GUIA 5 DE LENGUAJES: FUNCIONES Σ-RECURSIVAS PRIMITIVAS

El paradigma de Godel: Funciones Σ-recursivas

En esta guia y la siguiente desarrollaremos el modelo matematico del concepto de funcion Σ-efectivamente computable, dado por Godel. Dichas funciones seran llamadas Σ-recursivas. La idea es partir de un conjunto inicial de funciones muy simples y obviamente Σ-efectivamente computables y luego obtener nuevas funciones Σ-efectivamente computables usando constructores que preservan la computabilidad efectiva. Las funciones Σ-recursivas seran las que se obtienen iterando el uso de estos constructores, partiendo del conjunto inicial de funciones antes mencionado. Nos referiremos a este paradigma como el paradigma Godeliano o recursivo. A veces tambien lo llamaremos el paradigma funcional.

La familia de funciones simples y obviamente Σ-efectivamente computables de la que partiremos es la siguiente

$$\left\{Suc, Pred, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}\right\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \left\{p_j^{n,m} : 1 \leq j \leq n+m\right\}$$

Los constructores que usaremos son:

- Composicion
- Recursion primitiva
- Minimizacion de predicados totales

Estos constructores nos permiten dadas ciertas funciones construir o definir una nueva funcion y tienen la propiedad de preservar la computabilidad efectiva en el sentido que si las funciones iniciales son Σ-efectivamente computables, entonces la funcion obtenida tambien lo es. Un concepto fundamental es el de funcion Σ-recursiva primitiva. Estas funciones seran aquellas que se obtienen a partir de las del conjunto inicial usando solo los dos primeros constructores: composicion y recursion primitiva. Nuestro primer objetivo es definir el concepto de funcion Σ-recursiva primitiva para lo cual en las proximas dos secciones definiremos y estudiaremos los constructores de composicion y recursion primitiva. Luego definiremos el concepto de funcion Σ-recursiva primitiva y nos abocaremos a desarrollar este concepto fundamental. Recien despues ya en la Guia 6 estudiaremos el constructor de minimizacion y definiremos el concepto de funcion Σ-recursiva.

Composicion. Dadas funciones Σ-mixtas $f, f_1, ..., f_r$, con $r \geq 1$, diremos que la funcion $f \circ [f_1, ..., f_r]$ es *obtenida por composicion a partir de las funciones* $f, f_1, ..., f_r$. Un hecho que a priori no es obvio es que si $f, f_1, ..., f_r$ son Σ-mixtas, entonces $f \circ [f_1, ..., f_r]$ lo es. Esto es consecuencia del siguiente lema.

Lema 1. *Supongamos que $f, f_1, ..., f_r$ son funciones Σ-mixtas, con $r \geq 1$. Supongamos ademas que $f \circ [f_1, ..., f_r] \neq \emptyset$. Entonces hay $n, m, k, l \in \omega$ y $s \in \{\#, *\}$ tales que*

- $r = n + m$

- *f es de tipo (n, m, s)*
- *f_i es de tipo $(k, l, \#)$, para cada $i = 1, ..., n$*
- *f_i es de tipo $(k, l, *)$, para cada $i = n + 1, ..., n + m$*

Mas aun, en tal caso la funcion $f \circ [f_1, ..., f_{n+m}]$ es de tipo (k, l, s) y:

$$D_{f\circ[f_1,...,f_{n+m}]} = \left\{ (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \bigcap_{i=1}^{n+m} D_{f_i} : (f_1(\vec{x}, \vec{\alpha}), ..., f_{n+m}(\vec{x}, \vec{\alpha})) \in D_f \right\}$$

$$f \circ [f_1, ..., f_{n+m}](\vec{x}, \vec{\alpha}) = f(f_1(\vec{x}, \vec{\alpha}), ..., f_{n+m}(\vec{x}, \vec{\alpha})).$$

Ejercicio 1: Justifique con palabras la veracidad del lema anterior (a lo mariposa)

Ahora si es facil probar que la composicion preserva la computabilidad efectiva. Mas formalmente:

Lema 2. *Si $f, f_1, ..., f_r$, con $r \geq 1$, son Σ-efectivamente computables, entonces $f \circ [f_1, ..., f_r]$ lo es.*

Proof. Si $f \circ [f_1, ..., f_r] = \emptyset$, entonces claramente es Σ-efectivamente computable. Supongamos entonces que $f \circ [f_1, ..., f_r] \neq \emptyset$. Por el lema anterior hay $n, m, k, l \in \omega$ y $s \in \{\#, *\}$ tales que

- $r = n + m$
- f es de tipo (n, m, s)
- f_i es de tipo $(k, l, \#)$, para cada $i = 1, ..., n$
- f_i es de tipo $(k, l, *)$, para cada $i = n + 1, ..., n + m$

Sean $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, ..., \mathbb{P}_{n+m}$ procedimientos efectivos los cuales computen las funciones $f, f_1, ..., f_{n+m}$, respectivamente. Usando estos procedimientos es facil definir un procedimiento efectivo el cual compute a $f \circ [f_1, ..., f_{n+m}]$ ■

Ejercicio 2: Complete la prueba anterior

Recursion primitiva. La recursion primitiva es un tipo muy particular de recursion. Mas adelante lo definiremos matematicamente pero antes daremos varios ejemplos para aproximarnos gradualmente a la definicion. Consideremos por ejemplo las siguientes ecuaciones:

(1) $R(0) = 1$
(2) $R(t + 1) = 1 + R(t) + R(t)^2$

Notese que hay una unica funcion $R : \omega \to \omega$ la cual cumple (1) y (2). Esto es ya que el valor de R en t esta determinado por sucesivas aplicaciones de las ecuaciones (1) y (2). Por ejemplo la ecuacion (1) nos dice que $R(0) = 1$ pero entonces la ecuacion (2) nos dice que $R(1) = 1 + 1 + 1^2 = 3$ por lo cual nuevamente la ecuacion (2) nos dice que $R(2) = 1 + 3 + 3^2 = 13$ y asi podemos notar facilmente que R esta determinada por dichas ecuaciones.

Se suele decir que las ecuaciones (1) y (2) definen recursivamente a la funcion R pero hay que tener cuidado porque esto es una manera de hablar ya que la funcion R podria en nuestro discurso ya haber sido definida de otra manera. Mas propio es pensar que dichas ecuaciones determinan a R en el sentido que R es la unica que las cumple. Por ejemplo las ecuaciones:

(a) $R(0) = 50$

(b) $R(t+1) = R(t)$

"definen recursivamente" a la funcion $C_{50}^{1,0}$ pero esta claro que la definicion de $C_{50}^{1,0}$ en esta materia no fue dada de esta forma.

Ejercicio 3: Encuentre ecuaciones que "definan recursivamente" a la funcion $R = \lambda t[2^t]$

Hay casos de recursiones en las cuales el valor de $R(t+1)$ no solo depende de $R(t)$ sino que tambien depende de t. Por ejemplo

(i) $R(0) = 1$
(ii) $R(t+1) = t.R(t) + 1$

De todas maneras deberia quedar claro que las ecuaciones (i) y (ii) determinan una unica funcion $R : \omega \to \omega$ que las satisface.

Ejercicio 4: Encuentre ecuaciones que "definan recursivamente" a la funcion $R = \lambda t[t!]$

Tambien podemos generalizar pensando que la funcion R depende no solo de un parametro t sino que tiene otras variables. Por ejemplo

(p) $R(0, x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3$
(q) $R(t+1, x_1, x_2, x_3) = t + x_1 + x_2 + x_3 + R(t, x_1, x_2, x_3)$

Ejercicio 5: Explique con palabras por que las ecuaciones (p) y (q) determinan una unica funcion $R : \omega^4 \to \omega$. Cuanto vale $R(3, 1, 2, 3)$?

Por supuesto la cantidad de variables extra puede ser cualquiera y no justo 3.

Ejercicio 6: Encuentre ecuaciones que "definan recursivamente" a la funcion $R = \lambda t x_1[t+x_1]$, usando la funcion Suc.

Tambien podriamos tener variables alfabeticas. Por ejemplo consideremos

(r) $R(0, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = x_1 + |\alpha_1|^{x_2}$
(s) $R(t+1, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = t + x_1 + x_2 + |\alpha_1| + |\alpha_2| + R(t, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)$

Es claro aqui que las ecuaciones (r) y (s) determinan una unica funcion $R : \omega^3 \times \Sigma^{*2} \to \omega$ que las cumple. Esto se puede explicar de la siguiente manera:

- La ecuacion (r) determina los valores de R sobre el conjunto $\{0\} \times \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^*$. Pero una ves determinados estos valores, la ecuacion (s) tomada con $t = 0$, determina los valores de R sobre el conjunto $\{1\} \times \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^*$. Pero una ves determinados estos valores, la ecuacion (s) tomada con $t = 1$, determina los valores de R sobre el conjunto $\{2\} \times \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^*$, etc

El caso anterior podria generalizarse de la siguiente manera: Si tenemos dadas dos funciones

$$f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$$
$$g : \omega^{n+2} \times \Sigma^{*m} \to \omega$$

entonces las ecuaciones:

(a) $R(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) = f(\vec{x}, \vec{\alpha})$
(b) $R(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) = g(R(t, \vec{x}, \vec{\alpha}), t, \vec{x}, \vec{\alpha})$

determinan una unica funcion $R : \omega^{n+1} \times \Sigma^{*m} \to \omega$ que las cumple. Notese que para el caso

$$\begin{aligned} &n = m = 2 \\ &f = \lambda x_1 x_2 \alpha_1 \alpha_2 [x_1 + |\alpha_1|^{x_2}] \\ &g = \lambda x t x_1 x_2 \alpha_1 \alpha_2 [t + x_1 + x_2 + |\alpha_1| + |\alpha_2| + x] \end{aligned}$$

las ecuaciones (a) y (b) se transforman en las ecuaciones (r) y (s).

Conjuntos rectangulares. El primer caso de recursion primitiva que definiremos a continuacion engloba todos los ejemplos vistos recien dentro de un marco general. Para enunciarlo necesitaremos una definicion muy importante en la materia. Sea Σ un alfabeto finito. Un conjunto Σ-mixto S es llamado *rectangular* si es de la forma

$$S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$$

con cada $S_i \subseteq \omega$ y cada $L_i \subseteq \Sigma^*$. Notar que todo subconjunto de ω es rectangular (es el caso $n = 1$ y $m = 0$). Analogamente, todo subconjunto de Σ^* es rectangular (es el caso $n = 0$ y $m = 1$). Tambien $\{\Diamond\}$ es rectangular (es el caso $n = m = 0$). Otros ejemplos:

- $\mathbf{N} \times \{1, 2\} \times \{@@, \varepsilon\}$ es rectangular (aqui $n = 2$ y $m = 1$)
- $\{!!!, !!\} \times \{@@, \varepsilon\}$ es rectangular (aqui $n = 0$ y $m = 2$)

Tambien notese que $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$ por lo cual $\emptyset$ es un conjunto rectangular.

El concepto de conjunto rectangular es muy importante en nuestro enfoque. Aunque en general no habra restricciones acerca del dominio de las funciones y predicados, nuestra filosofia sera tratar en lo posible que los dominios de las funciones que utilicemos para hacer nuestro analisis de recursividad de los distintos paradigmas, sean rectangulares.

Aunque en principio puede parecer que todos los conjuntos son rectangulares, el siguiente lema mostrara cuan ingenua es esta vision. Lo aceptaremos sin demostracion aunque es facil de probar.

Lema 3. *Sea $S \subseteq \omega \times \Sigma^*$. Entonces S es rectangular si y solo si se cumple la siguiente propiedad:*

(R) *Si $(x, \alpha), (y, \beta) \in S$, entonces $(x, \beta) \in S$*

Ejercicio 7: Supongamos $\Sigma = \{\#, \blacktriangle, \%\}$. Use el lema anterior para probar que

$$\{(0, \#\#), (1, \%\%\%)\} \text{ y } \{(x, \alpha) \in \omega \times \Sigma^* : |\alpha| = x\}$$

no son rectangulares

Recursion primitiva sobre variable numerica con valores numericos. Ahora si daremos el primer caso del constructor de recursion primitiva. Supongamos tenemos dadas funciones

$$\begin{aligned} &f : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega \\ &g : \omega \times \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega \end{aligned}$$

con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacios. Usando el razonamiento inductivo usado en los ejemplos anteriores, se puede probar que hay una unica funcion

$$R : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$$

la cual cumple las ecuaciones

- $R(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) = f(\vec{x}, \vec{\alpha})$
- $R(t + 1, \vec{x}, \vec{\alpha}) = g(R(t, \vec{x}, \vec{\alpha}), t, \vec{x}, \vec{\alpha})$

LLamaremos $R(f, g)$ a esta unica funcion que cumple las ecuaciones anteriores. Resumiendo este hecho, diremos que las ecuaciones

(1) $R(f, g)(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) = f(\vec{x}, \vec{\alpha})$
(2) $R(f, g)(t + 1, \vec{x}, \vec{\alpha}) = g(R(f, g)(t, \vec{x}, \vec{\alpha}), t, \vec{x}, \vec{\alpha})$

definen recursivamente a la funcion $R(f, g)$. Tambien diremos que $R(f, g)$ es obtenida por *recursion primitiva* a partir de f y g.

NOTA IMPOTANTE: No confundirse y pensar que $R(f, g)$ es el resultado de aplicar una funcion R al par (f, g), de hecho hasta el momento no hemos definido ninguna funcion R cuyo dominio sea cierto conjunto de pares ordenados de funciones!

Ejercicio 8: Justifique con palabras (a lo mariposa sabia) que la funcion $R(f, g)$ esta bien definida, es decir que dada una $(1+n+m)$-upla $(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ perteneciente a $\omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$, las ecuaciones de (1) y (2) determinan el valor $R(f, g)(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$

Notese que cuando $n = m = 0$, se tiene que $D_f = \{\Diamond\}$ y (1) y (2) se transforman en

(1) $R(f, g)(0) = f(\Diamond)$
(2) $R(f, g)(t + 1) = g(R(f, g)(t), t)$

Veamos algunos ejemplos

(E1) Tomemos $f = p_1^{1,0}$ y $g = Suc \circ p_1^{3,0}$. De la definicion de $R(f, g)$, obtenemos que su dominio es ω^2 y

$$R(f, g)(0, x_1) = p_1^{1,0}(x_1) = x_1$$
$$R(f, g)(t + 1, x_1) = \left(Suc \circ p_1^{3,0}\right)(R(f, g)(t, x_1), t, x_1) = R(f, g)(t, x_1) + 1$$

Es facil notar que la unica funcion que cumple estas dos ecuaciones es $\lambda t x_1 [t + x_1]$, lo cual implica que $\lambda t x_1 [t + x_1] = R\left(p_1^{1,0}, Suc \circ p_1^{3,0}\right)$

(E2) Sean $f = C_0^{0,0}$ y $g = p_1^{2,0}$. De la definicion de $R(f, g)$, obtenemos que su dominio es ω y

$$R(f, g)(0) = C_0^{0,0}(\Diamond) = 0$$
$$R(f, g)(t + 1) = p_1^{2,0}(R(f, g)(t), t) = R(f, g)(t)$$

Es facil notar que la unica funcion que cumple estas dos ecuaciones es $C_0^{1,0}$ lo cual implica que $C_0^{1,0} = R\left(C_0^{0,0}, p_1^{2,0}\right)$

Nota importante: En los dos ejemplos anteriores y en todos los casos que manejaremos en la Guia 5, en las aplicaciones del constructor de recursion primitiva (en sus cuatro formas) las funciones iniciales seran Σ-totales (es decir $S_1 = ... = S_n = \omega$ y $L_1 = ... = L_m = \Sigma^*$). Solo a partir de la Guia 6 veremos aplicaciones con funciones no Σ-totales

Recordemos que por definicion teniamos que $0^0 = 1$. Esto nos dice que $D_{\lambda xy[x^y]} = \omega \times \omega$.

Ejercicio 9: Encuentre f y g tales que:
(a) $R(f,g) = C_k^{n,m}$ (con $n,m,k \in \omega$ y $n \geq 1$)
(b) $R(f,g) = \lambda tx_1[t.x_1]$
(c) $R(f,g) = \lambda tx_1\alpha_1\alpha_2[t.x_1]$
(d) $R(f,g) = \lambda tx_1[(x_1)^t]$
(e) $R(f,g) = \lambda t[t!]$

Ejercicio 10: Explique la forma en la que aplicando los constructores de composicion y recursion primitiva a las funciones del conjunto inicial se puede obtener la funcion $\lambda x_1x_2\alpha_1[x_1!]$

Ejercicio 11: V o F o I, justifique.
(a) $\lambda tx_1 [t + x_1] = R\left(p_1^{1,0}, Suc \circ p_1^{2,0}\right)$
(b) $R(\lambda xy[0], p_2^{4,0}) = p_1^{3,0}$
(c) Si $f : \omega^2 \to \omega$ y $g : \omega^4 \to \omega$, entonces para cada $(x,y) \in \omega^2$, se tiene que $R(f,g)(2,x,y) = g \circ (g \circ [f \circ [p_2^{3,0}, p_3^{3,0}], p_1^{3,0}, p_2^{3,0}, p_3^{3,0}])(0,x,y)$

Como era de esperar, este caso del constructor de recursion primitiva preserva la computabilidad efectiva

Lema 4. *Sean*

$$f : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$$
$$g : \omega \times \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$$

con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ *y* $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ *conjuntos no vacios. Si* f *y* g *son* Σ-*efectivamente computables, entonces* $R(f,g)$ *lo es.*

Proof. Sean $\mathbb{P}_f$ y $\mathbb{P}_g$ procedimientos efectivos que computan a f y g, respectivamente. Es facil construir entonces un procedimiento efectivo que compute a $R(f,g)$. ∎

Ejercicio 12: Construya un procedimiento efectivo que compute a $R(f,g)$ en terminos de los procedimientos $\mathbb{P}_f$ y $\mathbb{P}_g$.

Recursion primitiva sobre variable numerica con valores alfabeticos. Ahora haremos el caso en el que la funcion definida recursivamente tiene imagen contenida en Σ^*. Es claro que entonces f y g tambien deberan tener imagen contenida en Σ^*. El unico detalle a tener en cuenta en la definicion de este caso es que si solo hicieramos estos cambios y pusieramos las mismas ecuaciones la funcion g no resultaria Σ-mixta en general (por que?). Para que la g de la recursion siga siendo Σ-mixta deberemos modificar levemente su dominio en relacion al caso ya hecho

Supongamos Σ es un alfabeto finito. Sean

$$f : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \Sigma^*$$
$$g : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times \Sigma^* \to \Sigma^*$$

con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacios. Definamos

$$R(f, g) : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \Sigma^*$$

de la siguiente manera

(1) $R(f, g)(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) = f(\vec{x}, \vec{\alpha})$
(2) $R(f, g)(t + 1, \vec{x}, \vec{\alpha}) = g(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, R(f, g)(t, \vec{x}, \vec{\alpha}))$

Diremos que $R(f, g)$ es obtenida por *recursion primitiva* a partir de f y g. Notese que cuando $m = n = 0$, se tiene que $D_f = \{\Diamond\}$ y (1) y (2) se transforman en

(1) $R(f, g)(0) = f(\Diamond)$
(2) $R(f, g)(t + 1) = g(t, R(f, g)(t))$

Veamos algunos ejemplos

(E1) Tomemos $f = C_\varepsilon^{0,1}$ y $g = \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ \left[p_3^{1,2}, p_2^{1,2}\right]$. De la definicion de $R(f, g)$, obtenemos que

$$R(f, g)(0, \alpha_1) = C_\varepsilon^{0,1}(\alpha_1) = \varepsilon$$
$$R(f, g)(t + 1, \alpha_1) = \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ \left[p_3^{1,2}, p_2^{1,2}\right](t, \alpha_1, R(f, g)(t, \alpha_1)) = R(f, g)(t, \alpha_1)\alpha_1$$

Es facil notar que la unica funcion que cumple estas dos ecuaciones es $\lambda t\alpha_1\,[{\alpha_1}^t]$, lo cual implica que $\lambda t\alpha_1\,[{\alpha_1}^t] = R\left(C_\varepsilon^{0,1}, \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ \left[p_3^{1,2}, p_2^{1,2}\right]\right)$

(E2) Sean $f = C_\varepsilon^{0,0}$ y $g = p_2^{1,1}$. De la definicion de $R(f, g)$, obtenemos que

$$R(f, g)(0) = C_\varepsilon^{0,0}(\Diamond) = \varepsilon$$
$$R(f, g)(t + 1) = p_2^{1,1}(t, R(f, g)(t)) = R(f, g)(t)$$

Es facil notar que la unica funcion que cumple estas dos ecuaciones es $C_\varepsilon^{1,0}$ lo cual implica que $C_\varepsilon^{1,0} = R\left(C_\varepsilon^{0,0}, p_2^{1,1}\right)$

Ejercicio 13: Sea $\Sigma = \{\%, @, ?\}$. Encuentre f y g tales que $\lambda t x_1[\%@\%\%\%?^t] = R(f, g)$

Ejercicio 14: V o F o I, justifique.

(a) $C_\varepsilon^{2,,2} = R\left(C_\varepsilon^{1,2}, C_\varepsilon^{2,3}\right)$
(b) $R\left(C_\varepsilon^{1,1}, C_\varepsilon^{1,1}\right) = C_\varepsilon^{1,1}$
(c) Si f, g son funciones Σ-mixtas tales que $R(f, g)$ esta definida y es de tipo $(1 + n, m, *)$, entonces f es de tipo $(n, m, *)$ y g es de tipo $(n, m + 1, *)$

La prueba del siguiente lema es completamente analoga a la del lema anterior que fue dejada como ejercicio.

Lema 5. *Sean*

$$f : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \Sigma^*$$
$$g : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times \Sigma^* \to \Sigma^*$$

con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ *y* $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ *conjuntos no vacios. Si* f *y* g *son* Σ*-efectivamente computables, entonces* $R(f, g)$ *lo es.*

Recursion primitiva sobre variable alfabetica con valores numericos. Ya vimos dos casos de recursion donde el parametro o variable que comanda la recursion es numerico. Daremos a continuacion un ejemplo de recursion en el cual el parametro principal es alfabetico. Sea $\Sigma = \{\%, @, ?\}$ y consideremos las siguientes ecuaciones:

(1) $R(\varepsilon) = 15$
(2) $R(\alpha\%) = R(\alpha) + 1$
(3) $R(\alpha @) = R(\alpha).5$
(4) $R(\alpha ?) = R(\alpha)^{20}$

Notese que las ecuaciones anteriores determinan una funcion $R : \Sigma^* \to \omega$. Esto es ya que R en ε debe valer 15 y sabiendo esto las ecuaciones (2), (3) y (4) (con $\alpha = \varepsilon$) nos dicen que

$$R(\%) = 16$$
$$R(@) = 75$$
$$R(?) = 15^{20}$$

por lo cual podemos aplicarlas nuevamente a dichas ecuaciones (con $\alpha \in \{\%, @, ?\}$) para calcular R en todas las palabras de longitud 2; y asi sucesivamente.

Daremos otro ejemplo un poco mas complicado para seguir aproximandonos al caso general. Nuevamente supongamos que $\Sigma = \{\%, @, ?\}$ y supongamos tenemos una funcion

$$f : \omega \times \Sigma^* \to \omega$$

y tres funciones

$$\mathcal{G}_\% : \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \omega$$
$$\mathcal{G}_@ : \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \omega$$
$$\mathcal{G}_? : \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \omega$$

Entonces hay una unica funcion $R : \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \omega$ la cual cumple las siguientes ecuaciones

(1) $R(x_1, \alpha_1, \varepsilon) = f(x_1, \alpha_1)$
(2) $R(x_1, \alpha_1, \alpha\%) = \mathcal{G}_\%(R(x_1, \alpha_1, \alpha), x_1, \alpha_1, \alpha)$
(3) $R(x_1, \alpha_1, \alpha @) = \mathcal{G}_@(R(x_1, \alpha_1, \alpha), x_1, \alpha_1, \alpha)$
(4) $R(x_1, \alpha_1, \alpha ?) = \mathcal{G}_?(R(x_1, \alpha_1, \alpha), x_1, \alpha_1, \alpha)$

Ejercicio 15: (a) Justifique que las ecuaciones anteriores determinan a la funcion R
(b) Por que el parametro α de la recursion es la ultima coordenada de R?

El ejemplo anterior nos muestra que para hacer recursion sobre parametro alfabetico nos hace falta "una funcion g por cada simbolo de Σ". Esto motiva la siguiente definicion. Dado un alfabeto Σ, una *familia Σ-indexada de funciones* sera una funcion $\mathcal{G}$ tal que $D_{\mathcal{G}} = \Sigma$ y para cada $a \in D_{\mathcal{G}}$ se tiene que $\mathcal{G}(a)$ es una funcion. Algunos ejemplos:

(E1) Sea $\mathcal{G}$ dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G} : \{\square, \%, \blacktriangle\} & \rightarrow & \{Suc, Pred\} \\ \square & \rightarrow & Suc \\ \% & \rightarrow & Suc \\ \blacktriangle & \rightarrow & Pred \end{array}$$

Claramente $\mathcal{G}$ es una familia $\{\square, \%, \blacktriangle\}$-indexada de funciones. Notar que

$$\mathcal{G} = \{(\square, Suc), (\%, Suc), (\blacktriangle, Pred)\}$$

Se tiene tambien por ejemplo que $\mathcal{G}(\%) = Suc$ por lo cual tambien es cierto que $\mathcal{G}(\%)(22) = 23$, etc.

(E2) Si Σ es un alfabeto no vacio, la funcion

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G} : \Sigma & \rightarrow & \{f : f \text{ es una funcion de } \Sigma^* \text{ en } \Sigma^*\} \\ a & \rightarrow & d_a \end{array}$$

es una familia Σ-indexada de funciones. Notar que

$$\mathcal{G} = \{(a, d_a) : a \in \Sigma\}$$

(E3) Sea $\Sigma = \{\square, \%, \blacktriangle\}$. Entonces $\{(\square, Suc), (\%, p_3^{2,4}), (\blacktriangle, \emptyset)\}$ es una familia $\{\square, \%, \blacktriangle\}$-indexada de funciones.

NOTACION: Si $\mathcal{G}$ es una familia Σ-indexada de funciones, entonces para $a \in \Sigma$, escribiremos $\mathcal{G}_a$ en lugar de $\mathcal{G}(a)$.

Ahora si podemos dar la definicion matematica precisa del primero de los dos casos de recursion primitiva sobre parametro alfabetico. Sea

$$f : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \rightarrow \omega$$

con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacios y sea $\mathcal{G}$ una familia Σ-indexada de funciones tal que

$$\mathcal{G}_a : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \omega$$

para cada $a \in \Sigma$. Definamos

$$R(f, \mathcal{G}) : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \omega$$

de la siguiente manera

(1) $R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \varepsilon) = f(\vec{x}, \vec{\alpha})$
(2) $R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha a) = \mathcal{G}_a(R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha), \vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$

Diremos que $R(f, \mathcal{G})$ es obtenida por *recursion primitiva* a partir de f y $\mathcal{G}$.

Notese que cuando $n = m = 0$, se tiene que $D_f = \{\Diamond\}$ y (1) y (2) se transforman en

(1) $R(f, \mathcal{G})(\varepsilon) = f(\Diamond)$
(2) $R(f, \mathcal{G})(\alpha a) = \mathcal{G}_a(R(f, \mathcal{G})(\alpha), \alpha)$

Ejercicio 16: Sea $\Sigma = \{\%, @, ?\}$. Encuentre f y $\mathcal{G}$ tales que

(a) $\lambda\alpha[|\alpha|] = R(f, \mathcal{G})$

(b) $\lambda\alpha_1\alpha[|\alpha_1| + |\alpha|_@] = R(f, \mathcal{G})$

Ejercicio 17: V o F o I, justifique.

(a) Sea $\Sigma = \{@, \&\}$. Se tiene que $\lambda\alpha\,[|\alpha|] = R\left(C_0^{0,0}, \{Suc \circ p_1^{1,1}, Suc \circ p_1^{1,1}\}\right)$

(b) $R\left(p_1^{2,0}, \{(@, p_1^{3,1}), (\&, p_2^{3,1})\}\right) = p_1^{2,1}$

Tenemos que

Lema 6. *Sea*

$$f : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$$

con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ *y* $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ *conjuntos no vacios y sea* $\mathcal{G}$ *una familia* Σ*-indexada de funciones tal que*

$$\mathcal{G}_a : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times \Sigma^* \to \omega$$

para cada $a \in \Sigma$*. Si* f *y cada* $\mathcal{G}_a$ *son* Σ*-efectivamente computables, entonces* $R(f, \mathcal{G})$ *lo es.*

Ejercicio 18: Haga la prueba del lema anterior para el caso $\Sigma = \{@, \blacktriangle\}$

Recursion primitiva sobre variable alfabetica con valores alfabeticos. Supongamos Σ es un alfabeto finito. Sea

$$f : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \Sigma^*$$

con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacios y sea $\mathcal{G}$ una familia Σ-indexada de funciones tal que

$$\mathcal{G}_a : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$$

para cada $a \in \Sigma$. Definamos

$$R(f, \mathcal{G}) : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times \Sigma^* \to \Sigma^*$$

de la siguiente manera

(1) $R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \varepsilon) = f(\vec{x}, \vec{\alpha})$

(2) $R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha a) = \mathcal{G}_a(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha, R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha))$.

Diremos que $R(f, \mathcal{G})$ es obtenida por *recursion primitiva* a partir de f y $\mathcal{G}$. Notese que cuando $n = m = 0$, se tiene que $D_f = \{\Diamond\}$ y (1) y (2) se transforman en

(1) $R(f, \mathcal{G})(\varepsilon) = f(\Diamond)$

(2) $R(f, \mathcal{G})(\alpha a) = \mathcal{G}_a(\alpha, R(f, \mathcal{G})(\alpha))$

Ejercicio 19: Encuentre f y $\mathcal{G}$ tales que $\lambda\alpha_1\alpha[\alpha_1\alpha] = R(f, \mathcal{G})$

Ejercicio 20: Sea $\Sigma = \{\triangle, \blacktriangle\}$. Diga que funcion conocida es $R(C_\varepsilon^{0,1}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}$ es dada por $\mathcal{G}_\triangle = d_\triangle \circ p_3^{0,3}$ y $\mathcal{G}_\blacktriangle = d_\blacktriangle \circ p_3^{0,3}$

Sea Σ un alfabeto finito. Dada $\gamma \in \Sigma^*$, definamos

$$\gamma^R = \begin{cases} [\gamma]_{|\gamma|}[\gamma]_{|\gamma|-1}...[\gamma]_1 & \text{si } |\gamma| \geq 1 \\ \varepsilon & \text{caso contrario} \end{cases}$$

La palabra γ^R es llamada la *resiproca* de γ. Para $a \in \Sigma$, definamos la funcion

$$\begin{array}{rcl} I_a : \Sigma^* & \rightarrow & \Sigma^* \\ \alpha & \rightarrow & a\alpha \end{array}$$

Recordemos que $\alpha^0 = \varepsilon$, para cada $\alpha \in \Sigma^*$, por lo cual tenemos que $D_{\lambda x\alpha[\alpha^x]} = \omega \times \Sigma^*$.

Ejercicio 21: Sea $\Sigma = \{\triangle, \blacktriangle\}$. Explique la forma en la que aplicando los constructores de composicion y recursion primitiva a las funciones del conjunto inicial se pueden obtener las siguientes funciones
(a) I_a
(b) $\lambda\alpha[\alpha^R]$
(c) $\lambda t\alpha[\alpha^t]$

Ejercicio 22: V o F o I, justifique.
(a) Sea $\Sigma = \{\triangle, \blacktriangle\}$. Entonces $R(p_1^{0,1}, \{(\triangle, p_3^{0,3}), (\blacktriangle, d_\blacktriangle \circ p_3^{0,3})\})(\triangle\blacktriangle, \triangle\blacktriangle) = \triangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle$
(b) $R(p_1^{0,1}, d_\alpha \circ p_3^{0,3}) = \lambda\alpha_1\alpha[\alpha_1\alpha]$

Tenemos que

Lema 7. *Sea*

$$f : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \rightarrow \Sigma^*$$

con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ *y* $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ *conjuntos no vacios y sea* $\mathcal{G}$ *una familia* Σ*-indexada de funciones tal que*

$$\mathcal{G}_a : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$$

para cada $a \in \Sigma$. *Si* f *y cada* $\mathcal{G}_a$ *son* Σ*-efectivamente computables, entonces* $R(f, \mathcal{G})$ *lo es.*

Cosmetica. Como hemos visto muchas veces para poder aplicar mas naturalmente algun lema, nos es util cambiar las variables que estan siendo usadas en la notacion lambda que describe alguna funcion. Por ejemplo si queremos ver que la funcion $\lambda xy\alpha[x + y]$ es de la forma $R(f, g)$, con f de tipo $(1, 1, \#)$ y g de tipo $(3, 1, \#)$, nos conviene escribir a la funcion $\lambda xy\alpha[x + y]$ en la forma $\lambda tx_1\alpha_1[t + x_1]$, donde se ve mejor cual es el parametro de la recursion primitiva y cual es el bloque fijo. Obviamente esto es posible ya que $\lambda xy\alpha[x + y] = \lambda tx_1\alpha_1[t + x_1]$. Esto da lugar a nuestra regla de cosmetica:

REGLA DE COSMETICA: Si ud tiene una expresion lambda $\lambda x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m [E]$ que denota una funcion f, entonces puede reemplazar en dicha expresion cada ocurrencia de una de las variables de la lista $x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m$ por una nueva variable (del mismo tipo, i.e. numerica o alfabetica) la cual no figure en la lista y el resultado sera una expresion lambda que tambien denota a f.

Por supuesto que dicha regla la puede aplicar varias veces para modificar su notacion lambda. Por ejemplo en el caso de $\lambda xy\alpha[x+y]$ aplicamos tres veces la regla y obtenemos $\lambda tx_1\alpha_1[t+x_1]$.

Funciones Σ-recursivas primitivas. Intuitivamente hablando ya sabemos que una funcion es Σ-recursiva primitiva si se puede obtener de las iniciales usando los constructores de composicion y recursion primitiva. Daremos ahora una definicion matematica de este concepto. Definamos los conjuntos $\mathrm{PR}_0^\Sigma \subseteq \mathrm{PR}_1^\Sigma \subseteq \mathrm{PR}_2^\Sigma \subseteq ... \subseteq \mathrm{PR}^\Sigma$ de la siguiente manera

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{PR}_0^\Sigma & = & \left\{Suc, Pred, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}\right\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \left\{p_j^{n,m} : 1 \leq j \leq n+m\right\} \\
\mathrm{PR}_{k+1}^\Sigma & = & \mathrm{PR}_k^\Sigma \cup \left\{f \circ [f_1, ..., f_r] : f, f_1, ..., f_r \in \mathrm{PR}_k^\Sigma,\ r \geq 1\right\} \cup \\
& & \qquad \left\{R(f,\mathcal{G}) : R(f,\mathcal{G}) \text{ esta definida y } \{f\} \cup \{\mathcal{G}_a : a \in \Sigma\} \subseteq \mathrm{PR}_k^\Sigma\right\} \cup \\
& & \qquad\qquad \left\{R(f,g) : R(f,g) \text{ esta definida y } f, g \in \mathrm{PR}_k^\Sigma\right\} \\
\mathrm{PR}^\Sigma & = & \bigcup_{k\geq 0} \mathrm{PR}_k^\Sigma
\end{array}
$$

Una funcion es llamada Σ-*recursiva primitiva* (Σ-*p.r.*) si pertenece a PR^Σ.

Proposición 8. *Si $f \in \mathrm{PR}^\Sigma$, entonces f es Σ-efectivamente computable.*

Ejercicio 23: Explique con palabras (a lo mariposa) por que es cierta la proposicion anterior

Algunas funciones Σ-recursivas primitivas. En los siguientes lemas se prueba bien

formalmente que varias funciones bien conocidas son Σ-primitivas recursivas. La mayoria de estas funciones ya fueron obtenidas usando los constructores de composicion y recursion primitiva, en los desarrollos anteriores o en los ejercicios.

Lema 9. *Sea Σ un alfabeto finito.*
(1) $\emptyset \in \mathrm{PR}^\Sigma$.
(2) $\lambda xy\,[x+y] \in \mathrm{PR}^\Sigma$.
(3) $\lambda xy\,[x.y] \in \mathrm{PR}^\Sigma$.
(4) $\lambda x\,[x!] \in \mathrm{PR}^\Sigma$.

Proof. (1) Notese que $\emptyset = Pred \circ C_0^{0,0} \in \mathrm{PR}_1^\Sigma$

(2) Notar que

$$
\begin{aligned}
\lambda xy\,[x+y]\,(0,x_1) &= x_1 = p_1^{1,0}(x_1) \\
\lambda xy\,[x+y]\,(t+1,x_1) &= \lambda xy\,[x+y]\,(t,x_1)+1 \\
&= \left(Suc \circ p_1^{3,0}\right)(\lambda xy\,[x+y]\,(t,x_1),t,x_1)
\end{aligned}
$$

lo cual implica que $\lambda xy\,[x+y] = R\left(p_1^{1,0}, Suc \circ p_1^{3,0}\right) \in \mathrm{PR}_2^\Sigma$.

(3) Primero note que

$$
\begin{aligned}
C_0^{1,0}(0) &= C_0^{0,0}(\Diamond) \\
C_0^{1,0}(t+1) &= C_0^{1,0}(t)
\end{aligned}
$$

lo cual implica que $C_0^{1,0} = R\left(C_0^{0,0}, p_1^{2,0}\right) \in \mathrm{PR}_1^\Sigma$. Tambien note que

$$\lambda tx\,[t.x] = R\left(C_0^{1,0}, \lambda xy\,[x+y] \circ \left[p_1^{3,0}, p_3^{3,0}\right]\right),$$

lo cual por (2) implica que $\lambda tx\,[t.x] \in \mathrm{PR}_4^\Sigma$.

(4) Note que

$$\lambda x\,[x!]\,(0) = 1 = C_1^{0,0}(\Diamond)$$
$$\lambda x\,[x!]\,(t+1) = \lambda x\,[x!]\,(t).(t+1),$$

lo cual implica que

$$\lambda x\,[x!] = R\left(C_1^{0,0}, \lambda xy\,[x.y] \circ \left[p_1^{2,0}, Suc \circ p_2^{2,0}\right]\right).$$

Ya que $C_1^{0,0} = Suc \circ C_0^{0,0}$, tenemos que $C_1^{0,0} \in \mathrm{PR}_1^\Sigma$. Por (3), tenemos que

$$\lambda xy\,[x.y] \circ \left[p_1^{2,0}, Suc \circ p_2^{2,0}\right] \in \mathrm{PR}_5^\Sigma,$$

obteniendo que $\lambda x\,[x!] \in \mathrm{PR}_6^\Sigma$. ∎

Ahora consideraremos dos funciones las cuales son obtenidas naturalmente por recursion primitiva sobre variable alfabetica.

Lema 10. *Supongamos* Σ *es un alfabeto finito.*

(a) $\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \in \mathrm{PR}^\Sigma$
(b) $\lambda\alpha\,[|\alpha|] \in \mathrm{PR}^\Sigma$

Proof. (a) Ya que

$$\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\,(\alpha_1, \varepsilon) = \alpha_1 = p_1^{0,1}(\alpha_1)$$
$$\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\,(\alpha_1, \alpha a) = d_a(\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\,(\alpha_1, \alpha)),\ a \in \Sigma$$

tenemos que $\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] = R\left(p_1^{0,1}, \mathcal{G}\right)$, donde $\mathcal{G}_a = d_a \circ p_3^{0,3}$, para cada $a \in \Sigma$.

(b) Ya que

$$\lambda\alpha\,[|\alpha|]\,(\varepsilon) = 0 = C_0^{0,0}(\Diamond)$$
$$\lambda\alpha\,[|\alpha|]\,(\alpha a) = \lambda\alpha\,[|\alpha|]\,(\alpha) + 1$$

tenemos que $\lambda\alpha\,[|\alpha|] = R\left(C_0^{0,0}, \mathcal{G}\right)$, donde $\mathcal{G}_a = Suc \circ p_1^{1,1}$, para cada $a \in \Sigma$. ∎

Lema 11. *Sea* Σ *un alfabeto finito. Entonces* $C_k^{n,m}, C_\alpha^{n,m} \in \mathrm{PR}^\Sigma$*, para cada* $n, m, k \geq 0$ *y* $\alpha \in \Sigma^*$.

Proof. (a) Note que $C_{k+1}^{0,0} = Suc \circ C_k^{0,0}$, lo cual implica $C_k^{0,0} \in \mathrm{PR}_k^\Sigma$, para $k \geq 0$. Tambien note que $C_{\alpha a}^{0,0} = d_a \circ C_\alpha^{0,0}$, lo cual dice que $C_\alpha^{0,0} \in \mathrm{PR}^\Sigma$, para $\alpha \in \Sigma^*$. Para ver que $C_k^{0,1} \in \mathrm{PR}^\Sigma$ notar que

$$C_k^{0,1}(\varepsilon) = k = C_k^{0,0}(\Diamond)$$
$$C_k^{0,1}(\alpha a) = C_k^{0,1}(\alpha) = p_1^{1,1}\left(C_k^{0,1}(\alpha), \alpha\right)$$

lo cual implica que $C_k^{0,1} = R\left(C_k^{0,0}, \mathcal{G}\right)$, con $\mathcal{G}_a = p_1^{1,1}$, $a \in \Sigma$. En forma similar podemos ver que $C_k^{1,0}, C_\alpha^{1,0}, C_\alpha^{0,1} \in \mathrm{PR}^\Sigma$. Supongamos ahora que $m > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} C_k^{n,m} &= C_k^{0,1} \circ p_{n+1}^{n,m} \\ C_\alpha^{n,m} &= C_\alpha^{0,1} \circ p_{n+1}^{n,m} \end{aligned}$$

de lo cual obtenemos que $C_k^{n,m}, C_\alpha^{n,m} \in \mathrm{PR}^\Sigma$. El caso $n > 0$ es similar. ■

Lema 12. *Sea* Σ *un alfabeto finito.*

(a) $\lambda xy\,[x^y] \in \mathrm{PR}^\Sigma$.
(b) $\lambda t\alpha\,[\alpha^t] \in \mathrm{PR}^\Sigma$.

Proof. (a) Note que

$$\lambda tx\left[x^t\right] = R\left(C_1^{1,0}, \lambda xy\,[x.y] \circ \left[p_1^{3,0}, p_3^{3,0}\right]\right) \in \mathrm{PR}^\Sigma.$$

O sea que $\lambda xy\,[x^y] = \lambda tx\,[x^t] \circ \left[p_2^{2,0}, p_1^{2,0}\right] \in \mathrm{PR}^\Sigma$.

(b) Note que

$$\lambda t\alpha\left[\alpha^t\right] = R\left(C_\varepsilon^{0,1}, \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ \left[p_3^{1,2}, p_2^{1,2}\right]\right) \in \mathrm{PR}^\Sigma.$$

■

Ejercicio 24: Sea $\Sigma = \{@, \%, \$\}$ y sea $\leq$ el orden total sobre Σ dado por $@ < \% < \$$. Pruebe que $s^{\leq}$, $\#^{\leq}$ y $*^{\leq}$ pertenecen a PR^Σ (esta probado en el apunte).

Ejercicio 25: Sea $\Sigma = \{\$, ?, @, \forall, \rightarrow, (\}$ y sea $S = \{\$, ?\}^*$. Pruebe que

$$\begin{array}{rcl} \chi_S^{\Sigma^*} : \Sigma^* & \rightarrow & \omega \\ \alpha & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \alpha \in S \\ 0 & \text{si } \alpha \notin S \end{array} \right. \end{array}$$

es Σ-p.r.

Recordemos que llamabamos *numerales* a los siguientes simbolos

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tambien recordemos que Num denotaba el conjunto de los numerales. Sea $Sig : Num^* \to Num^*$ definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
Sig(\varepsilon) &= 1 \\
Sig(\alpha 0) &= \alpha 1 \\
Sig(\alpha 1) &= \alpha 2 \\
Sig(\alpha 2) &= \alpha 3 \\
Sig(\alpha 3) &= \alpha 4 \\
Sig(\alpha 4) &= \alpha 5 \\
Sig(\alpha 5) &= \alpha 6 \\
Sig(\alpha 6) &= \alpha 7 \\
Sig(\alpha 7) &= \alpha 8 \\
Sig(\alpha 8) &= \alpha 9 \\
Sig(\alpha 9) &= Sig(\alpha)0
\end{aligned}$$

Definamos $Dec : \omega \to Num^*$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
Dec(0) &= \varepsilon \\
Dec(n+1) &= Sig(Dec(n))
\end{aligned}$$

Notese que para $n \in \mathbf{N}$, la palabra $Dec(n)$ es la notacion usual decimal de n. Notese que $Sig = R(C_1^{0,0}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}$ es la familia Num-indexada de funciones dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0 &= d_1 \circ p_2^{0,2} \\
\mathcal{G}_1 &= d_2 \circ p_2^{0,2} \\
\mathcal{G}_2 &= d_3 \circ p_2^{0,2} \\
\mathcal{G}_3 &= d_4 \circ p_2^{0,2} \\
\mathcal{G}_4 &= d_5 \circ p_2^{0,2} \\
\mathcal{G}_5 &= d_6 \circ p_2^{0,2} \\
\mathcal{G}_6 &= d_7 \circ p_2^{0,2} \\
\mathcal{G}_7 &= d_8 \circ p_2^{0,2} \\
\mathcal{G}_8 &= d_9 \circ p_2^{0,2} \\
\mathcal{G}_9 &= d_0 \circ p_1^{0,2}
\end{aligned}$$

por lo cual Sig es Num-p.r.. Tambien tenemos que $Dec = R(C_\varepsilon^{0,0}, Sig \circ p_2^{1,1})$ por lo cual Dec es Num-p.r.. En la batalla Godel vence a Neumman (Guia 8) utilizaremos el siguiente resultado.

Lema 13. *Sea Γ un alfabeto que contiene a Num. Entonces Dec es Γ-p.r..*

Proof. Sea $\widetilde{Sig}:\Gamma^*\to\Gamma^*$ definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\widetilde{Sig}(\varepsilon) &= 1\\
\widetilde{Sig}(\alpha 0) &= \alpha 1\\
\widetilde{Sig}(\alpha 1) &= \alpha 2\\
\widetilde{Sig}(\alpha 2) &= \alpha 3\\
\widetilde{Sig}(\alpha 3) &= \alpha 4\\
\widetilde{Sig}(\alpha 4) &= \alpha 5\\
\widetilde{Sig}(\alpha 5) &= \alpha 6\\
\widetilde{Sig}(\alpha 6) &= \alpha 7\\
\widetilde{Sig}(\alpha 7) &= \alpha 8\\
\widetilde{Sig}(\alpha 8) &= \alpha 9\\
\widetilde{Sig}(\alpha 9) &= Sig(\alpha)0\\
\widetilde{Sig}(\alpha a) &= \varepsilon,\text{ palabra } a\in\Gamma-Num
\end{aligned}$$

Notese que $\widetilde{Sig}=R(C_1^{0,0},\widetilde{\mathcal{G}})$, donde $\widetilde{\mathcal{G}}$ es la familia Γ-indexada de funciones dada por:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{G}}_0 &= d_1\circ p_2^{0,2}\\
\widetilde{\mathcal{G}}_1 &= d_2\circ p_2^{0,2}\\
\widetilde{\mathcal{G}}_2 &= d_3\circ p_2^{0,2}\\
\widetilde{\mathcal{G}}_3 &= d_4\circ p_2^{0,2}\\
\widetilde{\mathcal{G}}_4 &= d_5\circ p_2^{0,2}\\
\widetilde{\mathcal{G}}_5 &= d_6\circ p_2^{0,2}\\
\widetilde{\mathcal{G}}_6 &= d_7\circ p_2^{0,2}\\
\widetilde{\mathcal{G}}_7 &= d_8\circ p_2^{0,2}\\
\widetilde{\mathcal{G}}_8 &= d_9\circ p_2^{0,2}\\
\widetilde{\mathcal{G}}_9 &= d_0\circ p_1^{0,2}\\
\widetilde{\mathcal{G}}_a &= C_\varepsilon^{0,2},\text{ para } a\in\Gamma-Num
\end{aligned}$$

por lo cual $\widetilde{Sig}$ es Γ-p.r. (ojo que aqui las funciones $p_2^{0,2}$, $C_\varepsilon^{0,2}$, $C_1^{0,0}$ y $d_0,d_1,d_2,...,d_9$ son relativas al alfabeto Γ). Pero notese que

$$\begin{aligned}
Dec(0) &= \varepsilon\\
Dec(n+1) &= \widetilde{Sig}(Dec(n)),\text{ para cada } n\in\omega
\end{aligned}$$

lo cual nos dice que $Dec=R(C_\varepsilon^{0,0},\widetilde{Sig}\circ p_2^{1,1})$ por lo cual Dec es Γ-p.r. (de nuevo, aqui las funciones $C_\varepsilon^{0,0}$ y $p_2^{1,1}$ son relativas al alfabeto Γ). ■ Dados $x,y\in\omega$, definamos

$$x\dot{-}y=\max(x-y,0).$$

Lema 14. *Se tiene*

(a) $\lambda xy\left[x\dot{-}y\right]\in \mathrm{PR}^{\Sigma}$
(b) $\lambda xy\left[\max(x,y)\right]\in \mathrm{PR}^{\Sigma}$
(c) $\lambda xy\left[x=y\right]\in \mathrm{PR}^{\Sigma}$
(d) $\lambda xy\left[x\leq y\right]\in \mathrm{PR}^{\Sigma}$
(e) $\lambda \alpha\beta\left[\alpha=\beta\right]\in \mathrm{PR}^{\Sigma}$

Proof. (a) Primero notar que $\lambda x\left[x\dot{-}1\right]=R\left(C_0^{0,0},p_2^{2,0}\right)\in \mathrm{PR}^{\Sigma}$. Tambien note que

$$\lambda tx\left[x\dot{-}t\right]=R\left(p_1^{1,0},\lambda x\left[x\dot{-}1\right]\circ p_1^{3,0}\right)\in \mathrm{PR}^{\Sigma}.$$

O sea que $\lambda xy\left[x\dot{-}y\right]=\lambda tx\left[x\dot{-}t\right]\circ\left[p_2^{2,0},p_1^{2,0}\right]\in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

(b) Note que $\lambda xy\left[\max(x,y)\right]=\lambda xy\left[x+(y\dot{-}x)\right]$.
(c) Note que $\lambda xy\left[x=y\right]=\lambda xy\left[1\dot{-}((x\dot{-}y)+(y\dot{-}x))\right]$.
(d) Note que $\lambda xy\left[x\leq y\right]=\lambda xy\left[1\dot{-}(x\dot{-}y)\right]$.
(e) Sea $\leq$ un orden total sobre Σ. Ya que

$$\alpha=\beta \text{ sii } \#^{\leq}(\alpha)=\#^{\leq}(\beta)$$

tenemos que

$$\lambda\alpha\beta\left[\alpha=\beta\right]=\lambda xy\left[x=y\right]\circ\left[\#^{\leq}\circ p_1^{0,2},\#^{\leq}\circ p_2^{0,2}\right]$$

lo cual nos dice que $\lambda\alpha\beta\left[\alpha=\beta\right]$ es Σ-p.r. ■

Ejercicio 26: Complete las pruebas de (b), (c), (d) y (e) del lema anterior

Ejercicio 27: Sea Σ un alfabeto finito.

(a) $\lambda x[x$ es par$]$ es Σ-p.r..
(b) $\lambda xyz\alpha\beta\gamma[x.y+\max(x,|\alpha|)^{|\beta|}]$ es Σ-p.r.
(c) $\lambda x\alpha\left[x=|\alpha|\right]$ es Σ-p.r..
(d) $\lambda xy\alpha\beta\left[\alpha^{x}=\beta\right]$ es Σ-p.r..

Operaciones logicas entre predicados. Dados predicados $P:S\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\rightarrow\omega$ y $Q:S\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\rightarrow\omega$, con el mismo dominio, definamos nuevos predicados $(P\vee Q)$, $(P\wedge Q)$ y $\neg P$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcl}(P\vee Q):S & \rightarrow & \omega\\ (\vec{x},\vec{\alpha}) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{ll}1 & \text{si } P(\vec{x},\vec{\alpha})=1 \text{ o } Q(\vec{x},\vec{\alpha})=1\\ 0 & \text{caso contrario}\end{array}\right.\\ (P\wedge Q):S & \rightarrow & \omega\\ (\vec{x},\vec{\alpha}) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{ll}1 & \text{si } P(\vec{x},\vec{\alpha})=1 \text{ y } Q(\vec{x},\vec{\alpha})=1\\ 0 & \text{caso contrario}\end{array}\right.\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\neg P:S & \rightarrow & \omega\\ (\vec{x},\vec{\alpha}) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{ll}1 & \text{si } P(\vec{x},\vec{\alpha})=0\\ 0 & \text{si } P(\vec{x},\vec{\alpha})=1\end{array}\right.\end{array}$$

Lema 15. *Si $P:D_P\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\rightarrow\omega$ y $Q:D_Q\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\rightarrow\omega$ son predicados Σ-p.r. tales que $D_P=D_Q$, entonces $(P\vee Q)$, $(P\wedge Q)$ y $\neg P$ son Σ-p.r.*

Proof. Note que

$$\neg P = \lambda xy\left[x\dot{-}y\right] \circ [C_1^{n,m}, P]$$
$$(P \wedge Q) = \lambda xy\,[x.y] \circ [P, Q]$$
$$(P \vee Q) = \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

■

Ejercicio 28: V o F o I, justifique.
(a) Si P_1, P_2, P_3 son predicados Σ-p.r. y $D_{P_1} = D_{P_2} = D_{P_3}$, entonces el predicado $(P_1 \vee P_2 \wedge P_3)$ es Σ-p.r.
(b) Sea Σ un alfabeto finito. Entonces $\lambda x\alpha\beta\,[x = |\alpha| \wedge \alpha = \beta] = (\lambda x\alpha\,[x = |\alpha|] \wedge \lambda\alpha\beta\,[\alpha = \beta])$
(c) Sea Σ un alfabeto finito. Entonces $(\lambda x\,[x = 1] \wedge \lambda\alpha\,[\alpha = \varepsilon])(2, \varepsilon) = 0$
(d) Si $S, T \subseteq \omega$, entonces $\chi_{S\times T}^{\omega\times\omega} = (\chi_S^{\omega} \wedge \chi_T^{\omega})$

Conjuntos Σ-recursivos primitivos. Un conjunto Σ-mixto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es llamado *Σ-recursivo primitivo* si su funcion caracteristica $\chi_S^{\omega^n\times\Sigma^{*m}}$ es Σ-p.r.. Notese que $\chi_S^{\omega^n\times\Sigma^{*m}} = \lambda\vec{x}\vec{\alpha}[(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S]$.

Ejercicio 29: Sea $\Sigma = \{@, !\}$. Pruebe que los siguientes conjuntos son Σ-p.r.
(a) ω
(b) Σ^*
(c) $\{(x, y) \in \omega^2 : x = y\}$
(d) $\{(x, \alpha) \in \omega \times \Sigma^* : x = |\alpha|\}$
(e) $\{x \in \omega : x \text{ es par}\}$
(f) $\{(x, y, \alpha, \beta, \gamma) \in \omega^2 \times \Sigma^{*3} : x \leq |\gamma|\}$

Lema 16. *Si $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son Σ-p.r., entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 - S_2$ lo son.*

Proof. Note que

$$\chi_{S_1\cup S_2}^{\omega^n\times\Sigma^{*m}} = (\chi_{S_1}^{\omega^n\times\Sigma^{*m}} \vee \chi_{S_2}^{\omega^n\times\Sigma^{*m}})$$
$$\chi_{S_1\cap S_2}^{\omega^n\times\Sigma^{*m}} = (\chi_{S_1}^{\omega^n\times\Sigma^{*m}} \wedge \chi_{S_2}^{\omega^n\times\Sigma^{*m}})$$
$$\chi_{S_1-S_2}^{\omega^n\times\Sigma^{*m}} = \lambda xy\left[x\dot{-}y\right] \circ \left[\chi_{S_1}^{\omega^n\times\Sigma^{*m}}, \chi_{S_2}^{\omega^n\times\Sigma^{*m}}\right]$$

■

Ejercicio 30: Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es finito, entonces S es Σ-p.r. Haga el caso $n = m = 1$. (Hint: haga el caso en que S tiene un solo elemento y luego aplique el lema anterior).
Ejercicio 31: Sea Σ un alfabeto finito.
(a) Pruebe que Σ es Σ-p.r.
(b) Pruebe que $\Sigma^* - \{\varepsilon\}$ es Σ-p.r.
(c) Pruebe que $\Sigma^* - (\{\varepsilon\} \cup \Sigma)$ es Σ-p.r.
(d) Pruebe que $\omega - \{0, 1\}$ es Σ-p.r.
(e) Pruebe que $\{(x, y, \alpha, \beta, \gamma) \in \omega^2 \times \Sigma^{*3} : \alpha \neq \varepsilon \vee x \leq |\gamma|\}$ es Σ-p.r.
(f) Pruebe que $\{(x, \alpha, \beta) : |\alpha| > 6\}$ es Σ-p.r.

El siguiente lema caracteriza cuando un conjunto rectangular es Σ-p.r..

Lema 17. *Supongamos $S_1,...,S_n \subseteq \omega$, $L_1,...,L_m \subseteq \Sigma^*$ son conjuntos no vacios. Entonces $S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$ es Σ-p.r. sii $S_1,...,S_n,L_1,...,L_m$ son Σ-p.r.*

Ejercicio 32: Haga la prueba del lema anterior para el caso de $n = m = 1$ (en el apunte esta la prueba general)

Dada una funcion f y un conjunto $S \subseteq D_f$, usaremos $f|_S$ para denotar la *restriccion* de f al conjunto S, i.e. $f|_S = f \cap (S \times I_f)$. Notese que $f|_S$ es la funcion dada por

$$D_{f|_S} = S$$
$$f|_S(e) = f(e), \text{ para cada } e \in S$$

Notese que cualesquiera sea la funcion f tenemos que $f|_\emptyset = \emptyset$ y $f|_{D_f} = f$.

Lema 18. *Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-p.r., donde $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$. Si $S \subseteq D_f$ es Σ-p.r., entonces $f|_S$ es Σ-p.r..*

Proof. Supongamos $O = \Sigma^*$. Entonces

$$f|_S = \lambda x\alpha\left[\alpha^x\right] \circ \left[Suc \circ Pred \circ \chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}, f\right]$$

lo cual nos dice que $f|_S$ es Σ-p.r.. El caso $O = \omega$ es similar usando $\lambda xy\left[x^y\right]$ en lugar de $\lambda x\alpha\left[\alpha^x\right]$. ■

Usando el lema anterior en combinacion con el Lema 15 podemos ver que muchos predicados usuales son Σ-p.r.. Por ejemplo sea

$$P = \lambda x\alpha\beta\gamma\left[x = |\gamma| \wedge \alpha = \gamma^{Pred(|\beta|)}\right].$$

Notese que

$$D_P = \omega \times \Sigma^* \times (\Sigma^* - \{\varepsilon\}) \times \Sigma^*$$

Ademas D_P es Σ-p.r. ya que

$$\chi_{D_P}^{\omega \times \Sigma^{*3}} = \neg\lambda\alpha\beta\left[\alpha = \beta\right] \circ \left[p_3^{1,3}, C_\varepsilon^{1,3}\right]$$

Tambien note que los predicados

$$P_1 = \lambda x\alpha\beta\gamma\left[x = |\gamma|\right]$$
$$P_2 = \lambda x\alpha\beta\gamma\left[\alpha = \gamma^{Pred(|\beta|)}\right]$$

son Σ-p.r. ya que pueden obtenerse componiendo funciones Σ-p.r.. Un error seria pensar que $P = (P_1 \wedge P_2)$ ya que P_1 y P_2 tienen dominios distintos por lo cual no esta definido $(P_1 \wedge P_2)$. Sin envargo tenemos que $P = (P_1|_{D_P} \wedge P_2)$, lo cual nos dice que P es Σ-p.r. ya que $P_1|_{D_P}$ es Σ-p.r. por el Lema 18 y por lo tanto podemos aplicar el Lema 15

Ejercicio 33: Sea $\Sigma = \{@, !\}$. Sea $P = \lambda xy\alpha\beta\gamma\left[Pred(Pred(|\beta|)) \neq 6 \wedge \alpha^x = \beta\right]$
(a) Encuentre por definicion de notacion lambda el dominio de P
(b) Pruebe que P es Σ-p.r.

Aceptaremos sin prueba el siguiente resultado (ver el apunte por una prueba)

Lema 19. *Sean $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ y $n, m \in \omega$. Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-p.r., entonces existe una funcion Σ-p.r. $\bar{f} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, tal que $f = \bar{f}|_{D_f}$.*

Ahora podemos probar una proposicion muy importante.

Proposición 20. *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Se tiene que S es Σ-p.r. sii S es el dominio de alguna funcion Σ-p.r..*

Proof. ($\Rightarrow$) Note que $S = D_{Pred \circ \chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}}$.

($\Leftarrow$) Probaremos por induccion en k que D_F es Σ-p.r., para cada $F \in \mathrm{PR}_k^\Sigma$. El caso $k = 0$ es facil. Supongamos el resultado vale para un k fijo y supongamos $F \in \mathrm{PR}_{k+1}^\Sigma$. Veremos entonces que D_F es Σ-p.r.. Hay varios casos. Consideremos primero el caso en que $F = R(f, g)$, donde

$$\begin{aligned} &f : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \Sigma^* \\ &g : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times \Sigma^* \to \Sigma^*, \end{aligned}$$

con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacios y $f, g \in \mathrm{PR}_k^\Sigma$. Notese que por definicion de $R(f, g)$, tenemos que

$$D_F = \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m.$$

Por hipotesis inductiva tenemos que $D_f = S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$ es Σ-p.r., lo cual por el Lema 17 nos dice que los conjuntos $S_1, ..., S_n$, $L_1, ..., L_m$ son Σ-p.r.. Ya que ω es Σ-p.r., el Lema 17 nos dice que D_F es Σ-p.r..

Los otros casos de recursion primitiva son dejados al lector.

Supongamos ahora que $F = g \circ [g_1, ..., g_r]$ con $g, g_1, ..., g_r \in \mathrm{PR}_k^\Sigma$. Si $F = \emptyset$, entonces es claro que $D_F = \emptyset$ es Σ-p.r.. Supongamos entonces que F no es la funcion $\emptyset$. Tenemos entonces que r es de la forma $n + m$ y

$$\begin{aligned} &g : D_g \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O \\ &g_i : D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega,\ i = 1, ..., n \\ &g_i : D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \Sigma^*, i = n + 1, ..., n + m \end{aligned}$$

con $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ y $k, l \in \omega$. Por Lema 19, hay funciones Σ-p.r. $\bar{g}_1, ..., \bar{g}_{n+m}$ las cuales son Σ-totales y cumplen

$$g_i = \bar{g}_i|_{D_{g_i}}, \text{ para } i = 1, ..., n + m.$$

Por hipotesis inductiva los conjuntos D_g, D_{g_i}, $i = 1, ..., n + m$, son Σ-p.r. y por lo tanto

$$S = \bigcap_{i=1}^{n+m} D_{g_i}$$

lo es. Notese que

$$\chi_{D_F}^{\omega^k \times \Sigma^{*l}} = (\chi_{D_g}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} \circ [\bar{g}_1, ..., \bar{g}_{n+m}] \wedge \chi_S^{\omega^k \times \Sigma^{*l}})$$

lo cual nos dice que D_F es Σ-p.r.. ■

Lema de division por casos para funciones Σ-p.r. Una observacion interesante es que si $f_i : D_{f_i} \to O$, $i = 1, ..., k$, son funciones tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces $f_1 \cup ... \cup f_k$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl} D_{f_1} \cup ... \cup D_{f_k} & \to & O \\ e & \to & \left\{ \begin{array}{ll} f_1(e) & \text{si } e \in D_{f_1} \\ \vdots & \vdots \\ f_k(e) & \text{si } e \in D_{f_k} \end{array} \right. \end{array}$$

Lema 21. *Sean $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ y $n, m \in \omega$. Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, $i = 1, ..., k$, son funciones Σ-p.r. tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces $f_1 \cup ... \cup f_k$ es Σ-p.r..*

Proof. Supongamos $O = \Sigma^*$ y $k = 2$. Sean

$$\bar{f}_i : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*, i = 1, 2,$$

funciones Σ-p.r. tales que $\bar{f}_i|_{D_{f_i}} = f_i$, $i = 1, 2$ (Lema 19). Por la Proposicion 20 los conjuntos D_{f_1} y D_{f_2} son Σ-p.r. y por lo tanto lo es $D_{f_1} \cup D_{f_2}$. Ya que

$$f_1 \cup f_2 = \left(\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ \left[\lambda x\alpha\,[\alpha^x] \circ \left[\chi_{D_{f_1}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}, \bar{f}_1 \right], \lambda x\alpha\,[\alpha^x] \circ \left[\chi_{D_{f_2}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}, \bar{f}_2 \right] \right] \right) |_{D_{f_1} \cup D_{f_2}}$$

tenemos que $f_1 \cup f_2$ es Σ-p.r..

El caso $k > 2$ puede probarse por induccion ya que

$$f_1 \cup ... \cup f_k = (f_1 \cup ... \cup f_{k-1}) \cup f_k.$$

∎

CONSEJO IMPORTANTE: Si uno quiere usar el lema de division por casos para probar que una funcion f es Σ-p.r., entonces lo primero que hay que hacer, antes de ver que algo sea Σ-p.r. o no, es (a lo mariposa) definir correctamente funciones $f_1, ..., f_k$ tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$ y ademas $f_1 \cup ... \cup f_k = f$. Consejos para encontrar dichas funciones:

(1) Determinar el k, es decir, k es justamente la cantidad de "casos" en la descripcion de f
(2) Para cada "caso" de la descripcion de f, asociar un subconjunto del dominio de f el cual sea justamente definido por la propiedad correspondiente a ese caso. Ojo que dijimos subconjunto de D_f, no confundir los tipos!! (a veces los casos se describen usando no todas las variables de las cuales depende la funcion)
(3) Notar que los subconjuntos $S_1, ..., S_k$ asi definidos deben ser disjuntos de a pares y unidos deben dar el dominio de f
(4) Para cada i defina f_i de la siguiente manera:
    (a) dominio de $f_i = S_i$
    (b) regla de f_i dada por la regla que describe f para el caso i-esimo
(5) En general suele suceder que f_i es la restriccion a S_i de una funcion con dominio mas amplio y se prueba entonces que tanto dicha funcion como S_i son Σ-p.r., resultando asi que f_i es Σ-p.r.

Ejercicio 34: Sea $\Sigma = \{@, !, \%\}$. Pruebe que f es Σ-p.r..

(a) $$\begin{array}{rcl} f:\omega\times\Sigma^* & \rightarrow & \omega \\ (x,\alpha) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{ll} |\alpha|.x^2 & \text{si } x+|\alpha| \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } x+|\alpha| \text{ es par}\end{array}\right.\end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcl} f:\{10,11,17\}\times\Sigma^+ & \rightarrow & \omega \\ (x,\alpha) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{ll} Pred(x) & \text{si } x \text{ es impar} \\ |\alpha| & \text{si } x \text{ es par}\end{array}\right.\end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcl} f:\mathbf{N}\times\Sigma^+ & \rightarrow & \omega \\ (x,\alpha) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{ll} x^2 & \text{si } x+|\alpha| \text{ es par} \\ 0 & \text{si } x+|\alpha| \text{ es impar}\end{array}\right.\end{array}$$

(d) $$\begin{array}{rcl} f:\{(x,y,\alpha):x\leq y\} & \rightarrow & \omega \\ (x,y,\alpha) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{ll} x^2 & \text{si } |\alpha|\leq y \\ 0 & \text{si } |\alpha|>y\end{array}\right.\end{array}$$

(Explicado en video colgado en granlogico.com)

(e) $$\begin{array}{rcl} f:\{1,2,3,4,5\}\times\mathbf{N}\times\{@,\%\}^* & \rightarrow & \Sigma^* \\ (x,y,\alpha) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{ll} \alpha^2 & \text{si } \alpha=@@ \\ !!! & \text{si } \alpha\neq @@ \wedge |\alpha|>y \\ \alpha^{x+y} & \text{si } \alpha\neq @@ \wedge |\alpha|\leq y\end{array}\right.\end{array}$$

Ejercicio 35: Sea $F:\omega\rightarrow\omega$ dada por

$$\begin{aligned} F(0) &= 2 \\ F(1) &= 2^2 \\ F(2) &= (2^2)^3 \\ F(3) &= ((2^2)^3)^2 \\ F(4) &= (((2^2)^3)^2)^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pruebe que F es Σ-p.r..

Ejercicio 36: Sean $f_1,f_2:\omega\rightarrow\omega$ funciones Σ-p.r.. Sea $F:\omega\rightarrow\omega$ dada por

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= f_1(0) \\ F(2) &= f_2(f_1(0)) \\ F(3) &= f_1(f_2(f_1(0))) \\ F(4) &= f_2(f_1(f_2(f_1(0)))) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pruebe que F es Σ-p.r.. Obtenga el ejercicio anterior a partir de este resultado.

Usaremos el lema de division por casos para probar que la funcion $\lambda i\alpha\,[[\alpha]_i]$ es Σ-p.r.. Recordemos que dados $i\in\omega$ y $\alpha\in\Sigma^*$, definimos

$$[\alpha]_i=\left\{\begin{array}{ll} i\text{-esimo elemento de } \alpha & \text{si } 1\leq i\leq|\alpha| \\ \varepsilon & \text{caso contrario}\end{array}\right.$$

Notese que $D_{\lambda i\alpha[[\alpha]_i]}=\omega\times\Sigma^*$.

Lema 22. *$\lambda i\alpha\left[[\alpha]_i\right]$ es Σ-p.r..*

Proof. Supongamos $\Sigma = \{@, !\}$. Note que

$$[\varepsilon]_i = \varepsilon$$
$$[\alpha @]_i = \begin{cases} [\alpha]_i & \text{si } i \neq |\alpha| + 1 \\ @ & \text{si } i = |\alpha| + 1 \end{cases}$$
$$[\alpha !]_i = \begin{cases} [\alpha]_i & \text{si } i \neq |\alpha| + 1 \\ ! & \text{si } i = |\alpha| + 1 \end{cases}$$

lo cual dice que $\lambda i\alpha\left[[\alpha]_i\right] = R\left(C_\varepsilon^{1,0}, \mathcal{G}\right)$, donde $\mathcal{G}_a : \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ es dada por

$$\mathcal{G}_a(i, \alpha, \zeta) = \begin{cases} \zeta & \text{si } i \neq |\alpha| + 1 \\ a & \text{si } i = |\alpha| + 1 \end{cases}$$

para cada $a \in \Sigma$. O sea que solo resta probar que cada $\mathcal{G}_a$ es Σ-p.r.. Veamos que $\mathcal{G}_@$ es Σ-p.r.. Primero note que los conjuntos

$$S_1 = \{(i, \alpha, \zeta) \in \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* : i \neq |\alpha| + 1\}$$
$$S_2 = \{(i, \alpha, \zeta) \in \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* : i = |\alpha| + 1\}$$

son Σ-p.r. ya que

$$\chi_{S_1}^{\omega \times \Sigma^* \times \Sigma^*} = \lambda xy\,[x \neq y] \circ \left[p_1^{1,2}, Suc \circ \lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p_2^{1,2}\right]$$
$$\chi_{S_2}^{\omega \times \Sigma^* \times \Sigma^*} = \lambda xy\,[x = y] \circ \left[p_1^{1,2}, Suc \circ \lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p_2^{1,2}\right]$$

Notese que por el Lema 18 tenemos que $p_3^{1,2}|_{S_1}$ y $C_@^{1,2}|_{S_2}$ son Σ-p.r.. Ademas

$$\mathcal{G}_@ = p_3^{1,2}|_{S_1} \cup C_@^{1,2}|_{S_2}$$

por lo cual el Lema 21 nos dice que $\mathcal{G}_@$ es Σ-p.r.. Analogamente se prueba que $\mathcal{G}_!$ es Σ-p.r.. ■

Sumatoria, productoria y concatenatoria de funciones Σ-p.r. Sea Σ un alfabeto finito. Sea $f : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$, con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Para $x, y \in \omega$ y $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$, definamos

$$\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > y \\ f(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) + f(x+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) + ... + f(y, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq y \end{cases}$$
$$\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > y \\ f(x, \vec{x}, \vec{\alpha}).f(x+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) .... f(y, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

En forma similar, cuando $I_f \subseteq \Sigma^*$, definamos

$$\underset{t=x}{\overset{t=y}{\subset}} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } x > y \\ f(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) f(x+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) .... f(y, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

Note que, en virtud de la definicion anterior, el dominio de las funciones

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] \qquad \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] \qquad \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\subset_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$$

es $\omega \times \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$.

Dejamos al lector que analice en las consideraciones de recien el caso $n = m = 0$ (es decir cuando $D_f = \omega$).

Lema 23 (Lema de la sumatoria)**.** *Sea Σ un alfabeto finito.*

(a) *Si $f : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ es Σ-p.r., con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces las funciones $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ y $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ son Σ-p.r.*

(b) *Si $f : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \Sigma^*$ es Σ-p.r., con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces la funcion $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\subset_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ es Σ-p.r.*

Proof. (a) Sea $G = \lambda tx\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=t} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$. Ya que

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=y} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] = G \circ \left[p_2^{n+2,m}, p_1^{n+2,m}, p_3^{n+2,m}, ..., p_{n+m+2}^{n+2,m}\right]$$

solo tenemos que probar que G es Σ-p.r.. Primero note que

$$G(0, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ f(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$G(t+1, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ G(t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases}$$

O sea que si definimos

$$\begin{array}{rcl} h : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m & \to & \omega \\ (x, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \to & \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ f(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g : \omega^3 \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m & \to & \omega \\ (A, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \to & \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases} \end{array}$$

tenemos que $G = R(h, g)$. Es decir que solo nos falta probar que h y g son Σ-p.r.. Notese que

$$h = C_0^{n+1,m}|_{D_1} \cup \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[f(0, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]|_{D_2}$$
$$g = C_0^{n+3,m}|_{H_1} \cup \lambda Atx\vec{x}\vec{\alpha}\left[A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha})\right])|_{H_2}$$

asique para ver que h y g son Σ-p.r. podemos aplicar el Lema 21 una ves que hayamos visto que las funciones

$$\begin{array}{ll} C_0^{n+1,m}|_{D_1} & \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[f(0, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]|_{D_2} \\ C_0^{n+3,m}|_{H_1} & \lambda Atx\vec{x}\vec{\alpha}\left[A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha})\right])|_{H_2} \end{array}$$

son Σ-p.r.. Es claro que $C_0^{n+1,m}$ y $C_0^{n+3,m}$ son Σ-p.r.. Tambien notese que

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[f(0, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] = f \circ \left[C_0^{n+1,m}, p_2^{n+1,m}, p_3^{n+1,m}, ..., p_{n+1+m}^{n+1,m}\right]$$

$$\lambda Atx\vec{x}\vec{\alpha}\left[A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]) = \lambda xy[x+y] \circ \left[p_1^{n+3,m}, f \circ \left[Suc \circ p_2^{n+3,m}, p_4^{n+3,m}, ..., p_{n+3+m}^{n+3,m}\right]\right]$$

lo cual, ya que f es Σ-p.r., nos dice que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[f(0,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$ y $\lambda Atx\vec{x}\vec{\alpha}\left[A+f(t+1,\vec{x},\vec{\alpha})\right])$ son Σ-p.r.. O sea que el Lema 18 nos dice que solo nos resta probar que

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m : x > 0\} \\
D_2 &= \{(x,\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m : x = 0\} \\
H_1 &= \left\{(z,t,x,\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m : x > t+1\right\} \\
H_2 &= \left\{(z,t,x,\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m : x \leq t+1\right\}.
\end{aligned}$$

son Σ-p.r.. Veamos por ejemplo que H_1 lo es. Es decir debemos ver que $\chi_{H_1}^{\omega^{3+n}\times\Sigma^{*m}}$ es Σ-p.r.. Ya que f es Σ-p.r. tenemos que $D_f = \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$ es Σ-p.r., lo cual por el Lema 17 nos dice que los conjuntos $S_1, ..., S_n$, $L_1, ..., L_m$ son Σ-p.r.. Ya que ω es Σ-p.r., el Lema 17 nos dice que

$$R = \omega^3 \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$$

es Σ-p.r.. Notese que

$$\chi_{H_1}^{\omega^{3+n}\times\Sigma^{*m}} = (\chi_{R}^{\omega^{3+n}\times\Sigma^{*m}} \wedge \lambda ztx\vec{x}\vec{\alpha}\left[x > t+1\right])$$

por lo cual $\chi_{H_1}^{\omega^{3+n}\times\Sigma^{*m}}$ es Σ-p.r. ya que es la conjuncion de dos predicados Σ-p.r. La prueba de que D_1, D_2 y H_2 son Σ-p.r. es similar. ■

Nota: Aceptaremos sin prueba (b) y el caso de la productoria en (a). Las pruebas son muy similares a la dada para la sumatoria.

Veamos un ejemplo de como se puede aplicar el lema anterior. Sea $F = \lambda yx_1\left[\sum_{t=0}^{t=y}(x_1)^t\right]$. Es claro que $D_F = \omega^2$. Para ver que F es Σ-p.r. aplicaremos el lema anterior por lo cual es importante encontrar la f adecuada a la cual se le aplicara el lema. Tomemos $f = \lambda tx_1[(x_1)^t]$. Claramente f es Σ-p.r. por lo cual el lema anterior nos dice que

$$G = \lambda xyx_1\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t,x_1)\right] = \lambda xyx_1\left[\sum_{t=x}^{t=y}(x_1)^t\right]$$

es Σ-p.r.. Notar que G no es la funcion F pero es en algun sentido "mas amplia" que F ya que tiene una variable mas y se tiene que $F(y,x_1) = G(0,y,x_1)$, para cada $y, x_1 \in \omega$. Es facil ver que

$$F = G \circ \left[C_0^{2,0}, p_1^{2,0}, p_2^{2,0}\right]$$

por lo cual F es Σ-p.r..

Haga los siguientes ejercicios aplicando el lema anterior. No caiga en la tentacion de hacerlos aplicando recursion primitiva ya que no se ejercitara en la habilidad de aplicar el lema en forma madura.

Ejercicio 37: Pruebe que las siguientes funciones son Σ-p.r..

(a) $\lambda x\left[\prod_{t=10}^{t=x} t^t\right]$

(b) $\lambda xy\alpha\left[\prod_{t=y+1}^{t=|\alpha|}(t+|\alpha|)\right]$

(c) $\lambda xyz\alpha\beta[\subset_{t=3}^{t=z+5} \alpha^t]$

(d) $\lambda xyx_1\beta\left[\sum_{t=0}^{t=y}|\beta|.(x_1+t)\right]$

(e) $\lambda x_2xyz\alpha\beta[\subset_{t=x_2}^{t=z+5}\alpha^{y.x.t}\beta^z]$

Ejercicio 38: Describa el dominio de G y pruebe que G es Σ-p.r.

(a) $G=\lambda xx_1\left[\sum_{t=1}^{t=x}Pred(x_1)^t\right]$

(b) $G=\lambda xyz\alpha\beta\left[\subset_{t=3}^{t=z+5}\alpha^{Pred(z).t^x}\beta^{Pred(Pred(|\alpha|^y))}\right]$

(Ojo que la la f a la cual le debe aplicar el lema de la sumatoria no es Σ-total)

Cuantificacion acotada de predicados Σ-p.r. con dominio rectangular. Sea $P:S\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m\to\omega$ un predicado, con $n,m\in\omega$. Supongamos ademas que $S,S_1,...,S_n\subseteq\omega$ y $L_1,...,L_m\subseteq\Sigma^*$ son no vacios. Sea $\bar{S}\subseteq S$. Entonces la expresion Booleana

$$(\forall t\in\bar{S})_{t\leq x}\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})$$

depende de las variables $x,\vec{x},\vec{\alpha}$ y valdra 1 en una $(1+n+m)$-upla $(x,\vec{x},\vec{\alpha})$ cuando $P(t,\vec{x},\vec{\alpha})$ sea igual a 1 para cada $t\in\{u\in\bar{S}:u\leq x\}$; y 0 en caso contrario. Notese que aqui es crucial que $\bar{S}\subseteq S$ ya que si no sucediera esto no tendria sentido preguntarnos si $P(t,\vec{x},\vec{\alpha})$ es 1 para cada $t\in\{u\in\bar{S}:u\leq x\}$. Ademas tambien para que la expresion $(\forall t\in\bar{S})_{t\leq x}\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})$ este definida es preciso que $(\vec{x},\vec{\alpha})\in S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m$. Sobre la variable x no hay ninguna restriccion o sea que puede ser cualquier elemento de ω. Tenemos entonces que el dominio del predicado

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t\in\bar{S})_{t\leq x}\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

es $\omega\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m$. En forma analoga se define la forma de interpretar la expresion Booleana

$$(\exists t\in\bar{S})_{t\leq x}\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})$$

Cabe destacar que

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists t\in\bar{S})_{t\leq x}\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]=\neg\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t\in\bar{S})_{t\leq x}\ \neg P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

Analicemos un poco por separado el caso $\bar{S}=\emptyset$. Nos queda la expresion

$$(\forall t\in\emptyset)_{t\leq x}\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})$$

la cual para que este definida requiere que $(x,\vec{x},\vec{\alpha})$ este en $\omega\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m$ (ver (12) (d) de la notacion lambda dada en la Guia 1); y siempre es verdadera. O sea que

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t\in\emptyset)_{t\leq x}\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]=C_1^{1+n,m}|_{\omega\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m}$$

Analogamente

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists t\in\emptyset)_{t\leq x}\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]=C_0^{1+n,m}|_{\omega\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m}$$

Tambien podemos cuantificar sobre variable alfabetica. Sea $P:S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m\times L\to\omega$ un predicado, con $S_1,...,S_n\subseteq\omega$ y $L,L_1,...,L_m\subseteq\Sigma^*$ no vacios. Supongamos $\bar{L}\subseteq L$. Entonces la expresion Booleana

$$(\forall\alpha\in\bar{L})_{|\alpha|\leq x}\ P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)$$

depende de las variables $x,\vec{x},\vec{\alpha}$ y esta definida cuando $(x,\vec{x},\vec{\alpha})$ pertenece a $\omega\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m$. Dejamos al lector analizar cuando vale 1 el predicado

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall\alpha\in\bar{L})_{|\alpha|\leq x}\ P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)\right]$$

Tambien dejamos al lector estudiar el comportamiento de la funcion

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha|\leq x} P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)\right]$$

Cabe destacar que tambien

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha|\leq x} P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)\right] = \neg\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha|\leq x} \neg P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)\right]$$

Dejamos al lector que analice el caso $\bar{L} = \emptyset$ y tambien el caso $n = m = 0$ para ambos tipos de cuantificacion (es decir cuando $P : S \subseteq \omega \to \omega$ o $P : L \subseteq \Sigma^* \to \omega$).

Lema 24 (Lema de cuantificacion acotada)**.** *Sea Σ un alfabeto finito.*

(a) *Sea $P : S \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ un predicado Σ-p.r., con $S, S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Supongamos $\bar{S} \subseteq S$ es Σ-p.r.. Entonces $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t\leq x}\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$ y $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists t \in \bar{S})_{t\leq x}\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$ son predicados Σ-p.r..*

(b) *Sea $P : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times L \to \omega$ un predicado Σ-p.r., con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L, L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Supongamos $\bar{L} \subseteq L$ es Σ-p.r.. Entonces $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha|\leq x}\ P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)\right]$ y $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha|\leq x}\ P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)\right]$ son predicados Σ-p.r..*

Proof. (a) Sea

$$\bar{P} = P|_{\bar{S}\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m} \cup C_1^{1+n,m}|_{(\omega-\bar{S})\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m}$$

Notese que $\bar{P}$ tiene dominio $\omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$. Veamos que $\bar{P}$ es Σ-p.r.. Ya que P es Σ-p.r. tenemos que $D_P = S \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$ es Σ-p.r., lo cual por el Lema 17 nos dice que los conjuntos $S_1, ..., S_n$, $L_1, ..., L_m$ son Σ-p.r.. Si $\bar{S} \neq \emptyset$, ya que es Σ-p.r. por hipotesis, el Lema 17 nos dice que

$$\bar{S} \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$$

es Σ-p.r.. Si $\bar{S} = \emptyset$ entonces

$$\bar{S} \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$$

es tambien Σ-p.r. ya que es igual al conjunto vacio. O sea que el Lema 18 nos dice que

$$P|_{\bar{S}\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m}$$

es Σ-p.r.. En forma similar, ya que $\omega - \bar{S}$ es Σ-p.r. (Lema 16), obtenemos que

$$C_1^{1+n,m}|_{(\omega-\bar{S})\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m}$$

es Σ-p.r.. Pero entonces el Lema 21 nos dice que $\bar{P}$ es Σ-p.r.. El Lema 23 nos dice que $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{t=y} \bar{P}(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$ es Σ-p.r.. Ya que

$$\begin{aligned}\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t\leq x} P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right] &= \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=0}^{t=x} \bar{P}(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right] \\ &= \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{t=y} \bar{P}(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right] \circ \left[C_0^{1+n,m}, p_1^{1+n,m}, ..., p_{1+n+m}^{1+n,m}\right]\end{aligned}$$

tenemos que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t\leq x}\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$ es Σ-p.r..

Ya que

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists t\in\bar{S})_{t\leq x}\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]=\neg\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t\in\bar{S})_{t\leq x}\ \neg P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

tenemos que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists t\in\bar{S})_{t\leq x}\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$ es Σ-p.r. ■

Nota: Aceptaremos (b) sin prueba. Su prueba se basa en (a) y el lector puede verla en el apunte.

OBSERVACION: La cuantificacion no acotada no preserva la propiedad de ser Σ-p.r.. Como veremos mas adelante hay un predicado Σ-p.r., $P:\omega\times L_1\rightarrow\omega$, tal que el predicado $\lambda\alpha\left[(\exists t\in\omega)\ P(t,\alpha)\right]$ no es Σ-efectivamente computable, por lo cual tampoco es Σ-p.r. (ni siquiera podra ser Σ-recursivo).

Veamos por ejemplo que el predicado $\lambda xy\left[x \text{ divide } y\right]$ es Σ-p.r.. Sea $P=\lambda tx_1x_2\left[x_2=t.x_1\right]$. Es claro que P es Σ-p.r.. El lema anterior nos dice que $\lambda xx_1x_2\left[(\exists t\in\omega)_{t\leq x}\ P(t,x_1,x_2)\right]$ es Σ-p.r.. Notese que x_1 divide x_2 si y solo si hay un $t\leq x_2$ tal que $x_2=t.x_1$. Esto nos dice que

$$\lambda x_1x_2\left[x_1 \text{ divide } x_2\right]=\lambda x_1x_2\left[(\exists t\in\omega)_{t\leq x_2}\ P(t,x_1,x_2)\right]$$

Pero

$$\lambda x_1x_2\left[(\exists t\in\omega)_{t\leq x_2}\ P(t,x_1,x_2)\right]=\lambda xx_1x_2\left[(\exists t\in\omega)_{t\leq x}\ P(t,x_1,x_2)\right]\circ\left[p_2^{2,0},p_1^{2,0},p_2^{2,0}\right]$$

por lo cual $\lambda x_1x_2\left[x_1 \text{ divide } x_2\right]$ es Σ-p.r.

La idea fundamental subyacente en la aplicacion anterior es que en muchos casos de predicados obtenidos por cuantificacion a partir de otros predicados, la variable cuantificada tiene una cota natural en terminos de las otras variables y entonces componiendo adecuadamente se lo puede presentar como un caso de cuantificacion acotada

Ejercicio 39: Use que

$$x \text{ es primo sii } x>1\wedge\left((\forall t\in\omega)_{t\leq x}\ t=1\vee t=x\vee\neg(t \text{ divide } x)\right)$$

para probar que $\lambda x\left[x \text{ es primo}\right]$ es Σ-p.r.

A continuacion enunciamos una regla que es util cuando queremos probar que cierto conjunto es Σ-p.r..

Regla Caracterizar Pertenencia: Si Ud esta intentando probar que cierto conjunto $S\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}$ es Σ-p.r., entonces puede ser util primero caracterizar la pertenecia a S, es decir escribir algo del tipo:

- Para cada $(\vec{x},\vec{\alpha})\in\omega^n\times\Sigma^{*m}$ se tiene que: $(\vec{x},\vec{\alpha})\in S$ si y solo si ...

Por ejemplo si queremos probar que $S=\{\beta^2:\beta\in\Sigma^*\}$ es un conjunto Σ-p.r. podemos primero notar que

- Para cada $\alpha\in\Sigma^*$ se tiene que: $\alpha\in S$ si y solo si $(\exists\beta\in\Sigma^*)$ tal que $\alpha=\beta^2$

lo cual ya nos deja en evidencia que podemos aplicar el Lema de Cuantificacion Acotada para probar que $\chi_S^{\Sigma^*}=\lambda\alpha[\alpha\in S]$ es Σ-p.r.. A esta regla la llamaremos *Regla CP* por brevedad.

Ejercicio 40: Pruebe que

(a) $\lambda\alpha\beta\,[\alpha \text{ inicial } \beta]$ es un predicado Σ-p.r..
(b) $\{\beta^2 : \beta \in \Sigma^*\}$ es un conjunto Σ-p.r..
(c) $\{2^x : x \in \omega \text{ y } x \text{ es impar}\}$ es un conjunto Σ-p.r.. (Aplique Regla CP).
(d) $\{(x, \alpha, \beta) \in \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* : (\exists t \in \omega)\ \alpha^x = \beta^t\}$ es un conjunto Σ-p.r..
(e) $\{(2^x, @^x, \$) : x \in \omega \text{ y } x \text{ es impar}\}$ es un conjunto Σ-p.r. (aqui asuma $\Sigma = \{@, \$\}$). (Aplique Regla CP).

Ejercicio 41: Dos numeros $p, q \in \mathbf{N}$ son llamados *primos consecutivos* si ambos son primos, $p < q$ y no hay ningun primo r tal que $p < r < q$. Pruebe que el conjunto

$$\{(p, q) : p \text{ y } q \text{ son primos consecutivos}\}$$

es Σ-p.r

Ejercicio 42: Dados $x, y \in \omega$, diremos que x e y son *coprimos* cuando 1 sea el unico elemento de ω que divide a ambos. Sea $P = \lambda xy[x \text{ e } y \text{ son coprimos}]$. Pruebe que P es Σ-p.r.

Ejercicio 43: Pruebe que los siguientes conjuntos son Σ-p.r..
(a) $\{(x, \alpha, \beta) \in \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* : (\exists t \in \mathrm{Im}(pr))\ \alpha^{Pred(Pred(x)).Pred(|\alpha|)} = \beta^t\}$
(b) $\{(x, \alpha) \in \omega \times \Sigma^* : (\exists \beta \in \{@, \%\}^+)\ \alpha\beta^{Pred(x)} = \beta^{Pred(x)}\alpha\}$ (aqui suponga que $\{@, \%\} \subseteq \Sigma$)
(c) $\{(x, \alpha) \in \{1, 9\} \times \Sigma^+ : (\exists \beta \in \Sigma^+)\ |\beta| > x \text{ y } \beta^{Pred(x)} = \alpha\}$

(Ojo que el predicado al cual debera aplicarle el lema de cuantificacion acotada no es Σ-total)

Ejercicio 44: Sea $\Sigma = \{@, \%\}$. Sea $S \subseteq \omega$ un conjunto Σ-p.r. Pruebe que

$$\{(x, y, \alpha) \in S \times S \times \Sigma^+ : (\exists t \in S)\ |\alpha|^t = Pred(Pred(x))\}$$

es Σ-p.r.. (Ojo que aqui el predicado al cual debera aplicarle el lema de cuantificacion acotada no es Σ-total).

Como puede notarse, en los ejercicios anteriores se aplica una sola ves el lema de cuantificacion acotada. En los ejercicios que siguen veremos algunos casos en los cuales es necesario anidar cuantificaciones acotadas.

Ejercicio 45: Pruebe que
(a) $\lambda\alpha\beta\,[\alpha \text{ ocurre en } \beta]$ es un predicado Σ-p.r..
(b) $\{@^t!^l : t \in \mathbf{N} \text{ y } l \text{ es impar}\}$ es un conjunto Σ-p.r.. (Aplique Regla CP).
(c) $\{@^t!^l : t \in \mathbf{N} \text{ y } l \text{ es impar}\}$ es un conjunto Σ-p.r. (aqui suponga que $@, ! \in \Sigma$). (Aplique Regla CP).
(d) $\{(2^t, \gamma^5) : \gamma \in \{@, \%\}^+ \text{ y } t > |\gamma|\}$ es un conjunto Σ-p.r. (aqui suponga que $\{@, \%\} \subseteq \Sigma$). (Aplique Regla CP).
(e) $\{(2^{t+l}, 10^{t.l}, \gamma) : \gamma \in \{@, \%\}^+ \text{ y } t > l\}$ es un conjunto Σ-p.r. (aqui suponga que $\{@, \%\} \subseteq \Sigma$). (Aplique Regla CP).
(f) $\{x \in \mathbf{N} : \exists p, q \text{ tales que } x = p.q \text{ y } p, q \text{ son primos}\}$ es un conjunto Σ-p.r.

Ejercicio 46: Sea $\Sigma = \{@, \triangle, \heartsuit, \bigcirc\}$ y sean $L_1, L_2 \subseteq \{\triangle, \heartsuit, \bigcirc\}^*$ conjuntos Σ-p.r.. Pruebe que el conjunto

$$\{\alpha@\beta : \alpha \in L_1 \text{ y } \beta \in L_2\}$$

es Σ-p.r.. (Aplique Regla CP).

Ejercicio 47: Sea $M = (Q, \{@, \%\}, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ una maquina de Turing y supongamos $Q = \{q_0, q_1\}$ es un alfabeto disjunto con Γ. Pruebe que el conjunto Des formado por todas las descripciones instantaneas de M es $(\Gamma \cup Q)$-p.r.. (Hint: note que $Des = Des_0 \cup Des_1$, donde $Des_i = \{\alpha \in Des : St(\alpha) = q_i\}$, por lo cual basta con probar que cada Des_i es $(\Gamma \cup Q)$-p.r.). Puede usar que la funcion $\lambda i\alpha\,[[\alpha]_i]$ es $(\Gamma \cup Q)$-p.r. (aqui la notacion lambda es relativa al alfabeto $\Gamma \cup Q$).

Ejercicios de examen

Cada resultado teorico que aplique en la resolucion debera enunciarlo por separado detalladamente (en la forma en la que esta en las guias). Para los ejercicios listados a continuacion puede usar sin demostracion que las siguientes funciones son Σ-p.r.: Suc, $Pred$, d_a (con $a \in \Sigma$), $p_j^{n,m}$ (con $n, m, j \in \omega$ y $1 \leq j \leq n+m$), $\lambda xy[x \leq y]$, $\lambda\alpha[|\alpha|]$, $\lambda xy[x = y]$, $\lambda\alpha\beta\,[\alpha = \beta]$, $\lambda xy[x+y]$, $\lambda xy[x.y]$, $\lambda xy\left[x \dot{-} y\right]$, $\lambda x\alpha\,[\alpha^x]$, $\lambda xy\,[x^y]$, $C_k^{n,m}$, $C_\alpha^{n,m}$ (con $n, m, k \in \omega$ y $\alpha \in \Sigma^*$).

(1) Sea $\Sigma = \{@, \%, \$\}$ y sea $\leq$ el orden total sobre Σ dado por $@ < \% < \$$. Pruebe que $s^{\leq}$, $\#^{\leq}$ y $*^{\leq}$ son Σ-p.r.

(2) Defina las funciones Sig y Dec.
   (a) Pruebe que Sig y Des son Num-p.r.
   (b) Sea $\Gamma = \{@, \%\} \cup Num$. Pruebe que Dec es Γ-p.r..

(3) Sea $\Sigma = \{@, !, \%\}$. Sea

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{N} \times \{@, \%\}^* \times \{@, !, \%\}^+ & \rightarrow & \omega \\ (x, \alpha, \beta) & \rightarrow & \begin{cases} Pred(|\alpha|) & \text{si } |\alpha| > 2 \text{ y } x \geq 1 \\ |\beta| & \text{si } |\alpha| \leq 2 \text{ o } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Pruebe que f es Σ-p.r..

(4) Sea $\Sigma = \{@, !, \%\}$. Sea

$$\begin{array}{rcl} f : \{(x, \alpha, \beta) \in \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* : x \geq |\beta|\} & \rightarrow & \omega \\ (x, \alpha, \beta) & \rightarrow & \begin{cases} Pred(|\alpha|) & \text{si } |\alpha| > 2 \text{ y } x \geq 1 \\ x & \text{si } |\alpha| \leq 2 \text{ o } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Pruebe que f es Σ-p.r..

(5) Sea $\Sigma = \{@, \%, !\}$. Sea

$$\begin{array}{rcl} f : \{1, 4\} \times \mathbf{N} \times \{@, \%\}^* & \rightarrow & \omega \\ (x, y, \alpha) & \rightarrow & \begin{cases} x & \text{si } \alpha = @@ \\ Pred(|\alpha|) & \text{si } \alpha \neq @@ \wedge |\alpha| > y \\ y & \text{si } \alpha \neq @@ \wedge |\alpha| \leq y \end{cases} \end{array}$$

Pruebe que f es Σ-p.r..

(6) Sea $\Sigma = \{@, \$, \%, !\}$. Sea

$$\begin{array}{rcl} f : \{(x, y, \alpha, \beta) \in \omega^2 \times \Sigma^{*2} : \beta \in \{@, \$\}^* \text{ o } x \text{ es par}\} & \rightarrow & \omega \\ (x, y, \alpha, \beta) & \rightarrow & \begin{cases} x^2 & \text{si } |\alpha| \leq y \\ Pred(|\alpha|) & \text{si } |\alpha| > y \end{cases} \end{array}$$

Pruebe que f es Σ-p.r..

(7) Sea $\Sigma = \{@, \$, \%, !\}$. Sea

$$\begin{array}{rcl} f : \{(\alpha, \beta) \in \Sigma^{*2} : \beta \in \{@, \$\}^* \text{ o } \alpha \in \{\$, !\}^+\} & \rightarrow & \Sigma^* \\ (\alpha, \beta) & \rightarrow & \begin{cases} \beta & \text{si } |\alpha| \leq 5 \\ \alpha^{Pred(|\alpha|)} & \text{si } |\alpha| > 5 \end{cases} \end{array}$$

Pruebe que f es Σ-p.r..

(8) Sean $f_1, f_2 : \omega \rightarrow \omega$ funciones Σ-p.r.. Sea $F : \omega \rightarrow \omega$ dada por

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= f_1(0) \\ F(2) &= f_2(f_1(0)) \\ F(3) &= f_1(f_2(f_1(0))) \\ F(4) &= f_2(f_1(f_2(f_1(0)))) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pruebe que F es Σ-p.r..

(9) Sea $\Sigma = \{@, !, \%\}$.
   (a) Describa el dominio de $\lambda i\alpha\,[[\alpha]_i]$ (segun manda la notacion lambda)
   (b) Pruebe que $\lambda i\alpha\,[[\alpha]_i]$ es Σ-p.r..

(10) Sea

$$G = \lambda zxx_1\alpha \left[\prod_{t=1}^{t=|\alpha|} z^t.Pred(x.\,|\alpha|) \right]$$

   (a) Describa el dominio de G (segun manda la notacion lambda)
   (b) Pruebe que G es Σ-p.r.. (Ojo que la la f a la cual le debe aplicar el lema de la sumatoria no es Σ-total)

(11) Sea $g : \omega \rightarrow \omega$ una funcion Σ-p.r.. Sea

$$G = \lambda zx_1\alpha \left[\prod_{t=1}^{t=|\alpha|} g(Pred((t+1).x_1.\,|\alpha|)) \right]$$

   (a) Describa el dominio de G (segun manda la notacion lambda)
   (b) Pruebe que G es Σ-p.r.. (Ojo que la la f a la cual le debe aplicar el lema de la sumatoria no es Σ-total)

(12) Sea $g : \omega \rightarrow \Sigma^*$ una funcion Σ-p.r.. Sea

$$G = \lambda zx_1x_2\alpha \left[\subset_{t=x_2}^{t=z+5} g(t.Pred(x_1.\,|\alpha|)) \right]$$

   (a) Describa el dominio de G (segun manda la notacion lambda)
   (b) Pruebe que G es Σ-p.r.. (Ojo que la la f a la cual le debe aplicar el lema de la sumatoria no es Σ-total)

(13) Sea

$$G = \lambda xzyx_2 \left[\sum_{t=Pred(y)}^{t=x} Pred(z)^t \right]$$

   (a) Describa el dominio de G (segun manda la notacion lambda)
   (b) Pruebe que G es Σ-p.r.. (Ojo que la la f a la cual le debe aplicar el lema de la sumatoria no es Σ-total)

(14) Sea

$$G = \lambda xzyx_2 \left[\sum_{t=Pred(x_2)}^{t=x_2} x.y.z.t \right]$$

(a) Describa el dominio de G (segun manda la notacion lambda)
(b) Pruebe que G es Σ-p.r.. (Ojo que la la f a la cual le debe aplicar el lema de la sumatoria no es Σ-total)

(15) Sea $\Sigma = \{@, !, \%\}$.
(a) Describa el dominio de $\lambda x\,[x$ es primo$]$ (segun manda la notacion lambda)
(b) Pruebe que $\lambda x\,[x$ es primo$]$ es Σ-p.r..

(16) Sea $\Sigma = \{@, \%, !\}$. Sea $S = \{x \in \omega : x \text{ es par}\}$. Pruebe que

$$L = \{\alpha \in \Sigma^* : \text{ si } [\alpha]_i = @, \text{ entonces } [\alpha]_{i+1} = \%, \text{ para cada } i \in S\}$$

es Σ-p.r.. Puede usar que la funcion $\lambda i\alpha\,[[\alpha]_i]$ es Σ-p.r..

(17) Sea $\Sigma = \{@, \%, !\}$. Sea $L = \{\alpha \in \Sigma^* : |\alpha| \text{ es impar}\}$. Pruebe que

$$H = \{(\alpha, \beta, \rho) \in L \times \Sigma^* \times L : (\exists \gamma \in L)\ \beta\rho = \alpha \text{ y } \beta^{Pred(|\gamma|)} = \alpha\}$$

es Σ-p.r.. (Ojo que aqui el predicado al cual debera aplicarle el lema de cuantificacion acotada no es Σ-total).

(18) Sea $\Sigma = \{\triangle, \bigcirc\}$. Sea $S = \{x \in \omega : x \text{ es par}\}$. Pruebe que

$$H = \{(x, \alpha) \in \omega \times \{\triangle\}^* : (\exists t \in S)\ t^2 = |\alpha|\,.Pred(x)\}$$

es Σ-p.r.. (Ojo que aqui el predicado al cual debera aplicarle el lema de cuantificacion acotada no es Σ-total).

(19) Sea $\Sigma = \{@, \triangle, \heartsuit, \bigcirc\}$. Sea $S = \{x \in \omega : 10 \leq x\}$. Pruebe que

$$H = \{(x, \alpha, \beta) \in \omega \times \{@, \triangle\}^* \times \Sigma^+ : (\exists t \in S)\ \alpha^{Pred(Pred(x)).Pred(|\alpha|)} = \beta^t\}$$

es Σ-p.r.. (Ojo que aqui el predicado al cual debera aplicarle el lema de cuantificacion acotada no es Σ-total).

(20) Sea $\Sigma = \{@, \triangle, \heartsuit, \bigcirc\}$. Sea $S = \{x \in \omega : 100 \leq x\}$. Pruebe que

$$H = \{(x, \alpha, \rho) \in S \times \Sigma^* \times \Sigma^+ : (\exists \beta \in \{@, \triangle\}^*)\ \alpha\beta^{Pred(x)} = \rho\alpha\}$$

es Σ-p.r.. (Ojo que aqui el predicado al cual debera aplicarle el lema de cuantificacion acotada no es Σ-total).

(21) Sea $\Sigma = \{@, \triangle, \heartsuit, \bigcirc\}$. Sea $S = \{x \in \omega : 3 \text{ divide a } x\}$. Pruebe que

$$H = \{(x, \alpha) \in S \times \Sigma^* : (\exists \beta \in \{\triangle, \heartsuit, \bigcirc\}^+)\ |\beta| > x \text{ y } \beta^{Pred(x)} = \alpha\}$$

es Σ-p.r.. (Ojo que aqui el predicado al cual debera aplicarle el lema de cuantificacion acotada no es Σ-total).

(22) Sea $\Sigma = \{@, \%\}$. Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un conjunto Σ-p.r. Pruebe que

$$H = \{(x, y, \alpha) \in \omega \times \omega \times L : (\exists t \in \mathbf{N})\ t^2 = |\alpha|\,.y^{Pred(Pred(x))}\}$$

es Σ-p.r.. (Ojo que aqui el predicado al cual debera aplicarle el lema de cuantificacion acotada no es Σ-total).

(23) Sea $\Sigma = \{@, \%\}$. Sea $S \subseteq \omega$ un conjunto Σ-p.r. Pruebe que

$$H = \{(x, y, \alpha) \in S \times S \times \Sigma^+ : (\exists t \in S)\ |\alpha|^t = Pred(Pred(x))\}$$

es Σ-p.r.. (Ojo que aqui el predicado al cual debera aplicarle el lema de cuantificacion acotada no es Σ-total).

(24) Sea $\Sigma = \{@, \triangle, \heartsuit, \bigcirc\}$ y sean $L_1, L_2 \subseteq \{\triangle, \heartsuit, \bigcirc\}^*$ conjuntos Σ-p.r.. Pruebe que el conjunto
$$H = \{\alpha @ \beta : \alpha \in L_1 \text{ y } \beta \in L_2\}$$
es Σ-p.r..

(25) Sea $\Sigma = \{@, \triangle, \heartsuit, \bigcirc\}$ y sean $L \subseteq \{\triangle, \heartsuit, \bigcirc\}^*$ y $S \subseteq \omega$ conjuntos Σ-p.r.. Pruebe que el conjunto
$$H = \{[\alpha]_i @ \alpha : \alpha \in L \text{ y } i \in S\}$$
es Σ-p.r.. Puede usar que la funcion $\lambda i\alpha\,[[\alpha]_i]$ es Σ-p.r..

(26) Sea $\Sigma = \{\triangle, \heartsuit, \bigcirc\}$ y sean $L \subseteq \{\triangle, \heartsuit, \bigcirc\}^*$ y $S \subseteq \omega$ conjuntos Σ-p.r.. Pruebe que el conjunto
$$H = \{\alpha^x : \alpha \in L \text{ y } x \in S\}$$
es Σ-p.r

(27) Sea $\Sigma = \{\triangle, \heartsuit, \bigcirc\}$. Sean $S_1, S_2 \subseteq \omega$ conjuntos Σ-p.r.. Pruebe que el conjunto
$$H = \{(x.y, \triangle\triangle\bigcirc) : x \in S_1 \text{ y } y \in S_2\}$$
es Σ-p.r

(28) Sea $\Sigma = \{@, !\}$. Pruebe que
$$H = \{2^t 5^l : t, l \in \mathbf{N} \text{ y } t > l\}$$
es Σ-p.r..

(29) Sea $\Sigma = \{@, !\}$. Pruebe que
$$H = \{(2^t, (@@!!)^l) : t, l \in \mathbf{N} \text{ y } t > l\}$$
es Σ-p.r..

(30) Sea $\Sigma = \{@, \%, !\}$. Pruebe que
$$H = \{(2^t, \gamma^5) : \gamma \in \{@, \%\}^+ \text{ y } t > |\gamma|\}$$
es Σ-p.r..

(31) Sea $\Sigma = \{@, \%, !\}$. Pruebe que
$$H = \{(2^{t+l}, 10^{t.l}, \gamma) : \gamma \in \{@, \%\}^+ \text{ y } t > l\}$$
es Σ-p.r..

(32) Sea $M = (Q, \{@, \%\}, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ una maquina de Turing y supongamos $Q = \{q_0, q_1\}$ es un alfabeto disjunto con Γ. Pruebe que el conjunto Des formado por todas las descripciones instantaneas de M es $(\Gamma \cup Q)$-p.r.. (Hint: note que $Des = Des_0 \cup Des_1$, donde $Des_i = \{\alpha \in Des : St(\alpha) = q_i\}$, por lo cual basta con probar que cada Des_i es $(\Gamma \cup Q)$-p.r.). Puede usar que la funcion $\lambda i\alpha\,[[\alpha]_i]$ es $(\Gamma \cup Q)$-p.r. (aqui la notacion lambda es relativa al alfabeto $\Gamma \cup Q$).

(33) Sea $\Gamma = \{\mathrm{N}, \leftarrow\} \cup Num$. Para hacer mas agil la notacion escribiremos $\bar{n}$ en lugar de $Dec(n)$. Sea
$$L = \{\mathrm{N}\bar{k} \leftarrow \mathrm{N}\bar{n} : k, n \in \mathbf{N}\}$$
Pruebe que L es Γ-p.r.. (Puede usar que Dec es Γ-p.r.).