

GUIA 7 DE LENGUAJES: EL PARADIGMA IMPERATIVO DE NEUMANN

En esta seccion daremos una modelizacion matematica del concepto de funcion Σ -efectivamente computable utilizando un lenguaje de programacion teorico el cual depende del alfabeto Σ . Lo llamaremos \mathcal{S}^Σ a dicho lenguaje. Dado que fue el matematico Von Neumann quien contribuyo al desarrollo de la primera computadora de proposito general (es decir a la cual se le pueden hacer correr programas tal como a las computadoras actuales), nos referiremos a este paradigma de computabilidad efectiva como el *paradigma de Von Neumann*. Tambien lo llamaremos algunas veces el *paradigma imperativo*.

SINTAXIS DE \mathcal{S}^Σ

Recordemos que llamabamos *numerales* a los siguientes simbolos

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tambien recordemos que Num denotaba el conjunto de los numerales. Sea $Sig : Num^* \rightarrow Num^*$ definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Sig(\varepsilon) &= 1 \\ Sig(\alpha 0) &= \alpha 1 \\ Sig(\alpha 1) &= \alpha 2 \\ Sig(\alpha 2) &= \alpha 3 \\ Sig(\alpha 3) &= \alpha 4 \\ Sig(\alpha 4) &= \alpha 5 \\ Sig(\alpha 5) &= \alpha 6 \\ Sig(\alpha 6) &= \alpha 7 \\ Sig(\alpha 7) &= \alpha 8 \\ Sig(\alpha 8) &= \alpha 9 \\ Sig(\alpha 9) &= Sig(\alpha)0 \end{aligned}$$

Definamos $Dec : \omega \rightarrow Num^*$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Dec(0) &= \varepsilon \\ Dec(n+1) &= Sig(Dec(n)) \end{aligned}$$

Notese que para $n \in \mathbf{N}$, la palabra $Dec(n)$ es la notacion usual decimal de n . Para hacer mas agil la notacion escribiremos \bar{n} en lugar de $Dec(n)$.

La sintaxis de \mathcal{S}^Σ sera dada utilizando solo simbolos del alfabeto $\Sigma \cup \Sigma_p$, donde

$$\Sigma_p = Num \cup \{ \leftarrow, +, \dot{-}, \cdot, \neq, \frown, \varepsilon, N, K, P, L, I, F, G, O, T, B, E, S \}.$$

Cabe aclarar que la palabra de longitud 0 no es un elemento de Σ_p sino que la letra griega ε que usualmente denota esta palabra, lo es. Tambien notese que en Σ_p hay simbolos que a veces representan operaciones como por ejemplo $+$, \frown y $\dot{-}$, pero

deberia quedar claro que en Σ_p estan los simbolos $+$, \neg y \cdot y no las operaciones que ellos usualmente denotan.

Las palabras de la forma $N\bar{k}$ con $k \in \mathbf{N}$, son llamadas *variables numericas de \mathcal{S}^Σ* . Las palabras de la forma $P\bar{k}$ con $k \in \mathbf{N}$, son llamadas *variables alfabeticas de \mathcal{S}^Σ* . Las palabras de la forma $L\bar{k}$ con $k \in \mathbf{N}$, son llamadas *labels de \mathcal{S}^Σ* . Una *instruccion basica de \mathcal{S}^Σ* es una palabra de $(\Sigma \cup \Sigma_p)^*$ la cual es de alguna de las siguientes formas

```

 $N\bar{k} \leftarrow N\bar{k} + 1$ 
 $N\bar{k} \leftarrow N\bar{k} \cdot 1$ 
 $N\bar{k} \leftarrow N\bar{n}$ 
 $N\bar{k} \leftarrow 0$ 
 $P\bar{k} \leftarrow P\bar{k}.a$ 
 $P\bar{k} \leftarrow \neg P\bar{k}$ 
 $P\bar{k} \leftarrow P\bar{n}$ 
 $P\bar{k} \leftarrow \varepsilon$ 
IF  $N\bar{k} \neq 0$  GOTO  $L\bar{n}$ 
IF  $P\bar{k}$  BEGINS  $a$  GOTO  $L\bar{n}$ 
GOTO  $L\bar{n}$ 
SKIP
    
```

donde $a \in \Sigma$ y $k, n \in \mathbf{N}$. Como puede observarse para que las instrucciones basicas sean mas leibles usamos espacios entre ciertos simbolos. Por ejemplo, hemos escrito $N\bar{k} \leftarrow N\bar{k} + 1$ pero en realidad nos referimos a la palabra

$$N\bar{k}\leftarrow N\bar{k}+1$$

cuya longitud es $2|\bar{k}| + 5$. Otro ejemplo, hemos escrito IF $P\bar{k}$ BEGINS a GOTO $L\bar{n}$ pero en realidad nos referiamos a la palabra $IFP\bar{k}BEGINSaGOTOL\bar{n}$ cuya longitud es $|\bar{k}| + |\bar{n}| + 15$.

Una *instruccion de \mathcal{S}^Σ* es ya sea una instruccion basica de \mathcal{S}^Σ o una palabra de la forma αI , donde $\alpha \in \{L\bar{n} : n \in \mathbf{N}\}$ y I es una instruccion basica de \mathcal{S}^Σ . Usaremos Ins^Σ para denotar el conjunto de todas las instrucciones de \mathcal{S}^Σ . Cuando la instruccion I es de la forma $L\bar{n}J$ con J una instruccion basica, diremos que $L\bar{n}$ es el *label* de I .

Ejercicio 1: V o F o I, justificar

- Para cada $n \in \mathbf{N}$, se tiene que $\bar{n} \in \omega$
- Si $k \in \mathbf{N}$, entonces $P\bar{k}\leftarrow$ es una instruccion de \mathcal{S}^Σ
- Sea Σ un alfabeto. Entonces Ins^Σ es un conjunto Σ -mixto
- $Ti(\text{Ins}^\Sigma) = \text{PALABRA}$
- Si $I \in \text{Ins}^\Sigma$, entonces $Ti(I) = \text{PALABRA}$
- Si I es una instruccion de \mathcal{S}^Σ y $n \in \mathbf{N}$ es tal que $L\bar{n}$ es tramo inicial de I , entonces $L\bar{n}$ es el label de I .

Damos a continuacion, a modo de ejemplo, la interpretacion intuitiva asociada a ciertas instrucciones basicas de \mathcal{S}^Σ :

INSTRUCCION : $N\bar{k} \leftarrow N\bar{k} - 1$

INTERPRETACION : Si el contenido de $N\bar{k}$ es 0 dejarlo sin modificar; en caso contrario disminuya en 1 el contenido de $N\bar{k}$

INSTRUCCION : $N\bar{k} \leftarrow N\bar{n}$

INTERPRETACION : Copiar en $N\bar{k}$ el contenido de $N\bar{n}$ sin modificar el contenido de $N\bar{n}$

INSTRUCCION : $P\bar{k} \leftarrow \neg P\bar{k}$

INTERPRETACION : Si el contenido de $P\bar{k}$ es ε dejarlo sin modificar; en caso contrario remueva el 1er simbolo del contenido de $P\bar{k}$

INSTRUCCION : $P\bar{k} \leftarrow P\bar{k}.a$

INTERPRETACION : Modificar el contenido de $P\bar{k}$ agregandole el simbolo a a la derecha

INSTRUCCION : IF $P\bar{k}$ BEGINS a GOTO $L\bar{m}$

INTERPRETACION : Si el contenido de $P\bar{k}$ comienza con a , ejecute la primer instruccion con label $L\bar{m}$; en caso contrario ejecute la siguiente instruccion

Un *programa de \mathcal{S}^Σ* es una palabra de la forma

$$I_1 I_2 \dots I_n$$

donde $n \geq 1$, $I_1, \dots, I_n \in \text{Ins}^\Sigma$ y ademas se cumple la siguiente propiedad, llamada *la ley de los GOTO*,

- (G) Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, si $\text{GOTO}L\bar{m}$ es un tramo final de I_i , entonces existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que I_j tiene label $L\bar{m}$

Usaremos Pro^Σ para denotar el conjunto de todos los programas de \mathcal{S}^Σ . Como es usual cuando escribamos un programa lo haremos linea por linea, con la finalidad de que sea mas legible. Por ejemplo, escribiremos

L2 $N12 \leftarrow N12 - 1$
 $P1 \leftarrow \neg P1$
 IF $N12 \neq 0$ GOTO L2

en lugar de

$L2N12 \leftarrow N12 - 1 P1 \leftarrow \neg P1 \text{ IF } N12 \neq 0 \text{ GOTO } L2$

Un importante resultado es el siguiente lema que garantiza que los programas pueden ser parseados en forma unica como concatenacion de instrucciones. Lo aceptaremos sin demostracion, en el apunte esta probado.

Lema 1. Sea Σ un alfabeto finito. Se tiene que:

- (a) Si $I_1 \dots I_n = J_1 \dots J_m$, con $I_1, \dots, I_n, J_1, \dots, J_m \in \text{Ins}^\Sigma$, entonces $n = m$ y $I_j = J_j$ para cada $j \geq 1$.
- (b) Si $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$, entonces existe una unica sucesion de instrucciones I_1, \dots, I_n tal que $\mathcal{P} = I_1 \dots I_n$

(b) del lema anterior nos dice que dado un programa \mathcal{P} , tenemos univocamente determinados $n(\mathcal{P}) \in \mathbf{N}$ y $I_1^{\mathcal{P}}, \dots, I_{n(\mathcal{P})}^{\mathcal{P}} \in \text{Ins}^{\Sigma}$ tales que $\mathcal{P} = I_1^{\mathcal{P}} \dots I_{n(\mathcal{P})}^{\mathcal{P}}$. Definamos tambien

$$I_i^{\mathcal{P}} = \varepsilon$$

cuando $i = 0$ o $i > n(\mathcal{P})$. Notese que las expresiones $n(\alpha)$ y I_i^{α} estan definidas solo cuando α es un programa (y i es un elemento de ω), es decir, cierta palabra del alfabeto $\Sigma \cup \Sigma_p$. O sea que cuando usemos notacion lambda que involucre dichas expresiones, el alfabeto respecto del cual usaremos dicha notacion sera $\Sigma \cup \Sigma_p$. Esto nos dice entonces que $\lambda\alpha[n(\alpha)]$ tiene dominio igual a $\text{Pro}^{\Sigma} \subseteq (\Sigma \cup \Sigma_p)^*$ y $\lambda i\alpha[I_i^{\alpha}]$ tiene dominio igual a $\omega \times \text{Pro}^{\Sigma}$. Para hacer mas sugestiva la notacion a veces escribiremos $\lambda\mathcal{P}[n(\mathcal{P})]$ y $\lambda i\mathcal{P}[I_i^{\mathcal{P}}]$ en lugar de $\lambda\alpha[n(\alpha)]$ y $\lambda i\alpha[I_i^{\alpha}]$

Ejercicio 2: V o F o I, justificar

(a) $\text{Ins}^{\Sigma} \subseteq \text{Pro}^{\Sigma}$

(b) $\text{Ins}^{\Sigma} \cap \text{Pro}^{\Sigma} = \emptyset$

(c) $\lambda i\mathcal{P}[I_i^{\mathcal{P}}]$ tiene dominio igual a $\{(i, \mathcal{P}) \in \mathbf{N} \times \text{Pro}^{\Sigma} : i \leq n(\mathcal{P})\}$

(d) Sea Σ un alfabeto. Si $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$, entonces $\mathcal{P} \in \overbrace{\text{Ins}^{\Sigma} \times \dots \times \text{Ins}^{\Sigma}}^{n(\mathcal{P}) \text{ veces}}$

Ejercicio 3: Si $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \text{Pro}^{\Sigma}$ y $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_2$, entonces $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$

SEMANTICA DE \mathcal{S}^{Σ}

Para definir la semantica nos sera util la funcion $\text{Bas} : \text{Ins}^{\Sigma} \rightarrow (\Sigma \cup \Sigma_p)^*$, dada por

$$\text{Bas}(I) = \begin{cases} J & \text{si } I \text{ es de la forma } L\bar{k}J \text{ con } J \in \text{Ins}^{\Sigma} \\ I & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Recordemos que para una palabra α definiamos

$$\curvearrowright \alpha = \begin{cases} [\alpha]_2 \dots [\alpha]_{|\alpha|} & \text{si } |\alpha| \geq 2 \\ \varepsilon & \text{si } |\alpha| \leq 1 \end{cases}$$

Definamos

$$\omega^{[\mathbf{N}]} = \{(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{\mathbf{N}} : \text{hay } n \in \mathbf{N} \text{ tal que } s_i = 0, \text{ para } i \geq n\}$$

$$\Sigma^{*[\mathbf{N}]} = \{(\sigma_1, \sigma_2, \dots) \in \Sigma^{*\mathbf{N}} : \text{hay } n \in \mathbf{N} \text{ tal que } \sigma_i = \varepsilon, \text{ para } i \geq n\}.$$

Asumiremos siempre que en una computacion via un programa de \mathcal{S}^{Σ} , todas exepto una cantidad finita de las variables numericas tienen el valor 0 y todas exepto una cantidad finita de las variables alfabeticas tienen el valor ε . Esto no quita generalidad a nuestra modelizacion del funcionamiento de los programas ya que todo programa envuelve una cantidad finita de variables.

Un *estado* es un par

$$(\vec{s}, \vec{\sigma}) = ((s_1, s_2, \dots), (\sigma_1, \sigma_2, \dots)) \in \omega^{[\mathbf{N}]} \times \Sigma^{*[\mathbf{N}]}.$$

Si $i \geq 1$, entonces diremos que s_i es el *contenido* o *valor* de la variable $N\bar{i}$ en el estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ y σ_i es el *contenido* o *valor* de la variable $P\bar{i}$ en el estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$. Es decir, intuitivamente hablando, un estado es un par de infinituplas que contiene la informacion de que valores tienen alojados las distintas variables.

Imaginemos que corremos un programa \mathcal{P} partiendo de un estado inicial $(\vec{s}, \vec{\sigma})$. Por supuesto la primera instruccion a realizar sera $I_1^{\mathcal{P}}$ pero, dado que $I_1^{\mathcal{P}}$ puede ser de tipo GOTO, la segunda instruccion que realizaremos puede no ser $I_2^{\mathcal{P}}$. Es decir en cada paso iremos decidiendo en funcion de la instruccion ejecutada cual es la siguiente instruccion a realizar. O sea que mientras corremos \mathcal{P} , en cada paso la informacion importante a tener en cuenta es, por una parte, cuales son los valores que tienen cada una de las variables y, por otra parte, cual es la instruccion que nos tocara realizar a continuacion. Esto da lugar al concepto de descripcion instantanea, a saber, un objeto matematico que describe en un instante dado de la computacion cuales son los valores de las variables y cual es la instruccion que se debe realizar en el instante siguiente. Mas formalmente una *descripcion instantanea* es una terna $(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ tal que $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ es un estado e $i \in \omega$. Es decir que $\omega \times \omega^{[\mathbf{N}]} \times \Sigma^{*[\mathbf{N}]}$ es el conjunto formado por todas las descripciones instantaneas. Intuitivamente hablando, cuando $i \in \{1, \dots, n(\mathcal{P})\}$, la descripcion instantanea $(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ nos dice que las variables estan en el estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ y que la instruccion que *debemos realizar* es $I_i^{\mathcal{P}}$. Dado que sera conveniente para simplificar el tratamiento formal, nos abstraeremos un poco y cuando $i = 0$ o $i > n(\mathcal{P})$ pensaremos tambien que la descripcion instantanea $(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ nos dice que las variables estan en el estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ y que debemos realizar $I_i^{\mathcal{P}} = \varepsilon$ (aunque por supuesto no podremos realizarla ya que no es una instruccion).

Dado un programa \mathcal{P} definiremos a continuacion una funcion

$$S_{\mathcal{P}} : \omega \times \omega^{[\mathbf{N}]} \times \Sigma^{*[\mathbf{N}]} \rightarrow \omega \times \omega^{[\mathbf{N}]} \times \Sigma^{*[\mathbf{N}]}$$

la cual le asignara a una descripcion instantanea $(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ la *descripcion instantanea sucesora de $(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ con respecto a \mathcal{P}* . Cuando $i \in \{1, \dots, n(\mathcal{P})\}$, intuitivamente hablando, $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ sera la descripcion instantanea que resulta luego de realizar $I_i^{\mathcal{P}}$ estando en el estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$. Cuando $i = 0$ o $i > n(\mathcal{P})$ definiremos $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i, \vec{s}, \vec{\sigma})$, lo cual es bastante intuitivo ya que si estamos en estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ y debemos realizar $I_i^{\mathcal{P}} = \varepsilon$, dado que ε no es una instruccion y por lo tanto no la podremos realizar, seguiremos en el mismo estado y teniendo que realizar $I_i^{\mathcal{P}}$.

Para darle una semantica mas unificada al concepto de descripcion instantanea sucesora debemos crear un nuevo verbo. El verbo "realizarp". Dada una actividad A, diremos que un individuo P *realizarp* la actividad A, si P realiza A, en caso de que pueda hacerlo. O sea realizarp una actividad es realizarla si se puede.

Para dar otro ejemplo de este tipo de verbos, consideremos el verbo "comprarp", es decir "comprar si se puede". Un hijo le pide a su padre que le compre un determinado juguete y el padre le dice "si, hijo mio, te lo voy a comprarp". Luego el padre es despedido de su empleo y su situacion economica hace que no le sea posible comprar dicho juguete. Sin envargo el padre no mintio ya que si bien no compro dicho juguete, él si lo comprarp.

Con este verbo podemos describir intuitivamente $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$:

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) &= \text{descripcion instantanea que resulta} \\ &\text{luego de realizarp } I_i^{\mathcal{P}}, \text{ estando en estado } (\vec{s}, \vec{\sigma}) \end{aligned}$$

Ahora si, daremos la definicion matematica de $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$, segun se den distintos casos posibles.

Caso $i \notin \{1, \dots, n(\mathcal{P})\}$. Entonces $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i, \vec{s}, \vec{\sigma})$

Caso $Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = Nk \leftarrow Nk - 1$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, (s_1, \dots, s_{k-1}, s_k - 1, s_{k+1}, \dots), \vec{\sigma})$$

Caso $Bas(I_i^P) = N\bar{k} \leftarrow N\bar{k} + 1$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, (s_1, \dots, s_{k-1}, s_k + 1, s_{k+1}, \dots), \vec{\sigma})$$

Caso $Bas(I_i^P) = N\bar{k} \leftarrow N\bar{n}$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, (s_1, \dots, s_{k-1}, s_n, s_{k+1}, \dots), \vec{\sigma})$$

Caso $Bas(I_i^P) = N\bar{k} \leftarrow 0$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, (s_1, \dots, s_{k-1}, 0, s_{k+1}, \dots), \vec{\sigma})$$

Caso $Bas(I_i^P) = \text{IF } N\bar{k} \neq 0 \text{ GOTO } L\bar{m}$. Entonces tenemos dos subcasos.

Subcaso a. El valor de $N\bar{k}$ en $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ es 0. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, \vec{\sigma})$$

Subcaso b. El valor de $N\bar{k}$ en $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ es no nulo. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (\min\{l : I_l^P \text{ tiene label } L\bar{m}\}, \vec{s}, \vec{\sigma})$$

Caso $Bas(I_i^P) = P\bar{k} \leftarrow \wedge P\bar{k}$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, (\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \wedge \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots))$$

Caso $Bas(I_i^P) = P\bar{k} \leftarrow P\bar{k}.a$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, (\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_k a, \sigma_{k+1}, \dots))$$

Caso $Bas(I_i^P) = P\bar{k} \leftarrow P\bar{n}$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, (\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_n, \sigma_{k+1}, \dots))$$

Caso $Bas(I_i^P) = P\bar{k} \leftarrow \varepsilon$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, (\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \varepsilon, \sigma_{k+1}, \dots))$$

Caso $Bas(I_i^P) = \text{IF } P\bar{k} \text{ BEGINS } a \text{ GOTO } L\bar{m}$. Entonces tenemos dos subcasos.

Subcaso a. El valor de $P\bar{k}$ en $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ comienza con a . Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (\min\{l : I_l^P \text{ tiene label } L\bar{m}\}, \vec{s}, \vec{\sigma})$$

Subcaso b. El valor de $P\bar{k}$ en $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ no comienza con a . Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, \vec{\sigma})$$

Caso $Bas(I_i^P) = \text{GOTO } L\bar{m}$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (\min\{l : I_l^P \text{ tiene label } L\bar{m}\}, \vec{s}, \vec{\sigma})$$

Caso $Bas(I_i^P) = \text{SKIP}$. Entonces

$$S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i + 1, \vec{s}, \vec{\sigma})$$

La computacion partiendo de un estado. Dado un programa \mathcal{P} y un estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ a la infinitupla

$$((1, \vec{s}, \vec{\sigma}), S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma}), S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma})), S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma}))), \dots)$$

la llamaremos la *computacion de \mathcal{P} partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$* . Diremos que

$$\overbrace{S_{\mathcal{P}}(\dots S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma})))}^{t \text{ veces}} \dots)$$

es la *descripcion instantanea obtenida luego de t pasos, partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$* . Si

$$\overbrace{S_{\mathcal{P}}(\dots S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma})))}^{t \text{ veces}} = (j, \vec{u}, \vec{\eta})$$

diremos que $(\vec{u}, \vec{\eta})$ es el *estado obtenido luego de t pasos, partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$* .

Es claro que en la infinitupla de mas arriba esta toda la informacion de la "corrida" del programa \mathcal{P} cuando partimos del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$. Veamos un ejemplo. Sea $\Sigma = \{\blacktriangle, \#\}$ y sea \mathcal{P} el siguiente programa

```
L3  N4 ← N4 + 1
    P1 ← ◊P1
    IF P1 BEGINS ▲ GOTO L3
    P3 ← P3.#
```

Supongamos que tomamos $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ igual al estado

$$((2, 1, 0, 5, 3, 0, 0, 0, \dots), (\#\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$$

Tendremos entonces que la computacion de \mathcal{P} partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ es la infinitupla formada por la siguiente sucesion (de arriba hacia abajo) de descripciones

instantaneas:

$(1, (2, 1, 0, 5, 3, 0, 0, 0, \dots), (\# \blacktriangle \# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_1^{\mathcal{P}} = N4 \leftarrow N4 + 1$ obtenemos
 $(2, (2, 1, 0, 6, 3, 0, 0, 0, \dots), (\# \blacktriangle \# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_2^{\mathcal{P}} = P1 \leftarrow \neg P1$ obtenemos
 $(3, (2, 1, 0, 6, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle \# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_3^{\mathcal{P}} = \text{IF } P1 \text{ BEGINS } \blacktriangle \text{ GOTO } L3$ obtenemos
 $(1, (2, 1, 0, 6, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle \# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_1^{\mathcal{P}} = N4 \leftarrow N4 + 1$ obtenemos
 $(2, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle \# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_2^{\mathcal{P}} = P1 \leftarrow \neg P1$ obtenemos
 $(3, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_3^{\mathcal{P}} = \text{IF } P1 \text{ BEGINS } \blacktriangle \text{ GOTO } L3$ obtenemos
 $(4, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_4^{\mathcal{P}} = P3 \leftarrow P3 \#$ obtenemos
 $(5, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle \#, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 intentando realizar $I_5^{\mathcal{P}} = \varepsilon$ obtenemos
 $(5, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle \#, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 intentando realizar $I_5^{\mathcal{P}} = \varepsilon$ obtenemos
 $(5, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle \#, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 intentando realizar $I_5^{\mathcal{P}} = \varepsilon$ obtenemos
 $(5, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle \#, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 \vdots

Notese que en este caso es natural decir que el programa \mathcal{P} se detiene, partiendo del estado inicial dado ya que llega a un punto en el que queda intentando realizar $I_{n(\mathcal{P})+1}^{\mathcal{P}}$ lo cual no es una instruccion. Veamos un ejemplo de no detencion. Sea \mathcal{Q} el siguiente programa

$L3 \quad N4 \leftarrow N4 + 1$
 $\text{IF } P1 \text{ BEGINS } \blacktriangle \text{ GOTO } L3$

Supongamos que tomamos $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ igual al estado

$((2, 1, 0, 5, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle \# \#, \varepsilon, \blacktriangle \blacktriangle, \# \blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$

Tendremos entonces que la computacion de \mathcal{Q} partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$ es la siguiente infinitupla (de arriba hacia abajo) de descripciones instantaneas:

$(1, (2, 1, 0, 5, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_1^{\mathcal{P}} = N4 \leftarrow N4 + 1$ obtenemos
 $(2, (2, 1, 0, 6, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_2^{\mathcal{P}} = \text{IF P1 BEGINS } \blacktriangle \text{ GOTO L3}$ obtenemos
 $(1, (2, 1, 0, 6, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_1^{\mathcal{P}} = N4 \leftarrow N4 + 1$ obtenemos
 $(2, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_2^{\mathcal{P}} = \text{IF P1 BEGINS } \blacktriangle \text{ GOTO L3}$ obtenemos
 $(1, (2, 1, 0, 7, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_1^{\mathcal{P}} = N4 \leftarrow N4 + 1$ obtenemos
 $(2, (2, 1, 0, 8, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_2^{\mathcal{P}} = \text{IF P1 BEGINS } \blacktriangle \text{ GOTO L3}$ obtenemos
 $(1, (2, 1, 0, 8, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_1^{\mathcal{P}} = N4 \leftarrow N4 + 1$ obtenemos
 $(2, (2, 1, 0, 9, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 realizando $I_2^{\mathcal{P}} = \text{IF P1 BEGINS } \blacktriangle \text{ GOTO L3}$ obtenemos
 $(1, (2, 1, 0, 9, 3, 0, 0, 0, \dots), (\blacktriangle\#\#, \varepsilon, \blacktriangle\blacktriangle, \#\blacktriangle, \#, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$
 \vdots

Notese que en este caso, es claro que el programa \mathcal{Q} no se detiene partiendo del estado inicial dado ya que sigue indefinidamente realizando instrucciones.

Ejercicio 4: V o F o I, justificar

- Si $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i, \vec{s}, \vec{\sigma})$, entonces $i \notin \{1, \dots, n(\mathcal{P})\}$
- Sea $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$ y sea d una descripcion instantanea cuya primer coordenada es i . Si $I_i^{\mathcal{P}} = N2 \leftarrow N2 + 1$, entonces
 $S_{\mathcal{P}}(d) = (i + 1, (N1, \text{Suc}(N2), N3, N4, \dots), (P1, P2, P3, P4, \dots))$
- Sea $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$ y sea d una descripcion instantanea cuya primer coordenada es i . Si $I_i^{\mathcal{P}} = N2 \leftarrow 0$, entonces
 $S_{\mathcal{P}}(d) = (i + 1, (N1, 0, N3, N4, \dots), (P1, P2, P3, P4, \dots))$
- Sea $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma_p}$ y sea $(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ una descripcion instantanea. Supongamos $\sigma_3 = \text{GOTO}$. Si $I_i^{\mathcal{P}} = \text{L6 IF P3 BEGINS G GOTO L6}$, entonces $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (i, \vec{s}, \vec{\sigma})$
- Sea $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$, sea $a \in \Sigma$ y sea $(i, \vec{s}, \vec{\sigma})$ una descripcion instantanea. Si $\text{Bas}(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{IF P3 BEGINS } a \text{ GOTO L6}$ y $[P3]_1 = a$, entonces $S_{\mathcal{P}}(i, \vec{s}, \vec{\sigma}) = (j, \vec{s}, \vec{\sigma})$, donde j es el menor numero l tal que $I_l^{\mathcal{P}}$ tiene label L6

Definición matemática de detención. Ahora definiremos matemáticamente el concepto de detención. Cuando la primera coordenada de

$$\overbrace{S_{\mathcal{P}}(\dots S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma}))\dots)}^{t \text{ veces}}$$

sea igual a $n(\mathcal{P}) + 1$, diremos que \mathcal{P} se detiene (luego de t pasos), partiendo desde el estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$. Si ninguna de las primeras coordenadas en la computación

$$((1, \vec{s}, \vec{\sigma}), S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma}), S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma})), S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(1, \vec{s}, \vec{\sigma}))), \dots)$$

es igual a $n(\mathcal{P}) + 1$, diremos que \mathcal{P} no se detiene partiendo del estado $(\vec{s}, \vec{\sigma})$. Como puede observarse los programas de \mathcal{S}^{Σ} tienen una sola manera de detenerse, i.e. siempre que se detienen lo hacen habiendo realizado la última de sus instrucciones e intentando realizar la instrucción siguiente a su última instrucción.

Notese que en los conceptos antes definidos por "1 paso" entendemos "aplicar una vez la función $S_{\mathcal{P}}$ " y esto no siempre involucra "realizar una instrucción" ya que podría pasar que aplicáramos $S_{\mathcal{P}}$ a una descripción instantánea cuya primera coordenada es $n(\mathcal{P}) + 1$. Podemos redondear esta idea diciendo que "1 paso" equivale a "realizar una instrucción", donde tal como se lo explico antes "realizar" significa "realizar si se puede".

FUNCIONES Σ -COMPUTABLES

Ahora que hemos definido matemáticamente la semántica de \mathcal{S}^{Σ} estamos en condiciones de definir el concepto de función Σ -computable, el cual será una modelización matemática del concepto de función Σ -efectivamente computable. Intuitivamente hablando una función será Σ -computable cuando haya un programa que la compute. Para precisar este concepto nos será útil la siguiente notación. Dados $x_1, \dots, x_n \in \omega$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \Sigma^*$, con $n, m \in \omega$, usaremos

$$\|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$$

para denotar el estado

$$((x_1, \dots, x_n, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \varepsilon, \dots))$$

Esta notación requiere aclarar un poco como debe interpretarse en los casos límite, es decir cuando alguno de los números n, m es igual a 0. Notese que por ejemplo

$$\|x\| = ((x, 0, \dots), (\varepsilon, \dots))$$

(es el caso $n = 1$ y $m = 0$). También

$$\|\alpha\| = ((0, \dots), (\alpha, \varepsilon, \dots))$$

(es el caso $n = 0$ y $m = 1$). En el caso $n = m = 0$ pensaremos que $x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ se transforma en \diamond por lo que se obtiene

$$\|\diamond\| = ((0, \dots), (\varepsilon, \dots))$$

Además es claro que

$$\|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\| = \left\| x_1, \dots, x_n, \overbrace{0, \dots, 0}^i, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \overbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}^j \right\|$$

cualesquiera sean $i, j \in \omega$.

Dado $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$, definamos para cada par $n, m \geq 0$, la funcion $\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}$ de la siguiente manera:

$$D_{\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : \mathcal{P} \text{ termina, partiendo del estado } \|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|\}$$

$$\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \text{valor de N1 en el estado obtenido cuando } \mathcal{P} \text{ termina, partiendo de } \|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$$

Analogamente definamos la funcion $\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,*}$ de la siguiente manera:

$$D_{\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,*}} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : \mathcal{P} \text{ termina, partiendo del estado } \|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|\}$$

$$\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,*}(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \text{valor de P1 en el estado obtenido cuando } \mathcal{P} \text{ termina, partiendo de } \|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$$

Ahora si, daremos la definicion precisa de funcion Σ -computable. Una funcion Σ -mixta $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ sera llamada Σ -computable si hay un programa \mathcal{P} de \mathcal{S}^Σ tal que $f = \Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}$. En tal caso diremos que la funcion f es *computada* por \mathcal{P} . Analogamente una funcion Σ -mixta $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$ sera llamada Σ -computable si hay un programa \mathcal{P} de \mathcal{S}^Σ tal que $f = \Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,*}$. En tal caso diremos que la funcion f es *computada* por \mathcal{P} .

Algunos ejemplos:

(E1) El programa

```
L2  IF N1 ≠ 0 GOTO L1
      GOTO L2
L1  N1 ← N1 - 1
```

computa la funcion $Pred$. Note que este programa tambien computa las funciones $Pred \circ p_1^{n,m}$, para $n \geq 1$ y $m \geq 0$.

(E2) Sea $\Sigma = \{\clubsuit, \triangle\}$. El programa

```
L3  IF P2 BEGINS ♣ GOTO L1
      IF P2 BEGINS △ GOTO L2
      GOTO L4
L1  P2 ← ¬P2
      P1 ← P1.♣
      GOTO L3
L2  P2 ← ¬P2
      P1 ← P1.△
      GOTO L3
L4  SKIP
```

computa la funcion $\lambda\alpha\beta[\alpha\beta]$.

(E3) Notese que $D_{\Psi_{\mathcal{P}}^{0,0,\#}} = \{\diamond\}$ en caso que \mathcal{P} termina partiendo del estado $((0, 0, \dots), (\varepsilon, \varepsilon, \dots))$ y en tal caso

$$\Psi_{\mathcal{P}}^{0,0,\#}(\diamond) = \text{valor de N1 en el estado obtenido cuando } \mathcal{P} \text{ termina, partiendo de } ((0, 0, \dots), (\varepsilon, \varepsilon, \dots))$$

En caso de que \mathcal{P} no termina partiendo del estado $((0, 0, \dots), (\varepsilon, \varepsilon, \dots))$ tenemos que $D_{\Psi_{\mathcal{P}}^{0,0,\#}} = \emptyset$.

Por supuesto para que el concepto de función Σ -computable tenga chance de ser una modelización adecuada del concepto de función Σ -efectivamente computable, tiene que ser cierto el siguiente resultado.

Proposición 2 (Leibniz vence a Neumann). *Si f es Σ -computable, entonces f es Σ -efectivamente computable.*

Ejercicio 5: Pruebe la proposición anterior

Sin embargo nuestro modelo imperativo de función Σ -efectivamente computable todavía podría no ser correcto ya que podría pasar que haya una función Σ -mixta que sea computada por un procedimiento efectivo pero que no exista un programa de \mathcal{S}^Σ que la compute. En otras palabras el modelo imperativo o Neumanniano podría ser incompleto. Por supuesto este no es el caso y los desarrollos que veremos mas adelante nos convencerán de que el paradigma imperativo es completo, es decir Neumann también vence a Leibniz.

Ejercicio 6: Sea $\Sigma = \{\#, @\}$. Para cada una de las siguientes funciones haga un programa que la compute

- (a) $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \omega$, dada por $f(0) = f(1) = 0$ y $f(2) = 5$
- (b) $\lambda xy[x + y]$
- (c) $C_0^{1,1}|_{\{0,1\} \times \Sigma^*}$
- (d) $p_4^{2,3}$
- (e) $\lambda i \alpha [[\alpha]_i]$
- (f) $\lambda \alpha [\sqrt{\alpha}]$
- (g) $f : \omega^2 \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \omega$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_{x_3}$

Ejercicio 7: Sea $\Sigma = \{ @, \& \}$. De un programa que compute la función $s \leq$, donde \leq está dado por $@ < \&$

Ejercicio 8: V o F o I, justificar

- (a) Dado $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ y $n, m \geq 0$, se tiene que $\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#} : \omega^{[N]} \times \Sigma^{*[N]} \rightarrow \omega$
- (b) $\Psi_{\text{LIFN1} \neq \text{GOTOL1}}^{1,0,\#} = \{(0, 0)\}$
- (c) Sea Σ un alfabeto y sean $n, m \in \omega$. Sea $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$. Entonces el dominio de $\Psi_{\mathcal{P}}^{n,m,\#}$ es el conjunto formado por todos los estados a partir de los cuales \mathcal{P} termina
- (d) Sea Σ un alfabeto y sean $n, m \in \omega$. Entonces cualesquiera sean $x_1, \dots, x_n \in \omega$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \Sigma^*$ se tiene que

$$\Psi_{\text{SKIP}}^{n,m,\#}((x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \varepsilon, \varepsilon, \dots)) = x_1$$

- (e) El programa

$$N1 \leftarrow N1 \dot{-} 1$$

computa la función $\lambda x_2 x_1 [x_2 \dot{-} 1]$

- (f) Suc se detiene para todo $x \in \omega$
- (g) Si \mathcal{P} computa una función $f : D_f \subseteq \omega^2 \rightarrow \omega$, entonces \mathcal{P} computa la función $f \circ [p_1^{1,0}, C_0^{1,0}]$.

Ejercicio 9: Sea $\Sigma = \Sigma_p \cup \{a, b, c, d, e, f, g, \dots, x, y, z\}$. De una función $f : \text{Pro}^\Sigma \rightarrow \text{Pro}^\Sigma$ la cual sea Σ -p.r. y tal que $\Psi_{f(\mathcal{P})}^{1,1,\#} = \Psi_{\mathcal{P}}^{1,1,\#} \circ [\lambda x \alpha [x + 2], C_{bb}^{1,1}]$, cualesquiera sea $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$

MACROS

Supongamos que estamos escribiendo un programa \mathcal{P} de \mathcal{S}^Σ con el objeto de que realice cierta tarea. Supongamos además que nos vendría muy bien para nuestros propósitos poder usar una instrucción

$$N5 \leftarrow N16 + N3$$

la cual por supuesto al correr el programa, debería producir el efecto de dejar en la variable $N5$ la suma de los contenidos de las variables $N16$ y $N3$, sin modificar el contenido de las variables distintas a $N5$. Lamentablemente no tenemos en \mathcal{S}^Σ este tipo de instrucción pero podríamos reemplazarla por el siguiente programa

```

N1111  $\leftarrow$  N16
N2222  $\leftarrow$  N3
N5  $\leftarrow$  N1111
L1000 IF N2222  $\neq$  0 GOTO L2000
      GOTO L3000
L2000 N2222  $\leftarrow$  N2222 - 1
      N5  $\leftarrow$  N5 + 1
      GOTO L1000
L3000 SKIP
    
```

donde las variables $N1111$, $N2222$ y los labels $L1000$, $L2000$, $L3000$ solo serán usados aquí, es decir no aparecerán en el resto de nuestro programa \mathcal{P} . Notese que este programa cuando es corrido termina dejando en la variable $N5$ la suma de los contenidos de las variables $N16$ y $N3$ y modifica el contenido de las variables $N1111$ y $N2222$, lo cual no traerá problemas ya que $N1111$ y $N2222$ no se usan en el resto de \mathcal{P} . Las variables $N1111$ y $N2222$ son auxiliares y se usan justamente para preservar el valor de las variables $N16$ y $N3$ ya que ellas son variables protagonistas de nuestro programa \mathcal{P} y en esta instancia no queremos alterar su contenido sino solo realizar la asignación $N5 \leftarrow N16 + N3$. Dejamos al lector explicar por qué es necesario para que la simulación sea correcta que los labels $L1000$, $L2000$ y $L3000$ no sean usados en el resto de \mathcal{P} .

Es decir el programa anterior simula la instrucción $N5 \leftarrow N16 + N3$ que no podíamos usar por no ser una instrucción de \mathcal{S}^Σ , con un costo bastante bajo, es decir el costo de convenir en no usar en el resto de \mathcal{P} las variables $N1111$ y $N2222$ ni los labels $L1000$, $L2000$ y $L3000$.

Ahora supongamos que seguimos escribiendo el programa \mathcal{P} y nos hace falta simular la instrucción $N20 \leftarrow N1 + N14$. Entonces es claro que podríamos modificar el programa que simulaba $N5 \leftarrow N16 + N3$ haciéndole reemplazos adecuados a sus variables y labels. Por ejemplo podríamos escribir

```

N9999  $\leftarrow$  N1
N8888  $\leftarrow$  N14
N20  $\leftarrow$  N9999
L1001 IF N8888  $\neq$  0 GOTO L2002
      GOTO L3003
L2002 N8888  $\leftarrow$  N8888 - 1
      N20  $\leftarrow$  N20 + 1
      GOTO L1001
L3003 SKIP
    
```

donde N9999, N8888, L1001, L2002 y L3003 solo seran usados aqui, es decir no aparecieran en el resto de nuestro programa \mathcal{P} .

Consideremos el siguiente "molde" que llamaremos M

```

V4 ← V2
V5 ← V3
V1 ← V4
A1  IF V5 ≠ 0 GOTO A2
    GOTO A3
A2  V5 ← V5 - 1
    V1 ← V1 + 1
    GOTO A1
A3  SKIP
    
```

Como puede notarse, cuando reemplazamos en M

- cada ocurrencia de V1 por N5
- cada ocurrencia de V2 por N16
- cada ocurrencia de V3 por N3
- cada ocurrencia de V4 por N1111
- cada ocurrencia de V5 por N2222
- cada ocurrencia de A1 por L1000
- cada ocurrencia de A2 por L2000
- cada ocurrencia de A3 por L3000

obtenemos el programa que simulaba la instruccion $N5 \leftarrow N16 + N3$ dentro de \mathcal{P} . Similarmente, cuando reemplazamos en M

- cada ocurrencia de V1 por N20
- cada ocurrencia de V2 por N1
- cada ocurrencia de V3 por N14
- cada ocurrencia de V4 por N9999
- cada ocurrencia de V5 por N8888
- cada ocurrencia de A1 por L1001
- cada ocurrencia de A2 por L2002
- cada ocurrencia de A3 por L3003

obtenemos el programa que simulaba la instruccion $N20 \leftarrow N1 + N14$ dentro de \mathcal{P} . La practicidad de tener el molde M cae de maduro. Ahora en caso de necesitar una instruccion del tipo $N\bar{k} \leftarrow N\bar{n} + N\bar{m}$ solo tenemos que reemplazar en M

- cada ocurrencia de V1 por $N\bar{k}$
- cada ocurrencia de V2 por $N\bar{n}$
- cada ocurrencia de V3 por $N\bar{m}$

y reemplazar las "variables" V4 y V5 y los "labels" A1, A2 y A3, por dos variables concretas y tres labels concretos que no se usen en el programa que estamos realizando. El programa asi obtenido simulara a la instruccion $N\bar{k} \leftarrow N\bar{n} + N\bar{m}$.

En la gerga computacional el molde M suele llamarse *macro* y los programas obtenidos luego de realizar los reemplazos son llamados *expansiones de M*. Notese que $Ti(M) = \text{PALABRA}$ ya que, como en el caso de los programas, escribimos a M linea por linea para facilitar su manejo pero en realidad es una sola palabra, a saber:

```

V1←V2V4←V3A1IFV4≠0GOTOA2GOTOA3A2V4←V4-1V1←V1+1GOTOA1A3SKIP
    
```

Es decir, como objeto matematico, M es simplemente una palabra. A las palabras de la forma $V\bar{n}$, con $n \in \mathbf{N}$, las llamaremos *variables numericas de macro*. A las palabras de la forma $W\bar{n}$, con $n \in \mathbf{N}$, las llamaremos *variables alfabeticas de macro* y a las palabras de la forma $A\bar{n}$, con $n \in \mathbf{N}$, las llamaremos *labels de macro*. Nuestro macro M no tiene variables alfabeticas de macro pero otros macros por supuesto pueden tener este tipo de variables.

Las variables $V1$, $V2$ y $V3$ son llamadas *variables oficiales* de M ya que son las variables que seran reemplazadas por variables que son protagonistas dentro del programa \mathcal{P} que usara la expansion de M . Las palabras $V4$ y $V5$ son llamadas *variables auxiliares* de M ya que seran reemplazadas por variables que se usaran solo dentro de la expansion y no intervienen en la "trama" del programa \mathcal{P} . Tambien $A1$, $A2$ y $A3$ son llamados *labels auxiliares* de M ya que son usados solo para su funcionamiento interno y no tienen vinculacion con los labels del programa \mathcal{P} .

En el siguiente ejemplo veremos un macro que tiene un label que no es auxiliar sino oficial. Supongamos que estamos escribiendo un programa \mathcal{P}' y nos hace falta simular instrucciones de la forma

$$\text{IF } |P\bar{n}| \leq N\bar{m} \text{ GOTO } L\bar{k}$$

(por supuesto estas instrucciones no pertenecen al lenguaje \mathcal{S}^Σ pero deberia quedar claro como funcionan). Construiremos un macro que nos permita simular dicho tipo de instrucciones. Aqui la construccion del macro dependera de quien es Σ , es decir el macro nos servira para simular instrucciones de \mathcal{S}^Σ haciendo programas de \mathcal{S}^Σ y si lo usamos haciendo un programa de \mathcal{S}^Γ , donde Γ es otro alfabeto que contenga a Σ , el macro no funcionara bien. Haremos entonces el macro para el caso de $\Sigma = \{ @, ! \}$. Sea M' el siguiente macro:

```

W2 ← W1
V2 ← V1
A4  IF W2 BEGINS @ GOTO A2
    IF W2 BEGINS ! GOTO A2
    GOTO A1
A2  IF V2 ≠ 0 GOTO A3
    GOTO A5
A3  W2 ←  $\frown$  W2
    V2 ← V2  $\dot{-}$  1
    GOTO A4
A5  SKIP
    
```

el cual tiene

- variables oficiales $W1$ y $V1$ (correspondientes a $P\bar{n}$ y $N\bar{m}$)
- variables auxiliares $W2$ y $V2$
- labels auxiliares $A2$, $A3$, $A4$ y $A5$
- un label oficial $A1$ (correspondiente a $L\bar{k}$)

Una descripcion intuitiva del macro M' seria

$$\text{IF } |W1| \leq V1 \text{ GOTO } A1$$

Notese que en las primeras dos lineas el macro M' guarda los valores de las variables oficiales $W1$ y $V1$ en las variables auxiliares $W2$ y $V2$, y sigue trabajando con las auxiliares. Esto es para preservar el valor de las variables oficiales. Dado que

$\Sigma = \{ @, ! \}$, las dos siguientes lineas sirven para decidir si el contenido de W2 es ε o no ya que si una palabra de Σ^* no comienza con @ ni con !, debera ser ε (aqui es donde notamos que nuestro macro M' funcionara bien solo para hacer programas de $\mathcal{S}^{\{ @, ! \}}$). Dejamos al lector entender el resto del funcionamiento de M' .

Para dar un ejemplo de como usariamos a M' , supongamos que para seguir escribiendo nuestro programa \mathcal{P}' nos hace falta simular la instruccion

IF |P5| \leq N14 GOTO L1

y supongamos que las variables P1000 y N1000 y los labels L6666, L7777, L8888 y L9999 no se usaron hasta el momento en \mathcal{P}' . Entonces podemos reemplazar en M'

- cada ocurrencia de W1 por P5
- cada ocurrencia de V1 por N14
- cada ocurrencia de W2 por P1000
- cada ocurrencia de V2 por N1000
- cada ocurrencia de A1 por L1
- cada ocurrencia de A2 por L6666
- cada ocurrencia de A3 por L7777
- cada ocurrencia de A4 por L8888
- cada ocurrencia de A5 por L9999

y la expansion de M' asi obtenida simulara la instruccion IF |P5| \leq N14 GOTO L1. Cabe destacar que para asegurarnos que la simulacion funcione, tambien deberemos no usar en el resto de \mathcal{P}' las variables P1000 y N1000 y los labels L6666, L7777, L8888 y L9999.

Es decir M' funciona como un molde con el cual haciendo reemplazos adecuados podemos simular en \mathcal{S}^Σ cualquier instruccion del tipo IF |P \bar{n} | \leq N \bar{m} GOTO L \bar{k} , con $n, m, k \in \mathbf{N}$.

Deberia quedar claro el caracter oficial del label A1 en M' ya que el label por el que se lo reemplaza para hacer la expansion es uno de los labels protagonistas del programa que se esta escribiendo.

Cabe destacar que las expansiones de M' no son programas ya que si bien son concatenaciones de instrucciones, no cumplen la ley de los GOTO (llamada (G) en la definicion de programa) respecto del label que reemplazo a A1.

Como se vio en este ultimo ejemplo es importante tener en cuenta que cuando contruimos un macro lo hacemos relativo a un alfabeto Σ previamente fijado, es decir estamos pensando que dicho macro sera usado para hacer programas de \mathcal{S}^Σ y podria pasar que si lo usaramos para hacer un programa de \mathcal{S}^Γ , donde Γ es otro alfabeto, el macro no cumpla las propiedades esperadas. Para visulizar esto mejor, notese que la palabra

```

IF W1 BEGINS @ GOTO A2
IF W1 BEGINS % GOTO A2
IF W1 BEGINS ! GOTO A2
IF W1 BEGINS □ GOTO A2
GOTO A1
A2  SKIP
    
```

es un macro de $\mathcal{S}^{\{ @, \%, !, \square \}}$ que simula instrucciones de la forma

IF P \bar{n} = ε GOTO L \bar{m}

(el cual obviamente podríamos denotar con $\text{IF } W1 = \varepsilon \text{ GOTO } A1$), pero es claro que esta palabra no nos servirá para simular este tipo de instrucciones en el lenguaje $\mathcal{S}\{\oplus, \%, !, \square, \Delta\}$.

Nota: Siempre supondremos que la primera instrucción de los macros no es labelada. Esto es porque muchas veces cuando expandamos un macro nos interesará labelar la primera instrucción de dicha expansión. Por supuesto, esto es fácil de conseguir ya que si M es un macro, entonces $\text{SKIP } M$ es también un macro que posee las mismas propiedades.

Como hemos visto recién hay dos tipos de macros:

- los de asignación que cuando son expandidos nos dan un programa que simula la asignación a una variable dada del resultado de aplicar una función a los contenidos de ciertas otras variables; y
- los de tipo IF que cuando son expandidos nos dan un programa salvo por la ley (G), el cual direcciona al label que fue a reemplazar a $A1$ cuando se cumple cierta propiedad (predicado) relativa a los contenidos de las variables que fueron a reemplazar a las variables oficiales.

Ejemplo concreto de uso de macros. Ya vimos recién que la palabra

```

V4 ← V2
V5 ← V3
V1 ← V4
A1  IF V5 ≠ 0 GOTO A2
    GOTO A3
A2  V5 ← V5 - 1
    V1 ← V1 + 1
    GOTO A1
A3  SKIP
    
```

es un macro que sirve para simular instrucciones de la forma $N\bar{k} \leftarrow N\bar{n} + N\bar{m}$. Notemos que este macro es de asignación ya que cuando es expandido nos da un programa que simula la asignación a una variable dada del resultado de aplicar una función a los contenidos de ciertas otras variables. En este caso la función es $SUMA = \lambda xy[x + y]$ por lo cual usaremos $[V1 \leftarrow SUMA(V2, V3)]$ para denotar a dicho macro. Usaremos este macro para dar un programa \mathcal{P} que compute a la función $\lambda xy[x.y]$. Notese que podemos tomar \mathcal{P} igual al siguiente programa

```

L1  IF N2 ≠ 0 GOTO L2
    GOTO L3
L2  [N3 ← SUMA(N3, N1)]
    N2 ← N2 - 1
    GOTO L1
L3  N1 ← N3
    
```

donde $[N3 \leftarrow SUMA(N3, N1)]$ es una expansión del macro $[V1 \leftarrow SUMA(V2, V3)]$ hecha haciendo el reemplazo de las variables oficiales $V1, V2$ y $V3$ por $N3, N3$ y $N1$, respectivamente, y haciendo reemplazos adecuados de sus variables y labels auxiliares. Hay muchas formas de hacer los reemplazos de variables y labels auxiliares pero en general no lo especificaremos explícitamente cuando expandamos un macro

ya que es facil imaginar como hacerlo en funcion del programa que estemos realizando. Por ejemplo en el caso de \mathcal{P} podriamos hacer los siguientes reemplazos:

- cada ocurrencia de V4 por N1111
- cada ocurrencia de V5 por N2222
- cada ocurrencia de A1 por L1000
- cada ocurrencia de A2 por L2000
- cada ocurrencia de A3 por L3000

y claramente esto no afectara la "logica" o "idea" de nuestro programa \mathcal{P} . De esta forma la expansion $[N3 \leftarrow SUMA(N3, N1)]$ es el siguiente programa:

```

N1111 ← N3
N2222 ← N1
N3 ← N1111
L1000  IF N2222 ≠ 0 GOTO L2000
      GOTO L3000
L2000  N2222 ← N2222 - 1
      N3 ← N3 + 1
      GOTO L1000
L3000  SKIP
    
```

el cual por supuesto esta escrito con espacios y en forma vertical pero es una mera palabra. Tenemos entonces que \mathcal{P} es el programa:

```

L1     IF N2 ≠ 0 GOTO L2
      GOTO L3
L2     N1111 ← N1
      N2222 ← N3
      N3 ← N1111
L1000  IF N2222 ≠ 0 GOTO L2000
      GOTO L3000
L2000  N2222 ← N2222 - 1
      N3 ← N3 + 1
      GOTO L1000
L3000  SKIP
      N2 ← N2 - 1
      GOTO L1
L3     N1 ← N3
    
```

el cual por supuesto esta escrito con espacios y en forma vertical pero es una mera palabra.

Macros asociados a funciones Σ -computables. Dada una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$, usaremos

$$[\overline{Vn+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

para denotar un macro de \mathcal{S}^Σ M el cual cumpla las siguientes propiedades (no siempre existira dicho macro, es decir solo para ciertas funciones $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ habra un tal macro).

- (1) Las variables oficiales de M son $V1, \dots, V\bar{n}, \overline{Vn+1}, W1, \dots, W\bar{m}$
- (2) M no tiene labels oficiales
- (3) Si reemplazamos:

- las variables oficiales de M (i.e. $V1, \dots, V\bar{n}, \overline{Vn+1}, W1, \dots, W\bar{m}$) por variables concretas

$$\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Nk_{n+1}}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$$

(elejidas libremente, es decir los numeros $k_1, \dots, k_{n+1}, j_1, \dots, j_m$ son cualesquiera)

- las variables auxiliares de M por variables concretas (distintas de a dos) y NO pertenecientes a la lista $\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Nk_{n+1}}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$
- los labels auxiliares de M por labels concretos (distintos de a dos)

entonces la palabra asi obtenida es un programa \mathcal{E} de \mathcal{S}^Σ que denotaremos en general con

$$[\overline{Nk_{n+1}} \leftarrow f(\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m})]$$

el cual debe tener la siguiente propiedad:

- (E) Si hacemos correr \mathcal{E} partiendo de un estado e que le asigne a las variables $\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$ valores $x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m$, entonces independientemente de los valores que les asigne e al resto de las variables (incluidas las que fueron a reemplazar a las variables auxiliares de M) se dara que

- si $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \notin D_f$, entonces \mathcal{E} no se detiene
- si $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \in D_f$, entonces \mathcal{E} se detiene (i.e. intenta realizar la siguiente a su ultima instruccion) y llega a un estado e' el cual cumple:

- e' le asigna a $\overline{Nk_{n+1}}$ el valor $f(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$
- e' solo puede diferir de e en los valores que le asigna a $\overline{Nk_{n+1}}$ o a las variables que fueron a reemplazar a las variables auxiliares de M . Notese que esto nos dice que los valores de las variables $\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$ al correr \mathcal{E} desde el estado e no se modificaran, salvo cuando k_i es igual a k_{n+1} , situacion en la cual el valor final de $\overline{Nk_i}$ sera $f(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$

El programa $\mathcal{E} = [\overline{Nk_{n+1}} \leftarrow f(\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m})]$ es comunmente llamado la *expansion* del macro $M = [\overline{Vn+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$ con respecto a la eleccion de variables y labels realizada.

Tambien, dada una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$, con

$$[\overline{Wm+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

denotaremos un macro de \mathcal{S}^Σ el cual cumpla condiciones analogas a las descriptas recién. Dejamos al lector escribirlas en detalle para este caso.

Es importante notar que nuestra notacion

$$[\overline{Vn+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

tiene cierta ambigüedad ya que no hace mension al alfabeto Σ el cual esta previamente fijado. Podria pasar que la funcion f sea Γ -mixta para otro alfabeto Γ y que el macro

$$[\overline{Vn+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

sea distinto segun lo consideremos para \mathcal{S}^Σ o para \mathcal{S}^Γ . Es decir, como ya lo remarcamos anteriormente, cuando hablamos de la existencia de un macro, es siempre relativo a un \mathcal{S}^Σ . Lo mismo pasa con la notacion

$$[\overline{Wm+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

Dejamos al lector que piense este fenomeno para el caso de la funcion $f : \{\text{@}, \text{\%}\}^* \times \{\text{@}, \text{\%}\}^* \rightarrow \{\text{@}, \text{\%}\}^*$, dada por $f(\alpha, \beta) = \alpha\beta$. Si tomamos $\Sigma = \{\text{@}, \text{\%}\}$ y $\Gamma = \{\text{@}, \text{\%}, \text{!}\}$, entonces f resulta una funcion Σ -mixta y tambien Γ -mixta y deberia quedar claro que no es lo mismo hacer el macro

$$[W3 \leftarrow f(W1, W2)]$$

para \mathcal{S}^Σ que hacerlo para \mathcal{S}^Γ .

Otra ambigüedad de esta notacion de macros de asignacion es que en el nombre de los macros

$$[\overline{Vn+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

$$[\overline{Wm+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

no se especifica quienes son las variables y labels auxiliares de dichos macros. Ambas ambigüedades no nos traeran problemas si manejamos las cosas con cierta madurez.

Aceptaremos sin demostracion el siguiente resultado fundamental.

Proposición 3. (a) Sea $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ una funcion Σ -computable. Entonces en \mathcal{S}^Σ hay un macro

$$[\overline{Vn+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

(b) Sea $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$ una funcion Σ -computable. Entonces en \mathcal{S}^Σ hay un macro

$$[\overline{Wm+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

Ejercicio 10: Sea $SUMA = \lambda xy[x + y]$. Explique por que la palabra

```

V1 ← V2
V4 ← V3
A1  IF V4 ≠ 0 GOTO A2
    GOTO A3
A2  V4 ← V4 - 1
    V1 ← V1 + 1
    GOTO A1
A3  SKIP
    
```

no puede ser tomada como el macro $[V3 \leftarrow SUMA(V1, V2)]$

Ejercicio 11: Sea $\Sigma = \{\#, \$\}$ y sea $f : D_f \subseteq \Sigma^* \rightarrow \omega$ una funcion Σ -computable. Sea $L = \{\alpha \in D_f : f(\alpha) = 1\}$. De (usando el macro $[V1 \leftarrow f(W1)]$) un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ tal que $\text{Dom}(\Psi_{\mathcal{P}}^{0,1,\#}) = L$.

Ejercicio 12: Sea $\Sigma = \{\#, \$\}$ y sea $f : \omega \rightarrow \Sigma^*$ una funcion Σ -computable. De (usando el macro $[W1 \leftarrow f(V1)]$) un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ tal que $\text{Dom}(\Psi_{\mathcal{P}}^{0,1,\#}) = \text{Im } f$.

Ejercicio 13: Pruebe la resiproca de la proposicion anterior, es decir pruebe que si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es tal que en \mathcal{S}^Σ hay un macro

$$[\overline{Vn+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

entonces f es Σ -computable.

Macros asociados a predicados Σ -computables. Dado un predicado $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$, usaremos

$$[\text{IF } P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \text{ GOTO A1}]$$

para denotar un macro M de \mathcal{S}^Σ el cual cumpla las siguientes propiedades (no siempre existira dicho macro, es decir solo para ciertos predicados $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ habra un tal macro).

- (1) Las variables oficiales de M son $V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}$
- (2) A1 es el unico label oficial de M
- (3) Si reemplazamos:
 - las variables oficiales de M (i.e. $V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}$) por variables concretas

$$\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$$

(elejidas libremente, es decir los numeros $k_1, \dots, k_n, j_1, \dots, j_m$ son cualesquiera)

- el label oficial A1 por un label concreto \bar{Lk} (elejido libremente, es decir k es cualquier elemento de \mathbf{N})
- las variables auxiliares de M por variables concretas (distintas de a dos) y NO pertenecientes a la lista $\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$
- los labels auxiliares de M por labels concretos (distintos de a dos) y ninguno igual a \bar{Lk}

entonces la palabra asi obtenida es un programa \mathcal{E} de \mathcal{S}^Σ (salvo por la ley de los GOTO respecto de \bar{Lk}) que denotaremos en general con

$$[\text{IF } P(\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}) \text{ GOTO } \bar{Lk}]$$

el cual debe tener la siguiente propiedad:

- (E) Si hacemos correr \mathcal{E} partiendo de un estado e que le asigne a las variables $\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$ valores $x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m$, entonces independientemente de los valores que le asigne e al resto de las variables (incluidas las que fueron a reemplazar a las variables auxiliares de M) se dara que
 - (i) si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \notin D_P$, entonces \mathcal{E} no se detiene
 - (ii) si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_P$ y $P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$, entonces luego de una cantidad finita de pasos, \mathcal{E} direcciona al label \bar{Lk} quedando en un estado e' el cual solo puede diferir de e en los valores que le asigna a las variables que fueron a reemplazar a las variables auxiliares de M . Al resto de las variables, incluidas $\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$ no las modifica
 - (iii) si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_P$ y $P(\vec{x}, \vec{\alpha}) = 0$, entonces luego de una cantidad finita de pasos, \mathcal{E} se detiene (i.e. intenta realizar la siguiente a su ultima instruccion) quedando en un estado e' el cual solo puede diferir de e en los valores que le asigna a las variables que

fueron a reemplazar a las variables auxiliares de M . Al resto de las variables, incluidas $\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}$ no las modifica

La palabra $\mathcal{E} = [\text{IF } P(\overline{Nk_1}, \dots, \overline{Nk_n}, \overline{Pj_1}, \dots, \overline{Pj_m}) \text{ GOTO } L\bar{k}]$ es llamada la *expansion* del macro con respecto a la eleccion de variables y labels realizada. Al igual que en el caso de los macros de asignacion, la notacion

$$[\text{IF } P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \text{ GOTO } A1]$$

tiene cierta ambigüedad ya que no explicita el alfabeto ni los labels y variables auxiliares de tipo macro.

Proposición 4. Sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ un predicado Σ -computable. Entonces en \mathcal{S}^Σ hay un macro

$$[\text{IF } P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \text{ GOTO } A1]$$

Proof. Por (a) de la proposicion anterior tenemos un macro $[\overline{Vn+1} \leftarrow P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$. Notese que la palabra

$$[\overline{Vn+1} \leftarrow P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})] \text{ IF } \overline{Vn+1} \neq 0 \text{ GOTO } A1$$

es el macro buscado. ■

Ejercicio 14: Pruebe la resiproca de la proposicion anterior, es decir pruebe que si $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es tal que en \mathcal{S}^Σ hay un macro

$$[\text{IF } P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \text{ GOTO } A1]$$

entonces P es Σ -computable.

Ejercicio 15: Sea Σ un alfabeto finito. Pruebe usando macros (de tipo IF) que si $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ son predicados Σ -computables, entonces $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$ y $\neg P$ lo son tambien.

Primer Manantial de Macros. Dejamos en forma de una sola proposicion los tres casos de existencia de macros.

Proposición 5 (Primer Manantial de Macros). Sea Σ un alfabeto finito. Si

$$f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$$

$$g : D_g \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$$

$$P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \{0, 1\}$$

son Σ -computables, entonces en \mathcal{S}^Σ hay macros

$$[\overline{Vn+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

$$[\overline{Wm+1} \leftarrow g(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

$$[\text{IF } P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \text{ GOTO } A1]$$

Basicamente habra dos manantiales de macros de donde obtendremos todos los macros que potenciaran nuestro lenguaje \mathcal{S}^Σ . El Segundo Manantial de Macros es consecuencia del primero y de la batalla Neumann vence a Godel que veremos en la Guía 8.

CONJUNTOS Σ -ENUMERABLES

Ya que la nocion de funcion Σ -computable es el modelo matematico Neumanniano o imperativo del concepto de funcion Σ -efectivamente computable, nos podriamos preguntar entonces cual es el modelo matematico Neumanniano del concepto de conjunto Σ -efectivamente enumerable. Si prestamos atencion a la definicion de conjunto Σ -efectivamente enumerable, notaremos que depende de la existencia de ciertas funciones Σ -efectivamente computables por lo cual la siguiente definicion cae de maduro:

Un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ sera llamado Σ -enumerable cuando sea vacio o haya una funcion $F : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ sea Σ -computable, para cada $i \in \{1, \dots, n+m\}$.

Deberia entonces quedar claro que si el concepto de funcion Σ -computable modeliza correctamente al concepto de funcion Σ -efectivamente computable, entonces el concepto de conjunto Σ -enumerable recién definido modeliza correctamente al concepto de conjunto Σ -efectivamente enumerable.

Notese que segun la definicion que acabamos de escribir, un conjunto no vacio $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ -enumerable si y solo si hay programas $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{n+m}$ tales que

$$\begin{aligned} & - \text{Dom}(\Psi_{\mathcal{P}_1}^{1,0,\#}) = \dots = \text{Dom}(\Psi_{\mathcal{P}_n}^{1,0,\#}) = \omega \\ & - \text{Dom}(\Psi_{\mathcal{P}_{n+1}}^{1,0,*}) = \dots = \text{Dom}(\Psi_{\mathcal{P}_{n+m}}^{1,0,*}) = \omega \\ & - S = \text{Im}([\Psi_{\mathcal{P}_1}^{1,0,\#}, \dots, \Psi_{\mathcal{P}_n}^{1,0,\#}, \Psi_{\mathcal{P}_{n+1}}^{1,0,*}, \dots, \Psi_{\mathcal{P}_{n+m}}^{1,0,*}]) \end{aligned}$$

Como puede notarse los programas $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{n+m}$ puestos secuencialmente a funcionar desde el estado $\|x\|$ producen en forma natural un procedimiento efectivo (con dato de entrada $x \in \omega$) que enumera a S . Por supuesto podemos decir que en tal caso los programas $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{n+m}$ enumeran a S . La siguiente proposicion muestra que tambien las cosas se pueden hacer con un solo programa

Proposición 6 (Caracterizacion de Σ -enumerabilidad). *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacio. Entonces son equivalentes:*

- (1) S es Σ -enumerable
- (2) Hay un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ tal que:
 - (a) Para cada $x \in \omega$, tenemos que \mathcal{P} se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots))$, donde $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \in S$.
 - (b) Para cada $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que \mathcal{P} se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots))$

Proof. (1) \Rightarrow (2). Ya que S es no vacio, por definicion tenemos que hay una $F : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ es Σ -computable, para cada $i \in \{1, \dots, n+m\}$. Por

el Primer Manantial de Macros tenemos que existen macros:

$$\begin{aligned}
 &[V2 \leftarrow F_{(1)}(V1)] \\
 &\quad \vdots \\
 &[V2 \leftarrow F_{(n)}(V1)] \\
 &[W1 \leftarrow F_{(n+1)}(V1)] \\
 &\quad \vdots \\
 &[W1 \leftarrow F_{(n+m)}(V1)]
 \end{aligned}$$

Sea \mathcal{P} el siguiente programa:

$$\begin{aligned}
 &[P\overline{m} \leftarrow F_{(n+m)}(N1)] \\
 &\quad \vdots \\
 &[P1 \leftarrow F_{(n+1)}(N1)] \\
 &[N\overline{n} \leftarrow F_{(n)}(N1)] \\
 &\quad \vdots \\
 &[N1 \leftarrow F_{(1)}(N1)]
 \end{aligned}$$

donde se supone que las expansiones de los macros usados son hechas usando variables auxiliares no pertenecientes a la lista $N1, \dots, N\overline{n}, P1, \dots, P\overline{m}$ (por supuesto, dada la fortaleza de nuestros macros se puede usar una misma variable auxiliar para dos distintas expansiones), y tambien se supone que los labels auxiliares usados en dichas expansiones son todos distintos, es decir no usamos el mismo label auxiliar en dos expansiones distintas (por que?).

Dejamos al lector corroborar que el programa \mathcal{P} cumple las propiedades (a) y (b)

(2) \Rightarrow (1). Supongamos $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ cumple (a) y (b) de (2). Sean

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_1 &= \mathcal{P}N1 \leftarrow N1 \\
 \mathcal{P}_2 &= \mathcal{P}N1 \leftarrow N2 \\
 &\quad \vdots \\
 \mathcal{P}_n &= \mathcal{P}N1 \leftarrow N\overline{n} \\
 \mathcal{P}_{n+1} &= \mathcal{P}P1 \leftarrow P1 \\
 \mathcal{P}_{n+2} &= \mathcal{P}P1 \leftarrow P2 \\
 &\quad \vdots \\
 \mathcal{P}_{n+m} &= \mathcal{P}P1 \leftarrow P\overline{m}
 \end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \Psi_{\mathcal{P}_1}^{1,0,\#} \\
 F_2 &= \Psi_{\mathcal{P}_2}^{1,0,\#} \\
 &\vdots \\
 F_n &= \Psi_{\mathcal{P}_n}^{1,0,\#} \\
 F_{n+1} &= \Psi_{\mathcal{P}_{n+1}}^{1,0,*} \\
 F_{n+2} &= \Psi_{\mathcal{P}_{n+2}}^{1,0,*} \\
 &\vdots \\
 F_{n+m} &= \Psi_{\mathcal{P}_{n+m}}^{1,0,*}
 \end{aligned}$$

Notese que cada F_i es Σ -computable y tiene dominio igual a ω . Sea $F = [F_1, \dots, F_{n+m}]$. Tenemos por definicion que $D_F = \omega$ y ya que $F_{(i)} = F_i$, para cada $i = 1, \dots, n+m$ tenemos que cada $F_{(i)}$ es Σ -computable. Dejamos al lector verificar que $I_F = S$. ■

Cuando un programa \mathcal{P} cumpla las propiedades dadas en (2) de la proposicion anterior respecto de un conjunto S , diremos que \mathcal{P} *enumera* a S . Notese que:

- Si $S \subseteq \omega$ es no vacio, entonces \mathcal{P} enumera a S sii $\text{Dom}(\Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,\#}) = \omega$ y $\text{Im}(\Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,\#}) = S$
- Si $S \subseteq \Sigma^*$ es no vacio, entonces \mathcal{P} enumera a S sii $\text{Dom}(\Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,*}) = \omega$ y $\text{Im}(\Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,*}) = S$

Cabe destacar que $(2) \Rightarrow (1)$ de la proposicion anterior es muy util a la hora de probar que un conjunto dado es Σ -enumerable ya que nos permite trabajar dentro de un solo programa.

Ejercicio 16: Sea $\Sigma = \{\%, !\}$. Pruebe sin usar macros ni la proposicion anterior que $S = \{(2, \% \%), (3, !!!), (0, \varepsilon)\}$ es Σ -enumerable

Ejercicio 17: Sea $\Sigma = \{\%, !\}$. Pruebe sin usar macros ni la proposicion anterior que $S = \{(i, 5, \%^i) : i \in \omega\}$ es Σ -enumerable

Ejercicio 18: Sea $\Sigma = \{\%, !\}$. Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un conjunto no vacio y Σ -enumerable. De (usando macros) un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ tal que $\Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,*}$ enumera al conjunto

$$\{\alpha \% ! : \alpha \in L\}$$

es decir $\text{Dom} \Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,*} = \omega$ y $\text{Im}(\Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,*}) = \{\alpha \% ! : \alpha \in L\}$

Ejercicio 19: Sea $\Sigma = \{\%, !\}$. Sea

$$S = \{(x, x+1, x+2, \% \% !!) : x \in \omega\}$$

De sin usar macros un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ el cual enumere a S (i.e. que cumpla (2) de la proposicion anterior).

CONJUNTOS Σ -COMPUTABLES

La version imperativa o Neumanniana del concepto de conjunto Σ -efectivamente computable es facil de dar: un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ sera llamado Σ -computable cuando la funcion $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ sea Σ -computable. O sea que $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ -computable sii hay un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ el cual computa a $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$, es decir:

- Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S$, entonces \mathcal{P} se detiene partiendo desde $\|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$ y la variable N1 queda con contenido igual a 1
- Si $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in (\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$, entonces \mathcal{P} se detiene partiendo desde $\|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$ y la variable N1 queda con contenido igual a 0

Si \mathcal{P} es un programa el cual computa a $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$, diremos que \mathcal{P} decide la pertenencia a S , con respecto al conjunto $\omega^n \times \Sigma^{*m}$.

Ejercicio 20: Sea $\Sigma = \{\%, !\}$. Pruebe sin usar macros que $S = \{(2, \% \%), (3, !)\}$ es Σ -computable

Ejercicio 21: Sea $\Sigma = \{\%, !\}$. Pruebe sin usar macros que $S = \{(i, \%^i) : i \in \omega\}$ es Σ -computable

Ejercicio 22: Sea Σ un alfabeto finito. Pruebe usando macros que

- (a) Si $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ son predicados Σ -computables, entonces $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$ y $\neg P$ lo son tambien.
- (b) Si $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ -computables, entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 - S_2$ son Σ -computables

Macros asociados a conjuntos Σ -computables. El Primer Manatial de Macros nos dice que si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es un conjunto Σ -computable, entonces, ya que $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ es Σ -computable, en \mathcal{S}^Σ hay un macro

$$[\text{IF } \chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \text{ GOTO A1}]$$

Escribiremos el nombre de este macro de la siguiente manera mas intuitiva:

$$[\text{IF } (V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \in S \text{ GOTO A1}]$$

Notese que las expansiones de este macro, dado que $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ es Σ -total, ya sea terminan por la ultima instruccion de la expansion o direccionan a la primera instruccion que tenga label igual al label que reemplazo a A1 en la expansion. Es importante notar que para asegurar la existencia de este macro utilizamos que S es Σ -computable lo cual no siempre sucedera para un conjunto S . Por ejemplo, puede pasar que S sea el dominio de una funcion Σ -computable pero que S no sea Σ -computable (esto se vera mas adelante) y en tal caso no existira en \mathcal{S}^Σ un macro

$$[\text{IF } (V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \in S \text{ GOTO A1}]$$

ya que si tal macro existiera seria facil hacer un programa que compute a $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ lo cual nos diria que S es Σ -computable (ver el ejercicio posterior a la Proposicion 4). Es muy comun el error de suponer que existe un macro

$$[\text{IF } (V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m}) \in S \text{ GOTO A1}]$$

cuando S es el dominio de una funcion Σ -computable.