Práctico 4

Generación de variables aleatorias discreta:

Ejercicio 1. Se baraja un conjunto de $n = 100$ cartas (numeradas consecutivamente del 1 al 100) y se extrae del mazo una carta por vez. Consideramos que ocurre un "éxito" si la i-ésima carta extraída es aquella cuyo número es i ($i = 1, \dots, n$).

a) Calcule la probabilidad de que

(i) las primeras r cartas sean coincidencias y dé su valor para $r = 10$.

(ii) haya exactamente r coincidencias y estén en las primeras r cartas. Dé su valor para $r = 10$.

b) Pruebe que $E(X) = Var(X) = 1$ donde X es el nÃºmero de coincidencias obtenidas en una baraja de n cartas.

c) Escriba un programa de simulación para estimar la esperanza y la varianza del número total de éxitos, y de los eventos del inciso (a) con $r = 10$, y compare los resultados obtenidos con 100, 1000, 10000 y 100000 iteraciones.

Use el archivo "Problemas de coincidencias" para guiarse.

La variable aleatoria X que representa sacar una carta del mazo tiene una distribución uniforme discreta en el intervalo [1, 100]. Como tenemos 100 cartas la probabilidad de que salga cada carta es $\frac{1}{100}$

Entonces $$p(X=i) = \begin{cases} \frac{1}{100} & 1 \leq i \leq 100 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

a) Llamemos E_i el evento en el cual ocurre un éxito en la i-ésima posición

$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ evento con al menos una coincidencia

$E_{i_1, i_2, \dots, i_m} = E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_m}$ evento en el cual ocurren éxitos en las posiciones $i_1, \dots, i_m$

Estos eventos no excluyen la posibilidad de que hayan éxitos en otras posiciones. Por lo tanto para referirnos a los eventos donde sólo hay éxitos en determinadas posiciones usaremos:

A_i: evento en el cual sólo ocurre un éxito en la i-ésima posición
$A_{i_1,i_2,\dots,i_m} = A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}$: evento en el cual ocurren éxitos sólo en las posiciones $i_1, \dots, i_m$

Llamemos K a la variable que cuenta el número de éxitos, es decir el número de coincidencias entre el valor de un número y la posición que ocupa. La distribución de la variable K está relacionada con la probabilidad de los eventos $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$

Llamemos
$$S_r = \sum_{1 \leq \dots \leq i_1 \leq i_2, \dots < i_r} P(E_{i_1,i_2,\dots i_r})$$

entonces
$$P(E) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} S_r = S_1 - S_2 + S_3 \dots + (-1)^{n-1} S_n$$

Cada S_r tiene $\binom{n}{r}$ términos, es decir, el número de subconjuntos de índices de tamaño r. Dado que la intersección es siempre entre eventos distintos, también tenemos que:
$$P(E_i \cap E_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$$

ya que debemos contar todas las permutaciones posibles de las $n-2$ posiciones distintas de i, j. Así, siguiendo el tema general tenemos que:

$$P(E_{i_1,i_2,\dots i_r}) = \frac{(n-r)!}{n!}$$

que no depende de los índices ni no del número de intersecciones r, y por lo tanto:
$$S_r = \sum_{1 \leq i_1 < i_2, \dots < i_r} P(E_{i_1, i_2, \dots, i_r})$$
$$= \binom{n}{r} \frac{(n-r)!}{n!}$$

$$= \frac{\cancel{n!}}{r!\cancel{(n-r)!}} \frac{\cancel{(n-r)!}}{\cancel{n!}}$$

$$= \frac{1}{r!}$$

y $$P(E) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} S_r = S_1 - S_2 + S_3 \dots + (-1)^{n-1} S_n$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{r!}$$

y la probabilidad de no obtener ninguna coincidencia es:

$$p_n = 1 - P(E) = 1 - \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{r!} = \sum_{K=0}^{n} \frac{(-1)^K}{K!}$$

i) E_i es el evento en el cual la i-ésima posición es un éxito, como queremos ver la probabilidad de que las posiciones 1 a r sean un éxito tenemos

$$P(E_1, E_2, \dots, E_r) = \frac{(n-r)!}{n!} = \frac{(100-r)!}{100!}$$

Así que para $r = 10$ tenemos

$$P(E_1, E_2, \dots, E_{10}) = \frac{(100-10)!}{100!} = \frac{90!}{100!} = \frac{1}{100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 91} \cong 1{,}5419 \times 10^{-20}$$

ii) La probabilidad de que hayan exactamente r coincidencias y que estas ocurran en r posiciones fijas $\{i_1, \dots, i_r\}$ es la misma para todas las especificaciones, depende sólo de r el número de coincidencias, no donde se realizan. Por ende que hayan exactamente r coincidencias en los primeros r lugares es lo mismo que no haya ninguna coincidencia en los últimos n-r lugares. La fracción de computaciones que cumple esto último es $(n-r)!\,p_{n-r}$ por lo cual

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}) = P(A_{1,2,\dots,r})$$
$$= \frac{(n-r)!\,p_{n-r}}{n!}$$
$$= \frac{(n-r)!}{n!} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Los eventos $A_{i_1, i_2, \dots, i_r}$ son eventos disjuntos si las especificaciones $\{i_1, i_2, \dots i_r\}$ son diferentes, y el número de tales especificaciones es $\binom{n}{r}$

Por lo cual:

$$P^n(r) = P(\text{exactamente } r \text{ coincidencias}) = \binom{n}{r} P(A_{i_1, \dots, i_r})$$
$$= \binom{n}{r} \frac{(n-r)!}{n!} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}$$
$$= \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Entonces $P^n(10) = \frac{1}{10!} \sum_{k=0}^{90} \frac{(-1)^k}{k!} \simeq 1{,}0137 \times 10^{-7}$

b) X tiene una distribución uniforme discreta en el intervalo $[1, n]$

$$P(X = m) = P^n(m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$E(X) = \sum_{m=0}^{n} m \cdot P(X=m)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} m \cdot \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(m-1)!} \cdot \sum_{k=0}^{(n-1)-(m-1)} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{n-1-j} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} P(J_{(n-1)} = j)$$

$$= 1$$

donde $J_{(n-1)}$ es el número de coincidencias en una baraja con $(n-1)$ cartas

$$E(X^2) = \sum_{m=0}^{n} m^2 \cdot \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{m=1}^{n} \frac{m}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{(n-m)} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{m-1+1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{(n-m)} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{(m-2)!} \sum_{k=0}^{(n-2)-(m-2)} \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{(n-1)-(m-1)} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{m=0}^{n-2} p_{n-2}(m) + \sum_{m=0}^{n-1} p^{n-1}(m)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

luego $\quad Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - 1^2 = 1$

Ejercicio 2. Se desea construir una aproximación de:

$$\sum_{k=1}^{N} \exp\left(\frac{k}{N}\right) \text{ donde } N = 10000 \,.$$

a) Escriba un algoritmo para estimar la cantidad deseada.

b) Obtenga la aproximación sorteando 100 números aleatorios.

c) Escriba un algoritmo para calcular la suma de los primeros 100 términos, y compare el valor exacto con las dos aproximaciones, y el tiempo de cálculo.

a) $S = \sum_{K=1}^{N} \exp\left(\frac{K}{N}\right)$ $N = 10000$

tomamos $g(u) = \exp\left(\frac{u}{10000}\right)$ y estimamos $E[g(X)]$ para $X \sim U[1, 10000]$

y luego $S = 10000 \cdot E[g(X)]$

Ejercicio 3. Se lanzan simultáneamente un par de dados legales y se anota el resultado de la suma de ambos. El proceso se repite hasta que todos los resultados posibles: $2, 3, \ldots, 12$ hayan aparecido al menos una vez. Estudiar mediante una simulación la variable N, el número de lanzamientos necesarios para cumplir el proceso. Cada lanzamiento implica arrojar *el par* de dados.

a) Describa la estructura lógica del algoritmo que permite simular en computadora el número de lanzamientos necesarios para cumplir el proceso.

b) Mediante una implementación en computadora,

  (i) estime el valor medio y la desviación estándar del número de lanzamientos, repitiendo el algoritmo: 100, 1000, 10000 y 100000 veces.

  (ii) estime la probabilidad de que N sea por lo menos 15 y la probabilidad de que N sea a lo sumo 9, , repitiendo el algoritmo: 100, 1000, 10000 y 100000.

a)
```
posibles_result = {2, 3, ..., 12}
suma = { }
n = 0
while suma != posibles_result :
    d1, d2 = random.randint[1,6], random.randint[1,6]
    suma.add (d1+d2)
    n+1
Return n
```

Ejercicio 4. Implemente tres métodos para generar una variable X que toma los valores del 1 al 10, con probabilidades $p_1 = 0.11,\ p_2 = 0.14,\ p_3 = 0.09,\ p_4 = 0.08,\ p_5 = 0.12,\ p_6 = 0.10,\ p_7 = 0.09,\ p_8 = 0.07,\ p_9 = 0.11,\ p_{10} = 0.09$ usando:

a) Método de rechazo con una uniforme discreta.

b) Transformada inversa.

c) Método de la urna: utilizar un arreglo A de tamaño 100 donde cada valor i está en exactamente $p_i * 100$ posiciones. El método debe devolver $A[k]$ con probabilidad 0.01. ¿Por qué funciona?

Compare la eficiencia de los tres algoritmos realizando 10000 simulaciones.

Ejercicio 10.

(a) Desarrolle un método para generar una variable aleatoria X cuya distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X=j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)2^{j-1}}{3^j}, \quad j = 1,2,\ldots$$

(b) Estime $E(X)$ con 1000 repeticiones y compare con la esperanza exacta.

a) Simplifiquemos la ecuación

$$P(X=j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)2^{j-1}}{3^j}, \quad j=1,2,\ldots$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{j}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2^{j-2}}{3^j}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{j}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2^2\cdot 2^{j-2}}{2^2\cdot 3^j}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{j}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2^j}{3^j}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{j} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2^j}{3^j}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{j}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{j}\right]$$

b) $E(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{j} \right]$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{j} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j}{2}\right)^{j-1} + j\left(\frac{2}{3}\right)^{j} \Big]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j}{2}\right)^{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{2}{3}\right)^{j} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+1}{2^j} + \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{j} \right]$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+1}{2^j} = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} \cdots$$

$$= \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} \cdots$$

$$= \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots$$

$$= 2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}.$$

Y como $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}$ converge a 2, tenemos que $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+1}{2^j}$ converge a 4.

$$\sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{j} = \left(\frac{2}{3}\right) \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}$ es la derivada de la serie geométrico y tenemos que la misma converge cuando $|x|<1$, como $|x|=\frac{2}{3}$ la serie converge a $\frac{1}{(1-2/3)^2}$, entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^j$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)\sum_{j=1}^{\infty} j\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{(1-2/3)^2}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 9$$

$$=6$$

luego:

$$E(X)=\frac{1}{4}\cdot(4+6)$$

$$=\frac{10}{4}$$

$$=2{,}5$$

Ejercicio 11. Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es $P(X=j)=p_j$ con $j=1,2,\ldots$. Sea:

$$\lambda_n = P(X=n|X>n-1) = \frac{p_n}{1-\sum_{j=1}^{n-1} p_j}, \quad n=1,2,\ldots$$

Las cantidades λ_n, son las tasas discretas de riesgo. Considerando a X como el tiempo (discreto) de vida de algún artículo, λ_n representa la probabilidad de que habiendo sobrevivido hasta el tiempo $n-1$, muera en el tiempo n.

a) Muestre que $p_1=\lambda_1$ y que

$$p_n = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_{n-1})\lambda_n$$

Método de la tasa discreta de riesgo para simular variables aleatorias discretas: Se genera una sucesión de números aleatorios que termina cuando el n-ésimo número generado es menor que λ_n. El algoritmo puede escribirse como sigue:

```
Paso 1:  X = 1
Paso 2:  Generar U
Paso 3:  Si U < λX, terminar.
Paso 4:  X = X + 1
Paso 5:  Ir al Paso 2
```

b) Muestre que los valores de X que genera este proceso tienen la distribución de probabilidad deseada.

c) Suponga que X es una variable aleatoria geométrica con parámetro p:

$$P(X=n) = p(1-p)^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Determine los valores de $\lambda_n, n\geq 1$. Explique cómo funciona el algoritmo anterior en este caso y por qué es evidente su validez.

a) Lo haremos mediante inducción. Para $n=1$.

$$p_1 = P(X=1, X>0) = P(X=1|X>0)\,P(X>0)$$

Como $P(X>0)=1$ tenemos:

$$p_1 = P(X=1|X>0) = \lambda_1$$

Para $n=2$

$$p_2 = P(X=2, X>1) = P(X=2|X>1)\cdot P(X>1) = P(X=2|X>1)\cdot(1-p_1)$$

Como $p_1 = \lambda_1$:

$$p_2 = P(X=2 \mid X>1) \cdot (1-\lambda_1) = \lambda_2 \cdot (1-\lambda_1)$$

Entonces supongamos que la formula se cumple para $n \in \mathbb{N}$, entonces para $n+1$ tenemos que:

$$p_{n+1} = P(X=n+1 \mid X>n) \cdot P(X>n) = \lambda_{n+1} \cdot \left(1-\sum_{j=1}^{n} p_j\right)$$
$$= \lambda_{n+1} \cdot (1-p_1-p_2-\dots-p_n)$$

Por hipótesis $p_n = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\dots\lambda_n$ (1)
y además por definición:

(2) $p_n = P(X=n \mid X>n-1) \cdot P(X>n-1) = \lambda_n \cdot (1-p_1-p_2-\dots-p_{n-1})$

entonces por (1) y (2)

(5) $(1-p_1-p_2-\dots-p_{n-1}) = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\dots(1-\lambda_{n-1})$

entonces:

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= (1-p_1-\dots-p_n)\cdot\lambda_{n+1} \\
&= (1-p_1-\dots-p_{n-1})\cdot\lambda_{n+1} - p_n\cdot\lambda_{n+1} \\
&= (1-\lambda_1)\cdot(1-\lambda_2)\dots(1-\lambda_{n-1})\cdot\lambda_{n+1} - p_n\cdot\lambda_{n+1} \quad \text{por } (5) \\
&= (1-\lambda_1)\cdot(1-\lambda_2)\dots(1-\lambda_{n-1})\cdot\lambda_{n+1} - (1-\lambda_1)\dots(1-\lambda_{n-1})\lambda_n\lambda_{n-1} \quad \text{H.I} \\
&= (1-\lambda_1)\cdot(1-\lambda_2)\dots(1-\lambda_{n-1})\cdot(1-\lambda_n)\cdot\lambda_{n+1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto para todo $n \geq 1$ se cumple que:

$$p_n = (1-\lambda_1)\cdot(1-\lambda_2)\dots(1-\lambda_{n-1})\cdot\lambda_n$$

b) Para esto asumimos que $U \sim \mathcal{U}(0,1)$.

Veamos $x=1$

$$p_1 = P(X=1) = P(U_1 < \lambda_1) = \lambda_1$$

$X=2$

$$p_2 = P(X=2) = P(U_1 > \lambda_1 \text{ y } U_2 < \lambda_2) = P(U_1 > \lambda_1)\,P(U_2 < \lambda_2) = (1-\lambda_1)\cdot\lambda_2$$

entonces para $X=n$

$$p_n = P(X=n) = P(U_1 > \lambda_1 \text{ y } U_2 > \lambda_2 \text{ y } U_3 > \lambda_3 \dots \text{ y } U_{n-1} > \lambda_{n-1} \text{ y } U_n < \lambda_n)$$
$$= P(U_1 > \lambda_1)\cdot P(U_2 > \lambda_2)\cdot \dots \cdot P(U_{n-1} > \lambda_{n-1})\cdot P(U_n < \lambda_n)$$
$$= (1-\lambda_1)\cdot(1-\lambda_2)\cdot\dots\cdot(1-\lambda_{n-1})\cdot\lambda_n$$

c) $p_1 = P(x=1) = p(1-p)^{1-1} = p.$

Y como $p_1 = \lambda_1$ entonces $\lambda_1 = p.$

$p_2 = P(x=2) = p(1-p)$

Y como $(1-\lambda_1) = (1-p)$ entonces $\lambda_2 = p.$

$p_n = P(x=n) = p(1-p)^{n-1}$

Y como cada $\lambda_n = p$ entonces $(1-p)^{n-1} = (1-\lambda_1)\cdot(1-\lambda_2)\cdot\dots\cdot(1-\lambda_{n-1})$

y $\lambda_n = p.$

Entonces para $n \geq 1$ $\lambda_n = p.$

Ahora el algoritmo sería:

1. $X = 1$
2. Generar U
3. si $U < \lambda_X = p$, terminar
4. $X = X + 1$
5. Ir al paso 2.

entonces:

$$P(X=1) = P(U<p) = p$$
$$P(X=2) = P(U_1 \geq p \text{ y } U_2 < p) = P(U_1 \geq p) \cdot P(U_2 < p) = (1-p)\, p$$
$$P(X=3) = P(U_1 \geq p, U_2 \geq p \text{ y } U_3 < p) = P(U_1 \geq p) \cdot P(U_2 \geq p) \cdot P(U_3 < p) = (1-p)^2 \cdot p$$
$$\vdots$$
$$P(X=n) = P(U_1 \geq p, U_2 \geq p \ldots U_{n-1} \geq p \text{ y } U_n < p) = (1-p)^{n-1} \cdot p.$$

La variable que se genera es una variable geométrica con probabilidad p.

Ejercicio 12. ¿Qué distribución tiene la variable simulada por el siguiente algoritmo?

```
def QueDevuelve(p1,p2):
    X = int(np.log(1-random())/np.log(1-p1))+1
    Y = int(np.log(1-random())/np.log(1-p2))+1
    return min(X,Y)
```

Escriba otro algoritmo que utilice un único número aleatorio (random()) y que simule una variable con la misma distribución que la simulada por QueDevuelve(0.05, 0.2).

X e Y son variables aleatorias geométricas con probabilidad p_1 y p_2 respectivamente.

El mínimo de dos variables geométricas es otra variable geométrica, en este caso una con probabilidad $p = 1 - (1-p_1)\cdot(1-p_2)$

Ejercicio 8.

a) Desarrolle el método de la Trasformada Inversa y el de Rechazo para generar una variable aleatoria X cuya distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X=i)=\frac{\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}}{\sum_{j=0}^{k}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}} \quad (i=0,\dots,k)$$

b) Estime $P(X>2)$ con $k=10$ y $\lambda=0.7$, y 1000 repeticiones. Compare con el valor exacto.

c) Generalice el problema escribiendo un pseudocodigo para el metodo de rechazo para cualquier variable aleatoria truncada usando como soporte a la variable original (con "cualquier variable aleatoria truncada" nos referimos a una variable como la vista en el inciso (a) pero ahora truncada en cualquier parte $i=a,\dots,b$).

c) Queremos generar una variable X donde:

$$P(X=i)=\frac{P(Y=i)}{\sum_{j=0}^{k}P(Y=i)} \quad (i=a,\dots,b) \quad \text{con} \quad 0\le a\le b\le K$$

donde Y es una variable aleatoria conocida, para la cual conocemos un método que nos permita generar a Y.

Usando el método de aceptación y rechazo tenemos:

```
def ayR(c):
    i = random.y()
    U = random.random()
    if U < P(X=i) / (c·P(Y=i)) :
        return i
    else:
        ayR(c).
```

Pero observemos que:

c debe ser algún valor tal que $\frac{P(X=i)}{P(Y=i)} \leq c$

Pero:

$$\frac{P(X=i)}{P(Y=i)} = \frac{\frac{P(Y=i)}{\sum_{j=0}^{k} P(Y=i)}}{P(Y=i)} = \frac{\cancel{P(Y=i)}}{\sum_{j=0}^{k} P(Y=i)} \cdot \frac{1}{\cancel{P(Y=i)}} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{k} P(Y=i)}$$

Entonces $c = \frac{1}{\sum_{j=0}^{k} P(Y=i)}$

Y tenemos que
$$\frac{P(X=i)}{c \cdot P(Y=i)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin \{a,\dots,b\} \\ \dfrac{\frac{P(Y=i)}{\sum_{j=0}^{k} P(Y=i)}}{\frac{1}{\sum_{j=0}^{k} P(Y=i)} \cdot P(Y=i)} = 1 & \text{c.c} \end{cases}$$

esto quiere decir que si la variable aleatoria Y generada es tal que $a \leq Y \leq b$, entonces se acepta Y, si no, se genera una nueva variable. Entonces simplificamos el pseudo-código a:

```
def ayr():
    i = random.y()
    if a ≤ i ≤ b:
        return i
    else
        ayr()
```