Definiciones

miércoles, 8 de mayo de 2024 9:24

$\langle expr \rangle = \langle var \rangle \mid \langle expr \rangle \langle expr \rangle \mid \lambda \langle var \rangle . \langle expr \rangle$

$\Delta = \langle var \rangle \to \langle expr \rangle$

$\_/\_ : \langle expr \rangle \times \Delta \to \langle expr \rangle$
$v/\delta = \delta\ v$
$(e_0 e_1)/\delta = (e_0/\delta)(e_1/\delta)$
$(\lambda v. e)/\delta = \lambda v'. (e/[\delta \mid v : v'])$
Donde $v' \notin \bigcup_{w \in FV(e) - \{v\}} FV(\delta\ w)$

$\to \subseteq \langle expr \rangle^2$
Si $e_0 \to e_0'$ entonces $e_0 e_1 \to e_0' e_1$
Si $e_1 \to e_1'$ entonces $e_0 e_1 \to e_0 e_1'$
Si $e \to e'$ entonces $\lambda v. e \to \lambda v. e'$
Si $w \notin FV(e')$ entonces $\lambda v. e \to \lambda w. (e/[v : w])$ (regla α)
$(\lambda v. e_0) e_1 \to e_0/[v : e_1]$ (regla β)
Si $v \notin FV(e)$ entonces $\lambda v. ev \to e$ (regla η)

$FV : \langle expr \rangle \to \mathcal{P}(\langle var \rangle)$
$FV(v) = \{v\}$
$FV(e_0 e_1) = FV(e_0) \cup FV(e_1)$
$FV(\lambda v. e) = FV(e) - \{e\}$

Sea $e \in \langle expr \rangle$:
e es una aplicación $\Leftrightarrow e = e_0 e_1$
e es una abstracción $\Leftrightarrow e = \lambda v. e$
e es un redex $\Leftrightarrow e = (\lambda v. e_0) e_1$
e está en forma normal $\Leftrightarrow e$ no tiene redices

e es cerrada $\Leftrightarrow FV(e) = \emptyset$

Definición de $\Rightarrow$:

$\lambda v. e \Rightarrow_N \lambda v. e$
Si $e_0 \Rightarrow_N \lambda v. e_0'$ y $e_0'/[v: e_1] \Rightarrow_N e'$ entonces $e_0 e_1 \Rightarrow_N e'$

$\lambda v. e \Rightarrow_E \lambda v. e$
Si $e_0 \Rightarrow_E \lambda v. e_0'$, $e_1 \Rightarrow_E e_1'$ y $e_0'/[v: e_1'] \Rightarrow_E e'$ entonces $e_0 e_1 \Rightarrow_E e'$

1) 🛠️

miércoles, 8 de mayo de 2024 12:30

(1) Considerar las siguientes expresiones lambda:

(a) $(\lambda f.\lambda x.f(fx))(\lambda z.\lambda x.\lambda y.zyx)(\lambda z.\lambda w.z)$.

(b) $(\lambda z.zz)(\lambda f.\lambda x.f(fx))$.

Para cada expresión e, reducir a su forma normal e_0. Indicar la 1er forma canónica e_1.

a)

$\lambda(fx.f(f\ x))(\lambda zxy.zyx)(\lambda zw.z)$

$\to \left(\lambda x.(\lambda zx'y.zyx')((\lambda zx'y.zyx')\ x)\right)(\lambda zw.z)$

$\to (\lambda zx'y.zyx')((\lambda zx'y.zyx')\ (\lambda z'w.z'))$

$\to \left(\lambda x'y.((\lambda zx''y'.zy'x'')(\lambda z'w.z')y)x'\right)$

$\to (\lambda x'y.(\lambda x''y'.(\lambda z'w.z')y'x'')yx')$

$\to (\lambda x'y.(\lambda y'.(\lambda z'w.z')y'y)x')$

$\to (\lambda x'y.(\lambda z'w.z')x'y)$

$\to (\lambda x'y.(\lambda w.x')y)$

$\to \lambda x'y.x'$

2) 🛠️

miércoles, 8 de mayo de 2024 12:55

(2) Considerar las expresiones lambda:

$$TRUE = \lambda x.\lambda y.x \qquad NOT = \lambda b.\lambda x.\lambda y.byx$$
$$FALSE = \lambda x.\lambda y.y \qquad AND = \lambda b.\lambda c.\lambda x.\lambda y.b(cxy)y$$
$$IF = \lambda b.\lambda x.\lambda y.bxy$$

Demostrar:

(a) $NOT\ TRUE \to^* FALSE$,

(b) $IF\ TRUE\ e_0\ e_1 \to^* e_0$,

(c) $AND\ TRUE\ TRUE \to^* TRUE$,

(d) $AND\ FALSE\ e \to^* FALSE$,

TRUE = λx.λy.x
AND = λb.λc.λx.λy.b(cxy)y
FALSE = λx.λy.y
NOT = λb.λx.λy.byx
IF = λb.λx.λy.bxy

a)
NOT TRUE = (λb.λx.λy.byx) (λx.λy.x)
→ $\lambda x.\lambda y.(\lambda x_0.\lambda y_0.x_0)yx$
→ λx.λy.y = FALSE

b)
IF TRUE e_0 e_1 = (λb.λx.λy.bxy) (λx.λy.x) e_0 e_1
→ $(\lambda x.\lambda y.(\lambda x_0.\lambda y_0.x_0)xy)\ e_0\ e_1$
→ $(\lambda y.(\lambda x_0.\lambda y_0.x_0)e_0 y)\ e_1$
→ $(\lambda x_0.\lambda y_0.x_0)e_0 e_1$
→ $(\lambda y_0.e_0)\ e_1$
→ e_0

c)
AND TRUE TRUE = (λb.λc.λx.λy.b(cxy)y) (λx.λy.x)

$(\lambda x.\lambda y.x)$

$\rightarrow (\lambda c.\lambda x.\lambda y.(\lambda x_0.\lambda y_0.x_0)(cxy)y)\ (\lambda x.\lambda y.x)$

$\rightarrow^* (\lambda c.\lambda x.\lambda y.cxy)\ (\lambda x.\lambda y.x)$

$\rightarrow \lambda x.\lambda y.(\lambda x_0.\lambda y_0.x_0)xy$

$\rightarrow \lambda x.\lambda y.x$

3)

miércoles, 8 de mayo de 2024 10:31

(3) ¿Cuáles afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas? Justificar.

(a) Toda expresión lambda cerrada tiene forma normal.
(b) Toda expresión lambda cerrada tiene forma canónica.
(c) Toda forma canónica cerrada es forma normal.
(d) Toda forma normal cerrada es forma canónica.

a)
Falso, por ejemplo: $\Delta\Delta$

b)
Falso, por ejemplo: $\Delta\Delta$

c)
Falso, por ejemplo: $\lambda y.\Delta\Delta$

d)
Verdadera

4)

viernes, 10 de mayo de 2024 10:28

(4) Demostrar que una aplicación cerrada no puede ser una forma normal.

Sea $e \in \langle exp \rangle$

Supongamos:

e es una aplicación ①
e es cerrada ②
e es forma normal ③

Por prueba auxiliar sean $n \geq 0, e_0, \ldots, e_n \in \langle exp \rangle$ tales que
e_0 no es una aplicación ④
$e = e_0 e_1 \ldots e_n$ ⑤

Por ② y ⑤ e_0 es cerrada $\Rightarrow e_0 \neq v$
Por ③ y ⑤ e_0 no es una abstracción $\Rightarrow e_0 \neq \lambda v. e'$
Por ④ $e_0 \neq e' e''$

Esto es una contradicción porque si o si tiene que ser alguna de esas tres cosas
□

Prueba auxiliar:
Sea $e \in \langle exp \rangle$

$$\exists n \geq 0, e_0, \ldots, e_n \in \langle exp \rangle \,.\, e_0 \text{ no es una aplicación} \wedge e = e_0 e_1 \ldots e_n$$

Demostración por inducción en $\langle exp \rangle$:

Si $e = v$ tenemos $n = 0, e_0 = v$
Si $e = \lambda v. e'$ tenemos $n = 0, e_0 = e$

Si $e = e'e''$:

Sean por HI $m \geq 0, e'_0, \ldots, e'_m$ tales que

$$e_0 \text{ no es una aplicación} \wedge e' = e'_0 e'_1 \ldots e'_m$$

Entonces tenemos $n = m + 1, e_0 = e'_0, \ldots, e_m = e'_m, e_n = e''$

□

5) 🛠️

viernes, 10 de mayo de 2024 10:29

(5) Para cada expresión del ejercicio 1, evaluar en orden normal $e \Rightarrow_N e_1$, e eager $e \Rightarrow_E e_1$.

6) 🤔 🛠️

viernes, 10 de mayo de 2024 11:37

(6) (a) Para ambos órdenes, pruebe que $e \Rightarrow e'$ implica $e \to^* e'$.
(b) Decida si la siguiente afirmación es cierta y justifique su respuesta: si $e \Rightarrow_N e_1$ y $e \Rightarrow e_2$, entonces existe e' tal que $e_1 \to^* e'$ y $e_2 \to^* e'$.

a)

Normal:

$$(e \Rightarrow_N e') \Rightarrow (e \to^* e')$$

Prueba por inducción en $\Rightarrow_N$

Si $(e \Rightarrow_N e') = (\lambda v. e_0 \Rightarrow_N \lambda v. e_0)$ es cierto por el caso base de $\to^*$

Si $(e \Rightarrow_N e') = (e_0 e_1 \Rightarrow_N z)$ con $e_0 \Rightarrow_N \lambda v. e_0'$ y $(e_0'/v: e_1) \Rightarrow_N z$:

Por HI tenemos $e_0 \to^* \lambda v. e_0'$, $(e_0'/v: e_1) \to^* z$

$\Rightarrow$

$$e_0 e_1 \to^* (\lambda v. e_0')e_1$$

$\Rightarrow$

$$e_0 e_1 \to^* (e_0'/v: e_1)$$

$\Rightarrow$

$$e_0 e_1 \to^* z$$

$\Rightarrow$

$$e \to e^*$$

□

Eager:

$$(e \Rightarrow_E e') \Rightarrow (e \to^* e')$$

Prueba por inducción en $\Rightarrow_E$

Si $(e \Rightarrow_E e') = (\lambda v. e_0 \Rightarrow_E \lambda v. e_0)$ es cierto por el caso base de $\to^*$

Si $(e \Rightarrow_E e') = (e_0 e_1 \Rightarrow_E z)$ con $e_0 \Rightarrow_E \lambda v. e_0'$, $e_1 \Rightarrow_E z'$ y $(e_0'/v: z') \Rightarrow_E z$:

Por HI tenemos $e_0 \to^* \lambda v. e'_0$, $e_1 \to^* z'$ y $(e'_0/v: z') \to^* z$

$\Rightarrow$

$$e_0 e_1 \to^* (\lambda v. e'_0) z'$$

$\Rightarrow$

$$e_0 e_1 \to^* (e'_0/v: z')$$

$\Rightarrow$

$$e_0 e_1 \to^* z$$

□

b)

Sean $e, e_1, e_2 \in \langle exp \rangle$

$$e \Rightarrow_N e_1 \wedge e \Rightarrow_E e_2 \Rightarrow \exists e' \in \langle exp \rangle \,.\, e_1 \to^* e' \wedge e_2 \to^* e'$$

7)

miércoles, 15 de mayo de 2024 9:18

(7) Explique por qué no es cierto que $NOT\ TRUE \Rightarrow FALSE$ en ambos órdenes.

$NOT\ TRUE = (\lambda bxy.byx)(\lambda xy.x)$
$FALSE = \lambda xy.y$

Por que lo que vale es:

$NOT\ TRUE \Rightarrow \lambda xy.(\lambda xy.x)yx$

Y eso ya es forma canónica

8) 🛠️

miércoles, 15 de mayo de 2024 9:18

(8) Sean e_0 y e_1 formas canónicas, construya los árboles para

(a) $NOT\ TRUE\, e_0\, e_1 \Rightarrow_E e_1$,

(b) $AND\ FALSE\, (\Delta\, \Delta)\, e_0\, e_1 \Rightarrow_N e_1$.

a)

$NOT\ TRUE\ e_0\ e_1$

$\quad NOT\ TRUE\ e_0$

$\quad\quad NOT\ TRUE$

$\quad\quad\quad NOT \Rightarrow_E NOT$

$\quad\quad\quad TRUE \Rightarrow_E TRUE$

$\quad\quad\quad (\lambda xy.byx)/[b{:}\, TRUE] \Rightarrow_E \lambda xy.TRUEyx$

$\quad\quad \Rightarrow_E \lambda xy.TRUEyx$

$\quad\quad e_0 \Rightarrow_E e_0$

$\quad\quad (\lambda y.TRUEyx)/[x{:}\, e_0] \Rightarrow_E \lambda y.TRUEye_0$

$\quad \Rightarrow_E \lambda y.TRUEye_0$

$\quad TRUEye_0/[y{:}\, e_1] = TRUE e_1 e_0$

$\quad\quad TRUE e_1$

$\quad\quad\quad TRUE \Rightarrow_E TRUE$

$\quad\quad\quad e_1 \Rightarrow_E e_1$

$\quad\quad\quad (\lambda y.x)/[x{:}\, e_1] \Rightarrow_E \lambda y.e_1$

$\quad\quad \Rightarrow_E \lambda y.e_1$

$\quad\quad e_0 \Rightarrow_E e_0$

$\quad\quad e_1/[y{:}\, e_0] \Rightarrow_E e_1$

$\quad \Rightarrow_E e_1$

$\Rightarrow_E e_1$

9) 🛠️

miércoles, 15 de mayo de 2024 9:18

(9) Explique por qué $AND\ FALSE\,(\Delta\,\Delta)\,e_0\,e_1$ no tiene una forma canónica bajo el orden eager. ¿La tiene $AND\ FALSE\,(\lambda w.\Delta\,\Delta)\,e_0\,e_1$?

10)

miércoles, 15 de mayo de 2024 9:18

(10) ¿Qué debe cumplir b para que $IF\ b \to_{\eta}^{*} b$? ¿Cumplen $TRUE$ y $FALSE$ esas condiciones?

$IF = \lambda bxy.bxy$

$(\lambda b.\lambda x.\lambda y.bxy) \to_{\eta} (\lambda b.\lambda x.bx)b \to_{\eta} (\lambda b.b)b \to_{\eta} b$

Todos los b lo cumplen