Definiciones

lunes, 25 de marzo de 2024 13:53

$$\langle intexp \rangle = 0 \mid 1 \mid 2 \mid \cdots \mid \langle var \rangle$$
$$\mid -\langle intexp \rangle \mid \langle intexp \rangle + \langle intexp \rangle \mid \langle intexp \rangle * \langle intexp \rangle$$

$$\langle assert \rangle = \mathbf{true} \mid \mathbf{false}$$
$\mid \langle intexp \rangle\ \eta\ \langle intexp \rangle$ con $\eta \in \{=, <, \leq, >, \geq\}$
$$\mid \neg \langle assert \rangle \mid \langle assert \rangle \wedge \langle assert \rangle \mid \langle assert \rangle \vee \langle assert \rangle$$
$$\mid \exists \langle var \rangle . \langle assert \rangle \mid \forall \langle var \rangle . \langle assert \rangle$$

Repaso

miércoles, 20 de marzo de 2024 11:38

Repaso. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas; justifique su respuesta.

1. Sea L un lenguaje, D el dominio semántico y sea $[\![-]\!]: L \to D$:
   a) si $[\![-]\!]$ NO es inyectiva, entonces NO es una función semántica.
   b) si $[\![-]\!]$ NO es suryectiva, entonces NO es una función semántica.
2. La dirección por sintaxis garantiza que un conjunto de ecuaciones define una función semántica.
3. Si un conjunto de ecuaciones que define una semántica no es dirigido por sintaxis, entonces la semántica no es composicional.

1a) Falso
1b) Falso

2) Verdadero

3) Falso, por ahí se podría escribir como composicional

1)

miércoles, 20 de marzo de 2024 11:48

1. Considere los siguientes predicados (con la semántica dada en el teórico).

   $x \div y = z$

   $\exists r.(0 \leq r < y) \wedge (x = y * z + r)$

   a) Dé un estado en el cual estos predicados tienen distinta semántica.

   b) Caracterizar los $\sigma \in \Sigma$ para los cuales estos predicados tienen la misma semántica.

a)

$[x: -1, y: -1, z: 1]$

b)

Asumiendo que la divición en 0 da error

$\{\sigma \in \Sigma : \sigma(y) \leq 0 \wedge \sigma(x) \div \sigma(y) = \sigma(z)\}$

2)

miércoles, 20 de marzo de 2024 11:54

2. Extienda la gramática abstracta de las expresiones enteras para la sumatoria; luego defina la semántica de la nueva expresión. Recuerde las propiedades que debe tener un conjunto de ecuaciones para que definan una función semántica.

$$
\begin{aligned}
\langle intexp \rangle ::= {} & \langle var \rangle \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid \cdots \\
& \mid -\langle intexp \rangle \mid \langle intexp \rangle + \langle intexp \rangle \mid \langle intexp \rangle * \langle intexp \rangle \\
& \mid \langle intexp \rangle / \langle intexp \rangle \mid \langle intexp \rangle \% \langle intexp \rangle \\
& \mid \sum_{\langle var \rangle = \langle intexp \rangle}^{\langle intexp \rangle} \langle intexp \rangle
\end{aligned}
$$

$$[\![\_]\!] : \langle intexp \rangle \to ((\langle var \rangle \to \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z})$$

$$[\![x]\!]_\sigma = \sigma(x)$$

$$[\![\lfloor c \rfloor]\!]_\sigma = c$$

$$[\![-e]\!]_\sigma = -[\![e]\!]_\sigma$$

$$[\![e \oplus e']\!]_\sigma = [\![e]\!]_\sigma \oplus [\![e']\!]_\sigma$$

$$\left[\!\!\left[\sum_{x=e_0}^{e_1} e\right]\!\!\right]_\sigma = \sum_{i=[\![e_0]\!]_\sigma}^{[\![e_1]\!]_\sigma} [\![e]\!]_{[\sigma \mid x:i]}$$

3)

miércoles, 20 de marzo de 2024 12:14

3. En cada una de las siguientes expresiones, ¿cuáles son las ocurrencias ligadoras, cuáles las ligadas y cuáles las libres?
   a) $\forall \mathsf{x}.\ \forall \mathsf{z}.\ \mathsf{x} < \mathsf{t} \wedge \mathsf{t} \leq \mathsf{z} \Rightarrow \exists \mathsf{y}.\ \mathsf{x} \leq \mathsf{y} \wedge \mathsf{y} < \mathsf{z}$
   b) $\mathsf{x} > 0 \Rightarrow (\forall \mathsf{y}.\mathsf{y} \geq \mathsf{x} \Rightarrow \exists \mathsf{x}.\mathsf{x} > 0 \wedge \mathsf{x} < \mathsf{y})$.
   c) $\Sigma_{\mathsf{i}=0}^{\mathsf{n}}(\mathsf{k} * \Sigma_{\mathsf{k}=1}^{\mathsf{i}}(\mathsf{i} - \mathsf{k}) * \mathsf{k})$.

Ligadoras Ligadas Libres

a) $\forall \mathsf{x}.\ \forall \mathsf{z}.\ \mathsf{x} < \mathsf{t} \wedge \mathsf{t} \leq \mathsf{z} \Rightarrow \exists \mathsf{y}.\ \mathsf{x} \leq \mathsf{y} \wedge \mathsf{y} < \mathsf{z}$

b) $\mathsf{x} > 0 \Rightarrow (\forall \mathsf{y}.\mathsf{y} \geq \mathsf{x} \Rightarrow \exists \mathsf{x}.\mathsf{x} > 0 \wedge \mathsf{x} < \mathsf{y})$.

c) $\Sigma_{\mathsf{i}=0}^{\mathsf{n}}(\mathsf{k} * \Sigma_{\mathsf{k}=1}^{\mathsf{i}}(\mathsf{i} - \mathsf{k}) * \mathsf{k})$.

4)

miércoles, 20 de marzo de 2024 12:19

4. Dé el resultado de la sustitución simultánea:

   a) t por $\mathsf{x} + \mathsf{y} + \mathsf{z}$ en $\forall \mathsf{x}.\ \forall \mathsf{z}.\ \mathsf{x} < \mathsf{t} \wedge \mathsf{t} \leq \mathsf{z} \Rightarrow \exists \mathsf{y}.\ \mathsf{x} \leq \mathsf{y} \wedge \mathsf{y} < \mathsf{z}$

   b) y por x, z por y y x por z en $\mathsf{x} > 0 \Rightarrow (\forall \mathsf{y}.\mathsf{y} \geq \mathsf{x} \Rightarrow \exists \mathsf{x}.\mathsf{x} > 0 \wedge \mathsf{x} < \mathsf{y})$.

a)

$\forall x'.\forall z'.x' \leq x + y + z \wedge x + y + z \leq z' \Rightarrow \exists y'.x' \leq y' \wedge y' \leq z'$

b)

$z > 0 \Rightarrow (\forall y'.y' \geq z \Rightarrow \exists x'.x' > 0 \wedge x' < y')$

5)

miércoles, 20 de marzo de 2024 12:29

5. Dé un ejemplo que muestre que si hacemos reemplazo sintáctico en lugar de sustitución, podemos alterar la semántica.

$\forall x. x = y$
$[y : x]$

6)

miércoles, 20 de marzo de 2024 12:32

6. Pruebe por inducción en los predicados: $FV(p/\delta) = \bigcup_{w \in FV(p)} FV(\delta w)$

¿Necesita una propiedad similar para las expresiones?

Propiedad para las expresiones:
Sea $e \in \langle intexp \rangle$, $\delta \in \Delta$

$$FV(e/\delta) = \bigcup_{w \in FV(e)} FV(\delta(w))$$

Demostración:

Caso $e = \lfloor n \rfloor$ con $n \in \mathbb{N}$:

$FV(\lfloor n \rfloor/\delta)$

=

$FV(\lfloor n \rfloor)$

=

$\emptyset$

=

$\bigcup_{w \in \emptyset} FV(\delta(w))$

=

$\bigcup_{w \in FV(\lfloor n \rfloor)} FV(\delta(w))$

Caso $e = v$ con $v \in \langle var \rangle$:

$FV(v/\delta)$

=

$\{\delta(v)\}$

=

$$\bigcup_{w \in \{v\}} FV(\delta(w))$$

=

$$\bigcup_{w \in FV(v)} FV(\delta(w))$$

Caso $e = -e'$ con $e' \in \langle intexp \rangle$:

$FV((-e')/\delta)$

=

$FV(-(e'/\delta))$

=

$FV(e'/\delta)$

=

$$\bigcup_{w \in FV(e')} FV(\delta(w))$$

=

$$\bigcup_{w \in FV(-e')} FV(\delta(w))$$

Caso $e = e_0 \oplus e_1$ con $e_0, e_1 \in \langle intexp \rangle$, $\oplus \in \{+,*\}$:

$FV((e_0 \oplus e_1)/\delta)$

=

$FV((e_0/\delta \oplus e_1/\delta))$

=

$FV(e_0/\delta) \cup FV(e_1/\delta)$

=

$$\bigcup_{w \in FV(e_0)} FV(\delta(w)) \cup \bigcup_{w \in FV(e_1)} FV(\delta(w))$$

=

$$\bigcup_{w \in FV(e_0) \cup FV(e_0)} FV(\delta(w))$$

=

$$\bigcup_{w \in FV(e_0 \oplus e_1)} FV(\delta(w))$$

□

Propiedad para las predicados:
Sea $p \in \langle assert \rangle$, $\delta \in \Delta$

$$FV(e/\delta) = \bigcup_{w \in FV(e)} FV(\delta(w))$$

Demostración:

Caso $p = b$ con $b \in \{\text{true}, \text{false}\}$:

$FV(b/\delta)$

=

$FV(b)$

=

$\emptyset$

=

$\bigcup_{w \in \emptyset} FV(\delta(w))$

=

$\bigcup_{w \in FV(b)} FV(\delta(w))$

Caso $p = e_0 \; \eta \; e_1$ con $e_0, e_1 \in \langle intexp \rangle, \eta \in \{=, <, \leq, >, \geq\}$:

$FV((e_0 \eta e_1)/\delta)$

=

$FV((e_0/\delta \eta e_1/\delta))$

=

$FV(e_0/\delta) \cup FV(e_1/\delta)$

=

$$\bigcup_{w \in FV(e_0)} FV(\delta(w)) \cup \bigcup_{w \in FV(e_1)} FV(\delta(w))$$

$=$

$$\bigcup_{w \in FV(e_0) \cup FV(e_0)} FV(\delta(w))$$

$=$

$$\bigcup_{w \in FV(e_0 \eta e_1)} FV(\delta(w))$$

Caso $p = \neg p'$ con $p' \in \langle assert \rangle$:

$$FV((\neg p')/\delta)$$

$=$

$$FV(\neg(p'/\delta))$$

$=$

$$FV(p'/\delta)$$

$=$

$$\bigcup_{w \in FV(p')} FV(\delta(w))$$

$=$

$$\bigcup_{w \in FV(\neg p')} FV(\delta(w))$$

Caso $p = p_0 \oplus p_1$ con $p_\downarrow 0, p_1 \in \langle assert \rangle$, $\oplus \in \{\wedge, \vee\}$:

$$FV((p_0 \oplus p_1)/\delta)$$

$=$

$$FV((p_0/\delta \oplus p_1/\delta))$$

$=$

$$FV(p_0/\delta) \cup FV(p_1/\delta)$$

$=$

$$\bigcup_{w \in FV(p_0)} FV(\delta(w)) \cup \bigcup_{w \in FV(p_1)} FV(\delta(w))$$

$=$

$$\bigcup_{w \in FV(p_0) \cup FV(p_0)} FV(\delta(w))$$

$=$

$$\bigcup_{w \in FV(p_0 \oplus p_1)} FV(\delta(w))$$

Caso $p = Q.vp'$ con $Q \in \{\forall, \exists\}, v \in \langle var \rangle, p' \in \langle assert \rangle$:

$FV(Q.vp'/\delta)$

$=$

$FV(Q.u(p'/[\delta|v:u]))$

$=$

$FV(p'/[\delta|v:u]) - \{u\}$

$=$

$$\bigcup_{w \in FV(p'/[\delta|v:u])} FV(\delta(w))$$

$=$ (Claramente $u \notin FV(p'/[\delta|v:u])$ y $u \notin FV(\delta(w))$)

$$\bigcup_{w \in FV(p'/[\delta|v:u]) - \{u\}} FV(\delta(w))$$

$=$

$$\bigcup_{w \in FV(Q.u(p'/[\delta|v:u]))} FV(\delta(w))$$

$=$

$$\bigcup_{w \in FV(Q.vp'/\delta)} FV(\delta(w))$$

7) 🛠️

lunes, 25 de marzo de 2024 14:47

7. Enunciar y demostrar de manera detallada el Teorema de Coincidencia para la Lógica de Predicados.

Sean:

$\sigma, \sigma' \in \Sigma$

$p \in \langle intexp \rangle$

$$\forall (w \in FV(p) \,.\, \sigma(w) = \sigma'(w)) \Rightarrow [\![p]\!]\sigma = [\![p]\!]\sigma'$$

8)

lunes, 25 de marzo de 2024 14:49

8. Sean p, q dos frases de la misma categoría sintáctica, usar el teorema de sustitución para demostrar que si $[\![p]\!] = [\![q]\!]$ entonces para todo $\delta \in \Delta$, $[\![p/\delta]\!] = [\![q/\delta]\!]$.

$$[\![p/\delta]\!] = [\![q/\delta]\!]$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall \sigma \in \Sigma\ [\![p/\delta]\!]\sigma = [\![q/\delta]\!]\sigma$$

$\Leftrightarrow$ (Teorema de sustitución, creando σ' que depende de σ)

$$\forall \sigma \in \Sigma\ [\![p]\!]\sigma' = [\![q]\!]\sigma'$$

Esto es claramente cierto por hipótesis

9)

lunes, 25 de marzo de 2024 14:51

9. ¿Vale el recíproco? Es decir, dados p, q en la misma categoría sintáctica, si para todo $\delta \in \Delta$, $[\![p/\delta]\!] = [\![q/\delta]\!]$, ¿se cumple necesariamente $[\![p]\!] = [\![q]\!]$?

Si, tomando a δ como la identidad

10) 🛠️

lunes, 25 de marzo de 2024 14:51

10. *a*) Sean δ y γ dos sustituciones, defina la composición de δ con γ ($\delta \circ \gamma \in \Delta$).
b) Pruebe que para toda frase p y cualesquiera sustituciones δ y γ vale $[\![p/\delta \circ \gamma]\!] = [\![(p/\delta)/\gamma]\!]$.

a)
Sean $\delta, \gamma \in \Delta$:

$(\delta \circ \gamma) \in \Delta$
$(\delta \circ \gamma) : Dom(\gamma) \cup Dom(\delta) \to \langle intexp \rangle$
$(\delta \circ \gamma)(v) = \text{if } v \in Dom(\delta) \text{ then } \delta(v)/\gamma \text{ else } \gamma(v)$

b) 🛠️