Part I

Combos de Teoremas

1 Primer Combo de Teoremas

1.1 Teorema del Filtro Primo

Enunciado Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna distributivo y F un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$. Entonces hay un filtro primo P tal que $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$.

Prueba Sea

$$\mathcal{F} = \{F_1 : F_1 \text{ es un filtro, } x_0 \notin F_1 \text{ y } F \subseteq F_1\}.$$

Notese que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, por lo cual $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es un poset. Veamos que cada cadena en $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene una cota superior. Sea C una cadena. Si $C = \emptyset$, entonces cualquier elemento de $\mathcal{F}$ es cota de C. Supongamos entonces $C \neq \emptyset$. Sea

$$G = \{x : x \in F_1, \text{ para algun } F_1 \in C\}.$$

Veamos que G es un filtro. Es claro que G es no vacio. Supongamos que $x, y \in G$. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $x \in F_1$ y $y \in F_2$. Si $F_1 \subseteq F_2$, entonces ya que F_2 es un filtro tenemos que $x \mathsf{i} y \in F_2 \subseteq G$. Si $F_2 \subseteq F_1$, entonces tenemos que $x \mathsf{i} y \in F_1 \subseteq G$. Ya que C es una cadena, tenemos que siempre $x \mathsf{i} y \in G$. En forma analoga se prueba la propiedad restante por lo cual tenemos que G es un filtro. Ademas $x_0 \notin G$, por lo que $G \in \mathcal{F}$ es cota superior de C. Por el lema de Zorn, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene un elemento maximal P. Veamos que P es un filtro primo. Supongamos $x \mathsf{s} y \in P$ y $x, y \notin P$. Notese que $[P \cup \{x\})$ es un filtro el cual contiene propiamente a P. Entonces ya que P es un elemento maximal de $(\mathcal{F}, \subseteq)$, tenemos que $x_0 \in [P \cup \{x\})$. Analogamente tenemos que $x_0 \in [P \cup \{y\})$. Ya que $x_0 \in [P \cup \{x\})$, tenemos que hay elementos $p_1, ..., p_n \in P$, tales que

$$x_0 \geq p_1 \mathsf{i} ... \mathsf{i} p_n \mathsf{i} x$$

(se deja como ejercicio justificar esto). Ya que $x_0 \in [P \cup \{y\})$, tenemos que hay elementos $q_1, ..., q_m \in P$, tales que

$$x_0 \geq q_1 \mathsf{i} ... \mathsf{i} q_m \mathsf{i} y$$

Si llamamos p al siguiente elemento de P

$$p_1 \mathsf{i} ... \mathsf{i} p_n \mathsf{i} q_1 \mathsf{i} ... \mathsf{i} q_m$$

tenemos que

$$x_0 \geq p \mathsf{i} x$$
$$x_0 \geq p \mathsf{i} y$$

Se tiene entonces que $x_0 \geq (p \mathsf{i} x) \mathsf{s} (p \mathsf{i} y) = p \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) \in P$, lo cual es absurdo ya que $x_0 \notin P$.

1.2 Propiedades basicas de la consistencia

Enunciado Sea (Σ, τ) una teoria.

1. Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, para toda sentencia φ.
2. Si (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.
3. Si $(\Sigma, \tau) \not\vdash \neg\varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

Prueba

1. Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces por definicion tenemos que $(\Sigma, \tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$ para alguna sentencia ψ. Dada una sentencia cualquiera φ tenemos que φ se deduce por la regla del absurdo a partir de $\psi \wedge \neg\psi$ con lo cual (2) del Lema «Propiedades basicas de $\vdash$» nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$
2. Supongamos (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. Si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ fuera inconsistente, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$, para alguna sentencia ψ, lo cual por (1) del Lema «Propiedades basicas de $\vdash$» nos diria que $(\Sigma, \tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$, es decir nos diria que (Σ, τ) es inconsistente.
3. Es dejada al lector

2 Segundo Combo de Teoremas

2.1 Teorema de Dedekind

Enunciado Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna. La relacion binaria definida

$$x \leq y \text{ si y solo si } x \mathsf{s} y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que:

$$\begin{aligned} \sup(\{x, y\}) &= x \mathsf{s} y \\ \inf(\{x, y\}) &= x \mathsf{i} y \end{aligned}$$

cualesquiera sean $x, y \in L$

Prueba Dejamos como ejercicio para el lector probar que $\leq$ es reflexiva y antisimetrica con respecto a L. Veamos que $\leq$ es transitiva con respecto a L. Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq z$. Es decir que por definicion de $\leq$ tenemos que

$$\begin{aligned} x \mathsf{s} y &= y \\ y \mathsf{s} z &= z \end{aligned}$$

Entonces

$$x \mathsf{s} z = x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z) = (x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z = y \mathsf{s} z = z$$

por lo cual $x \leq z$. O sea que ya sabemos que $(L, \leq)$ es un poset. Veamos ahora que $\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{s} y$. Primero debemos ver que $x \mathsf{s} y$ es una cota superior del conjunto $\{x, y\}$, es decir

$$\begin{aligned} x &\leq x \mathsf{s} y \\ y &\leq x \mathsf{s} y \end{aligned}$$

Por la definicion de $\leq$ debemos probar que

$$\begin{aligned} x \mathsf{s} (x \mathsf{s} y) &= x \mathsf{s} y \\ y \mathsf{s} (x \mathsf{s} y) &= x \mathsf{s} y \end{aligned}$$

Estas igualdades se pueden probar usando (I1), (I2) y (I4). Dejamos al lector hacerlo como ejercicio.

Nos falta ver entonces que $x \mathsf{s} y$ es menor o igual que cualquier cota superior de $\{x, y\}$. Supongamos $x, y \leq z$. Es decir que por definicion de $\leq$ tenemos que

$$\begin{aligned} x \mathsf{s} z &= z \\ y \mathsf{s} z &= z \end{aligned}$$

Pero entonces

$$(x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z = x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z) = x \mathsf{s} z = z$$

por lo que $x \mathsf{s} y \leq z$. Es decir que $x \mathsf{s} y$ es la menor cota superior.

Para probar que $\inf(\{x, y\}) = x \mathsf{i} y$, probaremos que para todo $u, v \in L$,

$$u \leq v \text{ si y solo si } u \mathsf{i} v = u$$

lo cual le permitira al lector aplicar un razonamiento similar al usado en la prueba de que $\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{s} y$. Supongamos que $u \leq v$. Por definicion tenemos que $u \mathsf{s} v = v$. Entonces

$$u \mathsf{i} v = u \mathsf{i} (u \mathsf{s} v)$$

Pero por (I7) tenemos que $u \mathsf{i} (u \mathsf{s} v) = u$, lo cual implica $u \mathsf{i} v = u$. Reciprocamente si $u \mathsf{i} v = u$, entonces

$$\begin{aligned} u \mathsf{s} v &= (u \mathsf{i} v) \mathsf{s} v \\ &= v \mathsf{s} (u \mathsf{i} v) \text{ (por (I2))} \\ &= v \mathsf{s} (v \mathsf{i} u) \text{ (por (I3))} \\ &= v \text{ (por (I6))} \end{aligned}$$

lo cual nos dice que $u \leq v$.

2.2 Lemma 25

Enunciado Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$. Entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$

Prueba Probaremos por induccion en k que el lema vale para cada $\varphi \in F_k^\tau$. El caso $k = 0$ se desprende del Lema «Independencia del valor». Veamos que Teo_k implica Teo_{k+1}. Sea $\varphi \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$.

Hay varios casos:

CASO $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

Ya que $Li(\varphi_i) \subseteq Li(\varphi)$, $i = 1, 2$, Teo_k nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi_i[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi_i[\vec{b}]$, para $i = 1, 2$. Se tiene entonces que

$$\begin{array}{l} \mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \\ \Updownarrow \text{ (por (3) en la def de } \mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]) \\ \mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}] \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}] \\ \Updownarrow \text{ (por Teo}_k) \\ \mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{b}] \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{b}] \\ \Updownarrow \text{(por (3) en la def de } \mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]) \\ \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}] \end{array}$$

CASO $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$.

Es completamente similar al anterior.

CASO $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$.

Es completamente similar al anterior.

CASO $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$.

Es completamente similar al anterior.

CASO $\varphi = \neg\varphi_1$.

Es completamente similar al anterior.

CASO $\varphi = \forall x_j \varphi_1$.

Supongamos $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$. Entonces por (8) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ se tiene que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{a})]$, para todo $a \in A$. Notese que $\downarrow_j^a (\vec{a})$ y $\downarrow_j^a (\vec{b})$ coinciden en toda $x_i \in Li(\varphi_1)$ ya que $Li(\varphi_1) \subseteq Li(\varphi) \cup \{x_j\}$. O sea que por Teo_k se tiene que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{b})]$, para todo $a \in A$, lo cual por (8) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$. La prueba de que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$ implica que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ es similar.

CASO $\varphi = \exists x_j \varphi_1$.

Es similar al anterior.

3 Tercer Combo de Teoremas

3.1 Lectura unica de terminos

Enunciado *Dado $t \in T^\tau$ se da una de las siguientes:*

1. $t \in Var \cup \mathcal{C}$
2. *Hay unicos $n \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, ..., t_n \in T^\tau$ tales que $t = f(t_1, ..., t_n)$.*

Prueba En virtud del Lema «Menu para terminos» solo nos falta probar la unicidad en el punto (2).
Supongamos que

$$t = f(t_1, ..., t_n) = g(s_1, ..., s_m)$$

con $n, m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_n$, $g \in \mathcal{F}_m$, $t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_m \in T^\tau$. Notese que $f = g$. O sea que $n = m = a(f)$. Notese que t_1 es tramo inicial de s_1 o s_1 es tramo inicial de t_1, lo cual por el lema anterior nos dice que $t_1 = s_1$. Con el mismo razonamiento podemos probar que debera suceder $t_2 = s_2, ..., t_n = s_n$.

3.2 Lemma 27

Enunciado Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^\tau$. Entonces

$$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, ...)] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), ...)]$$

para cada $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. En particular $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen las mismas sentencias de tipo τ.

Prueba Por induccion. Sea

- Teo_k: Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F_k^\tau$. Entonces

  $$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, ...)] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), ...)]$$

  para cada $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$

Prueba de Teo_0. Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo, $\varphi \in F_0^\tau$ y $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. Probaremos que

$$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, ...)] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), ...)]$$

Hay dos casos. Caso $\varphi = r(t_1, ..., t_n)$, con $n \geq 1$, $r \in \mathcal{R}_n$ y $t_1, ..., t_n \in T^\tau$. Denotemos con $\vec{a}$ a $(a_1, a_2, ...)$ y con $F(\vec{a})$ a $(F(a_1), F(a_2), ...)$. Tenemos entonces

$$\begin{array}{lll} \mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] & \text{sii} & (t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_m^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \in r^{\mathbf{A}} \text{ (def de } \models \text{)} \\ & \text{sii} & (F(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}]), ..., F(t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \in r^{\mathbf{B}} \text{ (} F \text{ es iso)} \\ & \text{sii} & (t_1^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})]), ..., t_n^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})]) \in r^{\mathbf{B}} \text{ (Lema \textbf{??})} \\ & \text{sii} & \mathbf{B} \models \varphi[F(\vec{a})] \end{array}$$

Dejamos al lector completar la prueba de que Teo_k implica Teo_{k+1}

3.3 Teorema 28

Enunciado Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria. Entonces $(S^\tau / \dashv\vdash_T, \mathsf{s}^T, \mathsf{i}^T, {}^{\mathsf{c}^T}, 0^T, 1^T)$ es un algebra de Boole. Pruebe solo el item (6)

Prueba Por definicion de algebra de Boole, debemos probar que cualesquiera sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^\tau$, se cumplen todas las igualdades de algebras de Boole, luego, probamos solo la (6)
es decir veamos que

$$[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ ([\varphi_2]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_2]_T) \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_3]_T$$

cualesquiera sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^\tau$. Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^\tau$ fijas. Por la definicion de la operacion s^T debemos probar que

$$[(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))]_T = [((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)]_T$$

es decir, debemos probar que

$$T \vdash ((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \leftrightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$$

Notese que por (2) del Lema «Propiedades basicas de $\vdash$», basta con probar que

$$T \vdash ((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$$
$$T \vdash (((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)))$$

La siguiente es una prueba formal de $((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$ en T y dejamos al lector la otra prueba formal.

1.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	HIPOTESIS1
2.	φ_1	HIPOTESIS2
3.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(2)
4.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS2DISJUNCIONINTRODUCCION(3)
5.	$\varphi_1 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION
6.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	HIPOTESIS3
7.	φ_2	HIPOTESIS4
8.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(6)
9.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS4DISJUNCIONINTRODUCCION(7)
10.	$\varphi_2 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION
11.	φ_3	HIPOTESIS5
12.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS5DISJUNCIONINTRODUCCION(11)
13.	$\varphi_3 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION
14.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS3DIVISIONPORCASOS$(6, 10, 13)$
15.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION
16.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1, 5, 15)$
17.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION

4 Cuarto Combo de Teoremas

4.1 Propiedades basicas de la deduccion o Propiedades basicas de $\vdash$

Enunciado Sea (Σ,τ) una teoria.

1. (Uso de Teoremas) Si $(\Sigma,\tau)\vdash\varphi_1,...,\varphi_n$ y $(\Sigma\cup\{\varphi_1,...,\varphi_n\},\tau)\vdash\varphi$, entonces $(\Sigma,\tau)\vdash\varphi$.
2. Supongamos $(\Sigma,\tau)\vdash\varphi_1,...,\varphi_n$. Si R es una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION y φ se deduce de $\varphi_1,...,\varphi_n$ por la regla R, entonces $(\Sigma,\tau)\vdash\varphi$.
3. $(\Sigma,\tau)\vdash(\varphi\to\psi)$ si y solo si $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau)\vdash\psi$.

Prueba

1. Notese que basta con hacer el caso $n=1$. El caso con $n\geq 2$ se obtiene aplicando n veces el caso $n=1$. Supongamos entonces que $(\Sigma,\tau)\vdash\varphi_1$ y $(\Sigma\cup\{\varphi_1\},\tau)\vdash\varphi$. Sea $(\alpha_1...\alpha_h,I_1...I_h)$ una prueba formal de φ_1 en (Σ,τ). Sea $(\psi_1...\psi_m,J_1...J_m)$ una prueba formal de φ en $(\Sigma\cup\{\varphi_1\},\tau)$. Notese que por los Lemas «Cambio de indice de hipotesis» y «Cambio de ctes auxiliares» podemos suponer que estas dos pruebas no comparten ningun nombre de constante auxiliar y que tampoco comparten numeros asociados a hipotesis o tesis. Para cada $i=1,...,m$, definamos $\widetilde{J_i}$ de la siguiente manera.

   1. Si $J_i=\alpha$AXIOMAPROPIO, con $\alpha\in\{\varepsilon\}\cup\{\text{TESIS}\bar{k}:k\in\mathbf{N}\}$ y $\psi_i=\varphi_1$, entonces $\widetilde{J_i}=\alpha$EVOCACION$(\bar{h})$
   2. Si $J_i=\alpha$AXIOMAPROPIO, con $\alpha\in\{\varepsilon\}\cup\{\text{TESIS}\bar{k}:k\in\mathbf{N}\}$ y $\psi_i\notin\{\varphi_1\}$, entonces $\widetilde{J_i}=\alpha$AXIOMAPROPIO.
   3. Si $J_i=\alpha$AXIOMALOGICO, con $\alpha\in\{\varepsilon\}\cup\{\text{TESIS}\bar{k}:k\in\mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i}=\alpha$AXIOMALOGICO
   4. Si $J_i=\alpha$CONCLUSION, con $\alpha\in\{\varepsilon\}\cup\{\text{TESIS}\bar{k}:k\in\mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i}=\alpha$CONCLUSION.
   5. Si $J_i=\text{HIPOTESIS}\bar{k}$, entonces $\widetilde{J_i}=\text{HIPOTESIS}\bar{k}$
   6. Si $J_i=\alpha R(\overline{l_1},...,\overline{l_k})$, con $\alpha\in\{\varepsilon\}\cup\{\text{TESIS}\bar{k}:k\in\mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i}=\alpha R(\overline{l_1+h},...,\overline{l_k+h})$

   Es facil chequear que
   $$(\alpha_1...\alpha_h\psi_1...\psi_m,I_1...I_h\widetilde{J_1}...\widetilde{J_m})$$
   es una prueba formal de φ en (Σ,τ)

2. Notese que

1.	φ_1	AXIOMAPROPIO
2.	φ_2	AXIOMAPROPIO
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	φ_n	AXIOMAPROPIO
$n+1$.	φ	$R(\bar{1},...,\bar{n})$

   es una prueba formal de φ en $(\Sigma\cup\{\varphi_1,...,\varphi_n\},\tau)$, lo cual por (1) nos dice que $(\Sigma,\tau)\vdash\varphi$.

3.

$(\to)$ Supongamos $(\Sigma,\tau)\vdash(\varphi\to\psi)$. Entonces tenemos que $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau)\vdash(\varphi\to\psi),\varphi$, lo cual por (2) nos dice que $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau)\vdash\psi$.

$(\leftarrow)$ Supongamos ahora que $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau)\vdash\psi$. Sea $(\varphi_1...\varphi_n,J_1...,J_n)$ una prueba formal de ψ en $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau)$. Para cada $i=1,...,n$, definamos $\widetilde{J_i}$ de la siguiente manera.

1. Si $\varphi_i=\varphi$ y $J_i=\alpha$AXIOMAPROPIO, con $\alpha\in\{\varepsilon\}\cup\{\text{TESIS}\bar{k}:k\in\mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i}=\alpha$EVOCACION(1)
2. Si $\varphi_i\neq\varphi$ y $J_i=\alpha$AXIOMAPROPIO, con $\alpha\in\{\varepsilon\}\cup\{\text{TESIS}\bar{k}:k\in\mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i}=\alpha$AXIOMAPROPIO
3. Si $J_i=\alpha$AXIOMALOGICO, con $\alpha\in\{\varepsilon\}\cup\{\text{TESIS}\bar{k}:k\in\mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i}=\alpha$AXIOMALOGICO
4. Si $J_i=\alpha$CONCLUSION, con $\alpha\in\{\varepsilon\}\cup\{\text{TESIS}\bar{k}:k\in\mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i}=\alpha$CONCLUSION
5. Si $J_i=\text{HIPOTESIS}\bar{k}$, entonces $\widetilde{J_i}=\text{HIPOTESIS}\bar{k}$
6. Si $J_i=\alpha R(\overline{l_1},...,\overline{l_k})$, con $\alpha\in\{\varepsilon\}\cup\{\text{TESIS}\bar{k}:k\in\mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i}=\alpha P(\overline{l_1+1},...,\overline{l_k+1})$

   Sea m tal que ninguna J_i es igual a HIPOTESIS$\bar{m}$. Notese que $\widetilde{J_n}$ no es de la forma TESIS$\bar{k}\beta$ ni de la forma HIPOTESIS$\bar{k}$ (por que?) por lo cual TESIS$\bar{m}\widetilde{J_n}$ es una justificacion. Es facil chequear que
   $$(\varphi\varphi_1...\varphi_n(\varphi\to\psi),\text{HIPOTESIS}\bar{m}\widetilde{J_1}...\widetilde{J_{n-1}}\text{TESIS}\bar{m}\widetilde{J_n}\text{CONCLUSION})$$
   es una prueba formal de $(\varphi\to\psi)$ en (Σ,τ)

4.2 Theorem 30

Enunciado Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^{\mathsf{c}}, 0, 1)$ un álgebra de Boole y sean $a, b \in B$. Se tiene que:

1. $(a \,\mathsf{i}\, b)^c = a^c \,\mathsf{s}\, b^c$
2. $(a \,\mathsf{s}\, b)^c = a^c \,\mathsf{i}\, b^c$
3. $a^{cc} = a$
4. $a \,\mathsf{i}\, b = 0$ si y solo si $b \leq a^c$
5. $a \leq b$ si y solo si $b^c \leq a^c$

Probar solo 1. ($(a \,\mathsf{i}\, b)^c = a^c \,\mathsf{s}\, b^c$) y 4. ($a \,\mathsf{i}\, b = 0$ si y solo si $b \leq a^c$)

Prueba

1. Es facil ver que $a^c \,\mathsf{s}\, b^c$ es un complemento de $a \,\mathsf{i}\, b$ (hacer!). Pero ya que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^{\mathsf{c}}, 0, 1)$ es un reticulado complementado, tenemos que $(a \,\mathsf{i}\, b)^c$ es un complemento de $a \,\mathsf{i}\, b$. El Lema «Complementos unicos» nos dice que $(a \,\mathsf{i}\, b)^c$ y $a^c \,\mathsf{s}\, b^c$ deben ser iguales.

4. Supongamos $a \,\mathsf{i}\, b = 0$. Se tiene

$$\begin{aligned} b &= (b \;\mathsf{i}\; a) \;\mathsf{s}\; (b \;\mathsf{i}\; a^c) \\ &= (a \;\mathsf{i}\; b) \;\mathsf{s}\; (b \;\mathsf{i}\; a^c) \\ &= 0 \;\mathsf{s}\; (b \;\mathsf{i}\; a^c) \\ &= (b \;\mathsf{i}\; a^c) \end{aligned}$$

lo cual dice que $b \leq a^c$. Supongamos $b \leq a^c$. Entonces $a \,\mathsf{i}\, b \leq a \,\mathsf{i}\, a^c = 0$ por lo cual $a \,\mathsf{i}\, b = 0$.

4.3 Lemma 31

Enunciado Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados terna y sean $(L \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una funcion. Entonces F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si y solo si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.

Prueba

Ida Supongamos F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$. Sean $x, y \in L$, tales que $x \leq y$. Tenemos que $y = x \;\mathsf{s}\; y$ por lo cual $F(y) = F(x \;\mathsf{s}\; y) = F(x) \;\mathsf{s}'\; F(y)$, produciendo $F(x) \leq' F(y)$. En forma similar se puede ver que F^{-1} es tambien un homomorfismo de $(L', \leq')$ en $(L, \leq)$.

Vuelta Si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$, entonces (g) y (h) del Lema «Isomorfismos de posets» nos dicen que F y F^{-1} son homomorfismos (de reticulados terna terna) por lo cual F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$.

5 Quinto Combo de Teoremas

5.1 Teorema de Completitud

Enunciado Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria de primer orden. Si $T \models \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$. Haga solo el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de Σ. En la exposicion de la prueba no es necesario que demuestre los items (1) y (5).

Prueba Lo probaremos por el absurdo, es decir supongamos que hay una sentencia φ_0 tal que $T \models \varphi_0$ y $T \not\vdash \varphi_0$. Notese que ya que $T \not\vdash \varphi_0$, tenemos que $[\neg\varphi_0]_T \neq 0^T$. Sabemos por lema que hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, ...) \in F^{\tau\mathbf{N}}$ tal que:

- $|Li(\gamma_j)| \leq 1$, para cada $j = 1, 2, ...$
- Si $|Li(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$, para algun $j \in \mathbf{N}$

Para cada $j \in \mathbf{N}$, sea $w_j \in Var$ tal que $Li(\gamma_j) \subseteq \{w_j\}$. Para cada j, declaremos $\gamma_j =_d \gamma_j(w_j)$. Notese que por el Lema «Lema del infimo» tenemos que $\inf\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\} = [\forall w_j \gamma_j(w_j)]_T$, para cada $j = 1, 2, ...$ Por el Teorema de Rasiova y Sikorski tenemos que hay un filtro primo $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}_T$, el cual cumple:

(a) $[\neg\varphi_0]_T \in \mathcal{U}$

(b) Para cada $j \in \mathbf{N}$, $\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq \mathcal{U}$ implica que $[\forall w_j \gamma_j(w_j)]_T \in \mathcal{U}$

Ya que la infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, ...)$ cubre todas las formulas con a lo sumo una variable libre, podemos reescribir la propiedad (b) de la siguiente manera:

(b)$'$ Para cada $\varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau$, si $\{[\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq \mathcal{U}$ entonces $[\forall v \varphi(v)]_T \in \mathcal{U}$

Definamos sobre T_c^τ la siguiente relacion:

$$t \bowtie s \text{ si y solo si } [(t \equiv s)]_T \in \mathcal{U}.$$

Veamos entonces que:

(1) $\bowtie$ es de equivalencia.

(2) Para cada $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$, $t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_n \in T_c^\tau$, si $t_1 \bowtie s_1$, $t_2 \bowtie s_2$, ..., $t_n \bowtie s_n$, entonces $[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}$ si y solo si $[\varphi(s_1, ..., s_n)]_T \in \mathcal{U}$.

(3) Para cada $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_n \in T_c^\tau$,

$$t_1 \bowtie s_1, t_2 \bowtie s_2, ..., \ t_n \bowtie s_n \text{ implica } f(t_1, ..., t_n) \bowtie f(s_1, ..., s_n).$$

- Probaremos (2). Notese que

  $$T \vdash ((t_1 \equiv s_1) \wedge (t_2 \equiv s_2) \wedge ... \wedge (t_n \equiv s_n) \wedge \varphi(t_1, ..., t_n)) \rightarrow \varphi(s_1, ..., s_n)$$

  lo cual nos dice que

  $$[(t_1 \equiv s_1)]_T \text{ ¡}^T \ [(t_2 \equiv s_2)]_T \text{ ¡}^T \ ... \text{ ¡}^T \ [(t_n \equiv s_n)]_T \text{ ¡}^T \ [\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \leq^T [\varphi(s_1, ..., s_n)]_T$$

  de lo cual se desprende que

  $$[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} \text{ implica } [\varphi(s_1, ..., s_n)]_T \in \mathcal{U}$$

  ya que $\mathcal{U}$ es un filtro. La otra implicacion es analoga.

- Para probar (3) podemos tomar $\varphi = (f(v_1, ..., v_n) \equiv f(s_1, ..., s_n))$ y aplicar (2).

  Definamos ahora un modelo $\mathbf{A}_\mathcal{U}$ de tipo τ de la siguiente manera:

  - Universo de $\mathbf{A}_\mathcal{U} = T_c^\tau / \bowtie$
  - $c^{\mathbf{A}_\mathcal{U}} = c/\bowtie$, para cada $c \in \mathcal{C}$.
  - $f^{\mathbf{A}_\mathcal{U}}(t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie) = f(t_1, ..., t_n)/\bowtie$, para cada $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$
  - $r^{\mathbf{A}_\mathcal{U}} = \{(t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie) : [r(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}\}$, para cada $r \in \mathcal{R}_n$.

  Notese que la definicion de $f^{\mathbf{A}_\mathcal{U}}$ es inambigua por (3).

Luego, probaremos las siguientes propiedades basicas

(4) Para cada $t =_d t(v_1, ..., v_n) \in T^\tau$, $t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$, tenemos que

$$t^{\mathbf{A}_\mathcal{U}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] = t(t_1, ..., t_n)/\bowtie$$

(5) Para cada $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$, $t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$, tenemos que

$$\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \text{ si y solo si } [\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}.$$

La prueba de (4) es directa por induccion. Pero ahora notese que (5) en particular nos dice que para cada sentencia $\psi \in S^\tau$, $\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \psi$ si y solo si $[\psi]_T \in \mathcal{U}$. De esta forma llegamos a que $\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \Sigma$ y $\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \neg\varphi_0$, lo cual contradice la suposicion de que $T \models \varphi_0$.

Ahora supongamos que τ es cualquier tipo. Sean s_1 y s_2 un par de simbolos no pertenecientes a la lista

$$\forall \quad \exists \quad \neg \quad \vee \quad \wedge \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow \quad (\quad) \quad , \quad \equiv \quad \mathsf{X} \quad \mathit{0} \quad \mathit{1} \quad ... \quad \mathit{9} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad ... \quad \mathbf{9}$$

y tales que ninguno ocurra en alguna palabra de $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$. Si $T \models \varphi$, entonces usando el Lema de Coincidencia se puede ver que $(\Sigma, (\mathcal{C} \cup \{s_1s_2s_1, s_1s_2s_2s_1, ...\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)) \models \varphi$, por lo cual

$$(\Sigma, (\mathcal{C} \cup \{s_1s_2s_1, s_1s_2s_2s_1, ...\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)) \vdash \varphi.$$

Pero por Lema «Tipos parecidos», tenemos que $T \vdash \varphi$.

6 Sexto Combo de Teoremas

6.1 Teorema de Completitud

Enunciado Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria de primer orden. Si $T \models \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$. Haga solo el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de Σ. En la exposicion de la prueba no es necesario que demuestre los items: (1), (2), (3) y (4)

Prueba Probaremos entonces (5)

Enunciado 5

5. Para cada $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$, $t_1, ..., t_n \in T^\tau_c$, tenemos que

$$\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \text{ si y solo si } [\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}.$$

Probaremos por induccion en el k tal que $\varphi \in F^\tau_k$. El caso $k = 0$ es dejado al lector. Supongamos (5) vale para $\varphi \in F^\tau_k$. Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau_{k+1} - F^\tau_k$. Hay varios casos:

CASO $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$.

Notese que por la Convencion Notacional 6, tenemos que $\varphi_i =_d \varphi_i(v_1, ..., v_n)$. Tenemos entonces

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \varphi_1[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \text{ o } \mathbf{A}_\mathcal{U} \models \varphi_2[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \\
\Updownarrow \\
[\varphi_1(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} \text{ o } [\varphi_2(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\varphi_1(t_1, ..., t_n)]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_2(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[(\varphi_1(t_1, ..., t_n) \vee \varphi_2(t_1, ..., t_n))]_T \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}.
\end{gathered}$$

CASO $\varphi = \forall v \varphi_1$, con $v \in Var - \{v_1, ..., v_n\}$. Notese que por la Convencion Notacional 6, tenemos que $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n, v)$. Tenemos entonces

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \varphi_1[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie, t/\bowtie], \text{ para todo } t \in T^\tau_c \\
\Updownarrow \\
[\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T \in \mathcal{U}, \text{ para todo } t \in T^\tau_c \\
\Updownarrow \\
[\forall v \varphi_1(t_1, ..., t_n, v)]_T \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}.
\end{gathered}$$

CASO $\varphi = \exists v \varphi_1$, con $v \in Var - \{v_1, ..., v_n\}$. Notese que por la Convencion Notacional 6, tenemos que $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n, v)$. Tenemos entonces

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \varphi_1[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie, t/\bowtie], \text{ para algun } t \in T^\tau_c \\
\Updownarrow \\
[\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T \in \mathcal{U}, \text{ para algun } t \in T^\tau_c \\
\Updownarrow \\
([\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T)^{\mathsf{c}^T} \notin \mathcal{U}, \text{ para algun } t \in T^\tau_c \\
\Updownarrow \\
[\neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T \notin \mathcal{U}, \text{ para algun } t \in T^\tau_c \\
\Updownarrow \\
[\forall v \ \neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, v)]_T \notin \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
([\forall v \ \neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, v)]_T)^{\mathsf{c}^T} \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\neg\forall v \ \neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, v)]_T \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}.
\end{gathered}$$

7 Septimo Combo de Teoremas

7.1 Propiedades basicas de la deduccion o Propiedades basicas de $\vdash$

Enunciado Sea (Σ, τ) una teoria.

1. (Uso de Teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.
2. Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$. Si R es una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION y φ se deduce de $\varphi_1, ..., \varphi_n$ por la regla R, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.
3. $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ si y solo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.

Prueba

1. Notese que basta con hacer el caso $n = 1$. El caso con $n \geq 2$ se obtiene aplicando n veces el caso $n = 1$. Supongamos entonces que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau) \vdash \varphi$. Sea $(\alpha_1...\alpha_h, I_1...I_h)$ una prueba formal de φ_1 en (Σ, τ). Sea $(\psi_1...\psi_m, J_1...J_m)$ una prueba formal de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau)$. Notese que por los Lemas «Cambio de indice de hipotesis» y «Cambio de ctes auxiliares» podemos suponer que estas dos pruebas no comparten ningun nombre de constante auxiliar y que tampoco comparten numeros asociados a hipotesis o tesis. Para cada $i = 1, ..., m$, definamos $\widetilde{J_i}$ de la siguiente manera.

   1. Si $J_i = \alpha$AXIOMAPROPIO, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$ y $\psi_i = \varphi_1$, entonces $\widetilde{J_i} = \alpha$EVOCACION$(\bar{h})$
   2. Si $J_i = \alpha$AXIOMAPROPIO, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$ y $\psi_i \notin \{\varphi_1\}$, entonces $\widetilde{J_i} = \alpha$AXIOMAPROPIO.
   3. Si $J_i = \alpha$AXIOMALOGICO, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i} = \alpha$AXIOMALOGICO
   4. Si $J_i = \alpha$CONCLUSION, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i} = \alpha$CONCLUSION.
   5. Si $J_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$, entonces $\widetilde{J_i} =$ HIPOTESIS$\bar{k}$
   6. Si $J_i = \alpha R(\overline{l_1}, ..., \overline{l_k})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i} = \alpha R(\overline{l_1 + h}, ..., \overline{l_k + h})$

   Es facil chequear que
   $$(\alpha_1...\alpha_h\psi_1...\psi_m, I_1...I_h\widetilde{J_1}...\widetilde{J_m})$$
   es una prueba formal de φ en (Σ, τ)

2. Notese que

1.	φ_1	AXIOMAPROPIO
2.	φ_2	AXIOMAPROPIO
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n.$	φ_n	AXIOMAPROPIO
$n+1.$	φ	$R(\bar{1}, ..., \bar{n})$

   es una prueba formal de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau)$, lo cual por (1) nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

3. Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$. Entonces tenemos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi), \varphi$, lo cual por (2) nos dice que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. Supongamos ahora que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. Sea $(\varphi_1...\varphi_n, J_1..., J_n)$ una prueba formal de ψ en $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$. Para cada $i = 1, ..., n$, definamos $\widetilde{J_i}$ de la siguiente manera.

   1. Si $\varphi_i = \varphi$ y $J_i = \alpha$AXIOMAPROPIO, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i} = \alpha$EVOCACION(1)
   2. Si $\varphi_i \neq \varphi$ y $J_i = \alpha$AXIOMAPROPIO, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i} = \alpha$AXIOMAPROPIO
   3. Si $J_i = \alpha$AXIOMALOGICO, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i} = \alpha$AXIOMALOGICO
   4. Si $J_i = \alpha$CONCLUSION, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i} = \alpha$CONCLUSION
   5. Si $J_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$, entonces $\widetilde{J_i} =$ HIPOTESIS$\bar{k}$
   6. Si $J_i = \alpha R(\overline{l_1}, ..., \overline{l_k})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i} = \alpha P(\overline{l_1 + 1}, ..., \overline{l_k + 1})$

   Sea m tal que ninguna J_i es igual a HIPOTESIS$\bar{m}$. Notese que $\widetilde{J_n}$ no es de la forma TESIS$\bar{k}\beta$ ni de la forma HIPOTESIS$\bar{k}$ (por que?) por lo cual TESIS$\bar{m}\widetilde{J_n}$ es una justificacion. Es facil chequear que
   $$(\varphi\varphi_1...\varphi_n(\varphi \rightarrow \psi), \text{HIPOTESIS}\bar{m}\widetilde{J_1}...\widetilde{J_{n-1}}\text{TESIS}\bar{m}\widetilde{J_n}\text{CONCLUSION})$$
   es una prueba formal de $(\varphi \rightarrow \psi)$ en (Σ, τ)

7.2 Lema 35

7.2.1 $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ es un reticulado terna

Enunciado Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna y sea θ una congruencia de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. Entonces $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ es un reticulado terna

Prueba

Veamos que la estructura $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ cumple (I4). Sean x/θ, y/θ, z/θ elementos cualesquiera de L/θ. Tenemos que

$$\begin{aligned}
(x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta) \,\tilde{\mathsf{s}}\, z/\theta &= (x \,\mathsf{s}\, y)/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, z/\theta \\
&= ((x \,\mathsf{s}\, y) \,\mathsf{s}\, z)/\theta \\
&= (x \,\mathsf{s}\, (y \,\mathsf{s}\, z))/\theta \\
&= x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, (y \,\mathsf{s}\, z)/\theta \\
&= x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, (y/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, z/\theta)
\end{aligned}$$

En forma similar se puede ver que la estructura $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ cumple el resto de las identidades que definen reticulado terna.

7.2.2 $x/\theta \tilde{\leq} y/\theta$ sii $y\theta(x \,\mathsf{s}\, y)$

Enunciado Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna y sea θ una congruencia de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. Entonces:

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \text{ sii } y\theta(x \,\mathsf{s}\, y)$$

cualesquiera sean $x, y \in L$.

Prueba Por definicion de $\tilde{\leq}$ tenemos que $x/\theta \tilde{\leq} y/\theta$ sii $y/\theta = x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta$. Pero $x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta = (x \,\mathsf{s}\, y)/\theta$ (por definicion de $\tilde{\mathsf{s}}$) por lo cual tenemos que $x/\theta \tilde{\leq} y/\theta$ sii $y/\theta = (x \,\mathsf{s}\, y)/\theta$.

7.3 Lemma 36

Enunciado Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados terna y sean $(L \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una funcion. Entonces F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si y solo si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.

Prueba Supongamos F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$. Sean $x, y \in L$, tales que $x \leq y$. Tenemos que $y = x \,\mathsf{s}\, y$ por lo cual $F(y) = F(x \,\mathsf{s}\, y) = F(x) \,\mathsf{s}'\, F(y)$, produciendo $F(x) \leq' F(y)$. En forma similar se puede ver que F^{-1} es tambien un homomorfismo de $(L', \leq')$ en $(L, \leq)$. Si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$, entonces (g) y (h) del Lema «Isomorfismos de posets» nos dicen que F y F^{-1} son homomorfismos (de reticulados terna terna) por lo cual F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$.

8 Octavo Combo de Teoremas

8.1 Lemma 37

Enunciado Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^\tau$. Entonces

$$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, ...)] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), ...)]$$

para cada $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. En particular $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen las mismas sentencias de tipo τ.

Prueba Probamos por induccion.
Sea

- Teo_k: Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F_k^\tau$. Entonces

  $$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, ...)] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), ...)]$$

  para cada $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$

Prueba de Teo_0. Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo, $\varphi \in F_0^\tau$ y $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. Probaremos que

$$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, ...)] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), ...)]$$

Hay dos casos. Caso $\varphi = r(t_1, ..., t_n)$, con $n \geq 1$, $r \in \mathcal{R}_n$ y $t_1, ..., t_n \in T^\tau$. Denotemos con $\vec{a}$ a $(a_1, a_2, ...)$ y con $F(\vec{a})$ a $(F(a_1), F(a_2), ...)$. Tenemos entonces

$$\begin{array}{lll} \mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] & \text{sii} & (t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_m^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \in r^{\mathbf{A}} \text{ (def de } \models \text{)} \\ & \text{sii} & (F(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}]), ..., F(t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \in r^{\mathbf{B}} \text{ (}F\text{ es iso)} \\ & \text{sii} & (t_1^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})]), ..., t_n^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})]) \in r^{\mathbf{B}} \text{ (Lema \textbf{??})} \\ & \text{sii} & \mathbf{B} \models \varphi[F(\vec{a})] \end{array}$$

Dejamos al lector completar la prueba de que Teo_k implica Teo_{k+1}

8.2 Isomorfismo de Posets

Enunciado Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos F es un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$.

1. Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que a es cota superior (resp. inferior) de S si y solo si $F(a)$ es cota superior (resp. inferior) de $F(S)$.

2. Para cada $S \subseteq P$, se tiene que existe $\sup(S)$ si y solo si existe $\sup(F(S))$ y en el caso de que existan tales elementos se tiene que $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$.

Prueba

1. Supongamos que a es cota superior de S. Veamos que entonces $F(a)$ es cota superior de $F(S)$. Sea $x \in F(S)$. Sea $s \in S$ tal que $x = F(s)$. Ya que $s \leq a$, tenemos que $x = F(s) \leq' F(a)$. Supongamos ahora que $F(a)$ es cota superior de $F(S)$ y veamos que entonces a es cota superior de S. Sea $s \in S$. Ya que $F(s) \leq' F(a)$, tenemos que $s = F^{-1}(F(s)) \leq F^{-1}(F(a)) = a$.

2. Supongamos existe $\sup(S)$. Veamos entonces que $F(\sup(S))$ es el supremo de $F(S)$. Por (e) $F(\sup(S))$ es cota superior de $F(S)$. Supongamos b es cota superior de $F(S)$. Entonces $F^{-1}(b)$ es cota superior de S, por lo cual $\sup(S) \leq F^{-1}(b)$, produciendo $F(\sup(S)) \leq' b$. En forma analoga se ve que si existe $\sup(F(S))$, entonces $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es el supremo de S.