

## GUIA 6 DE LENGUAJES: MINIMIZACION Y FUNCIONES Σ-RECURSIVAS

Tal como fue explicado en el comienzo de la Guia 5, para obtener la clase de las funciones  $\Sigma$ -recursivas debemos agregar un nuevo constructor a los ya definidos de composicion y recursion primitiva, a saber, el constructor de *minimizacion*. Tiene dos casos aunque solo usaremos el primero para la definicion de funcion  $\Sigma$ -recursiva.

### MINIMIZACION DE VARIABLE NUMERICA

Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito y sea  $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  un predicado. Dado  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ , cuando exista al menos un  $t \in \omega$  tal que  $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$ , usaremos  $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$  para denotar al menor de tales  $t$ 's. Notese que la expresion  $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$  esta definida solo para aquellas  $(n+m)$ -uplas  $(\vec{x}, \vec{\alpha})$  para las cuales hay al menos un  $t$  tal que se da  $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$ . Dicho de otra forma,  $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$  no estara definida cuando para cada  $t \in \omega$  se de que  $(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$  no pertenece a  $D_P$  o  $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 0$ . Otro detalle importante a tener en cuenta es que la expresion  $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$  no depende de la variable  $t$ . Por ejemplo, las expresiones  $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$  y  $\min_i P(i, \vec{x}, \vec{\alpha})$  son equivalentes en el sentido que estan definidas en las mismas  $(n+m)$ -uplas y cuando estan definidas asumen el mismo valor.

Definamos

$$M(P) = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

Notese que

$$\begin{aligned} D_{M(P)} &= \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists t \in \omega) P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\} \\ M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) &= \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)} \end{aligned}$$

Diremos que  $M(P)$  se obtiene por *minimizacion de variable numerica* a partir de  $P$ .

Veamos algunos ejemplos:

(E1) Tomemos  $P = \lambda t x_1 [t^2 = x_1]$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} D_{M(P)} &= \{x_1 \in \omega : (\exists t \in \omega) P(t, x_1)\} \\ &= \{x_1 \in \omega : (\exists t \in \omega) t^2 = x_1\} \end{aligned}$$

Es decir el dominio de  $M(P)$  es el conjunto de los cuadrados. Ademas para cada  $x_1 \in D_{M(P)}$  tenemos que

$$M(P)(x_1) = \min_t P(t, x_1) = \min_t (t^2 = x_1)$$

por lo cual  $M(P)(x) = \sqrt{x}$ , para cada  $x \in D_{M(P)}$ .

(E2) Cuando  $n = m = 0$ , tenemos que  $P : D_P \subseteq \omega \rightarrow \omega$ . O sea que

$$M(P) = \lambda [\min_t P(t)]$$

Esto nos dice que  $D_{M(P)} \subseteq \{\Diamond\}$ . Ademas  $D_{M(P)} = \{\Diamond\}$  si y solo si  $P(t) = 1$ , para algun  $t \in D_P$ , y en tal caso  $M(P)(\Diamond) = \min_t P(t)$ .

- (E3) Recordemos que dados  $x_1, x_2 \in \omega$ , con  $x_2$  no nulo, el *cociente de dividir*  $x_1$  por  $x_2$  se define como el maximo elemento del conjunto  $\{t \in \omega : t.x_2 \leq x_1\}$ .

Sea

$$\begin{aligned} Q : \omega \times \mathbf{N} &\rightarrow \omega \\ (x_1, x_2) &\rightarrow \text{cociente de dividir } x_1 \text{ por } x_2 \end{aligned}$$

Sea  $P = \lambda t x_1 x_2 [x_1 < t.x_2]$ . Notar que

$$\begin{aligned} D_{M(P)} &= \{(x_1, x_2) \in \omega^2 : (\exists t \in \omega) P(t, x_1, x_2) = 1\} \\ &= \{(x_1, x_2) : (\exists t \in \omega) x_1 < t.x_2\} \\ &= \omega \times \mathbf{N} \end{aligned}$$

Ademas si  $(x_1, x_2) \in \omega \times \mathbf{N}$ , es facil de probar que

$$\min_t x_1 < t.x_2 = Q(x_1, x_2) + 1$$

por lo que  $M(P) = \text{Suc} \circ Q$ . Si quisieramos encontrar un predicado  $P'$  tal que  $M(P') = Q$ , entonces podemos tomar  $P' = \lambda t x_1 x_2 [x_1 < (t+1).x_2]$  y con un poco de concentracion nos daremos cuenta que  $M(P') = Q$ . Por supuesto esto tiene una cuota de artificialidad ya que no es tan obvio que

$$Q(x_1, x_2) = \text{menor } t \in \omega \text{ tal que } x_1 < (t+1).x_2$$

Hay una forma mas intuitiva de hacerlo y es diseñando  $P'$  con la consigna de que para cada  $(x_1, x_2) \in D_Q$  se de que

$$Q(x_1, x_2) = \text{unico } t \in \omega \text{ tal que } P'(t, x_1, x_2)$$

Es decir diseñamos  $P'$  de manera que

$$P'(t, x_1, x_2) = 1 \text{ si y solo si } t = Q(x_1, x_2)$$

Por ejemplo se puede tomar  $P' = \lambda t x_1 x_2 [x_1 \geq t.x_2 \text{ y } x_1 < (t+1).x_2]$  que dicho sea de paso es justo la definicion de cociente dada en la escuela primaria. Dejamos al lector corroborar que  $M(P') = Q$ , para este ultimo  $P'$ , pero note que lo unico que queda por chequear es que  $M(P')$  y  $Q$  tienen el mismo dominio ya que las reglas de asignacion obviamente producen lo mismo.

Tal como lo vimos recien muchas veces que querramos diseñar un predicado  $P$  tal que  $M(P)$  sea igual a una funcion dada  $f$ , sera mas facil diseñar  $P$  de manera que cumpla

$$f(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \text{unico } t \in \omega \text{ tal que } P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$$

cada vez que  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$ . Es decir un predicado  $P$  que caracterice al valor que toma  $f$ , es decir el cual cumpla

$$P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ si y solo si } t = f(\vec{x}, \vec{\alpha})$$

Luego por supuesto deberemos prestar atencion a que  $D_{M(P)} = D_f$ , es decir deberemos tambien lograr que para cada  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$  se de que

$$(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f \text{ si y solo si } \exists t \in \omega P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$$

Enunciamos esto en forma de regla.

**REGLA U:** Si tiene una función  $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  y busca un predicado  $P$  tal que  $f = M(P)$ , intente diseñar  $P$  de manera que para cada  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$  se de que

$$f(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \text{unico } t \in \omega \text{ tal que } P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$$

Luego chequee que además para cada  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$  se de que

$$(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f \text{ si y solo si } \exists t \in \omega \ P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$$

**Ejercicio 1:** Sea  $\Sigma = \{@, !, \%}$ . Para cada caso describa la función  $M(P)$ :

- (a)  $P = \lambda t x_1[x_1 < t]$
- (b)  $P = \lambda t x_1[t < x_1]$
- (c)  $P = \lambda t \alpha \beta[\alpha^t = \beta]$
- (d)  $P = \lambda t \alpha \beta[\alpha = \beta]$
- (e)  $P = \lambda t x_1 x_2[x_2 + t = x_1]$
- (f)  $P = \lambda t \alpha_1[[\alpha_1]_t = \%]$
- (g)  $P = \lambda x y[y < x]$
- (h)  $P = \lambda x_1 t[x_1 < t]$
- (i)  $P = \lambda y x \alpha[[\alpha]_x = \%]$

**Ejercicio 2:** Sea  $E = \lambda x_1[\text{parte entera de } \sqrt{x_1}]$ . Note que por notación lambda  $D_E = \omega$ . Aplique la REGLA U para encontrar un predicado  $P$  tal que  $M(P) = E$ .

**Ejercicio 3:** Encuentre un predicado  $P$  tal que  $M(P) = \lambda x_1 x_2[x_1 - x_2]$ . (Aquí es natural hacerlo sin la idea de la REGLA U.)

**Ejercicio 4:** Sea  $F : \{z^2 : z \in \omega\} \rightarrow \omega$  dada por  $F(x) = \sqrt{x}$ . Encuentre un predicado  $P$  tal que  $M(P) = F$ .

**Ejercicio 5:** Sea  $F : \{(x, y) \in \omega \times \mathbb{N} : y \text{ divide a } x\} \rightarrow \omega$  dada por  $F(x, y) = x/y$ . Encuentre un predicado  $P$  tal que  $M(P) = F$ .

El siguiente lema nos muestra que en algunos casos el constructor de minimización preserva la computabilidad efectiva.

**Lema 1.** Si  $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  es un predicado  $\Sigma$ -efectivamente computable y  $D_P$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable, entonces la función  $M(P)$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable.

*Proof.* Sea  $\mathbb{P}_P$  un procedimiento efectivo que compute a  $P$  y sea  $\mathbb{P}_{D_P}$  un procedimiento efectivo que compute a  $\chi_{D_P}^{\omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m}}$ . Notese que el siguiente procedimiento efectivo (con dato de entrada  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ ) computa la función  $M(P)$ .

Etapa 1: Hacer  $T = 0$  e ir a Etapa 2

Etapa 2: Correr  $\mathbb{P}_{D_P}$  con dato de entrada  $(T, \vec{x}, \vec{\alpha})$  y guardar la salida en  $A$ . Ir a Etapa 3.

Etapa 3: Si  $A = 1$  ir a Etapa 4, caso contrario ir a etapa 6.

Etapa 4: Correr  $\mathbb{P}_P$  con dato de entrada  $(T, \vec{x}, \vec{\alpha})$  y guardar la salida en  $B$ . Ir a Etapa 5.

Etapa 5: Si  $B = 1$ , dar como salida  $T$  y terminar. Caso contrario ir a Etapa 6.

Etapa 6: Hacer  $T = T + 1$  e ir a Etapa 2. ■ Como corolario obtenemos que la

minimización de predicados  $\Sigma$ -totales preserva la computabilidad efectiva:

**Corolario 2.** Si  $P : \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  es un predicado  $\Sigma$ -efectivamente computable, entonces la función  $M(P)$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable.

Lamentablemente si quitamos la hipótesis en el lema anterior de que  $D_P$  sea  $\Sigma$ -efectivamente computable, el lema resulta falso. Mas adelante veremos un ejemplo de esto, basado en la Tesis de Church (esta tesis basicamente dice que el modelo Godeliano de la computabilidad efectiva es correcto (Guia 8)).

**Ejercicio 6:** Intente construir un procedimiento efectivo que compute a  $M(P)$  teniendo un procedimiento efectivo que compute a un predicado  $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ . Seguro fallara en sus intentos pero entendera cual es la dificultad subyacente.

**Ejercicio 7:** (Responder V o F) Si  $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^2 \rightarrow \omega$  es un predicado  $\Sigma$ -efectivamente computable, entonces el siguiente procedimiento computa a  $M(P)$ :

Etapa 1: Hacer  $T = 0$  e ir a Etapa 2

Etapa 2: Si  $(T, x, y) \in D_P$  y  $P(T, x, y) = 1$ , entonces ir a Etapa 4, en caso contrario ir a Etapa 3.

Etapa 3: Hacer  $T = T + 1$  e ir a Etapa 2.

Etapa 4: Dar  $T$  como salida y terminar

**Ejercicio 8:** V o F o I. Justifique.

(a) Sea  $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \rightarrow \omega$  un predicado. Si  $\vec{x} \in \omega^n$  es tal que existe  $t$  en  $\omega$  que cumple  $(t, \vec{x}) \in D_P$ , entonces  $\vec{x} \in D_{M(P)}$ .

(b) Sea  $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \rightarrow \omega$  un predicado. Entonces  $M(P)(\vec{x}) \leq t$

(c) Sea  $P : \omega^n \rightarrow \omega$  un predicado, con  $n \geq 1$ . Entonces  $D_{M(P)} \subseteq \omega^{n-1}$

(d) Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito. Entonces  $M(p_1^{1,2}) = C_0^{0,2}$

### DEFINICION DE FUNCION $\Sigma$ -RECURSIVA

Con este nuevo constructor de funciones estamos en condiciones de definir la clase de las funciones  $\Sigma$ -recursivas. Definamos los conjuntos  $R_0^\Sigma \subseteq R_1^\Sigma \subseteq R_2^\Sigma \subseteq \dots \subseteq R^\Sigma$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} R_0^\Sigma &= PR_0^\Sigma \\ R_{k+1}^\Sigma &= R_k^\Sigma \cup \{f \circ [f_1, \dots, f_n] : f, f_1, \dots, f_r \in R_k^\Sigma, r \geq 1\} \cup \\ &\quad \{R(f, \mathcal{G}) : R(f, \mathcal{G}) \text{ esta definida y } \{f\} \cup \{\mathcal{G}_a : a \in \Sigma\} \subseteq R_k^\Sigma\} \cup \\ &\quad \{R(f, g) : R(f, g) \text{ esta definida y } f, g \in R_k^\Sigma\} \cup \\ &\quad \{M(P) : P \text{ es un predicado } \Sigma\text{-total y } P \in R_k^\Sigma\} \\ R^\Sigma &= \bigcup_{k \geq 0} R_k^\Sigma \end{aligned}$$

Una función  $f$  es llamada  $\Sigma$ -recursiva si pertenece a  $R^\Sigma$ . Cabe destacar que aunque  $M(P)$  fue definido para predicados no necesariamente  $\Sigma$ -totales, en la definición de los conjuntos  $R_k^\Sigma$ , nos restringimos al caso en que  $P$  es  $\Sigma$ -total. Obviamente esto lo hacemos ya que como se explico antes el constructor de minimización no siempre preserva la computabilidad efectiva.

Notese que  $PR_k^\Sigma \subseteq R_k^\Sigma$ , para cada  $k \in \omega$ , por lo cual  $PR^\Sigma \subseteq R^\Sigma$ . Por supuesto el modelo de Godel seria incorrecto si no fuera cierto el siguiente resultado.

**Proposición 3** (Leibniz vence a Godel). *Si  $F \in R^\Sigma$ , entonces  $F$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable.*

*Proof.* Por inducción en  $k$  probaremos que

$\text{Teo}_k$ : Si  $F \in R_k^\Sigma$ , entonces  $F$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable.

$\text{Teo}_0$  es facil y dejado al lector.

$\text{Teo}_k \Rightarrow \text{Teo}_{k+1}$ . Supongamos entonces que  $F \in R_{k+1}^\Sigma$  y que vale  $\text{Teo}_k$ . Veamos que entonces  $F$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable. Ya que vale  $\text{Teo}_k$ , podemos suponer que  $F \in R_{k+1}^\Sigma - R_k^\Sigma$ . Por la definicion de  $R_{k+1}^\Sigma$  surgen varios casos:

Caso  $f \circ [f_1, \dots, f_n]$ , con  $f, f_1, \dots, f_r \in R_k^\Sigma$ ,  $r \geq 1$ . Entonces por un lema del comienzo de la Guia 5 tenemos que  $F$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable ya que  $f, f_1, \dots, f_r$  lo son.

Los distintos casos en los que  $F$  se obtiene por recursion primitiva a partir de funciones de  $R_k^\Sigma$  se siguen de  $\text{Teo}_k$  y los respectivos lemas dados en la Guia 5 los cuales prueban que cada uno de los cuatro casos de recursion primitiva preserva la computabilidad efectiva.

Caso  $F = M(P)$ , con  $P : \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  un predicado perteneciente a  $R_k^\Sigma$ . Sigue directamente del corolario anterior y  $\text{Teo}_k$ . ■

Daremos sin prueba el siguiente conceptualmente importante resultado.

**Proposición 4.** *Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito. Entonces no toda funcion  $\Sigma$ -recursiva es  $\Sigma$ -p.r.. Es decir que  $\text{PR}^\Sigma \subseteq R^\Sigma$  y  $\text{PR}^\Sigma \neq R^\Sigma$ .*

Este resultado no es facil de probar. Mas adelante veremos ejemplos naturales de funciones  $\Sigma$ -recursivas que no son  $\Sigma$ -p.r.. Otro ejemplo natural es la famosa funcion de Ackermann.

**Lema de minimizacion acotada de variable numerica de predicados  $\Sigma$ -p.r.**  
 Como veremos mas adelante, no siempre que  $P \in R^\Sigma$ , tendremos que  $M(P) \in R^\Sigma$ . Sin envargo, el siguiente lema nos garantiza que cuando  $P \in \text{PR}^\Sigma$ , se da que  $M(P) \in R^\Sigma$  y ademas da condiciones para que  $M(P)$  sea  $\Sigma$ -p.r..

**Lema 5** (Lema de minimizacion acotada). *Sean  $n, m \geq 0$ . Sea  $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  un predicado  $\Sigma$ -p.r.. Entonces*

- (a)  *$M(P)$  es  $\Sigma$ -recursiva.*
- (b) *Si hay una funcion  $\Sigma$ -p.r.  $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  tal que*

$$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)},$$

*entonces  $M(P)$  es  $\Sigma$ -p.r..*

*Proof.* (a) Sea  $\bar{P} = P \cup C_0^{n+1,m}|_{(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P}$ . Note que  $\bar{P}$  es  $\Sigma$ -p.r. (por que?). Veremos a continuacion que  $M(P) = M(\bar{P})$ . Notese que

$$\{t \in \omega : P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\} = \{t \in \omega : \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\}$$

Esto claramente dice que  $D_{M(P)} = D_{M(\bar{P})}$  y que  $M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$ , para cada  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$ , por lo cual  $M(P) = M(\bar{P})$ .

Veremos entonces que  $M(\bar{P})$  es  $\Sigma$ -recursiva. Sea  $k$  tal que  $\bar{P} \in \text{PR}_k^\Sigma$ . Ya que  $\bar{P}$  es  $\Sigma$ -total y  $\bar{P} \in \text{PR}_k^\Sigma \subseteq R_k^\Sigma$ , tenemos que  $M(\bar{P}) \in R_{k+1}^\Sigma$  y por lo tanto  $M(\bar{P}) \in R^\Sigma$ .

(b) Ya que  $M(P) = M(\bar{P})$ , basta con probar que  $M(\bar{P})$  es  $\Sigma$ -p.r. Primero veremos que  $D_{M(\bar{P})}$  es un conjunto  $\Sigma$ -p.r.. Notese que

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [\exists t \in \omega]_{t \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

lo cual nos dice que

$$\chi_{D_M(\bar{P})}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] \circ [f, p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}]$$

Pero el Lema de Cuantificacion acotada probado en la Guia 5 nos dice que el predicado  $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$  es  $\Sigma$ -p.r. por lo cual tenemos que  $\chi_{D_M(\bar{P})}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$  lo es. Sea

$$P_1 = \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} [\bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \wedge (\forall j \in \omega)_{j \leq t} (j = t \vee \neg \bar{P}(j, \vec{x}, \vec{\alpha}))]$$

Note que  $P_1$  es  $\Sigma$ -total. Dejamos al lector usando lemas anteriores probar que  $P_1$  es  $\Sigma$ -p.r. Ademas note que para  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$  se tiene que

$$P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ si y solo si } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(\bar{P})} \text{ y } t = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$$

Esto nos dice que

$$M(\bar{P}) = \left( \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[ \prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \right) |_{D_M(\bar{P})}$$

por lo cual para probar que  $M(\bar{P})$  es  $\Sigma$ -p.r. solo nos resta probar que

$$F = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[ \prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right]$$

lo es. Pero

$$F = \lambda x y \vec{x} \vec{\alpha} \left[ \prod_{t=x}^y t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \circ [C_0^{n,m}, f, p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}]$$

y por lo tanto el Lema de la Sumatoria probado en la Guia 5 nos dice que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r.. ■

**OBSERVACION:** No siempre que  $P$  sea  $\Sigma$ -p.r. tendremos que  $M(P)$  lo sera. Note que si  $M(P)$  fuera  $\Sigma$ -p.r., cada vez que  $P$  lo sea, entonces tendríamos que  $\text{PR}^\Sigma = \text{R}^\Sigma$  (justifique) lo cual contradiría la Proposicion 4. Mas adelante veremos un ejemplo natural de un predicado  $P$  el cual es  $\Sigma$ -p.r. pero  $M(P)$  no es  $\Sigma$ -p.r.

El lema de minimizacion recien probado es muy util como lo veremos a continuacion.

**Lema 6.** *Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito. Las siguientes funciones son  $\Sigma$ -p.r.:*

- (a)  $Q : \omega \times \mathbf{N} \rightarrow \omega$   
 $(x, y) \rightarrow$  cociente de la division de  $x$  por  $y$
- (b)  $R : \omega \times \mathbf{N} \rightarrow \omega$   
 $(x, y) \rightarrow$  resto de la division de  $x$  por  $y$

*Proof.* (a) Ya vimos anteriormente que  $Q = M(P')$ , donde  $P' = \lambda t x_1 x_2 [x_1 \geq t.x_2 \text{ y } x_1 < (t+1).x_2]$ . Ya que  $P'$  es  $\Sigma$ -p.r. y

$$Q(x_1, x_2) \leq p_1^{2,0}(x_1, x_2), \text{ para cada } (x_1, x_2) \in \omega \times \mathbf{N}$$

(b) del Lema 5 implica que  $Q \in \text{PR}^\Sigma$ .

(b) Note que

$$R = \lambda x y [x \dot{-} Q(x, y).y]$$

y por lo tanto  $R \in \text{PR}^\Sigma$ . ■

**Ejercicio 9:** Dados  $x, y \in \omega$  tales que  $x \neq 0$  o  $y \neq 0$ , usaremos  $mcd(x, y)$  para denotar el maximo comun divisor de  $x$  e  $y$ , es decir el mayor numero que divide a  $x$  y divide a  $y$ . Note que la funcion  $M = \lambda xy[mcd(x, y)]$  tiene dominio igual a  $\omega^2 - \{(0, 0)\}$ . Pruebe que  $M$  es  $\Sigma$ -p.r.. (Hint: use la REGLA U).

**Ejercicio 10:** Dados  $x, y \in \mathbf{N}$ , usaremos  $mcm(x, y)$  para denotar el minimo comun multiplo de  $x$  e  $y$ , es decir el menor numero no nulo que es multiplo de  $x$  y de  $y$ . Note que la funcion  $G = \lambda xy[mcm(x, y)]$  tiene dominio igual a  $\mathbf{N}^2$ . Pruebe que  $G$  es  $\Sigma$ -p.r..

**Ejercicio 11:** Sea  $F : \{z^2 : z \in \omega\} \rightarrow \omega$  dada por  $F(x) = \sqrt{x}$ . Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r..

**Ejercicio 12:** Sea  $F : \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \omega$  dada por  $F(\alpha, \beta) = \max\{|\rho| : \rho \text{ es tramo inicial de } \alpha \text{ y } \beta\}$ . Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r..

**Lema 7.** *Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito. Entonces la funcion*

$$\begin{array}{rcl} pr : \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ n & \rightarrow & n\text{-esimo numero primo} \end{array}$$

es  $\Sigma$ -p.r.

*Proof.* Para ver que  $pr$  es  $\Sigma$ -p.r., veremos que la extension  $h : \omega \rightarrow \omega$ , dada por  $h(0) = 0$  y  $h(n) = pr(n)$ ,  $n \geq 1$ , es  $\Sigma$ -p.r.. Luego  $pr = h|_{\mathbf{N}}$  resultara  $\Sigma$ -p.r. por ser la restriccion de una funcion  $\Sigma$ -p.r. a un conjunto  $\Sigma$ -p.r.. Primero note que

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(t+1) &= \min_i (i \text{ es primo} \wedge i > h(t)) \end{aligned}$$

O sea que  $h = R(C_0^{0,0}, g)$ , donde

$$\begin{array}{rcl} g : \omega \times \omega & \rightarrow & \omega \\ (A, t) & \rightarrow & \min_i (i \text{ es primo} \wedge i > A) \end{array}$$

Es decir que solo nos resta ver que  $g$  es  $\Sigma$ -p.r.. Pero notese que  $g = M(P)$ , donde  $P = \lambda A At [i \text{ es primo} \wedge i > A]$ . Claramente  $P$  es  $\Sigma$ -p.r. por lo cual para poder aplicar (b) del lema anterior debemos encontrar una funcion  $f : \omega \times \omega \rightarrow \omega$  tal que

$$M(P)(A, t) \leq f(A, t), \text{ para cada } (A, t) \in \omega^2$$

Aceptaremos sin prueba que

$$\min_i (i \text{ es primo} \wedge i > A) \leq A! + 1, \text{ para cada } A \in \omega$$

Es decir que  $f = \lambda A At[A! + 1]$  cumple lo deseado, lo cual implica que  $g = M(P)$  es  $\Sigma$ -p.r. ■

**Ejercicio 13:** (Opcional) Si tiene ganas y recuerda las propiedades basicas de divisibilidad, intente un rato probar que

$$\min_i (i \text{ es primo} \wedge i > A) \leq A! + 1, \text{ para cada } A \in \omega$$

(Hint: factorice  $A! + 1$  en producto de primos y vea que alguno debe ser mayor que  $A$ .)

**Ejercicio 14:** Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito.

- (a) Pruebe que  $\lambda xi [(x)_i]$  es  $\Sigma$ -p.r. (Hint: repase el significado de la expresion  $(x)_i$  y encuentre entonces el dominio de  $\lambda xi [(x)_i]$  antes de hacer el ejercicio)

(b) Pruebe que la funcion  $Lt$  es  $\Sigma$ -p.r.

**Ejercicio 15:** Sea  $F : \mathbf{N} \rightarrow \omega$  dada por  $F(x) = \max\{t \in \omega : t! \leq x\}$ . Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r..

**Ejercicio 16:** Sea  $\Sigma = \{@, !, \% \}$ . Sea  $F = \lambda\alpha\beta[\max\{t \in \mathbf{N} : \alpha^t \text{ es tramo inicial de } \beta\}]$ .

(a) Encuentre (segun manda notacion lambda) el dominio de  $F$

(b) Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r. (Hint: use la Regla U).

**Ejercicio 17:** Sea  $F : \Sigma^+ \rightarrow \omega$  dada por  $F(\alpha) = \max\{t \in \mathbf{N} : t \leq |\alpha| \text{ y } [\alpha]_1[\alpha]_2\dots[\alpha]_t \text{ es capicua}\}$ .

Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r..

**Ejercicio 18:** Sea  $\Sigma = \{@, ! \}$ . Sea  $f : \Sigma^* \rightarrow \omega$  dada por:

$$f(\alpha) = \max\{|\beta| : \beta \text{ ocurre en } \alpha \text{ y } \beta \text{ es capicua}\}$$

Pruebe que  $f$  es  $\Sigma$ -p.r. (Hint: use la Regla U). Ojo, puede haber un  $\beta$  capicua que ocurra en  $\alpha$  de manera “inextensible” pero que  $f(\alpha)$  no sea igual a  $|\beta|$ .

#### MINIMIZACION DE VARIABLE ALFABETICA

Supongamos que  $\Sigma \neq \emptyset$ . Sea  $\leq$  un orden total sobre  $\Sigma$ . Recordemos que  $\leq$  puede ser naturalmente extendido a un orden total sobre  $\Sigma^*$ . Sea  $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \rightarrow \omega$  un predicado. Cuando  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$  es tal que existe al menos un  $\alpha \in \Sigma^*$  tal que  $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$ , usaremos  $\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$  para denotar al menor  $\alpha \in \Sigma^*$  tal que  $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$ . Notese que la expresion  $\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$  esta definida solo para aquellas  $(n+m)$ -uplas  $(\vec{x}, \vec{\alpha})$  para las cuales hay al menos un  $\alpha$  tal que se da  $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$ . Dicho de otra forma,  $\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$  no estara definida cuando para cada  $\alpha \in \Sigma^*$  se de que  $(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$  no pertenece a  $D_P$  o  $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 0$ . Otro detalle importante a tener en cuenta es que la expresion  $\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$  no depende de la variable  $\alpha$ . Por ejemplo, las expresiones  $\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$  y  $\min_{\beta}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)$  son equivalentes en el sentido que estan definidas en las mismas  $(n+m)$ -uplas y cuando estan definidas asumen el mismo valor.

Definamos

$$M^{\leq}(P) = \lambda\vec{x}\vec{\alpha} [\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)]$$

Notese que

$$D_{M^{\leq}(P)} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists \alpha \in \Sigma^*) P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)\}$$

$$M^{\leq}(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M^{\leq}(P)}$$

Diremos que  $M^{\leq}(P)$  es obtenida por *minimizacion de variable alfabetica* a partir

de  $P$ .

Algunos ejemplos:

(E1) Sea  $\Sigma = \{@, a, b, c, d, e \}$  y sea  $\leq$  un orden total sobre  $\Sigma$ . Sea  $Dir = \{\alpha_1 \in \Sigma^* : |\alpha_1|_{@} = 1\}$  y definamos  $U : Dir \rightarrow \Sigma^*$  de la siguiente manera

$$U(\alpha_1) = \text{unico } \alpha \text{ tal que } \alpha @ \text{ es tramo inicial de } \alpha_1$$

Sea

$$P = \lambda\alpha_1\alpha [\alpha_1 \in Dir \text{ y } \alpha @ \text{ es tramo inicial de } \alpha_1]$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} D_{M^{\leq}(P)} &= \{\alpha_1 \in \Sigma^* : (\exists \alpha \in \Sigma^*) P(\alpha_1, \alpha)\} \\ &= \{\alpha_1 \in \Sigma^* : \alpha_1 \in Dir \text{ y } (\exists \alpha \in \Sigma^*) \alpha @ \text{ es tramo inicial de } \alpha_1\} \\ &= Dir \end{aligned}$$

y ademas es claro que  $M^{\leq}(P)(\alpha_1) = U(\alpha_1)$ , para cada  $\alpha_1 \in Dir$ , por lo cual  $M^{\leq}(P) = U$ .

(E2) Cuando  $n = m = 0$ , tenemos que  $P : D_P \subseteq \Sigma^* \rightarrow \omega$ . O sea que

$$M^{\leq}(P) = \lambda[\min_{\alpha}^{\leq} P(\alpha)]$$

Esto nos dice que  $D_{M^{\leq}(P)} \subseteq \{\Diamond\}$ . Ademas  $D_{M^{\leq}(P)} = \{\Diamond\}$  si y solo si  $P(\alpha) = 1$ , para algun  $\alpha \in D_P$ , y en tal caso  $M^{\leq}(P)(\Diamond) = \min_{\alpha}^{\leq} P(\alpha)$ .

Como puede notarse para el caso alfabetico tambien tenemos:

**REGLA U:** Si tiene una funcion  $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$  y busca un predicado  $P$  tal que  $f = M^{\leq}(P)$ , intente diseñar  $P$  de manera que para cada  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$  se de que

$$f(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \text{ unico } \alpha \in \Sigma^* \text{ tal que } P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$$

Luego chequee que ademas para cada  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$  se de que

$$(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f \text{ si y solo si } \exists \alpha \in \Sigma^* P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$$

**Ejercicio 19:** V o F o I, justifique.

- (a) Sea  $\Sigma$  un alfabeto no vacio y sea  $\leq$  un orden total sobre  $\Sigma$ . Entonces  $p_1^{0,2} = M^{\leq}(\lambda \alpha_1 \alpha [\alpha = \alpha_1])$
- (b) Sea  $\leq$  un orden total sobre  $\Sigma$  y sea  $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \rightarrow \omega$  un predicado, entonces

$$D_{M^{\leq}(P)} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists \alpha \in \Sigma^*) (\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) \in D_P\}$$

- (c) Sea  $\leq$  un orden total sobre  $\Sigma$  y sea  $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \rightarrow \omega$  un predicado, entonces

$$D_{M^{\leq}(P)} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) \wedge (\forall \beta \in \Sigma^*)_{\beta < \alpha} \neg P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)\}$$

$$M^{\leq}(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \alpha$$

**Ejercicio 20:** Sea  $\Sigma$  un alfabeto no vacio y sea  $\leq$  un orden total sobre  $\Sigma$ .

- (a) Diga que funcion es  $M^{\leq}(\lambda \alpha_1 \alpha_2 \alpha [\alpha_1 = \varepsilon])$
- (b) Diga que funcion es  $M^{\leq}(\lambda \alpha_1 \alpha [\alpha^2 = \alpha_1 \vee \alpha = \alpha_1])$
- (c) Diga que funcion es  $M^{\leq}(\lambda x_1 \alpha_1 \alpha [\alpha = \alpha_1])$
- (d) Diga que funcion es  $M^{\leq}(\lambda x_1 \alpha_1 \alpha [\alpha = \alpha_1 \text{ y } x_1 < 20])$
- (e) Diga que funcion es  $M^{\leq}(\lambda x y \alpha \beta [y \leq |\beta|])$
- (f) Diga que funcion es  $M^{\leq}(\lambda \alpha_1 \alpha_2 \alpha [\alpha_1 = \alpha \alpha_2])$

**Lema de minimizacion acotada de variable alfabetica de predicados  $\Sigma$ -p.r.** Aceptaremos sin prueba el siguiente resultado. Su prueba es rutinaria y se basa en el Lema 5 (ver el apunte).

**Lema 8** (Lema de minimizacion acotada de variable alfabetica). *Supongamos que  $\Sigma \neq \emptyset$ . Sea  $\leq$  un orden total sobre  $\Sigma$ , sean  $n, m \geq 0$  y sea  $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \rightarrow \omega$  un predicado  $\Sigma$ -p.r.. Entonces*

- (a)  $M^{\leq}(P)$  es  $\Sigma$ -recursiva.
- (b) Si existe una funcion  $\Sigma$ -p.r.  $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  tal que

$$|M^{\leq}(P)(\vec{x}, \vec{\alpha})| = |\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)| \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M^{\leq}(P)},$$

entonces  $M^{\leq}(P)$  es  $\Sigma$ -p.r..

**Ejercicio 21:** Pruebe que la funcion  $U$  del ejemplo anterior es  $\Sigma$ -p.r.. Por que se eligieron los nombres *Dir* y *U*?

**Ejercicio 22:** Dada una palabra  $\alpha \in \Sigma^*$ , si hay una palabra  $\rho$  tal que  $\rho^2 = \alpha$ , usaremos  $\sqrt{\alpha}$  para denotar a  $\rho$ . Notese que la expresion  $\sqrt{\alpha}$  tiene sentido o esta definida solo para ciertas palabras. Pruebe que  $\lambda\alpha[\sqrt{\alpha}]$  es  $\Sigma$ -p.r..

**Ejercicio 23:** Sea  $\Sigma = \{@, %, !, \$\}$ . Sea  $\leq$  un orden total sobre  $\Sigma$ . Sea

$$F = \lambda\alpha_1[\max\{\alpha \in \Sigma^* : \alpha \text{ ocurre en } \alpha_1 \text{ y } \alpha \text{ es capicua}\}]$$

(aqui el maximo es tomado respecto del orden total de  $\Sigma^*$  inducido por  $\leq$ ).  
Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r..

**Ejercicio 24:** Sea  $F : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  dada por  $F(\alpha) =$  tramo inicial capicua mas largo de  $\alpha$ .  
Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r.. (Hint: use la REGLA U).

**Ejercicio 25:** Sea  $\Sigma = \{@, \circ, %, \square\}$ . Sea  $\leq$  un orden total sobre  $\Sigma$ . Sea  $L = \{\alpha\beta : \alpha \in \{@, \circ\}^* \text{ y } \beta \in \{%, \square\}^*\}$ . Sea  $F : L \rightarrow \{%, \square\}^*$  dada por  $F(\alpha\beta) = \beta$ , cada vez que  $\alpha \in \{@, \circ\}^*$  y  $\beta \in \{%, \square\}^*$ .

- (a) Explique por que la definicion de  $F$  es inambigua
- (b) Encuentre un predicado  $P$  el cual sea  $\Sigma$ -p.r., cumpla que  $D_P = \Sigma^* \times \Sigma^*$  y ademas  $F = M^{\leq}(P)$ .
- (c) Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r..

**Ejercicio 26:** Sea  $\Sigma = \{@, %, !, \$\}$ . Sea  $\leq$  un orden total sobre  $\Sigma$ . Sea

$$F = \lambda\beta[\max\{\gamma \in \Sigma^* : \gamma \text{ ocurre en } \beta \text{ y } \gamma \in \{@, %\}^*\}]$$

(aqui el maximo es tomado respecto del orden total de  $\Sigma^*$  inducido por  $\leq$ ).  
Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r..

**Ejercicio 27:** Sea  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$  una maquina de Turing y supongamos  $Q$  es un alfabeto disjunto con  $\Gamma$ . Usaremos la notacion lambda respecto del alfabeto  $\Gamma \cup Q$ . Sea  $\leq$  un orden total sobre  $\Gamma \cup Q$ .

- (a) Sea  $P = \lambda\alpha_1\alpha[\alpha \in Q \text{ y } \alpha \text{ ocurre en } \alpha_1]$ . Encuentre  $D_{M^{\leq}(P)}$ . Que relacion hay entre la funcion  $St : Des \rightarrow Q$  y  $M^{\leq}(P)$
- (b) Encuentre un predicado  $R$  (modificando  $P$ ) tal que  $M^{\leq}(R) = St$ .
- (c) Pruebe que  $St$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -p.r.

(Puede usar que  $Des$  es un conjunto  $(\Gamma \cup Q)$ -p.r.).

### CONJUNTOS $\Sigma$ -RECURSIVAMENTE ENUMERABLES

Ya que la noción de función  $\Sigma$ -recursiva es el modelo matemático Gödeliano del concepto de función  $\Sigma$ -efectivamente computable, nos podríamos preguntar entonces cuál es el modelo matemático Gödeliano del concepto de conjunto  $\Sigma$ -efectivamente enumerable. Si prestamos atención a la definición de conjunto  $\Sigma$ -efectivamente enumerable, notaremos que depende de la existencia de ciertas funciones  $\Sigma$ -efectivamente computables por lo cual la siguiente definición cae de maduro:

Diremos que un conjunto  $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$  será llamado  $\Sigma$ -re<sup>s</sup>umbrable cuando sea vacío o haya una función  $F : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$  tal que  $I_F = S$  y  $F(i)$  sea  $\Sigma$ -recursiva, para cada  $i \in \{1, \dots, n+m\}$ .

Debería entonces quedar claro que si el concepto de función  $\Sigma$ -recursiva modeliza correctamente al concepto de función  $\Sigma$ -efectivamente computable, entonces el concepto de conjunto  $\Sigma$ -re<sup>s</sup>umbrable recién definido modeliza correctamente al concepto de conjunto  $\Sigma$ -efectivamente enumerable. Sin embargo para probar algunos de los resultados básicos acerca de los conjuntos  $\Sigma$ -re<sup>s</sup>umbrablemente enumerables, deberemos esperar a tener probada la equivalencia del paradigma Gödeliano con el imperativo.

### CONJUNTOS $\Sigma$ -RECURSIVOS

La versión Gödeliana del concepto de conjunto  $\Sigma$ -efectivamente computable es fácil de dar: un conjunto  $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$  será llamado  $\Sigma$ -re<sup>s</sup>ursivo cuando la función  $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$  sea  $\Sigma$ -recursiva. Todo conjunto  $\Sigma$ -re<sup>s</sup>ursivo es  $\Sigma$ -re<sup>s</sup>umbrable pero esto lo probaremos más adelante junto con otros resultados básicos sobre conjuntos  $\Sigma$ -r.e., los cuales se prueban usando el mparadigma imperativo. Mas adelante daremos un ejemplo natural de un conjunto que es  $\Sigma$ -r.e. pero el cual no es  $\Sigma$ -re<sup>s</sup>ursivo.

**Ejercicio 28:** Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito.

- (a) Si  $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  y  $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  son predicados  $\Sigma$ -r., entonces  $(P \vee Q)$ ,  $(P \wedge Q)$  y  $\neg P$  lo son también.
- (b) Supongamos  $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$  son conjuntos  $\Sigma$ -re<sup>s</sup>ursivos. Entonces  $S_1 \cup S_2$ ,  $S_1 \cap S_2$  y  $S_1 - S_2$  son  $\Sigma$ -re<sup>s</sup>ursivos

### INDEPENDENCIA DEL ALFABETO

El siguiente resultado es conceptualmente muy importante. Su prueba tiene cierta dificultad técnica por lo cual la omitiremos. Se la puede ver en el apunte.

**Teorema 9.** Sean  $\Sigma$  y  $\Gamma$  alfabetos finitos cualesquiera.

- (a) Supongamos una función  $f$  es  $\Sigma$ -mixta y  $\Gamma$ -mixta, entonces  $f$  es  $\Sigma$ -re<sup>s</sup>ursiva (resp.  $\Sigma$ -p.r.) si  $f$  es  $\Gamma$ -re<sup>s</sup>ursiva (resp.  $\Gamma$ -p.r.)
- (b) Supongamos un conjunto  $S$  es  $\Sigma$ -mixto y  $\Gamma$ -mixto, entonces  $S$  es  $\Sigma$ -re<sup>s</sup>ursivo (resp.  $\Sigma$ -r.e.,  $\Sigma$ -p.r.) si  $S$  es  $\Gamma$ -re<sup>s</sup>ursivo (resp.  $\Gamma$ -r.e.,  $\Gamma$ -p.r.)

**Ejercicio 29:** Explique con palabras por qué no es obvio el resultado anterior

**Ejercicio 30:** Que hubiera implicado acerca de la completitud del modelo Gödeliano el hecho de que no fuera cierto (a) del teorema anterior?

## EJERCICIOS DE EXAMEN

Cada resultado teorico que aplique en la resolucion debera enunciarlo por separado detalladamente (en la forma en la que esta en las guias). Para los ejercicios listados a continuacion puede usar sin demostracion que las siguientes funciones son  $\Sigma$ -p.r.:  $Suc$ ,  $Pred$ ,  $d_a$  (con  $a \in \Sigma$ ),  $p_j^{n,m}$  (con  $n, m, j \in \omega$  y  $1 \leq j \leq n+m$ ),  $\lambda xy[x \leq y]$ ,  $\lambda\alpha[|\alpha|]$ ,  $\lambda xy[x = y]$ ,  $\lambda\alpha\beta[\alpha = \beta]$ ,  $\lambda xy[x + y]$ ,  $\lambda xy[x.y]$ ,  $\lambda x[x!]$ ,  $\lambda xy[x - y]$ ,  $\lambda x\alpha[\alpha^x]$ ,  $\lambda xy[x^y]$ ,  $\lambda\alpha[\alpha^R]$ ,  $\lambda i\alpha[(\alpha)_i]$ ,  $C_k^{n,m}$ ,  $C_\alpha^{n,m}$  (con  $n, m, k \in \omega$  y  $\alpha \in \Sigma^*$ ),  $s \leq$ ,  $\# \leq$  y  $* \leq$  ( $\leq$  un orden total sobre  $\Sigma$ ),  $\lambda xy[x \text{ divide a } y]$ ,  $\lambda\alpha\beta[\alpha \text{ ocurre en } \beta]$ ,  $\lambda\alpha\beta[\alpha \text{ es tramo inicial de } \beta]$ ,  $\lambda x[x \text{ es impar}]$ . Tambien puede usar que si  $\Gamma \subseteq \Sigma$  entonces  $\Gamma^+$  y  $\Gamma^*$  son conjuntos  $\Sigma$ -p.r..

- (1) Pruebe que la funcion  $pr$  es  $\Sigma$ -p.r.. Puede usar sin demostracion que

$$\min_i(i \text{ es primo} \wedge i > A) \leq A! + 1, \text{ para cada } A \in \omega$$

- (2) Dados  $x, y \in \omega$  tales que  $x \neq 0$  o  $y \neq 0$ , usaremos  $mcd(x, y)$  para denotar el maximo comun divisor de  $x$  e  $y$ , es decir el mayor numero que divide a  $x$  y divide a  $y$ . Note que la funcion  $M = \lambda xy[mcd(x, y)]$  tiene dominio igual a  $\omega^2 - \{(0, 0)\}$ . Pruebe que  $M$  es  $\Sigma$ -p.r..

- (3) Sea  $\Sigma$  un alfabeto finito.

- (a) Pruebe que  $\lambda xi[(x)_i]$  es  $\Sigma$ -p.r. (Hint: repase el significado de la expresion  $(x)_i$  y encuentre entonces el dominio de  $\lambda xi[(x)_i]$  antes de hacer el ejercicio)

- (b) Pruebe que la funcion  $Lt$  es  $\Sigma$ -p.r.

Puede usar que  $pr$  es  $\Sigma$ -p.r..

- (4) Sea  $\Sigma = \{@, !, %, ?\}$ . Sea  $f : \Sigma^* \rightarrow \omega$  dada por:

$$f(\alpha) = \max\{|\beta| : \beta \text{ ocurre en } \alpha \text{ y } \beta \in \{@, !, ?, %\}^*\}$$

Pruebe que  $f$  es  $\Sigma$ -p.r.. Ojo, puede haber un  $\beta \in \{@, !, ?, %\}^*$  que ocurra en  $\alpha$  de manera “inextensible” pero que  $f(\alpha)$  no sea igual a  $|\beta|$ .

- (5) Sea  $\Sigma = \{@, !, %\}$ . Sea  $L = \{@\}^* \cup \{!\}^* \cup \{@, !, %\}^*$ . Sea  $f : \Sigma^* \rightarrow \omega$  dada por:

$$f(\alpha) = \max\{|\beta| : \beta \text{ ocurre en } \alpha \text{ y } \beta \in L\}$$

Pruebe que  $f$  es  $\Sigma$ -p.r.. Ojo, puede haber un  $\beta \in L$  que ocurra en  $\alpha$  de manera “inextensible” pero que  $f(\alpha)$  no sea igual a  $|\beta|$ .

- (6) Sea  $\Sigma = \{@, !, %\}$ . Sea  $F = \lambda\alpha\beta[\max\{t \in \mathbf{N} : \alpha^t \text{ es tramo inicial de } \beta\}]$ .

- (a) Encuentre (segun manda notacion lambda) el dominio de  $F$

- (b) Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r..

- (7) Sea  $\Sigma = \{@, !, %\}$ . Sea  $F = \lambda\beta[\max\{t \in \mathbf{N} : @^t \text{ es tramo inicial de } \beta\}]$ .

- (a) Encuentre (segun manda notacion lambda) el dominio de  $F$

- (b) Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r..

- (8) Sea  $\Sigma = \{@, !, %\}$ . Sea  $F = \lambda\beta[\max\{t \in \omega : @^t \text{ ocurre en } \beta \text{ y } t \text{ es impar}\}]$ .

- (a) Encuentre (segun manda notacion lambda) el dominio de  $F$

- (b) Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r..

- (9) Sea  $\Sigma = \{@, !, %\}$ . Sea  $F = \lambda x[\max\{t \in \omega : t^2 + 5 \leq x \text{ y } t \text{ es impar}\}]$ .

- (a) Encuentre (segun manda notacion lambda) el dominio de  $F$

- (b) Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r..

- (10) Sea  $\Sigma = \{@, !, %\}$ . Sea  $F = \lambda xy[\max\{t \in \omega : x \leq t^2 \leq y\}]$ .

- (a) Encuentre (segun manda notacion lambda) el dominio de  $F$

- (b) Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r..
- (11) Sea  $\Sigma = \{@, \circ, \%, \square\}$ . Sea  $\leq$  un orden total sobre  $\Sigma$ . Sea  $L = \{\alpha\beta : \alpha \in \{@, \circ\}^* \text{ y } \beta \in \{\%, \square\}^*\}$ . Sea  $F : L \rightarrow \{\%, \square\}^*$  dada por  $F(\alpha\beta) = \beta$ , cada vez que  $\alpha \in \{@, \circ\}^*$  y  $\beta \in \{\%, \square\}^*$ .
- (a) Explique por que la definicion de  $F$  es inambigua
  - (b) Encuentre un predicado  $P$  el cual sea  $\Sigma$ -p.r., cumpla que  $D_P = \Sigma^* \times \Sigma^*$  y ademas  $F = M^{\leq}(P)$ .
  - (c) Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r..
- (12) Sea  $\Sigma = \{@, \circ, \%, !, \$\}$ . Sea  $\leq$  un orden total sobre  $\Sigma$ . Diremos que  $\alpha \in \Sigma^*$  es un *auto* si  $|\alpha|_{\circ} = 2$ . Sea  $Au = \{\alpha \in \Sigma^* : \alpha \text{ es un auto}\}$ . Obviamente todo auto se escribe univocamente en la forma  $\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \alpha_3$ , con  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{@, \%, !, \$\}^*$ .
- (a) Explique el “univocamente”
  - (b) Sea  $F : Au \rightarrow \Sigma^*$  dada por  $F(\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \alpha_3) = \alpha_2$ , cada vez que  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{@, \%, !, \$\}^*$ . Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r..
- (13) Sea  $\Sigma = \{@, \%, !, \$\}$ . Sea  $\leq$  un orden total sobre  $\Sigma$ . Sea
- $$F = \lambda\beta[\max\{\gamma \in \Sigma^* : \gamma \text{ ocurre en } \beta \text{ y } \gamma \in \{@, \% \}^*\}]$$
- (aqui el maximo es tomado respecto del orden total de  $\Sigma^*$  inducido por  $\leq$ ).  
Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r..
- (14) Sea  $\Sigma = \{@, \%, !, \$\}$ . Sea  $\leq$  un orden total sobre  $\Sigma$ . Sea
- $$F = \lambda\alpha\beta[\max\{\rho \in \{\%, !\}^+ : \rho \text{ es tramo inicial de } \alpha \text{ y } \beta\}]$$
- (aqui el maximo es tomado respecto del orden total de  $\Sigma^*$  inducido por  $\leq$ ).  
(a) Encuentre (segun manda notacion lambda) el dominio de  $F$   
(b) Pruebe que  $F$  es  $\Sigma$ -p.r..
- (15) Sea  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$  una maquina de Turing y supongamos  $Q$  es un alfabeto disjunto con  $\Gamma$ . Usaremos la notacion lambda respecto del alfabeto  $\Gamma \cup Q$ . Sea  $\leq$  un orden total sobre  $\Gamma \cup Q$ .
- (a) Sea  $P = \lambda\alpha_1\alpha[\alpha \in Q \text{ y } \alpha \text{ ocurre en } \alpha_1]$ . Encuentre  $D_{M^{\leq}(P)}$ . Que relacion hay entre la funcion  $St : Des \rightarrow Q$  y  $M^{\leq}(P)$
  - (b) Encuentre un predicado  $R$  (modificando  $P$ ) tal que  $M^{\leq}(R) = St$ .
  - (c) Pruebe que  $St$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -p.r.
- (Puede usar que  $Des$  es un conjunto  $(\Gamma \cup Q)$ -p.r.).