Práctico 8- Cadenas de Markov

Ejercicio 1: La Figura 1 muestra el diagrama de transición de una cadena de Markov. Dar la matriz de transición, y determinar:

a) $P(X_4 = 2 \mid X_3 = 1)$ y $P(X_3 = 1 \mid X_2 = 1)$.

b) $P(X_4 = 2 \mid X_1 = 1)$ y $P(X_4 = 2 \mid X_0 = 1)$.

c) Si se sabe que $P(X_0 = 0) = \frac{1}{3}$, dar $P(X_0 = 0, X_1 = 1)$ y $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2)$.

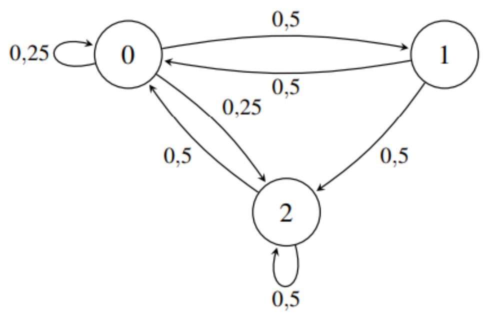


Figura 1: Ejercicio 1

Matriz de transición $= \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$

a) $P(X_4 = 2 \mid X_3 = 1)$

Como solo consideramos cadenas de Markov homogéneas:

$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad i,j \in S$

$P(X_4 = 2 \mid X_3 = 1) = p_{12} = 0,5$

$P(X_3 = 1 \mid X_2 = 1) = p_{11} = 0$

b) $P(X_4 = 2 \mid X_1 = 1)$

$$(Q^n)_{ij} = P(X_{t+n}=j \mid X_t = i) = P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

$$P(X_4=2 \mid X_1=1) = P(X_{1+3}=2 \mid X_1=1) = P(X_3=2 \mid X_0=1) = p_{12}^3$$
$$P(X_4=2 \mid X_0=1) = p_{12}^4$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \qquad Q^2 = \begin{pmatrix} 0.4375 & 0{,}125 & 0{,}4375 \\ 0{,}375 & 0{,}25 & 0{,}375 \\ 0{,}375 & 0{,}25 & 0{,}375 \end{pmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{pmatrix} 0{,}390625 & 0{,}21875 & 0{,}390625 \\ 0{,}40625 & 0{,}1875 & 0{,}40625 \\ 0{,}40625 & 0{,}1873 & 0{,}40625 \end{pmatrix} \qquad Q^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para generalizar $p_{ij}^{(n)}$ calculamos los autovalores de Q, sabiendo que 1 es un autovalor

$$(Q-\lambda I) = \begin{pmatrix} 0{,}25-t & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & -t & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5-t \end{pmatrix}$$

$$\det(Q-\lambda I) = (0{,}25-t \cdot -t \cdot 0{,}5-t + 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}25 \cdot 0{,}5 \cdot 0)$$
$$-(0{,}5 \cdot -t \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}25-t) + 0{,}5-t \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5)$$
$$= ((t^2-0{,}25t)\cdot(0{,}5-t) + 0{,}125)$$
$$-(-0.125t + 0.125 - 0.25t)$$
$$= 0{,}5t^2 - t^3 - 0{,}125t + 0{,}25t^2 + 0{,}125 + 0.375t - 0.125$$
$$= -t^3 + 0.75t^2 + 0.25t$$

$$t = 1 \qquad t = -\frac{1}{4} \qquad t = 0$$

$$\begin{cases} p_{12}^{0} = a \cdot (1)^{0} + b \cdot (-1/4)^{0} = a + b = 0 \\ p_{12}^{1} = a \cdot (1)^{1} + b \cdot (-1/4)^{1} = a - b/4 = 0{,}5 \\ p_{12}^{2} = a \cdot (1)^{2} + b \cdot (-1/4)^{2} = a + b/16 = 0{,}375 \end{cases}$$

$a = -b$

$$-b - \frac{b}{4} = 0{,}5$$

$$\frac{-4b - b}{4} = 0{,}5$$

$$-5b = 2$$

$a = \frac{2}{5}$ $\qquad$ $b = -\frac{2}{5}$

$$p_{12}^{(n)} = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n}$$

$$p_{12}^{3} = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{3} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5 \cdot 4^{3}} = \frac{4^{3} \cdot 2 + 2}{5 \cdot 4^{3}} = 0{,}40625$$

$$p_{12}^{4} = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{4} = \frac{2}{5} - \frac{2}{5 \cdot 4^{4}} = \frac{4^{4} \cdot 2 - 2}{5 \cdot 4^{4}} = 0{,}3984375$$

$P(X_4 = 2 \mid X_1 = 1) = P(X_3 = 2 \mid X_0 = 1) = p_{12}^{3} = 0{,}40625$

$P(X_4 = 2 \mid X_0 = 1) = p_{12}^{4} = 0{,}3984375$

c) $P(X_0 = 0) = \frac{1}{3}$

$$P(X_0 = 0, X_1 = 1) = P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0) \cdot P(X_0 = 0) = p_{01} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$P(X_0=0, X_1=1, X_2=2) = P(X_2=2 \mid X_1=1, X_0=0) \cdot P(X_1=1, X_0=0)$

$= \{$ por propiedad de las cadenas de Markov $\}$

$= P(X_2=2 \mid X_1=1) \cdot P(X_1=1 \mid X_0=0) \cdot P(X_0=0)$

$= p_{12} \cdot p_{01} \cdot \frac{1}{3}$

$= 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 1/3$

$= \frac{1}{12}$

Ejercicio 2: Considerar la cadena de Markov con tres estados: $S = \{0,1,2\}$ que tiene la siguiente matriz de transición:

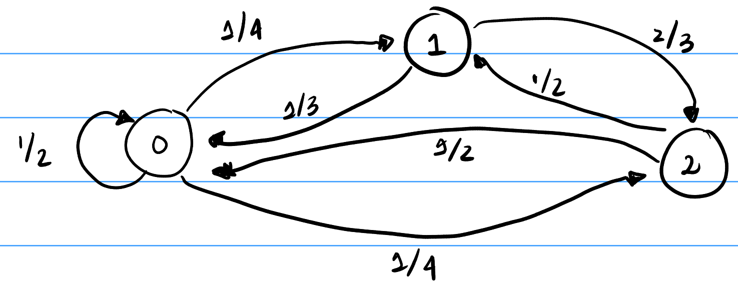
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dar el diagrama de transición de la cadena.

b) Si conocemos $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 1) = \frac{1}{4}$, determinar $P(X_0 = 2, X_1 = 1, X_2 = 0)$.

c) Dar las probabilidades de transición en dos pasos.

a)



b) $P(X_0=0) = P(X_0=1) = \frac{1}{4}$

$P(X_0=2, X_1=1, X_2=0) = P(X_2=0 \mid X_1=1, X_0=2) \cdot P(X_1=1, X_0=2)$

$= \{$ por propiedad de las cadenas de Markov $\}$

$= P(X_2=0 \mid X_1=1) \cdot P(X_1=1 \mid X_0=2) \cdot P(X_0=2)$

$= (1 - P(X_0=0) - P(X_0=1)) \cdot p_{21} \cdot p_{10}$

$$= \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{12}$$

c) $$Q^2 = \begin{pmatrix} p_{00}^2 & p_{01}^2 & p_{02}^2 \\ p_{10}^2 & p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ p_{20}^2 & p_{21}^2 & p_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \cdot 1/2 + 1/4 \cdot 1/3 + 1/4 \cdot 1/2 & 1/2 \cdot 1/4 + 1/4 \cdot 1/2 & 1/2 \cdot 1/4 + 1/4 \cdot 2/3 \\ 1/3 \cdot 1/2 + 2/3 \cdot 1/2 & 1/3 \cdot 1/4 + 2/3 \cdot 1/2 & 1/3 \cdot 1/4 \\ 1/2 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1/2 & 1/2 \cdot 1/4 & 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 2/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 + 1/12 + 1/8 & 1/8 + 1/8 & 1/8 + 1/6 \\ 1/6 + 2/6 & 1/12 + 1/3 & 1/12 \\ 1/4 + 1/6 & 1/8 & 1/8 + 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/24 & 1/4 & 7/24 \\ 1/2 & 5/12 & 1/12 \\ 5/12 & 1/8 & 11/24 \end{pmatrix}$$

La probabilidad de transición en 2 pasos está dada por Q^2

Ejercicio 3. Considerar una cadena de Markov con dos posibles estados: $S = \{0, 1\}$. Suponer que $P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0) = \frac{1}{2}$ y $P(X_0 = 0 \mid X_1 = 1) = \frac{2}{3}$.

a) Dar la matriz de transición y el diagrama de transición.

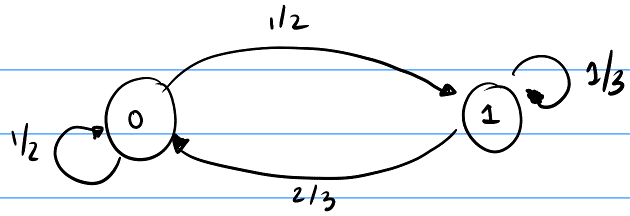
b) Determinar la probabilidad de que la cadena esté en el estado 1 en $n = 3$ dado que $X_0 = 1$.

Asumiendo que hay un error en el enunciado y en realidad $P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) = 2/3$ y no $P(X_0 = 0 \mid X_1 = 1) = 2/3$.

a) $P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0) = P_{01} = \frac{1}{2} \Rightarrow P_{00} = \frac{1}{2}$

$P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) = P_{10} = \frac{2}{3} \Rightarrow P_{11} = \frac{1}{3}$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$



b) $P(X_3 = 1 \mid X_0 = 1) = p_{11}^{3}$

$$\chi_Q(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \cdot tr(Q) + det(Q)$$
$$= \lambda^2 - \lambda \cdot 5/6 + det(Q)$$

Como $\lambda = 1$ es autovalor

$$det(Q) = -1 + 5/6 = -1/6$$

Luego

$$\lambda^2 - \lambda \cdot 5/6 - 1/6 = (\lambda - 1)(\lambda + 1/6)$$

$\lambda = 1$ $\quad \lambda = -1/6$ son autovalores

$$\begin{cases} p_{11}^{0} = a + b = 1 \\ p_{11}^{1} = a + b \cdot -\frac{1}{6} = 1/3 \end{cases}$$

$a = 1 - b$

$$1 - b - \frac{b}{6} = \frac{1}{3}$$
$$6 - 6b - b = 2$$
$$-7b = -4$$
$$b = \frac{4}{7}$$

$a = 1 - 4/7$

$a = \frac{3}{7}$

$$p_{11}^{(n)} = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{-1}{6}\right)^n$$

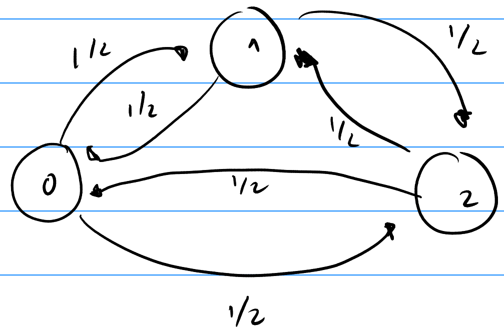
$$P(X_3 = 1 \mid X_0 = 1) = p_{11}^{(3)} = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{-1}{6}\right)^3 = \frac{3}{7} - \frac{1}{378} = \frac{161}{378} = \frac{23}{54}$$

Ejercicio 4. Una pulga salta aleatoriamente sobre vértices de un triángulo, cambiando siempre de vértice, y donde todos los saltos son igualmente probables. Calcular la probabilidad de que en n saltos la pulga vuelva al mismo vértice.

Otra pulga también salta sobre los vértices del triángulo, pero con el doble de probabilidad de ir en sentido horario que antihorario. ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva al vértice donde comenzó?

$S = \{0, 1, 2\}$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$



$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$Q - t \cdot I = \begin{pmatrix} 0-t & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0-t & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0-t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(Q - tI) &= \left((0-t)^3 + (1/2)^3 - (1/2)^3 \right) - \left((1/2)^2 \cdot (0-t) \cdot 3 \right) \\ &= \left(-t^3 + 1/4 \right) - \left(-3t/4 \right) \\ &= -t^3 + 3t/4 + 1/4 \\ &= -t^3 + \frac{3t+1}{4} \end{aligned}$$

$t = 1 \qquad t = \frac{-1}{2}$ con multiplicidad de 2

$$\begin{cases} p_{00}^{0} = a+b+c=1 \\ p_{00}^{1} = a-b/2-c/2 = 0 \\ p_{00}^{2} = a+b/4+c/4 = 1/2 \end{cases}$$

$a = 1-b-c$

$$1-b-c-\frac{b}{2}-\frac{c}{2}=0$$

$$1=\frac{2b+2c+b+c}{2}$$

$$2=3b+3c$$

$$\frac{2}{3}=b+c$$

$$b=\frac{2}{3}-c$$

$$1-\frac{2}{3}-c+\left(\frac{2}{3}-c\right)\cdot\frac{1}{4}+\frac{c}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}-c+\frac{1}{6}-\cancel{\frac{c}{4}}+\cancel{\frac{c}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=c$$

$$\frac{2-3+1}{6}=c$$

$$c=0$$

$c=0$, $b=2/3$, $a=1/3$

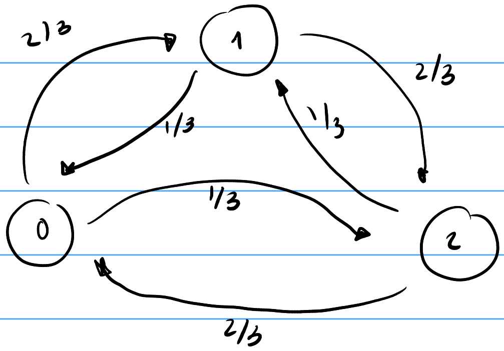
$$P_{00}^{(n)} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^{(n)}$$

Como es el mismo sistema de ecuaciones para $P_{11}^{(n)}$ y $P_{22}^{(n)}$:

$$P_{11}^{(n)} = P_{00}^{(n)} = P_{22}^{(n)}$$

Luego la probabilidad de que en n saltos la pulga vuelva al mismo vertice es $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^{(n)}$

La segunda pulga tiene el doble de probabilidad de ir en lado horario que anti-horario, es decir:



$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q^2 = \begin{pmatrix} 4/9 & 1/9 & 4/9 \\ 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

$$Q - tI = \begin{pmatrix} -t & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -t & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -t \end{pmatrix}$$

$$\det(Q-tI) = \left((-t)^3 + (2/3)^3 + (1/3)^3 \right) - \left(3 \cdot 2/3 \cdot 1/3 \cdot -t \right)$$
$$= \left(-t^3 + 1/3\right) - \left(-2t/3\right)$$
$$= -t^3 + \frac{2t+1}{3}$$

$$t = 1, \quad t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6}, \quad \lambda = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6}$$

$$q^0_{00} = a + b + c = 1$$
$$q^1_{00} = a + b \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6}\right) + c \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6}\right) = 0$$
$$q^2_{00} = a + b \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6}\right)^2 + c \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6}\right)^2 = 4/9$$

$$a = 1 - b - c \qquad a - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6} \cdot (b - c) = 0$$

$$1-b-c-\frac{b}{2}-\frac{c}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{6}(b-c)=0$$

$$1-\frac{3b}{2}-\frac{3c}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{6}(b-c)=0$$

$(b-c)$ debe ser 0 luego $b=c$

$$1-\frac{3c}{2}-\frac{3c}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{6}(c-c)=0$$

$$1-\frac{6c}{2}=0$$

$$3c=1$$

$$c=\frac{1}{3} \Rightarrow b=\frac{1}{3} \Rightarrow a=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$$

$$a=\frac{1}{3}$$

$$q_{00}^{(n)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{6}\right)^n+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{6}\right)^n$$

Como los sistemas de ecuaciones son iguales tenemos que $q_{00}^{(n)}=q_{11}^{(n)}=q_{22}^{(n)}$.

Entonces la probabilidad de volver al mismo vértice desde el que se comenzó es:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{6}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{6}\right)^n.$$

Ejercicio 5. Dada la cadena de Markov de la Figura 2:

a) Determinar las clases comunicantes.

b) Dar los subconjuntos cerrados.

c) Indicar si es una cadena irreducible.

d) Determinar los estados transitorios, recurrentes y periódicos.

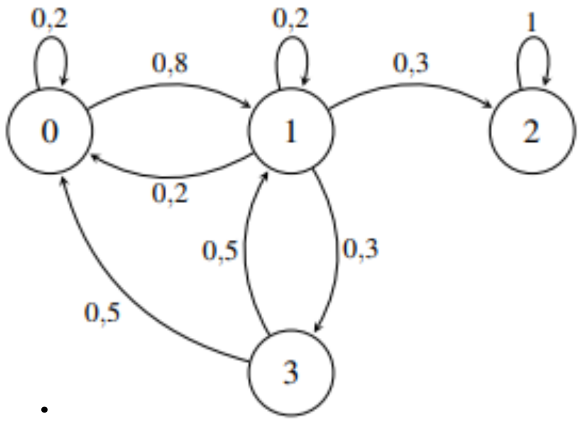


Figura 2: Ejercicio 2

a) $\{0,1,3\}$, $\{2\}$

b) $\{2\}$, $\{0,1,2,3\}$

c) No, porque $\{2\}$ es un conjunto cerrado

d) transitorios = 0, 1 y 3

recurrentes = 2

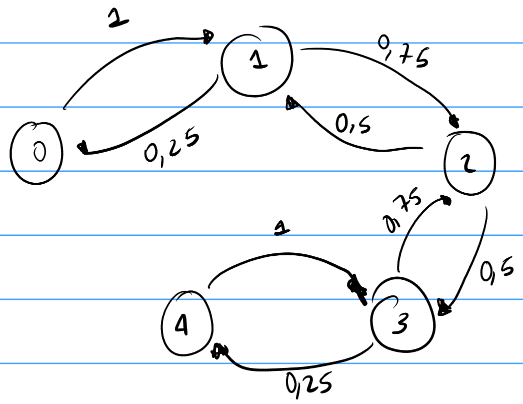
periodicos = ninguno

Ejercicio 6. Considerar una cadena de Markov con estados $S = \{0,1,2,3,4\}$ y matriz de transición:

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0
1	0,25	0	0,75	0	0
2	0	0,5	0	0,5	0
3	0	0	0,75	0	0,25
4	0	0	0	1	0

a) Determinar las clases comunicantes, estados recurrentes, transitorios, absorbentes y estacionarios, si los hubiere.

b) Dar los subconjuntos cerrados irreducibles, e indicar si la cadena es irreducible.



a) clases comunicantes = $\{0, 1\ 2, 3, 4\}$
estados recurrentes = 0, 1, 2, 3, 4
estados transitorios = ninguno
estado absorbente = ninguno

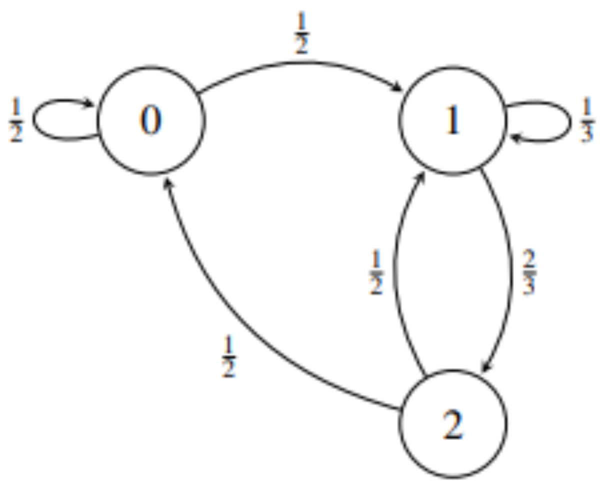
b) La cadena $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ es irreducible

Ejercicio 7. Para la cadena de Markov dada en la Figura 3, calcular:

a) La probabilidad de alcanzar el estado j dado que $X_0 = 0$, para $j = 0, 1, 2$.

b) El tiempo medio de alcance del estado j, dado que $X_0 = 0$, para $j = 0, 1, 2$.

c) El tiempo medio de retorno al estado 0.



a) Al ser todos los estados recurrentes $h_i^{\{j\}} = 1$ para todo $j, i \in S$.

b) $K_i^{\{0\}} = E[H^{\{0\}} \mid X_0 = i]$

$$\begin{cases} K_0^{\{0\}} = 0 \\ K_1^{\{0\}} = 1 + p_{10} \cdot K_0^{\{0\}} + p_{11} \cdot K_1^{\{0\}} + p_{12} \cdot K_2^{\{0\}} \\ \quad = 1 + p_{11} \cdot K_1^{\{0\}} + p_{12} \cdot K_2^{\{0\}} \\ K_2^{\{0\}} = 1 + p_{20} \cdot K_0^{\{0\}} + p_{21} \cdot K_1^{\{0\}} + p_{22} \cdot K_2^{\{0\}} \\ \quad = 1 + p_{21} \cdot K_1^{\{0\}} \end{cases}$$

$$K_1^{\{0\}} = 1 + \frac{K_1^{\{0\}}}{3} + \frac{2K_2^{\{0\}}}{3} = \frac{3 + K_1^{\{0\}} + 2K_2^{\{0\}}}{3}$$

$$3K_1^{\{0\}} = K_1^{\{0\}} + 2K_2^{\{0\}} + 3$$

$$2K_1^{\{0\}} = 2K_2^{\{0\}} + 3$$

$$K_1^{\{0\}} = K_2^{\{0\}} + 3/2$$

$$K_2^{\{0\}} = 1 + \frac{K_2^{\{0\}}}{2} + \frac{3}{4} = \frac{4 + 2K_2^{\{0\}} + 3}{4}$$

$$4K_2^{\{0\}} = 7 + 2K_2^{\{0\}}$$

$$K_2^{\{0\}} = 7/2$$

Tiempo medio para alcanzar 0 desde 0 = 0
" " " " desde 1 = 5
" " " " desde 2 = 7/2

$K_i^{\{1\}} = E[H^{\{1\}} \mid X_0 = i]$

$$\begin{cases} K_0^{\{1\}} = 1 + p_{00} \cdot K_0^{\{1\}} + p_{01} \cdot K_1^{\{1\}} + p_{02} \cdot K_2^{\{1\}} \\ \quad = 1 + p_{00} \cdot K_0^{\{1\}} \\ K_1^{\{1\}} = 0 \\ K_2^{\{1\}} = 1 + p_{20} \cdot K_0^{\{1\}} + p_{21} \cdot K_1^{\{1\}} + p_{22} \cdot K_1^{\{2\}} \\ \quad = 1 + p_{20} \cdot K_0^{\{1\}} \end{cases}$$

$$K_0^{\{1\}} = 1 + \frac{K_0^{\{1\}}}{2}$$

$$\frac{K_0^{\{1\}}}{2} = 1$$

$$K_0^{\{1\}} = 2$$

$$K_2^{\{1\}} = 1 + \frac{K_0^{\{1\}}}{2}$$

$$K_2^{\{1\}} = 2$$

Tiempo medio para alcanzar 1 desde 0 = 2
" " " " desde 1 = 0
" " " " desde 2 = 2

$$K_i^{\{2\}} = E[H^{\{2\}} \mid X_0 = i]$$

$$\begin{cases} K_0^{\{2\}} = 1 + p_{00} \cdot K_0^{\{2\}} + p_{01} \cdot K_1^{\{2\}} + p_{02} \cdot K_2^{\{2\}} \\ \quad = 1 + p_{00} \cdot K_0^{\{2\}} + p_{01} \cdot K_1^{\{2\}} \\ K_1^{\{2\}} = 1 + p_{10} \cdot K_0^{\{2\}} + p_{11} \cdot K_1^{\{2\}} + p_{12} \cdot K_2^{\{2\}} \\ \quad = 1 + p_{11} \cdot K_1^{\{2\}} \\ K_2^{\{2\}} = 0 \end{cases}$$

$$K_1^{\{2\}} = 1 + \frac{K_1^{\{2\}}}{3}$$

$$\frac{2K_1^{\{2\}}}{3} = 1 \qquad K_0^{\{2\}} = 1 + \frac{K_0^{\{2\}}}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 + K_0^{\{2\}}}{2} + \frac{3}{4}$$

$$K_1^{\{2\}} = \frac{3}{2} \qquad 4K_0^{\{2\}} = 4 + 2K_0^{\{2\}} + 3$$

$$2K_0^{\{2\}} = 7$$

$$K_0^{\{2\}} = \frac{7}{2}$$

Tiempo medio para alcanzar 2 desde 0 = 7/2
" " " " desde 1 = 3/2
" " " " desde 2 = 0

c) $$r_0 = 1 + \sum_{i \in S} p_{0i} \cdot K_i^{\{0\}}$$

$$= 1 + p_{00} \cdot K_0^{\{0\}} + p_{01} \cdot K_1^{\{0\}} + p_{02} \cdot K_2^{\{0\}}$$

$$= 1 + p_{01} \cdot K_1^{\{0\}}$$

$$= 1 + \frac{5}{2}$$

$$r_0 = 7/2$$

Ejercicio 8. Para las siguientes cadenas de Markov, determinar:

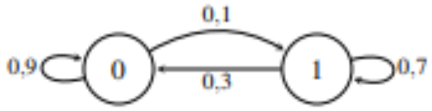
a) Estados recurrentes, transitorios, absorbentes y periódicos.

b) Clases comunicantes y subconjuntos cerrados.

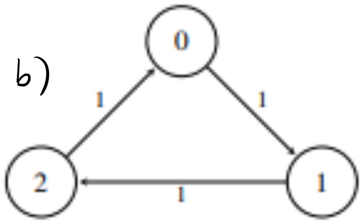
c) Para el estado $\{0\}$ determinar probabilidades de alcance, tiempo medio de alcance y tiempo medio de retorno.

d) Distribución estacionaria, e indicar si coinciden con la distribución límite.

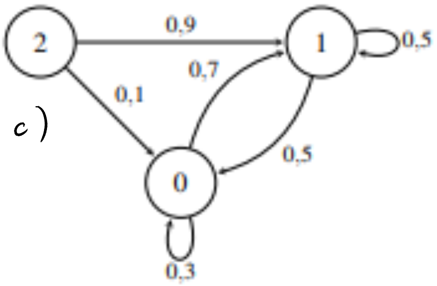
a)



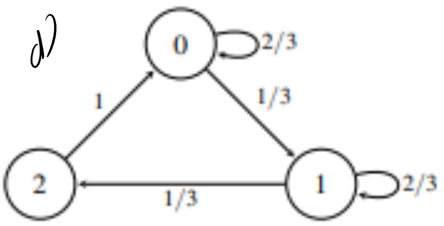
b)



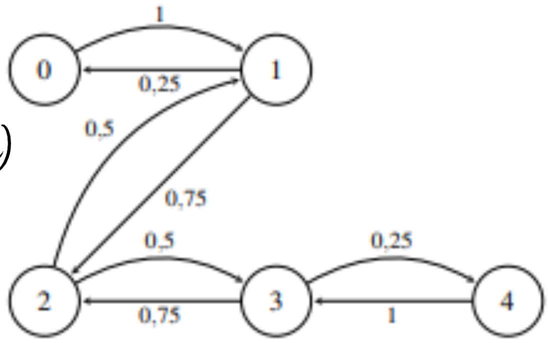
c)



d)



e)



a) Estados recurrentes

a. 0 y 1

b. 0, 1 y 2

c. 0 y 1

d. 0, 1 y 2

e. 0, 1, 2, 3 y 4.

Estados transitorios

a. Ninguno

b. Ninguno

c. 2

d. Ninguno

e. Ninguno

Estados absorbentes

Ninguna cadena tiene estados absorbentes

Estados periódicos

a. Ninguno

b. 0, 1 y 2

c. Ninguno

d. Ninguno

e. 0, 1, 2, 3 y 4.

b) Clases comunicativas

a. $\{0,1\}$

b. $\{0,1,2\}$

c. $\{2\}$, $\{0,1\}$

d. $\{0,1,2\}$

e. $\{0,1,2,3,4\}$

Subconjuntos cerrados

a. $\{0,1\}$

b. $\{0,1,2\}$

c. $\{1,0\}$, $\{0,1,2\}$

d. $\{0,1,2\}$

e. $\{0,1,2,3,4\}$

c) $h_i^{\{0\}} = P(H^{\{0\}} < \infty \mid X_0 = i)$

a. $\begin{cases} h_0^{\{0\}} = 1 \\ h_1^{\{0\}} = p_{10} \cdot h_0^{\{0\}} + p_{11} \cdot h_1^{\{0\}} \\ \quad = p_{10} + p_{11} \cdot h_1^{\{0\}} \end{cases}$

$$h_1^{\{0\}} = 0{,}3 + 0{,}7 \times h_2^{\{0\}}$$
$$0{,}3 \times h_1^{\{0\}} = 0{,}3$$
$$h_1^{\{0\}} = 1.$$

La probabilidad de alcanzar 0 partiendo de 0 es 1
" " " " " " " 1 es 1.

b.
$$\begin{cases} h_0^{\{0\}} = 1 \\ h_1^{\{0\}} = p_{10} \cdot h_0^{\{0\}} + p_{11} \cdot h_1^{\{0\}} + p_{12} \cdot h_2^{\{0\}} \\ \quad\;\; = p_{12} \cdot h_2^{\{0\}} \\ h_2^{\{0\}} = p_{20} \cdot h_0^{\{0\}} + p_{21} \cdot h_1 + p_{22} \cdot h_2^{\{0\}} \\ \quad\;\; = 1 \end{cases}$$

$$h_1^{\{0\}} = 1$$

La probabilidad de alcanzar 0 partiendo de 0 es 1
" " " " " " " 1 es 1.
" " " " " " " 1 es 1.

c.
$$\begin{cases} h_0^{\{0\}} = 1 \\ h_1^{\{0\}} = p_{10} \cdot h_0^{\{0\}} + p_{11} \cdot h_1^{\{0\}} + p_{12} \cdot h_2^{\{0\}} \\ \quad\;\; = p_{10} + p_{11} \cdot h_1^{\{0\}} \\ h_2^{\{0\}} = p_{20} \cdot h_0^{\{0\}} + p_{21} \cdot h_1^{\{0\}} + p_{22} \cdot h_2^{\{0\}} \\ \quad\;\; = p_{20} + p_{21} \cdot h_1^{\{0\}} \end{cases}$$

$$h_1^{\{0\}} = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot h_1^{\{0\}}$$
$$0{,}5\, h_1^{\{0\}} = 0{,}5$$
$$h_1^{\{0\}} = 1$$

$$h_2^{\{0\}} = 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 1$$
$$h_2^{\{0\}} = 1.$$

La probabilidad de alcanzar 0 partiendo de 0 es 1

" " " " " " " 1 es 1.

" " " " " " " 2 es 1

d.
$$\begin{cases} h_0^{\{0\}} = 1 \\ h_1^{\{0\}} = p_{10} \cdot h_0 + p_{11} \cdot h_1^{\{0\}} + p_{12} \cdot h_2^{\{0\}} \\ \quad = p_{11} \cdot h_1^{\{0\}} + p_{12} \cdot h_2^{\{0\}} \\ h_2^{\{0\}} = p_{20} \cdot h_0^{\{0\}} + p_{21} \cdot h_1^{\{0\}} + p_{22} \cdot h_2^{\{0\}} \end{cases}$$
$$= p_{20}$$

$$h_2^{\{0\}} = 1$$

$$h_1^{\{0\}} = 2/3 \cdot h_1^{\{0\}} + 1/3$$
$$1/3\, h_1^{\{0\}} = 1/3$$
$$h_1^{\{0\}} = 1$$

La probabilidad de alcanzar 0 partiendo de 0 es 1

" " " " " " " 1 es 1.

" " " " " " " 2 es 1.

e.
$$\begin{cases} h_0^{\{0\}} = 1 \\ h_1^{\{0\}} = p_{10} + p_{12} \cdot h_2^{\{0\}} \\ h_2^{\{0\}} = p_{21} \cdot h_1^{\{0\}} + p_{23} \cdot h_3^{\{0\}} \\ h_3^{\{0\}} = p_{32} \cdot h_2^{\{0\}} + p_{34} \cdot h_4^{\{0\}} \\ h_4^{\{0\}} = p_{43} \cdot h_3^{\{0\}} \end{cases}$$

$$h_1^{\{0\}} = 0{,}25 + 0{,}75\, h_2^{\{0\}}$$

$$h_4^{\{0\}} = h_3^{\{0\}}$$

$$h_3^{\{0\}} = 0{,}75\, h_2^{\{0\}} + 0{,}25\, h_3^{\{0\}}$$
$$h_3^{\{0\}} = h_2^{\{0\}}$$

$$h_2^{\{0\}} = 0{,}5 \cdot (0{,}25 + 0{,}75\, h_2^{\{0\}}) + 0{,}5 \cdot h_2^{\{0\}}$$
$$h_2^{\{0\}} = 0{,}125 + 0{,}375\, h_2^{\{0\}} + 0{,}5\, h_2^{\{0\}}$$
$$h_2^{\{0\}} = 1$$

$h_0^{\{0\}} = h_1^{\{0\}} = h_2^{\{0\}} = h_3^{\{0\}} = h_4^{\{0\}} = 1.$

La probabilidad de alcanzar 0 partiendo de 0 es 1
" " " " " " " 1 es 1.
" " " " " " " 2 es 1.
" " " " " " " 3 es 1.
" " " " " " " 4 es 1.

$K_i^{\{0\}} = E[H^{\{0\}} \mid X_0 = i]$

a. $\begin{cases} K_0^{\{0\}} = 0 \\ K_1^{\{0\}} = 1 + p_{10} \cdot K_0^{\{0\}} + p_{11} \cdot K_1^{\{0\}} \\ \quad = 1 + p_{11} \cdot K_1^{\{0\}} \end{cases}$

$K_1^{\{0\}} = 1 + 0{,}7 \cdot K_1^{\{0\}}$

$0{,}3 K_1^{\{0\}} = 1$

$K_1^{\{0\}} = 1/0{,}3 = 10/3$

El tiempo medio para alcanzar 0 partiendo de 0 es 0
" " " " " " " 1 es 10/3

b. $\begin{cases} K_0^{\{0\}} = 0 \\ K_1^{\{0\}} = 1 + p_{12} \cdot K_2^{\{0\}} \\ K_2^{\{0\}} = 1 + p_{20} \cdot K_0^{\{0\}} \\ \quad = 1 \end{cases}$

$K_1^{\{0\}} = 1 + 1 = 2.$

El tiempo medio para alcanzar 0 partiendo de 0 es 0
" " " " " " " 1 es 2
" " " " " " " 2 es 1

c. $\begin{cases} K_0^{\{0\}} = 0 \\ K_1^{\{0\}} = 1 + p_{11} \cdot K_1^{\{0\}} \\ K_2^{\{0\}} = 1 + p_{21} \cdot K_1^{\{0\}} \end{cases}$

$K_1^{\{0\}} = 1 + 0{,}5 \cdot K_1^{\{0\}}$ $\quad$ $K_2^{\{0\}} = 1 + 0{,}9 \cdot 2$

$K_1^{\{0\}} = 1/0{,}5 = 2$ $\quad$ $K_2^{\{0\}} = 2.8$

El tiempo medio para alcanzar 0 partiendo de 0 es 0
" " " " " " " 1 es 2
" " " " " " " 2 es 2,8

d. $\begin{cases} K_0^{\{0\}} = 0 \\ K_1^{\{0\}} = 1 + p_{11} \cdot K_1^{\{0\}} + p_{12} \cdot K_2^{\{0\}} \\ K_2^{\{0\}} = 1 \end{cases}$

$K_1^{\{0\}} = 1 + 2/3 \cdot K_1^{\{0\}} + 1/3$

$1/3 \, K_1^{\{0\}} = 4/3$

$K_1^{\{0\}} = 4$

El tiempo medio para alcanzar 0 partiendo de 0 es 0
" " " " " " " 1 es 4
" " " " " " " 2 es 1

e.
$$\begin{cases} K_0^{\{0\}} = 0 \\ K_1^{\{0\}} = 1 + p_{12} \cdot K_2^{\{0\}} \\ K_2^{\{0\}} = 1 + p_{21} \cdot K_1^{\{0\}} + p_{23} \cdot K_3^{\{0\}} \\ K_3^{\{0\}} = 1 + p_{32} \cdot K_2^{\{0\}} + p_{34} \cdot K_4^{\{0\}} \\ K_4^{\{0\}} = 1 + p_{43} \cdot K_3^{\{0\}} \end{cases}$$

$$K_1^{\{0\}} = 1 + 0{,}75 \cdot K_2^{\{0\}}$$

$$K_2^{\{0\}} = 1 + 0{,}5 \cdot (1 + 0{,}75 \cdot K_2^{\{0\}}) + 0{,}5\, K_3^{\{0\}}$$
$$K_2^{\{0\}} = 1 + 0{,}5 + 0{,}375\, K_2^{\{0\}} + 0{,}5\, K_3^{\{0\}}$$
$$K_2^{\{0\}} = \frac{1{,}5 + 0{,}5\, K_3^{\{0\}}}{0{,}625}$$

$$K_3^{\{0\}} = 1 + 0{,}75 \cdot \left(\frac{1{,}5 + 0{,}5\, K_3^{\{0\}}}{0{,}625} \right) + 0{,}25\, K_4^{\{0\}}$$
$$K_3^{\{0\}} = 1 + \frac{1{,}125 + 0{,}375\, K_3^{\{0\}}}{0{,}625} + 0{,}25\, K_4^{\{0\}}$$
$$0{,}625\, K_3^{\{0\}} = 0{,}625 + 1{,}125 + 0{,}375\, K_3^{\{0\}} + 0{,}15625\, K_4^{\{0\}}$$
$$0{,}25\, K_3^{\{0\}} = 1{,}75 + 0{,}15625\, K_4^{\{0\}}$$
$$K_3^{\{0\}} = 7 + 0{,}625\, K_4^{\{0\}}$$

$$K_4^{\{0\}} = 1 + 7 + 0{,}625\, K_4^{\{0\}}$$
$$K_4^{\{0\}} = 8/0{,}375 = 64/3$$

$$K_3^{\{0\}} = 7 + \frac{40}{3} = \frac{61}{3}$$

$$K_2^{\{0\}} = \frac{1{,}5 + 0{,}5 \times 61/3}{0{,}625} = \frac{55}{3}$$

$$K_1^{\{0\}} = 1 + 0{,}75 \times \frac{55}{3} = \frac{44.25}{3}$$

El tiempo medio para alcanzar 0 partiendo de 0 es 0
" " " " " " " 1 es 44,25/3
" " " " " " " 2 es 55/3
" " " " " " " 3 es 61/3
" " " " " " " 4 es 64/3

$$r_0 = 1 + \sum_{i \in S} p_{0i} \cdot K_i^{\{0\}}$$

a. $r_0 = 1 + p_{00} \cdot K_0^{\{0\}} + p_{01} \cdot K_1^{\{0\}}$
$= 1 + 0{,}1 \cdot 10/3$
$= \frac{4}{3}$

El tiempo medio de retorno al estado 0 es 4/3

b. $r_0 = 1 + p_{00} \cdot K_0^{\{0\}} + p_{01} \cdot K_1^{\{0\}} + p_{02} \cdot K_2^{\{0\}}$
$= 1 + 2$
$= 3$

El tiempo medio de retorno al estado 0 es 3

c. $r_0 = 1 + p_{00} \cdot K_0^{\{0\}} + p_{01} \cdot K_1^{\{0\}} + p_{02} \cdot K_2^{\{0\}}$
$= 1 + 0{,}7 \cdot 2$
$= 2{,}4$

El tiempo medio de retorno al estado 0 es 2,4

d. $r_0 = 1 + p_{00} \cdot K_0^{\{0\}} + p_{01} \cdot K_1^{\{0\}} + p_{02} \cdot K_2^{\{0\}}$
$= 1 + 1/3 \cdot 4$
$= 5/3$

El tiempo medio de retorno al estado 0 es 5/3

c. $r_0 = 1 + p_{00} \cdot K_0^{\{0\}} + p_{01} \cdot K_1^{\{0\}} + p_{02} \cdot K_2^{\{0\}} + p_{03} \cdot K_3^{\{0\}} + p_{04} \cdot K_4^{\{0\}}$

$= 1 + 44{,}25/3$

$= 47{,}25/3$

El tiempo medio de retorno al estado 0 es $47{,}25/3$

d)