Definiciones

miércoles, 15 de mayo de 2024 9:20

Semántica denotacional:

D_∞ es tal que:

$\varphi : D_\infty \to [D_\infty \to D_\infty]$

$\psi : [D_\infty \to D_\infty] \to D_\infty$

$\varphi \circ \psi = Id_{[D_\infty \to D_\infty]}$

$\psi \circ \varphi = Id_{D_\infty}$

$Env = \langle var \rangle \to D_\infty$

$[\![\cdot]\!] : \langle exp \rangle \to Env \to D_\infty$

$[\![v]\!] \eta = \eta\ v$

$[\![e_0 e_1]\!] \eta = \varphi\ ([\![e_0]\!] \eta)\ ([\![e_1]\!] \eta)$

$[\![\lambda v.\, e]\!] \eta = \psi\ (\lambda d\ [\![e]\!] [\eta \mid v : d])$

Semántica normal:

$\varphi : V^N \to [V_\perp^N \to V_\perp^N]$

$\psi : [V_\perp^N \to V_\perp^N] \to V^N$

$\iota_\perp : V^N \to V_\perp^N$

$\varphi \circ \psi = Id_{[V_\perp^N \to V_\perp^N]}$

$\psi \circ \varphi = Id_{V^N}$

$Env = \langle var \rangle \to V_\perp^N$

$[\![\cdot]\!] : \langle exp \rangle \to Env \to V_\perp^N$

$[\![v]\!] \eta = \eta\ v$

$[\![e_0 e_1]\!] \eta = \varphi_{\perp\!\!\!\perp} ([\![e_0]\!] \eta)\ ([\![e_1]\!] \eta)$

$$[\![\lambda v.\, e]\!]\eta = \iota_\perp\big(\psi\,(\lambda d\; [\![e]\!](\eta \mid v : d))\big)$$

Semántica Eager:

$$\varphi : V^E \to [V^E \to V^E_\perp]$$
$$\psi : [V^E \to V^E_\perp] \to V^E$$
$$\iota_\perp : V^E \to V^E_\perp$$

$$\varphi \circ \psi = Id_{[V^E \to V^E_\perp]}$$
$$\psi \circ \varphi = Id_{V^E}$$

$$Env = \langle var \rangle \to V^E$$

$$[\![\cdot]\!] : \langle exp \rangle \to Env \to V^E_\perp$$
$$[\![v]\!]\eta = \iota_\perp(\eta\, v)$$
$$[\![e_0\, e_1]\!]\eta = \varphi_{\perp\!\!\!\perp}\big(([\![e_0]\!]\eta)\big)_{\perp\!\!\!\perp}([\![e_1]\!]\eta)$$
$$[\![\lambda v.\, e]\!]\eta = \iota_\perp\big(\psi\,(\lambda u\; [\![e]\!](\eta \mid v : u))\big)$$

1)

viernes, 17 de mayo de 2024 12:06

1)

(1) Calcular la semántica denotacional en D_∞ de los siguientes términos:

a) $M = \lambda f.\, \lambda x.\, f(fx)$ b) $N = \lambda z.\, \lambda y.\, z$ c) MN

a)

$[\![M]\!]\eta$

$= \psi(\lambda d.\, [\![\lambda x.\, f(fx)]\!]\eta[f:d])$

$= \psi(\lambda d.\, \psi(\lambda d'.\, [\![f(fx)]\!]\eta[f:d, x:d']))$

$= \psi(\lambda d.\, \psi(\lambda d'.\, [\![f(fx)]\!]\eta[f:d, x:d']))$

$= \psi\left(\lambda d.\, \psi\left(\lambda d'.\, \varphi([\![f]\!]\eta[f:d, x:d'])([\![fx]\!]\eta[f:d, x:d'])\right)\right)$

$= \psi\left(\lambda d.\, \psi\left(\lambda d'.\, \varphi d\left(\varphi([\![f]\!]\eta[f:d, x:d'])([\![x]\!]\eta[f:d, x:d'])\right)\right)\right)$

$= \psi\left(\lambda d.\, \psi\left(\lambda d'.\, \varphi d(\varphi d d')\right)\right)$

b)

$[\![N]\!]\eta$

$= \psi(\lambda d.\, [\![\lambda y.\, z]\!]\eta[z:x])$

$= \psi(\lambda d.\, \psi(\lambda d'.\, [\![z]\!]\eta[z:x, y:d']))$

$= \psi(\lambda d.\, \psi(\lambda d'.\, d))$

c)

$[\![MN]\!]\eta$

$= \varphi([\![M]\!]\eta)([\![N]\!]\eta)$

$= \varphi\left(\psi\left(\lambda d.\, \psi\left(\lambda d'.\, \varphi d(\varphi d d')\right)\right)\right)\left(\psi(\lambda d.\, \psi(\lambda d'.\, d))\right)$

$= \left(\lambda d.\, \psi\left(\lambda d'.\, \varphi d(\varphi d d')\right)\right)\left(\psi(\lambda d.\, \psi(\lambda d'.\, d))\right)$

$= \psi\left(\lambda d'.\, \varphi\left(\psi(\lambda d.\, \psi(\lambda d''.\, d))\right)\left(\varphi\left(\psi(\lambda d.\, \psi(\lambda d''.\, d))\right)d'\right)\right)$

$= \psi\left(\lambda d'.\, (\lambda d.\, \psi(\lambda d''.\, d))\left((\lambda d.\, \psi(\lambda d''.\, d))d'\right)\right)$

$= \psi\left(\lambda d'.\, (\lambda d.\, \psi(\lambda d''.\, d))(\psi(\lambda d''.\, d'))\right)$

$$= \psi\left(\lambda d'. \psi\left(\lambda d''. \psi\left(\left(\lambda d'''. d'\right)\right)\right)\right)$$

2) 🛠️

viernes, 17 de mayo de 2024 12:26

(2) Para la semántica denotacional en D_∞, enunciar y demostrar las siguientes propiedades: a) teorema de renombre, b) teorema de coincidencia, c) corrección de la regla β y d) corrección de la regla η.

Teorema 2. *Coincidencia Si $\eta\, w = \eta'\, w$ para todo $w \in FV(e)$, entonces $[\![e]\!]\eta = [\![e]\!]\eta'$.*

Teorema 3. *Sustitución Si $[\![\delta\, w]\!]\eta = \eta' w$ para todo $w \in FV(e)$, entonces $[\![e/\delta]\!]\eta = [\![e]\!]\eta'$.*

Teorema 4. *Sustitución Finita $[\![e/v_1 \to e_1, \ldots, v_n \to e_n]\!]\eta = [\![e]\!][\eta | v_1 : [\![e_1]\!]\eta | \ldots | v_n : [\![e_n]\!]\eta]$.*

Teorema 5. *Renombre Si $v' \notin FV(e) - \{v\}$, entonces $[\![\lambda v'.(e/v \to v')]\!] = [\![\lambda v.e]\!]$.*

a)

$$v' \notin FV(e) - \{v\} \Rightarrow [\![\lambda v.\, e]\!] = [\![\lambda v'.\,(e/[v: v'])]\!]$$

Demostración suponiendo al antecedente por

$[\![\lambda v.\, e]\!]\eta$

= (Definición $[\![\,]\!]$)

$\psi\,(\lambda d\; [\![e]\!][\eta \mid v : d])$

= ($v' \notin FV(e)$, coincidencia (b))

$\psi\,(\lambda d\; [\![e]\!][\eta \mid v' : d \mid v : d])$

=

$\psi\,(\lambda d\; [\![e]\!][\eta \mid v' : d \mid v : [\eta \mid v' : d]v'])$

=

$\psi\,(\lambda d\; [\![e]\!][\eta \mid v' : d \mid v : [\![v']\!][\eta \mid v' : d]])$

= (Prueba auxiliar)

$\psi\,(\lambda d\; [\![e/[v: v']]\!][\eta \mid v' : d])$

= (Definición $[\![\,]\!]$)

$[\![\lambda v'.\,(e/[v: v'])]\!]\eta$

Prueba auxiliar:

$$[\![e/[v: e']]\!]\eta = [\![e]\!][\eta \mid v : [\![e']\!]\eta]$$

Demostración por inducción en e:

Caso $e = v$:

$\llbracket v/[v\colon e']\rrbracket\eta = \llbracket e'\rrbracket\eta = \llbracket v\rrbracket[\eta \mid v\colon \llbracket e'\rrbracket\eta]$

Caso $e = w$ con $w \neq v$:

$\llbracket w/[v\colon e']\rrbracket\eta = \llbracket w\rrbracket\eta = \eta\, w = \ [\eta \mid v\colon \llbracket e'\rrbracket\eta]\, w) = \llbracket w\rrbracket[\eta \mid v\colon \llbracket e'\rrbracket\eta]$

Caso $e = e_0 e_1$:

$\llbracket (e_0 e_1)/[v\colon e']\rrbracket\eta$

=

$\llbracket (e_0/[v\colon e'])(e_1/[v\colon e'])\rrbracket\eta$

=

$\varphi\,(\llbracket e_0/[v\colon e']\rrbracket\eta)\,(\llbracket e_1/[v\colon e']\rrbracket\eta)$

= (HI)

$\varphi\,(\llbracket e_0\rrbracket[\eta \mid v\colon \llbracket e'\rrbracket\eta])\,(\llbracket e_1\rrbracket[\eta \mid v\colon \llbracket e'\rrbracket\eta])$

=

$\llbracket e_0 e_1\rrbracket[\eta \mid v\colon \llbracket e'\rrbracket\eta]$

Caso $e = \lambda v.e_0$:

$\llbracket (\lambda v.e_0)/[v\colon e']\rrbracket\eta$

=

$\llbracket \lambda v.e_0\rrbracket\eta$

=

$\psi\,(\lambda d\ \llbracket \lambda v.e_0\rrbracket[\eta \mid v : d])$

=

$\psi\,(\lambda d\ \llbracket \lambda v.e_0\rrbracket[\eta \mid v\colon \llbracket e'\rrbracket\eta \mid v : d])$

=

$\llbracket \lambda v.e_0\rrbracket[\eta \mid v\colon \llbracket e'\rrbracket\eta]$

Caso $e = \lambda w.e_0$ con $w \neq v$:

$\llbracket (\lambda w.e_0)/[v\colon e']\rrbracket\eta$

= (Sea $w' \notin FV(e')$)

$\llbracket \lambda w'.(e_0/[v\colon e'])\rrbracket\eta$

=

$\psi\,(\lambda d\ \llbracket e_0/[v\colon e']\rrbracket[\eta \mid w' : d])$

= (HI)

$\psi\big(\lambda d\ \llbracket e_0\rrbracket[\eta \mid w' : d \mid v\colon \llbracket e'\rrbracket[\eta \mid w' : d]]\big)$

=

$\psi\,(\lambda d\ \llbracket e_0\rrbracket[\eta \mid v\colon \llbracket e'\rrbracket[\eta \mid w' : d] \mid w' : d])$

=

$\psi\,(\lambda d\ \llbracket \lambda w.e_0\rrbracket[\eta \mid v : d])$

=

$\llbracket \lambda w.e_0\rrbracket[\eta \mid v\colon \llbracket e'\rrbracket\eta]$

□

3)

viernes, 17 de mayo de 2024 12:28

(3) Dar un término cerrado M cuya denotación en la semántica normal sea:
a) distinto a $\perp$ pero que para todos N y η, $[\![M\ N]\!]\eta = \perp$
b) distinto a $\perp$ y $[\![M\ (\Delta\Delta)]\!]\eta \neq \perp$

a)
$M = \lambda x.\, \Delta\Delta$

b)
$M = \lambda x\ y.\, y$

4)

viernes, 17 de mayo de 2024 12:43

(4) Explique, sin hacer ninguna cuenta, por qué la semántica eager de $[\![M\,(\Delta\Delta)]\!]\eta$ dado en 2b es $\perp$.

$$[\![M(\Delta\Delta)]\!]\eta$$

$=$

$$\varphi_{\perp\!\!\perp}\left(([\![M]\!]\eta)_{\perp\!\!\perp}\right)([\![\Delta\Delta]\!]\eta)$$

$=$

$$\varphi_{\perp\!\!\perp}\left(([\![M]\!]\eta)_{\perp\!\!\perp}\right)\perp$$

$=$

$$\perp$$

5) 🛠️

viernes, 17 de mayo de 2024 12:43

(5) Para la semántica denotacional normal del cálculo lambda, considere las propiedades siguientes: a) teorema de sustitución, b) corrección de la regla β, c) corrección de la regla η. ¿Cuáles de esos resultados son válidos? Justificar. Para aquellos resultados que no sean válidos, hallar un contraejemplo.

6) 🛠️

viernes, 17 de mayo de 2024 12:45

(6) Para la semántica denotacional eager del cálculo lambda, ¿Cuáles de esos resultados siguen siendo válidos? Justificar. Para aquellos resultados que no sean válidos, hallar un contraejemplo, o explicar por qué el enunciado original no tiene sentido.

7) 🛠️

viernes, 17 de mayo de 2024 12:46

(7) Proponga un enunciado alternativo para el Teorema de Sustitución que sea válido para la semántica denotacional eager.

8)

viernes, 17 de mayo de 2024 12:46

(8) ¿Cuáles afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas? Justificar. Denotamos a $[\![\_]\!]$, $[\![\_]\!]_N$ y $[\![\_]\!]_E$ como la semántica denotacional en D_∞, normal y eager respectivamente.

a) Si $[\![e]\!]\eta = \bot$, entonces $[\![e]\!]_N\eta = \bot$

b) Si $[\![e]\!]\eta = \bot$, entonces $[\![e]\!]_E\eta = \bot$

c) Si $[\![e]\!]_N\eta \neq \bot$, entonces $[\![e]\!]_E\eta \neq \bot$

d) Si $[\![e]\!]_E\eta \neq \bot$, entonces $[\![e]\!]_N\eta \neq \bot$

e) En el contexto de la semántica denotacional normal las funciones
$\phi_{\perp\!\!\perp} : D \to [D \to D] \qquad \iota_\perp \circ \psi : [D \to D] \to D$
definen un isomorfismo entre D y $[D \to D]$.

f) En el contexto de la semántica denotacional eager vale

$$(\phi_{\perp\!\!\perp}) \circ (\iota_\perp \circ \psi) = id_{V \to D}$$

De contestar verdadero: ¿qué dice esto con respecto a la corrección de la regla β?

a-d)
Son imprecisos porque los η no son los mismos en normal que en eager

e)
$\varphi_{\perp\!\!\perp} : V_\perp^N \to [V_\perp^N \to V_\perp^N]$
$\iota_\perp \circ \psi : [V_\perp^N \to V_\perp^N] \to V_\perp^N$

No forman un isomorfismo porque:

φ es un isomorfismo
$\Rightarrow$
$\varphi \perp_{V^N} = \perp_{[V_\perp^N \to V_\perp^N]}$
$\Rightarrow$
$\varphi_{\perp\!\!\perp} \perp_{V^N} = \varphi_{\perp\!\!\perp} \perp_{V_\perp^N}$

Y un isomorfismo no puede mandar dos valores distintos al mismo valor

f)
$\varphi_{\perp\!\!\perp} \circ (\iota_\perp \circ \psi) = id_{V^E \to V_\perp^E}$

Falso, porque $Dom\left(\varphi_{\perp\!\!\!\perp} \circ (\iota_{\perp} \circ \psi)\right) = [V^{E} \to V_{\perp}^{E}]$