Guía 8

(1) Calcular la semántica denotacional en D_∞ de los siguientes términos:

a) $M = \lambda f.\, \lambda x.\, f(fx)$ b) $N = \lambda z.\, \lambda y.\, z$ c) MN

a) $[\![\lambda f. \lambda x. f(fx)]\!]\eta =$

$\psi(\lambda d \in D_\infty .\ [\![\lambda x. f(fx)]\!] [\eta \mid f{:}d]) =$

$\psi(\lambda d \in D_\infty .\ \psi(\lambda d' \in D_\infty .\ [\![f(fx)]\!] [\eta \mid f{:}d \mid x{:}d']))=$

$\psi(\lambda d \in D_\infty\ \psi(\lambda d' \in D_\infty\ \phi([\![f]\!][\eta \mid f{:}d \mid x{:}d'])([\![fx]\!][\eta \mid f{:}d \mid x{:}d'])))) =$

$\psi(\lambda d \in D_\infty\ \psi(\lambda d' \in D_\infty\ \phi(d)(\phi([\![f]\!][\eta \mid f{:}d \mid x{:}d'])([\![x]\!][\eta \mid f{:}d \mid x{:}d'])))) =$

$\psi(\lambda d \in D_\infty\ \psi(\lambda d' \in D_\infty\ \phi(d)(\phi(d)(d'))))$

b) $[\![\lambda z. \lambda y. z]\!]\eta =$

$\psi(\lambda d \in D_\infty .\ [\![\lambda y. z]\!][\eta \mid z{:}d]) =$

$\psi(\lambda d \in D_\infty .\ \psi(\lambda d' \in D_\infty\ [\![z]\!][\eta \mid z{:}d \mid y{:}d'])) =$

$\psi(\lambda d \in D_\infty .\ \psi(\lambda d' \in D_\infty\ d))$

c) $[\![MN]\!]\eta =$

$\phi([\![M]\!]\eta)([\![N]\!]\eta) =$

$\phi(\psi(\lambda d \in D_\infty\ \psi(\lambda d' \in D_\infty\ \phi(d)(\phi(d)(d'))))) (\psi(\lambda d \in D_\infty .\ \psi(\lambda d' \in D_\infty . d))) =$

$(\lambda d \in D_\infty\ \psi(\lambda d' \in D_\infty\ \phi(d)(\phi(d)(d'))))(\psi(\lambda d \in D_\infty . \psi(\lambda d' \in D_\infty\ d))) =$

$\psi(\lambda d' \in D_\infty\ \phi(\psi(\lambda d \in D_\infty\ \psi(\lambda d' \in D_\infty d)))(\phi(\psi(\lambda d \in D_\infty . \psi(\lambda d' \in D_\infty d)))(d'))) =$

$\psi(\lambda d' \in D_\infty\ (\lambda d \in D_\infty\ \psi(\lambda d' \in D_\infty\ d))((\lambda d \in D_\infty\ \psi(\lambda d' \in D_\infty d))(d'))) =$

$\psi(\lambda d' \in D_\infty\ (\lambda d \in D_\infty\ \psi(\lambda d' \in D_\infty d))(\psi(\lambda d'' \in D_\infty\ d'))) =$

$\psi(\lambda d' \in D_\infty\ \psi(\lambda d''' \in D_\infty (\psi(\lambda d'' \in D_\infty d'))))$

(2) Para la semántica denotacional en D_∞, enunciar y demostrar las siguientes propiedades: a) teorema de renombre, b) teorema de coincidencia, c) corrección de la regla β y d) corrección de la regla η.

b) Teorema de coincidencia

Si $\eta w = \eta' w$ para todo $w \in FV(e)$ entonces

$$[\![e]\!]\eta = [\![e]\!]\eta'$$

Demostración. Por inducción en e

- Caso base $e = v$ para algún $v \in \langle Var \rangle \Rightarrow v \in FV(e)$

  Por hipótesis $\eta v = \eta' v$ luego

$$[\![e]\!]\eta = [\![v]\!]\eta = \eta v = \eta' v = [\![v]\!]\eta' = [\![e]\!]\eta'$$

H.I

Si $\eta w = \eta' w$ $\forall w \in FV(e)$ entonces $[\![e]\!]\eta = [\![e]\!]\eta'$

- Paso Inductivo.

  - $e = \lambda v. e'$

  Por H.I $\forall w \in FV(e') - \{v\}$ $\eta w = \eta' w$

Tenemos que

$$[\![e]\!]\eta = [\![\lambda v. e']\!]\eta = \psi(\lambda d \in D_\infty.\ [\![e']\!][\eta | v:d])$$

$$\eta w = \eta' w \ \forall w \in FV(e') - \{v\} \Rightarrow [\eta | v:d] w = [\eta' | v:d] w \quad \forall w \in (FV(e') - \{v\}) \cup \{v\}$$
$$= FV(e')$$

Entonces por H.I $[\![e']\!][\eta | v:d] = [\![e']\!][\eta' | v:d]$. Luego

$$[\![e]\!]\eta = \psi(\lambda d \in D_\infty.\ [\![e']\!][\eta | v:d])$$
$$= \psi(\lambda d \in D_\infty.\ [\![e']\!][\eta' | v:d])$$
$$= [\![\lambda v. e']\!]\eta'$$

- $e = e_0 e_1$

Por H.I $\eta w = \eta' w \quad \forall w \in FV(e)$

$\eta w = \eta' w \quad \forall w \in FV(e_0) \cup FV(e_1)$

En particular

$\eta w = \eta' w \quad \forall w \in FV(e_0) \overset{H.I}{\Rightarrow} [\![e_0]\!]\eta = [\![e_0]\!]\eta'$

$\eta w = \eta' w \quad \forall w \in FV(e_1) \overset{H.I}{\Rightarrow} [\![e_1]\!]\eta = [\![e_1]\!]\eta'$

Entonces

$$
\begin{aligned}
[\![e]\!]\eta = [\![e_0 e_1]\!]\eta &= \phi([\![e_0]\!]\eta)\,[\![e_1]\!]\eta \\
&= \phi([\![e_0]\!]\eta')\,[\![e_1]\!]\eta' \\
&= [\![e_0 e_1]\!]\eta' \\
&= [\![e]\!]\eta'
\end{aligned}
$$

TEOREMA DE SUSTITUCIÓN (lo usamos en el a)

Si $[\![\delta w]\!]\eta = \eta' w$ para todo $w \in FV(e)$, entonces $[\![e/\delta]\!]\eta = [\![e]\!]\eta'$

Demostración por inducción en e.

- Caso base $e = v$ para algún $v \in \langle Var \rangle$

  por H.I $[\![\delta w]\!]\eta = \eta' w \quad \forall w \in FV(e) \Rightarrow [\![e/\delta]\!]\eta = [\![e]\!]\eta'$

  como $e = v \Rightarrow v \in FV(e)$ luego

  $$[\![e/\delta]\!]\eta = [\![\delta v]\!]\eta = \eta' v = [\![v]\!]\eta' = [\![e]\!]\eta'$$

H.I. Si $[\![\delta w]\!]\eta = \eta' w \quad \forall w \in FV(e) \Rightarrow [\![e/\delta]\!]\eta = [\![e]\!]\eta'$

- Paso inductivo

  - $e = \lambda v. e'$

  Por H.I $[\![\delta w]\!]\eta = \eta' w \quad \forall w \in FV(e) \Rightarrow [\![\delta w]\!]\eta = \eta' w \quad \forall w \in FV(e') - \{v\}$

$$
\begin{aligned}
[\![e/\delta]\!]\eta &= [\![\lambda v. e'/\delta]\!]\eta \\
&= [\![\lambda v'. (e'/[\delta \mid v : v'])]\!]\eta \qquad v' \notin \bigcup \delta w \\
&= \phi(\lambda d \in D_\infty.\ [\![e'/[\delta \mid v : v']]\!][\eta \mid v' : d]) \qquad w \in FV(e') - \{v\}
\end{aligned}
$$

$[\![e]\!]\eta' = [\![\lambda v.e']\!]\eta' = \phi(\lambda d \in D_\infty .\ [\![e']\!][\eta' | v:d])$

Queremos ver que

$\phi(\lambda d \in D_\infty .\ [\![e'/[\delta|v:v']]\!][\eta|v':d]) =$

$\phi(\lambda d \in D_\infty .\ [\![e']\!][\eta'|v:d])$

Para usar la H.I debemos ver que

$[\![[\delta|v:v']w]\!][\eta|v':d] = [\eta'|v:d]w \qquad \forall w \in FV(e')$

Notemos que v puede estar o no en FV(e')

- Caso $w = v$

$[\![[\delta/v:v']w]\!][\eta|v':d] = [\![[\delta/v:v']v]\!][\eta|v':d]$

$= [\eta|v':d]v'$

$= d$

$= [\eta'|v:d]v$

- Caso $w \neq v$

$[\![[\delta/v:v']w]\!][\eta|v':d] = [\![\delta w]\!][\eta|v':d]$

$v' \notin FV(\delta w)$ pues $v' \notin FV(\delta \omega) - \{v\}$ y $v' \neq v$

Entonces $\eta z = [\eta|v':d]z \qquad \forall z \in FV(\delta w)$

por el TC esto nos dice que $[\![\delta w]\!]\eta = [\![\delta w]\!][\eta|v':d]$

Por H.I $[\![\delta w]\!]\eta = \eta' w$ ya que $w \in FV(e') - \{v\}$

y $\eta' w = [\![\delta w]\!][\eta|v':d]$

Luego por H.I

$[\![e'/[\delta|v:v']]\!][\eta|v':d] = [\![e']\!][\eta'|v:d]$

- $e = e_0 e_1$

Por H.I $[\![\delta w]\!]\eta = \eta' w \quad \forall w \in FV(e) \Rightarrow [\![\delta w]\!]\eta = \eta' w \quad \forall w \in FV(e_0) \cup FV(e_1)$

$[\![e_0 e_1/\delta]\!]\eta = \phi([\![e_0/\delta]\!]\eta)\ [\![e_1/\delta]\!]\eta \qquad$ H.I

$= \phi([\![e_0]\!]\eta')\ [\![e_1]\!]\eta'$

$= [\![e_0 e_1]\!]\eta'$

(a) Teorema de renombre

Si $w \notin FV(e) - \{v\}$ entonces
$$[\![\lambda w. (e/v \mapsto w)]\!]\eta = [\![\lambda v. e]\!]\eta$$

Demostración.

$[\![\lambda w. (e/v \to w)]\!]\eta =$
$$= \psi\,(\lambda d \in D_\infty.\ [\![e/v \to w]\!][\eta|w:d])$$

$[\![\lambda v. e]\!]\eta = \psi\,(\lambda d \in D_\infty\ [\![e]\!][\eta|v:d])$

Ahora veamos que $[\![v'/v \to w]\!][\eta|w:d]] = [\eta|v:d](v')\ \forall v' \in FV(e)$

- Caso $v' = v$

$[\![v'/v \to w]\!][\eta|w:d] =$
$[\![v/v \to w]\!][\eta|w:d] =$
$[\![w]\!][\eta|w:d] =$
$d =$
$[\eta|v:d](v) =$
$[\eta|v:d](v')$

- caso $v' \neq v$

$[\![v'/v \to w]\!][\eta|w:d] =$
$[\eta|w:d](v')$

$w \notin FV(e) - \{v\}$
$v' \in FV(e)$ y $v' \neq v \Rightarrow v' \in FV(e) - \{v\}$
$\Rightarrow v' \neq w$
$\Rightarrow [\eta|w:d](v') = \eta v'$

Luego $[\![v'/v \to w]\!][\eta|w:d]] = [\eta|v:d](v')\ \forall v' \in FV(e)$
Entonces por el TS
$[\![e/v \to w]\!][\eta|w:d] = [\![e]\!][\eta|v:d]$

Y luego

$$[\![\lambda w.\ (e/v \to w)]\!]\eta = \psi\,(\lambda d \in D_\infty.\ [\![e/v \to w]\!] [\eta \mid w : d])$$
$$= \psi\,(\lambda d \in D_\infty.\ [\![e]\!] [\eta \mid v : d])$$
$$= [\![\lambda v.\ e\, v]\!]\eta$$

c) Corrección de la regla β

$$[\![(\lambda v.e)e']\!] = [\![e/v \to e']\!]$$

Demostración

$$[\![(\lambda v.e)e']\!]\eta = \phi(\,[\![\lambda v.e]\!]\eta)\ [\![e']\!]\eta$$
$$= \phi(\psi(\lambda d \in D_\infty.\ [\![e]\!] [\eta \mid v : d]))\ [\![e']\!]\eta$$
$$= (\lambda d \in D_\infty.\ [\![e]\!] [\eta \mid v : d])\ [\![e']\!]\eta$$
$$= [\![e]\!] [\eta \mid v : [\![e']\!]\eta]$$
$$= [\![e/v \to e']\!] \qquad TS\ (*)$$

(*) La hipótesis del TS aplicada en este caso es que
$[\![w/v \to e']\!]\eta = [\eta \mid v : [\![e']\!]\eta]\, w \quad \forall w \in FV(e)$

Veamos que efectivamente vale.

- $v = w$

$$[\![w/v \to e']\!]\eta = [\![v/v \to e']\!]\eta = [\![e']\!]\eta$$
$$= [\eta \mid v : [\![e']\!]\eta]\, v$$
$$= [\eta \mid v : [\![e']\!]\eta]\, w$$

- $v \neq w$

$$[\![w/v \to e']\!]\eta = \eta\, w$$
$$= [\eta \mid v : [\![e']\!]\eta]\, w$$

(d) Corrección de la regla η

Si $v \in FV(e)$ entonces $[\![\lambda v.e v]\!] = [\![e]\!]$

$$
\begin{aligned}
[\![\lambda v.\, e v]\!]\eta &= \psi\,(\lambda d \in D_\infty.\ [\![e v]\!][\eta \mid v{:}d]) \\
&= \psi\,(\lambda d \in D_\infty.\ \phi([\![e]\!][\eta \mid v{:}d])\ [\![v]\!][\eta \mid v{:}d]) \\
&= \psi\,(\lambda d \in D_\infty.\ \phi([\![e]\!][\eta \mid v{:}d])\ d) \qquad (v \notin FV(e),\ TC) \\
&= \psi\,(\phi([\![e]\!]\eta)) \\
&= [\![e]\!]\eta
\end{aligned}
$$

(3) Dar un término cerrado M cuya denotación en la semántica normal sea:
a) distinto a $\perp$ pero que para todos N y η, $[\![M\,N]\!]\eta = \perp$
b) distinto a $\perp$ y $[\![M\,(\Delta\Delta)]\!]\eta \neq \perp$

$M = \lambda x\, \Delta\Delta$

a)
$$
\begin{aligned}
[\![M N]\!]\eta &= \phi_{\perp\!\!\!\perp}([\![M]\!]\eta)\ [\![N]\!]\eta \\
&= \phi_{\perp\!\!\!\perp}([\![\lambda x \Delta\Delta]\!]\eta)\ [\![N]\!]\eta \\
&= \underbrace{\phi_{\perp\!\!\!\perp}(\iota_\perp\psi}_{id}(\lambda d \in D.\ \underbrace{[\![\Delta\Delta]\!][\eta \mid x{:}d]}_{\perp}))\ [\![N]\!]\eta \\
&= (\lambda d \in D.\ \perp)\ [\![N]\!]\eta \\
&= \perp
\end{aligned}
$$

b) $M = (\lambda x \lambda y\ xy)$

$$
\begin{aligned}
[\![M(\Delta\Delta)]\!]\eta &= \phi_{\perp\!\!\!\perp}([\![M]\!]\eta)\ [\![\Delta\Delta]\!]\eta \\
&= \phi_{\perp\!\!\!\perp}([\![\lambda x \lambda y\ xy]\!]\eta)\ [\![\Delta\Delta]\!]\eta \\
&= \phi_{\perp\!\!\!\perp}(\iota_\perp\circ\psi(\lambda d \in D.\ [\![\lambda y\ xy]\!][\eta \mid x{:}d]))\ [\![\Delta\Delta]\!]\eta \\
&= \phi_{\perp\!\!\!\perp}(\iota_\perp\circ\psi(\lambda d \in D.\ \iota_\perp\psi(\lambda d' \in D.\ [\![xy]\!][\eta \mid x{:}d \mid y{:}d'])))\ [\![\Delta\Delta]\!]\eta \\
&= \underbrace{\phi_{\perp\!\!\!\perp}(\iota_\perp\circ\psi}_{id}(\lambda d \in D.\ \iota_\perp\psi(\lambda d' \in D.\ \phi_{\perp\!\!\!\perp}(d)(d'))))\ [\![\Delta\Delta]\!]\eta \\
&= (\lambda d \in D.\ \iota_\perp\psi(\lambda d' \in D.\ \phi_{\perp\!\!\!\perp}(d)(d')))\ [\![\Delta\Delta]\!]\eta \\
&= \iota_\perp\psi(\lambda d' \in D.\ \phi_{\perp\!\!\!\perp}([\![\Delta\Delta]\!]\eta)(d')) \\
&= \iota_\perp\psi(\lambda d' \in D.\ \phi_{\perp\!\!\!\perp}(\perp)(d')) \\
&= \iota_\perp\psi(\lambda d' \in D.\ \perp)
\end{aligned}
$$

(4) Explique, sin hacer ninguna cuenta, por qué la semántica eager de $[\![M\,(\Delta\Delta)]\!]\eta$ dado en 2b es $\perp$.

Porque al evaluar $[\![\Delta\Delta]\!]\eta$ obtenemos $\perp$, luego al evaluar $[\![M]\!]\eta$ independientemente del resultado del mismo la evaluación total de $[\![M(\Delta\Delta)]\!]\eta$ va a mapear a $\perp$

(5) Para la semántica denotacional normal del cálculo lambda, considere las propiedades siguientes: a) teorema de sustitución, b) corrección de la regla β, c) corrección de la regla η. ¿Cuáles de esos resultados son válidos? Justificar. Para aquellos resultados que no sean válidos, hallar un contraejemplo.

(a) Es válido

Si $[\![\delta w]\!]\eta = \eta' w$ para todo $w \in FV(e)$, entonces $[\![e/\delta]\!]\eta = [\![e]\!]\eta'$

Demostración por inducción en e.

- Caso base $e = v$ para algún $v \in \langle var \rangle$

  por H.I $[\![\delta w]\!]\eta = \eta' w \;\; \forall w \in FV(e) \Rightarrow [\![e/\delta]\!]\eta = [\![e]\!]\eta'$

  como $e = v \Rightarrow v \in FV(e)$ luego

$$[\![e/\delta]\!]\eta = [\![\delta v]\!]\eta = \eta' v = [\![v]\!]\eta' = [\![e]\!]\eta'$$

H.I. Si $[\![\delta w]\!]\eta = \eta' w \;\; \forall w \in FV(e) \Rightarrow [\![e/\delta]\!]\eta = [\![e]\!]\eta'$

- Paso inductivo

  - $e = \lambda v. e'$

  Por H.I $[\![\delta w]\!]\eta = \eta' w \;\; \forall w \in FV(e) \Rightarrow [\![\delta w]\!]\eta = \eta' w \;\; \forall w \in FV(e') - \{v\}$

$[\![e/\delta]\!]\eta = [\![\lambda v. e'/\delta]\!]\eta$

$= [\![\lambda v'. (e'/[\delta | v : v'])]\!]\eta \qquad v' \notin \bigcup \;\; \delta w$

$= \iota_\perp \circ \psi(\lambda d \in D.\; [\![e'/[\delta | v : v']]\!][\eta | v' : d]) \quad w \in FV(e') - \{v\}$

$[\![e]\!]\eta' = [\![\lambda v. e']\!]\eta' = \iota_\perp \circ \psi(\lambda d \in D.\; [\![e']\!][\eta' | v : d])$

Queremos ver que

$$\iota_\perp \circ \psi \; (\lambda d \in D. \; [\![e' / [\delta | v : v']]\!] [\eta | v' : d]) =$$

$$\iota_\perp \circ \psi \; (\lambda d \in D. \; [\![e']\!] [\eta' | v : d])$$

Para usar la H.I debemos ver que

$$[\![[\delta | v : v'] w]\!] [\eta | v' : d] = [\eta' | v : d] w \qquad \forall w \in FV(e')$$

Notemos que v puede estar o no en $FV(e')$

- Caso $w = v$

$$[\![[\delta | v : v'] w]\!] [\eta | v' : d] = [\![[\delta | v : v'] v]\!] [\eta | v' : d]$$

$$= [\eta | v' : d] v'$$

$$= d$$

$$= [\eta' | v : d] v$$

- Caso $w \neq v$

$$[\![[\delta / v : v'] w]\!] [\eta | v' : d] = [\![\delta w]\!] [\eta | v' : d]$$

$v' \notin FV(\delta w)$ pues $v' \notin FV(\delta w) - \{v\}$ y $v' \neq v$

Entonces $\eta z = [\eta | v' : d] z \quad \forall z \in FV(\delta w)$

por el TC esto nos dice que $[\![\delta w]\!] \eta = [\![\delta w]\!] [\eta | v' : d]$

Por H.I $[\![\delta w]\!] \eta = \eta' w$ ya que $w \in FV(e') - \{v\}$

y $\eta' w = [\![\delta w]\!] [\eta | v' : d]$

Luego por H.I

$$[\![e' / [\delta | v : v']]\!] [\eta | v' : d] = [\![e']\!] [\eta' | v : d]$$

- $e = e_0 e_1$

Por H.I $[\![\delta w]\!] \eta = \eta' w \;\; \forall w \in FV(e) \Rightarrow [\![\delta w]\!] \eta = \eta' w \;\; \forall w \in FV(e_0) \cup FV(e_1)$

$$[\![e_0 e_1 / \delta]\!] \eta = \phi_\perp ([\![e_0 / \delta]\!] \eta) \; [\![e_1 / \delta]\!] \eta \qquad \text{H.I}$$

$$= \phi_\perp ([\![e_0]\!] \eta') \; [\![e_1]\!] \eta'$$

$$= [\![e_0 e_1]\!] \eta'$$

b) Es válido

Demostración

$$[\![(\lambda v.e)e']\!]\eta = \phi_{\perp\!\!\perp}([\![\lambda v.e]\!]\eta)\ [\![e']\!]\eta$$

$$= \underbrace{\phi_{\perp\!\!\perp}(\iota_\perp \cdot \psi}_{id}(\lambda d\in D.\ [\![e]\!][\eta|v:d]))\,[\![e']\!]\eta$$

$$= (\lambda d\in D.\ [\![e]\!][\eta|v:d])\ [\![e']\!]\eta$$

$$= [\![e]\!][\eta|v:[\![e']\!]\eta]$$

$$= [\![e/v\to e']\!] \qquad \text{TS } (*)$$

(*) La hipótesis del TS aplicada en este caso es que

$$[\![w/v\to e']\!]\eta = [\eta|v:[\![e']\!]\eta]w \qquad \forall w\in FV(e)$$

Veamos que efectivamente vale.

- $v=w$

$$[\![w/v\to e']\!]\eta = [\![v/v\to e']\!]\eta = [\![e']\!]\eta$$
$$= [\eta|v:[\![e']\!]\eta]v$$
$$= [\eta|v:[\![e']\!]\eta]w$$

- $v\neq w$

$$[\![w/v\to e']\!]\eta = \eta w$$
$$= [\eta|v:[\![e']\!]\eta]w$$

(c) No es válida

Contraejemplo: $\lambda v(\Delta\Delta)v$ con $v\notin FV(\Delta\Delta)$

$$[\![\lambda v\,(\Delta\Delta)v]\!]\eta = \iota_\perp\psi(\lambda d\in D.\ [\![(\Delta\Delta)v]\!][\eta|v:d])$$

$$= \iota_\perp\cdot\psi(\lambda d\in D.\ \phi_{\perp\!\!\perp}([\![\Delta\Delta]\!][\eta|v:d])\,[\![v]\!][\eta|v:d])$$

$$= \iota_\perp\cdot\psi(\lambda d\in D.\ \phi_{\perp\!\!\perp}(\perp)\,d)$$

$$= \iota_\perp\circ\psi(\lambda d\in D.\ \perp_{D\to D}\,d)$$

$$= \iota_\perp\circ\psi(\lambda d\in D.\ \perp)$$

Pero

$$[\![(\Delta\Delta)]\!]\eta = \perp$$

(6) Para la semántica denotacional eager del cálculo lambda, ¿Cuáles de esos resultados siguen siendo válidos? Justificar. Para aquellos resultados que no sean válidos, hallar un contraejemplo, o explicar por qué el enunciado original no tiene sentido.

El teorema de sustitución no es válido por los tipos.

Para cualquier expresión lambda e y cualquier sustitución δ, cualquier η, η' $[\![\delta w]\!]\eta = \eta' w$ es falso para cualquier $w \in FV(e)$ $[\![\delta w]\!]\eta$ y $\eta' w$ son incomparables, ya que $[\![\delta w]\!]\eta = \iota_\perp(\eta w) \in D$ y $\eta' w \in V$.

La corrección β no es válida, Contraejemplo

$$[\![(\lambda x\ y)\ (\Delta\Delta)]\!]\eta = \phi_{\perp\!\!\perp}([\![\lambda x y]\!]\eta)_{\perp\!\!\perp}[\![\Delta\Delta]\!]\eta$$
$$= \phi_{\perp\!\!\perp}([\![\lambda x y]\!]\eta)_{\perp\!\!\perp}(\perp)$$
$$= \perp$$

Pero

$$[\![y/x \to (\Delta\Delta)]\!]\eta = [\![y]\!]\eta$$
$$= \iota_\perp(\eta y)$$

La corrección η no es válida

Contraejemplo: $\lambda v (\Delta\Delta) v$ con $v \notin FV(\Delta\Delta)$

$$[\![\lambda v\ (\Delta\Delta)\ v]\!]\eta = \iota_\perp\psi(\lambda d \in V.\ [\![(\Delta\Delta) v]\!][\eta | v{:}d])$$
$$= \iota_\perp \circ \psi(\lambda d \in V.\ \phi_{\perp\!\!\perp}([\![\Delta\Delta]\!][\eta|v{:}d])_{\perp\!\!\perp}[\![v]\!][\eta| v{:}d])$$
$$= \iota_\perp \circ \psi(\lambda d \in V.\ \phi_{\perp\!\!\perp}(\perp)_{\perp\!\!\perp} d)$$
$$= \iota_\perp \circ \psi(\lambda d \in V.\ \perp_{D\to D}\, d)$$
$$= \iota_\perp \circ \psi(\lambda d \in V.\ \perp)$$

Pero

$$[\![(\Delta\Delta)]\!]\eta = \perp$$

(7) Proponga un enunciado alternativo para el Teorema de Sustitución que sea válido para la semántica denotacional eager.

Si $[\![\delta w]\!]\eta = \iota_\perp(\eta' w)$ para todo $w \in FV(e)$, entonces $[\![e/\delta]\!]\eta = [\![e]\!]\eta'$

(8) ¿Cuáles afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas? Justificar. Denotamos a $[\![\_]\!]$, $[\![\_]\!]_N$ y $[\![\_]\!]_E$ como la semántica denotacional en D_∞, normal y eager respectivamente.

a) Si $[\![e]\!]\eta = \perp$, entonces $[\![e]\!]_N\eta = \perp$

b) Si $[\![e]\!]\eta = \perp$, entonces $[\![e]\!]_E\eta = \perp$

c) Si $[\![e]\!]_N\eta \neq \perp$, entonces $[\![e]\!]_E\eta \neq \perp$

d) Si $[\![e]\!]_E\eta \neq \perp$, entonces $[\![e]\!]_N\eta \neq \perp$

e) En el contexto de la semántica denotacional normal las funciones

$$\phi_{\perp\!\!\perp} : D \to [D \to D] \qquad \iota_\perp \circ \psi : [D \to D] \to D$$

definen un isomorfismo entre D y $[D \to D]$.

f) En el contexto de la semántica denotacional eager vale

$$(\phi_{\perp\!\!\perp}) \circ (\iota_\perp \circ \psi) = id_{V \to D}$$

De contestar verdadero: ¿qué dice esto con respecto a la corrección de la regla β?

(a) Falso

$[\![\lambda y. \Delta\Delta y]\!]\eta = \psi(\lambda d \in D_\infty. [\![\Delta\Delta y]\!][\eta|y:d])$

$= \psi(\lambda d \in D_\infty. \phi([\![\Delta\Delta]\!][\eta|y:d])\, [\![y]\!][\eta|y:d])$

$= \psi(\lambda d \in D_\infty. \phi(\perp)\, d)$

$= \psi(\lambda d \in D_\infty. \perp)$

$= \perp$

$[\![\lambda y. \Delta\Delta y]\!]_N\eta = \iota_\perp \cdot \psi(\lambda d \in D. [\![\Delta\Delta y]\!]_{N\eta}[\eta|y:d])$

$= \iota_\perp \cdot \psi(\lambda d \in D. \phi_{\perp\!\!\perp}([\![\Delta\Delta]\!]_N[\eta|y:d])\, [\![y]\!]_N[\eta|y:d])$

$= \iota_\perp \cdot \psi(\lambda d \in D. \phi_{\perp\!\!\perp}(\perp)\, d)$

$= \iota_\perp \cdot \psi(\lambda d \in D. \perp)$

b) Falso

$[\![\lambda y. \Delta\Delta y]\!]_E\eta = \iota_\perp \circ \psi(\lambda d \in V. [\![\Delta\Delta y]\!]_{E\eta}[\eta|y:d])$

$= \iota_\perp \circ \psi(\lambda d \in V. \phi_{\perp\!\!\perp}([\![\Delta\Delta]\!]_E[\eta|y:d])_{\perp\!\!\perp}\, [\![y]\!]_E[\eta|y:d])$

$= \iota_\bot \circ \Psi(\lambda d \in V.\ \phi_\bot(\bot)_\bot\ d)$

$= \iota_\bot \circ \Psi(\lambda d \in V.\ \bot)$

c) Falso

$[\![(\lambda x.y)\ (\Delta\Delta)]\!]_{N\eta} = \phi_\bot([\![\lambda x.y]\!]_{N\eta})\ [\![\Delta\Delta]\!]_{N\eta}$

$= \underbrace{\phi_\bot(\iota_\bot\Psi}_{id}(\lambda d \in D.\ [\![y]\!]_N(\eta | x : d])))\ [\![\Delta\Delta]\!]_{N\eta}$

$= (\lambda d \in D.\ \eta y)\ [\![\Delta\Delta]\!]_{N\eta}$

$= (\lambda d \in D\ \eta y)$

$= \eta y$

$[\![(\lambda x.y)(\Delta\Delta)]\!]_{E\eta} = \phi_\bot([\![\lambda x.y]\!]_{E\eta})_\bot [\![\Delta\Delta]\!]_{E\eta}$

$= \phi_\bot([\![\lambda x.y]\!]_{E\eta})_\bot\ \bot$

$= \bot$

d) Verdadero. La prueba formal es complicada, pero la idea intuitiva es que en la evaluación eager se hacen mas contracciones β que en la evaluación normal, por ende si ninguna contracción β en la evaluación eager causa que la semántica de la expresión sea $\bot$ entonces tampoco va a suceder en la evaluación normal.

e) Falso

$\phi_\bot \circ (\iota_\bot \circ \Psi) = Id_{D\to D}$

Pero $(\iota_\bot \circ \Psi) \circ \phi_\bot \neq Id_D$

Ya que si tomamos a $\bot$ como entrada, Ψ tiene como imagen a V, por ende no hay $f: D \to D$ tal que $(\iota_\bot \circ \Psi)(f) = \bot$.

f) Verdadero. Esto nos dice que la corrección β es verdadera siempre y cuando el operando tenga semántica distinta a $\bot$. Es decir

$$[\![(\lambda v.e)e']\!] = [\![e / v \to e']\!] \text{ siempre que } [\![e']\!] \neq \bot.$$