Iván Renison	Parcial 2 Lenguajes y Compiladores	HOJA Nº FECHA 24.06.12

1a)

Si $e \Rightarrow_E z$ entonces $e \rightarrow^* z$

Demostración por inducción en $\Rightarrow_E$:

Para $\lambda v. e \Rightarrow_E \lambda v. e$ es cierto por caso vacío de $\rightarrow^*$

Para caso inductivo:

Supongamos $e_0 \Rightarrow_E \lambda v. e_0'$, $e_1 \Rightarrow_E e_1'$ y $e_0'/[v : e_1'] \Rightarrow_E e'$

Tenemos por definición de $\Rightarrow_E$ que $e_0 e_1 \Rightarrow_E e'$

Veamos que $e_0 e_1 \rightarrow^* e'$

Por HI:

$e_0 \rightarrow^* \lambda v. e_0'$

Definición $\rightarrow$, transitividad $\rightarrow^*$

$\Rightarrow e_0 e_1 \rightarrow^* (\lambda v. e_0') e_1$

Por HI: $e_1 \rightarrow^* e_1'$, Definición $\rightarrow$, transitividad $\rightarrow^*$

$\Rightarrow e_0 e_1 \rightarrow^* (\lambda v. e_0') e_1'$

Definición $\rightarrow$ (regla β), transitividad $\rightarrow^*$

$\Rightarrow e_0 e_1 \rightarrow^* e_0'/[v : e_1']$

Por HI: $e_0'/[v : e_1'] \rightarrow^* e'$, transitividad $\rightarrow^*$

$\Rightarrow e_0 e_1 \rightarrow^* e'$

□

NOTA

Escaneado con CamScanner

1b)

Propongo

$e = (\lambda x . \lambda y . (\lambda z . z) x) (\lambda w . w)$

$z = \lambda y . \lambda w . w$

NOTA

Iván
Rehison

1c)

Si $e \Rightarrow_E z$ entonces $[\![e]\!]\eta = [\![z]\!]\eta$

Verdadero, demostración por inducción en $\Rightarrow_E$

Para $\lambda v.e \Rightarrow_E \lambda v.e$ es cierto por reflexividad de $=$

Para caso inductivo

supongamos $e_0 \Rightarrow_E \lambda v. e_0'$, $e_1 \Rightarrow_E e_1'$ y $e_0'/[v: e_1'] \Rightarrow_E e'$

Tenemos por definición de $\Rightarrow_E$ que $e_0\, e_1 \Rightarrow_E e'$

veamos que $[\![e_0\, e_1]\!]\eta \Rightarrow_E [\![e']\!]\eta$

$$
\begin{aligned}
& [\![e_0\, e_1]\!]\eta \\
&= \varphi([\![e_0]\!]\eta)([\![e_1]\!]\eta) && \text{Definición } [\![\ ]\!] \\
&= \varphi([\![\lambda v. e_0']\!]\eta)([\![e_1']\!]\eta) && \text{HI: } [\![e_0]\!]\eta = [\![\lambda v. e_0']\!]\eta,\ [\![e_1]\!]\eta = [\![e_1']\!]\eta \\
&= \varphi(\psi(\lambda d \in D_\infty. [\![e_0']\!][\eta \mid v : d]))([\![e_1']\!]\eta) && \text{Definición } [\![\ ]\!] \\
&= (\lambda d \in D_\infty. [\![e_0']\!][\eta \mid v : d])([\![e_1']\!]\eta) && \varphi \text{ es inversa de } \psi \\
&= [\![e_0']\!][\eta \mid v : [\![e_1']\!]\eta] && \text{Teorema de sustitución finita} \\
&= [\![e_0'/[v : e_1']]\!]\eta && \text{HI: } [\![e_0'/[v : e_1']]\!]\eta = [\![e']\!]\eta \\
&= [\![e']\!]\eta
\end{aligned}
$$

□

Teorema de sustitución finita:

$$[\![e/x : e']\!]\eta = [\![e]\!][\eta \mid x : [\![e']\!]\eta]$$

NOTA

1d)

$(\lambda x f. f(f x))((\lambda w z. z)(\lambda x. x x))(\lambda x. x x)$

$\quad (\lambda x f. f(f x))((\lambda w z. z)(\lambda x. x x))$

$\quad\quad (\lambda x f. f(f(x))) \Rightarrow_E \ldots$ (Pongo ... cuando se repite el término anterior)

$\quad\quad (\lambda w z. z)(\lambda x. x x)$

$\quad\quad\quad \lambda w z. z \Rightarrow_E \ldots$

$\quad\quad\quad \lambda x. x x \Rightarrow_E \ldots$

$\quad\quad\quad \lambda z. z \Rightarrow_E \ldots$

$\quad\quad \Rightarrow \lambda z. z$

$\quad\quad \lambda f. f(f(\lambda z. z)) \Rightarrow_E \ldots$

$\quad \Rightarrow_E \lambda f. f(f(\lambda z. z))$

$\quad \lambda x. x x \Rightarrow_E \ldots$

$\quad (\lambda x. x x)((\lambda x. x x)(\lambda z. z))$

$\quad\quad \lambda x. x x \Rightarrow_E \ldots$

$\quad\quad (\lambda x. x x)(\lambda z. z)$

$\quad\quad\quad \lambda x. x x \Rightarrow_E \ldots$

$\quad\quad\quad \lambda z. z \Rightarrow_E \ldots$

$\quad\quad\quad (\lambda z. z)(\lambda z. z)$

$\quad\quad\quad\quad \lambda z. z \Rightarrow_E \ldots$

$\quad\quad\quad\quad \lambda z. z \Rightarrow_E \ldots$

$\quad\quad\quad\quad \lambda z. z \Rightarrow_E \ldots$

$\quad\quad\quad \Rightarrow_E \lambda z. z$

$\quad\quad \Rightarrow_E \lambda z. z$

$\quad\quad (\lambda z. z)(\lambda z. z)$

$\quad\quad\quad \lambda z. z \Rightarrow_E \ldots$

$\quad\quad\quad \lambda z. z \Rightarrow_E \ldots$

$\quad\quad\quad \lambda z. z \Rightarrow_E \ldots$

NOTA

Iván
Renison

$\Rightarrow_E \lambda z. z$

$\Rightarrow_E \lambda z. z$

$\Rightarrow_E \lambda z. z$

NOTA

Escaneado con CamScanner

2)

a)

$$FV(\text{let } \langle v, w\rangle \equiv e_0 \text{ in } e) = FV(e_0) \cup (FV(e) - \{v, w\})$$

$$(\text{let } \langle v, w\rangle \equiv e_0 \text{ in } e)/\delta$$
$$= \text{let } \langle v', w'\rangle \equiv (e_0/\delta) \text{ in } (e/[\delta \mid v : v', w : w']$$

Donde

$$v', w' \notin \bigcup_{x \in FV(e) - \{v, w\}} FV(\delta(x)) \quad \wedge \quad (v' \neq w' \Leftrightarrow v \neq w)$$

b)

$$\frac{e/[v : e_0.0\ ,\ w : e_0.1] \Rightarrow_N z}{\text{let } \langle v, w\rangle \equiv e_0 \text{ in } e \Rightarrow_N z}$$

c)

$$[\![\text{let } \langle v, w\rangle \equiv e_0 \text{ in } e]\!]\eta$$
$$= [\![e]\!][\eta \mid v : z, w : z']$$

Donde:

$$z = \left(\lambda t \in V_{tuple} . \begin{cases} |t| > 0 \to t_0 \\ \text{si no} \to tyerr \end{cases}\right)_{tuple*} ([\![e_0]\!]\eta)$$

$$z' = \left(\lambda t \in V_{tuple} . \begin{cases} |t| > 1 \to t_1 \\ \text{si no} \to tyerr \end{cases}\right)_{tuple*} ([\![e_0]\!]\eta)$$

Estas definiciones hacen que si v y w no se usan, entonces no importa que pasa con e_0 (puede dar algún error o no ser una tupla)

Si v se usa y w no, con que e_0 de una tupla de al menos un elemento alcanza y si se usan ambas, con que de una tupla de al menos dos elementos alcanza, pero puede dar de mas elementos sin problema

Las definiciones usan la idea de que el término es como

NOTA

Iván
Renison

HOJA Nº

FECHA

si fuera $(\lambda v. \lambda w. e)(e_0.0)(e_0.1)$

si $v = w$ queda el valor de la posición 1, pero se podría hacer que quede el de la posición 0

NOTA

3) Considero que S empieza desde 0

$$e = \mathbf{letrec}\ f \equiv \lambda x. \underbrace{\mathbf{if}\ x \leq 0\ \mathbf{then}\ \langle 0 \rangle\ \mathbf{else}\ \langle f(x-1), x \rangle}_{e'}\ \mathbf{in}\ f$$

4a)

$[\![e]\!]\eta$

$= [\![f]\!][\eta \mid f : \iota_{fun}(Y\ F)]$ } sea $F\ h\ z = [\![e']\!][\eta \mid f : \iota_{fun}\ h, x : z]$

$= \iota_{fun}(Y\ F)$

Propongo:

$$F^i \perp_{V_{fun}} = \left(\lambda y. \begin{cases} y \leq 0 & \to \langle 0 \rangle \\ y < i & \to S\ y \\ \text{sino} & \to \perp_D \end{cases}\right)_{int*} \qquad (\text{para } i > 0)$$

Demostración

Caso base:

$F \perp z$ } sea $\eta' = [\eta \mid f : \iota_{fun} \perp_{V_{fun}}, x : z]$

$= [\![e']\!]\eta'$

$$= \left(\lambda b. \begin{cases} b \to [\![\langle 0 \rangle]\!]\eta' \\ \text{sino} \to [\![\langle f(x-1), x \rangle]\!]\eta' \end{cases}\right)_{bool*} [\![x \leq 0]\!]\eta'$$

$$= \left(\lambda y. \begin{cases} y \leq 0 \to \langle 0 \rangle \\ \text{sino} \to \perp_D \end{cases}\right)_{int*} z$$

Caso inductivo:

$F(F^i \perp)\ z$ } sea $\eta' = [\eta \mid f : \iota_{fun}(F^i \perp), x : z]$

$= [\![e']\!]\eta'$

$$= \left(\lambda b. \begin{cases} b \to [\![\langle 0 \rangle]\!]\eta \\ \text{sino} \to [\![\langle f(x-1), x \rangle]\!]\eta' \end{cases}\right)_{bool*} [\![x \leq 0]\!]\eta'$$

} sea $\langle \ldots \rangle^*$ lo que esperamos que sea

$$= \left(\lambda y. \begin{cases} y \leq 0 \to \langle 0 \rangle \\ \text{sino} \to \langle [\![f(x-1)]\!]\eta', [\![x]\!]\eta' \rangle^* \end{cases}\right)_{int*} z$$

$$= \left(\lambda y. \begin{cases} y \leq 0 \to \langle 0 \rangle \\ \text{sino} \to \langle (\lambda g. g_*([\![x-1]\!]\eta'))_{fun*}([\![f]\!]\eta'), y \rangle^* \end{cases}\right)_{int*} z$$

NOTA

Iván
Renison

HOJA Nº
FECHA

$$= \left(\lambda y. \begin{cases} y \leq 0 \to \langle 0 \rangle \\ \text{sino} \to \langle (\lambda g.\, g\,(y-1))(F^i \perp),\ y \rangle^* \end{cases}\right)_{int*} z$$

$$= \left(\lambda y. \begin{cases} y \leq 0 \to \langle 0 \rangle \\ \text{sino} \to \langle F^i \perp (y-1),\ y \rangle^* \end{cases}\right)_{int*} z$$

$\Big\}$ HI

$$= \left(\lambda y. \begin{cases} y \leq 0 \to \langle 0 \rangle \\ y-1 \leq 0 \to \langle \langle 0 \rangle, y-1 \rangle \\ y-1 < i \to \langle S\,(y-1),\ y \rangle \\ \text{sino} \to \perp_D \end{cases}\right)_{int*} z$$

$$= \left(\lambda y. \begin{cases} y \leq 0 \to \langle 0 \rangle \\ y < i \to S\,y \\ \text{sino} \to \perp_D \end{cases}\right)_{int*} z$$

Y tomo el supremo de los $F^i \perp_{V_{fun}}$

$$= \iota_{fun}\left(\left(\lambda y. \begin{cases} y \leq 0 \to \langle 0 \rangle \\ \text{sino} \to S\,y \end{cases}\right)_{int*}\right)$$

Notar que me estoy salteando muchos pasos del manejo de errores para que no quede tan largo

NOTA

4b)

e 1

$$\overbrace{\lambda x.\ \text{letrec } f \equiv \lambda x.e' \text{ in } e'}^{\hat{e}} \Rightarrow_E \ldots$$

e

$\Rightarrow_E \hat{e}$

$1 \Rightarrow 1$

$\text{letrec } f \equiv \lambda x.e' \text{ in if } 1 \leq 0 \text{ then } \langle 0 \rangle \text{ else } \langle f(1-1), 1 \rangle$

$\quad \text{if } 1 \leq 0 \text{ then } \langle 0 \rangle \text{ else } \langle \hat{e}(1-1), 1 \rangle$

$\quad\quad 1 \leq 0$

$\quad\quad\quad 1 \Rightarrow_E 1$

$\quad\quad\quad 0 \Rightarrow_E 0$

$\quad\quad \Rightarrow_E \text{false}$

$\quad\quad \langle \hat{e}(1-1), 1 \rangle$

$\quad\quad\quad \hat{e}(1-1)$

$\quad\quad\quad\quad \hat{e} \Rightarrow_E \ldots$

$\quad\quad\quad\quad 1-1$

$\quad\quad\quad\quad\quad 1 \Rightarrow_E 1$

$\quad\quad\quad\quad\quad 1 \Rightarrow_E 1$

$\quad\quad\quad\quad \Rightarrow_E 0$

$\quad\quad\quad\quad \text{letrec } f \equiv \lambda x.e' \text{ in if } 0 \leq 0 \text{ then } \langle 0 \rangle \text{ else } \langle f(0-1), 0 \rangle$

$\quad\quad\quad\quad\quad \text{if } 0 \leq 0 \text{ then } \langle 0 \rangle \text{ else } \langle \hat{e}(0-1), 0 \rangle$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \leq 0$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \Rightarrow_E 0$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \Rightarrow_E 0$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \Rightarrow_E \text{true}$

$\quad\quad\quad\quad\quad \langle 0 \rangle$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \Rightarrow_E 0$

NOTA

Iván Benison

HOJA Nº

FECHA

$\Rightarrow_E \langle 0 \rangle$

$\Rightarrow_E \langle 0 \rangle$

$\Rightarrow_E \langle 0 \rangle$

$1 \Rightarrow_E 1$

$\Rightarrow_E \langle \langle 0 \rangle, 1 \rangle$

$\Rightarrow_E \langle \langle 0 \rangle, 1 \rangle$

$\Rightarrow_E \langle \langle 0 \rangle, 1 \rangle$

$\Rightarrow_E \langle \langle 0 \rangle, 1 \rangle$

NOTA