Práctica 5

Generación de variables aleatorias continuas

Ejercicio 1. Desarrolle un método para generar una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad es

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{2-x/3}{2} & \text{si } 3 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6(x+3)}{35} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{6x^2}{35} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\exp(4x)}{4} & \text{si } -\infty < x \leq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 0 < x \leq \frac{15}{4} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

a) $F(x)$

$x \leq 3$

$$\int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{-\infty}^{2} 0 ds + \int_{2}^{x} \frac{s-2}{2} ds = 0 + \frac{1}{2}\left[\frac{s^2}{2} - 2s.\right]_2^x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 2x - \left(\frac{2^2}{2} - 2\cdot 2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 2x - 2 + 4\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^2}{2} - 2x + 2\right] = \frac{x^2}{4} - x + 1$$

$$F(3) = \frac{3^2}{4} - 3 + 1 = \frac{9}{4} - 3 + 1 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{9-8}{4} = \frac{1}{4}$$

$3 \leq x \leq 6$

$$\int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{-\infty}^{3} f(s)ds + \int_{3}^{x} \frac{2-\frac{s}{3}}{2} ds = 1/4 + 1/2 \int_3^x 2 - s/3 \, ds$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\left[2s - \frac{s^2}{6}\right]_3^x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\left[2x - \frac{x^2}{6} - \left(6 - \frac{9}{6}\right)\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\left[2x - \frac{x^2}{6} - \frac{27}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left[2x - \frac{x^2}{6} - \frac{9}{2} \right] = \frac{1}{4} + x - \frac{x^2}{12} - \frac{9}{4} = x - \frac{x^2}{12} - 2$$

$$F(6) = 6 - \frac{6^2}{12} - 2 = 6 - \frac{36}{12} - 2 = 6 - 3 - 2 = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \frac{x^2}{4} - x + 1 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \\ x - \frac{x^2}{12} - 2 & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 6 \end{cases}$$

si $F(2) \leq U \leq F(3)$

$$\frac{2^2}{4} - 2 + 1 \leq U \leq \frac{3^2}{4} - 3 + 1$$

$$0 \leq U \leq 1/4$$

entonces $U = \frac{x^2}{4} - x + 1$

$$0 = \frac{x^2}{4} - x + (1 - U)$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (1-U)}}{2 \cdot 1/4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (1-U)}}{1/2} = 2 \cdot (1 \pm \sqrt{U})$$

$x_1 = 2 + 2\sqrt{U}$

$x_2 = 2 - 2\sqrt{U}$

Elegimos $2 + 2\sqrt{U}$ ya que si $0 \leq U \leq 1/4$ entonces

$$2 + 2\sqrt{0} \leq 2 + 2\sqrt{U} \leq 2 + 2\sqrt{1/4}$$

$$2 \leq 2 + 2\sqrt{U} \leq 3$$

$$2 \leq x \leq 3$$

Y es lo que queremos ya que. $F(2) \leq U \leq F(3)$

Si $F(3) \leq U \leq F(6)$

$$3-\frac{9}{12}-2 \le U \le 6-\frac{36}{12}-2$$

$$1-\frac{9}{12} \le U \le 4-\frac{36}{12}$$

$$1/4 \le U \le 1$$

entonces $U = x - \frac{x^2}{12} - 2$

$$0 = -\frac{x^2}{12} + x + (-2-U)$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot\frac{-1}{12}\cdot(-2-U)}}{2\cdot\frac{-1}{12}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\frac{1}{3}\cdot(-2-U)}}{-\frac{1}{6}} = -6\cdot\left(-1 \pm \sqrt{1-\frac{2}{3}-\frac{U}{3}}\right)$$

$$= -6\left(-1 \pm \sqrt{(1-U)/3}\right) = 6 \pm 6\cdot\sqrt{(1-U)/3}$$

$$x_1 = 6+6\cdot\sqrt{(1-U)/3}$$

$$x_2 = 6-6\cdot\sqrt{(1-U)/3}$$

Escogemos x_2 ya que si $1/4 \le U \le 1$, entonces:

$$6-6\sqrt{(1-1/4)/3} \le x_2 \le 6-6\sqrt{(1-1)/3}$$

$$6-6\sqrt{\cancel{3}/4\cdot\tfrac{1}{\cancel{3}}} \le x_2 \le 6-6\cdot 0$$

$$6-6\cdot\frac{1}{2} \le x_2 \le 6$$

$$3 \le x_2 \le 6$$

Y es lo que queremos ya que $F(3) \le U \le F(6)$

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} 2+2\sqrt{U} & \text{si } 0 \le U \le 1/4 \\ 6-6\sqrt{(1-U)/3} & \text{si } 1/4 \le U \le 1 \end{cases}$$

b) $F(x)$

$0 \le x \le 1$

$$\int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds = \int_{-\infty}^{0} 0\,ds + \int_{0}^{x} \frac{6(s+3)}{35}\,ds = 0 + \frac{6}{35}\cdot\left[\frac{s^2}{2}+3s\right]_0^x$$

$$= \frac{6}{35} \cdot \left[\frac{x^2}{2} + 3x - \left(\frac{0^2}{2} + 3 \cdot 0 \right) \right] = \frac{3x^2}{35} + \frac{18x}{35}$$

$$F(1) = \frac{3}{35} + \frac{18}{35} = \frac{21}{35}$$

$1 \leq x \leq 2$

$$\int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds = \int_{-\infty}^{1} f(s)\,ds + \int_{1}^{x} \frac{6s^2}{35}\,ds = \frac{21}{35} + \frac{6}{35} \cdot \left[\frac{s^3}{3} \right]_1^x$$

$$= \frac{21}{35} + \frac{6}{35} \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \right] = \frac{21}{35} + \frac{2x^3}{35} - \frac{2}{35} = \frac{2x^3}{35} + \frac{19}{35}$$

$$F(2) = \frac{2 \cdot 8}{35} + \frac{19}{35} = \frac{16+19}{35} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x^2/35 + 18x/35 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x^3/35 + 19/35 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

si $\quad F(0) \leq U \leq F(1)$

$\quad 0 \leq U \leq 21/35$

Entonces $\quad U = \frac{3x^2}{35} + \frac{18x}{35} = \frac{3x^2 + 8x}{35}$

$$0 = \frac{1}{35} \cdot \left(3x^2 + 18x - 35U \right)$$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot -35U}}{2 \cdot 3} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 + 420U}}{6}$$

$$x_1 = \frac{-18 + \sqrt{324 + 420U}}{6}$$

$$x_2 = \frac{-18 - \sqrt{324 + 420U}}{6}$$

Escogemos x_1 ya que como $0 \leq U \leq 21/35$

$$\frac{-18+\sqrt{324+420\cdot 0}}{6} \leq x_1 \leq \frac{-18+\sqrt{324+420\cdot 21/35}}{6}$$

$$\frac{-18+18}{6} \leq x_1 \leq \frac{-18+24}{6}$$

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

Y como $F(0) \leq U \leq F(1)$, es lo que queremos

si $F(1) \leq U \leq F(2)$

$21/35 \leq U \leq 1$

$$U = \frac{2x^3}{35} + \frac{19}{35}$$

$$0 = \frac{2x^3}{35} + \frac{19}{35} - U$$

Raíces $x_1 = -\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\,\sqrt[3]{35U-19}$ $\quad X_2 = \frac{\sqrt[3]{35U-19}}{\sqrt[3]{2}}$ $\quad X_3 = \frac{(-1)^{2/3}\sqrt[3]{35U-19}}{\sqrt[3]{2}}$

como $21/35 \leq U \leq 1$ escogemos X_2 ya que:

$$\sqrt[3]{\cancel{35}\cdot \tfrac{21}{\cancel{35}} - 19} / \sqrt[3]{2} \leq X_2 \leq \sqrt[3]{35\cdot 1 - 19} / \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{21-19} / \sqrt[3]{2} \leq X_2 \leq \sqrt[3]{16} / \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{\cancel{2}} / \sqrt[3]{\cancel{2}} \leq X_2 \leq \sqrt[3]{8}\cdot \cancel{\sqrt[3]{2}} / \cancel{\sqrt[3]{2}}$$

$$1 \leq X_2 \leq \sqrt[3]{8}$$

$$1 \leq X_2 \leq 2$$

Y esto es lo que queremos ya que $F(1) \leq U \leq F(2)$

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} \left(-18+\sqrt{324+420U}\right)/6 & \text{si } 0 \leq U \leq 21/35 \\ \sqrt[3]{35U-19} / \sqrt[3]{2} & \text{si } 21/35 \leq U \leq 1 \end{cases}$$

(c) $F(x)$

$-\infty < x \leq 0$

$$\int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{4s}}{4} = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{x} e^{4s} ds$$

$u = 4s$

$du = 4ds$

$ds = \frac{du}{4}$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{x} e^{u}\frac{du}{4} = \frac{1}{16}\int_{-\infty}^{x} e^{u} ds$$

$$= \frac{1}{16}[e^{u}]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{16}\cdot(e^{4x}\ 0) = \frac{e^{4x}}{16}$$

$$F(0) = \frac{e^{0}}{16} = \frac{1}{16}$$

$0 < x \leq 15/4$

$$\int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{-\infty}^{0} f(s)ds + \int_{0}^{x} \frac{1}{4}ds = \frac{1}{16} + \left[\frac{s}{4}\right]_{0}^{x}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{x}{4}$$

$$F(15/4) = \frac{1}{16} + \frac{15/4}{4} = \frac{1}{16} + \frac{15}{16} = 1$$

$$F = \begin{cases} e^{4x}/16 & \text{si} \quad -\infty < x \leq 0 \\ 1/16 + x/4 & \text{si} \quad 0 < x \leq 15/4 \\ 1 & \text{si} \quad x > 15/4 \end{cases}$$

si $U \leq F(0)$

$U \leq \frac{1}{16}$

Entonces $U = \frac{e^{4x}}{16}$

$$16U = e^{4x}$$

$$\ln(16U)/4 = x$$

lo cual es correcto ya que como $U \leq 1/16$
$-\infty < \ln(16U) \leq 0$

Si $F(0) \leq U \leq F(15/4)$

$$1/16 \leq U \leq 1$$

Entonces $U = \frac{1}{16} + \frac{x}{4}$

$$U - \frac{1}{16} = \frac{x}{4}$$

$$4\left(U - \frac{1}{16}\right) = x$$

$$4U - \frac{1}{4} = x$$

Y como $1/16 \leq U \leq 1$

$$4 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \leq 4U - \frac{1}{4} \leq 4 \cdot 1 - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \leq 4U - \frac{1}{4} \leq 4 - \frac{1}{4}$$

$$0 \leq 4U - \frac{1}{4} \leq \frac{15}{4}$$

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} \ln(16U)/4 & 0 < U \leq 1/16 \\ 4U - \frac{1}{4} & 1/16 \leq U \leq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2.

a) Desarrolle métodos para generar las siguientes variables aleatorias

i) Distribución Pareto

$$f(x) = ax^{-(a+1)} \quad 1 \leq x < \infty, \quad a > 0$$

ii) Distribución Erlang

$$f(x) = \frac{x^{k-1}\exp(-x/\mu)}{(k-1)!\mu^k} \quad 0 \leq x < \infty, \quad \mu > 0, \quad k \text{ entero}$$

iii) Distribución Weibull

$$f(x) = \frac{\beta}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta-1}\exp(-(x/\lambda)^{\beta}) \quad 0 \leq x, \quad \lambda > 0, \quad \beta > 0$$

Ayuda: la distribución Pareto y la distribución Weibull tienen distribución acumulada F con forma cerrada, por lo cual puede aplicarse el método de la transformada Inversa. La distribución de Erlang pertenece a la familia de las Gammas. Puede simularse por rechazo o como suma de exponenciales.

b) Estime la media de cada variable con 10.000 repeticiones, usando los parámetros $a = 2$, $\mu = 2$, $k = 2$, $\lambda = 1$, $\beta = 2$. Busque en la web los valores de las esperanzas para cada variable con estos parámetros (cuidado con las parametrizaciones) y compare los valores obtenidos.

a) i) $F(x)$

$x \leq 1$

$$\int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0$$

$1 \leq x < \infty$

$$\int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds = \int_{-\infty}^{1} 0\,ds + \int_{1}^{x} a s^{-(a+1)} = a \int_{1}^{x} s^{-(a+1)}\,ds$$

$$= a \cdot \left[\frac{s^{-(a+1)+1}}{-(a+1)+1}\right]_1^x = a \cdot \left[\frac{x^{-a}}{-a} - \frac{1^{-a}}{-a}\right]$$

$$= a \cdot \left[-\frac{1}{ax^a} + \frac{1}{a}\right] = \frac{-1}{x^a} + 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -1/x^a + 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

Como $U \geq F(1) = 0$

$$U = -\frac{1}{x^a} + 1$$

$$U - 1 = \frac{-1}{x^a}$$

$$x^a = \frac{-1}{U-1}$$

$$x = \sqrt[a]{\frac{-1}{U-1}} = \sqrt[a]{\frac{-1}{-(1-U)}} = \sqrt[a]{\frac{1}{(1-U)}}$$

$(1-U)$ siempre va a ser positivo ya que $0 \leq U < 1$

$$F^{-1}(U) = \sqrt[a]{\frac{1}{(1-U)}}$$

$a = 1$

$$\int_1^x x^{-2} = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^x = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^x = \frac{-1}{x} + 1$$

$$F(x \leq 3) = \frac{-1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \qquad \frac{-1}{32} + 1$$

b) $F(x)$

la función de distribución acumulada de Erlang es:

$$f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$$

si $\lambda = \frac{1}{\mu}$

$$f(x) = \frac{1/\mu \cdot (x/\mu)^{n-1} e^{-\frac{x}{\mu}}}{(n-1)!}$$

$$= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{\mu^{n-1}} \cdot \frac{x^{n-1} \cdot e^{-\frac{x}{\mu}}}{(n-1)!}$$

$$= \frac{x^{n-1} \cdot e^{-\frac{x}{\mu}}}{\mu^n (n-1)!}$$

La función de densidad de la gamma tomando $\lambda = 1/\mu$ es:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{\mu}}{\Gamma(a)} \cdot \left(\frac{1}{\mu} x\right)^{a-1} \cdot e^{-\frac{x}{\mu}}$$

tomando $a = n$

$$f(x) = \frac{1}{\mu \cdot (n-1)!} \cdot \frac{1}{\mu^{n-1}} \cdot e^{-\frac{x}{\mu}}$$

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{\mu}} x^{n-1}}{\mu^n \cdot (n-1)!}$$

Entonces sea $f(x)$ la función de densidad de la Erlang y $g(x)$ la función de densidad de gamma:

$$f(x) = g(x) \qquad (\text{Ya que } k \in \mathbb{N})$$

en particular como $X \sim \text{Erlang}(k, 1/\mu)$ entonces $X \sim \Gamma(k, 1/\mu)$

Sabemos que la suma de n variables $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ tiene distribución $\Gamma(n, 1/\lambda)$.

Generamos k variables independientes con distribución $\mathcal{E}\sim(\mu)$ y la sumatoria tendrá distribución $\Gamma(k, 1/\mu) = \text{Erlang}(k, 1/\mu)$

iii)

$$\text{Weibull} \sim (\beta, 1/\lambda)$$

$$f(x) = \frac{\beta}{\lambda}\cdot\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}}$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{\beta}{\lambda}\cdot\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\beta}} ds$$

$$u = \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\beta} \qquad ds = \frac{\lambda\, du}{\beta\cdot\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\beta-1}}$$

$$du = \beta\cdot\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\beta-1}\cdot\frac{\lambda}{\lambda^2}\, ds$$

$$du = \beta\cdot\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\beta-1}\cdot\frac{1}{\lambda}\, ds \qquad \begin{array}{l} s \to x \\ u \to \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}\end{array} \qquad \begin{array}{l} s \to 0 \\ u \to 0\end{array}$$

$$F(x) = \int_0^{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}} \cancel{\frac{\beta}{\lambda}}\cdot\cancel{\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\beta-1}}\cdot e^{-u}\cdot\frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\beta\cdot\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\beta-1}}}\, du = \int_0^{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}} e^{-u}\, du$$

$$v = -u \qquad dv = -du$$

$$u \to \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta} \quad v \to -\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}$$

$$u \to 0 \quad v \to 0$$

$$= \int_0^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}} e^{v}\cdot -dv = \int_{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}}^{0} e^{v}\, dv = \left[e^{v}\right]_{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}}^{0} = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}} \qquad x \geq 0, \quad \lambda > 0, \ \beta > 0$$

si $\quad U \leq F(0) = 1 - e^{-\left(\frac{0}{\lambda}\right)^{\beta}} = 0$

$$U = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}}$$

$$e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}} = 1 - U$$

$$\left(\frac{-x}{\lambda}\right)^{\beta} \cdot \ln(e) = \ln(1-U)$$

$$-x^{\beta} = \ln(1-U) \cdot \lambda^{\beta}$$

$$x = \sqrt[\beta]{-\ln(1-U) \cdot \lambda^{\beta}} = \lambda \cdot \sqrt[\beta]{-\ln(1-U)}$$

esta raíz existe ya que cuando $0 < x \leq 1$ $\ln(x) \leq 0$

y como $\lambda > 0, \beta > 0$, $\lambda^{\beta} > 0$ y como $0 \leq U < 1$

$0 < 1 - U \leq 1$ y $\ln(x) \leq 0$ por ende $-\ln(x) \geq 0$

Ejercicio 3. *Método de la composición:*

a) Suponga que es relativamente fácil generar n variables aleatorias a partir de sus distribuciones de probabilidad F_i, $\quad i = 1, \ldots, n$. Implemente un método para generar una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x).$$

donde p_i, $i = 1, \ldots, n$, son números no negativos cuya suma es 1.

b) Genere datos usando tres exponenciales independientes con media 3, 5 y 7 respectivamente y $p = (0.5, 0.3, 0.2)$. Calcule la esperanza exacta de la mezcla y estime con 10.000 repeticiones. Tenga cuidado con la parametrización que este usando!!

b) $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot F'(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot [p_1 \cdot F'_1(x) + p_2 \cdot F'_2(x) + p_3 \cdot F'_3(x)]\, dx$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot [p_1 \cdot f_1(x) + p_2 \cdot f_2(x) + p_3 \cdot f_3(x)]\, dx = p_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\, dx + p_2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x f_2(x)\, dx +$

$p_3 \int_{-\infty}^{\infty} x f_3(x)\, dx = 0.5 \times 3 + 0.3 \times 5 + 0.2 \times 7 = 4{,}4$

Ejercicio 4. Desarrolle un método para generar la variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \int_0^\infty x^y e^{-y} dy\,, \quad 0 \le x \le 1\,.$$

Piense en el método de composición del ejercicio anterior. En particular, sea F la función de distribución de X y suponga que la distribución condicional de X dado $Y = y$ es

$$P(X \le x | Y = y) = x^y\,, \quad 0 \le x \le 1\,.$$

La función de densidad de $Y \sim \mathcal{E}(1)$ es

$$f(y) = e^{-y}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y)$$

$$F(x) = \int_0^\infty \underbrace{P(X \le x | Y = y)}_{x^y} \cdot \underbrace{f(y)}_{e^{-y}}\, dy$$

Entonces generamos una exponencial con distribución $\mathcal{E}(1)$ luego una $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ y $P(X \le U | Y = y) = x^y$, $x = \sqrt[y]{U}$

Ejercicio 5.

a) Considere que es sencillo generar una variable aleatoria a partir de cualquiera de las distribuciones F_i, $i = 1, \ldots, n$. Explique cómo generar variables aleatorias a partir de las siguientes distribuciones:

i) $F_M(x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x)$

ii) $F_m(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_i(x))$

Sugerencia: Si X_i, $i = 1, \ldots, n$, son variables aleatorias independientes, donde X_i tiene distribución F_i, ¿cuál variable aleatoria tiene como distribución a F en cada caso?

b) Genere una muestra de 10 valores de las variables M y m con distribuciones F_M y F_m si X_i son exponenciales independientes con parámetros 1, 2 y 3 respectivamente.

a) i) $\prod_{i=1}^{n} F_i(x) = P(X_1 \le x) \cdot P(X_2 \le x) \ldots \cdot P(X_n \le x)$

$= P(X_1 \le x, X_2 \le x, \ldots, X_n \le x)$

$= P(\max(X_i) \le x)$

Es decir, debemos generar las variables y devolver el X_i.

ii) $1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_i(x)) = 1 - [P(X_1 > x) \cdot P(X_2 > x) \cdot \ldots \cdot P(X_n > x)]$
$= 1 - [P(X_1 > x, X_2 > x, \ldots, X_n > x)]$
$= 1 - P(\min(X_i) > x)$
$= P(\min(X_i) \leq x)$

Es lo mismo que generar las variables y devolver el mínimo.

b) Observar que el mínimo de V.A $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$ es $Y \sim \mathcal{E}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$

Ejercicio 6. Utilice el método del rechazo y los resultados del ejercicio anterior para desarrollar otros dos métodos, además del método de la transformada inversa, para generar una variable aleatoria con distribución de probabilidad

$$F(x) = x^n, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Analice la eficiencia de los tres métodos para generar la variable a partir de F.

Hay que generar una V.A con $F(x) = x^n$, $0 \leq x \leq 1$ usando transformada inversa, aceptación y rechazo, y una productorio.

Observemos que si generamos n V.A con distribución uniforme en $(0,1)$, $F_{X_i} = x$ para $1 \leq i \leq n$. Entonces:

$$\prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x) = \prod_{i=1}^{n} x = x^n = F(x) \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Para la transformada inversa

$$F(x) = x^n$$

Entonces si $F(0) \leq U \leq F(1)$

$$0 \leq U \leq 1$$

$$U = x^n$$

$$x = \sqrt[n]{U}$$

$$F^{-1}(U) = \sqrt[n]{U}$$

Para la aceptación y rechazo podemos usar como variable de soporte a $Y \sim U(0,1)$

$F_Y(x) = x$ $\qquad$ $F_X(x) = x^n$

$f_Y(x) = 1$ $\qquad$ $f_X(x) = n x^{n-1}$

$$\frac{f_X(x)}{g_X(x)} \leq c$$

$\frac{n x^{n-1}}{1} \leq c \Rightarrow$ Como x^{n-1} es una función creciente, alcanza su mayor valor en $x=1$ (ya que $0 \leq x \leq 1$)

Luego $n \cdot 1 \leq c \Rightarrow c \geq n$

Entonces: $U < \frac{\cancel{n} x^{n-1}}{\cancel{n} \cdot 1}$

$$U < x^{n-1}$$

Para asegurarnos de que los métodos funcionen correctamente, calcularemos la esperanza real de X y luego estimaremos el valor de la esperanza con cada uno de los métodos

$F(x) = x^n$

$f(x) = n x^{n-1}$

$$\int_0^1 x \cdot n x^{n-1} \, dx = \int_0^1 n x^n \, dx = n \int_0^1 x^n \, dx = n \cdot \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$= n \cdot \left(\frac{1}{n+1} - 0 \right) = \frac{n}{n+1}.$$

Utilicemos $n = 10$ $\qquad E(X) = \frac{10}{11} \cong 0{,}90$

Ejercicio 7.

a) Desarrolle dos métodos para generar una variable aleatoria X con densidad de probabilidad:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

i) Aplicando Transformada inversa.

ii) Aplicando el método de aceptación y rechazo con una variable uniforme.

b) Compare la eficiencia de ambos métodos realizando 10.000 simulaciones y comparando el promedio de los valores obtenidos. Compruebe que se obtiene un valor aproximado del valor esperado de X.

c) Estime la probabilidad $P(X \leq 2)$ y compárela con el valor real.

a) i) $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \int_1^x \frac{1}{s} \, ds = \ln(s)\Big|_1^x = \ln(x) & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ 1 & \text{si } x > e \end{cases}$$

si $\quad F(1) \leq U \leq F(e)$

$$0 \leq U \leq 1$$

$U = \ln(x)$

$x = e^U$

$F^{-1}(U) = e^U$

ii) Como variable soporte utilizamos $Y \sim \mathcal{U}(1, e)$

$$f_Y(x) = \frac{1}{e-1} \, \mathbb{I}_{(1,e)}(x)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{x} \, \mathbb{I}_{(1,e)}(x)$$

$$\frac{f_X(x)}{f_Y(x)} \leq c \quad = \quad \frac{1/x}{1/(e-1)} \leq c$$

$$\frac{e-1}{x} \leq c$$

$$\frac{1}{x} \cdot (e-1) \leq c$$

Como $1/x$ es una función monótona decreciente $1/x$ alcanza el mayor valor en $x=1$, con $1 \leq x \leq e$

entonces $\quad 1 \cdot (e-1) \leq c \quad \Rightarrow \quad c \geq (e-1)$

luego $\quad \dfrac{f_{X}(x)}{f_Y(x) \cdot c} > U$

$$\frac{\frac{1}{x}}{\cancel{(e-1)} \cdot \frac{1}{\cancel{(e-1)}}} > U \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} > U$$

b) $E(x) = \int_1^e \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx = \int_1^e 1 \, dx = [x]_1^e = e-1 \cong 1,7182$

c) $P(x \leq 2) = \ln(2) \cong 0,6931$

Ejercicio 8.

a) Sean U y V dos variables aleatorias uniformes en $(0,1)$ e independientes. Pruebe que la variable $X = U + V$ tiene una densidad *triangular*:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

b) Desarrolle tres algoritmos que simulen la variable X:

i) Usando la propiedad que X es suma de dos uniformes.

ii) Aplicando transformada inversa.

iii) Con el método de rechazo.

c) Compare la eficiencia de los tres algoritmos. Para cada caso, estimar el valor esperado promediando 10.000 valores simulados, ¿Para qué valor x_0 se cumple que $P(X > x_0) = 0.125$?

d) Compare la proporción de veces que el algoritmo devuelve un número mayor que x_0 con esta probabilidad.

a) $f(a) = f_U * f_V \, (a)$

$f_U(x) = \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$

$f_V(x) = \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$

$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_U(x) \, f_V(a-x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathbb{I}_{(0,1)}(x)}_{0 \text{ si } x \leq 0 \text{ o } x \geq 1} \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(a-x) \, dx$

$= \int_0^1 1 \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(a-x) \, dx$

$v = (a-x)$ $\quad x \to 1 \quad v \to a-1$

$dv = -dx$ $\quad x \to 0 \quad v \to a$

$dx = -dv$

$$\int_0^1 \mathbb{I}_{(0,1)}(a-x)dx = \int_a^{a-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(v) - dv = \int_{a-1}^{a} \mathbb{I}_{(0,1)}(v)dv$$

como $\mathbb{I}_{(0,1)}(v)$ es 0 si $v \geq 0$ o $v \leq 1$, entonces tenemos dos casos, si $0 \geq a \geq 1$ entonces $-1 \geq a-1 \geq 0$, restringimos inferiormente por 0, y si $1 \geq a \geq 2$ entonces $0 \geq a-1 \geq 1$, restringimos superiormente por 1, es decir:

si $0 \leq a < 1$

$$f_U * f_V(a) = \int_0^a \mathbb{I}_{(0,1)}(v)dv = [v]_0^a = a$$

si $1 \leq a < 2$

$$f_U * f_V(a) = \int_{a-1}^{1} \mathbb{I}_{(0,1)}(v)dv = [v]_{a-1}^{1} = 1-(a-1) = 2-a$$

En cualquier otro caso $\mathbb{I}_{(0,1)}(v) = 0$, por ende $f(a) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 2-x & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

b) i) Basta con devolver la suma de dos uniformes.

ii) $F(x)$

$0 \leq x < 1$

$$\int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{-\infty}^{0} 0 ds + \int_0^x s ds = [s^2/2]_0^x = x^2/2$$

$$F(1) = \frac{1}{2}$$

$1 \leq x < 2$

$$\int_{-\infty}^{1} f(s)ds + \int_{1}^{x} f(s)ds = \frac{1}{2} + \int_{1}^{x} 2-s\,ds = \frac{1}{2} + \left[\int_{1}^{x} 2ds - \int_{1}^{x} sds\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \left[2s\Big|_{1}^{x} - s^2/2\Big|_{1}^{x}\right] = \frac{1}{2} + \left[(2x-2) - (x^2/2 - 1/2)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1$$

$$F(2) = -\frac{4}{2} + 2\cdot 2 - 1 = -2+4-1 = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2/2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ -x^2/2 + 2x - 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

si $F(0) \leq U < F(1)$

$0 \leq U < 1/2$

$$U = \frac{x^2}{2}$$

$$x = \sqrt[2]{2U}$$

y como

$0 \leq U < 1/2$

$\sqrt{0} \leq \sqrt[2]{2U} < \sqrt[2]{1}$

$0 \leq \sqrt[2]{2U} < 1$

$0 \leq x < 1$

si $F(1) \leq U < F(2)$

$1/2 \leq U < 1$

$$U = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1$$

$$0 = -\frac{x^2}{2} + 2x - (1+U)$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot -\frac{1}{2} \cdot -(1+u)}}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = -\left(-2 \pm \sqrt{4 - 2 \cdot (1+u)}\right)$$

$$= -\left(-2 \pm \sqrt{4 - 2 - 2u}\right) = -\left(-2 \pm \sqrt{2 - 2u}\right)$$

$$x_1 = -\left(-2 + \sqrt{2-2u}\right)$$
$$x_2 = -\left(-2 - \sqrt{2-2u}\right)$$

Escogemos x_1 ya que

$$\frac{1}{2} \leq u < 1$$
$$-\left(-2 + \sqrt{2 - 2 \cdot \frac{1}{2}}\right) \leq x_1 < -\left(-2 + \sqrt{2-2}\right)$$
$$-(-2+1) \leq x_1 < -(-2)$$
$$1 \leq x_1 < 2$$

Entonces

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} \sqrt[2]{2u} & \text{si } 0 \leq u < 1/2 \\ -\left(-2 + \sqrt{2-2u}\right) & \text{si } 1/2 \leq u < 1. \end{cases}$$

iii) Usamos como soporte $Y \sim \mathcal{U}(0,2)$

$$f_Y(x) = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{f_X(x)}{g_X(x)} \leq c$$ cuando $0 \leq x < 1$ $$\frac{x}{1/2} \leq c$$

$$2x \leq c$$

$2x$ toma su mayor valor en $x=1$ entonces $c \geq 2$

cuando $1 \leq x < 2$ $$\frac{2-x}{1/2} \leq c \Rightarrow 2 \cdot (2-x) \leq c$$
$$4 - 2x \leq c$$

alcanza su mayor valor en $x=1$ entonces $c \geq 2$

luego si $0 \leq x < 1$ $\quad \frac{f_x(x)}{c \cdot f_y(x)} = \frac{x}{2 \cdot 1/2} = x$

y si $1 \leq x < 2$ $\quad \frac{f_x(x)}{c \cdot f_y(x)} = \frac{2-x}{\cancel{2} \cdot 1/\cancel{2}} = 2-x$

c) $E(x) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x \cdot (2-x) dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \int_1^2 2x - x^2 dx$

$= \frac{1}{3} + \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3}$

$= \frac{-6}{3} + 3 = 3 - 2 = 1$

$P(X > X_0) = 0.125$

$1 - P(X \leq X_0) = 0.125$

$1 - 0.125 = P(x \leq X_0)$

$0.875 = P(x \leq X_0)$ $\Rightarrow$ X_0 debe estar entre 1 y 2

ya que $F(1) \leq F(0) \leq F(2)$

$0.5 \leq 0.875 \leq 1$

Entonces $0.875 = \frac{-x^2}{2} + 2x - 1$

$\frac{x^2}{2} - 2x + 1.875 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1/2 \cdot 1.875}}{\cancel{2} \cdot 1/\cancel{2}} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3.75}}{1} = \frac{2 \pm \sqrt{0.25}}{1} = 2 \pm 0.5$

$X_1 = 2 + \frac{1}{2}$ $\quad X_2 = 2 - \frac{1}{2}$

Escogemos X_2 ya que como vimos antes X_0 debe estar entre 1 y 2

Luego $P(X > 3/2) = 1 - P(X \leq 3/2)$

$$= 1 - \left(\frac{-(3/2)^2}{2} + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 1 \right)$$

$$= 1 - \left(\frac{-9/4}{2} + 3 - 1 \right)$$

$$= 1 - \left(\frac{-9}{8} + 2 \right)$$

$$= \frac{9}{8} - 1$$

$$= 0.125$$

Ejercicio 9. Escriba tres programas para generar un variable aleatoria normal patrón, usando

a) generación de variables exponenciales según el ejemplo $5f$ del libro *Simulacion* de S. M. Ross,

b) el método polar,

c) el método de razón entre uniformes.

Pruebe los códigos calculando la media muestral y varianza muestral de 10.000 valores generados con los tres métodos.

Ejercicio 10. Sea en par (X,Y) uniformemente distribuído en un círculo de radio 1. Muestre que si R es la distancia del punto (X,Y) al centro del círculo, entonces R^2 está uniformemente distribuida en el intervalo $(0,1)$.

Sea D un círculo centrado en (a,b) de radio 1, es decir:

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq 1 \}$$

Luego como (X,Y) está uniformemente distribuido en D ocurre que $P((X,Y) \in D) = 1$

Llamemos D_r al círculo centrado en (a,b) de radio r, es decir:

$$D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R} : \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leq r\}$$

Entonces

$$P((X,Y) \in D_r) = \frac{\text{Área } D_r}{\text{Area } D} = \frac{2\pi r^2}{2\pi} = r^2$$

Sea $R^2 = (X-a)^2 + (Y-b)^2$ (donde R es la variable distancia de (X,Y) al centro (a,b) del disco)

Queremos ver la distribución de R^2 y para esto es necesario saber su función de distribución acumulada

- Si $0 < z \leq 1$

$$F_{R^2}(z) = P(R^2 \leq z) = P((X-a)^2 + (Y-b)^2 \leq z)$$

$$= P\left(\sqrt{(X-a)^2+(Y-b)^2} \leq \sqrt{z}\right) = P((X,Y) \in D_{\sqrt{z}}) = \frac{\text{Área } D_{\sqrt{z}}}{\text{Área } D}$$

$$= \frac{\cancel{2\pi}(\sqrt{z})^2}{\cancel{2\pi}} = z$$

- Si $z < 0$

$$F_{R^2}(z) = P(R^2 \leq z) = 0$$

- Si $1 < z$

$$F_{R^2}(z) = P(R^2 \leq z) = P(R^2 \leq 1) = P((X,Y) \in D) = 1$$

Luego:

$$F_{R^2}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z \leq 0 \\ z & \text{si} \quad 0 < z \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad z > 1 \end{cases}$$

Es decir, R^2 distribuye como una variable uniforme en $(0,1)$.

Ejercicio 11. Una variable aleatoria X tiene distribución de Cauchy con parámetro $\lambda > 0$ si su densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\lambda\pi(1 + (x/\lambda)^2)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

a) Implemente el método de razón entre uniformes para simular X con parámetro $\lambda = 1$. Para esto:

1. Pruebe que el conjunto $C_f = \{(u,v) \mid 0 < u < \sqrt{f(v/u)}\}$ es el semicírculo derecho centrado en $(0,0)$ de radio $\sqrt{1/\pi}$.
2. Desarrolle un algoritmo CAUCHY( ) que genere pares (U,V) con distribución uniforme en C_f, y devuelva $X = V/U$. Entonces X tiene la distribución deseada. ¿Es necesario utilizar el valor de π?

b) Pruebe que si X tiene distribución de Cauchy con parámetro 1, entonces λX tiene distribución de Cauchy con parámetro λ.

c) Utilice esta propiedad para modificar el algoritmo anterior, e implementar CAUCHY(LAMDA) que simule una variable X con distribución de Cauchy de parámetro λ.

d) Realice 10.000 simulaciones y calcule la proporción de veces que el resultado cae en el intervalo $(-\lambda,\lambda)$, para $\lambda = 1$, $\lambda = 2.5$ y $\lambda = 0.3$. Compare con la probabilidad teórica.

a) 1. $C_f = \{(u,v) \mid 0 < u < \sqrt{f(v/u)}\}$

$$f(v/u) = \frac{1}{\lambda\pi(1 + (v/u/\lambda)^2)} = \frac{1}{\lambda\pi(1 + (v/\lambda u)^2)}$$

como $\lambda = 1$ $\quad f(v/u) = \dfrac{1}{\pi(1 + v^2/u^2)} = \dfrac{1}{\pi + \pi \frac{v^2}{u^2}}$

$$= \frac{1}{\frac{\pi u^2 + \pi v^2}{u^2}} = \frac{u^2}{\pi u^2 + \pi v^2}$$

luego $\sqrt{f(v/u)} = \sqrt{\frac{u^2}{\pi u^2 + \pi v^2}} = \frac{u}{\sqrt{\pi u^2 + \pi v^2}} = \frac{u}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{(u^2+v^2)}}$

entonces $C_f = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \sqrt{\pi \cdot (u^2+v^2)} \cdot u < u, \ u>0 \}$

$= \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \sqrt{\pi \cdot (u^2+v^2)} < 1, \ u>0 \}$

$= \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \sqrt{(u^2+v^2)} < 1/\sqrt{\pi}, \ u>0 \}$

$\sqrt{(u^2+v^2)}$ es la distancia de (u,v) a 0.
como dicha distancia debe ser menor a $1/\pi$, tenemos un semicírculo.

entonces $0 < u < \sqrt{1/\pi}$ y $-\sqrt{1/\pi} < v \sqrt{1/\pi}$

Ya que $\sqrt{u^2+v^2} < \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

$$u^2+v^2 < \frac{1}{\pi}$$

$$v^2 < \frac{1}{\pi} - u^2$$

$$|v| < \pm\sqrt{\frac{1}{\pi} - u}$$

La raíz es una función creciente, toma el valor máximo cuando $\frac{1}{\pi} - u$ sea máximo, lo cual sucede en el mínimo valor de u, ya que $u \in (0, 1/\sqrt{\pi})$ entonces toma el valor máximo cuando $U=0$, entonces:

$$|V| < \pm\sqrt{\frac{1}{\pi}} \Rightarrow -\sqrt{\frac{1}{\pi}} < V < \sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

2. Si tomamos $c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

debemos generar $U \sim \mathcal{U}(0, c)$
$V \sim \mathcal{U}(-c, c)$

y luego devolver V/U si $U^2 + V^2 < c^2$

Pero observemos que $U = \text{random}() * c$
$V = (\text{random}() - 0.5) * 2c$

entonces $U^2+V^2 = (\text{random}() * c)^2 + ((\text{random}() - 0.5) * 2c)^2$
$= c^2 \cdot \underbrace{(\text{random}())^2}_{\mathcal{U}(0,1)} + c^2 (\underbrace{2(\text{random}() - 0.5)}_{U(-1,1)})$

y $U^2 + V^2 < c^2$
$\cancel{c^2} \cdot (\text{random}()^2 + 2 \cdot (\text{random}() - 0.5)) < \cancel{c^2}$ ya que $c>0$
$(\text{random}()^2 + 2 \cdot (\text{random}() - 0.5) < 1$.

Entonces $U \sim \mathcal{U}(0,1)$
$V \sim \mathcal{U}(-1,1)$

Y no hace falta utilizar el valor de pi.

b) Sea $X \sim \text{Cauchy}(1)$ $Y = \lambda X \sim \text{Cauchy}(\lambda)$

$$F_Y(a) = P(Y \le a) = P(\lambda X \le a) = P\left(X \le \frac{a}{\lambda}\right) = F_X\left(\frac{a}{\lambda}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{a}{\lambda}} \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt =$$

$t \to a/\lambda$ $\quad$ $s = t \cdot \lambda$ $\quad$ $t \to -\infty$ $\quad$ $t = \frac{s}{\lambda}$

$s \to \lambda$ $\quad$ $ds = \lambda dt$ $\quad$ $s \to -\infty$

$$F_Y(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\pi(1+(s/\lambda)^2)} \cdot \frac{ds}{\lambda} = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\lambda\pi(1+(s/\lambda)^2)} ds$$

y esto implica que $f_Y(x) = \frac{1}{\lambda\pi(1+(s/\lambda)^2)}$

y entonces por definición $Y \sim Cauchy(\lambda)$

d) Sea $X \sim Cauchy(\lambda)$

$$F_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\, ds = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\lambda\pi(1+(s/\lambda)^2)} ds = \frac{1}{\lambda\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+(s/\lambda)^2} ds$$

$u = s/\lambda$ $\quad$ $s \to x$

$du = \frac{ds}{\lambda}$ $\quad$ $u \to x/\lambda$

$s \to -\infty$

$\lambda du = ds$ $\quad$ $u \to -\infty$

$$= \frac{1}{\lambda\pi}\int_{-\infty}^{x/\lambda} \frac{1}{1+u^2} du \cdot \lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x/\lambda} \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\arctan(u)\right]_{-\infty}^{x/\lambda}$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\arctan\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\arctan(x/\lambda)}{\pi} + \frac{1}{2}$$

luego

$$P(-\lambda \le X \le \lambda) = P(X \le \lambda) - P(X \le -\lambda)$$
$$= F_X(\lambda) - F_X(-\lambda)$$
$$= \frac{\arctan(\lambda/\lambda)}{\pi} + \frac{1}{2} - \left(\frac{\arctan(-\lambda/\lambda)}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{\cancel{\pi}/4}{\cancel{\pi}} + \frac{1}{2} - \left(\frac{-\pi/4}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4} + \cancel{\frac{1}{2}} - \left(\frac{-1}{4} + \cancel{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Y esto es independiente del valor de λ.

Ejercicio 12. Sea X una variable aleatoria con distribución de Cauchy de parámetro λ.

a) Calcule la función de distribución acumulada F_X.

b) Simule X aplicando el método de transformada inversa.

c) Indique si es posible generar X por el método de aceptación y rechazo, rechazando con una variable aleatoria normal.

d) Realice 10000 simulaciones y calcular la proporción de veces que el resultado cae en el intervalo $(-\lambda, \lambda)$, para $\lambda = 1$, $\lambda = 2.5$ y $\lambda = 0.3$. Compare con la probabilidad teórica.

e) Compare la eficiencia de este algoritmo con el *método de razón entre uniformes*.

a) Ya lo calculamos en el ejercicio anterior, si $X \sim Cauchy(\lambda)$

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(x/\lambda)}{\pi}$$

b) $$U = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(x/\lambda)}{\pi}$$

$$\left(U-\frac{1}{2}\right)\pi = \arctan(x/\lambda)$$

$$\tan\left(\left(U-\frac{1}{2}\right)\pi\right) = \frac{x}{\lambda}$$

$$\lambda \cdot \tan\left(\pi\left(U-\frac{1}{2}\right)\right) = x$$

$$F^{-1}(U) = \lambda \cdot \tan\left(\pi\left(U-\frac{1}{2}\right)\right) \quad \text{si} \quad 0 \leq U < 1$$

ya que $\lim_{x\to\infty} F_x(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} F_x(x) = 0$

c) para poder utilizar aceptación y rechazo, debemos utilizar una variable de soporte cuyo rango sea mayor o igual al de Cauchy.

Como $X \sim \text{Cauchy}(\lambda)$ $x \in \mathbb{R}$, solo podemos utilizar como soporte a $Y \sim N(\mu, \sigma)$

Ahora debemos ver si existe algún c tal que:

$$\frac{f_x(x)}{f_y(x)} \leq c \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\lambda\pi \cdot (1 + (x/\lambda)^2)} \qquad f_y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Como vimos antes que a partir de una V.A con distribución Cauchy(1) podemos generar una V.A con distribución Cauchy(λ), usamos $\lambda = 1$. Igualmente utilizamos $\mu = 0$, $\sigma = 1$, luego

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi \cdot (1+x^2)} \qquad f_y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$h(x) = \frac{f_x(x)}{f_y(x)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{(1+x^2)}$$

Ahora buscamos los puntos crítico usando la derivada

$$h'(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{\frac{x^2}{2}} x(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$$

$h'(x) = 0$ si $x=0$ o $x=1$ o $x=-1$

Entonces $x=0$, $x=1$ son puntos críticos

$$h(x)(0) = \frac{\sqrt{2}\, e^{\frac{0}{2}}}{\sqrt{\pi}\,(1+0^2)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$h(x)(1) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$$

$h(x)(0) \cong 0{,}7978$ y $h(x)(1) \simeq 0{,}6577$

Sin embargo esto es un máximo local, ya que cuando $x>|1|$ la función tiende a infinito, si $0<|x|<1$ entonces $h'(x)$ es decreciente, ya que (x^2-1) sería negativo y todo el numerador también, pero cuando $|x|>1$ la función es creciente.

En particular podemos ver que el máximo no es global ya que $h(2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{6 \cdot e^2}{25}$ y como $6 \cdot e^2 > 25$ entonces $h(2) > h(0) = \sqrt{2}/\sqrt{\pi}$

Esto quiere decir que $h(x)$ no tiene máximo global y por ende no podemos usar una variable normal estandar como soporte para genera una V.A con distribución Cauchy usando el método de aceptación y rechazo

d) Anteriormente vimos que

$$p(-\lambda \le X \le \lambda) = \frac{1}{2} \quad \forall \lambda > 0$$

Ejercicio 13.

Escriba un programa que calcule el número de eventos y sus tiempos de arribo en las primeras T unidades de tiempo de un proceso de Poisson homogéneo con parámetro λ.

Ejercicio 14. Los autobuses que llevan los aficionados a un encuentro deportivo llegan a destino de acuerdo con un proceso de Poisson a razón de cinco por hora. La capacidad de los autobuses es una variable aleatoria que toma valores en el conjunto: $\{20, 21, \ldots, 40\}$ con igual probabilidad. A su vez, las capacidades de dos autobuses distintos son variables independientes. Escriba un algoritmo para simular la llegada de aficionados al encuentro en el instante $t = 1$ hora.

Ejercicio 15.

a) Escriba un programa que utilice el algoritmo del adelgazamiento para generar el numero de eventos y las primeras unidades de tiempo de un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad

i)

$$\lambda(t) = 3 + \frac{4}{t+1} 0 \le t \le 3$$

ii)

$$\lambda(t) = (t-2)^2 - 5t + 17, 0 \le t \le 5$$

iii)

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} - 1 & \text{si } 2 \le x \le 3 \\ 1 - \frac{t}{6} & \text{si } 3 \le x \le 6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en los intervalos indicados.

b) Indique una forma de mejorar el algoritmo de adelgazamiento para estos ejemplos usando al menos 3 intervalos.

b)

i) $I_1 = [0,1)$ $\quad I_2 = [1,2)$ $\quad I_3 = [2,3]$

$\lambda_1 = 7$ $\quad \lambda_2 = 5$ $\quad \lambda_3 = 4.4$

ii) $I_1 = [0,2)$ $\quad I_2 = [2,3)$ $\quad I_3 = [3,5]$

$\lambda_1 = 21$ $\quad \lambda_2 = 7$ $\quad \lambda_3 = 3$

iii) $I_1 = [2,6]$ $\quad I_2 = (-\infty, 2]$ $\quad I_3 = [6, \infty)$

$\lambda_1 = 0.5$ $\quad \lambda_2 = 1$ $\quad \lambda_3 = 1$