GUIA 1 DE LENGUAJES: NOTACION Y CONCEPTOS BASICOS

Usaremos $\mathbf{R}$ para denotar el conjunto de los numeros reales, $\mathbf{Z}$ para denotar el conjunto de los numeros enteros, $\mathbf{N}$ para denotar el conjunto de los numeros naturales y ω para denotar al conjunto $\mathbf{N} \cup \{0\}$.

Dado un conjunto A, usaremos $\mathcal{P}(A)$ para denotar el conjunto formado por todos los subconjuntos de A, es decir:

$$\mathcal{P}(A) = \{S : S \subseteq A\}$$

Si A es un conjunto finito, entonces $|A|$ denotara la cantidad de elementos de A.

Para $x, y \in \omega$, definamos

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Dados $x, y \in \omega$ diremos que x *divide a* y cuando haya un $z \in \omega$ tal que $y = z.x$. Notar que 0 divide a 0, 3 divide a 0 y 0 no divide a 23. Escribiremos $x \mid y$ para expresar que x divide a y. Si bien no hay una definicion natural en matematica de cuanto vale 0^0 (0 elevado a la 0), por convencion para nosotros $0^0 = 1$

Producto carteciano

Dados conjuntos $A_1, ..., A_n$, con $n \geq 2$, usaremos $A_1 \times ... \times A_n$ para denotar el *producto Cartesiano* de $A_1, ..., A_n$, es decir el conjunto formado por todas las n-uplas $(a_1, ..., a_n)$ tales que $a_1 \in A_1, ..., a_n \in A_n$. Si $A_1 = ... = A_n = A$, con $n \geq 2$, entonces escribiremos A^n en lugar de $A_1 \times ... \times A_n$. Para $n = 1$, definimos $A^n = A$, es decir $A^1 = A$. Usaremos $\Diamond$ para denotar la unica 0-upla. Definimos entonces $A^0 = \{\Diamond\}$. Si A es un conjunto denotaremos con $A^{\mathbf{N}}$ al conjunto formado por todas las infinituplas $(a_1, a_2, ...)$ tales que $a_i \in A$ para cada $i \in \mathbf{N}$. Por ejemplo

$$(1, 2, 3, 4, ...) \in \omega^{\mathbf{N}}$$

donde $(1, 2, 3, 4, ...)$ es una forma intuitiva de denotar la infinitupla cuyo i-esimo elemento es el numero natural i.

Si $(A_1, A_2, ...)$ es una infinitupla de conjuntos, entonces usaremos $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ o $\bigcup_{i \geq 1} A_i$ para denotar al conjunto

$$\{a : a \in A_i, \text{ para algun } i \in \mathbf{N}\}$$

Conjuntos

Supondremos que el lector sabe las nociones basicas sobre conjuntos, aunque resaltaremos algunas de las mas importantes para que el lector las repase.

La propiedad de *extensionalidad* nos dice que, dados conjuntos A, B, se tiene que $A = B$ si y solo si para cada objeto x se da que

$$x \in A \text{ si y solo si } x \in B$$

Esta propiedad es importante metodologicamente ya que a la hora de probar que dos conjuntos A, B son iguales, extensionalidad nos asegura que basta con ver que se dan las dos inclusiones $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Otro tema importante es manejar correctamente la notacion cuando definimos un conjunto usando llaves y mediante propiedades que caracterizan la pertenencia al mismo. Algunos ejercicios para entrenar esta notacion:

Ejercicio 1: Entender en forma precisa que conjunto se esta denotando en cada uno de los siguientes casos
(a) $\{x \in \mathbf{N} : x = 1 \text{ o } x \geq 5\}$
(b) $\{x : x \in \mathbf{R} \text{ y } x^2 \geq 100\}$
(c) $\{x : x = 100\}$
(d) $\{x^2 + 1 : x \in \omega\}$
(e) $\{x + y + z : x, y, z \in \{1, 2\}\}$

Ejercicio 2: V o F o I, justifique.
(a) $\{x.y : x, y \in \omega\} = \omega$
(b) $|\{x.y : x, y \in \omega \text{ y } 1 \leq x, y \leq 5\}| = 25$
(c) Dados $A, B \subseteq \omega$, se tiene que $\{a \in A \text{ y } b \in B : a + b = 1000\} \subseteq A \times B$
(d) $\{a \in \mathbf{N}, a \geq 3\} \subseteq \omega$
(e) $\{x + 1 : x \in \{1, 2, 3\}\} = \{1, 2, 3, 4\}$

Alfabetos

Un *alfabeto* es un conjunto finito de simbolos. Notese que $\emptyset$ es un alfabeto. Si Σ es un alfabeto, entonces Σ^* denotara el conjunto de todas las palabras formadas con simbolos de Σ. Las palabras de longitud 1 son exactamente los elementos de Σ, en particular esto nos dice que $\Sigma \subseteq \Sigma^*$. La unica palabra de longitud 0 es denotada con ε. Ya que en ε no ocurren simbolos, tenemos que $\varepsilon \in \Sigma^*$, para cualquier alfabeto, mas aun notese que $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$. Usaremos $|\alpha|$ para denotar la longitud de la palabra α. Si $\alpha \in \Sigma^*$ y $\sigma \in \Sigma$, usaremos $|\alpha|_\sigma$ para denotar la cantidad de ocurrencias del simbolo σ en α. Notese que funciones, n-uplas y palabras son objetos de distinto tipo, por lo cual $\emptyset$, $\Diamond$ y ε son tres objetos matematicos diferentes.

Si $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Sigma^*$, con $n \geq 0$, usaremos $\alpha_1...\alpha_n$ para denotar la *concatenacion* de las palabras $\alpha_1, ..., \alpha_n$ (notese que cuando $n = 0$, resulta que $\alpha_1...\alpha_n = \varepsilon$). Si $\alpha_1 = ... = \alpha_n = \alpha$, entonces escribiremos α^n en lugar de $\alpha_1...\alpha_n$. O sea que $\alpha^0 = \varepsilon$.

Un *lenguaje sobre* Σ sera un subconjunto de Σ^*. Si L es un lenguaje sobre Σ, entonces denotaremos con L^+ al conjunto formado por todas las concatenaciones de sucesiones finitas no nulas de lementos de L. Es decir:

$$L^+ = \{\alpha_1...\alpha_n : \alpha_1, ..., \alpha_n \in L \text{ y } n \geq 1\}$$

Notese que en particular obtenemos que $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\varepsilon\}$.

Diremos que α *es subpalabra (propia) de* β cuando ($\alpha \notin \{\varepsilon, \beta\}$ y) existan palabras δ, γ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$. Diremos que β es un *tramo inicial (propio)* de α si hay una palabra γ tal que $\alpha = \beta\gamma$ (y $\beta \notin \{\varepsilon, \alpha\}$). En forma similar se define *tramo final (propio)*.

Dados $i \in \omega$ y $\alpha \in \Sigma^*$ definamos

$$[\alpha]_i = \begin{cases} i\text{-esimo elemento de } \alpha & \text{si } 1 \leq i \leq |\alpha| \\ \varepsilon & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Dada $\gamma \in \Sigma^*$, definamos

$$\gamma^R = \begin{cases} [\gamma]_{|\gamma|}[\gamma]_{|\gamma|-1}...[\gamma]_1 & \text{si } |\gamma| \geq 1 \\ \varepsilon & \text{caso contrario} \end{cases}$$

La palabra γ^R es llamada la *resiproca* de γ. Dada $\alpha \in \Sigma^*$, definamos

$$^{\frown}\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} [\alpha]_2 ... [\alpha]_{|\alpha|} & \text{si} \quad |\alpha| \geq 2 \\ \varepsilon & \text{si} \quad |\alpha| \leq 1 \end{array} \right. \qquad \alpha^{\frown} = \left\{ \begin{array}{ll} [\alpha]_1 ... [\alpha]_{|\alpha|-1} & \text{si} \quad |\alpha| \geq 2 \\ \varepsilon & \text{si} \quad |\alpha| \leq 1 \end{array} \right.$$

Ocurrencias. Dadas palabras $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, con $|\alpha|, |\beta| \geq 1$, y un natural $i \in \{1, ..., |\beta|\}$, se dice que α *ocurre a partir de* i *en* β cuando se de que existan palabras δ, γ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$ y $|\delta| = i - 1$. Intuitivamente hablando α ocurre a partir de i en β cuando se de que si comensamos a leer desde el lugar i-esimo de β en adelante, leeremos la palabra α completa y luego posiblemente seguiran otros simbolos.

Notese que una palabra α puede ocurrir en β, a partir de i, y tambien a partir de j, con $i \neq j$. En virtud de esto, hablaremos de las distintas ocurrencias de α en β. Por ejemplo hay dos ocurrencias de la palabra *aba* en la palabra

$$ccccccabaccccabacccc$$

y tambien hay dos ocurrencias de la palabra *aba* en la palabra

$$ccccccababacccccccccc$$

En el primer caso diremos que dichas ocurrencias de *aba* son *disjuntas* ya que ocupan espacios disjuntos dentro de la palabra. En cambio en el segundo caso puede apreciarse que las dos ocurrencias se superponen en una posicion. A veces diremos que una ocurrencia esta *contenida* o *sucede* dentro de otra. Por ejemplo la segunda ocurrencia de *ab* en $babbbfabcccfabccc$ esta contenida en la primer ocurrencia de $fabc$ en $babbbfabcccfabccc$.

No definiremos en forma matematica precisa el concepto de ocurrencia pero el lector no tendra problemas en comprenderlo y manejarlo en forma correcta.

Reemplazos de ocurrencias. Tambien haremos *reemplazos* de ocurrencias por palabras. Por ejemplo el resultado de reemplazar la primer ocurrencia de *abb* en $ccabbgfgabbgg$ por *oolala* es la palabra $ccoolalagfgabbgg$. Cuando todas las ocurrencias de una palabra α en una palabra β sean disjuntas entre si, podemos hablar del resultado de *reeplazar simultaneamente cada ocurrencia de* α *en* β *por* γ. Por ejemplo si tenemos

$$\begin{aligned} \alpha &= yet \\ \beta &= ghsyetcjjjyetbcpyeteabc \\ \gamma &= \%\% \end{aligned}$$

entonces $ghs\%\%cjjj\%\%bcp\%\%eabc$ es el resultado de reemplazar simultaneamente cada ocurrencia de α en β por γ. Es importante notar que los reemplazos se hacen simultaneamente y no secuencialmente (i.e. reemplazando la primer ocurrencia de α por γ y luego al resultado reemplazarle la primer ocurrencia de α por γ y asi sucesivamente). Obviamente el reemplazo secuencial puede dar un resultado distinto al simultaneo (que es el que usaremos en general) e incluso puede suceder que en el reemplazo secuencial el proceso se pueda iterar indefinidamente. Dejamos al lector armar ejemplos de estas cituaciones.

Tambien se pueden hacer reemplazos simultaneos de distintas palabras en una palabra dada. Supongamos tenemos palabras $\alpha_1, ..., \alpha_n$ (con $\alpha_i \neq \alpha_j$, para $i \neq j$) las cuales tienen la propiedad de que las distintas ocurrencias de ellas en la palabra β son siempre disjuntas de a pares, y tenemos ademas palabras $\gamma_1, ..., \gamma_n$. Entonces hablaremos del resultado de reemplazar simultaneamente:

- cada ocurrencia de α_1 en β, por γ_1
- cada ocurrencia de α_2 en β, por γ_2

$\vdots$

- cada ocurrencia de α_n en β, por γ_n

Por ejemplo si tomamos

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= gh \\
\alpha_2 &= yet \\
\alpha_3 &= ana \\
\beta &= ghbbbyetbbgh\%\%ana\#\#ana!!!ana \\
\gamma_1 &= AA \\
\gamma_2 &= BBBB \\
\gamma_3 &= CCC
\end{aligned}$$

entonces $AAbbbBBBBbbAA\%\%CCC\#\#CCC!!!CCC$ es el resultado de reemplazar simultaneamente:

- cada ocurrencia de α_1 en β, por γ_1
- cada ocurrencia de α_2 en β, por γ_2
- cada ocurrencia de α_3 en β, por γ_3

Matematica orientada a objetos

Nuestro estilo o enfoque matematico pondra enfasis en los objetos, es decir haremos matematica prestando atencion a los distintos objetos matematicos involucrados, los cuales siempre seran definidos en forma precisa en terminos de objetos mas primitivos. Hay ciertos objetos matematicos los cuales no definiremos y supondremos que el lector tiene una idea clara y precisa de los mismos. Por ejemplo un tipo de objeto matematico, quizas el mas famoso, son los *numeros*. No diremos que es un numero pero supondremos que el lector tiene una intuicion clara acerca de este tipo de objetos y de sus propiedades basicas. Otro tipo de objeto que no definiremos y que sera clave para nuestro enfoque son los *conjuntos*. Nuevamente, no diremos que es un conjunto pero supondremos que el lector tiene una intuicion clara acerca de estos objetos y sus propiedades basicas. Es importante que en nuestro enfoque, numeros y conjuntos son objetos de distinta naturaleza por lo cual nunca un numero es un conjunto ni un conjunto es un numero. En particular esto nos dice que el numero 0 y el conjunto $\emptyset$ son objetos distintos. Otro tipo de objeto matematico muy importante para la matematica discreta son los *simbolos*. No discutiremos que es un simbolo sino que aceptaremos este concepto en forma primitiva. Tambien constituyen un tipo de objeto matematico las *palabras*, las cuales intuitivamente hablando son juxtaposiciones de simbolos. Otro tipo de objeto matematico muy importante son los *pares ordenados* o 2-*uplas*, es decir los objetos de la forma (a, b), donde a y b son objetos matematicos cualesquiera. Tambien son objetos matematicos y de distinta naturaleza las 3-*uplas*, las 4-*uplas* y en general las n-*uplas* para n un numero natural mayor o igual a 2. Cabe destacar que en nuestro enfoque no habra 1-uplas. Sin envargo, si bien hay una sola 0-*upla*, ella constituye un tipo de objeto matematico distinto a los antes mencionados. El ultimo tipo de objeto matematico que consideraremos es aquel de las *infinituplas*.

Tenemos entonces dividido nuestro universo matematico en las distintas categorias o tipos de objetos:

$$\begin{array}{l} \text{NUMERO} \\ \text{CONJUNTO} \\ \text{PALABRA} \\ 0-\text{UPLA} \\ 2-\text{UPLA} \\ 3-\text{UPLA} \\ \vdots \\ \text{INFINITUPLA} \end{array}$$

(Notar que los simbolos quedan contenidos en la categoria de las palabras). Es importante entender que las anteriores categorias o tipos de objetos son disjuntas entre si, es decir nunca un numero sera una palabra o una palabra sera una 3-upla etc. Esto nos permite definir una funcion Ti la cual a un objeto matematico le asigna su tipo de objeto matematico segun la lista anterior. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} Ti(\pi) &= \text{NUMERO} \\ Ti(\mathbf{N}) &= \text{CONJUNTO} \\ Ti(\mathcal{P}(\mathbf{N})) &= \text{CONJUNTO} \\ Ti((1,2,3)) &= 3-\text{UPLA} \\ Ti(\emptyset) &= \text{CONJUNTO} \\ Ti(\varepsilon) &= \text{PALABRA} \\ Ti(\Diamond) &= 0-\text{UPLA} \\ Ti(\alpha) &= \text{PALABRA, si } \alpha \text{ es un simbolo} \end{aligned}$$

Escarabajo y Mariposa

Para hacer divertido nuestro desarrollo crearemos dos personajes que con su personalidad nos dejaran analizar las distintas maneras de hacer matematica. El *escarabajo* es netamente sintactico y mecanico, no le gusta pensar los conceptos matematicos imaginando los objetos involucrados en los mismos, simplemente quiere avanzar (sin mucho pensamiento) aplicando reglas sintacticas que le permitan obtener nuevas ecuaciones o expresiones matematicas. El vive en el mundo plano de las palabras y ahi se siente apasionado por sus habiles movimientos mecanicos. El escarabajo es en algun sentido una maravilla de la destreza mecanico-simbolica. La *mariposa* es todo lo contrario, le interesa pensar en los objetos matematicos como si fueran reales dentro de su imaginacion fantastica y con su habilidad de volar contempla el universo matematico desde un punto de vista conceptual e independiente de la manipulacion sintactica. Reconoce como objetos reales de su universo matematico no solo a los objetos finitarios (palabras, numeros, etc) sino tambien a toda la gama de objetos sofisticados transfinitos que se pueden construir con la imaginacion y la especulacion matematica. Mantiene este universo matematico en su imaginacion dandole existencia y coherencia mas alla del mundo limitado de los objetos sintacticos que usa para expresarse. La mariposa es en algun sentido una maravilla de la imaginacion matematica coherente.

A modo de ejemplo, al escarabajo la matematica orientada a objetos descripta en la seccion anterior no le hace mucha gracia ya que es perezoso para imaginar los objetos asociados a los simbolos. Al contrario, la mariposa solo concibe la matematica orientada a objetos, los cuales piensa e imagina con un grado de realidad exacerbado.

En general la matematica se enseña con un estilo muy escarabajo y aun en las universidades esto persiste, manifestandose mas en las carreras de ciencias de la computacion que en las vinculadas a la matematica clasica. Es natural que esto suceda ya que los informaticos manipulan constantemente objetos sintacticos usando reglas mecanicas y a veces los objetos subyacentes (semantica) pasan a un segundo plano.

El concepto de funcion

Asumiremos que el lector tiene una idea intuitiva del concepto de funcion. Daremos aqui una definicion matematica de dicho concepto. Una *funcion* es un conjunto f de pares ordenados con la siguiente propiedad

(F) Si $(x,y) \in f$ y $(x,z) \in f$, entonces $y = z$.

Por ejemplo, si tomamos $f = \{(x,x^2) : x \in \omega\}$ se puede ver facilmente que f cumple la propiedad (F). Dada una funcion f, definamos

$$\begin{aligned} D_f &= \text{ dominio de } f = \{x : (x,y) \in f \text{ para algun } y\} \\ I_f &= \text{ imagen de } f = \{y : (x,y) \in f \text{ para algun } x\} \end{aligned}$$

A veces escribiremos $\mathrm{Dom}(f)$ y $\mathrm{Im}(f)$ para denotar, respectivamente, el dominio y la imagen de una funcion f. Notese que $\emptyset$ es una funcion y que $D_\emptyset = I_\emptyset = \emptyset$. Si $f = \{(x,x^2) : x \in \omega\}$ se tiene que $D_f = \omega$ y $I_f = \{y : y = x^2 \text{ para algun } x \in \omega\}$. Si $f = \{(x,1) : x \in \{1,6,18\}\}$, entonces $D_f = \{1,6,18\}$ y $I_f = \{1\}$.

Convencion Notacional 1: Como es usual, dado $x \in D_f$, usaremos $f(x)$ para denotar al unico $y \in I_f$ tal que $(x,y) \in f$. Por ejemplo, si $f = \{(x,x^2) : x \in \omega\}$ se tiene que $f(x) = x^2$, para cada $x \in D_f = \omega$.

Convencion Notacional 2: Escribiremos $f : S \subseteq A \to B$ para expresar que f es una funcion tal que $D_f = S \subseteq A$ y $I_f \subseteq B$. Tambien escribiremos $f : A \to B$ para expresar que f es una funcion tal que $D_f = A$ y $I_f \subseteq B$. En tal contexto llamaremos a B *conjunto de llegada*. Por supuesto B no esta determinado por f ya que solo debe cumplir $I_f \subseteq B$. Es decir que cualquier conjunto B que contenga a I_f puede ser considerado conjunto de llegada de f.

Convencion Notacional 3: Muchas veces para definir una funcion f, lo haremos dando su dominio y su regla de asignacion, es decir especificaremos en forma precisa que conjunto es el dominio de f y ademas especificaremos en forma presisa quien es $f(x)$ para cada x de dicho dominio. Obviamente esto determina por completo a la funcion f ya que siempre se da que $f = \{(x,f(x)) : x \in D_f\}$. Por ejemplo si decimos que f es la funcion dada por:

$$\begin{aligned} D_f &= \omega \\ f(x) &= 23x^2 \end{aligned}$$

nos estaremos refiriendo a la funcion $\{(x, 23x^2) : x \in \omega\}$. Tambien escribiremos

$$\begin{array}{rcl} f : \omega & \to & \omega \\ x & \to & 23x^2 \end{array}$$

para describir a f. Es decir, a veces para hacer mas intuitiva aun la descripcion de la funcion, tambien incluiremos un conjunto de llegada de dicha funcion y a la regla de asignacion la escribiremos usando una flecha. Para dar otro ejemplo, si escribimos sea f dada por:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{N} & \to & \omega \\ x & \to & \left\{ \begin{array}{lc} x+1 & \text{si } x \text{ es par} \\ x^2 & \text{si } x \text{ es impar} \end{array} \right. \end{array}$$

estaremos diciendo que f es la funcion

$$\{(x, x+1) : x \text{ es par y } x \in \mathbf{N}\} \cup \{(x, x^2) : x \text{ es impar y } x \in \mathbf{N}\}$$

Funcion identidad. Dado un conjunto A, a la funcion

$$\begin{array}{rcl} A & \to & A \\ a & \to & a \end{array}$$

La denotaremos con Id_A y la llamaremos la funcion *identidad sobre* A. Notese que $Id_A = \{(a, a) : a \in A\}$.

Igualdad de funciones. Sean f y g dos funciones. Ya que las mismas son conjuntos, tendremos que f sera igual a g si y solo si para cada par (a, b), se tiene que $(a, b) \in f$ sii $(a, b) \in g$. Muchas veces sera util el siguiente criterio de igualdad de funciones:

Lema 1. *Sean f y g funciones. Entonces $f = g$ sii $D_f = D_g$ y para cada $x \in D_f$ se tiene que $f(x) = g(x)$*

.

Ejercicio 3: Pruebe el lema anterior (en el apunte esta probado)

Ejercicio 4: V o F o I, justifique.

(a) Si

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{N} & \to & \omega \\ x & \to & x^3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbf{N} & \to & \mathbf{R} \\ x & \to & x^3 \end{array}$$

entonces $f = g$

(b) Si

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{N} & \to & \omega \\ x & \to & x^3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbf{N} & \to & \omega \\ x & \to & x^4/x \end{array}$$

entonces $f = g$

(c) Si f es una funcion y $z \in D_f$, entonces $Ti(z) = \text{CONJUNTO}$

(d) $\text{Dom}((1, 2)) = \{1\}$

(e) $\text{Dom}(\{(1, 2)\}) + 1 = 2$

(f) Si f es una funcion, entonces $D_f = \{a : (a, b) \in f\}$

(g) Si $f : A \to B$, entonces $D_f \subseteq A$

(h) Si $f : A \to B$, entonces $I_f = B$

(i) Si f es una función y $g \subseteq f$, entonces g es una función

Funcion caracteristica de un subconjunto. Sea X un conjunto cualquiera y sea $S \subseteq X$. Usaremos χ_S^X para denotar la funcion

$$\begin{array}{rcl} \chi_S^X : X & \rightarrow & \omega \\ x & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in S \\ 0 \text{ si } x \notin S \end{array} \right. \end{array}$$

Llamaremos a χ_S^X la *funcion caracteristica de* S *con respecto a* X. Muchas veces cuando el conjunto X este fijo y sea claro el contexto, escribiremos χ_S en lugar de χ_S^X.

Restriccion de una funcion. Dada una funcion f y un conjunto $S \subseteq D_f$, usaremos $f|_S$ para denotar la *restriccion* de f al conjunto S, i.e. $f|_S = f \cap (S \times I_f)$. Notese que $f|_S$ es la funcion dada por

$$D_{f|_S} = S$$
$$f|_S(e) = f(e), \text{ para cada } e \in S$$

Notese que cualesquiera sea la funcion f tenemos que $f|_\emptyset = \emptyset$ y $f|_{D_f} = f$.

Funciones Σ-mixtas

Sea Σ un alfabeto finito. Dados $n, m \in \omega$, usaremos $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ para abreviar la expresion

$$\overbrace{\omega \times ... \times \omega}^{n \text{ veces}} \times \overbrace{\Sigma^* \times ... \times \Sigma^*}^{m \text{ veces}}$$

Por ejemplo, $\omega^3 \times \Sigma^{*4}$ sera una forma abreviada de escribir $\omega \times \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^*$. Debe quedar claro que estamos haciendo cierto abuso notacional ya que en principio si no hacemos esta convencion notacional, $\omega^3 \times \Sigma^{*4}$ denota un conjunto de pares y $\omega \times \omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^*$ es un conjunto de 7-uplas.

Notese que:

- Cuando $n = m = 0$, tenemos que $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ denota el conjunto $\{\Diamond\}$
- Si $m = 0$, entonces $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ denota el conjunto ω^n
- Si $n = 0$, entonces $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ denota el conjunto Σ^{*m}
- Cuando $\Sigma = \emptyset$, tenemos que $\Sigma^* = \{\varepsilon\}$. O sea que por ejemplo

$$\omega^n \times \Sigma^{*5} = \{(x_1, ..., x_n, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) : x_1, ..., x_n \in \omega\}$$

Es decir que tenemos que tener cuidado cuando leemos esta notacion y no caer en la confucion de interpretarla mal.

Con esta convencion notacional, un elemento generico de $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ es una $(n+m)$-upla de la forma $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m)$. Para abreviar, escribiremos $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ en lugar de $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m)$.

Definicion de funcion Σ-mixta. Sea Σ un alfabeto finito. Dada una funcion f, diremos que f es Σ-*mixta* si cumple las siguientes propiedades

(M1) Existen $n, m \geq 0$, tales que $D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$
(M2) Ya sea $I_f \subseteq \omega$ o $I_f \subseteq \Sigma^*$

Algunos ejemplos:

(E1) Sea $\Sigma = \{\square, \%, \blacktriangle\}$. La funcion

$$\begin{array}{rcl} f: \{(1, \square\%\%), (100, \%\blacktriangle\blacktriangle)\} & \rightarrow & \omega \\ (x, \alpha) & \rightarrow & x + |\alpha| \end{array}$$

es Σ-mixta ya que se cumple (M1) con $n = m = 1$ y tambien cumple (M2). Notese que f no es $\{\square, \%\}$-mixta ya que no cumple (M1) respecto del alfabeto $\{\square, \%\}$. Sin envargo note que f es $\{\square, \%, \blacktriangle, @\}$-mixta

(E2) La funcion

$$\begin{array}{rcl} \omega^4 & \rightarrow & \omega \\ (x, y, z, w) & \rightarrow & x + y \end{array}$$

es Σ-mixta cualesquiera sea el alfabeto Σ

(E3) Sea $\Sigma = \{\square, @\}$. La funcion

$$\begin{array}{rcl} \{\square\square\square, @@\} & \rightarrow & \omega \\ \alpha & \rightarrow & |\alpha| \end{array}$$

es Σ-mixta ya que se cumple (M1) (con $n = 0$ y $m = 1$) y (M2)

(E4) Supongamos $\Sigma = \emptyset$. Tenemos entonces que $\Sigma^* = \{\varepsilon\}$. Por ejemplo

$$\begin{array}{rcl} D & \rightarrow & \omega \\ (x, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) & \rightarrow & x^2 \end{array}$$

donde $D = \{(x, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) : x \text{ es impar}\}$, es Σ-mixta (con $n = 1$ y $m = 3$ en (M1)). Tambien notese que

$$\begin{array}{rcl} \{(\varepsilon, \varepsilon)\} & \rightarrow & \{\varepsilon\} \\ (\varepsilon, \varepsilon) & \rightarrow & \varepsilon \end{array}$$

es Σ-mixta (con $n = 0$ y $m = 2$ en (M1)).

Dejamos al lector la facil prueba del siguiente resultado basico.

Lema 2. *Supongamos $\Sigma \subseteq \Gamma$ son alfabetos finitos. Entonces si f es una funcion Σ-mixta, f es Γ-mixta*

Una funcion Σ-mixta f es Σ-*total* cuando haya $n, m \in \omega$ tales que $D_f = \omega^n \times \Sigma^{*m}$. El lema anterior nos dice que si $\Sigma \subseteq \Gamma$, entonces toda funcion Σ-mixta es Γ-mixta. Sin envargo una funcion puede ser Σ-total y no ser Γ-total, cuando $\Sigma \subseteq \Gamma$. Por ejemplo tomemos $\Sigma = \{\square, \%, \blacktriangle\}$ y $\Gamma = \{\square, \%, \blacktriangle, !\}$, y consideremos la funcion

$$\begin{array}{rcl} f: \omega \times \Sigma^* & \rightarrow & \omega \\ (x, \alpha) & \rightarrow & x + |\alpha| \end{array}$$

Es claro que f es Σ-mixta y Σ-total. Tambien es Γ-mixta ya que $D_f \subseteq \omega \times \Gamma^*$ y $I_f \subseteq \omega$, por lo cual cumple (M1) y (M2). Sin envargo f no es Γ-total ya que D_f no es igual a $\omega^n \times \Gamma^{*m}$, cualesquiera sean n y m.

Como hemos visto recien, una funcion f puede ser Σ-mixta y Γ-mixta para dos alfabetos distintos Σ y Γ e incluso es facil construir un ejemplo en el cual Σ y Γ sean incomparables como conjuntos, es decir que ninguno incluya al otro. Dejamos al lector convencerse de que si f es una funcion que es Σ-mixta para algun alfabeto Σ, entonces hay un alfabeto Σ_0 el cual es el menor de todos los alfabetos respecto de los cuales f es mixta, es decir Σ_0 cumple que f es Σ_0-mixta y si Γ es tal que f es Γ-mixta, entonces $\Sigma_0 \subseteq \Gamma$.

A continuacion daremos algunas funciones Σ-mixtas basicas las cuales seran frecuentemente usadas.

Funciones Suc **y** $Pred$**.** La *funcion sucesor* es definida por

$$\begin{array}{rcl} Suc:\omega & \rightarrow & \omega \\ n & \rightarrow & n+1 \end{array}$$

La *funcion predecesor* es definida por

$$\begin{array}{rcl} Pred:\mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ n & \rightarrow & n-1 \end{array}$$

Las funciones d_a**.** Sea Σ un alfabeto no vacio. Para cada $a \in \Sigma$, definamos

$$\begin{array}{rcl} d_a:\Sigma^* & \rightarrow & \Sigma^* \\ \alpha & \rightarrow & \alpha a \end{array}$$

La funcion d_a es llamada la funcion *derecha sub* a, respecto del alfabeto Σ.

Las funciones $p_i^{n,m}$**.** Sea Σ un alfabeto. Para $n, m \in \omega$ e i tal que $1 \leq i \leq n$, definamos

$$\begin{array}{rcl} p_i^{n,m}:\omega^n \times \Sigma^{*m} & \rightarrow & \omega \\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) & \rightarrow & x_i \end{array}$$

Para $n, m \in \omega$ e i tal que $n+1 \leq i \leq n+m$, definamos

$$\begin{array}{rcl} p_i^{n,m}:\omega^n \times \Sigma^{*m} & \rightarrow & \Sigma^* \\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) & \rightarrow & \alpha_{i-n} \end{array}$$

Las funciones $p_i^{n,m}$ son llamadas *proyecciones*. La funcion $p_i^{n,m}$ es llamada la *proyeccion* n, m, i, respecto del alfabeto Σ. Notese que esta definicion requiere que $n + m \geq 1$ ya que i debe cumplir $1 \leq i \leq n+m$. Ademas notese que siempre la funcion $p_i^{n,m}$ aplicada a una $(n+m)$-upla da la coordenada i-esima de dicha $(n+m)$-upla. Por ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} p_3^{1,3}:\omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* & \rightarrow & \Sigma^* \\ (x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) & \rightarrow & \alpha_2 \end{array}$$

Las funciones $C_k^{n,m}$ **y** $C_\alpha^{n,m}$**.** Sea Σ un alfabeto. Para $n, m, k \in \omega$, y $\alpha \in \Sigma^*$, definamos

$$\begin{array}{rcl} C_k^{n,m}:\omega^n \times \Sigma^{*m} & \rightarrow & \omega \\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) & \rightarrow & k \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} C_\alpha^{n,m}:\omega^n \times \Sigma^{*m} & \rightarrow & \Sigma^* \\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) & \rightarrow & \alpha \end{array}$$

Por ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} C_3^{1,3}:\omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* & \rightarrow & \omega \\ (x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) & \rightarrow & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} C_\varepsilon^{1,3}:\omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* & \rightarrow & \omega \\ (x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) & \rightarrow & \varepsilon \end{array}$$

Notese que $C_k^{0,0} : \{\Diamond\} \rightarrow \{k\}$ y que $C_\alpha^{0,0} : \{\Diamond\} \rightarrow \{\alpha\}$.

Ejercicio 5: V o F o I, justifique.

(a) La funcion $x+1$ es $\emptyset$-mixta

(b) La función

$$\begin{array}{rcl} \left\{(x, \alpha) \in \omega \times \{\#, \&, @\}^* : |\alpha|_\# = 0\right\} & \rightarrow & \omega \\ (x, \alpha) & \rightarrow & |\alpha| . x \end{array}$$

es $\{\&, @\}$-mixta

(c) f es Σ-mixta si existen $n, m \geq 0$, tales que $D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ y $I_f \subseteq \omega \cup \Sigma^*$

(d) Sea $\begin{array}{rcl} f:\omega & \rightarrow & \omega \\ x & \rightarrow & C_2^{1,0} \end{array}$. Entonces $f(5)=2$

El tipo de una funcion mixta. Dada una funcion Σ-mixta f, si $n,m\in\omega$ son tales que $D_f\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}$ y ademas $I_f\subseteq\omega$, entonces diremos que f *es una funcion de tipo* $(n,m,\#)$. Similarmente si $n,m\in\omega$ son tales que $D_f\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}$ y ademas $I_f\subseteq\Sigma^*$, entonces diremos que f *es una funcion de tipo* $(n,m,*)$. Notese que si $f\neq\emptyset$, entonces hay unicos $n,m\in\omega$ y $s\in\{\#,*\}$ tales que f es una funcion de tipo (n,m,s). Sin envargo $\emptyset$ es una funcion de tipo (n,m,s) cualesquiera sean $n,m\in\omega$ y $s\in\{\#,*\}$. De esta forma, cuando $f\neq\emptyset$ hablaremos de "el tipo de f" para refererirnos a esta unica terna (n,m,s). Notese que Suc es de tipo $(1,0,\#)$ y d_a es de tipo $(0,1,*)$.

Ejercicio 6: Hacer

(a) De que tipo es cada una de las siguientes funciones

(i) $C_\varepsilon^{1,2}$

(ii) $\begin{array}{rcl} \left\{(x,\alpha)\in\omega\times\{\#,\&,@\}^*:|\alpha|_\#=0\right\} & \rightarrow & \omega \\ (x,\alpha) & \rightarrow & |\alpha|.x \end{array}$

(iii) Id_ω

(iv) Id_{Σ^*}

(v) $\begin{array}{rcl} \Sigma^* & \rightarrow & \omega \\ \alpha & \rightarrow & |\alpha| \end{array}$

(vi) $\begin{array}{rcl} \{(\varepsilon,\varepsilon)\} & \rightarrow & \{\varepsilon\} \\ (\varepsilon,\varepsilon) & \rightarrow & \varepsilon \end{array}$

(vii) $\begin{array}{rcl} \{\Diamond\} & \rightarrow & \omega \\ \Diamond & \rightarrow & 0 \end{array}$

(b) Que significa la frase

- la relacion "f es una funcion de tipo (n,m,s)" no depende del alfabeto Σ

Intente expresar esto en forma matematica

Predicados Σ-mixtos. Un *predicado Σ-mixto* es una funcion f la cual es Σ-mixta y ademas cumple que $I_f\subseteq\{0,1\}$. Por ejemplo

$$\begin{array}{rcl} \omega\times\omega & \rightarrow & \omega \\ (x,y) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x=y \\ 0 \text{ si } x\neq y \end{array}\right. \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \{1,2,3,4,5\}\times\Sigma^* & \rightarrow & \omega \\ (x,\alpha) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x=|\alpha| \\ 0 \text{ si } x\neq|\alpha| \end{array}\right. \end{array}$$

Operaciones logicas entre predicados. Dados predicados $P:S\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\rightarrow\{0,1\}$ y $Q:S\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\rightarrow\{0,1\}$, con el mismo dominio, definamos nuevos predicados $(P\vee Q)$, $(P\wedge Q)$ y $\neg P$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcl} (P\vee Q):S & \rightarrow & \omega \\ (\vec{x},\vec{\alpha}) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } P(\vec{x},\vec{\alpha})=1 \text{ o } Q(\vec{x},\vec{\alpha})=1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{array}\right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (P\wedge Q):S & \rightarrow & \omega \\ (\vec{x},\vec{\alpha}) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } P(\vec{x},\vec{\alpha})=1 \text{ y } Q(\vec{x},\vec{\alpha})=1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{array}\right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \neg P : S & \rightarrow & \omega \\ (\vec{x},\vec{\alpha}) & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } P(\vec{x},\vec{\alpha}) = 0 \\ 0 & \text{si } P(\vec{x},\vec{\alpha}) = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Composicion de funciones

Dadas funciones f y g definamos la funcion $f \circ g$ de la siguiente manera:

$$D_{f\circ g} = \{e \in D_g : g(e) \in D_f\}$$
$$f \circ g(e) = f(g(e))$$

Notese que

$$f \circ g = \{(e, f(g(e))) : e \in D_g \text{ y } g(e) \in D_f\}$$

(ver Convencion Notacional 3). Veamos un ejemplo. Si f es dada por

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{N} & \rightarrow & \{@,\%\}^* \\ x & \rightarrow & @\%^x@ \end{array}$$

y g es dada por

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \rightarrow & x^2 \end{array}$$

entonces tenemos que $f \circ g$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl} f \circ g : \{x \in \mathbf{R} : x^2 \in \mathbf{N}\} & \rightarrow & \{@,\%\}^* \\ x & \rightarrow & @\%^{x^2}@ \end{array}$$

Notar que $f \circ g = \{(u, v) : \text{existe } z \text{ tal que } (u, z) \in g \text{ y } (z, v) \in f\}$ (por una prueba ver el apunte).

Ejercicio 7: V o F o I, justifique

(a) $Pred = Pred \circ (Pred \circ Suc)$
(b) $Pred \circ (Suc \circ Pred) = Pred$
(c) $Pred \circ (Suc \circ \{(x, x) : x \in \mathbf{N}\}) = Pred \circ Suc$
(d) $\emptyset \circ f = f \circ \emptyset = \emptyset$ cualquiera sea la funcion f
(e) Sea Σ un alfabeto finito. Si $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \omega$ se tiene que $(Suc \circ p_2^{5,0})(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_3$
(f) Sea Σ un alfabeto finito. Entonces $Suc \circ Pred = p_1^{1,0}$
(g) $Suc \circ x = Suc$
(h) $Suc \circ 4 = 5$
(i) Sea Σ un alfabeto finito. Entonces $\emptyset = Pred \circ C_0^{0,0}$
(j) Si $f : D_f \subseteq \omega \rightarrow \omega$ y $g : D_g \subseteq \omega \rightarrow \omega$, entonces $D_{f\circ g} = \{x \in \omega : x \in D_g \text{ y } I_g \subseteq D_f\}$

A la hora de probar enunciados acerca de funciones hay una regla o idea basica que si la tenemos en cuenta nos facilitara la construccion de la prueba.

Regla Pertenecer a la Imagen: Si f es una funcion y ud sabe que $b \in I_f$, entonces escriba a b en la forma $f(a)$ donde a denotara un elemento fijo de D_f tal que $f(a) = b$

Muchas veces tener esta regla en mente es de suma utilidad al hacer pruebas. Por ejemplo el lector puede usarla para hacer una prueba rigurosa del ($\Leftarrow$) del enunciado del siguiente ejercicio. Esa regla aqui es simplemente un consejo o sugerencia pero gana su existencia material en un entorno de inteligencia artificial al transformarse en parte de la estructura de un probador automatico de teoremas!

Ejercicio 8: Pruebe que $f \circ g \neq \emptyset$ si y solo si $I_g \cap D_f \neq \emptyset$ (esta probado en el apunte). Notese que este resultado nos dice que que muchas veces sucedera que $f \circ g = \emptyset$.

Funciones de la forma $[f_1, ..., f_n]$

Dadas funciones $f_1, ..., f_n$, con $n \geq 2$, definamos la funcion $[f_1, ..., f_n]$ de la siguiente manera:

$$D_{[f_1,...,f_n]} = D_{f_1} \cap ... \cap D_{f_n}$$
$$[f_1, ..., f_n](e) = (f_1(e), ..., f_n(e))$$

Notese que $I_{[f_1,...,f_n]} \subseteq I_{f_1} \times \cdots \times I_{f_n}$. Por conveniencia notacional (que el lector entendera mas adelante) definiremos $[f_1] = f_1$. Es decir que hemos definido para cada sucecion de funciones $f_1, ..., f_n$, con $n \geq 1$, una nueva funcion la cual denotamos con $[f_1, ..., f_n]$.

Ejercicio 9: V o F o I, justifique

(a) Sea Σ un alfabeto y supongamos $\# \in \Sigma$. Entonces
$$p_4^{2,3} \circ [p_1^{1,1}, p_1^{1,1}, p_2^{1,1}, C_{\#\#}^{1,1}, p_2^{1,1}] = C_{\#\#}^{1,1}$$
(b) Si $f : \omega^2 \to \omega$, entonces $f = f \circ [x, y]$
(c) $[p_2^{2,3}, Suc] = \emptyset$
(d) Supongamos $f_i : \omega \to \omega$, para $i \in \{1, ..., n\}$, con $n \geq 2$. Entonces $I_{[f_1,...,f_n]} = I_{f_1} \times \cdots \times I_{f_n}$

Funciones inyectivas, suryectivas y biyectivas

Una funcion f es *inyectiva* cuando no se da que $f(a) = f(b)$ para algun par de elementos distintos $a, b \in D_f$. Dicho de otra manera, f sera inyectiva cuando se de la implicacion

$$f(a) = f(b) \text{ implica } a = b$$

cualesquiera sean $a, b \in D_f$. Dada una funcion $f : A \to B$ diremos que f es *suryectiva* cuando $I_f = B$. Debe notarse que el concepto de suryectividad depende de un conjunto de llegada previamente fijado, es decir que no tiene sentido hablar de la suryectividad de una funcion f si no decimos respecto de que conjunto de llegada lo es. Muchas veces diremos que una funcion f es *sobre* para expresar que es suryectiva.

Dada una funcion $f : A \to B$ diremos que f es *biyectiva* cuando f sea inyectiva y suryectiva. Tambien diremos que f es una *biyeccion de A en B* cuando $f : A \to B$ sea biyectiva. Notese que si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces para cada $b \in B$ hay un unico $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Entonces cuando $f : A \to B$ es biyectiva podemos definir una nueva funcion $f^{-1} : B \to A$, de la siguiente manera:

$$f^{-1}(b) = \text{ unico } a \in A \text{ tal que } f(a) = b$$

La funcion f^{-1} sera llamada la *inversa de f*. Notese que $f \circ f^{-1} = Id_B$ y $f^{-1} \circ f = Id_A$. El siguiente lema muestra que esta ultima propiedad caracteriza la inversa.

Ejercicio 10: V o F o I, justifique.

(a) Una función f es inyectiva si $f(x) = f(y)$ cada vez que $x = y$

(b) $F : A \rightarrow B$ es suryectiva sii para cada $a \in A$ existe un $b \in B$ tal que $b = F(a)$

Ejercicio 11: Hacer:

(a) Dar una biyeccion entre $\mathbf{N}$ y ω. Idem entre ω y $\{x \in \omega : x \text{ es par}\}$

(b) Dar una funcion inyectiva de ω^2 en ω

(c) Dar una funcion sobreyectiva de ω en ω^5

Lema 3. *Supongamos $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$ son tales que $f \circ g = Id_B$ y $g \circ f = Id_A$. Entonces f y g son biyectivas, $f^{-1} = g$ y $g^{-1} = f$.*

Ejercicio 12: Haga una prueba del lema anterior (esta probado en el apunte)

Conjuntos Σ-mixtos

Un conjunto S es llamado Σ-*mixto* si existen $n, m \in \omega$ tales que $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Por ejemplo,

$$\{(x, \alpha) \in \omega \times \{\blacktriangle, !\}^* : |\alpha| = x\}$$

$$\{(0, \blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle, \varepsilon), (1, \%\blacktriangle\%, \blacktriangle\blacktriangle)\}$$

son conjuntos $\{\blacktriangle, \%, !\}$-mixtos. Tambien notese que $\emptyset$ y $\{\Diamond\}$ son conjuntos Σ-mixtos, cualesquiera sea el alfabeto Σ. Por ultimo el conjunto

$$\{(x, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) : x \in \omega \text{ y } x \text{ es impar}\}$$

es $\emptyset$-mixto (con $n = 1$ y $m = 3$).

Ejercicio 13: V o F o I, justifique.

(a) Un conjunto S es Σ-mixto sii $S = D_f$ para alguna función Σ-mixta f

(b) $\{(1, 2, \varepsilon), (1, 2)\}$ es un conjunto Σ-mixto, cualesquiera sea el alfabeto finito Σ

El tipo de un conjunto mixto. Dado un conjunto Σ-mixto S, si $n, m \in \omega$ son tales que $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, entonces diremos que *$S$ es un conjunto de tipo* (n, m). Notese que si $S \neq \emptyset$, entonces hay unicos $n, m \in \omega$ tales que S es un conjunto de tipo (n, m). De esta forma, cuando $S \neq \emptyset$ hablaremos de "el tipo de S" para refererirnos a este unico par (n, m). Tambien es importante notar que de la definicion anterior sale inmediatemante que $\emptyset$ es un conjunto de tipo (n, m) cualesquiera sean $n, m \in \omega$, por lo cual cuando hablemos de EL tipo de un comjunto deberemos estar seguros de que dicho conjunto es no vacio.

Notese que ω es de tipo $(1, 0)$ y Σ^* es de tipo $(0, 1)$.

Ejercicio 14: Hacer

(a) De que tipo es cada uno de los siguientes conjuntos

(i) $\left\{(x, \alpha) \in \omega \times \{\#, \&, @\}^* : |\alpha|_\# = 0\right\}$

(ii) $\{1, 2, 3\}$

(iii) $\{\varepsilon\}$

(iv) $\{\Diamond\}$

(v) $\{(1, \varepsilon)\}$
(vi) $\{(\varepsilon, \varepsilon)\}$

(b) Para el caso $\Sigma = \emptyset$, describa para un $m \in \omega$ dado, como son los conjuntos no vacios de tipo $(0, m)$.

(c) Que significa la frase
- la relacion "S es un conjunto de tipo (n, m)" no depende del alfabeto Σ

Intente expresar esto en forma matematica

Notacion lambda

Usaremos la notacion lambda de Church en la forma que se explica a continuacion. Esta notacion siempre depende de un alfabeto finito previamente fijado. En general en nuestro lenguaje matematico utilizamos diversas expresiones las cuales involucran variables que una vez fijadas en sus valores hacen que la expresion tambien represente un determinado valor u objeto.

En el contexto de la notacion lambda solo se podran utilizar expresiones con caracteristicas muy especiales por lo cual a continuacion iremos describiendo que condiciones tienen que cumplir las expresiones para que puedan ser usadas en la notacion lambda.

(1) Solo utilizaremos expresiones que involucran variables numericas, las cuales se valuaran en numeros de ω, y variables alfabeticas, las cuales se valuaran en palabras del alfabeto previamente fijado. Las variables numericas seran seleccionadas de la lista

$$\begin{array}{l} x, y, z, w, n, m, k, ... \\ x_1, x_2, ... \\ y_1, y_2, ... \\ etc \end{array}$$

Las variables alfabeticas seran seleccionadas de la lista

$$\begin{array}{l} \alpha, \beta, \gamma, \eta, ... \\ \alpha_1, \alpha_2, ... \\ \beta_1, \beta_2, ... \\ etc \end{array}$$

(2) Por ejemplo la expresion:

$$x + y + 1$$

tiene dos variables numericas x e y (y ninguna alfabetica). Si le asignamos a x el valor 2 y a y el valor 45, entonces la expresion $x + y + 1$ produce o representa el valor $48 = 2 + 45 + 1$.

(3) Otro ejemplo, consideremos la expresion

$$|\alpha\beta| + |\alpha|^x$$

la cual tiene una variable numerica x y dos variables alfabeticas α y β. Supongamos ademas que el alfabeto previamente fijado es $\{@, \%\}$. Si le asignamos a x el valor 2, a α el valor @@ y a β el valor %%%, entonces la expresion $|\alpha\beta| + |\alpha|^x$ produce o representa el valor $|@@\%\%\%| + |@@|^2 = 9$.

(4) Para ciertas valuaciones de sus variables la expresion puede no estar definida en el sentido que cuando reemplazamos en ella dichos valores la palabra obtenida no representa en forma precisa un objeto. Por ejemplo la expresion

$$Pred(|\alpha|)$$

cuando le asignamos a α la palabra ε, nos queda la expresion $Pred(|\varepsilon|)$ la cual no representa un objeto matematico en forma precisa. Otro ejemplo, consideremos la expresion

$$x/(y-|\alpha|)^2$$

Esta expresion no esta definida o no asume valor para aquellas asignaciones de valores a sus variables en las cuales el valor asignado a y sea igual a la longitud del valor asignado a α. Un ultimo ejemplo, la expresion

$$x/y/z$$

no esta definida en forma precisa cuando le damos a x, y, z los valores $100, 10, 5$ ya que nos queda la expresion $100/10/5$ la cual es imprecisa puesto que es ambigua ya que no sabemos en que orden dividir.

(5) En los ejemplos anteriores las expresiones producen valores numericos pero tambien trabajaremos con expresiones que producen valores alfabeticos. Por ejemplo la expresion

$$\beta^y$$

tiene una variable numerica, y, una variable alfabetica, β, y una vez valuadas estas variables produce un valor alfabetico, a saber el resultado de elevar el valor asignado a la variable β, a el valor asignado a y.

(6) Tambien consideraremos expresiones en las cuales no ocurren variables, es decir ellas representan un valor concreto. Por ejemplo la expresion

$$5$$

siempre produce el valor 5. O la expresion

$$17+11$$

siempre produce el valor 28. Tambien la expresion

$$1/0$$

no tiene variables y ademas es siempre indefinida. Es decir no representa un valor u objeto.

(7) Una expresion E para poder ser utilizada en la notacion lambda relativa a un alfabeto Σ debera cumplir alguna de las dos siguientes propiedades
   (a) los valores que asuma E cuando hayan sido asignados valores de ω a sus variables numericas y valores de Σ^* a sus variables alfabeticas deberan ser siempre elementos de ω
   (b) los valores que asuma E cuando hayan sido asignados valores de ω a sus variables numericas y valores de Σ^* a sus variables alfabeticas deberan ser siempre elementos de Σ^*

   Cabe destacar que la expresion E puede, para alguna asignacion de valores de ω a sus variables numericas y valores de Σ^* a sus variables alfabeticas, no estar definida o representar en forma precisa algun objeto matematico.

(8) Por ejemplo la expresion

$$x/2$$

no cumple la propiedad dada en (7) ya que para ciertos valores de ω asignados a la variable x, la expresion da valores numericos que se salen de ω por lo cual no cumple ni (a) ni (b).

(9) Otro ejemplo, si el alfabeto fijado es $\Sigma = \{@, \%\}$, entonces la expresion

$$@^x\$^y$$

no cumple la propiedad dada en (7) ya que por ejemplo cuando le asignamos a x el valor 2 y a y el valor 6, la expresion nos da la palabra @@$$$$$$ la cual no pertenece a Σ^* por lo cual no cumple ni (a) ni (b).

(10) No necesariamente las expresiones que usaremos en la notacion lambda deben ser hechas como combinacion de operaciones matematicas conocidas. Muchas veces usaremos expresiones que involucran incluso lenguaje coloquial castellano. Por ejemplo la expresion

el menor numero primo que es mayor que x

Es claro que esta expresion para cada valor de ω asignado a la variable x produce o representa un valor concreto de ω. Otro ejemplo:

el tercer simbolo de α

notese que esta expresion, una ves fijado un alfabeto Σ, estara definida o producira un valor solo cuando le asignamos a α una palabra de Σ^* de longitud mayor o igual a 3.

(11) **Expresiones Booleanas.** A las expresiones Booleanas tales como

$$x = y + 1 \text{ y } |\alpha| \leq 22$$

las pensaremos que asumen valores del conjunto $\{0, 1\} \subseteq \omega$. Por ejemplo la expresion anterior asume o produce el valor 1 cuando le asignamos a x el valor 11, a y el valor 10 y a α la palabra ε. Las expresiones Booleanas pensadas de esta forma podran ser utilizadas en la notacion lambda si es que tambien cumplen con las anteriores condiciones. Otro ejemplo

$$11 = 17$$

es una expresion Booleana que no tiene variables y siempre produce el valor 0.

(12) Seremos muy estrictos en lo que respecta a cuando "una expresion E esta definida (o representa o produce) en forma precisa un valor, para una valuacion dada de sus variables". El criterio sera similar al usado en la tombola con los vofois en el sentido que la mas minima impresicion ya implicara que para esa valuacion la expresion no esta definida. Algunos ejemplos:

(a) Consideremos la expresion

$$0.Suc(z, z)$$

Uno podria pensar que cualquiera sea el valor de ω asignado a la variable z, la expresion produce el valor 0, ya que cualquiera sea el valor de $Suc(z, z)$, al multiplicarlo por 0 nos dara 0. Sin embargo para nosotros la expresion $0.Suc(z, z)$ no estara definida en forma precisa cualquiera sea el valor que le asignemos a z y esto es porque $Suc(z, z)$ tiene una imprecision ya que Suc no se aplica a pares ordenados.

(b) Consideremos la expresion

$$0.(4/x/2)$$

Esta expresion no estara definida en forma precisa para ningun valor de x ya que la expresion $4/x/2$ es ambigua puesto que no aclara en que orden se realizan las divisiones. Notese que aunque al multiplicar por 0 podriamos pensar que la expresion produce siempre 0, optamos por convenir que la expresion nunca produce en forma precisa valores u objetos.

(c) Consideremos la expresion Booleana

$$Pred(0) = 1 \text{ o } 5 \leq x$$

Uno podria pensar que esta expresion produce el valor 1 cuando le asignamos a x un valor mayor o igual a 5 ya que independientemente de que signifique $Pred(0) = 1$ se hace verdadero que $5 \leq x$ por lo cual sera verdadero el "o" de ambos enunciados. Sin embargo esta expresion no esta definida en forma precisa para ninguna asignacion de valores a x ya que $Pred(0)$ es una imprecision que es parte de la expresion. (O sea sucede lo mismo que en los vofois).

(d) Consideremos la expresion Booleana

$$(\forall t \in \emptyset)\ Pred(x).t \text{ es impar}$$

Uno podria pensar que esta expresion produce el valor 1 independientemente de cuanto vale x ya que debemos chequear que $Pred(x).t$ sea impar para 0 valores posibles de t. Sin embargo esta expresion no esta definida en forma precisa para el caso en que hacemos valer 0 a x ya que en este caso $Pred$ no esta definida. Obviamente para cualquier valor de $\mathbf{N}$ que asignemos a x la expresion produce en forma precisa el valor 1

Expresiones lambdificables con respecto a Σ. Dado un alfabeto Σ a las expresiones que cumplan las caracteristicas dadas anteriormente las llamaremos *lambdificables con respecto a* Σ. Notese que este concepto es intuitivo y no un concepto matematicamente definido en forma precisa. Mas aun el concepto de expresion tampoco ha sido definido matematicamente (aunque obviamente si sabemos que una expresion es una palabra de cierto alfabeto). Esto no nos traera problemas para el uso notacional que las utilizaremos. Recien en las secciones de logica veremos la matematizacion de ciertas expresiones (no las lambdificables) y nos servira de ejemplo para imaginar como podriamos matematizar el concepto de expresion.

Algunos ejemplos:

(E1) $x/2$ no es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ
(E2) $@^x\$^y$ es lambdificable con respecto a $\{@, \$\}$ y no es lambdificable con respecto a $\{@, \#, \%\}$
(E3) $x = y + 1$ es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ
(E4) la expresion

$$\text{el menor numero primo que es mayor que } x^{|\beta|}$$

es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ

(E5) la expresion

$$5$$

es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ

(E6) la expresion

$$Suc(x/20)$$

es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ. Notese que esta expresion no esta definida o no asume valor para aquellas asignaciones de valores a x en las cuales $x/20$ no sea un elemento de ω ya que en estos casos $x/20$ no pertenece al dominio de Suc. Mas concretamente dicha expresion esta definida o produce un valor cuando le asignamos a x un valor multiplo de 20. Notese que sin enbargo, la expresion

$$(x/20) + 1$$

no es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ (por que?).

Definicion de $\lambda x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m [E]$. Supongamos ya hemos fijado un alfabeto finito Σ y supongamos E es una expresion la cual es lambdificable con respecto a Σ. Sea $x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m$ (con $n, m \in \omega$) una lista de variables todas distintas tal que las variables numericas que ocurren en E estan todas contenidas en la lista $x_1, ..., x_n$ y las variables alfabeticas que ocurren en E estan en la lista $\alpha_1, ..., \alpha_m$ (puede suceder que haya variables de la lista $x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m$ las cuales no ocurran en E).g Entonces

$$\lambda x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m [E]$$

denotara la funcion definida por:

(L1) El dominio de $\lambda x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m [E]$ es el conjunto de las $(n + m)$-uplas $(k_1, ..., k_n, \beta_1, ..., \beta_m) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tales que E esta definida en forma precisa cuando le asignamos a cada x_i el valor k_i y a cada α_i el valor β_i.

(L2) $\lambda x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m [E] (k_1, ..., k_n, \beta_1, ..., \beta_m) =$ valor que asume, produce o representa E cuando le asignamos a cada x_i el valor k_i y a cada α_i el valor β_i.

Notese que por tener E la propiedad (7) de mas arriba, la funcion $\lambda x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m [E]$ es Σ-mixta de tipo (n, m, s) para algun $s \in \{\#, *\}$. Tambien notese que cuando $n = m = 0$ la expresion E debera no tener variables y $\lambda x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m [E]$ pasara a ser $\lambda [E]$. Ademas $\lambda [E]$ sera la funcion vacia cuando E no produsca o represente un valor y en caso contrario $\lambda [E]$ tendra dominio igual a $\{\Diamond\}$. Algunos ejemplos:

(a) Supongamos fijamos el alfabeto $\Sigma = \{@, ?, ¡\}$. Entonces $\lambda x\alpha \left[\alpha^{2x}\right]$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl} \omega \times \{@, ?, ¡\}^* & \rightarrow & \{@, ?, ¡\}^* \\ (x, \alpha) & \rightarrow & \alpha^{2x} \end{array}$$

Aqui el lector puede notar la dependencia de la notacion lambda respecto del alfabeto fijado. Si en lugar de fijar $\Sigma = \{@, ?, ¡\}$ hubieramos fijado $\Sigma = \{\%\}$, entonces $\lambda x\alpha \left[\alpha^{2x}\right]$ denotaria otra funcion, a saber

$$\begin{array}{rcl} \omega \times \{\%\}^* & \rightarrow & \{\%\}^* \\ (x, \alpha) & \rightarrow & \alpha^{2x} \end{array}$$

(b) Supongamos fijamos el alfabeto $\Sigma = \{@, ?, ¡\}$. Entonces $\lambda x\alpha\,[5]$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl} \omega \times \{@, ?, ¡\}^* & \rightarrow & \omega \\ (x, \alpha) & \rightarrow & 5 \end{array}$$

(c) Supongamos fijamos el alfabeto $\Sigma = \{\%, !\}$. Entonces $\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl} \{\%, !\}^* \times \{\%, !\}^* & \rightarrow & \{\%, !\}^* \\ (\alpha, \beta) & \rightarrow & \alpha\beta \end{array}$$

Tambien tenemos que $\lambda\beta\alpha\,[\alpha\beta]$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl} \{\%, !\}^* \times \{\%, !\}^* & \rightarrow & \{\%, !\}^* \\ (\beta, \alpha) & \rightarrow & \alpha\beta \end{array}$$

Notese que estas funciones son distintas. Por ejemplo $\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\,(\%, !) = \%!$ y $\lambda\beta\alpha\,[\alpha\beta]\,(\%, !) = !\%$

(d) Independientemente de quien sea Σ el alfabeto previamente fijado, tenemos que $\lambda xy[x + y]$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl} \omega^2 & \rightarrow & \omega \\ (x, y) & \rightarrow & x + y \end{array}$$

Tambien $\lambda xyzw[x + w]$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl} \omega^4 & \rightarrow & \omega \\ (x, y, z, w) & \rightarrow & x + w \end{array}$$

(e) Supongamos fijamos el alfabeto $\Sigma = \{@, ?, ¡\}$. Entonces por la clausula (L1) tenemos que el dominio de la funcion $\lambda xy\alpha\beta\,[Pred(|\alpha|) + Pred(y)]$ es

$$D = \left\{(x, y, \alpha, \beta) \in \omega^2 \times \Sigma^{*2} : |\alpha| \geq 1 \text{ y } y \geq 1\right\}$$

Es decir que $\lambda xy\alpha\beta\,[Pred(|\alpha|) + Pred(y)]$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl} D & \rightarrow & \omega \\ (x, y, \alpha, \beta) & \rightarrow & Pred(|\alpha|) + Pred(y) \end{array}$$

(f) Atentos a (11) de mas arriba, la funcion $\lambda xy\,[x = y]$ es el predicado

$$\begin{array}{rcl} \omega \times \omega & \rightarrow & \omega \\ (x, y) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x = y \\ 0 \text{ si } x \neq y \end{array}\right. \end{array}$$

y $\lambda x\alpha\,[Pred(x) = |\alpha|]$ es el predicado

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{N} \times \Sigma^* & \rightarrow & \omega \\ (x, \alpha) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } Pred(x) = |\alpha| \\ 0 \text{ si } Pred(x) \neq |\alpha| \end{array}\right. \end{array}$$

Tambien $\lambda\alpha\beta\,[\alpha = \beta]$ es el predicado

$$\begin{array}{rcl} \Sigma^* \times \Sigma^* & \rightarrow & \omega \\ (\alpha, \beta) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } \alpha = \beta \\ 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \end{array}\right. \end{array}$$

(g) Notar que para $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ se tiene que $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m\,[(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S]$

(h) Como dijimos, la notacion lambda depende del alfabeto previamnete fijado, aunque para el caso en que la lista de variables que sigue a la letra λ no tenga variables alfabeticas, la funcion representada no depende del alfabeto.

(i) La funcion $\lambda x\,[Suc(x/20)]$ es la siguiente funcion:

$$\begin{array}{rcl}\{x\in\omega : 20 \text{ divide a } x\} & \rightarrow & \omega \\ x & \rightarrow & x+1\end{array}$$

(j) La funcion $\lambda\,[5]$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl}\{\lozenge\} & \rightarrow & \omega \\ \lozenge & \rightarrow & 5\end{array}$$

(k) La funcion $\lambda\,[1/0]$ es la funcion vacia, es decir $\lambda\,[1/0]=\emptyset$

(l) La funcion $\lambda\,[11=17]$ es la funcion

$$\begin{array}{rcl}\{\lozenge\} & \rightarrow & \omega \\ \lozenge & \rightarrow & 0\end{array}$$

Algunos ejemplos sutiles.

(a) La expresion

$$Suc$$

no es lambdificable respecto de cualquier alfabeto Σ. Esto es porque si bien cualesquiera sea el valor asignado a las variables, ella asume el valor Suc (ya que no tiene variables), no cumple (6) de mas arriba ya que Suc no es un elemento de ω ni tampoco una palabra (es una funcion!)

(b) La expresion

$$Suc+(|\beta|+1)$$

es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ. Por ejemplo $\lambda x\beta[Suc+(|\beta|+1)]$ es la funcion $\emptyset$, ya que la expresion $Suc+(|\beta|+1)$ cualesquiera sean los valores de x y β no esta definida.

(c) La expresion

$$Suc+1$$

es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ ya que no esta definida nunca y obtenemos entonces que $\lambda x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m[Suc+1]$ es la funcion $\emptyset$, cualesquiera sean las variables $x_1...x_n\alpha_1...\alpha_m$. En particular $\lambda[Suc+1]=\emptyset$.

Ejercicio 15: V o F o I, justifique

(a) La expresion

$$|\alpha\#@@|+x$$

no es lambdificable con respecto a $\{\#,\%\}$

(b) La expresion

$$x+1=1/3$$

es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ

(c) La expresion

$$\lambda x[x^2]+(|\beta|+1)$$

es lambdificable con respecto a Σ cualesquiera sea Σ

Ejercicio 16: V o F o I, justifique

(a) $\lambda xy[x+y]=\lambda yx[x+y]$

(b) Si $f:\Sigma^{*2}\rightarrow\omega$, entonces $\lambda\alpha\beta[f(\alpha,\beta)]=\lambda\beta\alpha[f(\beta,\alpha)]$

(c) $\lambda xy\alpha\beta\left[Pred(|\alpha|)+Pred(y)\right]$ es la función

$$\begin{array}{rcl}\left\{(x,y,\alpha,\beta)\in\omega^2\times\Sigma^{*2}:|\alpha|.y\neq 0\right\} & \rightarrow & \omega \\ (x,y,\alpha,\beta) & \rightarrow & (|\alpha|+y)-2\end{array}$$

(d) $D_{\lambda xy[x^2]}=\omega$
(e) $\lambda x[Pred(x).0]=C_0^{1,0}$
(f) $Suc=\lambda x[Suc]$
(g) $\lambda xy[x.y]\circ[\lambda xy[x.y],C_1^{2,0}]=\lambda xy[x.y]$
(h) Sea $\Sigma=\{\bigtriangledown,\Box\}$. Entonces $\lambda\alpha\beta[\alpha=\Box\beta]=\lambda\alpha\beta[\alpha=\beta]\circ\Big[p_1^{0,2},\lambda\alpha\beta[\alpha\beta]\circ\Big[d_\Box\circ C_\varepsilon^{0,0},p_2^{0,2}\Big]\Big]$

Ordenes totales

Sea A un conjunto. Recordemos que una *relacion binaria sobre* A es un subconjunto de A^2. Algunos ejemplos:

(E1) Sea $R=\{(1,2),(2,3)\}$. Entonces R es una relacion binaria sobre $\mathbf{N}$.
(E2) Sea $R=\{(x,y)\in\omega^2:x$ divide a $y\}$. Entonces R es una relacion binaria sobre ω.
(E3) Sea $R=\{(r,t)\in\mathbf{R}^2:r\leq t\}$. Entonces R es una relacion binaria sobre $\mathbf{R}$
(E4) $\emptyset$ es una relacion binaria sobre A, cualesquiera sea el conjunto A.
(E5) Sea $R=\{(x,y)\in\omega^2:x<y$ o $y=0\}$. Entonces R es una relacion binaria sobre ω

Notese que si R es una relacion binaria sobre A y $A\subseteq B$ entonces R es una relacion binaria sobre B. Por ejemplo las relaciones dadas en los ejemplos (E1), (E2), (E4) y (E5) tambien son relaciones binarias sobre $\mathbf{R}$

Como es usual, cuando R sea una relacion binaria sobre un conjunto A, algunas veces escribiremos aRb en lugar de $(a,b)\in R$.

Recordemos que una relacion binaria R sobre un conjunto A es llamada un *orden parcial sobre* A si cumple las siguientes tres propiedades:

Reflexividad xRx, cualesquiera sea $x\in A$
Transitividad xRy y yRz implica xRz, cualesquiera sean $x,y,z\in A$
Antisimetria xRy y yRx implica $x=y$, cualesquiera sean $x,y\in A$

Algunos ejemplos:

(E1) $\{(r,t)\in\mathbf{R}^2:r\leq t\}$ es un orden parcial sobre $\mathbf{R}$, llamado el orden usual de $\mathbf{R}$
(E2) Sea $R=\{(1,2),(1,3),(1,1),(2,2),(3,3)\}$. Entonces R es un orden parcial sobre $\{1,2,3\}$
(E3) Sea $R=\{(S,T)\in\mathcal{P}(\omega)^2:S\subseteq T\}$. Entonces R es un orden parcial sobre $\mathcal{P}(\omega)$
(E4) $\{(x,y)\in\omega^2:x\leq y\}$ es un orden parcial sobre ω.
(E5) Sea $R=\{(1,1)\}$. Entonces R es un orden parcial sobre $\{1\}$.
(E6) $\{(a,b)\in A^2:a=b\}$ es un orden parcial sobre A, cualesquira sea el conjunto A
(E7) Sea $\leq\,=\{(n,m)\in\mathbf{N}^2:n\mid m\}$. Es facil ver que $\leq$ es un orden parcial sobre $\mathbf{N}$

Notese que las relaciones dadas en (E1) y (E4) son distintas, ademas

Ejercicio 17: Es la relacion dada en (E4) un orden parcial sobre $\mathbf{R}$?

Muchas veces denotaremos con $\leq$ a una relacion binaria que sea un orden parcial. Esto hace mas intuitiva nuestra escritura pero siempre hay que tener en cuenta que $\leq$ en estos casos esta denotando cierto conjunto de pares ordenados previamente definido.

Usaremos la siguiente

Convencion notacional Si hemos denotado con $\leq$ a cierto orden parcial sobre un conjunto A, entonces

- Denotaremos con $<$ a la relacion binaria $\{(a,b) \in A^2 : a \leq b \text{ y } a \neq b\}$. Es decir que $< = \{(a,b) \in A^2 : a \leq b \text{ y } a \neq b\}$. Cuando se de $a < b$ diremos que *a es menor que b* o que *b es mayor que a* (*respecto de* $\leq$)

Por ejemplo, si $A = \{1,2,3,4\}$ y $\leq = \{(1,2),(2,3),(1,3),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$, entonces $< = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$.

Ahora sí estamos en condiciones de definir orden total. Sea A un conjunto cualquiera. Por un *orden total sobre* A entenderemos un orden parcial $\leq$ sobre A el cual cumple:

(C) $a \leq b$ o $b \leq a$, cualesquiera sean $a, b \in A$

Ejercicio 18: Decida cuáles ordenes parciales de la lista de ejemplos (E1)-(E7) son ordenes totales.

Supongamos A es finito, no vacio, y que $\leq$ es un orden total sobre A. La propiedad (C) nos permite probar que para cada conjunto no vacio $S \subseteq A$, hay un elemento $s \in S$ el cual cumple $s \leq s'$ para cada $s' \in S$. Por supuesto, s es unico (por que?) y habitualmente es llamado el *menor elemento de* S, ya que es menor que todo otro elemento de S.

Si A es finito, no vacio, y $\leq$ es un orden total sobre A, podemos definir recursivamente una funcion $f : \{1,...,|A|\} \to A$ de la siguiente manera:

- $f(1) =$ menor elemento de A
- Si $i \in \{1,...,|A|-1\}$, entonces
  - $f(i+1) =$ menor elemento de $A - \{f(1),...,f(i)\}$

Como es habitual, $f(i)$ es llamado el *i-esimo elemento de* A.

Muchas veces para dar un orden total sobre un conjunto finito A, daremos simplemente sus elementos en forma creciente ya que esto determina el orden por completo. Por ejemplo si $A = \{1,2,3\}$, el orden total dado por $2 < 1 < 3$ es la relacion $\leq = \{(2,1),(1,3),(2,3),(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

Ejercicio 19: Sea A un conjunto finito de n elementos, con $n > 0$. Encuentre una biyección entre $\{R : R \text{ es un orden total sobre } A\}$ y $\{(a_1,\ldots,a_n) \in A^n : a_i \neq a_j \text{ para } i \neq j\}$. ¿Por qué este resultado se puede considerar informático?