Nota: Los ejercicios que tienen (S) son para una "Segunda vuelta" es decir conviene hacerlos una vez que ya se completó la guía haciendo los otros y ya se tiene mas madurez e intuición basica sobre los conceptos. Los que tienen (O) son opcionales por lo cual no se toman en los examenes.

Codificacion de infinituplas de numeros

Usaremos $\omega^{\mathbf{N}}$ para denotar el conjunto de todas las infinituplas con coordenadas en ω. Es decir

$$\omega^{\mathbf{N}} = \{(s_1, s_2, ...) : s_i \in \omega, \text{ para cada } i \geq 1\}.$$

Definamos el siguiente subconjunto de $\omega^{\mathbf{N}}$

$$\omega^{[\mathbf{N}]} = \left\{(s_1, s_2, ...) \in \omega^{\mathbf{N}} : \text{ hay un } n \in \mathbf{N} \text{ tal que } s_i = 0, \text{ para } i \geq n\right\}.$$

Notese que $\omega^{\mathbf{N}} \neq \omega^{[\mathbf{N}]}$, por ejemplo las infinituplas

$$\begin{array}{c} (10, 20, 30, 40, 50, ...) \\ (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...) \end{array}$$

no pertenecen a $\omega^{[\mathbf{N}]}$. Notese que $(s_1, s_2, ...) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$ si y solo si solo una cantidad finita de coordenadas de $(s_1, s_2, ...)$ son no nulas (i.e. $\{i : s_i \neq 0\}$ es finito).

Definamos

$$\begin{array}{rcl} pr : \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ n & \rightarrow & n\text{-esimo numero primo} \end{array}$$

Nótese que $pr(1) = 2$, $pr(2) = 3$, $pr(3) = 5$, etc.

Es bien conocido que todo numero natural es expresable como producto de primos. Por ejemplo si tomamos $x = 57596$ tenemos que $x = 2.2.7.11.11.17$. Tambien es un hecho conocido que dicha representacion en producto de primos es unica, si escribimos a los factores primos de menor a mayor, tal como lo hicimos recien con el numero 57596. El Teorema Fundamental de la Aritmetica justamente acevera esta propiedad de factorisacion unica de todo numero natural. Trataremos de escribir este teorema de una forma un poco mas "cheta".

Ya que $57596 = 2.2.7.11.11.17$, podemos escribir

$$57596 = pr(1)^2.pr(4)^1.pr(5)^2.pr(7)^1$$

Notese que ahora cada primo que interviene en la factorizacion de 57596 figura con un exponente que nos dice cuantas veces ocurre en dicha factorizacion. Hay muchos primos que no ocurren en esta factorizacion, es decir ocurren 0 veces en la misma. Pero podemos escribir

$$57596 = pr(1)^2.pr(2)^0.pr(3)^0.pr(4)^1.pr(5)^2.pr(6)^0.pr(7)^1.pr(8)^0.pr(9)^0.pr(10)^0....$$

y la igualdad no se altera ya que agregamos factores iguales a 1 (una cantidad infinita!). De esta manera hemos logrado que cada primo intervenga en la factorizacion. Ademas si vemos la infinitupla de exponentes de esta nueva factorizacion, es decir

$$(2, 0, 0, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 0, ...)$$

obtenemos un elemento de $\omega^{[\mathbf{N}]}$.

Por supuesto esto lo podemos hacer con cualquier numero natural y siempre la infinitupla de exponentes sera un elemento de $\omega^{[\mathbf{N}]}$. Ademas es facil notar (basandose en el Teorema Fundamental de la Aritmética) que estas representaciones "chetas" tambien resultan unicas. Mas concretamente tenemos la siguiente version del Teorema Fundamental de la Aritmetica.

Theorem 1 *Para cada $x \in \mathbf{N}$, hay una unica infinitupla $(s_1, s_2, ...) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$ tal que*

$$x = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$$

(Tiene sentido escribir $\prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$, ya que en esta productoria solo una cantidad finita de factores son no iguales a 1.)

Ejercicio 1: Pruebe la existencia en el teorema anterior. (Hint: Induccion completa.)

Como podra notarse despues de hacer el ejercicio anterior, la existencia de dicha infinitupla para un numero x en general, no es un hecho dificil de probar. En realidad la potencia del Teorema Fundamental de la Aritmética radica en el hecho de que dicha infinitupla es unica.

Para probar la unicidad es clave el siguiente resultado el cual aceptamos sin demostracion.

Lemma 2 *Si $p, p_1, ..., p_n$ son numeros primos (con $n \geq 1$) y p divide a $p_1.....p_n$, entonces $p = p_i$, para algun i.*

Ejercicio 2: Use el lema anterior para probar que

(a) $17^{1045} \neq 13^{2000}$

(b) $5^{55}.13^{90}.17^{1045} \neq 5^{55}.3^{122}.31^{400}$

(c) $2^{90}.3^{20}.17^{1045} \neq 2^{100}.3^{12}.17^{1044}$

Ejercicio 3: Enuncie en forma precisa que significa la "unicidad" en el teorema anterior

Ejercicio 4: (O) Diga con palabras como se puede probar dicha unicidad usando el Lema 2.

A continuacion un poco de notacion. Dada una infinitupla $(s_1, s_2, ...) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$ usaremos $\langle s_1, s_2, ... \rangle$ para denotar al numero $\prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$.

Dado $x \in \mathbf{N}$, usaremos (x) para denotar a la unica infinitupla $(s_1, s_2, ...) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$ tal que

$$x = \langle s_1, s_2, ... \rangle = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$$

Ademas para $i \in \mathbf{N}$, usaremos $(x)_i$ para denotar a s_i de dicha infinitupla. Es decir que

(1) $(x) = ((x)_1, (x)_2, ...)$

(2) $(x)_i$ es el exponente de $pr(i)$ en la (unica posible) factorizacion de x como producto de primos

Se le suele llamar la "bajada *i-esima de x*" al numero $(x)_i$. La idea de este nombre es que para obtener $(x)_i$ debemos bajar el exponente de $pr(i)$ en la factorizacion de x

Claramente entonces

(3) $\langle (x)_1, (x)_2, ... \rangle = x$, para cada $x \in \mathbf{N}$

(4) Para cada $(s_1, s_2, ...) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$, se tiene que

$$(\langle s_1, s_2, ... \rangle)_i = s_i, \text{ para } i \in \mathbf{N}$$

Es decir que

$$(\langle s_1, s_2, ... \rangle) = (s_1, s_2, ...)$$

Ejercicio 5: Justifique con palabras las propiedades (3) y (4)

Ejercicio 6: Pruebe que si $x, y \in \mathbf{N}$, entonces

(a) $(x)_i \leq x$, para cada $i \in \mathbf{N}$

(b) $(x.y)_i = (x)_i + (y)_i$, para cada $i \in \mathbf{N}$

(c) $x|y$ si y solo si $(x)_i \leq (y)_i$, para cada $i \in \mathbf{N}$

Tenemos entonces el siguiente resultado fundamental

Theorem 3 *Las funciones*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \rightarrow & \omega^{[\mathbf{N}]} \\ x & \rightarrow & (x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \omega^{[\mathbf{N}]} & \rightarrow & \mathbf{N} \\ (s_1, s_2, ...) & \rightarrow & \langle s_1, s_2, ... \rangle \end{array}$$

son biyecciones una inversa de la otra.

Proof. Llamemos f a la funcion de la izquierda y g a la de la derecha. Notese que el Lema 3 de la Guia 1 nos dice que basta con probar que $f \circ g = Id_{\omega^{[\mathbf{N}]}}$ y $g \circ f = Id_{\mathbf{N}}$. Pero (3) justamente nos dice que $g \circ f = Id_{\mathbf{N}}$ y (4) nos dice que $f \circ g = Id_{\omega^{[\mathbf{N}]}}$. ■

Tal como se hace en la escuela primaria, el siguiente lema nos permite calcular $(x)_i$.

Lemma 4 *Dados $x, i \in \mathbf{N}$, se tiene que*

$$(x)_i = \max_t \left(pr(i)^t \ \textit{divide a } x \right)$$

Ejercicio 7: (O) Explique con palabras como se aplica el Lema 2 para probar el lema anterior

Definamos la funcion $Lt : \mathbf{N} \to \omega$ de la siguiente manera:

$$Lt(x) = \begin{cases} \max_i \ (x)_i \neq 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Se tienen las siguientes propiedades basicas

Lemma 5 *Para cada $x \in \mathbf{N}$:*

1. $Lt(x) = 0$ *sii* $x = 1$
2. $x = \prod_{i=1}^{Lt(x)} pr(i)^{(x)_i}$

Ejercicio 8: (S) Dar una prueba del lema anterior.

Ejercicio 9: Encuentre el dominio de las siguientes funciones:

(a) $\lambda ix[(x)_i]$

(b) $\lambda x[Lt(x)]$

(c) $\lambda x[\langle (x)_1, (x)_2, (x)_3, 0, 0, \dots \rangle]$

Ordenes totales

Antes de introducir los órdenes totales, rapasaremos algunos conceptos básicos requeridos.

Sea A un conjunto. Recordemos que una *relacion binaria sobre* A es un subconjunto de A^2. Algunos ejemplos:

(E1) Sea $R = \{(1,2),(2,3)\}$. Entonces R es una relacion binaria sobre $\mathbf{N}$.

(E2) Sea $R = \{(x,y) \in \omega^2 : x \text{ divide a } y\}$. Entonces R es una relacion binaria sobre ω.

(E3) Sea $R = \{(r,t) \in \mathbf{R}^2 : r \leq t\}$. Entonces R es una relacion binaria sobre $\mathbf{R}$

(E4) $\emptyset$ es una relacion binaria sobre A, cualesquiera sea el conjunto A.

(E5) Sea $R = \{(x,y) \in \omega^2 : x < y \text{ o } y = 0\}$. Entonces R es una relacion binaria sobre ω

Notese que si R es una relacion binaria sobre A y $A \subseteq B$ entonces R es una relacion binaria sobre B. Por ejemplo las relaciones dadas en los ejemplos (E1), (E2), (E4) y (E5) tambien son relaciones binarias sobre $\mathbf{R}$

Como es usual, cuando R sea una relacion binaria sobre un conjunto A, algunas veces escribiremos aRb en lugar de $(a,b) \in R$.

Recordemos que una relacion binaria R sobre un conjunto A es llamada un *orden parcial sobre* A si cumple las siguientes tres propiedades:

Reflexividad xRx, cualesquiera sea $x \in A$

Transitividad xRy y yRz implica xRz, cualesquiera sean $x,y,z \in A$

Antisimetria xRy y yRx implica $x = y$, cualesquiera sean $x,y \in A$

Algunos ejemplos:

(E1) $\{(r,t) \in \mathbf{R}^2 : r \leq t\}$ es un orden parcial sobre $\mathbf{R}$, llamado el orden usual de $\mathbf{R}$

(E2) Sea $R = \{(1,2),(1,3),(1,1),(2,2),(3,3)\}$. Entonces R es un orden parcial sobre $\{1,2,3\}$

(E3) Sea $R = \{(S,T) \in \mathcal{P}(\omega)^2 : S \subseteq T\}$. Entonces R es un orden parcial sobre $\mathcal{P}(\omega)$

(E4) $\{(x,y) \in \omega^2 : x \leq y\}$ es un orden parcial sobre ω.

(E5) Sea $R = \{(1,1)\}$. Entonces R es un orden parcial sobre $\{1\}$.

(E6) $\{(a,b) \in A^2 : a = b\}$ es un orden parcial sobre A, cualesquira sea el conjunto A

(E7) Sea $\leq = \{(n,m) \in \mathbf{N}^2 : n \mid m\}$. Es facil ver que $\leq$ es un orden parcial sobre $\mathbf{N}$

Notese que las relaciones dadas en (E1) y (E4) son distintas, ademas

Ejercicio 10: Es la relacion dada en (E4) un orden parcial sobre $\mathbf{R}$?

Muchas veces denotaremos con $\leq$ a una relacion binaria que sea un orden parcial. Esto hace mas intuitiva nuestra escritura pero siempre hay que tener en cuenta que $\leq$ en estos casos esta denotando cierto conjunto de pares ordenados previamente definido.

Usaremos la siguiente

Convencion notacional Si hemos denotado con $\leq$ a cierto orden parcial sobre un conjunto A, entonces

- Denotaremos con $<$ a la relacion binaria $\{(a,b) \in A^2 : a \leq b \text{ y } a \neq b\}$. Es decir que $< = \{(a,b) \in A^2 : a \leq b \text{ y } a \neq b\}$. Cuando se de $a < b$ diremos que *a es menor que b* o que *b es mayor que a* (*respecto de* $\leq$)

Por ejemplo, si $A = \{1,2,3,4\}$ y $\leq = \{(1,2),(2,3),(1,3),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$, entonces $< = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$.

Ahora sí estamos en condiciones de definir orden total. Sea A un conjunto cualquiera. Por un *orden total sobre A* entenderemos un orden parcial $\leq$ sobre A el cual cumple:

(C) $a \leq b$ o $b \leq a$, cualesquiera sean $a, b \in A$

Ejercicio 11: Decida cuáles ordenes parciales de la lista de ejemplos (E1)-(E7) son ordenes totales.

Supongamos A es finito, no vacio, y que $\leq$ es un orden total sobre A. La propiedad (C) nos permite probar que para cada conjunto no vacio $S \subseteq A$, hay un elemento $s \in S$ el cual cumple $s \leq s'$ para cada $s' \in S$. Por supuesto, s es unico (por que?) y habitualmente es llamado el *menor elemento de S*, ya que es menor que todo otro elemento de S.

Si A es finito, no vacio, y $\leq$ es un orden total sobre A, podemos definir recursivamente una funcion $f : \{1,...,|A|\} \to A$ de la siguiente manera:

- $f(1) =$ menor elemento de A
- Si $i \in \{1,...,|A|-1\}$, entonces

- $f(i+1) =$ menor elemento de $A - \{f(1), ..., f(i)\}$

Como es habitual, $f(i)$ es llamado el *i-esimo elemento de A*.

Muchas veces para dar un orden total sobre un conjunto finito A, daremos simplemente sus elementos en forma creciente ya que esto determina el orden por completo. Por ejemplo si $A = \{1, 2, 3\}$, el orden total dado por $2 < 1 < 3$ es la relacion $\leq = \{(2, 1), (1, 3), (2, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

Ejercicio 12: (S) (O) Sea A un conjunto finito de $n > 0$ elementos. Encuentre una biyección entre $\{R : R$ es un orden total sobre $A\}$ y $\{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n : a_i \neq a_j$ para $i \neq j\}$. (¿Por qué este resultado se puede considerar informático?)

Ordenes naturales sobre Σ^*

Llamaremos *numerales* a los siguientes simbolos

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Usaremos Num para denotar el conjunto de numerales. Notese que $Num \cap \omega = \emptyset$. Es decir, no debemos confundir los simbolos que usualmente denotan los primeros diez numeros enteros con los numeros que ellos denotan. De hecho en china o japon los primeros diez numeros enteros se denotan con otros simbolos. Similarmente las palabras pertenecientes a Num^* denotan (notacion decimal) a los numeros de ω pero debemos tener en cuenta que $Num^* \cap \omega = \emptyset$. Cuando tratamos con palabras de Num^*, debemos ser cuidadosos ya que muchas veces en nuestro discurso matematico (es decir las guias, el apunte, lo que escriben los profesores en el pizarron, etc) representamos dos objetos diferentes de la misma forma. Por ejemplo 45 puede estar denotando al numero entero cuarenta y cinco o tambien 45 puede estar denotando la palabra de longitud 2 cuyo primer simbolo es el numeral 4 y cuyo segundo simbolo es el numeral 5, es decir en este caso la palabra 45 se denota a ella misma. Por dar otro ejemplo, el simbolo 1 en nuestro discurso algunas veces se denotara a si mismo y otras veces denotara al numero uno.

Es bien conocido que, en notacion decimal, las siguientes palabras del alfabeto Num, denotan, de menor a mayor, a los numeros de ω

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ...$$

Por supuesto esta lista de palabras es infinita pero asumimos que el lector sabe como obtener la palabra siguiente a cada miembro de la lista (i.e. sumar 1 en notacion decimal), lo cual determina por completo la lista conociendo que la misma comienza con la palabra 0.

Cabe destacar que debido a la presencia del numeral 0 en la lista, la n-esima palabra representa o denota al numero $n-1$ o, dicho de otra forma, el numero $n \in \omega$ es representado por la $(n+1)$-esima palabra de la lista.

Un detalle de la representacion decimal de numeros de ω mediante palabras de Num^* es que la misma no nos da una biyeccion entre Num^* y ω ya que por ejemplo las palabras 00016 y 16 representan el mismo numero. Dicho de otra forma en la lista anterior no figuran todas las palabras de Num^*, a saber estan omitidas todas las palabras que comienzan con el simbolo 0 y tienen longitud mayor que uno. A continuacion daremos una representacion de los numeros de ω mediante palabras, la cual no tendra este problema. El alfabeto que usaremos tendra todos los numerales menos el 0 y ademas tendra un simbolo para denotar al numero diez, a saber el simbolo d. Es decir

$$\widetilde{Num} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, d\}$$

Representaremos a los numeros de ω con la siguiente lista infinita de palabras de $\widetilde{Num}$

$\varepsilon, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, d,$
$11, 12, ..., 1d, 21, 22, ..., 2d, ..., 91, 92, ..., 9d, d1, d2, ..., dd,$
$111, 112, ..., 11d, 121, 122, ..., 12d, ...$

El lector ya se habra dado cuenta de que el siguiente a una palabra α de la lista anterior se obtiene aplicando las siguientes clausulas

C_1 si $\alpha = d^n$, con $n \geq 0$ entonces el siguiente de α es 1^{n+1}

C_2 si α no es de la forma d^n, con $n \geq 0$, entonces el siguiente de α se obtiene de la siguiente manera:

(a) buscar de derecha a izquierda el primer simbolo no igual a d

(b) reemplazar dicho simbolo por su siguiente en la lista $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, d$

(c) reemplazar por el simbolo 1 a todos los simbolos iguales a d que ocurrian a la derecha del simbolo reemplazado

Notese que

- El numero 0 es representado en la lista anterior con la palabra ε
- El numero 1 es representado en la lista anterior con la palabra 1

$\vdots$

- El numero 9 es representado en la lista anterior con la palabra 9
- El numero 10 es representado en la lista anterior con la palabra d

- El numero 11 es representado en la lista anterior con la palabra 11

$$\vdots$$

- El numero 19 es representado en la lista anterior con la palabra 19
- El numero 20 es representado en la lista anterior con la palabra $1d$
- El numero 21 es representado en la lista anterior con la palabra 21
- El numero 22 es representado en la lista anterior con la palabra 22

$$\vdots$$

Como puede notarse en estos primeros veinte y pico numeros solo dos (el 0 y el 20) se representan en forma distinta a la reprentacion decimal clasica. Es natural que ε denote al numero 0 y ademas notese que la palabra $1d$ (que en la lista representa el 20) puede leerse como "diecidiez" (es decir la palabra que sigue a "diecinueve") que justamente es 20. Por supuesto con esta manera de pensar la palabra $2d$ deberiamos leerla como "ventidiez" y si nos fijamos en la lista ella representa al numero treinta lo cual nuevamente es muy natural. Otro ejemplo: a $6d$ deberiamos leerla como "sesentidiez" y es natural ya que en la lista representa al setenta. Tambien, la palabra $9d$ puede leerse noventidiez ya que representa en la lista al numero 100.

La lista anterior va representando los numeros de ω en forma muy natural pero, aunque nuestra intuicion nos diga que no, en principio podria pasar que una misma palabra del alfabeto $\widetilde{Num}$ ocurra dos veces en la lista y esto nos diria que una misma palabra estaria representando a dos numeros distintos. Tambien, en principio podria suceder que haya una palabra del alfabeto $\widetilde{Num}$ la cual nunca figure en la lista. Mas abajo daremos una serie de ejercicios que muestran que estas dos posibilidades no suceden, es decir muestran que

(S) Toda palabra de $\widetilde{Num}^*$ aparece en la lista

(I) Ninguna palabra de $\widetilde{Num}^*$ aparece mas de una ves

Notese que la propiedad (S) nos dice que la funcion

$$\begin{array}{rcl} *:\omega & \rightarrow & \widetilde{Num}^* \\ n & \rightarrow & (n+1)\text{-esimo elemento de la lista} \end{array}$$

es sobreyectiva y la propiedad (I) nos garantiza que dicha funcion es inyectiva, por lo cual entre las dos nos garantizan que dicha representacion establece una biyeccion entre ω y $\widetilde{Num}^*$.

Por supuesto, la pregunta que inmediatamente surge es como calcular la inversa de $*$. Llamemos $\#$ a la inversa de $*$. Notese que dada una palabra $\alpha \in \widetilde{Num}^*$, el numero $\#(\alpha)$ es justamente el numero representado por la palabra

α, o dicho de otra forma $\#(\alpha)$ es la posicion que ocupa α en la lista, contando desde el 0 (es decir α es la $(\#(\alpha)+1)$-esima palabra de la lista). Por ejemplo:

$$\begin{gathered}\#(\varepsilon)=0\\ \#(1)=1\\ \vdots\\ \#(9)=9\\ \#(d)=10\\ \#(11)=11\\ \#(12)=12\\ \vdots\\ \#(19)=19\\ \#(1d)=20\end{gathered}$$

Aqui hay que tener cuidado como leemos las igualdades anteriores. Por ejemplo en la igualdad

$$\#(1)=1$$

la primera ocurrencia del simbolo 1 se refiere al numeral uno, es decir denota una palabra y la segunda ocurrencia se esta refiriendo al numero uno, es decir denota un numero.

Dejamos al lector el ejercicio de ganar intuicion con ejemplos hasta que se convensa de que tal como en el caso de la notacion decimal, el numero $\#(\alpha)$ se expresa como una suma de potencias de 10, con los coeficientes dados en funcion de los simbolos de α. Mas concretamente si $\alpha=s_1s_2...s_k$ con $k\geq 1$ y $s_1,s_2,...,s_k\in\widetilde{Num}$, entonces

$$\#(\alpha)=\#(s_1).10^{k-1}+\#(s_2).10^{k-2}+...+\#(s_k).10^0$$

No daremos ahora una prueba formal de este hecho pero para ganar intuicion sobre el mismo el lector puede hacer los Ejercicios 13, 14, 15 y 16. Algunos ejemplos

$$\begin{aligned}\#(1d)&=1.10^1+10.10^0=10+10=20\\ \#(dd)&=10.10^1+10.10^0=100+10=110\\ \#(111)&=1.10^2+1.10^1+1.10^0=100+10+1=111\\ \#(1d3d)&=1.10^3+10.10^2+3.10^1+10.10^0\end{aligned}$$

Ahora que sabemos que las palabras de $\widetilde{Num}$ representan los numeros como suma de potencias de diez, en forma analoga a la notacion decimal clasica, podemos refozar aun mas la analogia poniendo nombres adecuados que, tal como en el caso clasico, nos permitan leer las palabras de $\widetilde{Num}$ describiendo su suma de potencias asociada. Por ejemplo podriamos llamar "decenta" al numero 100, por analogia a "treinta", "cuarenta",...,"noventa". O sea una decenta es diez veces diez. De esta forma la palabra $d1$ se leera "decenta y uno" y esto es natural ya que en la lista representa al 101. La palabra dd se leera "decenta y diez" y esto describe a la perfeccion el numero que representa, i.e. el $10.10 + 10 = 110$. La palabra que sigue en la lista a dd es 111 la cual representa al 111, es decir aqui como en los otros casos vistos en los cuales no hay ocurrencias del simbolo d la palabra representa al mismo numero que representa en la notacion decimal clasica. Por dar otro ejemplo, la palabra $59d3$ se leera "cinco mil novecientos decenta y tres" y representara al numero 6003.

Para seguir debemos ponerle nombre a "diez veces cien", es decir, "decientos" (por analogia con "novecientos = nueve veces cien") denotara al numero $1000 = 10.100$. De esta forma la palabra $d51$ se leera "decientos cincuenta y uno" y esto es natural ya que pensando un rato se puede ver que ella representa al 1051. Tambien, la palabra ddd se leera "decientos decenta y diez" y representara al numero 1110.

Prueba de las propiedades (S) e (I)

Dado que el siguiente a un elemento α de la lista es de la misma longitud que α o tiene longitud igual a $|\alpha| + 1$, podemos representar la lista anterior de la siguiente manera:

$$B_0; B_1; B_2; B_3; B_4; ...$$

donde cada B_n es, por definicion, la parte de la lista en la cual las palabras tienen longitud exactamente n. Por ejemplo:

- B_0 es ε

- B_1 es $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, d$

- B_2 es $11, 12, ..., 1d, 21, 22, ..., 2d, ..., 91, 92, ..., 9d, d1, d2, ..., dd$

Notese que hasta el momento nada nos asegura que no suceda que para algun n se de que B_n sea una lista infinita, lo cual ademas nos diria que los bloques $B_{n+1}, B_{n+2}, ...$ son todos vacios. Es decir podria pasar que la lista se estanque en una longitud n y nunca aparezca una palabra de longitud mayor que n. Esto por supuesto obligaria a que se repitan muchas veces palabras de dicha longitud n ya que hay una cantidad finita de las mismas (10^n).

Por supuesto nuestra intuicion nos dice que en el bloque B_n estan listadas sin repeticion todas las palabras de $\widetilde{Num}^*$ de longitud n, pero debemos justificar esto con argumentos solidos. Algunas propiedades basicas que se pueden probar facilmente son:

(1) Si $B_n = \alpha_1, ..., \alpha_k$, entonces $\alpha_1 = 1^n$ y $\alpha_k = d^n$

(2) Si d^n ocurre en B_n lo hace en la ultima posicion

estas propiedades son consecuencias inmediatas de como se calcula el elemento siguiente a uno dado en la lista.

Ejercicio 13: (O) Justifique con palabras la propiedad (1)

Ejercicio 14: (O) Justifique con palabras la propiedad (2)

Otra propiedad importante es la siguiente

(3) Si $B_n = \alpha_1, ..., \alpha_k$, entonces $B_{n+1} = 1\alpha_1, ..., 1\alpha_k, 2\alpha_1, ..., 2\alpha_k, ..., d\alpha_1, ..., d\alpha_k$

Para probar (3) es muy util el siguiente resultado obvio

Lemma 6 *Sea* $\sigma \in \widetilde{Num}$ *y supongamos* $\alpha \in \widetilde{Num}^*$ *no es de la forma* d^n*. Entonces el siguiente a* $\sigma\alpha$ *es* $\sigma\beta$ *donde* β *es el siguiente a* α

Ejercicio 15: (O) Use (1), (2) y el lema anterior para dar una explicacion solida con palabras de por que es cierta la propiedad (3)

Ahora es facil usando (3) probar inductivamente que

(4) B_n es una lista sin repeticiones de todas las palabras de longitud n

Ejercicio 16: (O) Pruebe (4)

Pero claramente de (4) se desprenden en forma obvia las propiedades (S) y (I).

El caso general

Sea Σ un alfabeto no vacio y supongamos $\leq$ es un orden total sobre Σ. Supongamos que $\Sigma = \{a_1, ..., a_n\}$, con $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Inspirados en la lista dada anteriormente de las palabras de $\widetilde{Num}^*$, podemos dar la siguiente lista de palabras de Σ^*:

$$\begin{array}{l}
\varepsilon, a_1, a_2, ..., a_n, \\
a_1a_1, a_1a_2, ..., a_1a_n, a_2a_1, a_2a_2, ..., a_2a_n, ..., a_na_1, a_na_2, ..., a_na_n, \\
a_1a_1a_1, a_1a_1a_2, ..., a_1a_1a_n, a_1a_2a_1, a_1a_2a_2, ..., a_1a_2a_n, ..., a_1a_na_1, a_1a_na_2, a_1a_na_n, \\
a_2a_1a_1, a_2a_1a_2, ..., a_2a_1a_n, a_2a_2a_1, a_2a_2a_2, ..., a_2a_2a_n, ..., a_2a_na_1, a_2a_na_2, a_2a_na_n, \\
\vdots
\end{array}$$

$a_n a_1 a_1, a_n a_1 a_2, ..., a_n a_1 a_n, a_n a_2 a_1, a_n a_2 a_2, ..., a_n a_2 a_n, ..., a_n a_n a_1, a_n a_n a_2, a_n a_n a_n,$
$a_1 a_1 a_1 a_1, a_1 a_1 a_1 a_2, ...$

El objetivo es probar que la lista anterior enumera sin repeticiones todas las palabras de Σ^*, i.e. produce naturalmente una biyeccion entre ω y Σ^*. Pero antes debemos definir mas formalmente la lista. Para esto definamos $s^{\leq} : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ de la siguiente manera

- $s^{\leq}((a_n)^m) = (a_1)^{m+1}$, para cada $m \geq 0$
- $s^{\leq}(\alpha a_i (a_n)^m) = \alpha a_{i+1}(a_1)^m$, cada vez que $\alpha \in \Sigma^*$, $1 \leq i < n$ y $m \geq 0$

Notese que la definicion de $s^{\leq}$ es correcta ya que toda palabra de Σ^* es de la forma $(a_n)^m$, con $m \geq 0$, o es de la forma $\alpha a_i (a_n)^m$, con $\alpha \in \Sigma^*$, $1 \leq i < n$ y $m \geq 0$; y estos dos casos posibles son mutuamente excluyentes (convencerse fuertemente de que esto es asi).

Ejercicio 17: Sea $\Sigma = \{\%, !, @\}$ y sea $\leq$ el orden total sobre Σ dado por $\% <! < @$ (es decir que aqui $a_1 = \%$, $a_2 =!$ y $a_3 = @$). Escriba los primeros elementos de la lista y describa para este caso particular la funcion $s^{\leq}$, sin hablar de a_ís, i.e. solo haciendo referencia a los simbolos $\%, !, @$.

Ejercicio 18: Pruebe para el caso general que

(a) $\varepsilon \neq s^{\leq}(\alpha)$, para cada $\alpha \in \Sigma^*$

(b) Si $\alpha \neq \varepsilon$, entonces $\alpha = s^{\leq}(\beta)$ para algun β

Ejercicio 19: (a) Convensace de que valen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} s^{\leq}(\varepsilon) &= a_1 \\ s^{\leq}(\alpha a_i) &= \alpha a_{i+1},\ i < n \\ s^{\leq}(\alpha a_n) &= s^{\leq}(\alpha) a_1 \end{aligned}$$

(b) (S) Pruebe formalmente que valen las ecuaciones de (a)

Ejercicio 20: (S) Note que sucesivas aplicaciones de las ecuaciones anteriores determinan por completo el valor de $s^{\leq}$ en una palabra α previamente fijada. Explique esto con palabras.

Por supuesto, la lista anterior puede ser escrita de la siguiente manera

$$\varepsilon, s^{\leq}(\varepsilon), s^{\leq}(s^{\leq}(\varepsilon)), s^{\leq}(s^{\leq}(s^{\leq}(\varepsilon))), s^{\leq}(s^{\leq}(s^{\leq}(s^{\leq}(\varepsilon)))), ...$$

Con esta definicion formal de la lista, podemos probar de la misma forma en la que lo hicimos arriba que:

(S) Toda palabra de Σ^* aparece en la lista

(I) Ninguna palabra de Σ^* aparese mas de una ves en la lista

Ejercicio 21: (S) (O) Pruebe (S) e (I). Hint: use las mismas ideas que se usaron para probar (S) e (I) para el caso de $\Sigma = \widetilde{Num}$ y $\leq$ dado por $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < d$.

Definamos $*^{\leq} : \omega \to \Sigma^*$ recursivamente de la siguiente manera:

- $*^{\leq}(0) = \varepsilon$
- $*^{\leq}(i+1) = s^{\leq}(*^{\leq}(i))$

Es claro que entonces $*^{\leq}(i)$ nos da el $(i+1)$-esimo elemento de la lista, o lo que es lo mismo, el i-esimo elemento de la lista contando desde el 0. O sea que las propiedades (S) y (I) nos garantizan que la funcion $*^{\leq}$ es biyectiva. A continuacion describiremos su inversa. Primero un lema facil pero muy importante.

Lemma 7 *Sea Σ un alfabeto no vacio y supongamos $\leq$ es un orden total sobre Σ. Supongamos que $\Sigma = \{a_1, ..., a_n\}$, con $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Entonces para cada $\alpha \in \Sigma^* - \{\varepsilon\}$ hay unicos $k \in \omega$ y $i_0, i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ tales que*

$$\alpha = a_{i_k}...a_{i_0}$$

Notar que k del lema anterior es $|\alpha| - 1$ y los numeros $i_k, ..., i_0$ van dando el numero de orden de cada simbolo de α yendo de izquierda a derecha. Por ejemplo si $\Sigma = \{\%, !, @\}$ y $\leq$ es el orden total sobre Σ dado por $\% <! < @$ (es decir que aqui $a_1 = \%$, $a_2 =!$ y $a_3 = @$) entonces para la palabra !%@%@ tenemos $k = 4$ y $i_4 = 2$, $i_3 = 1$, $i_2 = 3$, $i_1 = 1$ y $i_0 = 3$. Sin envargo si hubieramos tomado el orden dado por $@ < \% <!$, para la misma palabra hubieramos tenido $i_4 = 3$, $i_3 = 2$, $i_2 = 1$, $i_1 = 2$ y $i_0 = 1$.

Ahora podemos definir la funcion $\#^{\leq}$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcl} \#^{\leq} : \Sigma^* & \to & \omega \\ \varepsilon & \to & 0 \\ a_{i_k}...a_{i_0} & \to & i_k n^k + ... + i_0 n^0 \end{array}$$

Ejercicio 22: Si $\leq$ es el orden de $\{@, \&\}$ dado por $@ < \&$, entonces $\#^{\leq}(@\&@\&@) = 2^4 + 2^4 + 2^2 + 2^2 + 1$ y $\#^{\leq}(@\&@\&@) = 2^5 + 2^3 + 1$

Ejercicio 23: Si $\leq$ es el orden de $\{@, \&\}$ dado por $@ < \&$, entonces $\#^{\leq}(\alpha@) = \#^{\leq}(\alpha).2 + 1$, para todo $\alpha \in \{@, \&\}^*$

Ejercicio 24: Sea Σ un alfabeto finito no vacio y sea $\leq$ un orden total sobre Σ. Inspirese en el ejercicio anterior para dar una "definicion recursiva" de la funcion $\#^{\leq}$.

Aceptaremos sin prueba el siguiente resultado fundamental

Lemma 8 *La funcion $\#^{\leq}$ es la inversa de $*^{\leq}$*

Cabe destacar que dada una palabra α, el numero $\#^{\leq}(\alpha)$ nos dice en que posicion se hubica α en la lista, es decir α es la $(\#^{\leq}(\alpha)+1)$-esima palabra de la lista.

De los desarrollos hechos se desprende el siguiente interesante resultado

Lemma 9 *Sea $n \geq 1$ fijo. Entonces cada $x \geq 1$ se escribe en forma unica de la siguiente manera:*

$$x = i_k n^k + i_{k-1} n^{k-1} + ... + i_0 n^0,$$

con $k \geq 0$ y $1 \leq i_k, i_{k-1}, ..., i_0 \leq n$.

Ejercicio 25: (S) Pruebe el lema anterior

Ejercicio 26: (S) Si $\leq$ es un orden total sobre un alfabeto no vacio Σ, entonces $s^{\leq} = *^{\leq} \circ Suc \circ \#^{\leq}$

Como hemos visto las biyecciones dadas producen una "identificacion" entre numeros de ω y palabras del alfabeto Σ. Es decir, en algun sentido identificamos palabras y numeros ya que se corresponden biunivocamente. Supongamos que α es una palabra de $\Sigma^* - \{\varepsilon\}$ y queremos "verla como un numero". Entonces en ves de ver sus simbolos vemos los ordenes de aparicion en Σ de los mismos y miramos la suma de potencias asociada.

Supongamos ahora que x es un numero de $\omega - \{0\}$ y ademas supongamos que somos super inteligentes y que cuando vemos a x vemos la secuencia unica de numeros $i_k, i_{k-1}, ..., i_0$ que nos permite expresarlo como suma de potencias segun el lema anterior. Entonces si queremos ver a x como una palabra simplemente miramos la secuencia $i_k, i_{k-1}, ..., i_0$ como palabra, reemplazando cada i_j por el simbolo i_j-esimo de Σ.

Ejercicio 27: Mastique mastique e imagine hasta que entienda con claridad el ultimo parrafo. Luego sera mas mariposa.

Extension del orden total de Σ a Σ^*

Podemos extender el orden de Σ a Σ^* de la siguiente manera.

- $\alpha \leq \beta$ sii $\#^{\leq}(\alpha) \leq \#^{\leq}(\beta)$

Es decir $\alpha \leq \beta$ sii $\alpha = \beta$ o α ocurre antes que β en la lista.

Ejercicio 28: Probar que $\leq$ es un orden total sobre Σ^*.

Una propiedad importante e intuitivamente clara es que el orden recien definido sobre Σ^* posee las mismas caracteristicas que el orden usual de ω. Por ejemplo:

Lemma 10 *Si $S \subseteq \Sigma^*$ es no vacio, entonces existe $\alpha \in S$ tal que $\alpha \leq \beta$, para cada $\beta \in S$.*

Ejercicio 29: (S) Pruebe el lema anterior