Práctico 3 - Números aleatorios y método de Montecarlo

domingo, 9 de abril de 2023 13:30

Ejercicio 1. Para el estudio mediante simulación es necesario generar muchos números aleatorios en la computadora. Estos corresponden a variables aleatorias uniformemente distribuidas en el intervalo $(0,1)$. Existen en la literatura varias rutinas portables, optimizadas para generar enormes cantidades de números pseudo-aleatorios con velocidad razonable.

a) Calcular los diez primeros números de la secuencia de von Neumann a partir de la semilla:

i) 3792 ii) 1004 iii) 2100 iv) 1234

b) Calcular los diez primeros elementos de la secuencia generada por el generador congruencial

$$y_{i+1} = 5y_i + 4 \mod (2^5),$$

para $y_0 = 4$ y para $y_0 = 50$. ¿Cuál es el período de la secuencia en cada caso?

c) Indicar en cuáles de los siguientes casos el generador

$$y_{i+1} = ay_i + c \mod (M)$$

genera una secuencia de período máximo. Puede utilizar resultados teóricos o implementarlo en Python y calcular el período de la secuencia.

- $a = 125$, $c = 3$, $M = 2^9$
- $a = 123$, $c = 3$, $M = 2^9$
- $a = 5$, $c = 0$, $M = 71$
- $a = 7$, $c = 0$, $M = 71$

d) aprender a utilizar Mersenne Twister, version de la biblioteca standard de python `(random.random)`.

a)
i) 3792

3792, 3792, 3792, …

ii) 1004

1004, 80, 64, 40, 16, 2, 0, 0, …

iii) 2100

2100, 4100, 8100, 6100, 2100, 4100, 8100, …

iv) 1234

1234, 5227, 3215, 3362, 3030, 1809, 2724, 4201, 6484, 422

b) $y_0 = 4$

4, 24, 28, 16, 20, 8, 12, 0, 4, 24

El período es 8

$y_0 = 50$

50, 30, 26, 6, 2, 14, 10, 22, 18, 30

El período es 8

c) - $a = 125$, $c = 3$, $M = 2^9$

Se cumple que m.c.d(c, M) = m.c.d(3, 2^9) = 1
Se cumple que para cada primo p que divide a M, a mod p = 1 (Sólo el primo 2 divide a M y 125 mod 2 = 1)
Se cumple que 4|M y a mod 4 = 1 (125 mod 4 = 1)

El período es M

- $a = 123$, $c = 3$, $M = 2^9$

Se cumple que m.c.d(c, M) = m.c.d(3, 2^9) = 1
Se cumple que para cada primo p que divide a M, a mod p = 1 (Sólo el primo 2 divide a M y 123 mod 2 = 1)
Se cumple que 4|M pero no se cumple que a mod 4 = 1 (123 mod 4 = 3)

El período va a ser menor a M

- $a = 5$, $c = 0$, $M = 71$

No se cumple que m.c.d(c, M) = m.c.d(0, 71) = 1 ya que m.c.d(0, 71) = 71

El período va a ser menor a M

- $a = 7$, $c = 0$, $M = 71$

No se cumple que m.c.d(c, M) = m.c.d(0, 71) = 1 ya que m.c.d(0, 71) = 71

El período va a ser menor a M

Ejercicio 2. Se propone el siguiente juego en el cual todas las variables aleatorias que se generan son **independientes** e idénticamente distribuidas $\mathcal{U}(0,1)$: Se simula la variable aleatoria U. Si $U < \frac{1}{2}$, se suman dos nuevos números aleatorios $W_1 + W_2$. Pero si $U \geq \frac{1}{2}$, se suman tres números aleatorios. El resultado de la suma, en cualquiera de los casos, es una variable aleatoria X. Se gana en el juego si $X \geq 1$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar?.

b) Implementar un algoritmo en computadora que estime la probabilidad de ganar, esto es, la fracción de veces que se gana en n realizaciones del juego. Completar la siguiente tabla:

n	100	1000	10000	100000	1000000
$P[X \geq 1]$					

a) $P(X \geq 1) = P\left(U < \frac{1}{2} \text{ y } W_1+W_2 \geq 1\right) + P\left(U \geq \frac{1}{2} \text{ y } W_1+W_2+W_3 \geq 1\right)$

$= P\left(U < \frac{1}{2}\right) \cdot P(W_1+W_2 \geq 1) + P\left(U \geq \frac{1}{2}\right) \cdot P(W_1+W_2+W_3 \geq 1)$

$= P\left(U \leq \frac{1}{2}\right) \cdot P(W_1+W_2 \geq 1) + \left(1 - P\left(U \leq \frac{1}{2}\right)\right) \cdot P(W_1+W_2+W_3 \geq 1)$

$= F(1/2) \cdot P(W_1+W_2 \geq 1) + (1 - F(1/2)) \cdot P(W_1+W_2+W_3 \geq 1)$

$= F(1/2) \cdot (1 - P(W_1+W_2 \leq 1)) + (1 - F(1/2)) \cdot (1 - P(W_1+W_2+W_2 \leq 1))$

Como todas las variables tienen distribución $\mathcal{U}(0,1)$ entonces:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & c.c \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0<x<1 \\ 1 & c.c \end{cases}$$

$$P(W_1+W_2 = t) = (f_{W_1} * f_{W_2})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{W_1}(w_2) \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(w_2)}_{0 \text{ si } w_2 \leq 0} \cdot f_{W_2}(t-w_2) \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(t-w_2)\, dw_2$$

$$= \int_0^{\infty} f_{W_1}(w_2) \cdot f_{W_2}(t-w_2) \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(t-w_2)\, dw_2 = \int_0^{\infty} \mathbb{I}_{(0,1)}(t-w_2)\, dw_2$$

$u = t - w_2$

$du = -dw_2$

$w_2 = 0 \to u = t$

$w_2 = \infty \to u = -\infty$

$$= \int_t^{-\infty} \mathbb{I}_{(0,1)}(u) \cdot -du = -\int_t^{-\infty} \mathbb{I}_{(0,1)}(u)\, du = \int_{-\infty}^{t} \mathbb{I}_{(0,1)}(u)\, du$$

$$= \begin{cases} t & \text{si } 0 < t - w_2 < 1 \Rightarrow 0 < w_2 < t < 1 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

$$P(W_1+W_2 \leq 1) = \int_0^1 t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$P(W_1+W_2+W_3 = t) = (f_{W_1+W_2} * f_{W_3})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{W_1+W_2}(w_3)}_{0 \text{ si } w_3 \leq 0} \cdot f_{W_3}(t-w_3)\, dw_3$$

$$= \int^{\infty} f_{W_1+W_2}(w_3) \cdot f_{W_2}(t-w_3)\, dw_3 = \int^{t} f_{W_1+W_2}(w_3) \cdot f_{W_2}(t-w_3)\, dw_3$$

$$= \int_0^\infty f_{w_1+w_2}(w_3) \cdot \underbrace{f_{w_3}(t-w_3)}_{0 \text{ si } t-w_3 \leq 0} dw_3 = \int_0^t f_{w_1+w_2}(w_3) \cdot f_{w_3}(t-w_3)\, dw_3$$

$$= \begin{cases} t^2/2 & 0 < w_3 < 1 \text{ y } 0 < t-w_3 < 1 \Rightarrow 0 < w_3 < t < 1 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

$$P(W_1+W_2+W_3 \leq 1) = \int_0^1 \frac{t^2}{2}\, dt = \left[\frac{t^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$P(X \geq 1) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{3+5}{12} = \frac{\cancel{8}^{\,4\,2}}{\cancel{12}_{6\,3}} = \frac{2}{3} \cong 0{,}66\overline{6}$$

b)

n	100	1000	10000	100000	1000000
$P[X \geq 1]$	0,68	0,662	0,6656	0,66466	0,667226

Ejercicio 3. Las maquinas tragamonedas usualmente generan un premio cuando hay un acierto. Supongamos que se genera el acierto con el siguiente esquema: se genera un número aleatorio, y

i) si es menor a un tercio, se suman dos nuevos números aleatorios

ii) si es mayor o igual a un tercio, se suman tres números aleatorios .

Si el resultado de la suma es menor o igual a 2, se genera un acierto.

a) ¿Cuál es la probabilidad de acertar?.

b) Implementar un algoritmo en computadora que estime la probabilidad de acertar, esto es, la fracción de veces que se acierta en n realizaciones del juego. Completar la siguiente tabla:

n	100	1000	10000	100000	1000000
$P[X \leq 2]$					

Vamos a asumir que todas las variables tienen distribución $\mathcal{U}(0,1)$
Llamemos X a la variable aleatoria que representa la suma, W_i son las variables aleatorias que se suman y U es la variable aleatoria que generamos al principio del juego

a) $P(X \leq 2) = P(U < 1/3,\ W_1+W_2 \leq 2) + P(U \geq 1/3\ \ W_1+W_2+W_3 \leq 2)$

$= P(U \leq 1/3) \cdot P(W_1+W_2 \leq 2) + (1 - P(U \leq 1/3)) \cdot P(W_1+W_2+W_3 \leq 2)$

$= F(1/3) \cdot P(W_1+W_2 \leq 2) + (1 - F(1/3)) \cdot P(W_1+W_2+W_3 \leq 2)$

$P(W_1+W_2 \leq 2) = 1$ ya que $0 < W_1, W_2 < 1$

$P(W_1+W_2+W_3 \leq 2) = (-(W_1+W_2+W_3) \geq -2) = (3-(W_1+W_2+W_3) \geq 1)$

$= (\underbrace{(1-W_1)}_{X_1} + \underbrace{(1-W_2)}_{X_2} + \underbrace{(1-W_3)}_{X_3} \geq 1)$

$P(X_1+X_2+X_3 \geq 1) = 1 - P(X_1+X_2+X_3 \leq 1)$ (calculado en el ej. 2)

$= 1 - 1$

$$P(X_1+X_2+X_3 \geq 1) = 1 - P(X_1+X_2+X_3 \leq 1)$$
$$= 1 - \frac{1}{6}$$
$$= \frac{5}{6}$$

<<<<

$$P(X \geq 2) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{5}{9} = \frac{3+5}{9} = \frac{8}{9} \cong 0,8\overline{8}$$

b)

n	100	1000	10000	100000	1000000
$P[X \leq 2]$	0,96	0,877	0,8918	0,88837	0,889186

Ejercicio 4. Un supermercado posee 3 cajas, de los cuales, por una cuestión de ubicación, el 40% de los clientes eligen la caja 1 para pagar, el 32% la caja 2, y el 28% la caja 3. El tiempo que espera una persona para ser atendido en cada caja distribuye exponencial con medias 3, 4 y 5 minutos respectivamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente espere menos de 4 minutos para ser atendido?

b) Si el cliente tuvo que esperar más de 4 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente haya elegido cada una de las cajas?

c) Simule el problema y estime las probabilidades anteriores con 1000 iteraciones.

$P(C_1) = 0.40$ $\qquad N_1 \sim \mathcal{E}(1/3)$

$P(C_2) = 0.32$ $\qquad N_2 \sim \mathcal{E}(1/4)$

$P(C_3) = 0.28$ $\qquad N_3 \sim \mathcal{E}(1/5)$

Llamemos M a la V.A continua que representa el tiempo que espera un cliente

a) $P(M \leq 4) = P(C_1) \cdot P(N_1 < 4) + P(C_2) \cdot P(N_2 < 4) + P(C_3) \cdot P(N_3 < 4)$
$$= 0.40 \times (1 - e^{-1/3 \cdot 4}) + 0.32 \times (1 - e^{-1/4 \cdot 4}) + 0.28 \times (1 - e^{-1/5 \cdot 4})$$
$$\cong 0,65102$$

b) Caja 1:
$$P(C_1 \mid M \geq 4) = \frac{P(C_1, M \geq 4)}{P(M \geq 4)} = \frac{P(C_1) \cdot P(M \geq 4 \mid C_1)}{P(M \geq 4)} = \frac{P(C_1) \cdot P(N_1 \geq 4)}{P(M \geq 4)}$$
$$= \frac{0.40 \times e^{-1/3 \cdot 4}}{1 - P(M \leq 4)}$$
$$\cong 0,3021$$

Caja 2:
$$P(C_2 \mid M \geq 4) = \frac{P(C_2, M \geq 4)}{P(M \leq 4)} = \frac{P(C_2) \cdot P(M \geq 4 \mid C_2)}{1 - P(M \leq 4)} = \frac{P(C_2) \cdot P(N_2 \geq 4)}{1 - P(M \leq 4)}$$
$$\cong \frac{0,32 \times e^{-1}}{1 - 0,65102}$$
$$\cong 0,3373$$

Caja 3:

Caja 3:

$$P(C_3 \mid M \geq 4) = \frac{P(C_3, M \geq 4)}{P(M \leq 4)} = \frac{P(C_3) \cdot P(M \geq 4 \mid C_3)}{1 - P(M \leq 4)} = \frac{P(C_3) \cdot P(N_3 \geq 4)}{1 - P(M \leq 4)}$$

$$\simeq \frac{0{,}28 \times e^{-4/5}}{1 - 0{,}65\,102}$$

$$\simeq 0{,}3605$$

c)

```
In [168]: nsim = 1000
          prob_tiempos = 0
          for i in range(0, nsim):
              tiempo = tiempo_cajas_super()
              if tiempo < 4:
                  prob_tiempos += 1
          print(prob_tiempos/nsim)

          0.653
```

```
In [38]: nsim = 1000
         sum_probs = 0
         for i in range(0, nsim):
             prob = prob_caja_1()
             sum_probs += prob
         print(sum_probs/nsim)

         0.3094733222534249
```

```
In [51]: nsim = 1000
         sum_probs = 0
         for i in range(0, nsim):
             prob = prob_caja_2()
             sum_probs += prob
         print(sum_probs/nsim)

         0.3381282594991124
```

```
In [58]: nsim = 1000
         sum_probs = 0
         for i in range(0, nsim):
             prob = prob_caja_3()
             sum_probs += prob
         print(sum_probs/nsim)

         0.3610522092956624
```

Ejercicio 5. Calcule exactamente el valor de las siguientes integrales. Mediante una simulación de Monte Carlo con n iteraciones, calcule a su vez un valor aproximado y compare con el valor exacto.

a) $\int_0^1 (1-x^2)^{3/2}\,dx$

b) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\,dx$

c) $\int_0^\infty x\,(1+x^2)^{-2}\,dx$

d) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$

e) $\int_0^1 \left[\int_0^1 e^{(x+y)^2}\,dx\right] dy$

f) $\int_0^\infty \left[\int_0^x e^{-(x+y)}\,dy\right] dx$

Definimos la función de Monte Carlo de la siguiente manera:

```
: def IntegralMonteCarlo(funciong, a, b, Nsim):
      if a != -np.inf and b != np.inf:
          Integral = 0
          for _ in range(Nsim):
              Integral += funciong(a + (b-a) * random.random())
          result = Integral * (b-a)/Nsim
      elif b == np.inf and a != -np.inf:
          Integral = 0
          for _ in range(Nsim):
              x = random.random()
              Integral += (1/pow(x, 2))*funciong((1/x) - 1)
          result = Integral / Nsim
      elif b != np.inf and a == -np.inf:
          Integral = 0
          for _ in range(Nsim):
              x = random.random()
              Integral += (1/pow(x, 2))*funciong(-(1/(x)) + 1)
          result = Integral / Nsim
      elif a == -np.inf and b == np.inf:
          try:
              result1 = IntegralMonteCarlo(funciong, 0, b, Nsim)
              result2 = IntegralMonteCarlo(funciong, a, 0, Nsim)
              result = result1 + result2
          except:
              return "No existe la integral"
      return result
```

a) $$\int_0^1 (1-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{3\pi}{16} \approx 0{,}58905$$

Por MC. $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^{3/2} dx = \int_0^1 (1-x^2)^{3/2} I_{(0,1)}(x)\, dx = E[g(U)] = \theta$

Sean $U_1 \sim \mathcal{U}(0,1)$ variables aleatorias:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\infty} g(U_i) \simeq \theta$$

Entonces con $g = (1-x^2)^{3/2}$ y $N = 10000$ tenemos:

$$\int_0^1 (1-x^2)^{3/2} dx$$

```
result = IntegralMonteCarlo((lambda x: pow((1-pow(x, 2)), 3/2)), 0, 1, 100000)
print(result)
```

```
0.5885492546613968
```

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\, dx = \int_3^8 \frac{\cancel{x}}{u} \cdot \frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int_3^8 \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{2}\cdot \Big(\ln(u)\Big)_3^8 = \frac{1}{2}\cdot\Big(3\ln(2) - \ln(3)\Big) \cong 0{,}49041$

$u = x^2 - 1 \qquad x \to 2 \quad u \to 3$

$du = 2x\,dx \qquad x \to 3 \quad u \to 8$

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\, dx = \int_0^1 \frac{y+2}{(y+2)^2-1} \cdot dy$$

$y = x-2 \qquad x = y+2$

$dy = dx \qquad x \to 2 \quad y \to 0$

$\qquad\qquad x \to 3 \quad y \to 1$

entonces generamos 10000 V.A con distribución $\mathcal{U}(0,1)$ y calculamos

$$\frac{1}{10000} \cdot \sum_{i=1}^{10000} \frac{U_i + 2}{(U_i+2)^2 - 1}$$

tenemos:

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\, dx$$

```
result = IntegralMonteCarlo((lambda x: x/(pow(x, 2) - 1)), 2, 3, 100000)
print(result)
```

```
0.4902972586172403
```

c) $\displaystyle\int_0^\infty x(1+x^2)^{-2}\, dx = \int_1^n \cancel{x}(u)^{-2} \cdot \frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int_1^n (u)^{-2} du = \frac{1}{2}\cdot\left[u^{-1}\right]_1^n = \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ ✓

$u = 1 + x^2 \qquad x \to 0 \quad u \to 1$

$du = 2x\,dx \qquad x \to \infty \quad u \to \infty$

$$\int_0^\infty x(1+x^2)^{-2}\, dx = \int_1^0 \left(\frac{1}{y} - 1\right)\left(1 + \left(\frac{1}{y}-1\right)^2\right)^{-2} \cdot -\frac{dy}{y^2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{y}-1\right)\left(1+\left(\frac{1}{y}-1\right)^2\right)^{-2} \cdot \frac{dy}{y^2}$$

$y = \frac{1}{x+1}$ $\quad x = \frac{1}{y} - 1$ $\quad x \to 0 \;\; y \to 1$ $\quad x \to \infty \;\; y \to 0$

$dy = -\frac{1}{(x+1)^2} dx$ $\quad dx = -\frac{1}{y^2} dy$

$dx = -(x+1)^2 dy$ $\quad dx = -(x+1)^2 dy$

Entonces generamo 10.000 VA $U(0,1)$ y calculamos

$$\frac{1}{10000} \cdot \sum_{i=1}^{10000} \left(\frac{1}{U_i} - 1\right)\left(1 + \left(\frac{1}{U_i} - 1\right)^2\right)^{-2} \cdot \frac{1}{U_i}$$

Y tenemos:

$$\int_0^\infty x(1+x^2)^{-2} dx$$

```
result = IntegralMonteCarlo((lambda x: x*pow((1+pow(x, 2)), -2)), 0, np.inf, 100000)
print(result)
```

0.5003709968357698

d) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \cong 1{,}77245$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx + \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_\infty^0 e^{-(-y)^2} \cdot -dy + \int_1^0 e^{-\left(\frac{1}{u} - 1\right)^2} \frac{-du}{u^2}$$

$y = -x$ $\quad x \to -\infty \;\; y \to \infty$ $\quad u = \frac{1}{x+1}$ $\quad x \to \infty \;\; u \to 0$

$x = -y$ $\quad x \to 0 \;\; y \to 0$ $\quad x \to 0 \;\; u \to 1$

$dx = -dy$ $\quad du = -\frac{1}{(x+1)^2} dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

```
In [281]: result = IntegralMonteCarlo(lambda x: math.exp(-pow(x, 2)), -np.inf, np.inf, 100000)
          print(result)
```

1.7704294684129893

e) $\int_0^1 \left[\int_0^1 e^{(x+y)^2} dy\right] dx \cong 4{,}89916 \equiv \theta$

Llamemos $g(x,y) = e^{(x+y)^2}$. Entonces

$\theta = E[g(U_i, X_i)]$ con U, X variables aleatorias uniformes en el rango $(0,1)$

Entonces generamo 10000 muestras independientes de cada variable y tenemos que:

$$\theta \sim \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} g(U_i, X_i)$$

Y tenemos:

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{(x+y)^2}\, dy dx$$

```
In [30]: Integral = 0
         Nsim = 10000
         funciong = (lambda x, y: math.exp(pow(x+y, 2)))
         a = 0
         b = 1
         for _ in range(Nsim):
             Integral += funciong(a + (b-a) * random.random(), a + (b-a) * random.random())
         result = Integral * (b-a)/Nsim
         print(result)

         4.8988133996867855
```

f) $$\int_0^{\infty}\left[\int_0^{x} e^{-(x+y)}\, dy\right] dx = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Para aplicar montecarlo hacemos un cambio de variable primero

$$z = \frac{y-a}{b-a} = \frac{y}{x} \qquad y \to 0 \quad z \to 0 \qquad y \to x \quad z \to 1$$

$$y = z \cdot x$$

$$dy = dz \cdot x$$

$$\int_0^{\infty}\left[\int_0^{1} e^{-(x+zx)^2}\, dz \cdot x\right] dx$$

$$u = \frac{1}{x+1} \qquad x = \frac{1}{u} - 1 \qquad x \to \infty \quad u \to 0 \qquad x \to 0 \quad u \to 1$$

$$du = -\frac{1}{(x+1)^2}\, dx$$

$$dx = -(x+1)^2 du$$

$$\int_0^{\infty}\left[\int_0^{1} e^{-(x+zx)^2}\, x\, dz\right] dx = \int_1^{0}\left[\int_0^{1} e^{-\left(\left(\frac{1}{u}-1\right)+z\cdot\left(\frac{1}{u}-1\right)\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{u}-1\right) dz\right] - \left(\frac{1}{u}-1+1\right)^2 du$$

$$= -\int_1^{0}\left[\int_0^{1} e^{-\left(\left(\frac{1}{u}-1\right)+z\cdot\left(\frac{1}{u}-1\right)\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{u}-1\right)\cdot dz\right]\cdot\left(\frac{1}{u}\right)^2 du$$

$$= \int_0^{1}\left[\int_0^{1} e^{-\left(\left(\frac{1}{u}-1\right)+z\cdot\left(\frac{1}{u}-1\right)\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{u}-1\right) dz\right]\cdot\left(\frac{1}{u}\right)^2 du$$

Ahora llamemos $g(u,z) = \left(\frac{1}{u}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{u}-1\right)\cdot e^{-\left(\left(\frac{1}{u}-1\right)+z\cdot\left(\frac{1}{u}-1\right)\right)^2}$

Entonces podemos aproximar el resultado de la integral con

$$\theta \sim \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(u_i, z_i) \qquad u, z \sim \mathcal{U}(0,1)$$

Con $N=10000$ generamos N V.A u_i y z_i y tenemos el siguiente resultado:

$$\int_0^\infty \int_0^x e^{-(x+y)^2}\, dy dx$$

In [61]:
```
Integral = 0
Nsim = 10000
funciong = (lambda x, y: (1/x - 1) * math.exp(-pow(1/x-1+y*(1/x-1), 2)) * pow(1/x, 2))
a = 0
b = 1
for _ in range(Nsim):
    Integral += funciong(a + (b-a) * random.random(), a + (b-a) * random.random())
result = Integral * (b-a)/Nsim
print(result)
```

0.2502497868943337

n	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	⟵ integral
100	0,5820	0,4787	0,5361	1,7424	4,9374	0,2696	
1000	0,5917	0,4917	0,4911	1,75	4,5937	0,2577	
10000	0,5885	0,4908	0,5013	1,7586	4,855	0,2425	
100000	0,5886	0,4902	0,4968	1,7773	4,9162	0,2506	
1000000	0,5883	0,4904	0,5003	1,7793	4,8917	0,2500	

Ejercicio 6. Para $U_1, U_2, \ldots$ variables aleatorias uniformemente distribuídas en el intervalo $(0,1)$, se define:

$$N = \text{Mínimo}\left\{n : \sum_{i=1}^{n} U_i > 1\right\}$$

Es decir, N es igual a la cantidad de números aleatorios que deben sumarse para exceder a 1.

a) Estimar $E[N]$ generando n valores de N y completar la siguiente tabla:

n	100	1000	10000	100000	1000000
$E[N]$					

b) Calcular el valor exacto de $E[N]$.

n	100	1000	10000	100000	1000000
$E[N]$	2,73	2,685	2,7209	2,71524	2,719845

b) N es una variable aleatoria discreta que toma valores enteros no negativos, además $N \geq 2$, ya que cada U_j es un número positivo menor que 1, entonces:

$$E[N] = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot P(N=n)$$

Para calcular $P(N=n)$ notemos que $N=n$ si y solo si

$$\sum_{i=1}^{n} U_i > 1 \quad y \quad \sum_{i=1}^{n-1} U_i \leq 1$$

Para simplificar la notación llamemos S_n a $\sum_{i=1}^{n} U_i$

Ahora bien, $S_n > 1$ sii $S_{n-1} > 1$ ó $(S_{n-1} \leq 1$ y $S_n > 1)$
Por lo tanto:

$$P(S_n > 1) = P(S_{n-1} > 1) + P(N=n)$$
$$P(N=n) = P(S_n > 1) - P(S_{n-1} > 1)$$

Ahora debemos encontrar la función de densidad de S_n.

Sea f_n la función de densidad de la variable aleatoria S_n, $n \geq 1$. Entonces

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad 0 < x < 1$$

Probemos esto por inducción

Para $n=1$, tenemos que $S_1 = U_1$ y sabemos que su densidad es $I_{(0,1)}(x)$, por lo que la afirmación es cierta en este caso

Para $n=2$, tenemos que $S_2 = U_1 + U_2$. Sea f_{U_i} la densidad de la V.A U_i, con $i=1,2$. Por la fórmula de convolución tenemos que

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U_1}(t) \cdot f_{U_2}(x-t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} I_{(0,1)}(t)\, I_{(0,1)}(x-t)\, dt = \int_0^x dt = x$$

por lo que la afirmación es cierta.

Supongamos ahora que

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

para un cierto n, y para todo $0<x<1$ y veamos que la afirmación se cumple para $n+1$

Tenemos que $f_{n+1} = f_{S_n + U_{n+1}}$ y utilizando la fórmula de la densidad para la suma de variables aleatorias tenemos:

$$f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\, f_{U_{n+1}}(x-t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\, I_{(0,1)}(x-t)\, dt = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, dt = \frac{x^n}{n!}$$

Ahora podemos calcular $E[N]$

$$P(S_n > 1) = 1 - P(S_n \leq 1) = 1 - \int_0^1 f_n(t)\, dt = 1 - \frac{1}{n!}$$

$$P(N=n) = \left(1 - \frac{1}{n!}\right) - \left(1 - \frac{1}{(n-1)!}\right) = \frac{n-1}{n!}$$

y por lo tanto:

$$E[N] = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot P(N=n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cancel{n}\cancel{(n-1)}}{\cancel{n}\cdot\cancel{(n-1)}\cdot(n-2)!}$$

$$= \sum^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum^{\infty} \frac{1}{\ } = e$$

$$n! \qquad \cancel{n}\cdot(\cancel{n-1})\cdot(n-2)!$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

Ejercicio 7. Para $U_1, U_2, \ldots$ números aleatorios, se define:

$$N = \text{Máximo}\left\{ n : \prod_{i=1}^{n} U_i \geq e^{-3} \right\}$$

donde: $\prod_{i=1}^{0} U_i = 1$. Mediante n simulaciones determinar:

a)

n	100	1000	10000	100000	1000000
$E[N]$					

b) $P(N = i)$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, usando $n = 1000000$.

a)

n	100	1000	10000	100000	1000000
$E[N]$	3,91	4,054	3,9986	4,00175	4,0003

b)

$P(N=0) = 0.0$

$P(N=1) = 0{,}049972$

$P(N=2) = 0{,}14933$

$P(N=3) = 0{,}2242$

$P(N=4) = 0{,}2246$

$P(N=5) = 0{,}1676$

$P(N=6) = 0{,}1015$

Ejercicio 8. Un juego consiste en dos pasos. En el primer paso se tira un dado convencional. Si sale 1 o 6 tira un nuevo dado y se le otorga al jugador como puntaje el doble del resultado obtenido en esta nueva tirada; pero si sale 2, 3, 4 o 5 en la primer tirada, el jugador debería tirar dos nuevos dados, y recibiría como puntaje la suma de los dados. Si el puntaje del jugador excede los 6 puntos entonces gana.

a) Realizar un cálculo teórico de la probabilidad de que un jugador gane.

b) Estime la probabilidad de que un jugador gane mediante una simulación.

a) Llamemos X_1, X_2 y X_3 a las V.A de la primera, segunda y tercera tirada respectivamente y llamemos V a la V.A del puntaje final.

$$P(V>6) = P(X_1=6)\cdot P(2X_2>6) + P(X_1=1)\cdot P(2X_2>6) + P(X_1=2)\cdot P(X_2+X_3>6)$$
$$+ P(X_1=3)\cdot P(X_2+X_3>6) + P(X_1=4)\cdot P(X_2+X_3>6) + P(X_1=5)\cdot P(X_2+X_3>6)$$

Como X_1, X_2, X_3 son V.A de tiradas de dado entonces tienen una distribución uniforme discreta en el intervalo $[1,6]$ y además son independientes entre sí

$$P(X_2+X_3>6) = 1 - P(X_2+X_3 \leq 6)$$
$$= 1 - \left[\sum_{i=1}^{6} p_{X_2}(i)\, p_{X_3}(6-i) + \sum_{i=1}^{6} p_{X_2}(i)\, p_{X_3}(5-i) + \sum_{i=1}^{6} p_{X_2}(i)\, p_{X_3}(4-i) + \ldots + \sum_{i=1}^{6} p_{X_2}(i)\, p_{X_3}(1-i) \right]$$
$$= 1 - \left[5\cdot(1)^2 + 4\cdot(1)^2 + 3\cdot(1)^2 + 2\cdot(1)^2 + (1)^2 \right]$$

$$= 1 - \left[\sum_{i=1} p_{X_2} \cdot p_{X_3} + \sum_{i=1} p_{X_2} \cdot p_{X_3} + \sum_{i=1} p_{X_2} \cdot p_{X_3} + \dots + \sum_{i=1} p_{X_2} \cdot p_{X_3} \right]$$

$$= 1 - \left[5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \right]$$

$$= 1 - \left[\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 15 \right]$$

$$= 1 - \frac{15}{36}$$

$$= \frac{21}{36}$$

$$P(V > 6) = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - P(X_2 \leq 3)\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(1 - P(X_2 \leq 3)\right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{21}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{21}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{21}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{21}{36}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(1 - F_{X_2}(3)\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(1 - F_{X_2}(3)\right) + \frac{\cancel{4}^{\,1}}{6} \cdot \frac{21}{\cancel{36}_{\,9}}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{3}{6}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{3}{6}\right) + \frac{\cancel{21}^{\,7}}{\cancel{54}_{\,18}}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right) + \frac{7}{18}$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{7}{18}$$

$$= \frac{2}{12} + \frac{7}{18} = \frac{120}{216} \simeq 0{,}5\overline{55}$$

b)

Ejercicio 8

In [120]:
```
def juego_ej_8(Nsim):
    vict = 0
    for i in range (Nsim):
        dado = random.randint(1, 6)
        if dado == 6 or dado == 1:
            result = 2 * random.randint(1, 6)
        else:
            result = random.randint(1, 6) + random.randint(1, 6)
        if result > 6:
            vict += 1
    return vict/Nsim
```

In [124]:
```
juego_ej_8(100000)
```

Out[124]:
```
0.55485
```