Parcial 1 - 13/04/22

LyC

(1) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar acabadamente sus respuestas.

(a) Sea p el predicado $\forall x.\ (1 < x \lor \exists y.\ z = y+1) \land \exists y.\ ((\forall z.\ z + x = y) \to z > y)$ y sea $\delta = [z \to z+1, y \to x, x \to (x+y)]$. Entonces al hacer p/δ, en todos los cuantificadores $\forall v.p$ se puede tomar $v = v_{new}$

(b) Para toda g, la cadena $f_0, f_1, \ldots$ es interesante, donde $f_i \in \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_\perp$ se define mediante $f_i\ n = \begin{cases} g\ n & -i \leq n \leq i \\ \perp & cc \end{cases}$

(c) Si $c_w =$ **while true do** c, entonces en el lenguaje imperativo con fallas se satisface $[\![c_w]\!] = [\![c; c_w]\!]$

(d) Si $\mathbb{Z}$ tiene el orden discreto, entonces $(\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp)$ tiene infinitos elementos maximales.

(a) Falso ya que en

$\exists y.((\forall z. z+x=y) \to z>y)$

La x está libre, sin embargo si sustituimos x por $x+y$ la y estaría alcanzada por el cuantificador $\exists y$.

(b) Falso, si $g n = \perp$ entonces

$\forall i \in \mathbb{N}$ $f_i n = \perp$ y la cadena $f_0, f_1, \ldots$ no es interesante

(c) Verdadero while true do c ejecuta c infinitas veces, por ende $[\![c_w]\!] = [\![c; c_w]\!]$ excepto cuando $c = $ fail en cuyo caso

$[\![c_w]\!]_\sigma = [\![\text{while true do fail}]\!]\sigma = \langle abort, \sigma\rangle$

$[\![c; c_w]\!]\sigma = [\![\text{fail}]\!]_*([\![\text{while true do fail}]\!]\sigma)$

$= [\![\text{fail}]\!]_* \langle abort, \sigma\rangle$

$= \langle abort, \sigma\rangle$

(d) Verdadero, por ejemplo

$f_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$ con el orden llano

$f_i n = \begin{cases} x & \text{si } x = i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$

entonces los f_i son incomparables.

(2) Sea $h \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$. Considere la siguiente ecuación recursiva:

$$f\, n = \begin{cases} h\, n & \text{si } n \leq 0 \ \vee \ n \ \text{ es impar} \\ f\ (n-2) & \text{si } n > 0 \ \wedge \ n \ \text{ es par} \end{cases}$$

Sea F_h la función asociada a la ecuación recursiva, cuyo menor punto fijo es la menor solución.

(a) Escriba la definición explícita de F_h.

(b) Defina $h_0, h_1 \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$ tales que:

$F_{h_0}\ h_0 = h_0$ (o sea, F_{h_0} tiene a h_0 como punto fijo), y

h_1 no es punto fijo de F_{h_1}.

(c) Calcule $F_h^3 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp}$ de la manera más clara posible.

(d) Sin necesidad de calcularlo, proponga una expresión para la función $\sqcup_{k\geq 0} F_h^k \perp$ Describa en castellano qué denota ese supremo (en términos de h). Vale intenta esto aunque no haya escrito una expresión matemática para el supremo.

(e) El calculado en (d), ¿es el único punto fijo, o hay más?

(a) $$F_h\ f\ n = \begin{cases} h\ n & \text{si } n \leq 0 \vee n \text{ es impar} \\ f\ (n-2) & \text{si } n > 0 \wedge n \text{ es par} \end{cases}$$

(b)

$h_0\ x = 0$ $$F_{h_0}\ h_0\ n = \begin{cases} h_0\ n = 0 & \text{si } n \leq 0 \vee n \text{ es impar} \\ h_0(n-2) = 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

$F_{h_0}\ h_0\ n = h_0\ n$

$h_1\ x = x$ $$F_{h_1}\ h_1\ n = \begin{cases} h_1\ n = n & \text{si } n \leq 0 \vee n \text{ es impar} \\ h_1(n-2) = (n-2) & \text{c.c} \end{cases}$$

$F_{h_1}\ h_1\ n \neq h_1\ x$

(c) $F^0 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n = \perp$

$$F \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n = \begin{cases} h\ n & \text{si } n \leq 0 \vee n \text{ impar} \\ \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp}(n-2) & \text{c.c} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} h\ n & \text{si } n \leq 0 \vee n \text{ impar} \\ \perp & \text{c.c} \end{cases}$$

$$F^2 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n = \begin{cases} h\ n & \text{si } n \leq 0 \vee n \text{ impar} \\ (F \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp})(n-2) & \text{c.c} \end{cases}$$

$$F^2 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n = \begin{cases} h\ n & \text{si } n \leq 0 \vee n \text{ impar} \\ h\ (n-2) & \text{si } (n>0 \wedge n \text{ par}) \wedge \underbrace{(n-2 \leq 0 \vee n-2 \text{ impar})}_{\substack{\text{si } n \text{ par } n-2 \text{ par} \\ n>0 \wedge n-2\leq 0 \Rightarrow 1\leq n\leq 2}} \\ \perp & \text{si } (n>0 \wedge n \text{ par}) \wedge \underbrace{(n-2>0 \wedge n-2 \text{ par})}_{\substack{\text{si } n \text{ par } n-2 \text{ es par} \\ n>0 \wedge n-2>0 \Rightarrow n>2}} \end{cases}$$

$$F^2 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n = \begin{cases} h\ n & \text{si } n\leq 0 \vee n \text{ impar} \\ h(n-2) & \text{si } 1\leq n\leq 2 \wedge n \text{ par} \\ \perp & \text{si } n>2 \wedge n \text{ par} \end{cases}$$

$$F^2 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n = \begin{cases} h\ n & \text{si } n\leq 0 \vee n \text{ impar} \\ h(n-2) & \text{si } n=2 \\ \perp & \text{si } n>2 \wedge n \text{ par} \end{cases}$$

$$F^3 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n = \begin{cases} h\ n & \text{si } n\leq 0 \vee n \text{ impar} \\ (F^2 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp})(n-2) & \text{si } n>0 \wedge n \text{ par} \end{cases}$$

si n par $n-2$ par

$n>0 \wedge n-2\leq 0 \Rightarrow 1\leq n\leq 2$

$$F^3 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n = \begin{cases} h\ n & \text{si } n\leq 0 \vee n \text{ impar} \\ h(n-2) & \text{si } (n>0 \wedge n \text{ par}) \wedge (n-2\leq 0 \vee n-2 \text{ impar}) \\ h(n-2-2) & \text{si } (n>0 \wedge n \text{ par}) \wedge (n-2=2) \Rightarrow n=4 \\ \perp & \text{si } (n>0 \wedge n \text{ par}) \wedge (n-2>2 \wedge n-2 \text{ par}) \end{cases}$$

si n par $n-2$ par

$n>0 \wedge n-2>2 \Rightarrow n>4$

$$F^3 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n = \begin{cases} h\ n & \text{si } n\leq 0 \vee n \text{ impar} \\ h(n-2) & \text{si } n \text{ par} \wedge 1\leq n\leq 2 \\ h(n-4) & \text{si } n=4 \\ \perp & \text{si } n \text{ par} \wedge n>4 \end{cases}$$

$$F^3 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n = \begin{cases} h\ n & \text{si } n\leq 0 \vee n \text{ impar} \\ h(0) & \text{si } n=2 \\ h(0) & \text{si } n=4 \\ \perp & \text{si } n \text{ par} \wedge n>4 \end{cases}$$

$$F^3 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n = \begin{cases} h\ n & \text{si } n\leq 0 \vee n \text{ impar} \\ h(0) & \text{si } n\in\{2,4\} \\ \perp & \text{si } n \text{ par} \wedge n>4 \end{cases}$$

(d) $$\bigsqcup_{k=0} F_n^k \perp = \begin{cases} h\ n & \text{si } n\leq 0 \vee n \text{ impar} \\ h(0) & \text{si } n>0 \wedge n \text{ par} \end{cases}$$

(e) depende de como este definido h, si por ejemplo $h(0)=\bot$ entonces

$$g = \begin{cases} h\, n & \text{si } n \leq 0 \vee n \text{ impar} \\ 1 & \text{si } n > 0 \wedge n \text{ par} \end{cases}$$

también sería un punto fijo.

(3) Analice la equivalencia de los siguientes comandos. Utilice la semántica denotacional para justificar la respuesta.

1 **newvar** $x := 0$ **in catchin** (**while** $x = 0$ **do fail**) **with skip**

2 **skip**

$$\llbracket \text{newvar } x:=0 \text{ in catchin (while } x=0 \text{ do fail) with skip} \rrbracket \sigma$$

$$= (\lambda \sigma'. [\sigma' | x : \sigma x])_{\dagger} (\llbracket \text{catchin (while } x=0 \text{ do fail) with skip} \rrbracket [\sigma | x : 0])$$

$$= (\lambda \sigma'. [\sigma' | x : \sigma x])_{\dagger} (\llbracket \text{skip} \rrbracket_{+} \llbracket \text{while } x=0 \text{ do fail} \rrbracket \sigma [\sigma | x : 0])$$

$$= (\lambda \sigma'. [\sigma' | x : \sigma x])_{\dagger} (\llbracket \text{skip} \rrbracket_{+} \langle \text{abort}, [\sigma | x : 0] \rangle)$$

$$= (\lambda \sigma'. [\sigma' | x : \sigma x])_{\dagger} (\llbracket \text{skip} \rrbracket [\sigma | x : 0])$$

$$= (\lambda \sigma'. [\sigma' | x : \sigma x]) [\sigma | x : 0]$$

$$= [[\sigma | x : 0] | x : \sigma x]$$

$$= \sigma$$

$$= \llbracket \text{skip} \rrbracket \sigma$$

(4) Enunciar un Teorema de Coincidencia para LIS + FALLAS (sólo enunciarlo)

(1) $(\forall w \in FV(c)\ \sigma w = \sigma' w)$ implica

$\llbracket c \rrbracket \sigma = \bot = \llbracket c \rrbracket \sigma'$

o $\llbracket c \rrbracket \sigma \neq \bot \neq \llbracket c \rrbracket \sigma'$ y $\forall w \in FV(c)\ \llbracket c \rrbracket \sigma w = \llbracket c \rrbracket \sigma' w$

o $\llbracket c \rrbracket \sigma = \langle \text{abort}, s_1 \rangle$ $s_1, s_2 \in \Sigma$ y $\forall w \in FV(c)\ \llbracket c \rrbracket \sigma w = \llbracket c \rrbracket \sigma' w$

$\llbracket c \rrbracket \sigma' = \langle \text{abort}, s_2 \rangle$

(2) Si $\llbracket c \rrbracket \sigma \neq \bot$ entonces $\forall w \notin FA(c)\ \llbracket c \rrbracket \sigma w = \sigma w$