Guía 7 - Lenguaje y compiladores

0. En este práctico las variables f, x, y, z (y las demás que aparecen) son concretas.

(1.) Considerar las siguientes expresiones lambda:

(a) $(\lambda f.\lambda x.f(fx))(\lambda z.\lambda x.\lambda y.zyx)(\lambda z.\lambda w.z)$.

(b) $(\lambda z.zz)(\lambda f.\lambda x.f(fx))$.

Para cada expresión e, reducir a su forma normal e_0. Indicar la 1er forma canónica e_1.

(a) $(\lambda f\ \lambda x\ f(fx))\ (\lambda z\ \lambda x\ \lambda y\ zyx)\ (\lambda z \lambda w z) \to$

$(\lambda x\ (\lambda z\ \lambda x \lambda y\ zyx)\ ((\lambda z\ \lambda x \lambda y\ zyx)\ x))\ (\lambda z\ \lambda w z) \to$

$(\lambda z \lambda x \lambda y\ zyx)((\lambda z \lambda x \lambda y\ zyx)\ (\lambda z \lambda w z)) \to$

$(\lambda x\ \lambda y\ ((\lambda z \lambda x \lambda y\ zyx)\ (\lambda z \lambda w z))\ y x) \to$ 1er forma canónica

$(\lambda x \lambda y\ ((\lambda x \lambda y\ (\lambda z \lambda w z) y x)\ y x) \equiv$

$(\lambda x \lambda y\ ((\lambda x \lambda y' (\lambda z \lambda w z)\ y' x)\ y x) \to$

$(\lambda x \lambda y\ ((\lambda y' (\lambda z \lambda w z)\ y' y)\ x) \to$

$(\lambda x \lambda y\ ((\lambda z \lambda w z)\ x\ y)) \to$

$(\lambda x\ \lambda y\ ((\lambda w\ x)\ y)) \to$

$\lambda x\ \lambda y\ x$ → forma normal

(b) $(\lambda z\ zz)\ (\lambda f\ \lambda x\ f(fx)) \to$

$(\lambda f\ \lambda x\ f(fx))\ (\lambda f\ \lambda x\ f(fx))$

$(\lambda x\ (\lambda f \lambda x f(fx))((\lambda f\ \lambda x\ f(fx))\ x))$ → 1er forma canónica

$(\lambda x\ (\lambda x\ ((\lambda f \lambda x\ ff(x))x)(((\lambda f \lambda x\ ff(x))\ x)\ x))\ ((\lambda f \lambda x\ f(fx))x))$

⋮

Con evaluación normal no hay forma normal, usamos eager partiendo de la 1e forma canónica

$\equiv\ (\lambda x\ (\lambda f\ \lambda x\ f(fx))\ (\lambda f\ \lambda x'\ f(fx'))x)) \to$

$(\lambda x\ (\lambda f \lambda x\ f(fx))\ (\lambda x'\ x(xx'))) \to$

$(\lambda x\ (\lambda x''\ (\lambda x' x(xx'))((\lambda x' x(xx'))\ x''))) \to$

$(\lambda x\ (\lambda x''\ (\lambda x' x(xx'))\ (x(xx'')))) \to$

$(\lambda x\ (\lambda x''\ (x(x(x(xx''))))))) \to$

$\lambda x \lambda x''\ x(x(x(xx'')))$ forma normal

2) Considerar las expresiones lambda:

$$TRUE = \lambda x.\lambda y.x \qquad NOT = \lambda b.\lambda x.\lambda y.byx$$
$$FALSE = \lambda x.\lambda y.y \qquad AND = \lambda b.\lambda c.\lambda x.\lambda y.b(cxy)y$$
$$IF = \lambda b.\lambda x.\lambda y.bxy$$

Demostrar:

(a) $NOT\ TRUE \to^* FALSE$,

(b) $IF\ TRUE\ e_0\, e_1 \to^* e_0$,

(c) $AND\ TRUE\ TRUE \to^* TRUE$,

(d) $AND\ FALSE\ e \to^* FALSE$,

(a) NOT TRUE =

$$(\lambda b\ \lambda x\ \lambda y\ byx)\ (\lambda x\ \lambda y\ x) \to$$
$$(\lambda x\ \lambda y\ (\lambda x\ \lambda y\ x)\ y\ x) \equiv$$
$$(\lambda x\ \lambda y\ (\lambda x\ \lambda y'\ x)\ y\ x) \to$$
$$(\lambda x\ \lambda y\ (\lambda y'\ y)\ x) \to$$
$$(\lambda x\ \lambda y\ y) = FALSE$$

(b) IF TRUE $e_0\ e_1$ =

$$(\lambda b\ \lambda x\ \lambda y\ b\ xy)\ (\lambda x\ \lambda y\ x)\ e_0\, e_1 \to$$
$$(\lambda x \lambda y\ (\lambda x \lambda y\ x)\ x\ y)\ e_0\ e_1 \to$$
$$(\lambda x \lambda y\ (\lambda y\ x)\ y)\ e_0\ e_1 \to$$
$$(\lambda x\ \lambda y\ x)\ e_0\ e_1 \to$$
$$(\lambda y\ e_0)\ e_1 \to$$
$$e_0$$

(c) AND TRUE TRUE =

$$(\lambda b\ \lambda c\ \lambda x \lambda y\ b(cxy)\ y)\ (\lambda x\ \lambda y\ x)\ (\lambda x \lambda y\ x) \to$$
$$(\lambda c\ \lambda x \lambda y\ (\lambda x\ \lambda y\ x)\ (cxy) y)\ (\lambda x\ \lambda y\ x) \to$$
$$(\lambda x\ \lambda y\ (\lambda x\ \lambda y\ x)\ ((\lambda x\ \lambda y\ x) xy)\ y)) \to$$
$$(\lambda x\ \lambda y\ (\lambda y\ ((\lambda x\ \lambda y\ x)\ xy)\ y)) \to$$
$$(\lambda x\ \lambda y\ (\lambda y\ ((\lambda y\ x) y)\ y)) \to$$

$(\lambda x\, \lambda y\, (\lambda y\, (x)\, y)) \rightarrow$

$(\lambda x\, \lambda y\, x) = TRUE$

(d) AND FALSE e =

$(\lambda b\, \lambda c\, \lambda x\, \lambda y\, b\, (cxy)\, y)\, (\lambda x\, \lambda y\, y)\, e \rightarrow$

$(\lambda c\, \lambda x\, \lambda y\, (\lambda x\, \lambda y\, y)\, (cxy)\, y)\, e \rightarrow$

$(\lambda x\, \lambda y\, (\lambda x \lambda y\, y)\, (exy)\, y) \rightarrow$

$(\lambda x\, \lambda y\, (\lambda y\, y)\, y) \rightarrow$

$(\lambda x\, \lambda y\, y) = FALSE$

3) ¿Cuáles afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas? Justificar.
(a) Toda expresión lambda cerrada tiene forma normal.
(b) Toda expresión lambda cerrada tiene forma canónica.
(c) Toda forma canónica cerrada es forma normal.
(d) Toda forma normal cerrada es forma canónica.

(a) Falso

$$(\lambda z. zz)\, (\lambda x. xx)$$

es una expresión lambda cerrada que no tiene forma normal

(b) Falso, mismo contraejemplo que en el a.

(c) Falso

$$\lambda x. (\lambda y. y)\, x$$

es de forma canónica cerrada pero no es de forma normal

(d) Verdadero, conclusión de la propiedad "Una aplicación cerrada no puede ser forma normal"

4) Demostrar que una aplicación cerrada no puede ser una forma normal.

Sea e una aplicación cerrada. Sea $e = e_0 e_1 .. e_n$ en donde e_0 no es una aplicación. Como e es una aplicación $n \geq 1$. Si e_0 fuera una variable, e no sería cerrada, por lo tanto es una abstracción y e contiene al redex $e_0 e_1$. Por lo tanto no es forma normal

(5) Para cada expresión del ejercicio 1, evaluar en orden normal $e \Rightarrow_N e_1$, e eager $e \Rightarrow_E e_1$.

normal

(a) $[(\lambda f.\lambda x.\ f(fx))\ (\lambda z.\lambda x.\ \lambda y\ zyx)\ (\lambda z \lambda w\ z)$ — aplicación, hipos: a,b

$[(\lambda f.\lambda x\ f(fx))\ (\lambda z.\lambda x\ \lambda y zyx)$ — a: aplicación, hipos: a,b

$[(\lambda f.\ \lambda x\ f(fx)) \Rightarrow (\lambda f.\ \lambda x\ f(fx))]$ — aa: abstracción

$[\lambda x\ (\lambda z.\lambda x \lambda y zyx)\ ((\lambda z\ \lambda x \lambda y zyx)\ x)) \Rightarrow$ — ab: abstracción

$(\lambda x\ (\lambda z\ \lambda x \lambda y\ zyx)((\lambda z \lambda x \lambda y\ zyx)\ x))]$

$\Rightarrow (\lambda x\ (\lambda z \lambda x \lambda y zyx)((\lambda z \lambda x \lambda y\ zyx)\ x))]$ — terminó a

$[(\lambda z\ \lambda x \lambda y\ zyx)\ ((\lambda z\ \lambda x \lambda y\ zyx)\ (\lambda z \lambda w\ z))$ — b: aplicación, hipos: a,b

$[(\lambda z\ \lambda x\ \lambda y\ zyx) \Rightarrow (\lambda z \lambda x \lambda y zyx)]$ — ba: abstracción

$[\lambda x \lambda y\ ((\lambda z \lambda x \lambda y\ zyx)(\lambda z \lambda w\ z))\ yx \Rightarrow$ — bb: abstracción

$\lambda x \lambda y\ ((\lambda z\ \lambda x \lambda y\ zyx)\ (\lambda z \lambda w z))\ yx]$

$\Rightarrow \lambda x \lambda y\ ((\lambda z \lambda x \lambda y\ zyx)\ (\lambda z \lambda w z))\ yx]$ — terminó b

$\Rightarrow \lambda x \lambda y\ ((\lambda z \lambda x \lambda y\ zyx)(\lambda z \lambda w\ z))\ yx]$ — terminó la prueba

eager

$[(\lambda f.\lambda x\ f(fx))\ (\lambda z.\lambda y.\lambda x.zyx)\ (\lambda z.\lambda w.z)$ — aplicación, hipos: a,b,c

$[(\lambda f.\lambda x.\ f(fx))\ (\lambda z.\lambda y.\lambda x\ zyx)$ — a: aplicación, hipos: a,b,c

$[(\lambda f.\lambda x.f(fx)) \Rightarrow (\lambda f.\lambda x.\ f(fx))]$ — aa: abstracción

$[(\lambda z.\lambda y.\ \lambda x\ zyx) \Rightarrow (\lambda z.\ \lambda y.\lambda x zyx)]$ — ab: abstracción

$[(\lambda x.\ (\lambda z.\lambda y\ .\lambda x\ zyx)\ ((\lambda z.\lambda y.\lambda x\ zyx)\ x)) \Rightarrow$ — ac: abstracción

$(\lambda x.\ (\lambda z.\lambda y.\lambda x\ zyx)\ ((\lambda z.\lambda y.\lambda x\ zyx)x))]$

$\Rightarrow (\lambda x.\ (\lambda z.\lambda y.\lambda x\ zyx)((\lambda z.\lambda y.\lambda x\ zyx)x))]$ — terminó a

$[(\lambda z.\lambda w.z) \Rightarrow (\lambda z.\lambda w.z)]$ — b: abstracción

$[\ (\lambda z.\lambda y.\lambda x zyx)((\lambda z.\lambda y.\lambda x zyx)\ (\lambda z.\lambda w.z))$ — c: aplicación, hipos: a,b,c

$[(\lambda z.\lambda y.\lambda x zyx) \Rightarrow (\lambda z.\lambda y.\lambda x\ zyx)]$ — ca: abstracción

$[\ (\lambda z.\lambda y.\lambda x\ zyx)\ (\lambda z.\lambda w.z)$ cb: aplicación, hijos: a,b,c

$[(\lambda z.\lambda y.\lambda x\ zyx) \Rightarrow (\lambda z.\lambda y.\lambda x.zyx)]$ cba: abstracción

$[(\lambda z.\lambda w.z) \Rightarrow (\lambda z.\lambda w.z)]$ cbb: abstracción

$[(\lambda y.\lambda x\ (\lambda z\lambda w.z)\ yx) \Rightarrow (\lambda y.\lambda x(\lambda z\lambda w.z)yx)]$ cbc: abstracción

$\Rightarrow (\lambda y.\lambda x\ (\lambda z\lambda w.z)\ yx)]$ terminó cb

$[(\lambda y.\lambda x\ (\lambda y.\lambda x\ (\lambda z\lambda w\ z)\ yx)\ yx) \Rightarrow$ cc: abstracción

$(\lambda y.\lambda x\ (\lambda y.\lambda x\ (\lambda z\lambda w z)yx)\ yx)]$

$\Rightarrow \lambda y.\lambda x\ (\lambda y.\lambda x\ (\lambda z\lambda w\ z)yx)\ yx]$ terminó c

$\Rightarrow \lambda y.\lambda x\ (\lambda y.\lambda x(\lambda z\ \lambda w z)yx)yx\ ]$ terminó la prueba

(b) Normal

$[\ (\lambda z.zz)\ (\lambda f.\lambda x\ f(fx))$ aplicación, hijos: a,b

$[(\lambda z.zz) \Rightarrow (\lambda z.zz)]$ a: abstracción

$[(\lambda f.\lambda x\ f(fx))\ (\lambda f.\lambda x\ f(fx))$ b: aplicación, hijos: a,b

$[(\lambda f.\lambda x\ f(fx)) \Rightarrow (\lambda f.\lambda x\ f(fx))]$ ba: abstracción

$[(\lambda x.\ (\lambda f.\lambda x\ f(fx))\ ((\lambda f.\lambda x f(fx))\ x))$ bb: abstracción

$\Rightarrow (\lambda x.(\lambda f.\lambda x\ f(fx))\ ((\lambda f.\lambda x f(fx))x))]$

$\Rightarrow (\lambda x.(\lambda f.\ \lambda x\ f(fx))((\lambda f.\lambda x\ f(fx))\ x))]$ terminó b

$\Rightarrow \lambda x.(\lambda f.\lambda x\ f(fx))((\lambda f.\lambda x f(fx)).x)\ ]$ terminó la prueba

eager

$[\ (\lambda z.zz)\ (\lambda f.\lambda x\ f(fx))$ aplicación, hijos: a,b,c

$[(\lambda z.zz) \Rightarrow (\lambda z.zz)]$ a: abstracción

$[(\lambda f.\lambda x.f(fx)) \Rightarrow (\lambda f.\lambda x\ f(fx))]$ b: abstracción

$[(\lambda f.\lambda x\ f(fx))\ (\lambda f.\lambda x\ f(fx))$ c: aplicación, hijos: a,b,c

$[(\lambda f.\lambda x\ f(fx)) \Rightarrow (\lambda f.\lambda x\ f(fx))]$ ca: abstracción

$[(\lambda f.\lambda x\ f(fx)) \Rightarrow (\lambda f.\lambda x\ f(fx))]$ cb: abstracción

$[(\lambda x.\ (\lambda f.\lambda x\ f(fx))\ ((\lambda f.\lambda x\ f(fx))\ x)$ cc: abstracción

$\Rightarrow (\lambda x.\ (\lambda f.\lambda x\ f(fx))\ ((\lambda f.\lambda x\ f(fx))\ x)]$

$\Rightarrow (\lambda x. (\lambda f. \lambda x\, f(fx)) ((\lambda f. \lambda x\, f(fx))x)]$ terminó c

$\Rightarrow \lambda x. (\lambda f. \lambda x\, f(fx)) ((\lambda f. \lambda x\, f(fx))x]$ terminó la prueba

(6) (a) Para ambos órdenes, pruebe que $e \Rightarrow e'$ implica $e \to^* e'$.
(b) Decida si la siguiente afirmación es cierta y justifique su respuesta: si $e \Rightarrow_N e_1$ y $e \Rightarrow e_2$, entonces existe e' tal que $e_1 \to^* e'$ y $e_2 \to^* e'$.

(a) Supongamos $e \Rightarrow_N e'$. Tenemos dos casos

(1) $e \Rightarrow_N e'$ porque $e = e' = \lambda v e_0$ (abstracción)

O sea tenemos $\lambda v e_0 \Rightarrow_N \lambda v\, e_0$

y claramente $\lambda v. e_0 \to \lambda v. e_0$

lo cual implica $\lambda v. e_0 \to^* \lambda v. e_0$

(2) $e \Rightarrow_N e'$ porque $e = e_0 e_1$, $e_0 \Rightarrow_N \lambda v. e_2$, $(e_2/v \to e_1) \Rightarrow_N e'$ (aplicación)

Tomamos como H.I

i. $e_0 \Rightarrow_N \lambda v. e_2 \Rightarrow e_0 \xrightarrow{*} \lambda v. e_2$

ii. $(e_2/v \to e_1) \Rightarrow_N e' \Rightarrow (e_2/v \to e_1) \to^* e'$

Y veamos que $e \to^* e'$

$e = e_0 e_1 \underset{\text{H.I (i)}}{\to^*} (\lambda v. e_2) e_1 \underset{\text{def. reducción}}{\to} (e_2/v \to e_1) \underset{\text{H.I (ii)}}{\to^*} e'$

Fin prueba normal

Supongamos $e \Rightarrow_E e'$. Tenemos dos casos

(1) $e \Rightarrow_E e'$ porque $e = e' = \lambda v e_0$ (abstracción)

O sea tenemos $\lambda v e_0 \Rightarrow_E \lambda v\, e_0$

y claramente $\lambda v. e_0 \to \lambda v. e_0$

lo cual implica $\lambda v. e_0 \to^* \lambda v. e_0$

(2) $e \Rightarrow_E e'$ porque $e = e_0 e_1$, $e_0 \Rightarrow_E \lambda v. e_2$, $e_1 \Rightarrow_E z$, $(e_2/v \to z) \Rightarrow_E e'$

Tomamos como H.I

i. $e_0 \Rightarrow_E \lambda v. e_2 \Rightarrow e_0 \xrightarrow{*} \lambda v. e_2$

ii. $e_1 \Rightarrow_E z \Rightarrow e_1 \xrightarrow{*} z$

iii. $(e_2/v \to z) \Rightarrow_E e' \Rightarrow (e_2/v \to z) \to^* e'$

Y veamos que $e \xrightarrow{*} e'$

$$e = e_0 e_1 \underset{\text{H.I (i)}}{\xrightarrow{*}} (\lambda v. e_2) e_1 \underset{\text{HI(ii)}}{\xrightarrow{*}} (\lambda v. e_2)(z) \underset{\substack{\text{def.}\\ \text{reducció}}}{\rightarrow} (e_2 / v \to z) \underset{\text{H.I (iii)}}{\xrightarrow{*}} e'$$

Fin prueba eager

(b) Verdadero, por el a

$e \Rightarrow_N e_1 \Rightarrow e \xrightarrow{*} e_1$

$e \Rightarrow e_2 \Rightarrow e \xrightarrow{*} e_2$

Por Church-Rosser si $e \xrightarrow{*} e_1$ y $e \xrightarrow{*} e_2$, entonces existe e' tal que $e_1 \xrightarrow{*} e'$, $e_2 \xrightarrow{*} e'$

(7) Explique por qué no es cierto que *NOT TRUE* $\Rightarrow$ *FALSE* en ambos órdenes.

Recordemos que:

NOT TRUE =

$(\lambda b\ \lambda x\ \lambda y\ b y x)\ (\lambda x\ \lambda y\ x) \rightarrow$

$(\lambda x\ \lambda y\ (\lambda x\ \lambda y\ x)\ y\ x) \equiv$

$(\lambda x\ \lambda y\ (\lambda x\ \lambda y' x)\ y\ x) \rightarrow$

$(\lambda x\ \lambda y\ (\lambda y' y)\ x) \rightarrow$

$(\lambda x\ \lambda y\ y) =$ FALSE

Ya $(\lambda x\ \lambda y\ (\lambda x \lambda y\ x)\ y\ x)$ es una forma canónica, y de hecho en ambas evaluaciones llegamos a que NOT TRUE $\Rightarrow (\lambda x\ \lambda y\ (\lambda x\ \lambda y\ x)\ x) \neq$ FALSE.

(8) Sean e_0 y e_1 formas canónicas, construya los árboles para
(a) *NOT TRUE* $e_0\, e_1 \Rightarrow_E e_1$,
(b) *AND FALSE* $(\Delta\, \Delta)\, e_0\, e_1 \Rightarrow_N e_1$.

(a) $\quad NOT = (\lambda b. \lambda x. \lambda y. b y x)$

$TRUE = T = (\lambda x. \lambda y. x)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{NOT \Rightarrow NOT \qquad T \Rightarrow T \qquad \begin{matrix}(NOT/b \to T)\\ \Rightarrow (\lambda x. \lambda y (T) y x)\end{matrix}}{NOT\ T \Rightarrow (\lambda x. \lambda y (T) y x)} \qquad \begin{matrix}e_0 \Rightarrow\\ e_0\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(\lambda x. \lambda y (T) y x)(x \to e_0)\\ \Rightarrow (\lambda y' (T) y' e_0)\end{matrix}}{NOT\ T\ e_0 \Rightarrow (\lambda y' (T) y' e_0)} \qquad e_1 \Rightarrow e_1 \qquad \dfrac{\dfrac{T \Rightarrow T \qquad e_1 \Rightarrow e_1 \qquad \begin{matrix}T(x \to e_1) \Rightarrow\\ (\lambda y' e_1)\end{matrix}}{T e_1 \Rightarrow (\lambda y' e_1)} \qquad e_0 \Rightarrow e_0 \qquad \begin{matrix}(\lambda y' e_1)(y' \to e_0)\\ \Rightarrow e_1\end{matrix}}{\begin{matrix}(\lambda y' (T) y' e_0)(y' \to e_1)\\ \Rightarrow e_1\end{matrix}}}{NOT\ T\ e_0\, e_1 \Rightarrow e_1}$$

(b) $\quad AND = (\lambda b. \lambda c. \lambda x. \lambda y\ b\ (c x y)\ y)$

$FALSE = F = (\lambda x. \lambda y. y)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{AND \Rightarrow AND \qquad \begin{matrix}AND\ (b \to F)\\ \Rightarrow (\lambda c. \lambda x. \lambda y\ (F)(c x y) y)\end{matrix}}{\begin{matrix}AND\ F \Rightarrow\\ (\lambda c. \lambda x. \lambda y\ (F)(c x y) y)\end{matrix}} \qquad \begin{matrix}(\lambda c. \lambda x. \lambda y (F)(c x y) y)(c \to \Delta\Delta)\\ \Rightarrow (\lambda x. \lambda y (F)(\Delta\Delta x y) y)\end{matrix}}{\begin{matrix}AND\ F (\Delta\Delta) \Rightarrow\\ (\lambda x. \lambda y (F)(\Delta\Delta x y) y)\end{matrix}} \qquad \begin{matrix}(\lambda x \lambda y (F)(\Delta\Delta x y) y)(x \to e_0)\\ \Rightarrow (\lambda y' (F)(\Delta\Delta e_0\, y') y')\end{matrix}}{\begin{matrix}AND\ F (\Delta\Delta\, e_0) \Rightarrow\\ (\lambda y' (F)(\Delta\Delta e_0 y') y')\end{matrix}} \qquad \dfrac{\dfrac{F \Rightarrow F \qquad \begin{matrix}F(x \to (\Delta\Delta e_0 e_1))\\ \Rightarrow (\lambda y. y)\end{matrix}}{\begin{matrix}(F)(\Delta\Delta e_0 e_1)\\ \Rightarrow (\lambda y. y)\end{matrix}} \qquad \begin{matrix}(\lambda y. y)(y \to e_1)\\ \Rightarrow e_1\end{matrix}}{\begin{matrix}(\lambda y' (F)(\Delta\Delta e_0 y') y')(y' \to e_1)\\ \Rightarrow e_1\end{matrix}}}{AND\ \ F\ (\Delta\Delta)\, e_0 e_1 \Rightarrow e_1}$$

(9) Explique por qué *AND FALSE* $(\Delta\,\Delta)\, e_0\, e_1$ no tiene una forma canónica bajo el orden eager. ¿La tiene *AND FALSE* $(\lambda w.\Delta\,\Delta)\, e_0\, e_1$?

Porque en el árbol de AND FALSE $(\Delta\Delta)$ hay que evaluar $\Delta\Delta$, y como vimos anteriormente, esa expresión lambda no tiene forma canónica.

Veamos si AND FALSE $(\lambda w. \Delta\Delta)\, e_0 e_1$ la tiene

[AND FALSE $(\lambda w. \Delta\Delta)\ e_0\ e_1$

[AND FALSE $(\lambda w. \Delta\Delta)\ e_0$

[AND FALSE $(\lambda w. \Delta\Delta)$

[AND FALSE

[AND $\Rightarrow$ AND]

[FALSE $\Rightarrow$ FALSE]

$[(\lambda c.\lambda x.\lambda y\ (FALSE)\ (cxy)y) \Rightarrow (\lambda c.\lambda x.\lambda y\ (FALSE)\ (cxy)y)]$

$\Rightarrow (\lambda c.\lambda x.\lambda y\ (FALSE)\ (cxy)y)]$

$[(\lambda w.\Delta\Delta) \Rightarrow (\lambda w.\Delta\Delta)]$

$[(\lambda x.\lambda y\ (FALSE)((\lambda w.\Delta\Delta)xy)y) \Rightarrow (\lambda x.\lambda y.(FALSE)((\lambda w.\Delta\Delta)xy)y)]$

$\Rightarrow (\lambda x.\lambda y\ (FALSE)((\lambda w.\Delta\Delta)xy)y)]$

$[e_0 \Rightarrow e_0]$

$[(\lambda y'.(FALSE)((\lambda w.\Delta\Delta)e_0y')y') \Rightarrow (\lambda y'.(FALSE)((\lambda w.\Delta\Delta)e_0y')y')]$

$\Rightarrow (\lambda y'.(FALSE)((\lambda w.\Delta\Delta)e_0y')y')]$

$[e_1 \Rightarrow e_1]$

$[\ (FALSE)((\lambda w.\Delta\Delta)e_0e_1)e_1)$

$[FALSE \Rightarrow FALSE]$

$[((\lambda w.\Delta\Delta)e_0e_1)\ e_1)$

$[(\lambda w.\Delta\Delta)e_0e_1$

$[(\lambda w.\Delta\Delta)\ e_0$

$[(\lambda w.\Delta\Delta) \Rightarrow (\lambda w.\Delta\Delta)]$

$[e_0 \Rightarrow e_0]$

Si w no es una variable libre de Δ entonces $\lambda w\Delta\Delta \Rightarrow \Delta\Delta$ y no hay forma canónica ya que no podemos llegar a una abstracción. Supongamos $w \in FV(\Delta)$, en este caso $\lambda w.\Delta\Delta/(w \to e_0) = \Delta'\Delta'$ donde $\Delta' = \Delta/(w \to e_0)$, a menos que Δ' sea una (o más) variable(s) vamos a seguir en el mismo caso, $\Delta'\Delta'$ no tiene forma canónica. ↳ incluye el caso en que ninguna variable esté ligada.

(10) ¿Qué debe cumplir b para que $IF\ b \to_\eta^* b$? ¿Cumplen $TRUE$ y $FALSE$ esas condiciones?

Llamemos e a b para no confundirlo con la variable b.

$(\lambda b.\lambda x.\lambda y.bxy)\ e \to_\eta^* e$

Recordemos que $\lambda v.ev \to_\eta e$ si $v \notin FV(e)$

$(\lambda b.\lambda x.\lambda y.bxy)\ e \to \lambda x.\lambda y\ exy$

Supongamos $x,y \notin FV(e)$ entonces $e = (\lambda x\lambda y\ e_0)$

$$\lambda x \lambda y\ exy \to \lambda x.\lambda y.\ (\lambda x\lambda y\ e_0)xy$$
$$\to \lambda x.\lambda y\ (\lambda y e_0)y$$
$$\to \lambda x.\lambda y\ e_0 \ = e$$

entonces $IF\ e \to_\eta^* e$ si $x,y \notin FV(e)$, ademas que e debe ser de la forma $\lambda x\lambda y\, e_0$

TRUE y FALSE cumplen esta propiedad

$$IF\ TRUE = (\lambda b.\lambda x.\lambda y.bxy)(\lambda x.\lambda y.x)$$
$$\to \lambda x.\lambda y\ (\lambda x.\lambda y.x)xy$$
$$\to \lambda x.\lambda y\ (\lambda y.x)y$$
$$\to \lambda x.\lambda y.x \ = TRUE$$

Luego $IF\ TRUE \to_\eta^* TRUE$

$$IF\ FALSE = (\lambda b.\lambda x.\lambda y.bxy)(\lambda x.\lambda y.y)$$
$$\to \lambda x.\lambda y\ (\lambda x.\lambda y.y)xy$$
$$\to \lambda x.\lambda y\ (\lambda y.y)y$$
$$\to \lambda x.\lambda y.y = FALSE$$

Luego $IF\ FALSE \to_\eta^* FALSE$