TEOREMA DE COINCIENCIA

EXPRESIONES ENTERAS ($\forall$ w $\in$ FV (e). σw = σ’ w) entonces $[[e]]\sigma = [[e]]\sigma'$

LÓGICA DE PREDICADOS

Hipótesis ($\forall$ w $\in$ FV (p). σw = σ’ w)

Tesis [[p]]σ = [[p]]σ‘

Prueba por inducción en la estructura de c. Los casos son todos directos excepto:

Caso $p = \forall v. p_0$

$[[\forall v. p_0]]\sigma = min\{ [[p_0]][\sigma|v: n] : n \in Z \}$

$[[\forall v. p_0]]\sigma' = min\{ [[p_0]][\sigma'|v: n] : n \in Z \}$

Hay que ver que $[[p_0]][\sigma|v: n]$ = $[[p_0]][\sigma' |v: n]$ para todo n
Para concluir esto desde la HI aplicada a p_0 necesario verificar ($\forall$ w $\in$ FV (p_0). $[\sigma|v: n]$w = $[\sigma' |v: n]$ w)
Hagamos esta verificación por casos:

$w \in FV(p_0)$ y $v = w$: $[\sigma|v{:}\,n]w = n = [\sigma'|v{:}\,n]w$

$w \in FV(p_0)$ y $v \ /= w$ $(w \in FV(p))$: $[\sigma|v{:}\,n]w = \sigma w = \sigma' w = [\sigma'|v{:}\,n]w$

Luego por HI $[[p_0]][\sigma|v{:}\,n] = [[p_0]][\sigma'|v{:}\,n]$ para todo n

COMANDOS

Hipótesis $(\forall w \in FV(c).\ \sigma w = \sigma' w)$

Tesis

1

- $[[c]]\sigma = \bot = [[c]]\sigma'$ o
- $[[c]]\sigma \neq \bot \neq [[c]]\sigma'$ y $\forall w \in FV(c).\ [[c]]\sigma w = [[c]]\sigma' w$

2 $[[c]]\sigma \neq \bot \Rightarrow \forall w \notin FA(c)\ [[c]]\sigma w = \sigma w.$

Inducción en la estructura de c , se prueba 1 y 2 simultáneamente

Caso $c = (v := e)$ Recordamos: $[[c]]\sigma = [\sigma|v: [[e]]\sigma]$
Prueba de 1

Tenemos: [[c]]σ ≠⊥≠ [[c]]σ’ . Para concluir 1 verificamos por casos todas las posibilidades para w:

v=w TC Intexp

$[[c]]\sigma w = [\sigma|v: [[e]]\sigma]w = [[e]]\sigma = [[e]]\sigma' = [\sigma' |v: [[e]]\sigma']w = [[c]]\sigma' w$

v≠w Hipotesis

$[[c]]\sigma w = [\sigma|v: [[e]]\sigma]w = \sigma w = \sigma' w = [\sigma' |v: [[e]]\sigma']w = [[c]]\sigma' w$

Prueba de 2: w ∉ FA(c) => $w \neq v$

$[[c]]\sigma w = [\sigma|v: [[e]]\sigma]w = \sigma w$

Caso $c = c_0; c_1$ Recordamos : $[[c]]\sigma = [[c_1]]_{\perp\perp}([[c_0]]\sigma)$

Subcaso $[[c_0]]\sigma = \perp$

Por HI $[[c_0]]\sigma' = \perp$ por lo tanto 1 sale trivial, porque $[[c]]\sigma = [[c_1]]_{\perp\perp}([[c_0]]\sigma) = \perp$
Para 2 no hay nada que probar.

Subcaso $[[c_0]]\sigma = \sigma_0$ y $[[c_1]]\sigma_0 = \perp$

Tenemos que $[[c]]\sigma = [[c_1]]_{\perp\perp}([[c_0]]\sigma) = [[c_1]]_{\perp\perp}(\sigma_0) = [[c_1]]\sigma_0 = \perp$.
Luego para 1 debemos demostrar que $[[c]]\sigma' = \perp$. Para 2 no hay nada que probar

Por HI aplicada a c_0 (note que $FVc_0 \subseteq FVc$) tenemos:

1 $[[c_0]]\sigma' \neq \perp$ y $\forall$ w $\in$ FV (c_0). $[[c_0]]\sigma w = [[c_0]]]\sigma' w$
2 $\forall$ w $\notin$ FA (c_0). $[[c_0]]\sigma w = \sigma w$

Sea $\sigma'_0 = [[c_0]]\sigma'$. Para aplicar la HI a c_1, σ_0, σ'_0 debemos verificar: $\forall$ w $\in$ FV (c_1). $\sigma_0 w = \sigma'_0 w$

Verifiquemos por casos:
Si $w \in FVc_0$ entonces $\sigma_0 w = \sigma'_0 w$ por HI 1 sobre c_0
Si $w \notin FVc_0$ entonces $w \notin FAc_0$ *entonces* $\sigma_0 w = \sigma w = \sigma' w = \sigma'_0 w$ por HI 2 sobre c_0

Luego $[[c]]\sigma' = [[c_1]]_{\perp\perp}([[c_0]]\sigma') = [[c_1]]\sigma'_0 = \perp$ por HI aplicada a c_1

Subcaso $[[c_0]]\sigma = \sigma_0$ y $[[c_1]]\sigma_0 = \sigma_1$

La misma verificación hecha en el subcaso anterior nos permite aplicar HI sobre c_1, σ_0, σ'_0. Entonces,
Prueba de 1 : sea $w \in FVc$:

$[[c]]\sigma w = [[c_1]]_{\perp\perp}([[c_0]]\sigma)\, w = [[c_1]]\sigma_0 w = [[c_1]]\sigma'_0 w = [[c]]\sigma' w$ Por HI sobre c_1

Prueba de 2: sea $w \notin FAc$ Entonces $w \notin FAc_0$ y $w \notin FAc_1$. Por HI 2 sobre c_0 y c_1

$[[c]]\sigma w = [[c_1]]_{\perp\perp}([[c_0]]\sigma)\, w = [[c_1]]\sigma_0 w = \sigma_0 w = [[c_0]]\sigma\, w = \sigma w$

Caso $c = while\ e\ do\ c_0$. Recordemos: $[[while\ e\ do\ c]]\sigma = \bigcup_{i\geq 0} F^{i} \perp \sigma$

$F\, w\, \sigma =$

$w_{\perp\perp}([[c]]\sigma)$ si $[e]\sigma$

σ cc

Realizamos una nueva inducción en i (reemplazamos $[[c]]\sigma$ por $F^{i} \perp \sigma$)

Hipótesis $(\forall w \in FV(c).\ \sigma w = \sigma' w)$

Tesis

1

- $F^{i} \perp \sigma = \perp = F^{i} \perp \sigma'$ o
- $F^{i} \perp \sigma \neq \perp \neq F^{i} \perp \sigma'$ y $\forall w \in FV(c).\ F^{i} \perp \sigma\, w = F^{i} \perp \sigma'\, w$

2 $F^{i} \perp \sigma \neq \perp \Rightarrow \forall w \in FA(c)\ \ F^{i} \perp \sigma w = \sigma w.$

El caso i=0 es trivial.

Supongamos válido para n. Si $F^{n+1} \perp \sigma = \perp$ entonces es inmediato, ya que $F^{n} \perp \sigma = \perp$

Supongamos $F^{n+1} \perp \sigma = \sigma_1$. Si $[[b]]\sigma$ entonces es inmediato, ya que $\sigma = \sigma_1$.

Supongamos que $\neg[[b]]\sigma$

Entonces $\sigma_1 = F^{n+1} \perp \sigma = F(F^{n} \perp)\sigma = F^{n} \perp ([[c_0]]\sigma)$

Por HI sobre c_0 tenemos que $\sigma_0 = [[c_0]]\sigma$ y $\sigma'_0 = [[c_0]]\sigma'$ coinciden en FV c

Por HI sobre n tenemos que $F^{n} \perp \sigma_0\ F^{n} \perp \sigma'_0$ satisface 1 y 2.