# Definiciones

miércoles, 27 de marzo de 2024 9:29

**Comandos:**

$$\langle comm \rangle ::= \text{skip} \mid \langle var \rangle \coloneqq \langle intexp \rangle \mid \langle comm \rangle ; \langle comm \rangle$$
$$\mid \text{if } \langle boolexp \rangle \text{ then } \langle comm \rangle \text{ else } \langle comm \rangle$$
$$\mid \text{newvar } \langle var \rangle \coloneqq \langle intexp \rangle \text{ in } \langle comm \rangle$$
$$\mid \text{while } \langle boolexp \rangle \text{ do } \langle comm \rangle$$

$$\Sigma = (\langle var \rangle \to \mathbb{Z})$$

$$\llbracket \cdot \rrbracket\, \langle comm \rangle \to \Sigma \to \Sigma_\perp$$
$$\llbracket \text{skip} \rrbracket \sigma = \sigma$$
$$\llbracket v \coloneqq e \rrbracket \sigma = [\sigma \mid v : \llbracket e \rrbracket \sigma]$$
$$\llbracket c_0 ; c_1 \rrbracket \sigma = \llbracket c_1 \rrbracket_{\perp\!\!\perp} (\llbracket c_0 \rrbracket \sigma)$$
$$\llbracket \text{if } e \text{ then } c_0 \text{ else } c_1 \rrbracket \sigma = \begin{cases} \llbracket e \rrbracket \sigma & \to \quad \llbracket c_0 \rrbracket \sigma \\ \text{si no} & \to \quad \llbracket c_1 \rrbracket \sigma \end{cases}$$
$$\llbracket \text{newvar } v \coloneqq e \text{ in } c \rrbracket \sigma = rest_{v,\sigma\,\perp\!\!\perp} (\llbracket c \rrbracket [\sigma \mid v : \llbracket e \rrbracket \sigma])$$
$$rest_{v,\sigma} : \Sigma \to \Sigma$$
$$rest_{v,\sigma}\ \sigma' = [\sigma' \mid v : \sigma\ v]$$
$$\llbracket \text{while } b \text{ do } c \rrbracket \sigma = \left( \coprod_{i \in \mathbb{N}} F^i \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \right) \sigma$$
$$F : (\Sigma \to \Sigma_\perp) \to \Sigma \to \Sigma_\perp$$
$$F\ f\ \sigma' = \begin{cases} \llbracket b \rrbracket \sigma' & \to \quad f_{\perp\!\!\perp} (\llbracket c \rrbracket \sigma') \\ \text{si no} & \to \quad \sigma' \end{cases}$$

-----

Alternativa que se me ocurre pero al profe no le gusta:

$$[\![\text{while } b \text{ do } c]\!]\sigma = \begin{cases} \forall i \in \mathbb{N}\ [\![b]\!]([\![c]\!])^i\sigma \neq \text{false} & \rightarrow \quad \perp \\ \text{si no} & \rightarrow \quad \left(\min\limits_{i \in \mathbb{N}\ [\![b]\!]([\![c]\!])^i\sigma = \text{true}} ([\![c]\!])^i\sigma\right) \end{cases}$$

# Repaso

viernes, 5 de abril de 2024 9:30

**Repaso.** Decida si los siguiente argumentos son correctos:

(1) Sea $D$ un dominio y $f\colon D \to D$. Si $f$ es continua, entonces $f$ tiene un menor punto fijo.

(2) Sea $D$ un dominio y $f\colon D \to D$. Si $f$ es continua, entonces $\perp$ es el menor punto fijo de $f$.

(3) Sea $D$ un dominio y sea $f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq f_3 \sqsubseteq \ldots$ una cadena en $D \to D$. Si el supremo de la cadena pertenece a la cadena, entonces existe un índice $k$ tal que $f_k = f_{k+1} = f_{k+2}$.

1, 2)
Verdaderos, el menor punto fijo de $f$ es $\perp_D$

3)
Verdadero

# 1) 🛠️

miércoles, 27 de marzo de 2024 9:21

(1) Utilizar la semántica denotacional para demostrar o refutar las siguientes equivalencias:

(a) $c; \textbf{skip} \equiv c$

(b) $c_1; (c_2; c_3) \equiv (c_1; c_2); c_3$

(c) $(\textbf{if } b \textbf{ then } c_0 \textbf{ else } c_1); c_2 \equiv \textbf{if } b \textbf{ then } c_0; c_2 \textbf{ else } c_1; c_2$

(d) $c_2; (\textbf{if } b \textbf{ then } c_0 \textbf{ else } c_1) \equiv \textbf{if } b \textbf{ then } c_2; c_0 \textbf{ else } c_2; c_1$

(e) $x := y \ ; \ z := w \equiv z := w \ ; \ x := y$

a)

$\llbracket c; \text{skip} \rrbracket \sigma$

=

$\llbracket c \rrbracket (\llbracket \text{skip} \rrbracket \sigma)$

=

$\llbracket c \rrbracket \sigma$

=

$\sigma\rrbracket$

b)

$\llbracket c_1; (c_2; c_3) \rrbracket \sigma$

=

$\llbracket c_2; c_3 \rrbracket (\llbracket c_1 \rrbracket \sigma)$

=

$\llbracket c_3 \rrbracket (\llbracket c_2 \rrbracket (\llbracket c_1 \rrbracket \sigma))$

=

$\llbracket c_3 \rrbracket (\llbracket c_1; c_2 \rrbracket \sigma)$

=

$\llbracket (c_1; c_2); c_3 \rrbracket \sigma$

c)

$(\text{if } b \text{ then } c_0 \text{ else } c_1); c_2 \equiv \text{if } b \text{ then } c_0; c_2 \text{ else } c_1; c_2$

$\llbracket (\text{if } b \text{ then } c_0 \text{ else } c_1); c_2 \rrbracket \sigma$

=

$\llbracket c_2 \rrbracket (\llbracket \text{if } b \text{ then } c_0 \text{ else } c_1 \rrbracket \sigma)$

=

$$\llbracket c_2 \rrbracket \left( \begin{cases} \llbracket b \rrbracket \sigma & \rightarrow \llbracket c_0 \rrbracket \sigma \\ \text{si no} & \rightarrow \llbracket c_1 \rrbracket \sigma \end{cases} \right)$$

=

$$\begin{cases} [\![b]\!]\sigma & \to [\![c_2]\!]([\![c_0]\!]\sigma) \\ \text{si no} & \to [\![c_2]\!]([\![c_1]\!]\sigma) \end{cases}$$

=

$$\begin{cases} [\![b]\!]\sigma & \to [\![c_0 ; c_2]\!]\sigma \\ \text{si no} & \to [\![c_1 ; c_2]\!]\sigma \end{cases}$$

=

$$[\![\text{if } b \text{ then } c_0 ; c_2 \text{ else } c_1 ; c_2]\!]\sigma$$

d)

No son equivalentes porque $c_2$ podría hacer que cambie el valor de verdad de $b$

# 2)

miércoles, 27 de marzo de 2024 10:25

(2) Utilizar la semántica denotacional para demostrar o refutar las siguientes equivalencias:

(a) **newvar** $\mathsf{x} := e$ **in skip** $\equiv$ **skip**

(b) **newvar** $\mathsf{x} := e$ **in** $\mathsf{y} := \mathsf{x}$ $\equiv$ $\mathsf{y} := e$

(c) **newvar** $\mathsf{x} := e_1$ **in** (**newvar** $\mathsf{y} := e_2$ **in** $c$) $\equiv$
**newvar** $\mathsf{y} := e_2$ **in** (**newvar** $\mathsf{x} := e_1$ **in** $c$)

a)

$$[\![\text{newvar x} \coloneqq e \text{ in skip}]\!]\sigma$$
=
$$[([\![\text{skip}]\!][\sigma \mid \text{x} : [\![e]\!]\sigma]) \mid \text{x} : \sigma\, \text{x}]$$
=
$$[([\sigma \mid \text{x} : [\![e]\!]\sigma]) \mid \text{x} : \sigma\, \text{x}]$$
=
$$[\sigma \mid \text{x} : \sigma\, \text{x}]$$
=
$$\sigma$$
=
$$[\![\text{skip}]\!]\sigma$$

b)

$$[\![\text{newvar x} \coloneqq e \text{ in y} \coloneqq \text{x}]\!]\sigma$$
=
$$rest_{\text{x},\sigma_{\perp\!\!\perp}}([\![\text{y} \coloneqq \text{x}]\!][\sigma \mid \text{x} : [\![e]\!]\sigma])$$
=
$$rest_{\text{x},\sigma_{\perp\!\!\perp}}\big([[\sigma \mid \text{x} : [\![e]\!]\sigma] \mid \text{y} : [\sigma \mid \text{x} : [\![e]\!]\sigma]\, \text{x}]\big)$$
=
$$rest_{\text{x},\sigma_{\perp\!\!\perp}}([\sigma \mid \text{x} : [\![e]\!]\sigma, \text{y} : [\![e]\!]\sigma])$$
=
$$[\sigma \mid \text{y} : [\![e]\!]\sigma]$$
=
$$[\![\text{y} \coloneqq e]\!]\sigma$$

c)
Es falso, por ejemplo:

$e_1 = \text{y}$
$e_2 = 0$
$c = \text{z} \coloneqq \text{x}$

# 3)

viernes, 5 de abril de 2024 11:51

(3) Teniendo en cuenta los ejercicios anteriores, discuta en grupo las siguientes afirmaciones:

(a) El parser puede eliminar toda ocurrencia de **skip**.

(b) El parser puede elegir inclinar las secuencias de más de dos comandos hacia la derecha o hacia la izquierda.

a)

No puede en por ejemplo:

while True do skip

b)

Si se refiere a la asociatividad, si

# 4)

viernes, 5 de abril de 2024 11:54

(4) Considere el comando **while true do** $x := x - 1$

(a) Dar la función $F$ que define su semántica. Calcular la expresión más sencilla que pueda para $F$.

(b) Existe algún $n$ tal que $F^n \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp}$ no sea idénticamente $\perp$?

(c) Considere la cadena en $\Sigma \to \Sigma_\perp$ dada por

$$\omega_i\ \sigma \ = \begin{cases} \sigma & \text{si } 0 \leq \sigma x \leq i \\ \perp & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Es sabido que la continuidad de $F$ garantiza la igualdad $F\left(\bigsqcup \omega_i\right) = \bigsqcup F\omega_i$. Compruebe la misma calculando cada miembro de la igualdad para el caso de la cadena dada.

a)

$$F\ f\ \sigma = \begin{cases} [\![\text{true}]\!]\sigma & \rightarrow & f_{\perp\!\!\perp}\ ([\![x := x - 1]\!]\sigma) \\ \text{si no} & \rightarrow & \sigma \end{cases}$$

$$= f_{\perp\!\!\perp}\ ([\![x := x - 1]\!]\sigma)$$

$$= f\ ([\![x := x - 1]\!]\sigma)$$

$$= f\ [\sigma \mid x : \sigma\, x - 1]$$

b)

No

c)

$$\omega_i : \Sigma \rightarrow \Sigma_\perp$$

$$\omega_i\ \sigma = \begin{cases} 0 \leq \sigma\, x \leq i & \rightarrow & \sigma \\ \text{si no} & \rightarrow & \perp \end{cases}$$

Claramente:

$$\left(\bigsqcup_{i\, \in\, \mathbb{N}} \omega_i\right) \sigma = \begin{cases} 0 \leq \sigma\, x & \rightarrow & \sigma \\ \text{si no} & \rightarrow & \perp \end{cases}$$

Entonces:

$$F\left(\bigsqcup_{i\, \in\, \mathbb{N}} \omega_i\right) \sigma$$

$$= \left(\coprod_{i \in \mathbb{N}} \omega_i\right) [\sigma \mid x : \sigma\, x]$$

$$= \begin{cases} 0 \leq [\sigma \mid x : \sigma\, x - 1]\, x & \rightarrow \quad [\sigma \mid x : \sigma\, x - 1] \\ \text{si no} & \rightarrow \quad \bot \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \leq \sigma\, x - 1 & \rightarrow \quad [\sigma \mid x : \sigma\, x - 1] \\ \text{si no} & \rightarrow \quad \bot \end{cases}$$

Ademas:

$F\ \omega_i\ \sigma$

$$= \omega_i\, [\sigma \mid x : \sigma\, x - 1]$$

$$= \begin{cases} 0 \leq [\sigma \mid x : \sigma\, x - 1]\, x \leq i & \rightarrow \quad [\sigma \mid x : \sigma\, x - 1] \\ \text{si no} & \rightarrow \quad \bot \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \leq \sigma\, x - 1 \leq i & \rightarrow \quad [\sigma \mid x : \sigma\, x - 1] \\ \text{si no} & \rightarrow \quad \bot \end{cases}$$

Y claramente:

$\left(\coprod_{i \in \mathbb{N}} F(\omega_i)\right) \sigma$

$$= \begin{cases} 0 \leq \sigma\, x - 1 & \rightarrow \quad [\sigma \mid x : \sigma\, x - 1] \\ \text{si no} & \rightarrow \quad \bot \end{cases}$$

# 5) 🛠️

viernes, 5 de abril de 2024 12:16

(5) Calcule la semántica denotacional de los siguientes comandos:

(a) **while** $\mathsf{x} < 2$ **do if** $\mathsf{x} < 0$ **then** $\mathsf{x} := 0$ **else** $\mathsf{x} := \mathsf{x} + 1$

(b) **while** $\mathsf{x} < 2$ **do if** $\mathsf{y} = 0$ **then** $\mathsf{x} := \mathsf{x} + 1$ **else skip**

a)

Llamemos:

$c_0 = \mathrm{x} := 0$

$c_1 = \mathrm{x} := \mathrm{x} + 1$

$c' = \text{if } \mathrm{x} < 0 \text{ then } c_0 \text{ else } c_1$

$c = \text{while } \mathrm{x} < 2 \text{ do } c'$

$$[\![c']\!]\sigma$$

=

$$\begin{cases} [\![\mathrm{x} < 0]\!]\sigma & \rightarrow & [\sigma \mid \mathrm{x} : 0] \\ \text{si no} & \rightarrow & [\sigma \mid \mathrm{x} : \sigma\,\mathrm{x} + 1] \end{cases}$$

=

$$\begin{cases} \sigma\,\mathrm{x} < 0 & \rightarrow & [\sigma \mid \mathrm{x} : 0] \\ \text{si no} & \rightarrow & [\sigma \mid \mathrm{x} : \sigma\,\mathrm{x} + 1] \end{cases}$$

$$[\![c]\!]\sigma$$

=

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^i \ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp}$$

Con:

$$F : (\Sigma \to \Sigma_\perp) \to \Sigma \to \Sigma_\perp$$

$$F\ f\ \sigma' = \begin{cases} [\![\mathrm{x} < 2]\!]\sigma' & \rightarrow & f_{\perp\!\!\!\perp}([\![c']\!]\sigma') \\ \text{si no} & \rightarrow & \sigma' \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sigma' \,\mathrm{x} < 2 & \rightarrow \quad f_{\perp\!\!\perp}(\sigma') \\ \text{si no} & \rightarrow \quad \sigma' \end{cases}$$

Calculo algunos $F^i \ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp}$:

$$F^0 \ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \ \sigma$$
$$= \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma$$
$$= \perp$$

$$F^1 \ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma$$
$$= F \ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma$$
$$= \begin{cases} \sigma \,\mathrm{x} < 2 & \rightarrow \quad {\perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp}}_{\perp\!\!\perp} (\sigma) \\ \text{si no} & \rightarrow \quad \sigma \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \sigma \,\mathrm{x} < 2 & \rightarrow \quad \perp \\ \text{si no} & \rightarrow \quad \sigma \end{cases}$$

$$F^2 \ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma$$
$$= F\big(F \ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp}\big)\sigma$$
$$= \begin{cases} \sigma \,\mathrm{x} < 2 & \rightarrow \quad \big(F \ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp}\big)_{\perp\!\!\perp} (\sigma) \\ \text{si no} & \rightarrow \quad \sigma \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \sigma \,\mathrm{x} < 2 & \rightarrow \quad \begin{cases} (\sigma) \,\mathrm{x} < 2 & \rightarrow \quad \perp \\ \text{si no} & \rightarrow \quad (\sigma) \end{cases} \\ \text{si no} & \rightarrow \quad \sigma \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \sigma \,\mathrm{x} < 2 & \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma \,\mathrm{x} < 1 & \rightarrow \quad \perp \\ \text{si no} & \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma \,\mathrm{x} < 0 & \rightarrow \quad [\sigma \mid \mathrm{x} : 0] \\ \text{si no} & \rightarrow \quad [\sigma \mid \mathrm{x} : \sigma \,\mathrm{x} + 1] \end{cases} \end{cases} \\ \text{si no} & \rightarrow \quad \sigma \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \sigma \,\mathrm{x} = 1 & \rightarrow \quad [\sigma \mid \mathrm{x} : 2] \\ \sigma \,\mathrm{x} < 1 & \rightarrow \quad \perp \\ \text{si no} & \rightarrow \quad \sigma \end{cases}$$

$$F^3\ \perp_{\Sigma\to\Sigma_\perp}\ \sigma$$

$$= F(F^2\ \perp_{\Sigma\to\Sigma_\perp})\,\sigma$$

$$= \begin{cases} \sigma\,\mathrm{x} < 2 & \to\quad F^2\ \perp_{\Sigma\to\Sigma_\perp}(\sigma\square) \\ \text{si no} & \to\quad \sigma \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sigma\,\mathrm{x} < 2 & \to\quad \begin{cases} (\sigma\square)\,\mathrm{x} = 1 & \to\quad [(\sigma\square)\mid \mathrm{x} : 2] \\ (\sigma\square)\,\mathrm{x} < 1 & \to\quad \perp \\ \text{si no} & \to\quad (\sigma\square) \end{cases} \\ \text{si no} & \to\quad \sigma \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sigma\,\mathrm{x} < 2 & \to\quad \begin{cases} \sigma\,\mathrm{x} = 0 & \to\quad [\sigma\mid \mathrm{x} : 2] \\ \sigma\,\mathrm{x} < 0 & \to\quad \perp \\ \text{si no} & \to\quad \sigma \end{cases} \\ \text{si no} & \to\quad \sigma \end{cases}$$

# 6)

viernes, 12 de abril de 2024 9:30

(6) Suponga que $[\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!]\sigma \neq \perp$.

(a) Demuestre que existe $n \geq 0$ tal que $F^n \perp \sigma \neq \perp$.

(b) Demuestre que si $\sigma' = [\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!]\sigma$ entonces $\neg[\![b]\!]\sigma'$

a)

$$[\![\text{while } b \text{ do } c]\!]\sigma \neq \perp \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \,.\, F^n \perp \sigma \neq \perp_{\Sigma_\perp}$$

Donde:

$F : (\Sigma \to \Sigma_\perp) \to \Sigma \to \Sigma_\perp$

$$F\ f\ \sigma' = \begin{cases} [\![b]\!]\sigma' & \to \quad f_{\perp\!\!\perp}([\![c]\!]\sigma') \\ \text{si no} & \to \quad \sigma' \end{cases}$$

Demostración:

$$[\![\text{while } b \text{ do } c]\!]\sigma \neq \perp_{\Sigma_\perp}$$

$\Leftrightarrow$ (Definición)

$$\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^i \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp}\right)\sigma \neq \perp_{\Sigma_\perp}$$

$\Leftrightarrow$ (Supremo de funcion)

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^i \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma \neq \perp_{\Sigma_\perp}$$

$\Rightarrow$ (Si esto no pasara entonces el supremo tendría que ser $\perp_{\Sigma_\perp}$)

$$\exists i \in \mathbb{N} \,.\, F^i \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma \neq \perp_{\Sigma_\perp}$$

b)

$$[\![\text{while } b \text{ do } c]\!]\sigma \neq \perp \land \sigma' = [\![\text{while } b \text{ do } c]\!]\sigma \Rightarrow \neg[\![b]\!]\sigma'$$

Demostración suponiendo el antecedente:
Por antecedente y prueba auxiliar 2 sea $i \in \mathbb{N}$ tal que:

$$F^i \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma = [\![\text{while } b \text{ do } c]\!]\sigma$$

⇒ (Antecedente)

$$F^i \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma = \sigma'$$

⇒ (Prueba auxiliar 1)

$$\neg [\![b]\!]\sigma'$$

Prueba auxiliar 1:
Sean:
$F$ asociada a $\text{while } b \text{ do } c$
$k \in \mathbb{N}$
$\sigma, \sigma' \in \Sigma$

$$F^k \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma = \sigma' \Rightarrow \neg [\![b]\!]\sigma'$$

Demostración por inducción en $k$:
Caso base:

$$F^0 \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma = \sigma'$$

⇒

$$\perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma = \sigma'$$

⇒

$$\perp = \sigma'$$

⇒ (Eso es una contradicción)

$$\neg [\![b]\!]\sigma'$$

Caso inductivo:

$$F^{k+1}\ \bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}\ \sigma = \sigma'$$

$\Rightarrow$ ()

$$F\left(F^{k}\ \bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}\right)\sigma = \sigma'$$

$\Rightarrow$

$$\sigma' = \begin{cases} \llbracket b \rrbracket \sigma & \to & \left(F^{k}\ \bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}\right)_{\bot\!\!\bot}(\llbracket c \rrbracket \sigma) \\ \text{si no} & \to & \sigma \end{cases}$$

Divición por casos:

Caso $\neg\llbracket b \rrbracket \sigma$:

$$\sigma' = \sigma$$

$\Rightarrow$ (Caso)

$$\neg\llbracket b \rrbracket \sigma'$$

Caso $\llbracket b \rrbracket \sigma$:

$$\sigma' = \left(F^{k}\ \bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}\right)_{\bot\!\!\bot}(\llbracket c \rrbracket \sigma)$$

$\Leftrightarrow$ ($\llbracket c \rrbracket \sigma \neq \bot$ porque $\sigma' \neq \bot$)

$$\sigma' = F^{k}\ \bot_{\Sigma\to\Sigma_\bot}\ (\llbracket c \rrbracket \sigma)$$

$\Rightarrow$ (HI)

$$\neg\llbracket b \rrbracket \sigma'$$

Prueba auxiliar 2:

$$\llbracket \text{while } b \text{ do } c \rrbracket \sigma \neq \bot \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\,.\,F^{n}\ \bot\ \sigma = \llbracket \text{while } b \text{ do } c \rrbracket \sigma$$

Demostración:

$$\llbracket \text{while } b \text{ do } c \rrbracket \sigma \neq \bot_{\Sigma_\bot}$$

$\Leftrightarrow$ (Definición)

$$[\![\text{while } b \text{ do } c]\!]\sigma = \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^i \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp}\right)\sigma \neq \perp_{\Sigma_\perp}$$

$\Leftrightarrow$ (Supremo de funcion)

$$[\![\text{while } b \text{ do } c]\!]\sigma = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^i \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma \neq \perp_{\Sigma_\perp}$$

$\Rightarrow$ ($\Sigma_\perp$ tiene orden discreta)

$$\exists i \in \mathbb{N}\ [\![\text{while } b \text{ do } c]\!]\sigma = F^i \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma$$

# 7) 🛠️

sábado, 13 de abril de 2024 8:51

(7) Demostrar o refutar las siguientes equivalencias usando semántica denotacional:

(a) **while false do** $c \equiv$ **skip**

(b) **while** $b$ **do** $c \equiv$ **while** $b$ **do** $(c; c)$

(c) (**while** $b$ **do** $c$) ; **if** $b$ **then** $c_0$ **else** $c_1 \equiv$ (**while** $b$ **do** $c$) ; $c_1$

a)

$$[\![\text{while false do } c]\!]\sigma$$

$$= \left(F\ f\ \sigma' = \begin{cases} [\![\text{false}]\!]\sigma' & \rightarrow & f_{\perp\!\!\perp}([\![c]\!]\sigma') \\ \text{si no} & \rightarrow & \sigma' \end{cases}\right)$$

$$\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^i\ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp}\right)\sigma$$

=

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma$$

=

$$\sigma$$

=

$$[\![\text{skip}]\!]\sigma$$

b)

No es equivalente, porque si el cuerpo de $\text{while}$ en el lado izquierdo se ejecuta una cantidad impar de veces, en el lado derecho se ejecuta una cantidad par

Por ejemplo:

$b = \text{x} > 0$

$c = \text{x} \coloneqq \text{x} - 1$

Con el estado:

$\sigma = \{\text{x}\colon\ 1\}$

# 8)

sábado, 13 de abril de 2024 9:17

(8) Considerar las siguientes definiciones como syntactic sugar del comando **for** $v := e_0$ **to** $e_1$ **do** $c$:

(a) $v := e_0$; **while** $v \leq e_1$ **do** $c; v := v + 1$.

(b) **newvar** $v := e_0$ **in while** $v \leq e_1$ **do** $c;\ v := v + 1$.

(c) **newvar** $w := e_1$ **in newvar** $v := e_0$ **in while** $v \leq w$ **do** $c; v := v + 1$

¿Hay alguna que pueda considerarse satisfactoria? Justificar.

Las tres son satisfactorias, hacen cosas distintas y hay que tener precauciones distintas para usarlas, pero las tres sirven

Otra opción es:

newvar $v \coloneqq e_0$ in while $v \leq e_1$ do newvar $v \coloneqq v$ in $c; v \coloneqq v + 1$

# 9) 🛠️

sábado, 13 de abril de 2024 9:18

(9) Enunciar de manera completa el teorema de coincidencia y demostrar el caso **while**.

Sean $c \in \langle comm \rangle$ y $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ tales que:

$\forall v \in FV(c) \,.\, \sigma\ v = \sigma'\ v$

$\llbracket c \rrbracket \sigma \neq \perp$

$\llbracket c \rrbracket \sigma' \neq \perp$

Entonces:

$\forall v \in FV(c) \,.\, \llbracket c \rrbracket \sigma\ v = \llbracket c \rrbracket \sigma'\ v$

$\llbracket c \rrbracket \sigma = \llbracket c \rrbracket \sigma'$

Demostración del caso while:

$$\llbracket \text{while } b \text{ do } c \rrbracket \sigma\, v = \llbracket \text{while } b \text{ do } c \rrbracket \sigma'\, v$$

⇔ ()

$$\left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^i\ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \right) \sigma\ v = \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^i\ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \right) \sigma'\ v$$

⇔ ()

$$\left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^i\ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma \right) v = \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^i\ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma' \right) v$$

⇐ (

$\llbracket c \rrbracket \sigma \neq \perp$

$\Rightarrow \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^i\ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma \neq \perp$

$\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} \,.\, \forall j \in \mathbb{N}_{\geq i}\ F^j\ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma \neq \perp$

Y lo análogo para $\sigma'$

Sean $i, i'$ que satisfacen los ∃ (para $i$ e $i'$)

Y sea $k = \max(i, i')$

)

$$\left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_{\geq k}} F^i\ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma \right) v = \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_{\geq k}} F^i\ \perp_{\Sigma \to \Sigma_\perp} \sigma' \right) v$$

⇔

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_{\geq k}} \left(F^{i} \perp_{\Sigma \to \Sigma_{\perp}} \sigma\right) v = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_{\geq k}} \left(F^{i} \perp_{\Sigma \to \Sigma_{\perp}} \sigma'\right) v$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall k \in \mathbb{N}_{\geq k}\ \left(F^{i} \perp_{\Sigma \to \Sigma_{\perp}} \sigma\right) v = \left(F^{i} \perp_{\Sigma \to \Sigma_{\perp}} \sigma'\right) v$$

Prueba auxiliar:
Quiero probar:

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \left(F^{i} \perp_{\Sigma \to \Sigma_{\perp}} \sigma\right) v = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \left(F^{i} \perp_{\Sigma \to \Sigma_{\perp}} \sigma'\right) v$$

$\Leftarrow$

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \left(F^{i} \perp_{\Sigma \to \Sigma_{\perp}} \sigma\right) v = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \left(F^{i} \perp_{\Sigma \to \Sigma_{\perp}} \sigma'\right) v$$

$\Leftarrow$

$$\forall i \in \mathbb{N}\ .\left(F^{i} \perp_{\Sigma \to \Sigma_{\perp}} \sigma\right) v = \left(F^{i} \perp_{\Sigma \to \Sigma_{\perp}} \sigma'\right) v$$

Pruebo esto por inducción en $i$:

Caso base ($i = 1$):

$$\left(F^{0} \perp_{\Sigma \to \Sigma_{\perp}} \sigma\right)$$

$=$

$$\perp_{\Sigma \to \Sigma_{\perp}} \sigma$$

$=$

$$\perp$$

$=$

$$\perp_{\Sigma \to \Sigma_{\perp}} \sigma'$$

$=$

$$\left(F^{0} \perp_{\Sigma \to \Sigma_{\perp}} \sigma'\right)$$

Caso inductivo (para $i + 1$ suponiendo que vale para $i$):

$$\left(F^{i+1} \perp_{\Sigma \to \Sigma_{\perp}} \sigma\right)$$

$=$

$\left(F\left(F^i\ \perp_{\Sigma\to\Sigma_\perp}\right)\sigma\right)$

=

$$\begin{cases} [\![b]\!]\sigma & \to & \left(F^i\ \perp_{\Sigma\to\Sigma_\perp}\right)_{\perp\!\!\perp}([\![c]\!]\sigma) \\ \text{si no} & \to & \sigma \end{cases}$$

= (HI, caso para $\langle intexp \rangle$)

$$\begin{cases} [\![b]\!]\sigma & \to & \left(F^i\ \perp_{\Sigma\to\Sigma_\perp}\right)_{\perp\!\!\perp}([\![c]\!]\sigma) \\ \text{si no} & \to & \sigma \end{cases}$$

$$F\ f\ \sigma' = \begin{cases} [\![b]\!]\sigma' & \to & f_{\perp\!\!\perp}([\![c]\!]\sigma') \\ \text{si no} & \to & \sigma' \end{cases}$$

------

Sean $c \in \langle comm \rangle$ y $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ tales que:

$\forall v \in FV(c)\,.\,\sigma\ v = \sigma'\ v$

$[\![c]\!]\sigma \neq \perp$

$[\![c]\!]\sigma' \neq \perp$

Entonces:

$[\![c]\!]\sigma = [\![c]\!]\sigma'$

Esto es falso tomando:

$c = \mathrm{x} \coloneqq \mathrm{x}$

$\sigma = \{\mathrm{x}: 0, \mathrm{y}: 0, \mathrm{z}: 0\}$

$\sigma' = \{\mathrm{x}: 0, \mathrm{y}: 1, \mathrm{z}: 2\}$

# 10) 🛠️

martes, 16 de abril de 2024 9:20

(10) Usando el Teorema de coincidencia para comandos probar que para todo par de comandos $c_0$, $c_1$, si

$$FV\ c_0 \cap FA\ c_1 = FV\ c_1 \cap FA\ c_0 = \emptyset,$$

entonces $[\![c_0; c_1]\!] = [\![c_1; c_0]\!]$.

$[\![c_0; c_1]\!]\sigma$

$=$

$[\![c_1]\!]([\![c_0]\!]\sigma)$

$=$

$[\![c_0]\!]([\![c_1]\!]\sigma)$

$=$

$[\![c_1; c_0]\!]\sigma$

# 11) 🛠️ 🤔

martes, 16 de abril de 2024 9:21

(11) Considere los siguientes comandos:

$$c_0 \doteq \textbf{newvar } \mathsf{x} := \mathsf{x} + \mathsf{y} \textbf{ in}$$
$$c; \textbf{while } \mathsf{x} > 0 \textbf{ do } \mathsf{y} := \mathsf{y} + 1;\ \mathsf{x} := \mathsf{x} - 1$$
$$c_1 \doteq \textbf{newvar } \mathsf{y} := \mathsf{x} + \mathsf{z} \textbf{ in}$$
$$c; \textbf{while } \mathsf{y} > 0 \textbf{ do } \mathsf{z} := \mathsf{z} + 1;\ \mathsf{y} := \mathsf{y} - 1$$

Asuma que $c$ es un comando que satisface $(FV\ c) \cap \{\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}\} = \emptyset$. Formule la relación que existe entre estos comandos (vistos como funciones que transforman estados), y pruebe tal relación sin calcular semántica.

# 12)

martes, 16 de abril de 2024 9:21

(12) Considere la siguiente cadena en $\Sigma \to \Sigma_\perp$. Decida si existe un programa cuya semántica sea el supremo de la cadena. $f_i\,\sigma = \begin{cases} \sigma & \text{si } \sigma\,\mathsf{x} \leqslant \sigma\,\mathsf{y} \\ \perp & \text{en caso contrario} \end{cases}$

El siguiente:

if $(y < x)$ then (while true do skip) else skip