Lenguajes y compiladores - Guía 3

Repaso. Se recomienda no utilizar más de 15 minutos en esto.

(1) Explicar conceptualmente el error cometido en cada una de las siguientes sustituciones. Sea $p = \exists \mathsf{r}.(0 \le \mathsf{r} < \mathsf{y}) \wedge (\mathsf{x} = \mathsf{y} * \mathsf{z} + \mathsf{r})$.

(a) $p/(id \mid \mathsf{y}\colon 3 + \mathsf{r}) = (\exists \mathsf{r}.(0 \le \mathsf{r} < 3 + \mathsf{r}) \wedge (\mathsf{x} = \mathsf{y} * \mathsf{z} + \mathsf{r}))$

(b) $p/(id \mid y\colon 3 + \mathsf{r}) = (\exists \mathsf{t}.(0 \le \mathsf{t} < 3 + \mathsf{r}) \wedge (\mathsf{x} = 3 + \mathsf{r} * \mathsf{z} + \mathsf{t}))$

(c) $p/(id \mid r\colon 3 + \mathsf{w}) = (\exists \mathsf{t}.(0 \le 3 + \mathsf{w} < \mathsf{y}) \wedge (\mathsf{x} = \mathsf{y} * \mathsf{z} + 3 + \mathsf{w}))$

(a) Se captura la variable libre r y se liga al cuantificador.

(b) Se sustituye la variable y cuando δ habla sobre la metavariable y

(c) La sustitución solo se aplica a variables libres, y la r en $\exists r.(0 \le r < y)$ está ligada.

(c) $p/(id \mid r\colon 3 + \mathsf{w}) = (\exists \mathsf{t}.(0 \le 3 + \mathsf{w} < \mathsf{y}) \wedge (\mathsf{x} = \mathsf{y} * \mathsf{z} + 3 + \mathsf{w}))$

(2) Decida si las siguientes afirmacions son ciertas o no; justifique.

(a) Para toda frase p y toda sustitución δ, se cumple $FV(p) \subseteq FV(p/\delta)$.

(b) Para toda frase p y toda sustitución δ, se cumple

$$FV(p/\delta) \subseteq FV(p) \cup \bigcup_{v \in FV(p)} FV(\delta\, v)$$

(a) Falso

sea $p = \exists x.\ x > y$

$F(V) = y$

sea $\delta y = w$ $\qquad p/\delta = \exists x.\ x > w$

$FV(p/\delta) = w$

$y = FV(p) \not\subseteq FV(p/\delta) = w$

(b) Correcto, si w es una variable libre en p y no hay sustitución para w entonces $\delta w = w$ y $FV(p/\delta) \subseteq FV(p)$

Ahora si para w hay una sustitución como no se debe capturar la variable y ligarla entonces las variables de la sustitución seguirán siendo libres, luego $FV(p/\delta) \subseteq FV(p) \cup \bigcup_{w \in FV(p)} FV(\delta w)$

(3) Dada una frase p, una sustitución δ y un estado σ, definir un estado σ' tal que $[\![p/\delta]\!]\sigma = [\![p]\!]\sigma'$.

sea $p = x * y$

$\sigma w = 4$ $\quad \sigma' x = 2$

$\sigma z = 1$ $\quad \sigma' y = 2$

$\delta x = w$

$\delta y = z$

$$\begin{aligned}[\![p/\delta]\!]\sigma &= [\![(x*y)/\delta]\!]\sigma \\ &= [\![x/\delta * y/\delta]\!]\sigma \\ &= [\![w * z]\!]\sigma \\ &= [\![w]\!]\sigma * [\![z]\!]\sigma \\ &= 4 * 1 \\ &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\![p]\!]\sigma' &= [\![x*y]\!]\sigma' \\ &= [\![x]\!]\sigma' * [\![y]\!]\sigma' \\ &= 2 * 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

(4) Dé un ejemplo concreto en su lenguaje de programación preferido que evidencie el teorema de renombre. Ayuda: piense en qué contexto hay variables ligadas.

(1) Decida si los siguientes órdenes parciales son predominios ó dominios.

(a) $\langle\text{intexp}\rangle$, con el orden discreto (b) $\langle\text{intexp}\rangle \to \mathbb{B}_\perp$ (c) $\mathbb{B}_\perp \to \langle\text{intexp}\rangle$

Si necesita defina la relación de orden para $A \to P$, cuando P es un orden parcial.

(a) Es predominio, sólo hay cadenas no interesantes de un elemento donde dicho elemento es el supremo, pero no hay elemento mínimo.

(b) $\langle\text{intexp}\rangle \to \mathbb{B}_\perp$

$f \leq g$ sii $\forall x \in \langle\text{intexp}\rangle \; fx \leq_{\mathbb{B}_\perp} gx$

Todas las cadenas son no interesantes por ende tienen supremo, y el elemento mínimo es la función constante que asigna todo a $\perp$

(c) $\mathbb{B}_\perp \to \langle\text{intexp}\rangle$

$f \leq g$ sii $\forall x \in \mathbb{B}_\perp \; fx \leq_{\langle\text{intexp}\rangle} gx$

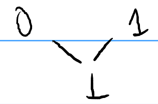
$\langle\text{intexp}\rangle$ con el orden discreto

como $\langle\text{intexp}\rangle$ es predominio $\mathbb{B}_\perp \to \langle\text{intexp}\rangle$ también lo es.

(2) Hacer diagramas que representen los siguientes dominios, si es posible.

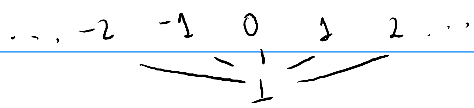
(a) $\mathbb{B}_\perp$ (b) $\mathbb{N}_\perp$ (c) $\mathbb{B} \to \mathbb{B}_\perp$ (d) $\mathbb{N}^\infty$ (e*) $\mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty$

(a)



(orden discreto)

(b)



(c)

(orden discreto)

$f_\perp = \begin{cases} 0 \to \perp \\ 1 \to \perp \end{cases}$ $f^1 = \begin{cases} 0 \to 0 \\ 1 \to 1 \end{cases}$ $f^2 = \begin{cases} 0 \to 1 \\ 1 \to 1 \end{cases}$ $f^3 = \begin{cases} 0 \to 1 \\ 1 \to 0 \end{cases}$

$f^4 = \begin{cases} 0 \to 0 \\ 1 \to 0 \end{cases}$ $f^5 = \begin{cases} 0 \to \perp \\ 1 \to 1 \end{cases}$ $f^6 = \begin{cases} 0 \to \perp \\ 1 \to 0 \end{cases}$ $f^7 = \begin{cases} 0 \to 0 \\ 1 \to \perp \end{cases}$

$f^8 = \begin{cases} 0 \to 1 \\ 1 \to \perp \end{cases}$

$f_1 \quad f_2 \quad \ldots\ldots \quad f_8$

$f_\perp$

(d)

∞

$\vdots$

2

1

0

(3) Indique el menor elemento para cada dominio de los ejercicios 1 y 2.

$\langle intexp \rangle \to \mathbb{B}_\perp$ el mínimo es

$f_\perp : \langle intexp \rangle \to \mathbb{B}_\perp$

$f\, x = \perp$

$\mathbb{B}_\perp$ el mínimo es $\perp$

$\mathbb{N}_\perp$ el mínimo es $\perp$

$\mathbb{B} \to \mathbb{B}_\perp$ el mínimo es

$f_\perp : \mathbb{B} \to \mathbb{B}_\perp$

$f\, p = \perp$

$\mathbb{N}^\infty$ el mínimo es 0

$\mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty$ el mínimo es

$f_0 : \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty$

$f\, x = 0$

(4) Calcule, en caso de existir, el supremo de los siguientes conjuntos:

(a) $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$, en $\mathbb{N}_\perp$ (b) $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$, en $\mathbb{N}^\infty$

(c) $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es primo}\}$, en $\mathbb{N}^\infty$ (d) $\mathcal{A} = \{V, F\}$, en $\mathbb{B}_\perp$

(e) $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp$, donde

$$f_n x = \begin{cases} 1 & \text{si } x|n \\ \perp & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(f*) $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp$, donde

$$f_n x = \begin{cases} x & \text{si } |x - 10| < log(n+1) \\ \perp & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(a) es un conjunto infinito creciente, no tiene supremo

(b) El supremo es ∞

(c) el supremo es ∞

(d) El supremo es V

(e) El supremo es

$f = 1$

(f) La función identidad es el supremo

(5) Para cada uno de los siguientes espacios de funciones, dar ejemplos de: *(a)* funciones monótonas y no continuas; *(b)* funciones continuas; y *(c)* funciones continuas y estrictas.

(a) de $\mathbb{B}_\perp$ en $\mathbb{B}_\perp$ (b) de $\mathbb{N}_\perp$ en $\mathbb{N}_\perp$
(c) de $\mathbb{N}^\infty$ en $\mathbb{N}_\perp$ (d) de $\mathbb{N}^\infty$ en $\mathbb{N}^\infty$

(a) $f : \mathbb{B}_\perp \to \mathbb{B}_\perp$

No hay funciones monótonas y no continuas o por lo menos no puede encontrar

continua está la identidad, que es continua y estricta.

continua y no estricta es la constante a V o F.

(b) $\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$

La función identidad es monotona y no continua (las cadenas interesantes no tienen supremo). Las funciones constantes son continuas y la constante a $\perp$ estricta.

(c) $\mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}_\perp$

monotona y no continua

$$f_x = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq \infty \\ \perp & \text{c.c} \end{cases}$$

dada la cadena infinita $1 \leq 2 \leq \dots$

$\sup\{f(1), f(2), \dots\} = \sup\{1, 1, 1, \dots\} = 1$

$f \sup\{1, 2, \dots,\} = f\infty = \perp$

función continua $f_x = 5$ (cualquier función constante sirve)

función continua estricta $f_x = \bot$

(d) $\mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty$

monótona y no continua $f_x = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq \infty \\ \infty & \text{si } x = \infty \end{cases}$

dada la cadena inf. $1 \leq 2 \leq \dots$

$\sup\{f(1), f(2) \dots\} = \sup\{1, 1, \dots\} = 1$

$f \sup\{1, 2, \dots\} = f\, \infty = \infty$

Se repite el ejemplo de la función identidad como continua estricta y cualquier constante como continua

(6) En cada uno de los casos del ejercicio 5 caracterizar todas las funciones continuas.

(7) En cada uno de los casos del ejercicio 6 indicar cuáles son estrictas y cuáles no.

(a) f_{id} es estricta, igual que $f_\perp$, f_V y f_F no lo son

(b) $f_\perp$ es estricta, f_n $n \in \mathbb{N}$ no es estricta

(c) $f_\perp$ es estricta, f_{id} y f_i $i \in \mathbb{N}$ no lo son.

(d) f_0 es estricta, f_n $n \in \mathbb{N}$ no lo es.

(8) Para cada una de las siguientes funciones caracterizar los puntos fijos; decidir si existe un menor punto fijo. Si no existe, explicar por qué.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\, n = n$$

$$h : \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty$$
$$h\, n = n + 1$$

$$g : \langle \text{intexp} \rangle \to \langle \text{intexp} \rangle$$
$$g\, e = e$$

$$k : \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty$$
$$k\, n = \begin{cases} n+1 & \text{si } n < 8 \\ n & \text{caso contrario} \end{cases}$$

f puntos fijos $= \{0, 1, 2, \ldots\}$
menor punto fijo $= 0$.

h puntos fijos $= \{\infty\}$
menor punto fijo: ∞

g puntos fijos $= \{\langle \text{intexp} \rangle\}$
tomando el orden discreto no hay punto fijo mínimo

k puntos fijos $= \{8, 9, \ldots\}$
menor punto fijo $= 8$.

(9) Considere las siguientes $F \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp)$,

Dudas con la primera F!

$$F\ f \ = \begin{cases} f & \text{si } f \text{ es una función total} \\ \perp_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\perp} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$F\ f\ n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ f(n-2) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(a) Determine si F es continua.
(b) Calcule $F^{(i)} \perp_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\perp}$, para $i = 0, 1, 2$.

(a) Veamos si son monótonas

Sean $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp$ si $f \leq g$ o $g \leq f$ entonces ambas son funciones totales ya que $\forall x \in \mathbb{N}$ $f x = g x$

o $g x \leq f x$

Luego $F f = f \leq g = F g$

Ahora en el segundo caso, sean $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp$ y $n \in \mathbb{N}$.

· Supongamos $f \leq g$

si $n = 0$ entonces $F f n = 0 \leq 0 = F g n$

si $n \neq 0$ entonces $F f n = f(n-2) \leq g(n-2) = F g n$

Ahora veamos si son continuas

$$F(\sup\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\})\, n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sup\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}(n-2) & c.c \end{cases}$$

$$F f_i\, n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ f_i(n-2) & c.c \end{cases}$$

si $n = 0$ $\quad F(\sup\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\})\, n = 0 = 0 = \sup\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}\, n = \sup\{f_i\, n \mid i \in \mathbb{N}\}$

si $n \neq 0$ $\quad F(\sup\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\})\, n = \sup\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}(n-2)$

$= \sup\{f_i(n-2) \mid i \in \mathbb{N}\}$

$= \sup\{F f_i\, n \mid i \in \mathbb{N}\}$

$= \sup\{F f_i \mid i \in \mathbb{N}\}\, n$

La segunda F es continua

Ahora veamos la primera

Supongamos $f = \sup\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ y f es total

entonces $F(\sup\{f_i : i \in \mathbb{N}\}) = F(f) = f$

$\sup\{F f_i : i \in \mathbb{N}\} = \sup\{f, f_1, f_2, \ldots\} = f$.

Ahora supongamos f no es total

Entonces $F(\sup\{f_i : i \in \mathbb{N}\}) = F(f) = \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp}$

$\sup\{F f_i : i \in \mathbb{N}\} = \sup\{\perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp}, F(f_1), F(f_2), \ldots\}$

Si $\sup\{\perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp}, F(f_1), F(f_2), \ldots\} \neq \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp}$ no se cumple la desigualdad.

(Por ejemplo si el supremo es la función identidad)

La primera F no es continua

(b) $F^0 \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp} n = \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp} n = \perp$

$$F^1 \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp} n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp}(n-2) & \text{c.c} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \perp & \text{c.c} \end{cases}$$

$$F^2 \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp} n = F(F^1 \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp}) n$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ F^1 \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp}(n-2) & n \neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \wedge n-2 = 0 \\ \perp & \text{si } n \neq 0 \wedge n-2 \neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n = 2 \\ \perp & \text{si } n \neq 0 \wedge n \neq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \vee n = 2 \\ \perp & \text{c.c} \end{cases}$$

$F^0 \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp} = \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp}$

$F^1 \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp} = \begin{cases} \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp} & \text{si } \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp} \text{ es continua} \\ \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp} & \text{c.c} \end{cases}$

$F^2 \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp} = \begin{cases} F^1 \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp} & \text{si } F^1 \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp} \text{ es continua} \\ \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp} & \text{c.c} \end{cases}$

$= \{ \perp_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp}$

(10) Calcular la menor $f \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$ que satisface la siguiente ecuación

$$f\ n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n * f\ (n-1) & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Notar que n corre sobre todo $\mathbb{Z}$. Asumir que la multiplicación y la suma son estrictas.

Dudas con este!

$$F f n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n * f(n-1) & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Si F es continua basta con encontrar el menor punto fijo de F, es decir $\sup\{F^i \perp_{\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp} \mid i \in \mathbb{N}\}$

Veamos que F es monótono. Sean $f, g \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$ tales que $f \leq g$

Sea $n \in \mathbb{Z}$. Si $n = 0$ $F f n = 1 \leq 1 = F g n$

Si $n \neq 0$ $F f n = n * f(n-1)$ $F g n = n * g(n-1)$

como $f \leq g \Rightarrow f(n-1) \leq g(n-1)$

$n f(n-1) \leq n g(n-1)$

$F f n \leq F g n$

Ahora veamos que es continua

$$F(\sup\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\})\, n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n * \sup\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}(n-1) & n \neq 0 \end{cases}$$

$$F f_i\, n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n * f_i(n-1) & n \neq 0 \end{cases}$$

Si $n=0$ $\quad F(\sup\{f_i \mid i\in\mathbb{N}\})\,0 = 1 = \sup\{1,1,1\ldots\} = \sup\{F f_i\, n \mid i\in\mathbb{N}\} = \sup\{F f_i : i\in\mathbb{N}\}\,n$

Si $n\neq 0$ $\quad F(\sup\{f_i \mid i\in\mathbb{N}\})\,n = n * \sup\{f_i \mid i\in\mathbb{N}\}(n-1)$

$$= \sup\{n * f_i(n-1) \mid i\in\mathbb{N}\}$$

habria que probar esto

$$= \sup\{F f_i\, n \mid i\in\mathbb{N}\}$$

$$= \sup\{F f_i \mid i\in\mathbb{N}\}\,n$$

Luego F es continua

$$F^0 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n = \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n = \perp$$

$$F^1 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ n \cdot \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp}(n-1) & n\neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & n=0 \\ \perp & n\neq 0 \end{cases}$$

$$F^2 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n = F(F^1 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp})\,n$$

$$= \begin{cases} 1 & n=0 \\ n \cdot F^1 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp}(n-1) & n\neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & n=0 \\ n \cdot 1 & n\neq 0 \wedge n-1=0 \\ \perp & n\neq 0 \wedge n-1\neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ \perp & n\neq 0 \wedge n\neq 1 \end{cases}$$

$$F^3 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n = F(F^2 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp})\,n$$

$$= \begin{cases} 1 & n=0 \\ n \cdot (F^2 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp})(n-1) & n\neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & n=0 \\ n & n\neq 0 \wedge n-1=0 \\ n & n\neq 0 \wedge n-1=1 \\ \perp & n\neq 0 \wedge n-1\neq 0 \wedge n-1\neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & n=0 \\ n & n=1 \\ n & n=2 \\ \bot & c.c \end{cases} = \begin{cases} 1 & n=0 \lor n=1 \\ 2 & n=2 \\ \bot & c.c \end{cases}$$

$$F^4 \bot_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\bot} n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ n \cdot F^3 \bot_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\bot}(n-1) & n\neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & n=0 \\ n & n\neq 0 \lor \; n-1=1 \lor n-1=0 \\ 2n & n\neq 0 \lor \; n-1=2 \\ \bot & c.c \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & n=0 \lor n=1 \\ 2 & n=2 \\ 6 & n=3 \\ c.c & \bot \end{cases}$$

$$F^i \bot_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\bot} n = \begin{cases} n! & n\in\{0,\dots,i-1\} \\ \bot & c.c \end{cases}$$

Claramente mientras i crece se acerca a $\mathbb{Z}^+$

Obviamos la prueba por inducción de $F^i \bot_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\bot} n$.

$$g\,n = \begin{cases} n! & n\geq 0 \\ \bot & c.c \end{cases}$$

Proponemos a g como mínima solución, obviamos la prueba de que $g = \sup\{F^i \bot_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\bot} \mid i\in\mathbb{N}\}$.

(11) Caracterizar las funciones que satisfacen la ecuación

$$f\ n = \begin{cases} f(n-1) & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ n * f\ (n-1) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Comparar esta ecuación con la ecuación del ejercicio 10. ¿Tienen las mismas soluciones?

$$\left\{ f \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : \left(\forall n \in \mathbb{Z}\ f\,n = \begin{cases} n! & n \geq 0 \\ c & \text{c.c} \end{cases} \right) : c \in \mathbb{Z} \right\}$$

No tienen las mismas soluciones.