ lugares

por esto siempre que $m \leq n$, por ejercicio 2 $P(x) = x^m$

ej (2): si f es un polinomio de $gr \leq n$, y P lo interpola en $x_0, \dots, x_n$

entonces $f(x) = P(x)$

5

x	-1	0	2	3
y	-1	3	11	27

x	-1	0	1	2
y	-3	1	1	3

a Calcular los polinomios interpolantes de Lagrange

b " " " " de Newton

c Agrego el punto $(4, 1)$

Tabla 1

Newton

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & \\ 2 & 11 & 16 & & \\ 3 & 27 & & & \end{array}$$

$N_1(x) = -1 + 4(x+1) + (x+1)\,x\,(x-2)$

Lagrange

$l_0(x) = \frac{x\,(x-2)\,(x-3)}{(-1)(-1-2)(-1-3)} = \frac{x\,(x-2)(x-3)}{-12}$

$l_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{1\,(-2)(-3)} = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{6}$

$l_2(x) = \frac{(x+1)\,x\,(x-3)}{(2-(-1))\,2\,(2-3)} = \frac{(x+1)\,x\,(x-3)}{-6}$

$l_3(x) = \frac{(x+1)\,x\,(x-2)}{(3-(-1))\,(3)\,(3-2)} = \frac{(x+1)\,x\,(x-2)}{12}$

$L_1(x) = \frac{x\,(x-2)\,(x-3)}{12} + \frac{(x+1)\,(x-3)}{2} - \frac{11}{6}(x+1)\,x\,(x-3) + \frac{27}{12}(x+1)\,x\,(x$

Notar que agregar el punto $(4, 1)$ implica recalcular todo Lagrange

mientras que en Newton

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & -1 & 4 & 0 & 1 & -1{,}45 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & -6{,}25 & \\ 2 & 11 & 16 & -21 & & \\ 3 & 27 & -26 & & & \\ 4 & 1 & & & & \end{array}$$

$N_1^*(x) = N_1(x) + 1{,}45\,(x+1)\,x\,(x-2)\,(x-3)$

$N_1^*(4) = 1$

Construir el polinomio de taylor P_n de grado 0, 1, 2, 3 de la función x

⑥ Sea $f:[0,5] \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2^x$ y sea P_n un polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en $n+1$ puntos distintos del intervalo $0,5$, demostrar que

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{32 \, 5^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall x \in [0,5]$$

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

$$f(x) = e^{x \ln(2)} \to f'(x) = e^{x\ln(x)} \ln(2), \; f''(x) = e^{x\ln(x)} \ln(2)^2 \; \Big\} \; f^{(n)}(x) = e^{x \ln(2)} \ln(2)^n = 2^x \ln(2)^n$$

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |2^{\xi} \ln(2)^{n+1}| \Big| \underbrace{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}_{\in [0,5]} \Big| \qquad \xi \in [0,5]$$

$$\leq \frac{5^{(n+1)}}{(n+1)!} |2^{\xi} \underbrace{\ln(2)^{n+1}}_{0 < \ln(2) < 1}|$$

$$\leq \frac{5^{n+1} \, 2^5}{(n+1)!} = \frac{5^{n+1} \, 32}{(n+1)!}$$

⑦ mostrar que el error obtenido ~~cu~~ al interpolar $f(x) = \cosh(x)$ con un polinomio $P(x)$ de grado ≤ 22 en $[-1,1]$ es menor a $5 \cdot 10^{-16}$

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \quad \text{para algún } \xi \text{ en } [-1,1]$$

grado $\leq 22 \to n = 22$ (23 puntos)

$$f^{(n)} = \begin{cases} \cosh(x) & n \text{ es par} \\ \operatorname{senh}(x) & n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{23!} \left| f^{(23)}(\xi) \prod_{i=0}^{22} (x - x_i) \right|$$

$$= \frac{1}{23!} |\operatorname{senh}(\xi)| \Big| \prod_{i=0}^{22} \underbrace{(x - x_i)}_{\leq 2} \Big| \leq \frac{2^{22}}{23!} |\operatorname{senh}(\xi)|$$

Como $\operatorname{senh}(\xi)$ es creciente y continua en $[-1,1]$, su máximo esta en $x = 1$

$$\leq \frac{2^{22}}{23!} \sinh(1) \approx 3{,}8133 \cdot 10^{-16} \leq 5 \cdot 10^{-16}$$

⑧ a Sean $a < b$, m el punto medio entre a y b, $p = m - h$ y $q = m + h$ tal que $0 < h \leq \frac{b-a}{2}$, demostrar que $\forall x \in [a,b]$

$$|(x-p)(x-q)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

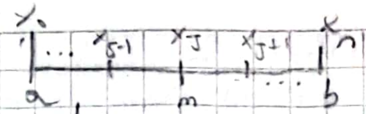
$$|(x-p)(x-q)| = |(x - (m-h))(x - (m+h))|$$
$$= |(x - m + h)(x - m - h)| = |(x-m)^2 - h^2| \leq \left| \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 - h^2 \right| \leq \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 - h^2$$
$$\leq \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{4}$$

b Sean $x_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$, $i = 0, \ldots, n$ ~~...~~ (n) $n+1$ puntos equiespaciados en $[a,b]$ demostrar que $\forall x \in [a,b]$

$$|(x - x_0) \cdots (x - x_n)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}$$

Escaneado con CamScanner

Caso 1 n: par $\quad$ $n+1$ puntos impar $\longrightarrow$ puntos impares

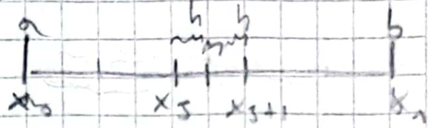


$$|(x-x_0)\dots(x-x_n)| \le \underbrace{|(x-x_j)|}_{\text{el punto del medio}}\ \underbrace{|(x-x_0)(x-x_n)|}_{\le\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}\dots\underbrace{|(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})|}_{\le\left(\frac{b-a}{4}\right)^2}$$

: puntos intervalos

$$\le \frac{b-a}{2}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2\frac{n}{2}} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$$

Caso 2 n impar $\quad$ $n+1$ puntos $\longrightarrow$ puntos pares



$$|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| = |(x-x_0)(x-x_1)|\dots|(x-x_j)(x-x_{j-1})|$$

$$\le \frac{(b-a)^2}{4}\dots\frac{(b-a)^2}{4} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\frac{2(n+1)}{2}} = \left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$\boxed{\text{Pd es } a}$

10 $f(x)=\sqrt{x}$ con un error de a lo sumo $5\cdot 10^{-8}$ usando:

ⓐ spline lineal

ⓑ interpolación cuadrática cada 3 nodos

determinar en cada caso el n mínimo de nodos, de la forma $x_i = 1+\frac{i}{n}$ $i=0,\dots$ y la longitud de h para satisfacer el error

9 ~~Se desea hallar~~ Sea $f(x)=\cos(\pi x)$, hallar un polinomio de gr ≤ 3 tal que

$$P(-1)=f(-1) \quad P(0)=f(0),\ P(1)=f(1) \quad P'(1)=f'(1)$$

$P(-1)=f(-1)=\cos(-\pi)=-1$

$P(0)=f(0)=\cos(0)=1$

repite $\begin{cases} P(1)=f(1)=\cos(\pi)=-1 \\ P'(1)=f'(1)=-\pi\operatorname{sen}(\pi)=0 \end{cases}$

x_0	-1	-1	2	-2	0
x_1	0	1	-2	2	
x_2	1	-1	$\boxed{0}$		
x_2	1	-1			

$\hookrightarrow P'(1) = -\operatorname{sen}(\pi)=0$

$$P(x) = -1+2(x+1)x - 2(x+1)x(x-1)$$

b agregar el punto $p''(1)=f''(1)$

$$p''(x) = -\cos(\pi)\pi^2 = \pi^2$$

-1	-1	2	-2	2	$(\pi^2-2)/4$
0	1	-2	2	π^2-2	
1	-1	$\boxed{0}$	$\boxed{\pi^2}$		
1	-1	0			
1	-1				

repite (últimas tres filas)

se calculan con $f'(1)$

$\hookrightarrow$ se calcula con $f''(1) = x_4 = \pi^2$

1 Construir el Polinomio de Taylor P_n de grado 0,1,2,3 de la función $\frac{1}{x}$ alrededor de $\bar{x}=1$

(1.1) Dada una tabla de valores equiespaciados de la función $F(x)=\cos(x)$ determinar el valor del paso h y el mínimo número de nodos cuando $f(x)$ es aproximada por un spline lineal en $[0,2\pi]$ con un error $\leq 5\cdot10^{-7}$

$$|e| \leq \frac{M}{8}h^2 \longrightarrow e \leq \frac{1}{8}h^2 \leq 5\cdot10^{-7} \qquad 8\cdot5\cdot10^{-7} \geq h^2$$

$$2\cdot10^{-3} = \sqrt{8\cdot5\cdot10^{-7}} \geq h$$

$\cos(x)$, $x \in [\underset{a}{0}, \underset{b}{2\pi}]$

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad 2\cdot10^{-3} = \frac{2\pi}{n} \longrightarrow n = \pi\cdot10^{3}$$

$n \geq 3140$

(1.2) a Determinar los valor α, β, γ para que S sea un spline cúbico, siendo:

$$S(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \gamma x & 0 \leq x \leq 1 \\ -\alpha x^3 + \beta x^2 - 5\alpha x + 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$S(1) = \alpha + \gamma = -\alpha + \beta - 5\alpha + 1$

$-7\alpha + \beta - \gamma = 0$ ①

$$S'(x) = \begin{cases} 3\alpha x^2 + \gamma & 0 \leq x \leq 1 \\ -3\alpha x^2 + 2\beta x - 5\alpha & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$S'(1) = 3\alpha + \gamma = -3\alpha + 2\beta - 5\alpha$

$11\alpha - 2\beta + \gamma = 0$ ②

$$S''(x) = \begin{cases} 6\alpha x & 0 \leq x \leq 1 \\ -6\alpha x + 2\beta & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$S''(1) = 6\alpha = -6\alpha + 2\beta$

$12\alpha - 2\beta = 0$ ③

$$\begin{cases} -7\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 11\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ 12\alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 1 & -1 & 0 \\ 11 & -2 & 1 & 0 \\ 12 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

c Con la terna encontrada decir si S interpola a $2^x - 0{,}5x + 0{,}5x^2 - 1$ en $[0,2]$ respecto de los nodos $\{0,1,2\}$

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{5}{2}x + 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

⊙ $f(0) = 2^0 - 0 - 1 = 0$ $\quad S(0) = 0$ interpola en 0

⊙ $f(1) = 1$ interpola en 1

$S(1) = 1$

⊙ $f(2) = 4$, $S(2) = 4$

$\int dv$

ⓒ $f(x) = e^x$ en $[0,2]$

$E(a_0, a_1) = \int_0^2 [e^x - a_0 - a_1 x]^2 dx$

$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 2\int_0^2 e^x - a_0 - a_1 x\, dx = 0$

$e^x \Big|_0^2 = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} \Big|_0^2$

① $e^2 - 1 = 2a_0 + 2a_1$

$\frac{\partial E}{\partial a_1} = 2\int_0^2 (e^x - a_0 - a_1 x)\, x\, dx = 0$

$a_0 = -3$

$e^2 + 1 = a_0 x^2 + a_1 x^3 \Big|^2$

$(e^2 - 1 = 2a_0 + 2a_1$

$a_1 x + a_0$

Unidad 4 aproximación de funciones

① obtener el ~~aprox~~ polinomio que mejor aproxima (en sentido de cuadrados mínimos)

a polinomio de grado 1 para la tabla a
b " " " 2 " " " b

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	-0.1	1.1	1.9	3.2	3.8	5.0	6.0	7.3	8.1	8.9

tabla a

X	-1	0	1	3	6
Y	6.1	2.8	2.2	6	26.9

tabla b

$$\begin{pmatrix} \Sigma x^0 & \dots & \Sigma x^n \\ \Sigma x^1 & \dots & \Sigma x^{n+1} \\ \vdots & & \\ \Sigma x^n & \dots & \Sigma x^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ⓐ $\begin{bmatrix} \Sigma x^0 & \Sigma x^1 \\ \Sigma x^1 & \Sigma x^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma y x^0 \\ \Sigma y x^1 \end{pmatrix}$

$\sum_{i=1}^{10} x_i^0 = 10$

$\sum_{i=1}^{10} x_i^1 = 45$

$\sum_{i=0}^{9} y_i x_i^0 = 45{,}2$

$\sum_{i=0}^{10} x_i^2 = 285$

$\begin{pmatrix} 10 & 45 \\ 45 & 285 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45{,}2 \\ 286{,}7 \end{pmatrix}$

$\sum_{i=0}^{9} y_i x_i = 286{,}7$

$a_0 = -\frac{13}{550}$

$a_1 = \frac{833}{825}$

$Y = \frac{833}{825} x - \frac{13}{550}$

ⓑ $\begin{bmatrix} \Sigma x^0 & \Sigma x^1 & \Sigma x^2 \\ \Sigma x^1 & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 \\ \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma x^0 y \\ \Sigma x y \\ \Sigma x^2 y \end{bmatrix}$

$\Sigma x^0 = 5$ $\quad \Sigma x^3 = 243$ $\quad \Sigma x^0 y = \Sigma y = 44$

$\Sigma x^1 = 9$ $\quad \Sigma x^4 = 1379$ $\quad \Sigma x y = 175{,}5$

$\Sigma x^2 = 47$ $\quad \Sigma x^2 y = 1030{,}7$

$\begin{bmatrix} 5 & 9 & 47 \\ 9 & 47 & 243 \\ 47 & 243 & 1379 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 175{,}5 \\ 1030{,}7 \end{bmatrix}$

$a_0 = \frac{4330}{1430}$, $a_1 = \frac{-5679}{2860}$, $a_2 = \frac{2843}{2860}$

$Y = \frac{4330}{1430} - \frac{5679}{2860} x + \frac{2843}{2860} x^2$

② Probar que si se tienen $n+1$ puntos distintos, la mejor aproximación polinomial en sentido de mín cuad) de grado n, coincide con el polinomio interpolante

$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ } un polinomio que minimice la expresión { $E(a_0, \dots a_n) = \sum_{i=0}^{n} [y_i - P_n(x_i)]^2$

P_1)

y si $P_n(x)$ es el polinomio interpolante, entonces $y_i - P_n(x_i) = 0 \rightarrow E(a_0, \dots, a) = 0$
el error es mínimo

③ hallar el polinomio de grado 0, que mejor aproxime (en sentido de cuad mín) a una función $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ en n puntos $x_1, \dots, x_n$ del intervalo $[a,b]$

$E(a_0) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0)^2$

$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0) = 0$

$0 = \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i$

$n a_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i$

$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$

es el promedio

④

x	-1	0	1	2
y	$8,1$	3	$1,1$	$0,5$
$\ln(y)$	$2,091$	$1,098$	$0,095$	$-0,693$

aproximar dicha tabla con un modelo de la forma $f(x) \sim ae^{bx}$ en el sentido de cuadrados mínimos

$$y = ae^{bx}$$

$$\ln(y) = \ln(ae^{bx}) = \underbrace{\ln(a)}_{a_0} + \underbrace{b}_{a_1}x = \ln(y)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma x^0 & \Sigma x^1 \\ \Sigma x^1 & \Sigma x^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma xy \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,591 \\ -3,382 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = \frac{2231}{2000}, \quad a_1 = \frac{-1871}{2000}$$

$$a = e^{\frac{2231}{2000}} \rightarrow \boxed{y = e^{\frac{2231}{2000}} e^{\frac{-1871}{2000}x}}$$

⑤ aproximar los datos de la tabla con una función de la forma $-e^{ax^2+bx+c}$

x	-1	0	1	2
y	$-1,1$	$-0,4$	$-0,9$	$-0,5$
$\ln(-y)$	$0,095$	$-0,916$	$-0,105$	$-0,693$

$$y = -e^{ax^2+bx+c}$$

$$\ln(-y) = \underset{a_2}{a}x^2 + \underset{a_1}{b}x + \underset{a_0}{c}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma x^0 & \Sigma x^1 & \Sigma x^2 \\ \Sigma x^1 & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 \\ \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma x^0 y \\ \Sigma xy \\ \Sigma x^2 y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,6194 \\ -1,586 \\ -2,782 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$a_0 = \frac{-43307}{100000}, \quad a_1 = \frac{-26111}{100000}, \quad a_2 = \frac{-2117}{20000}$$

$$y = -e^{\frac{-2117}{20000}x^2 + \frac{-26111}{100000}x - \frac{43307}{10000}}$$

⑥

⑦ obtener la aproximación lineal de las siguientes funciones

ⓐ $f(x) = x^2 + 3x + 2$ en $[0,1]$

$$E = \int_0^1 [x^2+3x+2 - a_1x - a_0]^2 dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 2\int_0^1 x^2+3x+2 - a_1x - a_0 \, dx = 0$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x - a_1\frac{x^2}{2} - a_0x \Big|_0^1$$

$$= \frac{23}{6} = \frac{a_1}{2} + a_0 \quad ①$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = 2\int_0^1 [x^2+3x+2 - a_1x - a_0]x \, dx = 0$$

$$= \frac{x^4}{4} + \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} + \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} - \frac{a_0}{2}x^2 - a_1\frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

$$0 = \frac{1}{4} + 1 + 1 - \frac{a_0}{2} - \frac{a_1}{3} \longrightarrow \frac{9}{4} = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3} \quad ②$$

$$\begin{cases} \frac{a_1}{2} + a_0 = \frac{23}{6} \\ \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3} = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a_0 = \frac{11}{6} \\ a_1 = 4 \end{array}$$

$$y = \frac{11}{6} + 4x$$

ⓑ $f(x) = x^2 + 3x + 2$ en $[-1,1]$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = \int_{-1}^1 x^2+3x+2 - a_0 - a_1x \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x - a_0x - a_1\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^1 = 0$$

$$= \frac{1}{3} + \cancel{\frac{3}{2}} + 2 - a_0 - \cancel{\frac{a_1}{2}} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{3}{2}} + 2 - a_0 + \cancel{\frac{a_1}{2}} = 0$$

$$\frac{14}{3} = 2a_0 \longrightarrow a_0 = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = \int_{-1}^1 (x^2+3x+2 - a_0 - a_1x)x \, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - \frac{a_0}{2}x^2 - \frac{a_1}{3}x^3\Big|_{-1}^1 = 0$$

$$\cancel{\frac{1}{4}} + 1 + 1 - \cancel{\frac{a_0}{2}} - \frac{a_1}{3} - \cancel{\frac{1}{4}} + 1 - 1 + \cancel{\frac{a_0}{2}} - \frac{a_1}{3} = 0$$

$$2 = \frac{2}{3}a_1$$

$$a_1 = 3$$

$$y = 3x + \frac{7}{3}$$

$v-\int v\,du - \int dv$

⑤ $f(x) = e^x$ en $[0,2]$

$$E(a_0,a_1) = \int_0^2 [e^x - a_0 - a_1 x]^2 dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 2\int_0^2 e^x - a_0 - a_1 x\,dx = 0$$

$$e^x\Big|_0^2 = a_0 x + a_1\frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$

$$① \quad e^2 - 1 = 2a_0 + 2a_1$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = 2\int_0^2 (e^x - a_0 - a_1 x)\,x\,dx = 0$$

$$e^2+1 = a_0\frac{x^2}{2} + a_1\frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$

$$② \quad e^2+1 = 2a_0 + \frac{8}{3}a_1$$

$$\begin{cases} e^2-1 = 2a_0 + 2a_1 \\ e^2+1 = 2a_0 + \frac{8}{3}a_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} a_0 = -3 \\ a_1 = \dfrac{e^2-7}{2} \end{array}$$

$$y = \frac{e^2-7}{2}x - 3$$

⑧ aproxime los datos, en el sentido de cuad mínimos de la form $f(x) \approx a\cos(x) + b\sin(x)$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	1,8	3,5	2,1	-1	-3,3	-2,7	0,9	3,3	2,8	-0,1	-3

$$E = \sum_{k=0}^{10} [y_i - a\cos(x_i) - b\sin(x_i)]^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{k=0}^{10}[y_k - a\cos(x_k) - b\sin(x_k)]\cos(x_k) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{k=0}^{10} 2[y_k - a\cos(x_k) - b\sin(x_k)]\sin(x_k) = 0$$

por *

$$\sum_{k=0}^{10} y_k\cos(x_k) = a\sum_{k=0}^{10}\cos^2(x_k) + b\sum_{k=0}^{10}\cos(x_k)\sin(x_k)$$

por **

$$\sum_{k=0}^{10} y_k\sin(x_k) = a\sum_{k=0}^{10}\cos(x_k)\sin(x_k) + \sum_{k=0}^{10}\sin^2(x_k)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \sum y\cos = a\sum\cos^2 + b\sum\sin\cos \\ \sum y\sin = a\sum\sin\cos + b\sum\sin^2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{10}\cos^2(x_k) & \sum_{k=0}^{10}\cos(x_k)\sin(x_k) \\ \sum_{k=0}^{10}\cos(x_k)\sin(x_k) & \sum_{k=0}^{10}\sin^2(x_k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{10} y_k\cos(x_k) \\ \sum_{k=0}^{10} y_k\sin(x_k) \end{bmatrix}$$

$$\left[\cancel{f_1^0(x) f_2^0(x) \ldots f_1^{n-1}(x) f_2^1(x) \ldots}\right]$$

$\cancel{f_1(x)}\ \cancel{f_2^0(x)} \ldots f$ notar que

$$\begin{bmatrix} \sum f_1 f_1 & \sum f_1 f_2 & \ldots & \sum f_1 f_n \\ \sum f_2 f_1 & \sum f_2 f_2 & \ldots & \sum f_2 f_n \\ \vdots & & & \\ \sum f_n f_1 & \sum f_n f_2 & \ldots & \sum f_n f_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y f_1 \\ \sum y f_2 \\ \vdots \\ \sum y f_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5{,}9986 & 0{,}3232 \\ 0{,}3232 & 5{,}0014 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}7512 \\ 16{,}0772 \end{pmatrix}$$

$$(a;b) \approx (1{,}624\ ;\ 3{,}109) \qquad y = 1{,}624\cos(x) + 3{,}109\sin(x)$$

⑨ Considere los polinomios ortogonales de Legendre $\{P_0, P_1, P_2\}$ a $[-1,1]$

$$\left.\begin{array}{l} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3} \end{array}\right\}$$

Verificar que $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\}$ es un conjunto ortogonal de funciones

$w(x) = 1 \quad \forall x \in [-1,1]$

$$\text{si } \int_{-1}^1 w(x) P_i(x) P_j(x)\,dx = \begin{cases} \alpha_j & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

P_0P_1: $\int_{-1}^1 P_0 P_1\,dx = \int_{-1}^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$$\int P_i P_j \begin{cases} \neq 0 & \text{siempre que } i = j \\ = 0 & \text{siempre que } i \neq j \end{cases}$$

P_0P_0: $\int_{-1}^1 P_0 P_0\,dx = \int_{-1}^1 dx = 1 - (-1) = 2$

P_0P_2: $\int_{-1}^1 P_0 P_2\,dx = \int_{-1}^1 x^2 - \frac{1}{3}\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}x\Big|_{-1}^1 = 0$

P_1P_2: $\int_{-1}^1 P_1 P_2\,dx = \int_{-1}^1 x\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{6}x^2\Big|_{-1}^1 = 0$

P_1P_1: $\int_{-1}^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$

P_2P_2: $\int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int_{-1}^1 x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x\Big|_{-1}^1 = \frac{4}{45} - \left(-\frac{4}{45}\right) = \frac{8}{45}$

(1.0) determinar la aprox lineal y cuadrática de $f(x) = e^x$ usando los polinomios ortogonales de Legendre en el intervalo $[-1, 1]$

Polinomio de Legendre $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$

lineal

lineal $p(x) = a_0 + a_1 P_1(x) = a_0 + a_1 x$

$$E = \int_{-1}^{1} [f(x) - P(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} (e^x - a_0 - a_1 x)^2 dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = -2 \int_{-1}^{1} e^x - a_0 - a_1 x \, dx = 0 \longrightarrow \int_{-1}^{1} e^x dx = \int_{-1}^{1} a_0 + a_1 x \, dx$$

$$e - 1/e = a_0 x + \underbrace{\frac{a_1 x^2}{2}}_{=0} \Big|_{-1}^{1} = a_0 - (-a_0) = 2a_0$$

$$a_0 = \frac{e - e^{-1}}{2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = -2 \int_{-1}^{1} (e^x - a_0 - a_1 x) x \, dx = 0 \to \int_{-1}^{1} e^x x \, dx = \int_{-1}^{1} x (a_0 - a_1 x) dx$$

$$e^x (x-1) \Big|_{-1}^{1} = \underbrace{\frac{x^2}{2} a_0}_{=0} + \frac{a_1}{3} x^3 \Big|_{-1}^{1} =$$

$$-e^{-1}(-2) = \frac{a_1}{3} - -\frac{a_1}{3} \longrightarrow \frac{2}{e} = \frac{2}{3} a_1, \quad a_1 = \frac{3}{e} \qquad y = \frac{3}{e} x + \frac{e - e^{-1}}{2}$$

Cuad todo con calculadora

$$E = \int_{-1}^{1} e^x - a_0 - a_1 x - a_2 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 = -\frac{1}{e}(2e a_0 - e^2 + 1)$$

$$= -2a_0 + e - \frac{1}{e} = 0$$

$$a_0 = \frac{e^{-1} - e}{-2}$$

notar como a_0 y a_1 no cambia respecto a la anterior

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = 0 = -\frac{2e a_1 - 6}{3e} = -\frac{2}{3} a_1 - \frac{2}{e} = 0$$

$$a_1 = -\frac{2}{e} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{e}$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_2} = 0 = \frac{e^{-1}(8e a_2 - 30e^2 + 210)}{-45}$$

$$-\frac{8}{45} a_2 + \frac{2}{3} e - \frac{14}{3e} = 0 \to a_2 = \left(-\frac{14}{3e} + \frac{2}{3} e\right) \frac{45}{8}$$

$$y = \frac{e - e^{-1}}{2} + \frac{3}{e} x + \frac{45}{8} \left[\frac{2}{3} e - \frac{14}{3e}\right] x^2$$

$uv - \int v\,du = \int u\,dv$; $u = x \to du = dx$; $dv = e^x dx \to v = e^x$; $x e^x - \int e^x dx$; $(x-1)e^x$

Teorema 1 clase 12

otra forma $y = a_0 + a_1 x + a_2 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$, $f(x) = e^x$

$$\int_{-1}^{1} \left(f(x) - \sum_{i=0}^{2} c_i P_i(x)\right)^2 dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_j} = -2 \int_{-1}^{1} \left[f(x) - \sum_{i=0}^{2} c_i P_i(x)\right] (P_j(x)) \, dx = 0 \to \int_{-1}^{1} f(x) P_j(x) dx = \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{2} c_i P_i(x) P_j(x) dx$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_j(x) dx = c_j \int_{-1}^{1} P_j(x)^2 dx \quad \text{porque} \int_{-1}^{1} P_i P_j dx = 0 \text{ si } i \neq j$$ son ortogonales

$$c_j = \frac{\int_{-1}^{1} f(x) P_j(x) dx}{\int_{-1}^{1} P_j(x)^2 dx}$$

Unidad 4 5 integración numérica

① Usando la ~~regla~~ interpolación, deducir la regla de Simpson calculando

$$I(P_2) = \int_a^b P_2(x)\,dx$$ donde $P_2(x)$ es el polinomio que interpola a f en $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i l_i(x) = f(a)\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2} + f(b)\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\int_a^b P_2(x)dx = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)dx + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\int_a^b (x-x_0)(x-x_2) + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)$$

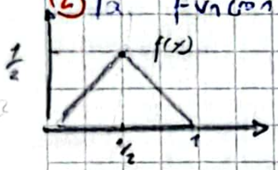
$$= f(a)\cdot\frac{b-a}{6} + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{2(b-a)}{3} + f(b)\frac{b-a}{6}$$

valor de
$x_0 = a$
$x_1 = \frac{a+b}{2}$
$x_2 = b$

$$= \frac{(b-a)/2}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

② La función f se define en el intervalo ~~como~~ $[0,1]$ como $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$

calcula $\int_0^1 f(x)dx$



a Calcular la regla del trapecio sobre $[0,1]$

tomando $x_0 = a = 0$, $x_1 = b = 1$ $\Big\}$ $\frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = \frac{1}{2}[0+0] = 0$

trapecio
$$\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

simpson
$$\frac{(b-a)/2}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

b calcular trapecio sobre $[0, 0.5]$ y luego $[0.5, 1]$

$x_0 = a = 0$ $\quad \frac{0.5}{2}[f(0) + f(0.5)] = \frac{1}{4}\cdot\left[0+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{8}$

$x_1 = \frac{a+b}{2} = 0.5$ $\quad\quad + \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$x_2 = b = 1$ $\quad \frac{0.5}{2}[f(0.5) + f(1)] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}+0\right] = \frac{1}{8}$

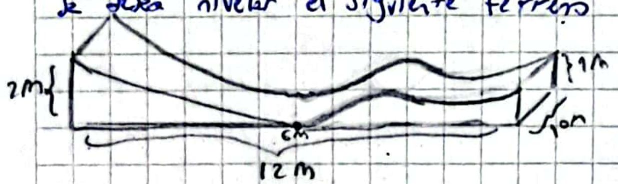
c Simpson sobre $[0,1]$

$x_0 = a = 0$ $\quad \frac{1}{6}[f(0) + 4f(0.5) + f(1)] = \frac{1}{6}\left[0 + 4\cdot\frac{1}{2} + 0\right] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$x_1 = b = 1$

③

Se desea nivelar el siguiente terreno



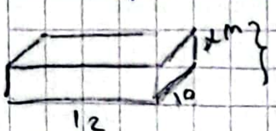
a estimar los m^3 con la regla de Simpson

a $x_0 = 0 \rightarrow f(x_0) = 2$
$\frac{a+b}{2}$ $x_1 = 6 \rightarrow f(x_1) = 0$ $\Big\}$ $\frac{12}{6}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$
b $x_2 = 12 \rightarrow f(x_2) = 1$

$2[2+1] = 6\ m^2$ área

volumen $\rightarrow 10m \cdot 6m^2 = \boxed{60m^3}$

b estimar la altura que debería tener el terreno si lo emparejamos sin remover tierra



$60m^3 = 12m \cdot 10m \cdot xm$ $\Big\}$ altura promedio, medio neto
$x = 0.5m$

$2n+1$ $\quad 2n+1 \quad n+1=3$ $(n=2)$

4) Construir una regla de la forma $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(-0{,}5) + A_1 f(0{,}5) + A_2 f(0{,}5)$ que sea exacta para polinomios de grado ≤ 2

Si grado $f(x)=0$, $f(x)=1$: $\int_{-1}^{1} dx = \boxed{2 = A_0 + A_1 + A_2}$ ①

si grado $f(x)=1$, $f(x)=x$: $\int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \boxed{0 = -0{,}5A_0 + 0{,}5A_2}$ ②

si grado $f(x)=2$, $f(x)=x^2$: $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big| \boxed{\frac{2}{3} = \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{4}A_2}$ ③

$$\begin{cases} 2 = A_0 + A_1 + A_2 \\ 0 = A_0 - A_2 \\ \frac{2}{3} = \frac{1}{4}(A_0 + A_2) \end{cases}$$

$A_0 = \frac{4}{3}$

$A_1 = -\frac{2}{3}$

$A_2 = \frac{4}{3}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{4}{3}f(-\tfrac{1}{2}) - \frac{2}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(\tfrac{1}{2})$$

5) b determinar el grado de precision para dicha formula

sabemos que es preciso si $gr(f(x)) \leq 2$

veamos si $gr=3$, $f(x)=x^3$: $\int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0$; $\frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^3 - \frac{2}{3}(0)^3 + \frac{4}{3}(\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} = 0$

es exacta para polinomios de grado $=3$

veamos si $gr=4$: $\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$; $\frac{4}{3}(\frac{-1}{2})^4 - \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^4 + \frac{4}{3}(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

no es exacta para polinomios de grado $=4$ $\longrightarrow$ grado de exactitud $=3$

5) Determinar el numero de subintervalos n, de modo que la regla del trapecio compuesta aproxime el valor de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con un error menor que $\frac{1}{2}10^{-6}$, repetir este eje con la regla de simpson compuesta

error en el trapecio comp $\quad -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)$

$$\left|\frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)\right| \leq \frac{1}{2}10^{-6} \qquad 6\,10^{-6} \geq \frac{1}{n}|f''(\mu)|$$

$$\left|\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n^2}f''(\mu)\right| \leq \frac{1}{2}10^{-6} \qquad 6\,10^{-6} \geq \frac{1}{n}\frac{2}{e}$$

$$n^2 \geq \frac{2}{e\,6}10^6$$

$$n \geq \sqrt{\frac{10^6}{3e}} = 350{,}18 \longrightarrow n \geq 351$$

$y = e^{-x^2}$

$y' = e^{-x^2}(-2x)$

$y'' = e^{-x^2}(-2x)(-2x) + e^{-x^2}(-2)$

$= e^{-x^2}((-2x)^2 + (-2))$

$= e^{-x^2}(4x^2 - 2)$

y'' es creciente a $[0,1]$

$y'' \leq f''(1) = \frac{1}{e}[4-2] = \frac{2}{e}$

error en simpson comp

$-\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\mu)$

$$\left|\frac{1}{180}\frac{1}{n^4}f^{(4)}(\mu)\right| \leq \frac{1}{180}\cdot\frac{1}{n^4}\cdot 12 \leq \frac{1}{2}10^{-6} \longrightarrow n \geq \sqrt[4]{\frac{12}{180}\cdot 2\,10^6} = 19{,}1$$

$$\boxed{n \geq 20}$$

$f^{(3)}(x) = e^{-x^2}(-2x)[4x^2-2] + e^{-x^2}[8x]$

$= e^{-x^2}[-8x^3 + 4x + 8x] = e^{-x^2}[-8x^3 + 12x]$

nota para el mismo error simpson utiliza muchos menos subintervalos

$f^{(4)}(x) = -2x\,e^{-x^2}[-8x^3 + 12x] + e^{-x^2}[-24x^2 + 12]$

$= e^{-x^2}[16x^4 - 24x^2 - 24x^2 + 12] = 4e^{-x^2}[4x^4 - 12x^2 + 3]$

$f^{(4)}(x)$ es decreciente

$f^{(4)}(x) \leq f^{(4)}(0) = 12$

Escaneado con CamScanner

⑥ Un automovil recorre una pista en 24 seg, su vel se tom cada 6 seg

tiempo	0	6	12	18	24
vel	38	41	46	48	45
	0	1	2	3	4

cual es la longitud de la pista

sabemos que $v(t) = \frac{dx}{dt}(t) \longrightarrow \int_{t_0}^{t_f} v(t)\,dt = x(t)$

calcular $\int_{t_0}^{t_f} v(t)\,dt$

usamos la regla de trapecio (compuesta) $\frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right]$

5 puntos $\longrightarrow$ 4 intervalos $h = \frac{b-a}{n} = \frac{24-0}{4} = 6$

$\frac{6}{2}\left\{f(x_0) + 2\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right] + f(x_4)\right\} = 3\left[38 + 2(41+46+48) + 45\right] = 1059\,m$

usando la regla de simpson compuesta $\frac{h}{3}\left\{f(x_0) + \text{suma pares} \cdot 2 + \text{suma impares} \cdot 4 + f(x_n)\right\}$

$\frac{h}{3} = \frac{24/4}{3} = \frac{24}{12} = 2 \longrightarrow 2\left[38 + 2\cdot 46 + 4(41+48) + 45\right] = 1062\,m$

⑦ calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ mediante una regla de cuadratura de la forma $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) \sum_{k=1}^{3} A_k f(x_k)$

que sea exacta para polinomios de grado ≤ 5

exacta para grado $\leq 5 \Rightarrow$ $2n+1 = 5 \longrightarrow n = 2$

tomamos los polinomios de Legendre $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = x$, $\phi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$, $\phi_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$

porque $\phi_n(x)$ es ortogonal a todo polinomio de grado $\leq n$

tomamos $\phi_{n+1}(x)$ y como $n=2 \longrightarrow$ tomamos $\phi_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$

sabemos que x_1, x_2, x_2 seran las raices de $\phi_3(x) = 0$ es decir $\begin{cases} x_0 = -\frac{\sqrt{15}}{5} & x_0 \\ x_1 = 0 & x_1 \\ x_2 = \frac{\sqrt{15}}{5} & x_2 \end{cases}$

ahora para calcular A_k

$A_k = \int_{-1}^{1} l_k(x)\,dx$

A_1 $\int_{-1}^{1} \frac{x-0}{-\frac{\sqrt{15}}{5}-0} \cdot \frac{x+\frac{\sqrt{15}}{5}}{-\frac{\sqrt{15}}{5}-\frac{\sqrt{15}}{5}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\frac{\sqrt{15}}{5}} \cdot \frac{\left(x - \frac{\sqrt{15}}{5}\right)}{2\frac{\sqrt{15}}{5}}\,dx$

$= \frac{1}{2\frac{15}{25}} \int_{-1}^{1} x^2 - x\frac{\sqrt{15}}{5}\,dx = \frac{5}{6}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} - \frac{\sqrt{15}}{5}\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}\right]$

$= \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6}\frac{\sqrt{15}}{5}\,0 = \frac{5}{9}$ A_0

A_2 $\int_{-1}^{1} \frac{x+\frac{\sqrt{15}}{5}}{\frac{\sqrt{15}}{5}} \cdot \frac{x-\frac{\sqrt{15}}{5}}{-\frac{\sqrt{15}}{5}}\,dx$

$-\frac{1}{\frac{15}{25}} \int_{-1}^{1} \left(x + \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\left(x - \frac{\sqrt{15}}{5}\right)dx = -\frac{5}{3}\int_{-1}^{1} x^2 - \frac{15}{25}\,dx = -\frac{5}{3}\int_{-1}^{1} x^2\,dx + \frac{5}{3}\cancel{\frac{15}{25}}\int_{-1}^{1} dx = -\frac{10}{9} + 2 = \frac{8}{9}$ A_1

A_3 $\int_{-1}^{1} \frac{x+\sqrt{15}/5}{\frac{\sqrt{15}}{5}+\frac{\sqrt{15}}{5}} \cdot \frac{x-0}{\frac{\sqrt{15}}{5}}\,dx = \frac{1}{2\cdot\frac{15}{25}} \int_{-1}^{1} x^2 + \frac{\sqrt{15}}{5}x\,dx = \frac{5}{6}\int_{-1}^{1} x^2\,dx + \frac{\sqrt{15}}{6}\int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{15}}{6}\cdot 0 = \frac{5}{9}$ A_2

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$$

comprobemos

$\int_{-1}^{1} \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)\Big|_{-1}^{1} \approx 1{,}6829$

$\frac{5}{9}\cos\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9}\cos(0) + \frac{5}{9}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) \approx 1{,}6830$

Unidad 6 sistemas lineales

① Resolver los siguientes sistemas de la forma $Ax=b$

a $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}10\\13\\6\end{bmatrix}$

$x_3=1$

$13=4x_2+5x_3=4x_2+5 \longrightarrow x_2=2$

$10=x_1+2x_2+3x_3=x_1+4+3 \longrightarrow x_1=3$

$x=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$

b $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\-1&5&-3\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}2\\8\\0\end{bmatrix}$

$x_1=2$, $2x_2=8 \longleftrightarrow x_2=4$ $\Big\}$ $-x_1+5x_2-3x_3=0$

$-2+5\cdot4-3x_3=0 \longrightarrow x_3=\frac{18}{6}=3$

$x^T=(2,4,3)$

③ mostrar que el costo total de operaciones por el método de eliminación gaussiana para resolver el sistema $Ax=b$, con $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

For $k=1,\dots,n-1$ $\quad\sum_{k=1}^{n-1}$

For $i=k+1,\dots,n$ $\quad\sum_{i=k+1}^{n}$

if $a_{kk}=0$ stop

1 prod → $m \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$

for $j=k+1,\dots,n$ $\quad\sum_{j=k+1}^{n}$

1 prod 1 suma → $a_{ij}\leftarrow a_{ij}-m a_{ik}$

end for j

$b_i \leftarrow b_i - m b_k$ ← 1 prod 1 suma

end for i

end for k

for j: 2 operaciones $\quad\sum_{j=k+1}^{n} 2 = 2[n-k]$

for i: $\underbrace{1 \text{ operaciones}}_{1\text{ prod}}$ + bloque j + $\underbrace{2 \text{ operaciones}}_{1\text{ prod, }1\text{ suma}}$

$$\sum_{i=k+1}^{n} 1+2(n-k)+2 = [3+2(n-k)](n-k)$$

for k: for i $(n-1)$ veces

$$\sum_{k=1}^{n-1}[3+2(n-k)](n-k)=\sum_{k=1}^{n-1}3[n-k]+\sum_{k=1}^{n-1}2[n-k]^2$$

$$=\frac{3}{2}n(n-1)+\frac{2n(n-1)(2n-1)}{6}\approx\frac{2}{3}n^3\to O(n^3)$$

estoy usando que

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

④ Considere el sistema lineal $Ax=b$ donde $A=\begin{bmatrix}2&-2&1\\1&1&3\\0&4&1\end{bmatrix}$ y $b=\begin{bmatrix}-1\\6\\9\end{bmatrix}$

ⓐ encontrar una solución del sistema con eliminación gaussiana

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&-1\\1&1&3&6\\0&4&1&9\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&-4&-5&-13\\1&1&3&6\\0&4&1&9\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&-4&-4\\1&1&3&6\\0&1&1/4&9/4\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&1\\1&0&11/4&15/4\\0&1&1/4&9/4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&1\\1&0&0&1\\0&1&0&2\end{array}\right)$$

$x=(1,2,1)$

ⓑ Encontrar la descomposición LU

$$\begin{bmatrix}2&-2&1\\1&1&3\\0&4&1\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\1/2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}2&-2&1\\0&2&5/2\\0&0&-4\end{bmatrix}}_{U}$$

c repetir el punto Ⓐ para $b=(-2,1,3)^T$ y $(-10,4,3)^T$

$LUx=b$

$Ux=y$

$Ly=b$

$Ly=b$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0.5&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\longrightarrow \begin{array}{l}y_1=-2\\y_2=2\\y_3=-1\end{array}$$

$Ux=y$

$$\begin{pmatrix}2&-2&1\\0&2&2.5\\0&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}\longrightarrow \begin{array}{l}x_3=1/4\\x_2=11/16\\x_1=-7/16\end{array}$$

(5) Demostrar las siguientes afirmaciones

a el producto de matrices triang inf/sup es triang inf/sup y si las mat tienen 1's en su diag, su producto también los tiene

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ambas triang inf. $a_{ij} = \begin{cases} 0 & si\ i > j \\ a_{ij} & si\ i \leq j \end{cases}$ $b_{ij} = \begin{cases} 0 & si\ i > j \\ b_{ij} & si\ i \leq j \end{cases}$

entonces

$$AB_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \underbrace{\sum_{k=1}^{j} a_{ik} b_{kj}}_{\substack{k \leq j \leq i \\ \rightarrow a_{ik} = 0 \\ \text{porque } k \leq i}} + \sum_{k=j+1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \underbrace{\sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj}}_{\substack{j < i \leq k \leq n \\ b_{kj} = 0 \\ \text{porque } j < k}}$$

falto terminar estas demostraciones

b La inversa de una triang inf (sup) es triang inf/sup y si la matriz tiene 1's en su diag la inversa también

c Sea $A = LU$, si L tiene 1's en su diag, y los elementos en la diag de U son no nulos ($det(U) \neq 0$) la desc LU es única

Planteamos 2 descomposiciones LU distintas $\begin{cases} L_1 U_1 = A \\ L_2 U_2 = A \end{cases}$ tal que
- L_1, L_2 son triang inf con 1's en la diag
- U_1, U_2 son triang sup con $det(U_1) det(U_2) \neq 0$

$A = L_1 U_1 = L_2 U_2$

$U_1 = L_1^{-1} L_2 U_2$ 1) L_1^{-1} es invertible por ser triang inf con 1's en la diag

$U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2$ 2) U_2^{-1} es invertible por ser triang con elementos en la diag no nulos

luego U es triang sup, y U_2^{-1} también es triang sup (por ser inversa de una triang sup Teorema b) y al ser un producto de matrices triangulares sup → es triang sup

Por otro lado L_2 es triang inf y L_1^{-1} también (por ser inversa de L_1 que es triang inf) por ser un prod de matrices triang inf es triang inf y al tener 1's en la diag, (por ser prod de mat con 1's en la diag teorema a y b)

$U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2$ → debe ser triang sup, → debe ser triang inf, → debe tener 1's en la diag $\Bigg\}$ $U_1 V_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 = Id$

$\Rightarrow U_1 U_2^{-1} = Id \longrightarrow U_1 = U_2$

la descomposición es única $\Rightarrow L_1^{-1} L_2 = Id \longrightarrow L_1 = L_2$

6 verdadero o falso

a Sea $A = LU$ entonces $\det(A) = \det(U)$ Verdadero

verdar. Puesto que $\det(A) = \det(L)\det(U)$ y como $\det(L) = 1$ por ser triang inf con 1s en su diag $\det(A) = \det(U)$

b la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no tiene desc LU Verdadero

c la matriz $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ no tiene desc LU $= IU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$

7 Probar que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & r & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ tiene desc LU unica para $r \neq 0$ pero infinitas para $r = 0$

si $r \neq 0$

$\det(A) = 3r \neq 0 \implies \det(L)\det(U) \neq 0 \implies$ la descomposicion LU es unica

si $r = 0$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3-2a \end{bmatrix}}_{U}$

notar que entonces $\exists$ infinitas matrices L, U que cumplen las condiciones

8 $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \overbrace{L+D+U}^{A} = M - N \\ = M - N \\ N = -D \end{array}\right\}$ $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

metodo Jacobi

$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

por teorema 5 clase 18 si; $\rho(M^{-1}N) < 1$, el metodo $x^{k+1} = (M^{-1}N)x^k + M^{-1}b$ converge $\forall x^0$

ρ ↳ mayor autovalor en valor absoluto

autovalores de $M^{-1}N$

$Av = \lambda v \longrightarrow (A - \lambda Id)v = 0$ ~~eso~~ como $v \neq 0 \longrightarrow \det(A - \lambda Id) = 0$

$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}\right) = 0 \longrightarrow \lambda(\lambda + 1) = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

entonces como $|\lambda_2| \geq 1$ no tenemos garantizada la convergencia independiente de $x^{(0)}$

- autovector para λ_2 $(\underbrace{M^{-1}N - (-1)Id}_{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}})v = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = v_{21} + v_{22} = 0$

$v_{21} = -v_{22}$

$= a(1, -1)$

Escaneado con CamScanner

50

9 Dados el sistema $Ax=b$ donde $A=\begin{bmatrix}3&2\\1&2\end{bmatrix}$ y $b=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$

a deducir el metodo de Jacobi y Gauss-Seidel

b determine si $\{x^{(k)}\}$ generada por Jacobi converge, justifique

$$Ax=b$$
$$(M-N)x=b$$
$$Mx-Nx=b$$
$$MA=Nx+b$$
$$x=(M^{-1}N)x+M^{-1}b$$
$$x^{k+1}=(M^{-1}N)x^{(k)}+M^{-1}b \quad k\geq 0$$

la diferencia es como se forman M y N

en Jacobi $M=(\diagdown)$, $N=-(\triangle\nabla)$

en Gauss-Seidel $M=(\triangle)$, $N=-(\nabla)$

a.1 Jacobi $M=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$ $N=-\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\-1&0\end{pmatrix}$

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&0\\0&1/2\end{pmatrix}\longrightarrow M^{-1}N=\begin{pmatrix}0&-2/3\\-1/2&0\end{pmatrix}$$

$$M^{-1}b=\begin{pmatrix}5/3\\3/2\end{pmatrix}$$

$$x^{(k+1)}=\begin{bmatrix}0&-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}x^{(k)}+\begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix} \quad (k\geq 0)$$

a.2 Gauss Seidel

$$M=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix} \quad M^{-1}N=\begin{pmatrix}0&-\frac{2}{3}\\0&1/3\end{pmatrix}$$

$$M^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&0\\-\frac{1}{6}&1/2\end{pmatrix} \quad M^{-1}b=\begin{pmatrix}5/3\\2/3\end{pmatrix}$$

$$x^{(k+1)}=\begin{bmatrix}0&-\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}x^{(k)}+\begin{bmatrix}5/3\\2/3\end{bmatrix} \quad (k\geq 0)$$

b note que $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}$ es diagonalmente dominante luego por teorema 2 (clase 18), el metodo de Jacobi converge independientemente de x^0

si $A\in\mathbb{R}^{2\times2}$, $\det(A)\neq 0$ — $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}a_{22}&\dots\end{pmatrix}$

10 Considere la matriz A, ~~tal~~ $A=\begin{bmatrix}4&3&0\\2&4&-1\\0&-1&4\end{bmatrix}$

a deducir la iteración de Jacobi para $Ax=b$ para algún vector $b\in\mathbb{R}^3=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}4&3&0\\2&4&-1\\0&-1&4\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}}_{M}-\underbrace{\begin{bmatrix}0&-3&0\\-2&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}}_{N}$$

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}1/4&0&0\\0&1/4&0\\0&0&1/4\end{bmatrix},\quad M^{-1}N=\begin{bmatrix}0&-3/4&0\\-\frac{1}{2}&0&1/4\\0&1/4&0\end{bmatrix}$$

$$M^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$x^{(k+1)}=(M^{-1}N)x^{(k)}+M^{-1}b=\begin{bmatrix}0&-3/4&0\\-1/2&0&1/4\\0&1/4&0\end{bmatrix}x^{(k)}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\quad k\geq 0$$

b Para que valores de x^0, b, converge el metodo
el metodo converge independientemente del vector $x^{(0)}$ en el metodo de Jacobi, esto porque la matriz es diagonalmente dominante

11 Sea A una matriz $\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ~~probar que~~ triang sup, e invertible. Probar que el metodo converge en a lo sumo n pasos

12 para que valores de a, el metodo de Gauss-Seidel converge

$$A=\begin{bmatrix}1&a&a^2\\a&1&a\\a^2&a&1\end{bmatrix}$$

Teorema 4 si A es diagonalmente dominante entonces la sucesión generada por el metodo de G-S converge independientemente de la solución inicial x_0

luego $1>|a|+a^2$ $\quad \frac{1}{2}>a>-\frac{1}{2}$ luego
$1>2|a|$ ~~pero solo esta~~

13 Hallar la solución al sistema $\begin{bmatrix}1&3&2\\0&1&-15\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\-13\\1\end{bmatrix}$ con algún metodo iterativo

Con Jacobi $M=Id$, $N=\begin{bmatrix}0&-3&-2\\0&0&15\\0&0&0\end{bmatrix}$

$M^{-1}=M$ $\quad M^{-1}N=N$ $\quad M^{-1}\begin{bmatrix}11\\-13\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&0&0\\0&13&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ luego $x^{(k+1)}=\begin{bmatrix}0&-3&-2\\0&0&15\\0&0&0\end{bmatrix}x^{(k)}+\begin{bmatrix}11&0&0\\0&-13&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

14 $\begin{cases}x+2y-2z=7\\x+y+z=2\\2x+2y+z=5\end{cases}$

solución $(x,y,z)=(1,2,-1)$

a mostrar que el metodo de Jacobi converge en un num finito de iteraciones, si se comienza con $x^0=0$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{bmatrix},\ M=Id,\ N=\begin{bmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{bmatrix},\quad M^{-1}N=N$$

$x^{(k+1)}=b+Nx^{(k)}\quad k\geq 0)$

luego $x^{(1)}=b=(7,2,5)$

$$x^{(2)}=\begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-12\\-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\-10\\-13\end{pmatrix},\quad x^{(3)}=\begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\-10\\-13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\0\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

unidad 7

① $f(x,y) = 2x + y$

$f(x,y) = a$

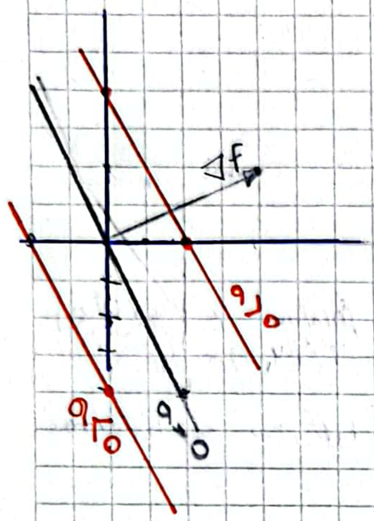
$2x + y = a$

$y = a - 2x$

$a = 0 \rightarrow y = -2x$

$a = 2 \quad y = 2 - 2x = 2(1-x)$

$a = -2 \quad y = -2 - 2x = -2(x+1)$



$\text{grad } f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2,1)$

② Transforma los problemas a su forma estandar

a ~~minimiza~~ maximiza $z = 3x_1 + 5x_2 - 4x_3$

Sa

~~$7x_1 - 2x$~~

$7x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 4$

$-2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -3$

$5x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 9$

$x_1 \geq 1, \quad x_2 \leq 7, \quad x_3 \geq 0$

ⓔ

$x_1 \geq 1 \longleftrightarrow \bar{x}_1 = x_1 - 1$

$x_1 = \bar{x}_1 + 1$

ⓕ $x_2 \leq 7$

$x_2 + S_3 = 7$

$x_2 = \bar{x}_2 - x_2^*, \quad \bar{x}_2, x_2^* \geq 0$

ⓓ $5x_1 - 3x_2 - 2x_3 + S_2 = 9$

ⓒ $2x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 3$

ⓑ $7x_1 - 2x_2 - 3x_3 - S_1 = 4$

ⓐ $\min -z = -3x_1 - 5x_2 + 4x_3$

Juntando todo

$\min \bar{z} = -3(\bar{x}_1 - 1) - 5(\bar{x}_2 - x_2^*) + 4x_3$

Sa

$-7\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 - 2x_2^* + 3x_3 - S_1 = 3$

$2\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 + 4x_2^* + 8x_3 = 1$

$5\bar{x}_1 - 3\bar{x}_2 + 3x_2^* - 2x_3 + S_2 = 4$

$\bar{x}_2 - x_2^* + S_3 = 7$

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_2^*, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

$+2$

$+5$

b minimiza $z = x_1 - 5x_2 - 7x_3$

Sa

$5x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq 5$

$3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 3$

$7x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 9$

$x_1 \geq -2, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \text{ libre}$

ⓐ $5x_1 - 2x_2 + 6x_3 - S_1 = 5$

ⓑ $7x_1 + 3x_2 + 5x_3 + S_2 = 9$

$x_1 \geq -2 \rightarrow \bar{x}_1 = x_1 + 2$

$x_1 = \bar{x}_1 - 2$

x_3 libre, $x_3 = \bar{x}_3 - x_3^*$

minimiza $z = \bar{x} + 2 - 5x_2 - 7(\bar{x}_3 - x_3^*)$

Sa

$-10 \quad 5\bar{x}_1 + 4x_2 + 6\bar{x}_3 - 6x_3^* - S_1 = 15$

$-6 \quad 3\bar{x}_1 + 4x_2 + 9\bar{x}_3 - 9x_3^* = 9$

$7\bar{x}_1 + 3x_2 + 5\bar{x}_3 - 5x_3^* + S_2 = 23$

$\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3, x_3^*, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

$\frac{30}{3}$ $\frac{4}{3}$

5,33

4

3 Resolver gráficamente

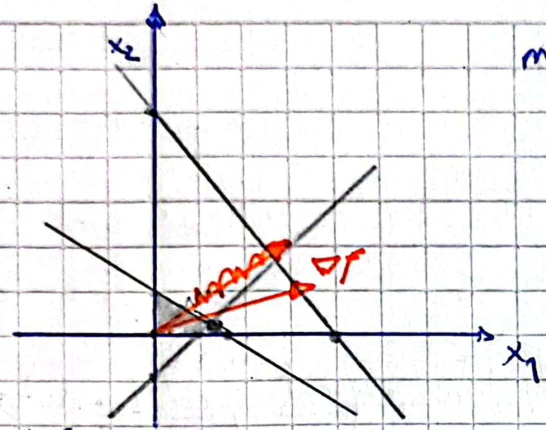
a ~~max~~ min $z = 3x_1 + x_2$

sa $x_1 - x_2 \leq 1$

$2x_1 + 3x_2 \leq 3$

$3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$



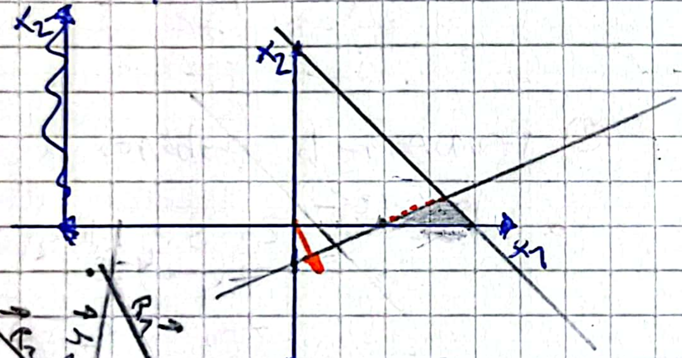
mínimo z en (0,0)

b min $z = x_1 - 2x_2$

sa $x_1 - 2x_2 \geq 4$

$x_1 + x_2 \leq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$



mínimo z en (4,0)

$z f(4,0) = 4$

infinitos sol óptimos

c max $z = x_1 + 2x_2$

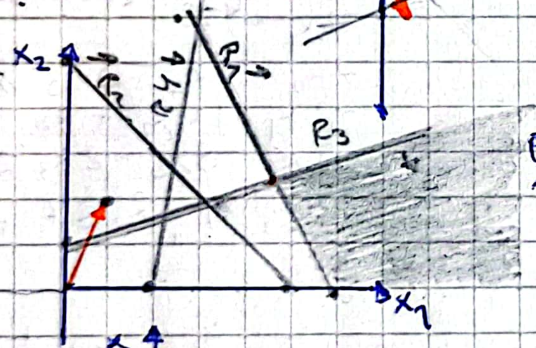
sa $2x_1 + x_2 \geq 12$

$x_1 + x_2 \geq 5$

$-x_1 + 3x_2 \leq 3$

$6x_1 - x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$



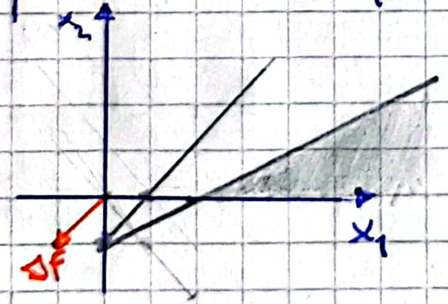
problema no acotado

d min $z = -x_1 - x_2$

sa $x_1 - x_2 \geq 1$

$x_1 - 2x_2 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$



problema no acotado

$x - y \geq 1$

$y = x - 1$

$y = \frac{x - 2}{2}$

Escaneado con CamScanner