Lenguajes y compiladores

1er parcial - 2018

2. Determinar si es verdadero o falso. Justificar la respuesta.

   (a) Si P es un poset finito con menor elemento $\bot$, y $F \in P \to P$ es monótona creciente, entonces F tiene un punto fijo.

   (b) Sea p predicado y δ una sustitución. Si $[\![p/\delta]\!]\sigma = V$, entonces existe σ' tal que $[\![p]\!]\sigma' = V$.

   (c) La cadena $F^0\ \bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}, F^1\ \bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}, \ldots$ correspondiente a un programa de la forma **while true do** c es siempre interesante.

(a) Como P es finito y F es monotona creciente F es continua, por ende existe un menor punto fijo.

(b) Verdadero por el lema de sustitución

(c) Falso, while true do skip generaría cadenas de la forma $\sigma, \sigma, \sigma, \sigma, \ldots$

3. Considere el dominio $D = (\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_\bot)$. Justifique las respuestas.

   (a) Muestre una función $F \in D \to D$ que satisfaga simultáneamente: (i) tiene infinitos puntos fijos; (ii) posee un menor punto fijo h; (iii) $h(x)$ es distinto de $\bot$ en los enteros negativos.

   (b) Muestre una función $F \in D \to D$ que tenga puntos fijos pero no tenga un menor punto fijo.

(a) $$F\,f = \begin{cases} f & \text{si } f(x) = x \text{ para } x < 0 \\ f\,id & \text{c.c} \end{cases}$$

Todas las funciones que se comporten como la identidad para los negativos y tomen cualquier valor en los positivos van a ser puntos fijos (incluyendo la función identidad)

El menor punto fijo va a ser

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ \bot & \text{c.c} \end{cases}$$

(b)
$$F\,f = \begin{cases} f & \text{si } f \text{ es total} \\ \bot_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\bot} & \text{si } f \text{ es parcial} \wedge f \neq \bot_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\bot} \\ f_1 & \text{si } f = \bot_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\bot} \end{cases} \qquad f_1(x) = 1$$

Los f totales son infinitos puntos fijos, pero no hay menor punto fijo ya que van a ser incomparables en las x donde tomen distintos valores de $\mathbb{Z}$.

4. Considere el leguaje imperativo simple. Enuncie el Teorema de Coincidencia, y luego utilice el mismo para probar que si v no es libre en c, entonces los comandos c y **newvar** $v := e$ **in** c son equivalentes.

(1) $\forall w \in FV(c)\ \ \sigma w = \sigma' w$ implica

$[\![c]\!]\sigma = \bot = [\![c]\!]\sigma'$ o

$[\![c]\!]\sigma \neq \bot \neq [\![c]\!]\sigma'$ y $\forall w \in FV(c)\ [\![c]\!]\sigma w = [\![c]\!]\sigma' w$

(2) si $[\![c]\!]\sigma \neq \bot$ $\forall v \notin FA(c)$ $[\![c]\!]\sigma v = \sigma v$.

Queremos ver que $[\![c]\!] = [\![\text{newvar } v := e \text{ in } c]\!]$ con $v \notin FV(c)$

$[\![\text{newvar } v := e \text{ in } c]\!]\sigma$

$= (\lambda\sigma'.\ [\sigma' | v : \sigma v])_{\dagger}([\![c]\!][\sigma | v : e])$

Como $v \notin FV(c)$ y $[\sigma | v : e]$ solo difiere de σ en v tenemos que $\sigma w = \sigma' w$ $\forall w \in FV(c)$ entonces si $[\![c]\!]\sigma = \bot = [\![c]\!][\sigma | v : e]$ y luego $[\![\text{newvar } v := e \text{ in } c]\!]\sigma = \bot$.

Y si $[\![c]\!]\sigma \neq \bot \neq [\![c]\!][\sigma | v : e]$ entonces $\forall w \in FV(c)$ $[\![c]\!]\sigma w = [\![c]\!]\sigma' w$ y $\forall v \notin FA(c)$ $[\![c]\!]\sigma v = \sigma v$, como $v \notin FV(c)$ entonces $v \notin FA(c)$ y $[\![c]\!][\sigma | v : e] = [\sigma' | v : e]$ y el resto nos dice que $[\![c]\!]\sigma = [\sigma' | v : \sigma v]$

Luego

$$(\lambda\sigma'.\ [\sigma' | v : \sigma v])_{\dagger}([\![c]\!][\sigma | v : e])$$
$$= (\lambda\sigma'.\ [\sigma' | v : \sigma v])_{\dagger}[\sigma' | v : e]$$
$$= [\sigma' | v : e | v : \sigma v]$$
$$= [\sigma' | v : \sigma v] = [\![c]\!]\sigma$$

5. Considere el comando

while $x \neq 0$ **do if** $x > 10$ **then** $x := -x$ **else** $x := x - 1$.

(a) Muestre la función F que define la semántica denotacional del while, expresándola de la manera más sencilla posible.

(b) ¿Qué función de $\Sigma \to \Sigma_\perp$ es la función $F(\lambda\sigma' \in \Sigma.[\sigma'|x : 0])$?

(c) Caracterice el conjunto de estados que satisfacen $F^3 \perp_{\Sigma\to\Sigma_\perp} \sigma = [\![c]\!]\sigma$

$$F\,\omega\,\sigma = \begin{cases} \omega_\star [\![\text{if } x>10 \text{ then } x:=-x \text{ else } x:=x-1]\!] & \sigma x \neq 0 \\ \sigma & \sigma x = 0 \end{cases}$$

$$F\,\omega\,\sigma = \begin{cases} \omega_\star([\![x:=-x]\!]\sigma) & \sigma x \neq 0 \wedge \sigma x > 10 \\ \omega_\star([\![x:=x-1]\!]\sigma) & \sigma x \neq 0 \wedge \sigma x \leq 10 \\ \sigma & \sigma x = 0 \end{cases}$$

$$F\,\omega\,\sigma = \begin{cases} \omega\,[\sigma|x:-\sigma x] & \sigma x > 10 \\ \omega\,[\sigma|x:\sigma x-1] & \sigma x \neq 0 \wedge \sigma x \leq 10 \\ \sigma & \sigma x = 0 \end{cases}$$

(b)

$$F(\lambda\sigma'.[\sigma'|x:0]) = \begin{cases} (\lambda\sigma'.[\sigma'|x:0])\,[\sigma|x:-\sigma x] & \sigma x > 10 \\ (\lambda\sigma'.[\sigma'|x:0])\,[\sigma|x:\sigma x-1] & \sigma x \neq 0 \wedge \sigma x \leq 10 \\ \sigma & \sigma x = 0 \end{cases}$$

$$F(\lambda\sigma'.(\sigma'|x:0]) = \begin{cases} [\sigma|x:-\sigma x|x:0] & \sigma x > 10 \\ [\sigma|x:\sigma x-1\,?\,x:0] & \sigma x \neq 0 \wedge \sigma x \leq 10 \\ \sigma & \sigma x = 0 \end{cases}$$

$$F(\lambda\sigma'.[\sigma'|x:0])\sigma = [\sigma|x:0]$$

Es la función que cambia el valor de la variable x a 0.

(c) $F^0 \perp_{\Sigma\to\Sigma_\perp} \sigma = \perp_{\Sigma\to\Sigma_\perp}$

$$F\,\bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}\,\sigma = \begin{cases} \bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}\,[\sigma \mid x : -\sigma x] & \sigma x > 10 \\ \bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}\,[\sigma \mid x : \sigma x - 1] & \sigma x \neq 0 \wedge \sigma x \leq 10 \\ \sigma & \sigma x = 0 \end{cases}$$

$$F\,\bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}\,\sigma = \begin{cases} \bot & \sigma x \neq 0 \\ \sigma & \sigma x = 0 \end{cases}$$

$$F^2\,\bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}\,\sigma = \begin{cases} F(\bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot})\,[\sigma \mid x : -\sigma x] & \sigma x > 10 \\ F(\bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot})\,[\sigma \mid x : \sigma x - 1] & \sigma x \neq 0 \wedge \sigma x \leq 10 \\ \sigma & \sigma x = 0 \end{cases}$$

$$F^2\,\bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}\,\sigma = \begin{cases} \bot & \sigma x > 10 \wedge [\sigma \mid x : -\sigma x]\,x \neq 0 & -\sigma x \neq 0 \ \checkmark \\ [\sigma \mid x : -\sigma x] & \sigma x > 10 \wedge [\sigma \mid x : -\sigma x]\,x = 0 & -\sigma x = 0 \ \times \\ \bot & \sigma x \neq 0 \wedge \sigma x \leq 10 \wedge [\sigma \mid x : \sigma x - 1]\,x \neq 0 & \sigma x \neq 1 \\ [\sigma \mid x : \sigma x - 1] & \sigma x \neq 0 \wedge \sigma x \leq 10 \wedge [\sigma \mid x : \sigma x - 1]\,x = 0 & \sigma x = 1 \\ \sigma & \sigma x = 0 \end{cases}$$

$$F^2\,\bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}\,\sigma = \begin{cases} \bot & \sigma x > 10 \vee (\sigma x \notin \{0,1\} \wedge \sigma x \leq 10) \\ [\sigma \mid x : \sigma x - 1] & \sigma x = 1 \\ \sigma & \sigma x = 0 \end{cases}$$

$$F^2\,\bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}\,\sigma = \begin{cases} \bot & \sigma x > 10 \vee (\sigma x \notin \{0,1\} \wedge \sigma x \leq 10) \\ [\sigma \mid x : 0] & \sigma x = 1 \\ \sigma & \sigma x = 0 \end{cases}$$

$$F^3\,\bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}\,\sigma = \begin{cases} F^2(\bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot})\,[\sigma \mid x : -\sigma x] & \sigma x > 10 \\ F^2(\bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot})\,[\sigma \mid x : \sigma x - 1] & \sigma x \neq 0 \wedge \sigma x \leq 10 \\ \sigma & \sigma x = 0 \end{cases}$$

$$F^3\,\bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}\,\sigma = \begin{cases} \bot & \sigma x > 10 \wedge (-\sigma x > 10 \vee (-\sigma x \notin \{0,1\} \wedge -\sigma x \leq 10)) \\ [[\sigma \mid x : -\sigma x] \mid x : 0] & \sigma x > 10 \wedge -\sigma x = 1 \quad \times \\ [\sigma \mid x : -\sigma x] & \sigma x > 10 \wedge -\sigma x = 0 \quad \times \\ \bot & \sigma x \neq 0 \wedge \sigma x \leq 10 \wedge (\sigma x - 1 > 10 \vee (\sigma x - 1 \notin \{0,1\} \wedge \sigma x - 1 \leq 10)) \\ [[\sigma \mid x : \sigma x - 1] \mid x : 0] & \sigma x \neq 0 \wedge \sigma x \leq 10 \wedge \sigma x - 1 = 1 \\ [\sigma \mid x : \sigma x - 1] & \sigma x \neq 0 \wedge \sigma x \leq 10 \wedge \sigma x - 1 = 0 \\ \sigma & \sigma x = 0 \end{cases}$$

$$F^3_{\perp_{\{-\circ\}}}\sigma = \begin{cases} \perp & \sigma x > 10 \\ \perp & \sigma x \neq 0 \wedge \sigma x \leq 10 \wedge \sigma x \notin \{1,2\} \wedge \sigma_x \leq 11 \\ [\sigma \mid x:0] & \sigma x = 2 \\ [\sigma \mid x:0] & \sigma x = 1 \\ \sigma & \sigma x = 0 \end{cases}$$

$$F^3_{\perp_{\{-\circ\}}}\sigma = \begin{cases} \perp & \sigma x > 10 \vee (\sigma x \notin \{0,1,2\} \wedge \sigma x \leq 10) \\ [\sigma \mid x:0] & \sigma x \in \{1,2\} \\ \sigma & \sigma x = 0 \end{cases}$$

Claramente c solo termina cuando $0 \leq x \leq 10$, caso contrario no termina nunca

Los estados para los que $F^3_{\perp_{\{-\circ\}}}\sigma = [\![c]\!]\sigma$ son
$\{\sigma \in \Sigma : \sigma x \in \{0,1,2\} \vee \sigma x > 10\}$