1

a)

$$\sqrt{x^2+1}-x = O\left(\frac{1}{x}\right),\ x\to\infty \iff \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\frac{1}{x}} = c, \quad c>0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x\sqrt{x^2+1}-x^2$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x\sqrt{x^2+1}-x^2)(x\sqrt{x^2+1}+x^2)}{x\sqrt{x^2+1}+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x^2+1)-x^3}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left[(x^2+1)-x^2\right]}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{x^2}}_{\to 0}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} > 0$$

$\therefore$ QED

b)

$$\frac{|x-fl(x)|}{|x|} = \varepsilon$$

$$|x-fl(x)| = \varepsilon|x| \implies \underbrace{x-fl(x)=\varepsilon|x|}_{\text{caso 1}} \ \vee \ \underbrace{x-fl(x)=-\varepsilon|x|}_{\text{caso 2}}$$

Caso 1

$$x - f(x) = \varepsilon|x| \quad \text{si} \quad x \geq f(x)$$

$x > 0$

$$x - f(x) = \varepsilon x$$
$$x - \varepsilon x = f(x)$$
$$x(1-\varepsilon) = f(x)$$

$x < 0$

$$x - f(x) = -\varepsilon x$$
$$x + \varepsilon x = f(x)$$
$$x(1+\varepsilon) = f(x)$$

Caso 2 $\quad x - f(x) = -\varepsilon|x| \quad \text{si} \quad x < f(x)$

$x > 0$

$$x - f(x) = -\varepsilon x$$
$$x + \varepsilon x = f(x)$$
$$(1+\varepsilon)x = f(x)$$

$x < 0$

$$x - f(x) = \varepsilon x$$
$$x - \varepsilon x = f(x)$$
$$x(1-\varepsilon) = f(x)$$

Entonces:

$$x \geq f(x) \wedge x > 0 \implies f(x) = (1-\varepsilon)x$$
$$x < f(x) \wedge x < 0 \implies f(x) = (1-\varepsilon)x$$

② a) Hallar la raíz de f significa encontrar $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$, es decir encontrar la solución de:

$$e^{\bar{x}} - 1 - 2\bar{x} = 0 \qquad (1)$$

Es de notar que despejando:

$$\bar{x} = \frac{e^{\bar{x}}}{2} - \frac{1}{2}$$

Entonces si defino $g_1(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2}$, entonces encontrar $\bar{x}$ se vuelve problema de punto fijo, es decir que ⊛ encontrar $\bar{x}$ tal que $g(\bar{x}) = \bar{x}$, osea el $\bar{x}$ que esuelve:

⊛ se quiere

$$\bar{x} = \frac{e^{\bar{x}}}{2} - \frac{1}{2}$$

Análogamente despejando 1:

$$\bar{x} = \ln(2\bar{x}+1)$$

Entonces si defino $g_2(x) = \ln(2x+1)$, análogamente a lo anterior, tengo un problema de punto fijo.

g_1, g_2 son las funciones de iteración.

b) Elijo g_2.

$$g'(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot 2$$

¿Para qué valores existe $0 \leq k < 1$ tal que $|g'(x)| < k$?

$$\left|\frac{2}{2x+1}\right| < 1$$

$$2 < |2x+1|$$

Scanned with CamScanner

Si $x \geq -\frac{1}{2} \rightsquigarrow 2x+1 > 2$ $\quad \vee \quad$ $2x+1 < -2 \leftarrow$ Si $x < -\frac{1}{2}$

$$x > \frac{1}{2} \quad \vee \quad x < -\frac{3}{4}$$

Entonces $|g'(x)| \leq K$ con $0 < K < 1$ $\forall x \in I_1 = (-\infty, -\frac{3}{4}) \cup (\div, \infty)$

Por otro lado:

La función $\ln(x)$ es creciente para todo x de su dominio, análogamente g es creciente $\forall x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$. Por lo tanto g es creciente $\forall x \in [1,2]$. Notemos que:

$$\left.\begin{array}{l} g(1) = \ln(3) \approx 1{,}09 > 1 \\ g(2) = \ln(5) \approx 1{,}60 < 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow g(x) \in [1,2] \ \forall x \in [1,2] \ (\alpha)$$

$\hookrightarrow$ pues es creciente

Al ser un logaritmo, $g(x)$ es continua en $[1,2]$ (β)

Si $|g'(x)| \leq K$ con $0 < K < 1$ $\forall x \in I_1$. Entonces siendo $I_2 = (1,2) \subset I_1$:

$$|g'(x)| \leq K \text{ con } 0 < K < 1 \ \forall x \in (1,2). \quad (\gamma)$$

Además $g'(x)$ existe $\forall x \neq -\frac{1}{2} \Longrightarrow g'(x)$ existe $\forall x \in (1,2)$ $\quad (\delta)$

Las proposiciones (α), (β), (γ), (δ) cumplen las hipótesis del teorema, por lo tanto existe p punto fijo de g en $[1,2]$ y es único.

Si existe p y es único en $[1,2]$, por teorema, el método de iteración de punto fijo en $[1,2]$ converge a p.

3

$$\sum_{i=0}^{n}[f(x)-f(x_i)]\cdot L_i(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x)\cdot L_i(x)-\sum_{i=0}^{n}f(x_i)\cdot L_i(x)$$

$$=f(x)\sum_{i=0}^{n}L_i(x)-\sum_{i=0}^{n}f(x_i)\cdot L_i(x)$$

Si $p(x)$ interpola a $f(x)$ en $x_0,\dots,x_n$, entonces escrito como polinomio de lagrange:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)\cdot L_i(x)$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=0}^{n}[f(x)-f(x_i)]L_i(x)=f(x)\underbrace{\sum_{i=0}^{n}L_i(x)}_{=1}-\sum_{i=0}^{n}f(x_i)\cdot L_i(x)=f(x)-p(x)$$

Scanned with CamScanner