Práctico 1 -Elementos de probabilidad

martes, 14 de marzo de 2023   20:48

Ejercicio 1. Considere un experimento que consta de cuatro caballos, numerados del 1 al 4, que realizan una carrera, y suponga que el espacio muestral está dado por

$$S = \{\text{todas las permutaciones de } (1,2,3,4)\}.$$

Sea A el evento en el que el caballo número 1 está entre los tres primeros finalistas, sea B el evento que el caballo número 2 llegue en segundo lugar, y sea C el evento que el caballo número 3 llegue en tercer lugar.

a) Describa el evento $A\cap B$. ¿Cuántos resultados están contenidos en este evento?

b) ¿Cuántos resultados están contenidos en el evento $A\cup B$?

c) ¿Cuántos resultados están contenidos en el evento $A\cap B\cap C$?

d) ¿Cuántos resultados están contenidos en el evento $A\cup(B\cap C)$?

a) $\_\ \ 2\ \ \_\ \ \_ \qquad 1\cdot 2! + 1\cdot 2! = 4$

$A\cap B = \{(1,2,3,4),(1,2,4,3),(4,2,1,3),(3,2,1,4)\}$

b) $A^c = \{(2,3,4,1),(2,4,3,1),(4,3,2,1),(4,2,3,1),(3,2,4,1),(3,4,2,1)\}$

$|S| = 4! = 24$

$|A| = |S| - |A^c| = 24 - 6 = 18$

$B = \{(1,2,3,4),(1,2,4,3),(4,2,3,1),(4,2,1,3),(3,2,4,1),(3,2,1,4)\}$

De los elementos de B sólo $\{(4,2,3,1),(3,2,4,1)\} \not\subset A$

Luego $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B| = 18 + 6 - 4 = 20$

c) $A\cap B\cap C = \{(1,2,3,4)\}$

$|A\cap B\cap C| = 1$

d) $A\cup(B\cap C)$

$B\cap C = \{(1,2,3,4),(4,2,3,1)\}$

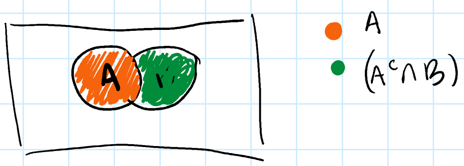
$|A\cup(B\cap C)| = |A| + |B\cap C| - |A\cap B\cap C| = 18 + 2 - 1 = 19$

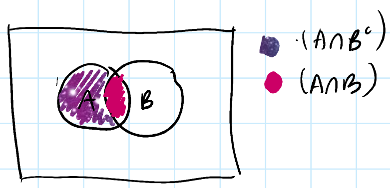
Ejercicio 2. Cualesquiera sean los eventos A y B, muestre que

a) $A\cup B = A\cup(A^c\cap B)$, y que $A = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)$ (Trazar diagramas de Venn).

b) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

a)





$A\cup(A^c\cap B) = (A\cup A^c)\cap(A\cup B)$
$= S\cap(A\cup B)$
$= A\cup B$

$(A\cap B)\cup(A\cap B^c) = A\cap(B\cup B^c)$
$= A\cap S$
$= A$

b) $P(A\cup B) = P(A\cup(A^c\cap B))$ (En el diagrama de Venn vemos que A y $(A^c\cap B)$ son disjuntos)
$= P(A) + P(A^c\cap B)$

Anteriormente vimos que $(A^c\cap B)$ y $(A\cap B)$ son disjuntos igualmente $(A \cap B)$ y $(A \cap B^c)$

Luego: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

y $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$ *

Entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *

Ejercicio 3. Se extraen dos bolas de una caja que contiene 9 bolas azules y 7 bolas amarillas, y el experimento es sin reposición. Si las bolas tienen todas la misma probabilidad de ser extraídas,

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas azules?

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar la primera azul y la segunda amarilla?

a) 16 bolas totales

$\frac{9}{16}$ → probabilidad de sacar una bola azul

$\frac{8}{15}$ → probabilidad de sacar otra bola azul

$$\frac{9}{16} \cdot \frac{8}{15} = \frac{\cancel{72}}{240} = \frac{\cancel{36}}{\cancel{120}} = \frac{\cancel{6}}{20} = \frac{3}{10}$$

Rta: La probabilidad de sacar dos bolas azules es 3/10

b) La probabilidad de sacar la primera bola azul es $\frac{9}{16}$

La probabilidad de saca la segunda amarilla es $\frac{7}{15}$

Luego la probabilidad de saca la primera azul y la segunda amarilla es $\frac{9}{16} \cdot \frac{7}{15} = \frac{\cancel{63}}{2\cancel{40}} = \frac{21}{80}$

Ejercicio 4. Un bolillero, rotulado A, contiene seis (6) bolas rojas y cuatro (4) verdes, y un segundo bolillero, rotulado B, contiene siete (7) bolas rojas y tres (3) verdes. Se realiza el siguiente experimento: Se extrae al azar una bola de A y se coloca en el bolillero B. Luego, se extrae al azar una bola de B y se la coloca en el bolillero A.

a) ¿Cuáles son las probabilidades, $P(R_A)$ y $P(V_A)$ de extraer, respectivamente, una bola roja o una verde de A, en la primera parte del experimento?

b) Calcule las probabilidades condicionales, $P(R_B|R_A)$, de obtener una bola roja de B dado que se extrajo una roja de A y $P(R_B|V_A)$, de obtener una bola roja de B dado que se extrajo una verde de A.

Ayuda: Analice el contenido del bolillero B luego de agregarle la bola proveniente de A.

c) Calcule la probabilidad conjunta de obtener una bola roja de A y también una roja de B.

Ayuda: Aplique la definición de probabilidad condicional.

d) ¿Cuál es la probabilidad, $P(R_B)$, de extraer una bola roja de B?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que al finalizar el experimento el bolillero A recupere exactamente la composición de bolas que tenía declarada al comienzo?

a) $P(R_A) = \frac{\cancel{6}}{1\cancel{0}} = \frac{3}{5}$ $\quad P(V_A) = \frac{\cancel{4}}{1\cancel{0}} = \frac{2}{5}$

b) $P(R_B|R_A) = \frac{P(R_B \cap R_A)}{P(R_A)}$

$P(R_B|R_A) = \frac{8}{11} = 0.\overline{72}$ $\quad P(R_B|V_A) = \frac{7}{11} = 0,\overline{63}$

c) $P(R_A \cap R_B) = P(R_B|R_A) \cdot P(R_A) = 0.\overline{72} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{55} = 0,43\overline{63}$

d) $P(R_B) = P(R_B \cap R_A) + P(R_B \cap V_A)$

$= 0{,}43\overline{63} + P(R_B|V_A) \cdot P(V_A)$

$= \frac{24}{55} + \left(\frac{7}{11} \cdot \frac{2}{5}\right)$

$P(R_B) = \frac{24}{55} + \frac{14}{55} = \frac{38}{55} = 0{,}6\overline{909}$

e) $P(\text{volver al estado inicial}) = P(R_A \cap R_B) + P(V_A \cap V_B)$

$P(V_B|V_A) = \frac{4}{11}$

$P(V_A \cap V_B) = P(V_B|V_A) \cdot P(V_A) = \frac{4}{11} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{55}$

$P(\text{volver al estado inicial}) = \frac{24}{55} + \frac{8}{55} = \frac{32}{55} = 0{,}5\overline{818}$

Ejercicio 5. La variable aleatoria X toma valores en el conjunto $\{1,2,3,4\}$ con la siguiente probabilidad:

$$P_i = P(X = i) = c\,i \quad \text{para } i = 1,2,3,4$$

a) Determine el valor de c.

b) Calcule $P(2 \leq X \leq 3)$.

c) Calcule $E[X]$.

$P_1 = P(X=1) = c \cdot 1 = c$

$P_2 = P(X=2) = 2c$

$P_3 = 3c$

$P_4 = 4c$

a) Sabemos que $\sum_{i=1}^{4} P(X=i) = 1$ es decir

$c + 2c + 3c + 4c = 1$

$10c = 1$

$c = \frac{1}{10}$

b) $P(2 \leq X \leq 3) = P(X=2) + P(X=3)$

$= \frac{2}{10} + \frac{3}{10}$

$P(2 \leq X \leq 3) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

c) $E[X] = \sum_{i=1}^{4} i \cdot P(X=i) = \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{4}{10}$

$= \frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{9}{10} + \frac{16}{10} = \frac{30}{10} = 3$

Ejercicio 6. Muestre que para toda variable aleatoria X se cumple: $\mathrm{Var}[aX+b] = a^2\,\mathrm{Var}[X]$.

$Var[aX+b] = E[((aX+b) - \mu)^2$

$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$

$= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$

$= E(X^2) - 2\mu X + \mu^2$

$$= E(x^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \quad E(x) = \mu$$

$$= E(x^2) - \mu^2 = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$Var(ax+b) = E[(ax+b)^2] - [E(ax+b)]^2$$

$$= E[a^2x^2 + 2axb + b^2] - [aE(x) + b]^2$$

$$= a^2E(x^2) + 2abE(x) + b^2 - (a^2(E(x))^2 + 2abE(x) + b^2)$$

$$= a^2E(x^2) + \cancel{2abE(x)} + \cancel{b^2} - a^2E(x)^2 - \cancel{2abE(x)} - \cancel{b^2}$$

$$= a^2E(x^2) - a^2E(x)^2$$

$$= a^2(E(x^2) - E(x)^2) = a^2(E(x^2) - \mu^2) = a^2 Var(x)$$

Ejercicio 7. Defina una relación de recurrencia $P_{n+1} = f(P_n)$ para la distribución de probabilidad de Poisson. Discuta su uso para un cálculo numérico eficiente de la distribución de Poisson.

$$P_{n+1} = f(P_n)$$

Analogamente $a_{n+1} = f(a_n)$

$$X \sim P(\lambda) \Rightarrow p(n) = P(X=n) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!} & \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & c.c \end{cases}$$

$$P_0 = e^{-\lambda}$$

$$P_1 = e^{-\lambda} \cdot \lambda$$

$$P_2 = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^2}{2!}$$

$$P_n = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!}$$

$$P(n+1) = P(X = n+1) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \lambda^n}{(n+1) \cdot \underbrace{(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1)}_{n!}} = \frac{P(n) \cdot \lambda}{(n+1)}$$

Si $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$

$$f(p(n)) = \frac{P(n) \cdot \lambda}{(n+1)} = P(n+1)$$

Análogamente $f(a_n) = \dfrac{a_n \cdot \lambda}{(n+1)} = a_{n+1}$

Conclusión: Si queremos calcular una sucesión de P_n con un n muy grande en lugar de hacer la cuenta $\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!}$ para cada n, sería más eficiente usar el cálculo de P_{n-1} (que en principio ya lo calculé y lo tengo guardado) y aplicarle un producto y un cociente: $P(n) = P(n-1) \cdot \frac{\lambda}{n}$

Nos ahorramos el costo de calcular $\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ y sólo nos cuesta dos operaciones (aprovechando el costo invertido en el cálculo de P_{n-1})

Ejercicio 8. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución de Poisson con parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente. Demuestre que la variable $Z = X + Y$ tiene distribución Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

$X \sim P(\lambda_1)$

$Y \sim P(\lambda_2)$; X e Y independientes

Queremos demostrar que $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

Consideremos el evento $\{X+Y=n\}$ como unión de eventos excluyentes $\{X=K, Y=n-K\}$ $0 \leq K \leq n$, entonces

$$P(X+Y=n) = \sum_{K=0}^{n} P(X=K, Y=n-K) = \underbrace{\sum_{K=0}^{n} P(X=K) \cdot P(Y=n-K)}_{X \text{ e } Y \text{ independientes}} = \sum_{K=0}^{n} \frac{e^{-\lambda_1} \cdot \lambda_1^K}{K!} \cdot \frac{e^{-\lambda_2} \cdot \lambda_2^{n-K}}{(n-K)!}$$

$$= \sum_{K=0}^{n} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \lambda_1^K \cdot \lambda_2^{n-K}}{K!(n-K)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \sum_{K=0}^{n} \frac{\lambda_1^K \lambda_2^{n-K}}{K!(n-K)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{K=0}^{n} \frac{\lambda_1^K \cdot \lambda_2^{n-K} \cdot n!}{K!(n-K)!} \; *$$

Binomio de Newton $(x+y)^n = \sum_{K=0}^{n} \frac{n!}{n!(n-K)!} \cdot x^{n-K} \cdot y^K$

Continuando con *

$$\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{K=0}^{n} \lambda_1^K \cdot \lambda_2^{n-K} \cdot \frac{n!}{K!(n-K)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \cdot (\lambda_1+\lambda_2)^n$$

Entonces $P(X+Y=n) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \cdot (\lambda_1+\lambda_2)^n \Rightarrow X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

Ejercicio 9. Un geólogo ha recolectado 10 especímenes de roca basáltica y 12 de granito. Si instruye a un asistente de laboratorio para que seleccione al azar 15 de los especímenes para analizarlos, ¿cuál es la función de densidad del número de especímenes de basalto seleccionados para ser analizados?

Probabilidad hipergeométrica

$N = 10$ $\quad$ $n = 15$

$M = 12$

$$p(i) = P(X=i) = \frac{\binom{10}{i}\binom{12}{15-i}}{\binom{25}{15}}$$

$$P(X=i) = \frac{\frac{10!}{10!(10-i)!} \cdot \frac{12!}{(15-i)!(12-15-i)!}}{\frac{25!}{15!(25-15)!}}$$

Observación: A pesar de que en el enunciado dice "función de densidad" esta solo se puede obtener para variables aleatorias continuas, y el problema planteado corresponde a una variable aleatoria discreta, por ende calculamos la función de probabilidad o función de masa de probabilidad

Ejercicio 10. Pruebe que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Entonces

$$E[X] = \lambda \;\; y \;\; Var[X] = \lambda$$

Ayuda: $E[X^2] = E[X(X-1)] + E[X]$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} i\, p(i) = \sum_{i=0}^{n} i\, \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^i}{(i-1)!} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda \cdot \sum_{y=0}^{n} \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} = \lambda$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} i\, p(i) = \sum_{i=0}^{n} i\, \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{i}}{i!} = \sum_{i=0} \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{i}}{(i-1)!} = \lambda \sum_{i=1} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda\cdot\sum_{y=0} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{y}}{y!} = \lambda$$

sustituimos $y = i-1$

$$\begin{aligned}
Var[X] &= E[X^2] - [E(X)]^2 \\
&= E[X(X-1)] + E(X) - \lambda^2 \\
&= \left[\sum_{x=0}^{n} x(x-1)\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x}}{x!}\right] + \lambda - \lambda^2 \\
&= \left[\lambda^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{(x-2)}}{(x-2)!}\right] + \lambda - \lambda^2 \\
&= \left[\lambda^2\cdot \sum_{w=0} \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{w}}{w!}\right] + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}$$

Ejercicio 11. Sean X e Y variables aleatorias *independientes* distribuídas *exponencialmente*

$$f_X(x) = \lambda\exp(-\lambda x)\,,\ (x>0) \qquad f_Y(y) = \mu\exp(-\mu y)\,,\ (y>0).$$

a) Calcule $f_{X|Y}(x|y)$.

b) Calcule $P(X<Y)$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\overbrace{f_X(x)\cdot f_Y(y)}^{\text{ya que son independientes}}}{f_Y(y)} = f_X(x) = \lambda e^{(-\lambda x)}\cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

b) $P(X<Y) = P(0<Y-X) = 1 - P(Y-X\le 0)$

Sea $Z = Y-X$ V.A

$$P(Z\le a) = P(Y-X\le a) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x+a} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x+a} \lambda e^{(-\lambda x)}\cdot\mu e^{(-\mu y)}\,dy\,dx$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{x+a} \lambda e^{(-\lambda x)}\,\mu e^{(-\mu y)}\,dy\,dx = \int_0^R\int_0^{x+a} \lambda e^{(-\lambda x)}\,\mu e\,dy\,dx = \int_0^R\int_0^{x+a}\lambda e^{(-\lambda x)}\,\cancel{\mu}\, e^{u}\cdot\frac{du}{-\cancel{\mu}}\,dx$$

$u = -\mu y$
$du = -\mu\, dy$
$\frac{du}{-\mu} = dy$

$$\int_0^R\int_0^{x+a} \lambda e^{(-\lambda x)}\cdot -e^{u}\,dy\,dx = \int_0^R \lambda e^{(-\lambda x)}\cdot\left[-e^{u}\right]_0^{x+a} dx = \int_0^R \lambda e^{(-\lambda x)}\cdot\left[-e^{-\mu y}\right]_0^{x+a} dx$$

$$= \int_0^R \lambda e^{(-\lambda x)}\cdot\left[\left(-e^{-\mu(x+a)}\right) - \left(-e^{-\mu\cdot 0}\right)\right]dx = \int_0^R \lambda e^{(-\lambda x)}\cdot\left[\left(-e^{-\mu(x+a)}\right) - \left(-e^{0}\right)\right]dx$$

$$= \int_0^R \lambda e^{(-\lambda x)}\cdot\left[\left(-e^{-\mu(x+a)}\right) + 1\right]dx = \int_0^R -\lambda e^{(-\lambda x)+(-\mu(x+a))} + \lambda e^{(-\lambda x)}\,dx$$

$$= \int_0^R -\lambda e^{-\lambda x-\mu x-\mu a} + \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda\int_0^R -e^{v}\cdot\frac{-dv}{\lambda+\mu} + e^{u}\cdot\frac{-du}{\lambda}$$

$v = -\lambda x - \mu x - \mu a$
$dv = -\lambda-\mu\, dx$

$u = -\lambda x$
$du = -\lambda dx$

$$= \lambda\int^R \frac{e^{v}}{\lambda+\mu}\,dv - \frac{e^{u}}{\lambda}\,du = \lambda\left[\frac{e^{v}}{\lambda+\mu} - \frac{e^{u}}{\lambda}\right]_0^R$$

$$v = -\lambda x - \mu x - \mu a \qquad u = -\lambda x$$
$$dv = -\lambda - \mu\, dx \qquad du = -\lambda dx$$
$$-\frac{d}{\lambda+\mu} = dx \qquad -\frac{du}{\lambda} = dx$$

$$= \lambda \int_0^{\kappa} \frac{e^{v}}{\lambda+\mu}\, dv - \frac{e^{u}}{\lambda}\, du = \lambda\left[\frac{e^{v}}{\lambda+\mu} - \frac{e^{u}}{\lambda}\right]_0^{\kappa}$$

$$= \lambda\left[\frac{e^{-x(\lambda+\mu)-\mu a}}{\lambda+\mu} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{\kappa} = \lambda\left[\left(\frac{e^{-\kappa(\lambda+\mu)-\mu a}}{\lambda+\mu} - \frac{e^{-\lambda\kappa}}{\lambda}\right) - \left(\frac{e^{-0(\lambda+\mu)-\mu a}}{\lambda+\mu} - \frac{e^{-\lambda 0}}{\lambda}\right)\right]$$

$$= \lambda\left[\lim_{\kappa\to\infty}\left(\frac{e^{-\kappa(\lambda+\mu)-\mu a}}{\lambda+\mu} - \frac{e^{-\lambda\kappa}}{\lambda}\right) - \left(\frac{e^{-\mu a}}{\lambda+\mu} - \frac{e^{0}}{\lambda}\right)\right] = \lambda\left[(0-0) - \left(\frac{e^{-\mu a}}{\lambda+\mu} - \frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$= \lambda\left[-\frac{e^{-\mu a}}{\lambda+\mu} + \frac{1}{\lambda}\right] = -\frac{\lambda e^{-\mu a}}{\lambda+\mu} + 1 = \frac{\lambda+\mu-\lambda e^{-\mu a}}{\lambda+\mu}$$

$$P(Z\leq 0) = -\frac{\lambda e^{-\mu a}}{\lambda+\mu} + 1 = \frac{-\lambda}{\lambda+\mu} + 1$$

$$P(X<Y) = 1 - \left(-\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + 1\right) = \cancel{1} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \cancel{1} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Ejercicio 12. Sean X e Y variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas de forma exponencial. Calcule la densidad de probabilidad condicional de X dado que $X+Y=t$.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{y} \quad f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$$

Queremos conocer $f_{X|X+Y}(x|t) = \dfrac{f_{X,X+Y}(x,t)}{f_{X+Y}(t)}$

$$f_{X+Y}(t) = f_X * f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}\cdot \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)}_{f_X(x)} \cdot \underbrace{\lambda \overbrace{e^{-\lambda(t-x)}}^{e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda x}}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(t-x)}_{f_Y(t-x)}\, dx = \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)}_{0 \text{ si } x<0} \cdot e^{-\lambda x}\cdot \mathbb{I}_{(0,\infty)}(t-x)\, e^{\lambda x}\, dx$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda t}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\cdot \mathbb{I}_{(0,\infty)}(t-x)\, e^{\lambda x}\, dx = \lambda^2 e^{-\lambda t}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x+\lambda x}\cdot \mathbb{I}_{(0,\infty)}(t-x)\, dx =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda t}\int_0^{\infty} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(t-x)\, dx = \lambda^2 e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^{t} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(u)\, du = \begin{cases} 0 & \text{si } t\leq 0 \\ \lambda^2 e^{-\lambda t}\int_0^t 1\, du & t>0 \end{cases}$$

$u = t-x \qquad x=0 \Rightarrow u=t$

$du = -dx \qquad x=\infty \Rightarrow u=-\infty$

$dx = -du$

$$f(t) = \lambda^2 e^{-\lambda t}\, t\cdot \mathbb{I}_{(0,\infty)}(t)$$

$-du$

$$f_{X+Y}(t) = \lambda^2 e^{-\lambda t}\, t \cdot \mathbb{I}_{(0,\infty)}(t)$$

$$f_{X|X+Y}(x|t) = \frac{f_{X,X+Y}(x,t)}{f_{X+Y}(t)} = \frac{f_{X+Y|X}(t|x)\cdot f_X(x)}{f_{X+Y}(t)}$$

$$f_{X+Y|X}(t|x) = f_{Y|X}(t-x|x) = \frac{f_{Y,X}(t-x,x)}{f_X(x)} = \frac{\overbrace{f_Y(t-x)\cdot f_X(x)}^{x \text{ e } y \text{ independientes}}}{f_X(x)}$$

$$= f_Y(t-x)$$

Luego $$f_{X|X+Y}(x|t) = \frac{f_Y(t-x) f_X(x)}{f_{X+Y}(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda(t-x)} \cdot \lambda e^{-\lambda x}}{\lambda^2 e^{-\lambda t}\, t \cdot \mathbb{I}_{(0,\infty)}(t)} = \frac{\cancel{\lambda^2} \cancel{e^{-\lambda t}}}{\cancel{\lambda^2} \cancel{e^{-\lambda t}}\, t \cdot \mathbb{I}_{(0,\infty)}(t)}$$

$$= \frac{1}{t \cdot \mathbb{I}_{(0,\infty)}(t)} \qquad f_{X|X+Y}(t|x) = \begin{cases} \frac{1}{t} & t>0 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

ó $$f_{X|X+Y}(t|x) = \frac{1}{t} \cdot \mathbb{I}_{(0,\infty)}(t)$$

Ejercicio 13. La vida útil de cierto refrigerador está distribuida de manera aproximadamente normal con media 4.8 años y desvío 1.4 años.

a) Si el aparato tiene garantía por dos años. ¿Cuál es la probabilidad de que un refrigerador del tipo especificado elegido al azar, deba reemplazarse dentro del período de garantía?.

b) Si el fabricante está dispuesto a reponer sólo el 0.5% de los refrigeradores. ¿Cuál es el período de garantía que debe ofrecer?.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ desvío $\sigma = 1.4$

$X \sim N(4.8, 1{,}96)$ varianza $\sigma^2 = 1{,}96$

a) $P(X<2) = P(X \le 2) = \phi\left(\frac{2-4.8}{1.4}\right) = \phi(-2) = 1-\phi(2) = 1-0.9772 = 0{,}0228$

b) $P(X \le X_0) = P\left(\frac{X-4.8}{1.4} \le \frac{X_0-4.8}{1.4}\right) = 0.005$

$$\phi\left(\frac{X_0-4.8}{1.4}\right) = 0.005$$

$$\frac{X_0-4.8}{1.4} = \phi^{-1}(0.005) \quad \rightarrow \quad 1-\phi(-z) = 0.005$$

$\phi(-z) = 0{,}995$

$-z = 2.57$

$z = -2.57$

$$\frac{X_0-4.8}{1.4} = -2.57$$

$$X_0 = -2.57 \times 1.4 + 4.8$$

$$X_0 = 1{,}202$$

La garantía debe ser de 1,202 años

$P(x \le 1{,}202) = \phi\left(\frac{1{,}202-4.8}{1.4}\right) = \phi(-2{,}57) = 1-\phi(2{,}57) = 1-0{,}9949 = 0{,}0051$

Ejercicio 14. Encuentre una aproximación a la probabilidad de que el número de unos obtenidos al arrojar 12000 veces un dado está entre 1900 y 2150.

12000 veces un dado está entre 1900 y 2150.

Sea X la variable aleatoria "número de veces que se obtiene 1 al lanzar un dado"

$$X \sim B(1, 1/6)$$

Usando el teorema central del límite queremos saber

$$P\left(1900 \leq \sum_{i=1}^{12000} X_i \leq 2150\right)$$

y esto lo podemos hacer debido a que n es suficientemente grande y además los X_i son independientes entre sí.

$$E\left(\sum_{i=1}^{12000} X_i\right) = \sum_{i=1}^{12000} E(X_i) = \sum_{i=1}^{12000} n \cdot p = \sum_{i=1}^{12000} \frac{1}{6} = \frac{12000}{6} = 2000$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{12000} X_i\right) = \sum_{i=1}^{12000} V(X_i) = \sum_{i=1}^{12000} n \cdot p(1-p) = \sum_{i=1}^{12000} \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right) = 12000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{60000}{36} = 1666,\overline{66}$$

ya que X_i son independientes

$$\sum_{i=1}^{12000} X_i \sim N(2000, 1666,\overline{66}) \qquad \sigma\left(\sum_{i=1}^{12000} X_i\right) = 40,82$$

$$P\left(1900 \leq \sum_{i=1}^{12000} X_i \leq 2150\right) = P\left(\sum_{i=1}^{12000} X_i \leq 2150\right) - P\left(\sum_{i=1}^{12000} X_i \leq 1900\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{2150-2000}{40,82}\right) - \Phi\left(\frac{1900-2000}{40,82}\right)$$

$$= \Phi(3,67) - (1 - \Phi(2,45))$$

$$= 0,9999 - (1 - 0,9929)$$

$$= 0,9999 - 0,0071$$

$$= 0,9927$$

Ejercicio 15. Un jugador juega quiniela un día. Apuesta una cantidad c a un número entre 0,1,...,99. Se le paga \$70 si sale el número elegido por el jugador y nada en caso contrario. Sea G la v.a. que da la ganancia del juego.

a) Si el valor de la apuesta es de \$1, ¿Cuál es la ganancia esperada del jugador?.

b) El jugador juega todos los días durante dos meses (o sea 60 días en total). ¿Cuál es la probabilidad aproximada que pierda más de 15 pesos en esos dos meses?.

c) ¿Cuánto deberá valer la apuesta c para que el valor esperado de la ganancia sea 0?.

G: v.a que da la ganancia del juego (1 apuesta)

$$G = \begin{cases} 70 - c & \text{si se gana} \rightarrow \text{probabilidad } \frac{1}{100} \\ -c & \text{c.c} \rightarrow \text{probabilidad } \frac{99}{100} \end{cases}$$

a) $$E(G) = \sum_{x \in X} x \cdot p(x) = 69 \cdot \frac{1}{100} + (-1) \cdot \frac{99}{100} = \frac{69}{100} - \frac{99}{100} = \frac{-30}{100} = -0,3$$

b) Llamemos G_i a la v.a de la ganancia del juego en un día i.

Básicamente queremos conocer $P\left(-60 \leq \sum_{i=1}^{60} G_i \leq -15\right)$ ya que al ser 60 días máximo se puede perder 60 veces y como la apuesta es de 1\$ máximo se puede perder 60\$

Podemos utilizar el TCL ya que n es lo suficientemente grande y además las G_i son independientes entre sí $\forall i$.

$\sum^{60} \ldots = \sum^{60} E(G_i) \ldots 0,3 = -18$

y además las G_i son independientes entre sí $\forall i$.

$$E\left(\sum_{i=1}^{60} G_i\right) = \sum_{i=1}^{60} E(G_i) = 60 \cdot -0{,}3 = -18$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{60} G_i\right) = \sum_{i=1}^{60} V(G_i) = \sum_{i=1}^{60} 48{,}51 = 2910{,}6$$

↳ ya que los G_i son independientes

$$V(G_i) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= \sum_{x \in \mathcal{X}} x^2 \cdot p(x) - (-0{,}3)^2$$
$$= 69^2 \cdot \frac{1}{100} + (-1)^2 \cdot \frac{99}{100} - 0{,}09$$
$$= \frac{4761}{100} + \frac{99}{100} - 0{,}09$$
$$= 48{,}51$$

Entonces $\sum_{i=1}^{60} G_i \sim N(-18, 2910{,}6)$ $\quad \sigma\left(\sum_{i=1}^{60} G_i\right) = \sqrt{2910{,}6} \cong 53{,}95$

Luego

$$P\left(-60 \le \sum_{i=1}^{60} G_i \le -15\right) = P\left(\sum_{i=1}^{60} \le -15\right) - P\left(\sum_{i=1}^{60} < -60\right)$$
$$\cong \Phi\left(\frac{-15+18}{53{,}95}\right) - \Phi\left(\frac{-61+18}{53{,}95}\right)$$
$$\cong \Phi(0{,}056) - \Phi(-0{,}797)$$
$$\cong \Phi(0{,}056) - (1 - \Phi(0{,}797))$$
$$\cong 0{,}5199 - (1 - 0{,}7852)$$
$$\cong 0{,}3051$$

La probabilidad de perder más de 15 pesos en 60 días es aproximadamente igual a 30,51%.

c) $E(G) = 0$

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot p(x) = 0$$
$$(70-c) \cdot \frac{1}{100} + (-c) \cdot \frac{99}{100} = 0$$
$$\frac{70-c}{100} - \frac{99c}{100} = 0$$
$$\frac{70-100c}{100} = 0$$
$$70 - 100c = 0$$
$$100c = 70$$
$$c = \frac{70}{100} = 0{,}7$$

Para que $E(G)=0$ el monto de la apuesta debe ser 0,78