# Lenguajes y compiladores - Guía 2.

**Repaso.** Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas; justifique su respuesta.

1. Sea $L$ un lenguaje, $D$ el dominio semántico y sea $[\![-]\!] : L \to D$:
   *a*) si $[\![-]\!]$ NO es inyectiva, entonces NO es una función semántica.
   *b*) si $[\![-]\!]$ NO es suryectiva, entonces NO es una función semántica.
2. La dirección por sintaxis garantiza que un conjunto de ecuaciones define una función semántica.
3. Si un conjunto de ecuaciones que define una semántica no es dirigido por sintaxis, entonces la semántica no es composicional.

1.a) Falso, ejemplo:

<intexp> ::= 0 | 1 | 2 | ... | <intexp> + <intexp>

$[\![\_]\!] :: \langle intexp \rangle \to \mathbb{Z}$

$[\![0]\!] = 0$

$\vdots$

$[\![e+e']\!] = [\![e]\!] + [\![e']\!]$

$[\![0]\!] = 0 = [\![0+0]\!] = [\![0]\!] + [\![0]\!] = 0$

b) Falso, ejemplo

<intexp> ::= 0 | 1 | 2 | ... | <intexp> + <intexp>

$[\![\_]\!] :: \langle intexp \rangle \to \mathbb{Z}$

$[\![0]\!] = 0$

$\vdots$

$[\![e+e']\!] = [\![e]\!] + [\![e']\!]$

Ninguna función va a tener como significado números negativos

c) Verdadero, por definición de dirigido por sintaxis.

d) Falso, ejemplo

<intexp> ::= 0 | 1 | ... | <intexp + intexp>

$[\![\_]\!] :: \langle intexp \rangle \to \mathbb{Z}$

$[\![0]\!] = 0$

$\vdots$

$[\![ e * e' ]\!] = [\![ e ]\!] * [\![ e' ]\!]$

$[\![ e * 0 ]\!] = 0$

Claramente no es dirigida por sintaxis ya que una misma producción tiene dos ecuaciones (ej. $[\![ 2 * 0 ]\!]$), sin embargo tienen el mismo significado y es composicional.

1. Considere los siguientes predicados (con la semántica dada en el teórico).

   $\mathsf{x} \div \mathsf{y} = \mathsf{z}$

   $\exists \mathsf{r}.(0 \leq \mathsf{r} < \mathsf{y}) \wedge (\mathsf{x} = \mathsf{y} * \mathsf{z} + \mathsf{r})$

   *a*) Dé un estado en el cual estos predicados tienen distinta semántica.

   *b*) Caracterizar los $\sigma \in \Sigma$ para los cuales estos predicados tienen la misma semántica.

$\sigma x = 1, \quad \sigma y = -1, \quad \sigma z = -1$

$$
\begin{aligned}
[\![ x \div y = z ]\!]_\sigma &= ([\![ x \div y ]\!]_\sigma = [\![ z ]\!]_\sigma) \\
&= (([\![ x ]\!]_\sigma \div [\![ y ]\!]_\sigma) = -1) \\
&= (1 \div -1 = -1) \\
&= (-1 = -1) \\
&= V
\end{aligned}
$$

$\sigma x = 1, \quad \sigma y = 1, \quad \sigma z = -1$

$$
\begin{aligned}
[\![ x \div y = z ]\!]_\sigma &= ([\![ x \div y ]\!]_\sigma = [\![ z ]\!]_\sigma) \\
&= (([\![ x ]\!]_\sigma \div [\![ y ]\!]_\sigma) = -1) \\
&= (1 \div 1 = -1) \\
&= (1 = -1) \\
&= F
\end{aligned}
$$

$\sigma x = 5 \quad \sigma y = 2 \quad \sigma z = 2 \quad \sigma r = 1$

$$
\begin{aligned}
[\![ \exists r (0 \leq r < y) \wedge (x = y * z + r) ]\!]_\sigma &= \exists n \in \mathbb{Z}\, [\![ (0 \leq r < y) \wedge (x = y * z + r) ]\!]_{[\sigma | r : n]} \\
&= \exists n \in \mathbb{Z} \left( [\![ 0 \leq r < y ]\!]_{[\sigma | r : n]} \wedge [\![ x = y * z + r ]\!]_{[\sigma | r : n]} \right)
\end{aligned}
$$

$= \exists n \in \mathbb{Z} \, ( [\![0]\!]\sigma \leq [\![r]\!]\sigma[\sigma|r:n] < [\![y]\!]\sigma \wedge [\![x]\!]\sigma = [\![y*z+r]\!]\sigma[\sigma|r:n] )$

$= \exists n \in \mathbb{Z} \, ( 0 \leq n < 2 \wedge 5 = 2*2+n )$

$= \exists n \in \mathbb{Z} \, ( 0 \leq n < 2 \wedge 5 = 4+n )$ (verdadero para $n=1$)

$= V$

De igual forma la semántica de la F es falsa si $\sigma x < \sigma z$. o si $\sigma y < 0$.

b) $\{\sigma \in \Sigma : \sigma(x) \div \sigma(y) = \sigma(z)\}$
$\{\sigma \in \Sigma : \sigma(x) \div \sigma(y) \neq \sigma(z)\}$ $\Big\}$ $x \div y = z$

$\{\sigma \in \Sigma : \exists n \in \mathbb{N} \; \sigma(x) = \sigma(y) * \sigma(z) + n\}$
$\{\sigma \in \Sigma : \neg \exists n \in \mathbb{N} \; \sigma(x) = \sigma(y) * \sigma(z) + n\}$

2. Extienda la gramática abstracta de las expresiones enteras para la sumatoria; luego defina la semántica de la nueva expresión. Recuerde las propiedades que debe tener un conjunto de ecuaciones para que definan una función semántica.

$\langle intexp \rangle ::= 0 | 1 | .. | \langle var \rangle | \langle intexp \rangle + \langle intexp \rangle | - \langle intexp \rangle | \langle intexp \rangle * \langle intexp \rangle | \langle intexp \rangle \div \langle intexp \rangle$
$| \; \Sigma_{\langle var \rangle \langle intexp \rangle}^{\langle intexp \rangle} \langle intexp \rangle$

$[\![ \Sigma_{v=e}^{e'} e'' ]\!]_\sigma = \Sigma_{i=[\![e]\!]\sigma}^{[\![e']\!]\sigma} [\![e'']\!]_\sigma[\sigma|v:i]$

3. En cada una de las siguientes expresiones, ¿cuáles son las ocurrencias ligadoras, cuáles las ligadas y cuáles las libres?
   a) $\forall x.\ \forall z.\ x < t \wedge t \leq z \Rightarrow \exists y.\ x \leq y \wedge y < z$
   b) $x > 0 \Rightarrow (\forall y. y \geq x \Rightarrow \exists x. x > 0 \wedge x < y)$.
   c) $\Sigma_{i=0}^{n}(k * \Sigma_{k=1}^{i}(i - k) * k)$.

a) $\underset{1}{\forall x}.\underset{2}{\forall z}.\ \underset{3}{x} < \underset{4}{t} \wedge \underset{5}{t} \leq \underset{6}{z} \Rightarrow \exists \underset{7}{y}.\ \underset{8}{x} \leq \underset{9}{y} \wedge \underset{10}{y} < \underset{11}{z}$

1, 2 y 7 son ocurrencias ligadoras

3, 6, 8, 9, 10 y 11 son ocurrencias ligadas

4 y 5 son ocurrencias libres

b) $(x>0 \Rightarrow (\forall y.\ y \geq x \Rightarrow \exists x.\ x>0 \wedge x<y)$

$\quad\ 1 \qquad\qquad 2\ \ 3\ \ \ 4 \qquad\quad 5\ \ \ 6 \qquad\quad 7\ \ 8$

2 y 5 son ocurrencias ligadoras

3, 6, 7 y 8 son ocurrencias ligadas

1 y 4 son ocurrencias libres

c) $\underset{1}{\sum_{i=0}^{n^2}} \left(\underset{3}{k} * \underset{4}{\sum_{k=1}^{i^5}} (\underset{6}{i} - \underset{7}{k}) * \underset{8}{k}\right)$

1 y 4 son ocurrencias ligadoras

5, 6, 7 y 8 son ocurrencias ligadas

2 y 3 son ocurrencias libres

4. Dé el resultado de la sustitución simultánea:

a) t por x + y + z en $\forall$x. $\forall$z. x < t $\wedge$ t $\leq$ z $\Rightarrow$ $\exists$y. x $\leq$ y $\wedge$ y < z

b) y por x, z por y y x por z en x > 0 $\Rightarrow$ ($\forall$y.y $\geq$ x $\Rightarrow$ $\exists$x.x > 0 $\wedge$ x < y).

a) $\delta t = x+y+z$

$(\forall x.\ \forall z.\ x<t \wedge t \leq z \Rightarrow \exists y.\ x \leq y \wedge y<z)/\delta =$

$\forall x_{new} \forall z_{new} ((x<t \wedge t \leq z)/[\delta | x{:}x_{new} | z{:}z_{new}) \Rightarrow \exists y_{new} (x \leq y \wedge y<z)/[\delta | x{:}x_{new} | z{:}z_{new} | y{:}y_{new}])$

$(\forall x_{new}.\ \forall z_{new}\ x_{new} < x+y+z \wedge x+y+z \leq z_{new} \Rightarrow \exists y_{new}\ x_{new} \leq y_{new} \wedge y_{new} < z_{new})$

$(\forall p \forall q\ p < x+y+z \wedge x+y+z \leq q \Rightarrow \exists y\ p \leq y \wedge y<q)$

b) $\delta y = x \quad \delta z = y \quad \delta x = z$

$(x>0 \Rightarrow (\forall y.\ y \geq x \Rightarrow \exists x.\ x>0 \wedge x<y))/\delta =$

$(z>0 \Rightarrow \forall y_{new} (y \geq x \Rightarrow \exists x.\ x>0 \wedge x<y)/[\delta | y{:}y_{new}])$

$(z>0 \Rightarrow \forall y_{new} (y_{new} \geq z \Rightarrow \exists x_{new} (x>0 \wedge x<y)/[\delta | y{:}y_{new} | x{:}x_{new}])$

$(z>0 \Rightarrow \forall y_{new}.\ y_{new} \geq z \Rightarrow \exists x_{new}, x_{new} > 0 \wedge x_{new} < y_{new})$

$(z>0 \Rightarrow \forall y_{new}.\ y_{new} \geq z \Rightarrow \exists z.\ z>0 \wedge z<y_{new})$

$(z>0 \Rightarrow \forall x.\ x \geq z \Rightarrow \exists z.\ z>0 \wedge z<x)$

5. Dé un ejemplo que muestre que si hacemos reemplazo sintáctico en lugar de sustitución, podemos alterar la semántica.

$\exists x \quad x > y$

Ahora sea $\delta y = x+1$ aplicando sustitución obtenemos:

$\exists x_{new} \quad x_{new} > x+1$

$\exists y \quad y > x+1$

Lo cual es verdadero para todo $x, y \in \mathbb{Z}$.

Sin embargo aplicando reemplazo sintáctico obtenemos:

$\exists x \quad x > x+1$

Lo cual es falso siempre.

6. Pruebe por inducción en los predicados: $FV(p/\delta) = \bigcup_{w \in FV(p)} FV(\delta w)$

¿Necesita una propiedad similar para las expresiones?

Sea $p \in$ <assert>, $\delta \in \Delta$

$$FV(p/\delta) = \bigcup_{w \in FV(p)} FV(\delta w)$$

Caso base $p \in \{True, False\}$

$FV(p/\delta)$

$= FV(p)$

$= \emptyset$

$= \bigcup_{w \in \emptyset} FV(\delta w)$

$= \bigcup_{w \in FV(p)} FV(\delta w)$

Caso $p = e_1 \eta e_2$ con $e_1, e_2 \in$ <intexp>, $\eta \in \{=, <, \leq, \geq, >\}$

$FV(p/\delta)$

$= FV((e_1 \eta e_2)/\delta)$

$$= FV(e_1/\delta) \cup FV(e_2/\delta)$$

(este paso se demuestra más adelante para <intexp>)

$$= \bigcup_{w \in FV(e_1)} FV(\delta w) \cup \bigcup_{w \in FV(e_2)} FV(\delta w)$$

$$= \bigcup_{w \in FV(e_1) \cup FV(e_2)} FV(\delta w)$$

$$= \bigcup_{w \in FV(e_1 \wedge e_2)} FV(\delta w) = \bigcup_{w \in FV(p)} FV(\delta w)$$

Caso $p = \neg p'$ con $p' \in$ <assert>:

$$FV(p/\delta)$$

$$= FV(\neg p'/\delta)$$

$$= FV(p'/\delta)$$

$$= \bigcup_{w \in FV(p')} FV(\delta w)$$

$$= \bigcup_{w \in FV(\neg p')} FV(\delta w)$$

$$= \bigcup_{w \in FV(p)} FV(\delta w)$$

Caso $p = p_1 \oplus p_2$, $p_1, p_2 \in$ <assert>, $\oplus \in \{\wedge, \vee\}$.

$$FV(p/\delta)$$

$$= FV((p_1 \oplus p_2)/\delta)$$

$$= FV(p_1/\delta) \cup FV(p_2/\delta)$$

$$= \bigcup_{w \in FV(p_1)} FV(\delta w) \cup \bigcup_{w \in FV(p_2)} FV(\delta w)$$

$$= \bigcup_{w \in FV(p_1) \cup FV(p_2)} FV(\delta w)$$

$$= \bigcup_{w \in FV(p_1 \oplus p_2)} FV(\delta w) = \bigcup_{w \in FV(p)} FV(\delta w)$$

Caso $p = Q.vp'$ con $p' \in \langle assert \rangle$, $Q \in \{\forall, \exists\}$

$$FV(p/\delta)$$
$$= FV(Q.vp'/\delta)$$
$$= FV(Q.u(p'/[\delta|v:u]))$$
$$= FV(p'/[\delta|v:u]) - \{u\}$$
$$= \bigcup_{w \in FV(p'/[\delta|v:u])} FV(\delta w)$$
$$= \{\text{claramente } u \notin FV(p'/[\delta|v:u]) \text{ y } u \notin FV(\delta w)\}$$
$$= \bigcup_{w \in FV(p'/[\delta|v:u]) - \{u\}} FV(\delta|w)$$
$$= \bigcup_{w \in FV(Q.u(p'/[\delta|v:u])) - \{u\}} FV(\delta w)$$
$$= \bigcup_{w \in FV(Q.vp'/\delta)} FV(\delta w)$$
$$= \bigcup_{w \in FV(p)} FV(\delta w)$$

Propiedad para las expresiones

Sea $e \in \langle intexp \rangle$, $\delta \in \Delta$

$$FV(e/\delta) = \bigcup_{w \in FV(e)} FV(\delta w)$$

caso $e = \lfloor n \rfloor$ con $n \in \mathbb{N}$

$$FV(e/\delta)$$
$$= FV(\lfloor n \rfloor)$$
$$= \emptyset$$
$$= \bigcup_{w \in \emptyset} FV(\delta w)$$
$$= \bigcup_{w \in FV(e/\delta)} FV(\delta w) = \bigcup_{w \in FV(e)} FV(\delta w)$$

caso $e = v$ donde $v \in$ <var>

$$
\begin{aligned}
& FV(e/\delta) \\
&= FV(v/\delta) \\
&= FV(v) \\
&= \bigcup_{w \in FV(v)} FV(w) \\
&= \bigcup_{w \in FV(e)} FV(w)
\end{aligned}
$$

caso $e = -e'$ con $e' \in$ <intexp>

$$
\begin{aligned}
& FV(e/\delta) \\
&= FV(-e'/\delta) \\
&= FV(-(e'/\delta)) \\
&= FV(e'/\delta) \\
&= \bigcup_{w \in FV(e')} FV(w) \\
&= \bigcup_{w \in FV(-e')} FV(w) \\
&= \bigcup_{w \in FV(e)} FV(w)
\end{aligned}
$$

caso $e = e_1 \oplus e_2$ con $e_1, e_2 \in$ <intexp>, $\oplus \in \{+, \times, \div\}$

$$
\begin{aligned}
& FV(e/\delta) \\
&= FV((e_1 \oplus e_2)/\delta) \\
&= FV(e_1/\delta \oplus e_2/\delta) \\
&= FV(e_1/\delta) \cup FV(e_2/\delta) \\
&= \bigcup_{w \in FV(e_1)} FV(\delta w) \cup \bigcup_{w \in FV(e_2)} FV(\delta w) \\
&= \bigcup_{w \in FV(e_1) \cup FV(e_2)} FV(\delta w)
\end{aligned}
$$

$$= \bigcup_{w \in FV(e_1 \oplus e_2)} FV(\delta w)$$

$$= \bigcup_{w \in FV(e)} FV(\delta w)$$

7. Enunciar y demostrar de manera detallada el Teorema de Coincidencia para la Lógica de Predicados.

Si dos estados $\sigma$ y $\sigma'$ coinciden en las variables libres de $p$, entonces da lo mismo evaluar $p$ en $\sigma$ o $\sigma'$. En símbolos

$$(\forall w \in FV(p)\ \sigma w = \sigma' w) \Rightarrow [\![p]\!]\sigma = [\![p]\!]\sigma'$$

Demostración.

Lo haremos por inducción. Sea $p \in \langle intexp \rangle \cup \langle assert \rangle$, $\sigma, \sigma' \in \Sigma$

$$\phi(p, \sigma, \sigma') = (\forall w \in FV(p)\ \sigma w = \sigma' w) \Rightarrow [\![p]\!]\sigma = [\![p]\!]\sigma'$$

Caso base $p = 0$

En este caso $FV(p) = FV(0) = \emptyset$ por ende la propiedad $(\forall w \in \emptyset\ \sigma w = \sigma' w)$ se cumple trivialmente y la implicación es verdadera. Esto se cumple para $p = \lfloor n \rfloor$ $n \in \mathbb{N}$ y $p \in \{true, false\}$.

Caso $p = v$ con $v \in \langle var \rangle$

En este caso $FV(v) = \{v\}$ luego si $\forall w \in \{v\}\ \sigma w = \sigma' w$ entonces se cumple que $[\![v]\!]\sigma = [\![v]\!]\sigma'$, entonces se cumple la implicación.

Caso $p = p_1 \wedge p_2$ con $p_1, p_2 \in \langle assert \rangle$

En este caso $FV(p_1 \wedge p_2) = FV(p_1) \cup FV(p_2)$

asumiendo $p_1, p_2 \in \langle var \rangle \cup \mathbb{N}$ entonces si

$$\forall w \in FV(p_1) \cup FV(p_2)\ \sigma w = \sigma' w$$

$$= (\forall w \in FV(p_1)\ \sigma w = \sigma' w) \wedge (\forall w \in FV(p_2)\ \sigma w = \sigma' w)$$

H.I. $$= [\![p_1]\!]\sigma = [\![p_1]\!]\sigma' \wedge [\![p_2]\!]\sigma = [\![p_2]\!]\sigma'$$

$$= [\![p_1 \wedge p_2]\!]\sigma = [\![p_1 \wedge p_2]\!]\sigma'$$

Y esto se cumple para $p = p_1 \eta p_2$, $p_1, p_2 \in$ <assert> $\eta \in \{\wedge, \vee\}$
y $p = e_1 \oplus e_2$ con $e_1, e_2 \in$ <intexp> y $\oplus \in \{+, *, \div\}$.

Caso $p = -e$ con $e \in$ <intexp>
En este caso $FV(p) = FV(-e) = FV(e)$
Luego si $\forall w \in FV(e)$ $\sigma w = \sigma' w$
H.I $[\![e]\!]\sigma = [\![e]\!]\sigma'$

Caso $p = Qv.p'$ con $p' \in$ <assert> $Q \in \{\forall, \exists\}$
En este caso $FV(p) = FV(Qv.p') = FV(p') - \{v\}$
Por H.I si $\forall w \in FV(p')$ $\sigma w = \sigma' w$ entonces $[\![p']\!]\sigma = [\![p']\!]\sigma'$
Por otro lado

$[\![Qv.p']\!]\sigma = (Q n \in \mathbb{Z}\, [\![p']\!][\sigma | v : n])$
$[\![Qv.p']\!]\sigma' = (Q n \in \mathbb{Z}\, [\![p']\!][\sigma' | v : n])$
Y como anteriormente vimos que $[\![\lfloor n \rfloor]\!]\sigma = [\![\lfloor n \rfloor]\!]\sigma'$ entonces

$$[\![p']\!][\sigma | v : n] = [\![p']\!][\sigma' | v : n]$$
$$(Q n \in \mathbb{Z}\, [\![p']\!][\sigma v : n]) = (Q n \in \mathbb{Z}\, [\![p']\!][\sigma' | v : n])$$
$$[\![Qv.p']\!]\sigma = [\![Qv.p']\!]\sigma'$$
$$[\![p]\!]\sigma = [\![p']\!]\sigma'$$

8. Sean $p, q$ dos frases de la misma categoría sintáctica, usar el teorema de sustitución para demostrar que si $[\![p]\!] = [\![q]\!]$ entonces para todo $\delta \in \Delta$, $[\![p/\delta]\!] = [\![q/\delta]\!]$.

Supongamos $[\![p]\!] = [\![q]\!]$
$\Rightarrow \forall \sigma \in \Sigma$ $[\![p]\!]\sigma = [\![q]\!]\sigma$
$\Rightarrow$ Sea $\sigma'$ y $\delta \in \Delta$ tal que $\forall w \in FV(p)$ $[\![\delta w]\!]\sigma = \sigma' w$
$\forall w \in FV(q)$ $[\![\delta w]\!]\sigma = \sigma' w$
$[\![p/\delta]\!]\sigma = [\![p]\!]\sigma' \wedge [\![q/\delta]\!]\sigma = [\![q]\!]\sigma'$
$\Rightarrow [\![p/\delta]\!]\sigma = [\![q/\delta]\!]\sigma'$
Como $\sigma$ y $\delta$ son estados y sustituciones arbitrarias tal que se cumple el TS
$\Rightarrow [\![p/\delta]\!] = [\![q/\delta]\!]$

9. ¿Vale el recíproco? Es decir, dados $p, q$ en la misma categoría sintáctica, si para todo $\delta \in \Delta$, $\llbracket p/\delta \rrbracket = \llbracket q/\delta \rrbracket$, ¿se cumple necesariamente $\llbracket p \rrbracket = \llbracket q \rrbracket$?

Si ya que asumiendo que $\forall \delta \in \Delta \ \llbracket p/\delta \rrbracket = \llbracket q/\delta \rrbracket$

$\Rightarrow \forall \sigma \in \Sigma \ \llbracket p/\delta \rrbracket \sigma = \llbracket q/\delta \rrbracket \sigma$

$\Rightarrow$ por TS $\llbracket p \rrbracket \sigma' = \llbracket q \rrbracket \sigma'$

$\Rightarrow \llbracket p \rrbracket = \llbracket q \rrbracket$

10. *a*) Sean $\delta$ y $\gamma$ dos sustituciones, defina la composición de $\delta$ con $\gamma$ ($\delta \circ \gamma \in \Delta$).
*b*) Pruebe que para toda frase $p$ y cualesquiera sustituciones $\delta$ y $\gamma$ vale $\llbracket p/\delta \circ \gamma \rrbracket = \llbracket (p/\delta)/\gamma \rrbracket$.

a) Sean $\delta, \gamma \in \Delta$

$(\delta \circ \gamma) \in \Delta$

$(\delta \circ \gamma) : Dom(\gamma) \to \langle intexp \rangle$ (suponiendo que $\delta$ y $\gamma$ son totales)

$(\delta \circ \gamma)(e) = (e/\gamma)/\delta$

b) Caso base $p \in \{0, 1, \ldots, True, False\}$

$\llbracket p/\delta \circ \gamma \rrbracket = \llbracket \gamma p/\delta \rrbracket = \llbracket p \rrbracket = \llbracket (p/\delta) \rrbracket = \llbracket (p/\delta)/\gamma \rrbracket$

Caso $p = -e$ con $e \in \langle intexp \rangle$ $e \in \{0, 1, \ldots\}$.

$\llbracket p/\delta \circ \gamma \rrbracket = \llbracket -e/\delta \circ \gamma \rrbracket = -\llbracket e/\delta \circ \gamma \rrbracket = -\llbracket (e/\delta)/\gamma \rrbracket = \llbracket -(e/\delta)/\gamma \rrbracket$

$= \llbracket (-e/\delta)/\gamma \rrbracket = \llbracket (p/\delta)/\gamma \rrbracket$

Caso $p = p_1 \oplus p_2$ $p_1, p_2 \in \langle assert \rangle$ $\oplus \in \{\wedge, \vee\}$

o $p = e_1 \eta e_2$ $e_1, e_2 \in \langle intexp \rangle$ $\eta \in \{+, \times, \div\}$

$\llbracket p/\delta \circ \gamma \rrbracket = \llbracket (p_1 \oplus p_2)/\delta \circ \gamma \rrbracket = \llbracket (p_1 \oplus p_2)/\delta \circ \gamma \rrbracket$

$= \llbracket p_1/\delta \circ \gamma \oplus p_2/\delta \circ \gamma \rrbracket$

$= \llbracket p_1/\delta/\gamma \oplus p_2/\delta/\gamma \rrbracket$

$= \llbracket (p_1 \oplus p_2)/\delta/\gamma \rrbracket$

$= \llbracket p/\delta/\gamma \rrbracket$

Similar para el caso $p = e_1 \eta e_2$

Caso $p = Qv.\, p'$ con $p' \in \langle assert \rangle$ $v \in \langle intexp \rangle$, $Q \in \{\forall, \exists\}$.

$$
\begin{aligned}
[\![ p / \delta \circ \gamma ]\!] &= [\![ Q v. p' / \delta \circ \gamma ]\!] && p = Qv. p' \\
&= [\![ Q v. (p' / \delta \circ \gamma) ]\!] && \text{dy } [\![ Q v . p' / \delta ]\!] \\
&= \mathrm{Qnt}\,\mathcal{U}\ [\![ (p' / \delta \circ \gamma) ]\!] && \text{dy de } [\![ \_ ]\!] \\
&= \mathrm{Qnt}\,\mathcal{U}\ [\![ (p' / \delta) / \gamma ]\!] && \text{H.I} \\
&= [\![ Q v ((p' / \delta) / \gamma) ]\!] && \text{dy de } [\![ \_ ]\!] \\
&= [\![ (Q v\ p' / \delta / \gamma) ]\!] && \text{dy. de } [\![ Q v p' / \delta ]\!] \\
&= [\![ p / \delta / \gamma ]\!] && p = Q v p'
\end{aligned}
$$