

GUIA 3 DE LENGUAJES: PROCEDIMIENTOS EFECTIVOS

Un concepto importante en ciencias de la computacion es el de *procedimiento* o *metodo* para realizar alguna tarea determinada. Nos interesan los procedimientos que estan definidos en forma precisa e inambigua, es decir aquellos en los cuales en cada paso a seguir, la tarea a realizar esta objetivamente descripta. Tambien deben ser repetibles, en el sentido de que si realizamos un procedimiento dos veces con el mismo dato de entrada, entonces ambas ejecuciones deben ser identicas, es decir se realizaran las mismas tareas y en el mismo orden.

Nos interesan los procedimientos \mathbb{P} que posean las siguientes características:

- (1) El interprete o ejecutante de \mathbb{P} es una persona que trabajara con papel y lapiz (ambos recursos disponibles en forma ilimitada).
- (2) Cada paso o tarea que \mathbb{P} encomiende a realizar debe ser simple y facil de realizar en forma *efectiva* por cualquier persona.
- (3) El procedimiento \mathbb{P} comienza a funcionar siempre a partir de cierto dato de entrada y una ves que haya comensado, siempre sucedera una de las dos siguientes posibilidades
 - (a) \mathbb{P} se detiene y da cierto dato de salida
 - (b) \mathbb{P} nunca se detiene, es decir a medida que se van realizando las instrucciones o tareas, \mathbb{P} siempre direcciona a realizar nuevas tareas y lo hace sucesiva e indefinidamente.

En el caso (a) diremos que \mathbb{P} se detiene partiendo del dato de entrada en cuestion y en el caso (b) diremos que \mathbb{P} no se detiene partiendo de dicho dato.

- (4) Hay $n, m \in \omega$ y un alfabeto Σ tales que el conjunto de datos de entrada de \mathbb{P} es $\omega^n \times \Sigma^{*m}$. Cabe aclarar que para ciertas $(n + m)$ -uplas de $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ el procedimiento \mathbb{P} se detendra y para ciertas otras no lo hara.

Llamaremos *procedimientos efectivos* a aquellos procedimientos que posean las características arriba mencionadas.

El *conjunto de datos de salida* de \mathbb{P} es el conjunto de todos los datos que el procedimiento \mathbb{P} dara como salida en alguna de las posibles ejecuciones al variar todos los datos de entrada posibles. Si bien siempre el conjunto de datos de entrada sera de la forma $\omega^n \times \Sigma^{*m}$, puede ser muy dificil o imposible, en general, conocer con precision el conjunto de datos de salida de un procedimiento (esto lo justificaremos mas adelante).

Ya que el interprete de \mathbb{P} es una persona dotada de lapiz y papel, supondremos que los elementos de ω que intervienen en los datos de entrada y de salida estaran representados por palabras de *Num* usando la notacion decimal.

Quisais el procedimiento efectivo mas famoso de la matematica es aquel que se enseña en los colegios para sumar dos numeros naturales expresados en notacion decimal. Notar que el conjunto de datos de entrada de dicho procedimiento es ω^2 y el conjunto de datos de salida es el conjunto formado por todas las sumas posibles de pares de elementos de ω , es decir ω . Por supuesto este procedimiento

solo usa lapiz, papel y pasos extremadamente simples a seguir en cada momento de la computacion, es decir, en algun sentido, no es necesario "entender que es lo que se esta haciendo" para llegar al final y obtener la palabra que representa en notacion decimal a la suma de los numeros iniciales. Dejamos al lector repasar este procedimiento asi como el que calcula dado un numero x no nulo de ω , al numero $x - 1$, los cuales nos haran falta mas adelante en los ejemplos.

FUNCIONES Σ -EFECTIVAMENTE COMPUTABLES

Una funcion Σ -mixta $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ sera llamada Σ -efectivamente computable si hay un procedimiento efectivo \mathbb{P} tal que

- (1) El conjunto de datos de entrada de \mathbb{P} es $\omega^n \times \Sigma^{*m}$
- (2) El conjunto de datos de salida esta contenido en ω .
- (3) Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$, entonces \mathbb{P} se detiene partiendo de $(\vec{x}, \vec{\alpha})$, dando como dato de salida $f(\vec{x}, \vec{\alpha})$.
- (4) Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in (\omega^n \times \Sigma^{*m}) - D_f$, entonces \mathbb{P} no se detiene partiendo desde $(\vec{x}, \vec{\alpha})$

Analogamente una funcion Σ -mixta $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$ sera llamada Σ -efectivamente computable si hay un procedimiento efectivo \mathbb{P} tal que

- (1) El conjunto de datos de entrada de \mathbb{P} es $\omega^n \times \Sigma^{*m}$
- (2) El conjunto de datos de salida esta contenido en Σ^* .
- (3) Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$, entonces \mathbb{P} se detiene partiendo de $(\vec{x}, \vec{\alpha})$, dando como dato de salida $f(\vec{x}, \vec{\alpha})$.
- (4) Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in (\omega^n \times \Sigma^{*m}) - D_f$, entonces \mathbb{P} no se detiene partiendo desde $(\vec{x}, \vec{\alpha})$

Cuando un procedimiento \mathbb{P} cumpla los items (1), (2), (3) y (4) de arriba diremos que \mathbb{P} computa a la funcion f o que f es computada por \mathbb{P} .

Veamos algunos ejemplos:

- (E1) La funcion $\lambda xy[x + y]$ es Σ -efectivamente computable, cualquiera sea el alfabeto Σ ya que el procedimiento enseñado en la escuela primaria para sumar numeros en notacion decimal es efectivo y computa esta funcion.
- (E2) La funcion $C_3^{1,2}$ es Σ -efectivamente computable ya que el siguiente procedimiento \mathbb{P} con conjunto de datos de entrada $\omega \times \Sigma^{*2}$ la computa:
 - Independientemente de quien sea el dato de entrada $(x_1, \alpha_1, \alpha_2)$, detenerse dando como salida el numero 3
- (E3) La funcion $p_3^{2,3}$ es Σ -efectivamente computable ya que el siguiente procedimiento con conjunto de datos de entrada $\omega^2 \times \Sigma^{*3}$ la computa:
 - Dado el dato de entrada $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, detenerse y dar como salida la palabra α_1
- (E4) $Pred$ es Σ -efectivamente computable. Para realizar el procedimiento efectivo que compute a $Pred$ necesitaremos el procedimiento de la escuela primaria que dado un numero no nulo x , expresado en notacion decimal, calcula el numero $x - 1$, en notacion decimal. Llamemos \mathbb{P}_{-1} a dicho procedimiento. El siguiente procedimiento (con conjunto de datos de entrada igual a ω) computa a $Pred$:

Dado como dato de entrada un elemento $x \in \omega$, realizar lo siguiente:

Etapa 1

Si $x = 0$, entonces ir a Etapa 3, en caso contrario ir a Etapa 2.

Etapa 2

Correr \mathbb{P}_{-1} con dato de entrada x obteniendo y como dato de salida. Detenerse y dar y como dato de salida.

Etapa 3

Si $x = 0$, entonces ir a Etapa 1.

Como puede notarse el procedimiento anterior es efectivo ya que como todos sabemos, los sucesivos pasos efectuados al correr \mathbb{P}_{-1} en la Etapa 2 son todos simples y efectivamente realizables. Por supuesto si uno quisiera ser mas prolijo, deberia reemplazar la Etapa 2 por las distintas instrucciones de \mathbb{P}_{-1} , referidas a x .

- (E5) El predicado $\lambda xy[x < y]$ es Σ -efectivamente computable cualquiera sea el alfabeto Σ . Describiremos con palabras un procedimiento $\mathbb{P}_{<}$ que computa a $\lambda xy[x < y]$. Su conjunto de datos de entrada es ω^2 . Dado un par $(x, y) \in \omega^2$, el procedimiento primero compara las longitudes de las palabras que en notacion decimal representan a x y y . Por supuesto esto lo hace borrando de a un simbolo y viendo si alguna se termina primero. Si resultan de distinta longitud, es facil darse cuenta como sigue. En caso de que las palabras resulten de igual longitud, entonces se hace el procedimiento clasico de ir comparando digitos de izquierda a derecha.
- (E6) Veamos que la funcion $\lambda \alpha[|\alpha|]$ es Σ -efectivamente computable. Como en los lenguajes de programacion, usaremos variables y asignaciones para diseñar el procedimiento. Ademas llamemos \mathbb{P}_{+1} a el procedimiento de la escuela primaria que dado un numero no nulo x , expresado en notacion decimal, calcula el numero $x + 1$, en notacion decimal. Sea $\mathbb{P}_{|}$ el siguiente procedimiento.

Dado como dato de entrada un elemento $\alpha \in \Sigma^*$, realizar lo siguiente:

Etapa 1: Hacer las siguientes asignaciones

$$A \leftarrow \alpha$$

$$B \leftarrow 0$$

e ir a Etapa 2.

Etapa 2: Si A no es ε , ir a Etapa 3. En caso contrario detenerse y dar como salida B .

Etapa 3: Correr \mathbb{P}_{+1} con dato de entrada igual al contenido de B , obteniendo y como salida. Hacer las siguientes asignaciones

$$A \leftarrow \text{resultado de remover el 1er simbolo de } A$$

$$B \leftarrow y$$

e ir a Etapa 2.

Ejercicio 1: Convensase que el uso de asignaciones puede realizarse usando solo lapiz y papel. Imagine como lo haria en el caso anterior y corrobore que dicho procedimiento es efectivo y ademas computa a $\lambda \alpha[|\alpha|]$.

Ejercicio 2: Use los procedimientos $\mathbb{P}_{<}$ y $\mathbb{P}_{|}$ de los dos ejemplos anteriores para diseñar usando asignaciones un procedimiento que compute a la funcion $\lambda i \alpha[[\alpha]_i]$

Un ultimo ejemplo:

- (E7) Si \leq es el orden total sobre $\Sigma = \{\blacktriangle, \%\}$ dado por $\blacktriangle < \%$, entonces veremos que la funcion s^{\leq} es Σ -efectivamente computable. En un par de ejercicios de la Guia 2 vimos que cualquiera sea $\alpha \in \Sigma^*$, se cumple

$$\begin{aligned} s^{\leq}(\varepsilon) &= \blacktriangle \\ s^{\leq}(\alpha\blacktriangle) &= \alpha\% \\ s^{\leq}(\alpha\%) &= s^{\leq}(\alpha)\blacktriangle \end{aligned}$$

y que estas ecuaciones permiten calcular el valor de s^{\leq} . Usaremos esta idea para dar un procedimiento efectivo (con conjunto de datos de entrada igual a Σ^*) que compute a s^{\leq} . Como en los lenguajes de programacion, usaremos variables y asignaciones para diseñar el procedimiento.

Etapla 1: Dado el dato de entrada $\alpha \in \Sigma^*$, hacer las siguientes asignaciones

$$\begin{aligned} A &\leftarrow \alpha \\ B &\leftarrow \varepsilon \\ F &\leftarrow \blacktriangle \end{aligned}$$

e ir a Etapa 2.

Etapla 2: Si A comienza con \blacktriangle , entonces hacer las siguientes asignaciones

$$\begin{aligned} A &\leftarrow \text{resultado de remover el 1er simbolo de } A \\ F &\leftarrow B\% \\ B &\leftarrow B\blacktriangle \end{aligned}$$

e ir a la Etapa 2. En caso contrario ir a la Etapa 3.

Etapla 3: Si A comienza con $\%$, entonces hacer las siguientes asignaciones

$$\begin{aligned} A &\leftarrow \text{resultado de remover el 1er simbolo de } A \\ F &\leftarrow F\blacktriangle \\ B &\leftarrow B\% \end{aligned}$$

e ir a la Etapa 2. En caso contrario ir a la Etapa 4.

Etapla 4: Dar como salida F

Observacion: Notese que la definicion de funcion Σ -efectivamente computable para el caso $f = \emptyset$ tiene a priori cierta ambigüedad ya que cualesquiera sean $n, m \in \omega$ y $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ tenemos que $\emptyset : \emptyset \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ ya que $D_\emptyset = \emptyset$ y $I_\emptyset = \emptyset$. De todas maneras, cualesquiera sean los n, m y O elejidos, siempre hay un procedimiento efectivo que computa a $f = \emptyset$, i.e. un procedimiento que nunca se detiene, cualesquiera sea el dato de entrada de $\omega^n \times \Sigma^{*m}$. Es decir que la funcion \emptyset es Σ -efectivamente computable cualesquiera sea el alfabeto Σ . Cabe destacar que para el caso de una funcion $f \neq \emptyset$, nuestra definicion es inambigua ya que hay unicos $n, m \in \omega$ y $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ tales que $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$.

- Ejercicio 3:** Sea \mathbb{P}_+ un procedimiento efectivo que compute a la funcion $\lambda xy[x + y]$. Basado en \mathbb{P}_+ diseñe un procedimiento efectivo que compute a $\lambda xy[x.y]$
- Ejercicio 4:** Sea \leq es el orden total sobre $\Sigma = \{\blacktriangle, \%\}$ dado por $\blacktriangle < \%$. Usando que s^{\leq} es Σ -efectivamente computable diseñe un procedimiento efectivo que compute a $*^{\leq} : \omega \rightarrow \Sigma^*$

Ejercicio 5: Sea $\Sigma = \{\blacktriangle, \%\}$ y sea $f : D_f \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ dada por:

$$\begin{aligned} D_f &= \{(0, 1, \varepsilon), (55, 54, \blacktriangle\%\blacktriangle\%\blacktriangle), (1, 1, \blacktriangle\blacktriangle)\} \\ f(0, 1, \varepsilon) &= 1 \\ f(55, 54, \blacktriangle\%\blacktriangle\%\blacktriangle) &= 2 \\ f(1, 1, \blacktriangle\blacktriangle) &= 3 \end{aligned}$$

Pruebe que f es Σ -efectivamente computable.

Nota Importante: en lo que sigue muchas veces nos permitiremos trabajar con procedimientos que son efectivos en terminos de otros que ya se han dado, es decir daremos procedimientos que en principio no es claro que sean efectivos pero los cuales se volverian efectivos si reemplazaramos ciertas instrucciones por la manera efectiva de simularlas. Para hacer mas dinamico el discurso no distinguiremos entre este tipo de procedimientos (efectivisables) y los efectivos propiamente dichos.

Ejercicio 6: De un procedimiento efectivo (efectivisable) que compute la funcion $\lambda ix[(x)_i]$

Ejercicio 7: Sean

$$\begin{aligned} f &: D_f \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega \\ f_1 &: D_{f_1} \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega \\ f_2 &: D_{f_2} \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega \\ f_3 &: D_{f_3} \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \end{aligned}$$

- (a) Es verdad que $D_{f \circ [f_1, f_2, f_3]} = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$?
- (b) De una descripcion del dominio de $f \circ [f_1, f_2, f_3]$.
- (c) Si f, f_1, f_2, f_3 son Σ -efectivamente computables, entonces $f \circ [f_1, f_2, f_3]$ lo es.

Ejercicio 8: V o F o I. Justifique

- (a) Si \mathbb{P} es un procedimiento efectivo que computa una funcion no vacia $f : D_f \subseteq \omega \rightarrow \omega$ entonces el conjunto de datos de salida de \mathbb{P} es ω
- (b) Si \mathbb{P} y \mathbb{Q} son procedimientos efectivos, entonces $\mathbb{P}\mathbb{Q}$ lo es.
- (c) Denotemos con e a la cantidad de veces que estornudó Alan Turing a lo largo de su vida. Sea $f : \omega \rightarrow \omega$, dada por $f(x) = x^e$. Entonces f es \emptyset -efectivamente computable.
- (d) Si f y g son Σ -efectivamente computables entonces $f.g$ lo es

Ejercicio 9: Si $f : D_f \subseteq \omega \times \omega \times \{\circlearrowleft, \uparrow\}^* \rightarrow \omega$ es tal que D_f es finito, entonces f es $\{\circlearrowleft, \uparrow\}$ -efectivamente computable

Ejercicio 10: Sean $f : D_f \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ y $g : D_g \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ funciones Σ -efectivamente computables tales que $D_f \cap D_g = \emptyset$. Sea $F : D_f \cup D_g \rightarrow \omega$ dada por

$$e \rightarrow \begin{cases} f(e) & \text{si } e \in D_f \\ g(e) & \text{si } e \in D_g \end{cases}$$

Pruebe que F es Σ -efectivamente computable.

CONJUNTOS Σ -EFECTIVAMENTE COMPUTABLES

Sea X un conjunto cualquiera y sea $S \subseteq X$. Usaremos χ_S^X para denotar la funcion

$$\begin{aligned} \chi_S^X : X &\rightarrow \omega \\ x &\rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \notin S \end{cases} \end{aligned}$$

Llamaremos a χ_S^X la *funcion caracteristica de S con respecto a X* .

Un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ sera llamado *Σ -efectivamente computable* cuando la funcion $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ sea Σ -efectivamente computable. O sea S es Σ -efectivamente computable sii hay un procedimiento efectivo \mathbb{P} , el cual computa $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$, es decir:

- El conjunto de datos de entrada de \mathbb{P} es $\omega^n \times \Sigma^{*m}$, siempre termina y da como dato de salida un elemento de $\{0, 1\}$.
- Dado $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$, \mathbb{P} da como salida al numero 1 si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S$ y al numero 0 si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \notin S$.

Notese que la definicion de conjunto Σ -efectivamente computable, para el caso $S = \emptyset$, tiene a priori cierta ambigüedad ya que cualesquiera sean $n, m \in \omega$ tenemos que $\emptyset \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. De todas maneras, cualesquiera sean los n, m elejidos, siempre hay un procedimiento efectivo que computa a $\chi_{\emptyset}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$, i.e. un procedimiento que siempre da como salida 0, cualesquiera sea el dato de entrada de $\omega^n \times \Sigma^{*m}$. Es decir que el conjunto \emptyset es Σ -efectivamente computable cualesquiera sea el alfabeto Σ . Cabe destacar que para el caso de un conjunto $S \neq \emptyset$, nuestra definicion es inambigua ya que hay unicos $n, m \in \omega$ tales que $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$.

Si \mathbb{P} es un procedimiento efectivo el cual computa a $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$, diremos que \mathbb{P} *decide la pertenencia a S* , con respecto al conjunto $\omega^n \times \Sigma^{*m}$.

Ejercicio 11: $\omega^3 \times \Sigma^{*2}$ es Σ -efectivamente computable

Ejercicio 12: Sea $\Sigma = \{\blacktriangle, \%\}$ y sea

$$S = \{(0, 1, \varepsilon), (55, 54, \blacktriangle\%\blacktriangle\%\blacktriangle), (1, 1, \blacktriangle\blacktriangle)\}$$

Pruebe que S es Σ -efectivamente computable.

Ejercicio 13: Convensase que todo conjunto finito $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ -efectivamente computable.

Ejercicio 14: $\{(x, \alpha) \in \omega \times \Sigma^* : |\alpha|^x \text{ es par}\}$ es Σ -efectivamente computable

Ejercicio 15: Sean $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ conjuntos Σ -efectivamente computables. Entonces $S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2$ y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S_1$ son Σ -efectivamente computables.

Ejercicio 16: Sean $S \subseteq \omega$ y $L \subseteq \{ @, \uparrow \}^*$ tales que $(0, \varepsilon) \in S \times L$. Entonces S y L son ambos $\{ @, \uparrow \}$ -efectivamente computables sii $S \times L$ es $\{ @, \uparrow \}$ -efectivamente computable

 CONJUNTOS Σ -EFECTIVAMENTE ENUMERABLES

Supongamos que $k, l, n, m \in \omega$ y que $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Supongamos ademias que $n + m \geq 1$. Entonces denotaremos con $F_{(i)}$ a la funcion $p_i^{n, m} \circ F$. Notar que

$$F_{(i)} : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega, \text{ para cada } i = 1, \dots, n$$

$$F_{(i)} : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \Sigma^*, \text{ para cada } i = n + 1, \dots, n + m$$

Por lo cual cada una de las funciones $F_{(i)}$ son Σ -mixtas.

Ejercicio 17: Sea $F : \{(x, \alpha) \in \omega \times \Sigma^* : |\alpha|^x \text{ es par}\} \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega^2 \times \Sigma^*$ dada por $F(x, \alpha) = (x, x^2 + |\alpha|, \varepsilon)$. Diga quienes son $F_{(1)}, F_{(2)}$ y $F_{(3)}$. Que funcion es $[F_{(1)}, F_{(2)}, F_{(3)}]$?

Ejercicio 18: En la definicion anterior, para el caso $n + m = 1$, quien es $F_{(1)}$?

Ejercicio 19: Pruebe que si $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$, con $k, l, n, m \in \omega$, entonces $F = [F_{(1)}, \dots, F_{(n+m)}]$

Un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ sera llamado Σ -efectivamente enumerable cuando sea vacio o haya una funcion $F : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ sea Σ -efectivamente computable, para cada $i \in \{1, \dots, n + m\}$.

Observacion: Notese que para el caso $n = m = 0$, la condicion anterior de que $F_{(i)}$ sea Σ -efectivamente computable, para cada $i \in \{1, \dots, n + m\}$ se cumple vacuamente y por lo tanto la definicion anterior nos dice que un conjunto $S \subseteq \omega^0 \times \Sigma^{*0} = \{\diamond\}$ sera Σ -efectivamente enumerable sii es vacio o hay una funcion $F : \omega \rightarrow \{\diamond\}$, tal que $I_F = S$. Por supuesto, esto nos dice que \emptyset y $\{\diamond\}$ son Σ -efectivamente enumerables.

Para entender mejor la idea de esta definicion consideremos el siguiente resultado.

Lema 1. *Un conjunto no vacio $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ -efectivamente enumerable sii hay un procedimiento efectivo \mathbb{P} tal que*

- (1) *El conjunto de datos de entrada de \mathbb{P} es ω*
- (2) *\mathbb{P} se detiene para cada $x \in \omega$*
- (3) *El conjunto de datos de salida de \mathbb{P} es igual a S . (Es decir, siempre que \mathbb{P} se detiene, da como salida un elemento de S , y para cada elemento $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S$, hay un $x \in \omega$ tal que \mathbb{P} da como salida a $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ cuando lo corremos con x como dato de entrada)*

Ejercicio 20: Pruebe el lema anterior. (Hacer el caso $n = 1, m = 2$).

Cuando un procedimiento \mathbb{P} cumpla (1), (2) y (3) del lema anterior, diremos que \mathbb{P} enumera a S . O sea que S es Σ -efectivamente enumerable sii es vacio o hay un procedimiento efectivo el cual enumera a S .

Dicho de otra forma un conjunto no vacio S es Σ -efectivamente enumerable sii hay un procedimiento efectivo \mathbb{P} el cual tiene conjunto de datos de entrada ω y ademas para los sucesivos datos de entrada $0, 1, 2, 3, \dots$, el procedimiento \mathbb{P} produce respectivamente los datos de salida $e_0, e_1, e_2, e_3, \dots$ de manera que $S = \{e_0, e_1, e_2, \dots\}$. Cabe destacar aqui que puede suceder que $e_i = e_j$, para ciertos i, j , con $i \neq j$.

Algunos ejemplos:

(E1) Un procedimiento efectivo que enumera $\omega \times \omega$ es el siguiente:

Etapa 1

Si $x = 0$, dar como salida el par $(0, 0)$ y terminar. Si $x \neq 0$, calcular $x_1 = (x)_1$ y $x_2 = (x)_2$.

Etapa 2

Dar como dato de salida el par (x_1, x_2) y terminar

Como puede notarse el procedimiento es efectivo (efectivizable) y además el conjunto de datos de salida es $\omega \times \omega$ ya que si tomamos un par cualquiera $(a, b) \in \omega \times \omega$, el procedimiento lo dara como dato de salida para la entrada $x = 2^a 3^b$.

- (E2) Veamos que $\omega^2 \times \Sigma^{*3}$ es Σ -efectivamente enumerable cualquiera sea el alfabeto no vacío Σ . Sea \leq un orden total para el alfabeto Σ . Utilizando el orden \leq podemos diseñar el siguiente procedimiento para enumerar $\omega^2 \times \Sigma^{*3}$:

Etapas 1

Si $x = 0$, dar como salida $(0, 0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$ y terminar. Si $x \neq 0$, calcular

$$x_1 = (x)_1$$

$$x_2 = (x)_2$$

$$\alpha_1 = *^{\leq}((x)_3)$$

$$\alpha_2 = *^{\leq}((x)_4)$$

$$\alpha_3 = *^{\leq}((x)_5)$$

Etapas 2

Dar como dato de salida la 5-upla $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Ejercicio 21: Explique por que es efectivo el procedimiento de (E2)

Ejercicio 22: Pruebe que el procedimiento de (E2) tiene conjunto de datos de salida igual a $\omega^2 \times \Sigma^{*3}$.

Ejercicio 23: Sea $S = \{(x, \uparrow^x) : x \text{ es par}\}$. Pruebe que S es $\{\@, \uparrow\}$ -efectivamente enumerable.

Ejercicio 24: Sea $S = \{(x, \alpha) \in \omega \times \{\@, \uparrow\}^* : \alpha \text{ tiene exactamente } x \text{ ocurrencias de } \@ \}$. Pruebe que S es $\{\@, \uparrow\}$ -efectivamente enumerable.

Ejercicio 25: Sean $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ conjuntos Σ -efectivamente enumerables. Entonces $S_1 \cup S_2$ es Σ -efectivamente enumerable

Ejercicio 26: Sean $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ conjuntos Σ -efectivamente enumerables. Entonces $S_1 \cap S_2$ es Σ -efectivamente enumerable. (En el apunte esta probado en forma de lema.)

Ejercicio 27: (Explicado en video en granlogico.com) Si \mathbb{P} es un procedimiento efectivo cuyo conjunto de datos de entrada es $\omega \times \Sigma^*$ entonces el conjunto

$$\{(x, \alpha) \in \omega \times \Sigma^* : \mathbb{P} \text{ termina partiendo de } (x, \alpha)\}$$

es Σ -efectivamente enumerable. Saque como conclusion que el dominio de una funcion Σ -efectivamente computable es Σ -efectivamente enumerable.

Lema 2. Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ -efectivamente computable entonces S es Σ -efectivamente enumerable.

Proof. Supongamos $S \neq \emptyset$. Sea $(\vec{z}, \vec{\gamma}) \in S$, fijo. Sea \mathbb{P} un procedimiento efectivo que compute a $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$. Ya vimos en el ejemplo anterior que $\omega^2 \times \Sigma^{*3}$ es Σ -efectivamente enumerable. En forma similar se puede ver que $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ lo es. Sea \mathbb{P}_1 un procedimiento efectivo que enumere a $\omega^n \times \Sigma^{*m}$. Entonces el siguiente procedimiento enumera a S :

Dato de entrada: $x \in \omega$

Etapas 1

Realizar \mathbb{P}_1 con x de entrada para obtener como salida un $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$.

Etapas 2

Realizar \mathbb{P} con $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ de entrada para obtener el valor Booleano e de salida.

Etapas 3

Si $e = 1$ dar como dato de salida $(\vec{x}, \vec{\alpha})$. Si $e = 0$ dar como dato de salida $(\vec{z}, \vec{\gamma})$. ■

Como veremos mas adelante en la Guia 9, hay conjuntos que son Σ -efectivamente enumerables y no Σ -efectivamente computables. Sin envargo tenemos el siguiente interesante resultado:

Teorema 3. Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Son equivalentes

- (a) S es Σ -efectivamente computable
- (b) S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ -efectivamente enumerables

Proof. (a) \Rightarrow (b). Por el lema anterior tenemos que S es Σ -efectivamente enumerable. Notese ademas que, dado que S es Σ -efectivamente computable, $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ tambien lo es (por que?). Es decir que aplicando nuevamente el lema anterior tenemos que $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ es Σ -efectivamente enumerable.

(b) \Rightarrow (a). Si $S = \emptyset$ o $S = \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es claro que se cumple (a). O sea que podemos suponer que ni S ni $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son igual al conjunto vacio. Sea \mathbb{P}_1 un procedimiento efectivo que enumere a S y sea \mathbb{P}_2 un procedimiento efectivo que enumere a $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$. Es facil ver que el siguiente procedimiento computa el predicado $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$:

Dato de entrada: $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$

Etapas 1

Darle a la variable T el valor 0.

Etapas 2

Realizar \mathbb{P}_1 con el valor de T como entrada para obtener de salida la upla $(\vec{y}, \vec{\beta})$.

Etapas 3

Realizar \mathbb{P}_2 con el valor de T como entrada para obtener de salida la upla $(\vec{z}, \vec{\gamma})$.

Etapas 4

Si $(\vec{y}, \vec{\beta}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$, entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 1. Si $(\vec{z}, \vec{\gamma}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$, entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 0. Si no suceden ninguna de las dos posibilidades antes mencionadas, aumentar en 1 el valor de la variable T y dirigirse a la Etapa 2. ■

Ejercicio 28: Sea $\Sigma = \{ @, !, \% \}$. Si $f : S \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable, entonces $\text{Im}(f)$ es Σ -efectivamente enumerable

Ejercicio 29: Sea $\Sigma = \{ @, !, \% \}$. Supongamos $f : S \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ es Σ -efectivamente computable. Suponga ademas que $(1, @@) \in S$ y $f(1, @@) = @!!$. Pruebe que el conjunto

$$\{(x, \alpha) \in S : f(x, \alpha) = @!!\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

Ejercicio 30: Sea $\Sigma = \{ @, \& \}$. Supongamos $f : S \subseteq \omega \times \omega \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable. Suponga ademas que $(0, 0) \in S$ y $f(0, 0) = 0$. Pruebe que el conjunto

$$\{(x, y) \in S : (f(x, y), y) \in S \text{ y } f(f(x, y), y) = 0\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

Ejercicio 31: (Explicado en video en granlogico.com) Si $f : S \subseteq \omega \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable, entonces el conjunto

$$\{x \in S : x \text{ es par } x/2 \in S \text{ y } f(x) = f(x/2)\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

Ejercicio 32: Si $f : S \subseteq \omega \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable, entonces el conjunto

$$\{x \in S : x^2 \in S \text{ y } f(x) = f(x^2)\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

Ejercicio 33: Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, !, \%\}$. Supongamos $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ son Σ -efectivamente enumerables. Entonces

$$\{\alpha \in L_1 : \text{hay un } \beta \in L_2 \text{ tal que } |\beta| = |\alpha|\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

Ejercicio 34: Sean $S \subseteq \omega$ y $L \subseteq \{\textcircled{0}, \uparrow\}^*$ tales que $(0, \varepsilon) \in S \times L$. Entonces $S \times L$ es $\{\textcircled{0}, \uparrow\}$ -efectivamente enumerable si y solo si ambos S y L son $\{\textcircled{0}, \uparrow\}$ -efectivamente enumerables

Ejercicio 35: Sea $f : S \subseteq \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ una funcion Σ -efectivamente computable. Supongamos que $\varepsilon \in S$ y que $f(\varepsilon) = \varepsilon$. Sea

$$L = \{\alpha \in S : f(\alpha) \in S \text{ y } f(f(\alpha)) = \alpha\}$$

Notar que $\varepsilon \in L$. Pruebe que L es Σ -efectivamente enumerable

Ejercicio 36: V o F o I. Justifique

- Denotemos con e a la cantidad de veces que estornudó Alan Turing a lo largo de su vida. Sea $S = \{e\}$. Entonces S es un conjunto \emptyset -efectivamente computable
- $(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$ es Σ -efectivamente enumerable
- Si \mathbb{P} es un procedimiento efectivo, entonces $I_{\mathbb{P}}$ es Σ -efectivamente enumerable
- Sea $S \subseteq \omega$ y supongamos \mathbb{P} es un procedimiento efectivo el cual enumera a S . Entonces el siguiente procedimiento (con dato de entrada $x \in \omega$) enumera a $\{u \in S : u \text{ es par}\}$:
 - Etapas 1: Guardar en la variable X el valor x .
 - Etapas 2: Correr \mathbb{P} con dato de entrada X y guardar en la variable E el dato de salida dado por \mathbb{P}
 - Etapas 3: Si E es par, dar como salida E y detenerse. Caso contrario aumentar en 1 el valor de X e ir a Etapa 2

EJERCICIOS DE EXAMEN

No se puede usar que el dominio (o la imagen) de una funcion Σ -efectivamente computable es Σ -efectivamente enumerable. Los procedimientos efectivos pueden ser escritos en forma “efectivizable”, por ejemplo puede usar las funciones $\#^{\leq}$, $*^{\leq}$, $\lambda ix[(x)_i]$, $\lambda xy[x \leq y]$, $\lambda \alpha[|\alpha|]$, $\lambda xy[x = y]$, $\lambda \alpha\beta[\alpha = \beta]$, $\lambda xy[x + y]$, $\lambda xy[x.y]$, $\lambda xy[x \dot{-} y]$, $\lambda x\alpha[\alpha^x]$, $\lambda xy[x^y]$, etc sin explicar en su procedimiento como haria para calcularlas en forma efectiva.

(1) Sean

$$f : D_f \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$$

$$f_1 : D_{f_1} \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$$

$$f_2 : D_{f_2} \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$$

$$f_3 : D_{f_3} \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$$

- (a) Es verdad que $D_{f \circ [f_1, f_2, f_3]} = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$?
- (b) De una descripción del dominio de $f \circ [f_1, f_2, f_3]$.
- (c) Si f, f_1, f_2, f_3 son Σ -efectivamente computables, entonces $f \circ [f_1, f_2, f_3]$ lo es.

(2) Sean

$$f : D_f \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$$

$$f_1 : D_{f_1} \subseteq \omega \rightarrow \omega$$

$$f_2 : D_{f_2} \subseteq \omega \rightarrow \Sigma^*$$

- (a) Es verdad que $D_{f \circ [f_1, f_2]} = D_{f_1} \cap D_{f_2}$?
- (b) De una descripción del dominio de $f \circ [f_1, f_2]$.
- (c) Si f, f_1, f_2 son Σ -efectivamente computables, entonces $f \circ [f_1, f_2]$ lo es.

(3) Sean

$$f : D_f \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$$

$$f_1 : D_{f_1} \subseteq \Sigma^* \rightarrow \omega$$

$$f_2 : D_{f_2} \subseteq \Sigma^* \rightarrow \omega$$

$$f_3 : D_{f_3} \subseteq \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$$

- (a) Es verdad que $D_{f \circ [f_1, f_2, f_3]} = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$?
- (b) De una descripción del dominio de $f \circ [f_1, f_2, f_3]$.
- (c) Si f, f_1, f_2, f_3 son Σ -efectivamente computables, entonces $f \circ [f_1, f_2, f_3]$ lo es.

(4) Sean

$$f : D_f \subseteq \omega \times \omega \rightarrow \omega$$

$$f_1 : D_{f_1} \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \omega$$

$$f_2 : D_{f_2} \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \omega$$

- (a) Es verdad que $D_{f \circ [f_1, f_2]} = D_{f_1} \cap D_{f_2}$?
 - (b) De una descripción del dominio de $f \circ [f_1, f_2]$.
 - (c) Si f, f_1, f_2 son Σ -efectivamente computables, entonces $f \circ [f_1, f_2]$ lo es.
- (5) Sea $\Sigma = \{ @, !, \% \}$. Supongamos $f : L_1 \rightarrow L_2$, con $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, es Σ -efectivamente computable y biyectiva.
- (a) Defina (dando dominio, imagen y regla) la función f^{-1} .
 - (b) Pruebe que f^{-1} es Σ -efectivamente computable.
- (6) Sea $\Sigma = \{ @, !, \% \}$. Supongamos $S_1 \subseteq \omega \times \Sigma^*$ y $S_2 \subseteq \omega$. Supongamos además que $f : S_1 \rightarrow S_2$ es Σ -efectivamente computable y biyectiva.
- (a) Defina (dando dominio, imagen y regla) la función f^{-1} .
 - (b) Sean $g_1 : S_2 \rightarrow \omega$ y $g_2 : S_2 \rightarrow \Sigma^*$ funciones tales que $f^{-1} = [g_1, g_2]$. Pruebe que g_1 y g_2 son Σ -efectivamente computables.

- (7) Sea $\Sigma = \{ @, !, \% \}$. Supongamos $S \subseteq \omega \times \Sigma^*$ y $L \subseteq \Sigma^*$. Supongamos además que $f : S \rightarrow L$ es Σ -efectivamente computable y biyectiva.
- (a) Defina (dando dominio, imagen y regla) la función f^{-1} .
 - (b) Sean $g_1 : L \rightarrow \omega$ y $g_2 : L \rightarrow \Sigma^*$ funciones tales que $f^{-1} = [g_1, g_2]$. Pruebe que g_1 y g_2 son Σ -efectivamente computables.
- (8) Sea $\Sigma = \{ @, !, \% \}$. Supongamos $S_1 \subseteq \omega$ y $S_2 \subseteq \omega \times \Sigma^*$. Supongamos además que $F : S_1 \rightarrow S_2$ es biyectiva.
- (a) Defina (dando dominio, imagen y regla) la función F^{-1} .
 - (b) Pruebe que si $F_{(1)}$ y $F_{(2)}$ son Σ -efectivamente computables, entonces F^{-1} es Σ -efectivamente computable.
- (9) Un conjunto no vacío $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ -efectivamente enumerable si hay un procedimiento efectivo \mathbb{P} tal que
- (a) El conjunto de datos de entrada de \mathbb{P} es ω
 - (b) \mathbb{P} se detiene para cada $x \in \omega$
 - (b) El conjunto de datos de salida de \mathbb{P} es igual a S . (Es decir, siempre que \mathbb{P} se detiene, da como salida un elemento de S , y para cada elemento $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S$, hay un $x \in \omega$ tal que \mathbb{P} da como salida a $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ cuando lo corremos con x como dato de entrada)
- (Hacer el caso $n = 1, m = 2$).
- (10) Sean $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ conjuntos Σ -efectivamente enumerables. Entonces $S_1 \cap S_2$ es Σ -efectivamente enumerable.
- (11) Sea $\Sigma = \{ @, !, \% \}$. Supongamos $f : S \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable. Suponga además que $(0, 0, \varepsilon) \in S$ y $f(0, 0, \varepsilon) = 0$. Pruebe que el conjunto

$$\{(x, y, \alpha) \in S : f(x, y, \alpha) = 0\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (12) Sea $\Sigma = \{ @, \& \}$. Supongamos $f : S \subseteq \omega \times \omega \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable. Suponga además que $(0, 0) \in S$ y $f(0, 0) = 0$. Pruebe que el conjunto

$$\{(x, y) \in S : f(x, y) = x\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (13) Sea $\Sigma = \{ @, \& \}$. Supongamos $f : L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ es Σ -efectivamente computable. Suponga además que $(@, \&) \in L$ y $f(@, \&) = @@@$. Pruebe que el conjunto

$$\{(\alpha, \beta) \in L : f(\alpha, \beta) = \alpha\alpha\alpha\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (14) Sea $\Sigma = \{ @, \& \}$. Supongamos $f : S \subseteq \omega \times \omega \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable. Suponga además que $(0, 0) \in S$ y $f(0, 0) = 0$. Pruebe que el conjunto

$$\{(x, y) \in S : (y, x) \in S \text{ y } f(x, y) = f(y, x)\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (15) Sea $\Sigma = \{ @, \& \}$. Supongamos $f : S \subseteq \omega \times \omega \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable. Suponga además que $(0, 0) \in S$ y $f(0, 0) = 0$. Pruebe que el conjunto

$$\{(x, y) \in S : (f(x, y), y) \in S \text{ y } f(f(x, y), y) = 0\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (16) Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, \&\}$. Supongamos $f : S \subseteq \omega \times \omega \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable. Suponga además que $(0, 0) \in S$ y $f(0, 0) = 0$. Pruebe que el conjunto

$$\{x \in \omega : \text{hay un } y \text{ tal que } (x, y) \in S \text{ y } f(x, y) = 0\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (17) Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, \&\}$. Supongamos $f : S \subseteq \omega \times \omega \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable. Suponga además que $(0, 0) \in S$ y $f(0, 0) = 0$. Pruebe que el conjunto

$$\{(x, x) : (x, x) \in S \text{ y } f(x, x) = x\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (18) Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, \&\}$. Supongamos $f : L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ es Σ -efectivamente computable. Suponga además que $(\textcircled{0}, \textcircled{0}) \in L$. Pruebe que el conjunto

$$\{(\alpha, \beta) \in L : (\beta, \alpha) \in L \text{ y } f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (19) Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, \&\}$. Sea $f : S \subseteq \Sigma^* \rightarrow \omega$ una función Σ -efectivamente computable. Supongamos que $\varepsilon \in S$ y que $f(\varepsilon) = 0$. Sea

$$L = \{\alpha \in S : \textcircled{0}^{f(\alpha)} \in S \text{ y } f(\textcircled{0}^{f(\alpha)}) = 0\}$$

Notar que $\varepsilon \in L$. Pruebe que L es Σ -efectivamente enumerable.

- (20) Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, !, \%\}$. Supongamos $f : S \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable. Suponga además que $(0, 0, \varepsilon) \in S$ y $f(0, 0, \varepsilon) = 0$. Pruebe que el conjunto

$$\{(x, y, \alpha) \in S : (y, x, \alpha) \in S \text{ y } f(x, y, \alpha) = f(y, x, \alpha)\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (21) Si \mathbb{P}_1 y \mathbb{P}_2 son procedimientos efectivos ambos con conjunto de datos de entrada igual a $\omega \times \Sigma^*$, entonces el conjunto

$$\{(\alpha, \beta) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \mathbb{P}_1 \text{ termina partiendo de } (0, \alpha) \text{ y } \mathbb{P}_2 \text{ termina partiendo de } (0, \beta)\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (22) Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, !, \%\}$. Si $f : S \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable, entonces S es Σ -efectivamente enumerable.

- (23) Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, !, \%\}$. Si $f : S \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable, entonces $\text{Im}(f)$ es Σ -efectivamente enumerable.

- (24) Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, !, \%\}$. Si $f : L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable, entonces $\text{Im}(f)$ es Σ -efectivamente enumerable.

- (25) Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, !, \%\}$. Si $f_1 : S_1 \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ y $f_2 : S_2 \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ son Σ -efectivamente computables, entonces $\text{Im}([f_1, f_2])$ es Σ -efectivamente enumerable.

- (26) Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, !, \%\}$. Si $f : S \subseteq \omega \rightarrow \omega$ y $g : L \subseteq \Sigma^* \rightarrow \omega$ son Σ -efectivamente computables, entonces

$$\{x : x \in S, \textcircled{0}^x \in L \text{ y } f(x) = g(\textcircled{0}^x)\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (27) Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, !, \%\}$. Si $f : S \subseteq \omega \rightarrow \omega$ y $g : L \subseteq \Sigma^* \rightarrow \omega$ son Σ -efectivamente computables, entonces

$$\{\alpha \in L : g(\alpha) \in S \text{ y } f(g(\alpha)) = 0\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (28) Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, !, \%\}$. Si $f : \omega \rightarrow \Sigma^*$ es Σ -efectivamente computable y biyectiva, entonces f^{-1} es Σ -efectivamente computable
- (29) Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, !, \%\}$. Si $f : L \subseteq \Sigma^* \rightarrow \omega$ y $g : S \subseteq \omega \rightarrow \Sigma^*$ son Σ -efectivamente computables, entonces $f \circ g$ es Σ -efectivamente computable
- (30) Si $f : S \subseteq \omega \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable, entonces el conjunto

$$\{x \in S : x^2 \in S \text{ y } f(x) = f(x^2)\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (31) Si $f : S \subseteq \omega \rightarrow \omega$ es Σ -efectivamente computable, entonces el conjunto

$$\{x \in S : x \text{ es par } x/2 \in S \text{ y } f(x) = f(x/2)\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (32) Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, !, \%\}$. Supongamos $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ son Σ -efectivamente enumerables. Entonces

$$\{\alpha \in L_1 : \text{hay un } \beta \in L_2 \text{ tal que } |\beta| = |\alpha|\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (33) Sea $\Sigma = \{!, \%\}$. Supongamos $S \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^*$ y $L \subseteq \Sigma^*$ son Σ -efectivamente enumerables. Entonces

$$\{(x, y, \alpha) \in S : \text{hay un } \beta \in L \text{ tal que } |\beta| = |\alpha|\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (34) Sea $\Sigma = \{!, \%\}$. Supongamos $S \subseteq \omega \times \omega$ y $S' \subseteq \omega$ son Σ -efectivamente enumerables. Entonces

$$\{(x, y) : (x, y) \in S \text{ y } x + y \in S'\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (35) Sea $\Sigma = \{!, \%\}$. Supongamos $S \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ y $L \subseteq \Sigma^*$ son Σ -efectivamente enumerables. Entonces

$$\{(\alpha, \beta) \in S : \text{hay un } \gamma \in L \text{ tal que } \alpha = \beta\gamma\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (36) Sean $f : D_f \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ y $g : D_g \subseteq \omega \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ funciones Σ -efectivamente computables tales que $D_f \cap D_g = \emptyset$. Sea $F : D_f \cup D_g \rightarrow \omega$ dada por

$$e \rightarrow \begin{cases} f(e) & \text{si } e \in D_f \\ g(e) & \text{si } e \in D_g \end{cases}$$

Pruebe que F es Σ -efectivamente computable.

- (37) Sea $\Sigma = \{\textcircled{0}, !, \%\}$. Supongamos $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ son Σ -efectivamente enumerables. Entonces

$$\{\alpha \in L_1 : \text{hay un } \beta \in L_2 \text{ tal que } \beta^3 = \alpha\}$$

es Σ -efectivamente enumerable.

- (38) Sean $S \subseteq \omega$ y $L \subseteq \{\textcircled{0}, \uparrow\}^*$ tales que $(0, \varepsilon) \in S \times L$. Entonces $S \times L$ es $\{\textcircled{0}, \uparrow\}$ -efectivamente enumerable si y solo si ambos S y L son $\{\textcircled{0}, \uparrow\}$ -efectivamente enumerables