Part I

Combos de Definiciones

1 Primer Combo de Definiciones

1.1 Defina $n(\mathbf{J})$ (Para $\mathbf{J} \in Just^+$)

Dada $\mathbf{J} \in Just^+$, usaremos $n(\mathbf{J})$ y $\mathbf{J}_1, ..., \mathbf{J}_{n(\mathbf{J})}$ para denotar los unicos n y $J_1, ..., J_n$ cuya existencia garantiza el siguiente lema.

Sea $\mathbf{J} \in Just^+$. Hay unicos $n \geq 1$ y $J_1, ..., J_n \in Just$ tales que $\mathbf{J} = J_1 ... J_n$.

1.2 Defina «par adecuado de tipo τ» (no hace falta que defina cuando$\mathbf{J} \in Just^+$ es balanceada)

Un *par adecuado de tipo* τ es un par $(\varphi, \mathbf{J}) \in S^{\tau +} \times Just^+$ tal que $n(\varphi) = n(\mathbf{J})$ y $\mathbf{J}$ es balanceada.

1.3 Defina $Mod_T(\varphi)$

Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria. Dada $\varphi \in S^\tau$ definimos

$$\mathrm{Mod}_T(\varphi) = \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \text{ es modelo de } T \text{ y } \mathbf{A} \vDash \varphi\}$$

1.4 Convencion Notacional 4

Cuando hayamos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, si $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1 ..., a_n]$ significara que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$, donde $\vec{b}$ es una asignacion tal que a cada v_i le asigna el valor a_i. En general $\mathbf{A} \not\models \varphi[a_1, ..., a_n]$ significara que no sucede $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$.

1.5 Defina $(L, s, i,^c, 0, 1)/\theta$ (θ una congruencia del reticulado complementado $(L, s, i,^c, 0, 1)$)

Sea $\mathbf{L} = (L, s, i,^c, 0, 1)$ un reticulado terna y θ una *congruencia sobre* $\mathbf{L}$, definimos dos operaciones binarias $\tilde{\mathsf{s}}$ e $\tilde{\imath}$, y una operacion unaria $^{\tilde{c}}$ de la siguiente manera:

$$x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta = (x \;\mathsf{s}\; y)/\theta$$
$$x/\theta \;\tilde{\imath}\; y/\theta = (x \;\mathsf{i}\; y)/\theta$$
$$(x/\theta)^{\tilde{c}} = x^c/\theta$$

La 6-upla $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath},^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada el *cociente de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$ *sobre* θ y la denotaremos con $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)/\theta$

2 Segundo Combo de Definiciones

2.1 Defina $(\Sigma, \tau) \models \varphi$

Dadad (Σ, τ) una teoria, escribiremos $(\Sigma, \tau) \models \varphi$ cuando φ sea verdadera en todo modelo de (Σ, τ).

2.2 Defina «Particion de A» y $R_{\mathcal{P}}$

2.2.1 Defina «Particion de A»

Dado un conjunto A por una *particion de* A entenderemos un conjunto $\mathcal{P}$ tal que:

1. Cada elemento de $\mathcal{P}$ es un subconjunto no vacio de A
2. Si $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$ y $S_1 \neq S_2$, entonces $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
3. $A = \{a : a \in S, \text{ para algun } S \in \mathcal{P}\}$

La ultima condicion dice simplemente que la union de todos los elementos de $\mathcal{P}$ debe ser A

2.2.2 Defina «R_P»

Dada una particion $\mathcal{P}$ de un conjunto A podemos definir una relacion binaria asociada a $\mathcal{P}$ de la siguiente manera:

$$R_{\mathcal{P}} = \{(a, b) \in A^2 : a, b \in S, \text{ para algun } S \in \mathcal{P}\}$$

2.3 Defina cuando «φ_i esta bajo la hipotesis φ_l en $(\varphi, \mathbf{J})$». (no hace falta que defina$\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$)

Diremos que φ_i *esta bajo la hipotesis* φ_l *en* $(\varphi, \mathbf{J})$ o que φ_l *es una hipotesis de* φ_i *en* $(\varphi, \mathbf{J})$ cuando haya en $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ un bloque de la forma $\langle l, j \rangle$ el cual contenga a i.

2.4 Defina $(L, s, i)/\theta$ (θ una congruencia del reticulado terna (L, s, i)). (No hace falta que defina el concepto de congruencia.)

Sea $\mathbf{L} = (L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna y θ una *congruencia sobre* $\mathbf{L}$, luego definimos dos operaciones binarias $\tilde{\mathsf{s}}$ e $\tilde{\imath}$, de la siguiente manera:

$$x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta = (x \;\mathsf{s}\; y)/\theta$$
$$x/\theta \;\tilde{\imath}\; y/\theta = (x \;\mathsf{i}\; y)/\theta$$

La 3-upla $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ es llamada el *cociente de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *sobre* θ

3 Tercer Combo de Definiciones

3.1 Convencion Notacional 2

Cuando hayamos declarado $t =_d t(v_1, ..., v_n)$, si $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, entonces con $t^{\mathbf{A}}[a_1..., a_n]$ denotaremos al elemento $t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$, donde $\vec{b}$ es una asignacion tal que a cada v_i le asigna el valor a_i.

3.2 Defina «F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$»

Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ reticulados complementados. Una funcion $F : L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *en* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$\begin{aligned} F(x \mathsf{~s~} y) &= F(x) \mathsf{~s}' F(y) \\ F(x \mathsf{~i~} y) &= F(x) \mathsf{~i}' F(y) \\ F(x^c) &= F(x)^{c'} \\ F(0) &= 0' \\ F(1) &= 1' \end{aligned}$$

3.3 Defina «filtro generado por S en (L, s, i)»

Dado un conjunto $S \subseteq L$, definimos a el filtro generado por S el siguiente conjunto

$$[S) = \{y \in L : y \geq s_1 \mathsf{~i~} ... \mathsf{~i~} s_n, \text{ para algunos } s_1, ..., s_n \in S, \; n \geq 1\}$$

3.4 Defina cuando $\mathbf{J} \in Just^+$ es *balanceada (no hace falta que defina $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$)*

Diremos que $\mathbf{J} \in Just^+$ es *balanceada* si se dan las siguientes

1. Por cada $k \in \mathbf{N}$ a lo sumo hay un i tal que $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ y a lo sumo hay un i tal que $\mathbf{J}_i = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$, con $\alpha \in JustBas$.
2. Si $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ entonces hay un $l > i$ tal que $\mathbf{J}_l = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$, con $\alpha \in JustBas$.
3. Si $\mathbf{J}_i = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$, con $\alpha \in JustBas$, entonces hay un $l < i$ tal que $\mathbf{J}_l = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$.
4. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$, entonces $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ o $B_1 \subseteq B_2$ o $B_2 \subseteq B_1$.

4 Cuarto Combo de Definiciones

4.1 Defina «$(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ es un subreticulado complementado de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$»

Dados reticulados complementados $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ diremos que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *es un subreticulado complementado de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones

1. $L \subseteq L'$
2. L es cerrado bajo las operaciones s', i' y $^{c'}$
3. $0 = 0'$ y $1 = 1'$
4. $\mathsf{s} = \mathsf{s}'|_{L \times L}$, $\mathsf{i} = \mathsf{i}'|_{L \times L}$ y $^c = {}^{c'}|_L$

4.2 Defina $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ (version absoluta, no dependiente de una declaracion previa, i.e $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$. No hace falta definir $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$.

Sea $\mathbf{A}$ es una estructura de tipo τ, $\vec{a}$ una asignacion y $\varphi \in F^\tau$. Nuestra definicion matematica sera recursiva.

Dada una estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ, una asignacion $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$ y $a \in A$, con $\downarrow_i^a(\vec{a})$ denotaremos la asignacion que resulta de reemplazar en $\vec{a}$ el i-esimo elemento por a.

Ahora si la definicion recursiva:

1. Si $\varphi = (t \equiv s)$, entonces
   (a) $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$
2. Si $\varphi = r(t_1, ..., t_m)$, entonces
   (a) $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_m^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \in i(r)$
3. Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, entonces
   (a) $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$
4. Si $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, entonces
   (a) $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ o $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$
5. Si $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, entonces
   (a) $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$ o $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$
6. Si $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, entonces
   (a) $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si ya sea se dan $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$ o se dan $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \not\models \varphi_2[\vec{a}]$
7. Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces
   (a) $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$
8. Si $\varphi = \forall x_i \varphi_1$, entonces
   (a) $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si para cada $a \in A$, se da que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_i^a(\vec{a})]$
9. Si $\varphi = \exists x_i \varphi_1$, entonces
   (a) $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si hay un $a \in A$ tal que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_i^a(\vec{a})]$

4.3 Defina la relacion «v ocurre libremente en φ a partir de i»

Definamos recursivamente la relacion "*v ocurre libremente en φ a partir de i*", donde $v \in Var$, $\varphi \in F^\tau$ y $i \in \{1, ..., |\varphi|\}$, de la siguiente manera:

1. Si φ es atomica, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i sii v ocurre en φ a partir de i
2. Si $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i sii se da alguna de las siguientes
   (a) v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - 1$
   (b) v ocurre libremente en φ_2 a partir de $i - |(\varphi_1 \eta|$
3. Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i sii v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - 1$
4. Si $\varphi = Qw\varphi_1$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i sii $v \neq w$ y v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - |Qw|$

4.4 Defina «Reticulado Cuaterna»

Por un *reticulado cuaterna* entenderemos una 4-upla $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, \leq)$ tal que L es un conjunto no vacio, s e i son operaciones binarias sobre L, $\leq$ es una relacion binaria sobre L y se cumplen las siguientes propiedades:

1. $x \leq x$, cualesquiera sea $x \in L$
2. $x \leq y$ y $y \leq z$ implican $x \leq z$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$
3. $x \leq y$ y $y \leq x$ implican $x = y$, cualesquiera sean $x, y \in L$
4. $x \leq x \mathsf{s} y$ y $y \leq x \mathsf{s} y$, cualesquiera sean $x, y \in L$
5. $x \leq z$ y $y \leq z$ implican $x \mathsf{s} y \leq z$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$
6. $x \mathsf{i} y \leq x$ y $x \mathsf{i} y \leq y$, cualesquiera sean $x, y \in L$
7. $z \leq x$ y $z \leq y$ implican $z \leq x \mathsf{i} y$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

5 Quinto Combo de Definiciones

5.1 Explique la notacion declaratoria para terminos con sus 3 convenciones notacionales (convenciones 1,2 y 5 de la Guia 11)

5.1.1 Notacion Declaratoria para terminos

Si t es un termino de tipo τ, entonces escribiremos $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ para declarar que $v_1, ..., v_n$ son variables distintas (con $n \geq 1$) y tales que toda variable que ocurre en t pertenece a $\{v_1, ..., v_n\}$ (no necesariamente toda v_j debe ocurrir en t).

5.1.2 Convencion Notacional 1

Cuando hayamos hecho la declaracion $t =_d t(v_1, ..., v_n)$, si $P_1, ..., P_n$ son palabras cualesquiera (no necesariamente terminos), entonces $t(P_1, ..., P_n)$ denotara la palabra que resulta de reemplazar (simultaneamente) cada ocurrencia de v_1 en t, por P_1, cada ocurrencia de v_2 en t, por P_2, etc.

5.1.3 Convencion Notacional 2

Cuando hayamos declarado $t =_d t(v_1, ..., v_n)$, si $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, entonces con $t^{\mathbf{A}}[a_1..., a_n]$ denotaremos al elemento $t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$, donde $\vec{b}$ es una asignacion tal que a cada v_i le asigna el valor a_i.

5.1.4 Convencion Notacional 5

Cuando hayamos declarado $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ y $t = f(t_1, ..., t_m)$, con $f \in \mathcal{F}_m$ y $t_1, ..., t_m \in T^\tau$, unicos, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho las declaraciones $t_1 =_d t_1(v_1, ..., v_n), ..., t_m =_d t_m(v_1, ..., v_n)$. Esto lo podemos hacer ya que obviamente las variables que ocurren en cada uno de los $t_i's$ estan en $\{v_1, ..., v_n\}$

6 Sexto Combo de Definiciones

6.1 Explique la notacion declaratoria para formulas con sus 3 convenciones notacionales (convenciones 3,4 y 6 de la Guia 11). Puede asumir la notacion declaratoria para terminos.

6.1.1 Convencion Notacional 3

Cuando hayamos hecho la declaracion $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, si $P_1, ..., P_n$ son palabras cualesquiera, entonces $\varphi(P_1, ..., P_n)$ denotara la palabra que resulta de reemplazar (simultaneamente) cada ocurrencia libre de v_1 en φ, por P_1, cada ocurrencia libre de v_2 en φ, por P_2, etc.

6.1.2 Convencion Notacional 4

Cuando hayamos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, si $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1 ..., a_n]$ significara que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$, donde $\vec{b}$ es una asignacion tal que a cada v_i le asigna el valor a_i. En gral $\mathbf{A} \not\models \varphi[a_1, ..., a_n]$ significara que no sucede $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$

6.1.3 Convencion Notacional 6

Cuando hayamos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, entonces:

- Si $\varphi = (t \equiv s)$, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho las declaraciones $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ y $s =_d s(v_1, ..., v_n)$.

- Si $\varphi = r(t_1, ..., t_m)$, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho las declaraciones $t_1 =_d t_1(v_1, ..., v_n), ..., t_m =_d t_m(v_1, ..., v_n)$.

- Si $\varphi = \varphi_1 \eta \varphi_2$, con $\eta \in \{\wedge, \vee, \leftrightarrow, \rightarrow\}$, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho las declaraciones $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n)$ y $\varphi_2 =_d \varphi_2(v_1, ..., v_n)$.

- Si $\varphi = \neg\varphi_1$, $\varphi = \forall v_j \varphi_1$ o $\varphi = \exists v_j \varphi_1$, con $v_j \in \{v_1, ..., v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$, unicas, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho la declaracion $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n)$.

- Si $\varphi = \exists v \varphi_1$ o $\varphi = \forall v \varphi_1$, con $v \in Var - \{v_1, ..., v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$, unicas, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho la declaracion $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n, v)$.

7 Septimo Combo de Definiciones

7.1 Defina recursivamente la relacion «v es sustituible por w en φ»

Diremos que v *es sustituible por* w *en* φ cuando ninguna ocurrencia libre de v en φ sucede dentro de una ocurrencia de una subformula de la forma $Qw\psi$ en φ. Podemos definirlo de forma recursiva de la siguiente forma

1. Si φ es atomica, entonces v es sustituible por w en φ
2. Si $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, entonces v es sustituible por w en φ sii v es substituible por w en φ_1 y v es substituible por w en φ_2
3. Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces v es sustituible por w en φ sii v es substituible por w en φ_1
4. Si $\varphi = Qv\varphi_1$, entonces v es sustituible por w en φ
5. Si $\varphi = Qw\varphi_1$ y $v \in Li(\varphi_1)$, entonces v no es sustituible por w en φ
6. Si $\varphi = Qw\varphi_1$ y $v \notin Li(\varphi_1)$, entonces v es sustituible por w en φ
7. Si $\varphi = Qu\varphi_1$, con $u \neq v, w$, entonces v es sustituible por w en φ sii v es sustituible por w en φ_1

7.2 Defina cuando $\mathbf{J} \in Just^+$ es *balanceada (no hace falta que defina $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$)*

Diremos que $\mathbf{J} \in Just^+$ es *balanceada* si se dan las siguientes

1. Por cada $k \in \mathbf{N}$ a lo sumo hay un i tal que $\mathbf{J}_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$ y a lo sumo hay un i tal que $\mathbf{J}_i =$ TESIS$\bar{k}\alpha$, con $\alpha \in JustBas$.
2. Si $\mathbf{J}_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$ entonces hay un $l > i$ tal que $\mathbf{J}_l =$ TESIS$\bar{k}\alpha$, con $\alpha \in JustBas$.
3. Si $\mathbf{J}_i =$ TESIS$\bar{k}\alpha$, con $\alpha \in JustBas$, entonces hay un $l < i$ tal que $\mathbf{J}_l =$ HIPOTESIS$\bar{k}$.
4. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$, entonces $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ o $B_1 \subseteq B_2$ o $B_2 \subseteq B_1$.

7.3 Defina «filtro del reticulado terna (L,s, i)»

Un *filtro* de un reticulado terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ sera un subconjunto $F \subseteq L$ tal que:

1. $F \neq \emptyset$
2. $x, y \in F \Rightarrow x \mathsf{\ i\ } y \in F$
3. $x \in F$ y $x \leq y \Rightarrow y \in F$

7.4 Defina «Teoria elemental»

Una *teoria elemental* sera un par (Σ, τ) tal que τ es un tipo cualquiera y Σ es un conjunto de sentencias elementales puras de tipo τ. Un *modelo de* (Σ, τ) sera una estructura de tipo τ la cual haga verdaderos a todos los elementos de Σ.

8 Octavo Combo de Definiciones

8.1 Defina $(L, s, i, ^c, 0, 1)/\theta$ (θ una congruencia del reticulado complementado $(L, s, i, ^c, 0, 1)$)

Sea $\mathbf{L} = (L, s, i, ^c, 0, 1)$ un reticulado terna y θ una *congruencia sobre* $\mathbf{L}$, definimos dos operaciones binarias $\tilde{\mathsf{s}}$ e $\tilde{\imath}$, y una operacion unaria $^{\tilde{c}}$ de la siguiente manera:

$$x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta = (x \;\mathsf{s}\; y)/\theta$$
$$x/\theta \;\tilde{\imath}\; y/\theta = (x \;\mathsf{i}\; y)/\theta$$
$$(x/\theta)^{\tilde{c}} = x^c/\theta$$

La 6-upla $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, ^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada el *cociente de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *sobre* θ y la denotaremos con $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)/\theta$

8.2 Convencion Notacional 4

Cuando hayamos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, si $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1..., a_n]$ significara que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$, donde $\vec{b}$ es una asignacion tal que a cada v_i le asigna el valor a_i. En gral $\mathbf{A} \not\models \varphi[a_1, ..., a_n]$ significara que no sucede $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$

8.3 Dado un poset $(P, \leq)$, defina «a es supremo de S en $(P, \leq)$»

Un elemento $a \in P$ sera llamado *supremo de S en* $(P, \leq)$ cuando se den las siguientes dos propiedades

1. a es a cota superior de S en $(P, \leq)$
2. Para cada $b \in P$, si b es una cota superior de S en $(P, \leq)$, entonces $a \leq b$.

8.4 Defina «i es anterior a j en (φ, J)» (no hace falta que defina $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$)

Diremos que i es *anterior* a j *en* $(\varphi, \mathbf{J})$ si $i < j$ y ademas para todo $B \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ se tiene que $i \in B \Rightarrow j \in B$.

9 Noveno Combo de Definiciones

9.1 Defina «termino elemental de tipo τ»

Dado un tipo τ, definamos recursivamente los conjuntos de palabras T_k^τ, con $k \geq 0$, de la siguiente manera:

$$T_0^\tau = Var \cup \mathcal{C}$$
$$T_{k+1}^\tau = T_k^\tau \cup \{f(t_1, ..., t_n) : f \in \mathcal{F}_n,\ n \geq 1 \text{ y } t_1, ..., t_n \in T_k^\tau\}.$$

Sea$T^\tau = \bigcup_{k\geq 0} T_k^\tau$. Luego, los elementos de T^τ seran llamados *terminos de tipo* τ.

9.2 Defina $\dashv\vdash T$

Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria. Definimos la siguiente relacion binaria sobre S^τ:

$$\varphi \dashv\vdash_T \psi \text{ si y solo si } T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

9.3 Defina s^T(explique por que la definicion es inhambigua)

Dada una teoria $T = (\Sigma, \tau)$ y $\varphi \in S^\tau$, $[\varphi]_T$ denotara la clase de φ con respecto a la relacion de equivalencia $\dashv\vdash_T$.

Definiremos sobre $S^\tau / \dashv\vdash_T$ las siguiente operacion binaria s^T:

$$[\varphi]_T \ \mathsf{s}^T \ [\psi]_T = [(\varphi \vee \psi)]_T$$

Observemos que la operacion s^T es inambigua, para eso probamos la siguiente propiedad:

- Si $[\varphi]_T = [\varphi']_T$ y $[\psi]_T = [\psi']_T$ entonces $[(\varphi \vee \psi)]_T = [(\varphi' \vee \psi')]_T$

Es decir debemos probar que si $T \vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi')$ y $T \vdash (\psi \leftrightarrow \psi')$, entonces $T \vdash ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi'))$. A continuacion la prueba formal:

1.	$(\varphi \leftrightarrow \varphi')$	AXIOMAPROPIO
2.	$(\psi \leftrightarrow \psi')$	AXIOMAPROPIO
3.	$((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi))$	AXIOMALOGICO
4.	$((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi))$	REEMPLAZO$(1, 3)$
5.	$((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi'))$	REEMPLAZO$(2, 4)$

9.4 Defina $\mathcal{A}_T$

Dada una teoria $T = (\Sigma, \tau)$, denotaremos con $\mathcal{A}_T$ al algebra de Boole $(S^\tau / \dashv\vdash_T, \mathsf{s}^T, \mathsf{i}^T, {}^{\mathsf{c}^T}, 0^T, 1^T)$. El algebra $\mathcal{A}_T$ sera llamada el *algebra de Lindenbaum de la teoria* T. Con las siguientes operaciones:

$$[\varphi]_T \ \mathsf{s}^T \ [\psi]_T = [(\varphi \vee \psi)]_T$$
$$[\varphi]_T \ \mathsf{i}^T \ [\psi]_T = [(\varphi \wedge \psi)]_T$$
$$([\varphi]_T)^{\mathsf{c}^T} = [\neg\varphi]_T$$

y los siguientes elementos distinguidos:

- $0^T = \{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es refutable en } T\}$
- $1^T = \{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es un teorema de } T\}$

9.5 Defina «S es un subuniverso del reticulado complementado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$»

Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado *subuniverso* de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$ y ademas S es cerrado bajo las operaciones s, i y ^{c}.

10 Decimo Combo de Definiciones

10.1 Defina «tesis del bloque $\langle i, j \rangle$ en $(\varphi, \mathbf{J})$»

Sea $(\varphi, \mathbf{J})$ un par adecuado de tipo τ. Si $\langle i, j \rangle \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$, entonces φ_j sera la *tesis* del bloque $\langle i, j \rangle$ en $(\varphi, \mathbf{J})$.

10.2 Defina cuando una teoria de primer orden (Σ, τ) es consistente

Una teoria (Σ, τ) sera *inconsistente* cuando haya una sentencia φ tal que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$. Una teoria (Σ, τ) sera *consistente* cuando no sea inconsistente.

10.3 Dada una teoria elemental (Σ, τ) y una sentencia elemental pura φ de tipo τ, defina «prueba elemental de en (Σ, τ)»

Podemos generalizar el concepto de prueba elemental, introducido en la Guia 7, a cualquier teoria elemental. Dada una teoria elemental (Σ, τ) y una sentencia elemental pura φ de tipo τ, una *prueba elemental de* φ *en* (Σ, τ) sera una prueba de φ que posea las siguientes caracteristicas:

1. En la prueba se parte de una estructura de tipo τ, fija pero arbitraria en el sentido que lo unico que sabemos es que ella satisface los axiomas de Σ (i.e. es un modelo de (Σ, τ)) y ademas esta es la unica informacion particular que podemos usar.

2. Las deducciones en la prueba son muy simples y obvias de justificar con minimas fraces en castellano.

3. En la escritura de la prueba lo concerniente a la matematica misma se expresa usando solo sentencias elementales de tipo τ

11 Decimo Primer Combo de Definiciones

11.1 Enuncie el programa de logica matematica dado al final de la Guia 8 y explique brevemente con que definiciones matematicas se van resolviendo los tres primeros puntos y que teoremas garantizan la resolucion del 4to punto de dicho programa.

Programa de logica matematica

1. Dar un modelo matematico del concepto de formula elemental de tipo τ
2. Dar una definicion matematica de cuando una formula elemental de tipo τ es verdadera en una estructura de tipo τ para una asignacion dada de valores a las variables libres y a los nombres de elementos fijos de dicha formula elemental
3. (Plato gordo) Dar un modelo matematico del concepto de prueba elemental en una teoria elemental. A estos objetos matematicos los llamaremos pruebas formales
4. (Sublime) Intentar probar matematicamente que nuestro concepto de prueba formal es una correcta modelizacion matematica de la idea intuitiva de prueba elemental en una teoria elemental.

Resolucion 1 Si $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo, diremos que τ' es una *extension de τ por nombres de constante* si τ' es de la forma $(\mathcal{C}', \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ con $\mathcal{C}'$ tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$.

Las formulas de tipo τ son un modelo matematico de las formulas elementales puras de tipo τ (i.e. en las que no ocurren nombres de elementos fijos). Los nombres de elementos fijos se usan en las pruebas elementales para denotar elementos fijos (a veces arbitrarios y otras veces que cumplen alguna propiedad). Cuando un matematico realiza una prueba elemental en una teoria

elemental (Σ, τ) comienza la misma imaginando una estructura de tipo τ de la cual lo unico que sabe es que cumple las sentencias de Σ. Luego cuando fija un elemento y le pone nombre, digamos b, podemos pensar que expandio su estructura imaginaria a una de tipo $(\mathcal{C} \cup b, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ y continua su razonamiento. Esto lo puede hacer muchas veces a lo largo de una prueba por lo cual su estructura imaginaria va cambiando de tipo. Esta mecanica de prueba del matematico nos deja ver que es natural modelizar las formulas elementales de tipo τ con formulas de tipo τ_1, donde τ_1 es alguna extension de τ por nombres de constante.

Resolucion 2 La definicion matematica de la relacion «$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$» soluciona el punto (2).

Resolucion 3 La definicion de prueba formal en una teoria de primer orden soluciona el punto (3).

Resolucion 4 Este punto es resuelto por los teoremas de Correccion y Completitud.

El Teorema de Correccion asegura que nuestro concepto de prueba formal no es demaciado permisivo como para permitir probar sentencias que son falsas en algun modelo de la teoria. Pero dicho concepto podria ser incompleto en el sentido que podria pasar que un matematico diera una prueba elemental de una sentencia φ en una teoria (Σ, τ) pero que no haya una prueba formal de φ en (Σ, τ).

El Teorema de Completitud de Godel prueba que este no es el caso.