O professor Renato Brito é cearense e atua no segmento IME ITA desde 1990, quando iniciou a sua preparação para o ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica) nas turmas especiais do Colégio Geo Studio, em Fortaleza.

Foi aprovado no exame vestibular ITA 92, graduando-se engenheiro eletrônico em dezembro de 1997. A partir do segundo ano da faculdade, colaborou na preparação de vestibulandos IME ITA em um cursinho de São José dos Campos então recém fundado, o Poliedro, onde lecionou Física durante seis anos, retornando à sua cidade natal em janeiro de 1999.

Desde então, atua em Fortaleza, tanto na preparação de vestibulandos IME ITA, quanto na preparação de vestibulandos de Medicina e Odontologia - segmento muito concorrido nos exames das universidades brasileiras.

Inconformado com a carência de publicações de ensino médio em ciências exatas voltadas para os vestibulandos IME ITA, fundou a Livraria e Editora VestSeller em 2005, visando a resgatar, na medida do possível, a qualidade dos livros nesse segmento, fechando contratos com editoras e autores na Índia, na Rússia, Colômbia, Peru, e Estados Unidos, além de

Renato Brito Bastos Neto

Fundamentos de Mecânica

~~Henrique Donato~~

OBS: AGORA É MEU DONALT

Trabalho e Energia
Sistemas de Partículas
Dinâmica do centro de massa
Sistemas com massa variável

Gustavo Tenc Stangler

Volume 2

Editora Vestseller
Fortaleza - Ceará
2ª Edição - 2010

Editor responsável: Renato Brito Bastos Neto
Editoração: Renato Brito Bastos Neto
Capa: Cleiton Maciel

Esta obra pode ser adquirida diretamente na
EDITORA VESTSELLER
através de sua página eletrônica *www.vestseller.com.br*

FICHA CATALOGRÁFICA: Preparada por
Ruth Helena Linhares Leite e Luiza Helena de Jesus Barbosa.

B327m Bastos Neto, Renato Brito

Mecânica para vestibulandos IME ITA / Renato Brito Bastos Neto. - Fortaleza: Vestseller. 548p. ; v.2.

1ª edição 2009 / 2ª edição 2010

I. Mecânica II. Física (segundo grau) III. Dinâmica IV. Título

CDD 531

profrenatobrito@gmail.com

Sumário

Apresentação

Escrevi este livro motivado pela carência de material didático sobre essa temática num nível adequado aos vestibulandos IME ITA.

Ele é o segundo volume de uma coleção em três volumes intitulada *Fundamentos de Mecânica – Mecânica para Vestibulandos IME ITA*, estruturada da seguinte forma:

- Volume 1 – Cinemática geral e Leis de Newton;
- Volume 2 – Energia, Sistemas de partículas, Dinâmica do centro de massa, sistemas com massa variável;
- Volume 3 – Estática, Hidrostática, Gravitação e MHS.

O capítulo 1 traz a teoria detalhada sobre Trabalho e Energia. Partindo das idéias primitivas, construi, passo a passo, os conceitos de trabalho energia potencial, forças conservativas, forças não conservativas até chega às condições para a conservação da energia mecânica.

Introduzi algumas ferramentas incomuns, tais como o Princípio da Trajetória Alternativa, o Princípio da Projeção para o cálculo do trabalho da força de atrito, bem como uma interessante generalização da equação de Torricelli do MUV muito útil na resolução de problemas.

Tratei também do trabalho realizado por forças internas em sistemas de partículas, tais como um homem caminhando, um patinador empurrando uma parede ou um automóvel em movimento.

Ao longo de toda a teoria, o leitor encontrará uma grande quantidade de Exemplos Resolvidos que mostram, prontamente, a aplicação prática e numérica do conteúdo recém apresentado ao leitor. Logo ao final de cada seção, o leito encontra vários Problemas de Aplicação para que possa prontamente aferir o aprendizado do conteúdo apresentado.

Ao todo, são mais de 20 Exemplos Resolvidos distribuídos ao longo da teoria do Capítulo 1. Para um excelente treinamento, o leitor encontrará mais de 130 questões entre Problemas de Aplicação e Problemas Propostos nesse capítulo, dos quais, praticamente todas encontram-se amplamente resolvidas e comentadas no final do livro.

Ao longo de todo o livro, os problemas marcados com o símbolo *(resolução liberada)* têm a sua resolução completa detalhada no final do livro. Eles servem como base, isto é, como modelo para as questões que as sucedem. Os poucos problemas que não apresentam esse símbolo trazem apenas as suas respostas ao final do livro (com dicas para resolução) , por se tratarem de questões de treinamento (correlatas) muito semelhantes aos modelos resolvidos. Seguindo essa metodologia, o prof. Renato Brito permite que o leitor autodidata consiga evoluir e obter um grande salto de conhecimento no seu estudo da Mecânica para IME ITA, ainda que não tenha à sua disposição uma equipe de professores para a preparação IME ITA em sua cidade ou escola.

O capítulo 2 traz a teoria detalhada sobre impulso e quantidade de movimento. Gradativamente, introduzi também os conceitos relativos a nâmica do Centro de Massa, apresentando ao leitor a primeira e a segunda de Newton para Sistemas de Partículas. O conhecimento das leis de ewton generalizadas para sistemas, aliadas aos teoremas do centro de assa, propiciam ao leitor uma visão bem mais ampla e um conhecimento em mais profundo sobre a Dinâmica dos sistemas de Partículas.

Tratei amplamente sobre as colisões em suas mais variadas formas, nto unidimensionais quanto bidimensionais, apresentando todos os oremas e casos particulares importantes. Apresentei ao leitor o conceito de eficiente de restituição inclusive em problemas bidimensionais e ilustrei sas idéias com vasta quantidade de Exemplos Resolvidos e comentados de rma bastante clara e detalhada, de forma que qualquer estudante de Ensino édio autodidata possa compreender e assimilar o conteúdo sem a necessidade ajuda externa.

Finalmente, tratei sobre os interessantes problemas de sistemas com assa variável, incluindo o cálculo da força propulsora (empuxo) em jatos, stemas com ganho e perda de massa. Nessa seção, foi incluído um grande mero de Exemplos Resolvidos muito interessantes envolvendo correntes, nto em queda livre, quanto em movimento uniforme apoiadas sobre lanças ou suportes. Logicamente, toda essa seção, assim como o resto do ro, só faz uso de Matemática de Ensino Médio, dispensando qualquer nhecimento sobre Cálculo Diferencial e Integral que nem sequer consta s conteúdos programáticos dos vestibulares IME ITA.

Além dos mais de 25 Exemplos Resolvidos e Comentados distribuídos longo de toda a teoria do capítulo 2, foram disponibilizados mais de 220 oblemas de Aplicação e Propostos para o treinamento do leitor, sendo que quase totalidade deles encontra-se integramente resolvida ao final do livro. eguindo essa metodologia, o prof. Renato Brito permite que o leitor todidata consiga evoluir e obter um grande salto de conhecimento no seu tudo da Mecânica para IME ITA, ainda que não tenha a sua disposição na equipe de professores para a preparação IME ITA em sua cidade ou cola.

Ao longo de todo o livro, usei uma linguagem simples e irreverente, lizando-me da personagem Claudete, a fim de tornar a sua leitura leve e azerosa, amenizando o alto nível técnico praticado.

Optei por concentrar as respostas e resoluções dos problemas opostos no final do livro, acreditando que essa forma de organizar o nteúdo torne a sua leitura mais clara.

Espero que a presente obra contribua para dar ao leitor uma compreensão ais sólida e aprofundada dos princípios da Dinâmica.

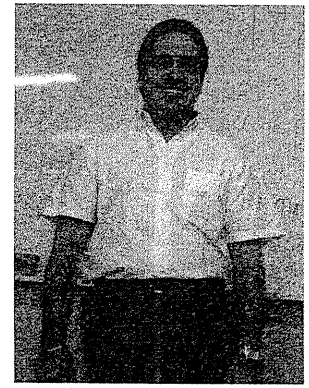
Para que eu possa aprimorar o seu conteúdo continuamente, o envio de ticas e sugestões, bem como de eventuais falhas que o leitor venha a contrar, é bem-vindo, pelo email:

profrenatobrito@gmail.com

Renato Brito Bastos Neto
Fortaleza, agosto de 2009

Sobre o autor

O professor Renato Brito é cearense e atua no segmento IME ITA desde 1990, quando iniciou a sua preparação para o ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica) nas turmas especiais do Colégio Geo Studio, em Fortaleza.



Foi aprovado no exame vestibular ITA 92, graduando-se engenheiro eletrônico em dezembro de 1997. A partir do segundo ano da faculdade, colaborou na preparação de vestibulandos IME ITA em um cursinho de São José dos Campos então recém fundado, o Poliedro, onde lecionou Física durante seis anos, retornando à sua cidade natal em janeiro de 1999.

Desde então, atua em Fortaleza, tanto na preparação de vestibulandos IME ITA, quanto na preparação de vestibulandos de Medicina e Odontologia - segmento muito concorrido nos exames das universidades brasileiras.

Tomou contato com os livros da renomeada editora Mir – Moscou, pela primeira vez, aos dezesseis anos de idade, ao adquirir os livros *Problemas Selecionados de Física Elementar* (Saraeva) e *Problemas de Matematica Elementares* (V.Lidski e Otros) na Livraria Arte e Ciência orientado pelo amigo prof. Majela Guedes. Desde então, passou a integrar a família dos inúmeros docentes e estudantes dos quatro continentes aficionados pelos livros daquela editora russa.

A Mir - Moscou, embora ainda esteja ativa até os dias de hoje, restringiu sua produção ao mercado russo desde 1990, com a desintegração da união soviética, quando passou a editar e publicar livros apenas no idioma local.

Inconformado com a carência de publicações de ensino médio em ciências exatas voltadas para os vestibulandos IME ITA, fundou a editora VestSeller em 2005, visando a resgatar, na medida do possível, a qualidade dos livros nesse segmento, fechando contratos com editoras e autores na Índia, na Rússia e no Brasil.

A editora VestSeller é uma empresa do segmento pontocom, atuando em todo Brasil pela internet, através do seu sítio www.vestseller.com.br. Patrocina iniciativas filantrópicas, como o site www.rumoaoita.com, além de manter o Fórum Brasileiro dos vestibulandos do IME e do ITA no sitio www.fisicaju.com.br/forum.

Carta ao Pirata

Em tempos modernos, é prudente o autor dedicar algumas palavras ao seu pior algoz e parasita: o pirata do século XXI.

Ele se julga muito esperto, superior a todos e acima da lei, duplicando e disseminando o produto do seu roubo através de fotocópias ou por meios eletrônicos, através de programas consagrados pelos usuários da internet.

Prezado Pirata,

Sei que você não faz a menor idéia do que foi o trabalho para produzir todo esse material de qualidade e ainda é incapaz de dimensionar quantos longos dias e noites solitárias me dediquei à escrita desse livro.

Entendo que seja muito cômodo encontrar o livro na internet pronto para ser salvo na memória do computador, reproduzido e distribuído de forma ilegal e, portanto, criminosa.

Quisera que você, por um infortúnio ou ironia do destino, passasse à posição de vítima como autor de alguma obra, e se deparasse, diariamente, com seus livros, músicas ou textos, disponíveis na internet, eletronicamente profanados, reduzidos a uma mera sequência de bits que solertemente trafegam pela rede.

Quisera, um dia, você vir o fruto do teu trabalho reduzido a farrapo digital. Aí sim, experimentaria do mesmo amargo que coloca em minha boca e vestiria o nariz vermelho de palhaço que contemplo diariamente, ao mirar o espelho.

Seja autor um dia e experimente a ira e o inconformismo que você desperta na alma desse que aqui vos fala em nome de toda a classe de autores. Só assim, sentindo na própria pele, seria possível adquirir uma consciência crítica e ética suficientes para estancar essa hemorragia social.

Pense duas vezes, antes de usurpar este meu filho querido. Se o fizer, te caçarei implacavelmente em todas as esquinas, você nunca mais terá paz até a Polícia Federal de qualquer país chegar até você. Se eu consigo fechar contratos com russos, indianos e outros povos do outro lado do mundo, então sou capaz de achar até mesmo uma agulha num palheiro. Prepare-se para a indenização, para a cadeia pois serei implacável e não lhe pouparei da minha ira.

Fortaleza, 24 de agosto de 2009

Prof. Renato Brito

Como usar este livro

Para que o leitor tire máximo proveito da presente obra, darei, a seguir, algumas instruções que serão muito úteis.

Antes de mais nada, afirmo não ser necessário o conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral para uma perfeita assimilação do conteúdo deste livro. Toda a Matemática aqui praticada é de ensino médio.

Adicionalmente, esse não é um mero livro de exercícios compilados seguidos de suas respectivas soluções. Mais do que isso, busquei realmente escrever uma teoria rica, consistente e realmente compatível com o nível dos exercícios e problemas propostos ao longo de cada capítulo.

Assim, o máximo proveito desse livro é obtido quando o leitor realmente se deixa levar pelo fluxo natural do texto. A ordem especial em que se apresentam as teorias, os exercícios resolvidos, os problemas de aplicação logo após cada seção teórica, bem como os problemas propostos no final de cada capítulo, foi minunciosamente tramada de forma a efetuar conexões entre conceitos físicos e técnicas de resolução na sequência mais lógica e racional possível, maximizando tanto o aprendizado do leitor quanto a fixação mais duradoura do conteúdo.

Saltar diretamente para os exercícios propostos, pelo fato de eles trazerem suas resoluções ao final do livro, sem esmiuçar previamente toda a teoria daquele capítulo, dará ao leitor apenas a falsa sensação de aprendizado. Entretanto, quando a complexidade dos problemas começar a se agigantar, a fragilidade desse pseudo-aprendizado se revelerá, trazendo desapontamento e desestímulo para o leitor.

Aquele que seguir a sequência natural proposta no livro, página por página, sem antecipar nenhum dos passos, terá um aprendizado cadenciado, firme e sólido, que se mostrará implacável mesmo quando o nível de complexidade se agigantar nos problemas mais difíceis dessa obra. Terá um aprendizado mais prazeroso e duradouro, não uma mera sensação de aprendizado.

Na resolução de alguns problemas, foram utilizadas as técnicas de resoluções no Referencial Não-inercial, tema central do volume 1 desta obra. Caso julgue necessário, recorra ao volume 1, ao se deparar com as resoluções desses problemas.

Acredito que, seguindo essas instruções, mesmo um estudante com pouca experiência em Mecânica assimilará todo o conteúdo desta obra com sucesso, obtendo, em geral, um grande salto de conhecimento num espaço de tempo relativamente curto na sua preparação IME ITA.

Este livro é um presente para todos os estudantes e professores brasileiros.

Agradecimentos

)eus, pelo dom da vida e pela saúde;

\ minha familia pelo apoio diário;

\ minha namorada Giselly, pela paciência durante minhas longas noites e nais de semana de trabalho dedicados a essa obra, bem como pelo stímulo e motivação diários.

\os meus alunos, por estarem sempre debatendo comigo, levando-me ao ontínuo reaprendizado da Física;

\o professor Marcos Haroldo por ter me iniciado na estrada da Física IME TA.

Dedicatória

iste livro é dedicado a todos aqueles que **não** são movidos pela sedução do dinheiro e poder mas sim, por uma causa nobre, por um ideal.

Somente os idealistas podem mudar o mundo.

Prefácio à 2ª edição

Nessa 2ª edição, foram corrigidas pequenas falhas de gabarito e de enunciado encontradas na 1ª edição por professores e leitores de todo o Brasil, que colaboraram ativamente para o aprimoramento dessa obra. Todas as falhas corrigidas estão descritas em:

www.vestseller.com.br/erratas/mecanica2

Algumas questões tiveram seus dados aprimorados a fim de facilitar os cálculos envolvidos, levando a uma resposta numérica exata. Dentre elas, as questões 189, 209 e 210 do capítulo 2.

Foi acrescentada a resolução da questão 209 do capítulo 2 para facilitar o aprendizado do leitor.

Atendendo a pedidos, as tarjas cinzas espalhadas em toda a obra foram clareadas para facilitar a leitura.

Considero esse livro uma obra viva, que é aprimorada continuamente tanto por mim quanto pelos estudantes e professores de todo o Brasil, além de Portugal, Angola e demais países de língua Portuguesa. Agradeço a todos que colaboraram de forma direta ou indireta para o aprimoramento desse livro.

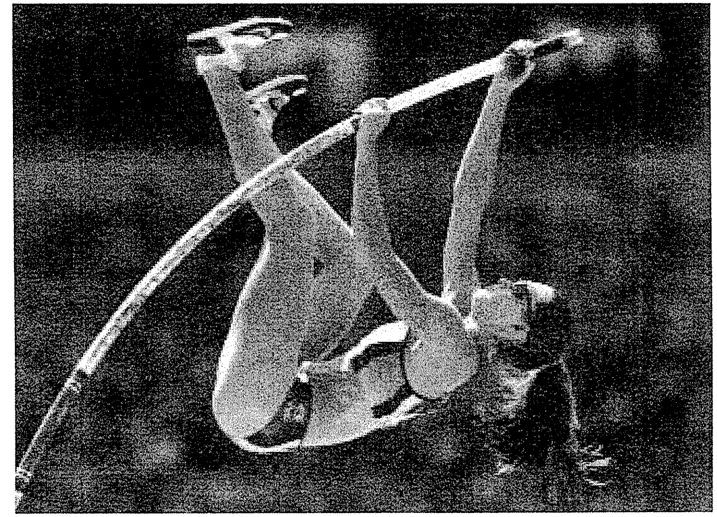
Comentários, críticas, sugestões e notificações de erros continuam sempre muito bem-vindas. Entre em contato comigo pelo email:

profRenatoBrito@gmail.com

O autor

Fortaleza, 30 de Março de 2010

1 TRABALHO E ENERGIA



1.1 INTRODUÇÃO: POR QUE ESTUDAR TRABALHO E ENERGIA ?

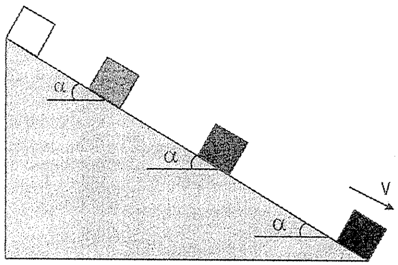
No volume 1 desta coleção, fizemos um estudo aprofundado das três leis de Newton:

- Discutimos as suas condições de validade dentro da Mecânica Clássica, tanto no domínio dos referenciais inerciais quanto nos referenciais não inerciais;
- Aprendemos o que são forças fictícias e como tirar proveito delas na resolução dos mais variados problemas de Dinâmica, muitos deles regados a complexos vínculos geométricos também discutidos naquela ocasião.

Após esse estudo tão rico e proveitoso, o aluno talvez seja levado a questionar – Para que estudar mais uma ferramenta da Mecânica chamada *Trabalho e Energia*, se as Leis de Newton se aplicam à resolução de todas as classes de problemas da Dinâmica ?

Embora as Leis de Newton sejam uma ferramenta poderosíssima, não é difícil nos depararmos com problemas de Mecânica cuja resolução, fazendo uso direto das leis de Newton em conjunto com as relações da cinemática, seria inviável devido à geometria envolvida. Na maioria dos casos, são problemas que envolvem forças variáveis e, portanto acelerações variáveis.

Para esclarecer, considere duas caixas idênticas que são abandonadas do repouso de uma mesma altura H, sendo que uma delas descerá por um plano inclinado (Figura 1) enquanto a outra o fará através de um tobogã ondulado (Figura 2).



igura 1 – A caixa desce a rampa com celeração a = g.senα constante, visto que a nclinação α da trajetória permanece constante or ser uma reta. Trata-se de um movimento niformemente variado - MUV.

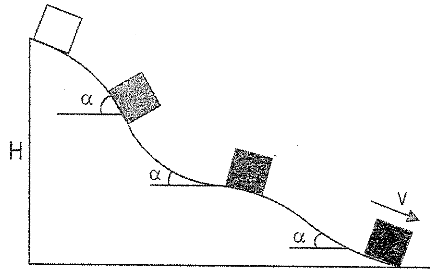


Figura 2 – A caixa desce a rampa com aceleração a = g.senα variável, visto que a inclinação α da trajetória sinuosa varia durante o movimento da caixa. Esse movimento é variado mas, não é uniformemente variado.

)e antemão, digo a você, prezado leitor, que a velocidade V com que cada aixa atingirá o final da ladeira, em ambos os casos, será exatamente a mesma, pesar das trajetórias seguidas pelas caixas serem bem distintas.

)eterminar essa velocidade final V no primeiro caso é uma tarefa simples: ıvestigamos as forças que atuam sobre o corpo e, com base na 2ª lei de lewton, facilmente chegamos ao valor da aceleração a = g.senα de descida da aixa. De posse do valor da aceleração, determinamos a velocidade final atingida ela caixa através da cinemática do MUV. Veja:

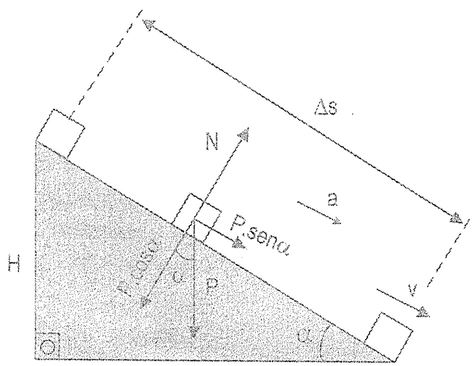


Figura 3 – diagrama das forças que agem na caixa, durante a descida da rampa

;e a aceleração adquirida pela caixa, na direção ladeira abaixo, é causada pela omponente P.senα do peso, então podemos escrever:

$_R = m.a \;\Rightarrow\; P.sen\alpha = m.a \;\Rightarrow\; m.g.sen\alpha = m.a \;\Rightarrow\; a = g.sen\alpha$

'ela relação cinemática do MUV (Torricelli): $V^2 = V_o^2 + 2.a.\Delta s$,

com $V_o = 0$ (parte do repouso), $a = g.sen\alpha$ e $sen\alpha = \dfrac{H}{\Delta s}$ vem:

$$V^2 = V_o^2 + 2.a.\Delta s \;\Rightarrow\; V^2 = 0^2 + 2.(g.sen\alpha).\Delta s$$

$$V^2 = 0^2 + 2.g.\frac{H}{\Delta s}\Delta s \qquad V = \sqrt{2gH}$$

Embora a determinação da velocidade final da caixa, no caso da Figura 1, tenha sido uma tarefa relativamente simples, o mesmo não ocorrerá no caso da Figura 2: sendo variável a inclinação α da superfície do tobogã, isso impõe ao movimento da caixa uma aceleração escalar de módulo a = g.senα variável, o que caracteriza um movimento **não** uniformemente variado. A equação de Torricelli não se aplica a esses casos. Assim, como se calcular a velocidade final V da caixa no 2º caso?

Os princípios de Trabalho e Energia são generalizações das leis de Newton e trazem, embutidos em si, essas leis. A sua aplicação na solução dos problemas geralmente leva a uma grande economia de algebrismos, permitindo soluções rápidas e diretas.

Problemas complicados à primeira vista são solucionados de forma simples e elegante quando aplicamos os princípios de trabalho e energia. A seguir, desenvolveremos esses conceitos. Quando estivermos prontos, voltaremos ao problema do tobogã e usaremos essa ferramenta para determinar a velocidade final da caixa.

1.2 O SIGNIFICADO FÍSICO DO TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA

Quando um móvel de massa M se desloca com velocidade V, o fato de ele estar se movendo lhe confere uma energia de movimento, denominada energia cinética E_C, matematicamente dada pela expressão:

$$Ec = \frac{M.V^2}{2} \qquad \textbf{(eq1)}$$

Quando um móvel se desloca sobre um solo horizontal liso sem atrito, atuam sobre o mesmo as forças peso P e normal N que se cancelam. Assim, nenhuma força ou aceleração atua sobre o móvel na direção do seu movimento.

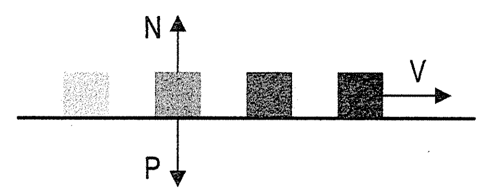


Figura 4 – móvel se deslocando em equilíbrio, em movimento uniforme, com energia cinética constante.

O móvel seguirá em MRU com velocidade escalar V constante e, portanto, energia cinética constante, enquanto nenhuma força adicional interferir nesse estado de equilíbrio ($F_R = 0$) dinâmico.

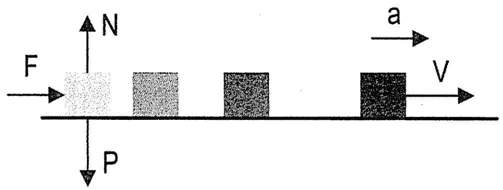


Figura 5 – móvel se desloca sob ação de uma força F constante, que o acelera, realizando trabalho sobre ele, "dando" energia cinética para o corpo durante o seu movimento.

Entretanto, se uma força F (admitida constante para simplificar) passar a agir sobre o móvel (Figura 5), ela irá acelerá-lo, sendo responsável pelo aumento da sua energia cinética no decorrer do seu movimento MRUV. Assim, devido à ação da força F, a caixa "ganhará energia cinética" durante o seu deslocamento.

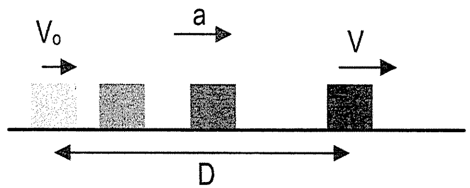


Figura 6 – Quando a caixa sofrer um deslocamento D com aceleração constante **a**, quantos joules de energia cinética ela ganhará ?

Estamos interessados em calcular quanta energia cinética a caixa ganhará, ao sofrer um deslocamento D sob ação de uma aceleração escalar constante. Como o movimento será MUV (força e aceleração constantes), podemos escrever:

$$V^2 = V_o^2 + 2.a.D \quad \text{(Torricelli)}$$

Para chegarmos à relação entre as energias cinéticas inicial e final, multiplicamos cada termo da expressão acima por $\frac{M}{2}$:

$$\frac{M}{2}.V^2 = \frac{M}{2}.V_o^2 + \frac{M}{2}.2.a.D$$

Sendo a força F responsável pela aceleração a adquirida pela caixa, então : F = m.a. Assim, escrevemos:

$$\frac{M \cdot V^2}{2} = \frac{M \cdot V_o^2}{2} + F \cdot D \qquad \textbf{(eq2)}$$

Fisicamente, essa relação é interpretada da seguinte forma:

Termo	Interpretação Física
$\frac{M \cdot V^2}{2}$	Energia cinética que a caixinha tem após percorrer a distância D.
$\frac{M \cdot V_o^2}{2}$	Energia cinética que a caixinha tinha antes de percorrer a distância D.
$F \cdot D$	Ganho de energia cinética que a caixinha sofreu naquele deslocamento.

O termo T = F.D representa a quantidade de energia cinética que a caixa "ganhou" devido à ação da força durante o deslocamento. Os físicos denominaram esse termo de "trabalho realizado pela força durante o deslocamento."

A rigor, ao aplicar sobre a caixa uma força F a favor do seu movimento, o agente está transferindo para a caixa uma quantidade de energia "F.D" que antes lhe pertencia e, agora, passa a fazer parte do conteúdo de energia da caixa, na forma de energia cinética. A caixa está sendo considerada puntiforme e não estamos considerando possíveis variações de temperatura (energia interna) da mesma.

Assim, grosso modo, entendemos que, fisicamente, o trabalho realizado por uma força corresponde à quantidade de energia cinética que a força "dá" (transfere) para a caixa durante o movimento. Entretanto, se a força se opõe ao deslocamento da caixa, esse termo representará a quantidade de energia cinética "retirada" da caixa, durante aquele deslocamento.

Essa maneira informal de interpretar o significado físico do trabalho, a princípio, satisfaz nossos objetivos iniciais. Posteriormente, quando já tivermos uma visão mais profunda dos princípios físicos aqui abordados, daremos uma interpretação mais formal do conceito de trabalho.

1.3 ENTENDENDO FISICAMENTE O SINAL ALGÉBRICO DO TRABALHO

Considere o sistema da Figura 7, composto por dois blocos A e B conectados entre si por fio e polia ideais. Seja D o deslocamento sofrido por cada corpo, quando o sistema é abandonado a partir do repouso.

Analisando as forças que agem no bloco A, durante esse deslocamento, vemos que :

- a força $T_1 \rightarrow$ atua a favor do seu deslocamento $D\rightarrow$, realizando sobre o bloco A *um trabalho positivo de valor $+T_1.D$, cujo módulo fisicamente significa o tanto* de joules que T_1 "dá" (transfere) para a caixa A durante esse deslocamento, na forma de energia cinética;

a força de atrito Fat ←, por sua vez, atua contra o deslocamento D→ do bloco A, realizando sobre ele um trabalho negativo de valor algébrico –Fat.D, cujo módulo fisicamente significa o tanto de joules que a força de atrito "retira" da caixa A durante esse deslocamento, na forma de energia cinética;

as forças normal N_A↑ e peso P_A↓ atuam perpendicularmente ao deslocamento D→ da caixa A e, assim, perpendicularmente à sua velocidade V_A→, não contribuindo para a variação do seu módulo. Com isso, percebemos que forças que atuam perpendicularmente ao deslocamento do corpo em nada contribuem para a sua energia cinética e, portanto, realizam trabalho nulo.

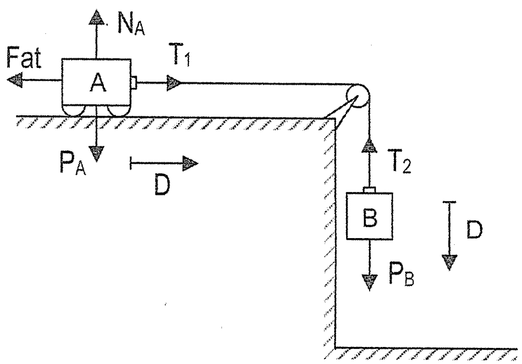


Figura 7 – A tração T realiza um trabalho positivo de +20 J sobre o carro A, fazendo a sua energia cinética aumentar de +100 J para 120 J.

nalisando as forças que agem no bloco B, durante seu deslocamento D↓, emos que :

seu peso P_B ↓ atua a favor do seu deslocamento D↓, realizando sobre o bloco B um trabalho positivo de valor $+P_B$.D, cujo módulo, fisicamente, significa o tanto de joules que P_B "dá" (transfere) para a caixa B durante esse deslocamento, na forma de energia cinética;

a tração T_2 ↑, por sua vez, atua contra o deslocamento D↓ do bloco B, realizando sobre ele um trabalho negativo de valor algébrico $-T_2$.D, cujo módulo, fisicamente, significa o tanto de joules que a tração T_2 "retira" da caixa B durante seu deslocamento, na forma de energia cinética.

n linhas gerais, vimos que o trabalho realizado por uma força genérica tem nal algébrico positivo quando esta (ou sua componente na direção do ovimento) aponta a favor do vetor deslocamento do corpo, negativo quando ponta contra esse deslocamento, sendo nulo quando aponta numa direção erpendicular ao deslocamento do corpo.

1.4 CONDIÇÕES PARA QUE HAJA REALIZAÇÃO DE TRABALHO

De forma geral, podemos dizer que, para que haja realização de trabalho, duas condições precisam ser satisfeitas simultaneamente:

I. o ponto de aplicação da força deverá sofrer um deslocamento durante a atuação da mesma;

II. a força deve ter, pelo menos, alguma componente na direção do movimento (na direção da velocidade) de tal forma que ou ela se opõe ao movimento, ou ela favorece o mesmo. Em outras palavras, se a força estiver agindo perpendicularmente à direção do movimento, ela não estará realizando trabalho algum.

Ora, Claudete, para que uma força não realize trabalho, durante um episódio, basta que pelo menos uma das condições anteriores não seja satisfeita. Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 1: Um mecânico imóvel segurando uma ferramenta

Pedim, na figura ao lado, está segurando uma ferramenta há mais de 15 minutos nessa posição fixa, sem se mover. Com isso, ele certamente está começando a sentir uma certa fadiga na musculatura do braço, às vezes até umas tremidinhas em razão do cansaço muscular que está sendo gerado.

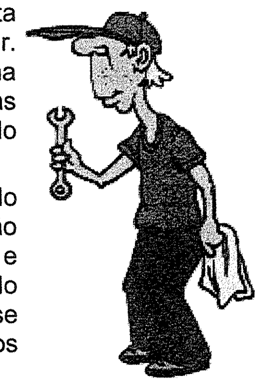


Figura 8

Apesar de a ferramenta permanecer imóvel durante todo esse tempo, as fibras musculares do braço do Pedim estão sofrendo um contínuo processo de contrações e relaxamentos alternados para manter o braço flexionado nessa posição, equilibrando o peso da ferramenta. Esse processo tanto consome energia (dos alimentos ingeridos por ele) a nível muscular quanto leva ao cansaço.

Apesar desse gasto de energia, nosso mecânico está realizando trabalho do ponto de vista da Física nesse episódio ?

De acordo com a definição, Pedim não está realizando trabalho *sobre a ferramenta* uma vez que esta não se move na direção da força que ele aplica sobre a mesma.

Nesse ponto, percebemos que o conceito de trabalho, do ponto de vista da física, não condiz com as nossas idéias cotidianas. Para a Física, a realização de trabalho envolve necessariamente um deslocamento.

Exemplo 2: Entregador carregando pizzas em MRU.

A figura 9 mostra Jeremias carregando uma pilha de caixas enquanto se move tranquilamente, com velocidade constante, numa calçada horizontal. Tomemos o sistema composto apenas pela pilha de caixas. Seja **F** a força externa que Jeremias aplica ao sistema a fim de equilibrar o seu peso **P** total, durante o movimento. Observe os seguintes detalhes:

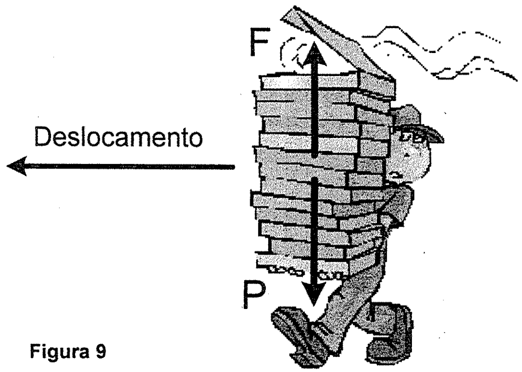


Figura 9

- a força F↑ que Jeremias aplica à pilha de caixas é perpendicular ao deslocamento D← das mesmas, de forma que essa força nem está a favor do deslocamento das caixas (trabalho positivo) nem contra esse deslocamento (trabalho negativo);
- dizemos que essa força F↑ não está realizando trabalho ou, se preferir, que essa força F↑ está realizando trabalho nulo;
- Pelo mesmo motivo, a força externa peso **P**↓ que a Terra aplica ao sistema de caixas também não realiza trabalho;
- Como o trabalho realizado por alguém é sempre o trabalho realizado pela força que esse alguém aplica, podemos dizer que Jeremias não realiza trabalho durante esse episódio ($T_{Jeremias} = T_F = 0$) .
- Assim, como nenhuma força externa agindo sobre o sistema caixa realiza trabalho sobre a mesma, seu conteúdo de energia cinética não se altera, concordando com o fato de ela estar se deslocando em MRU horizontal.

Exemplo 3: O pêndulo simples.

Observando o diagrama das forças que atuam sobre a esfera de um pêndulo, durante a sua oscilação (Figura 10), é fácil perceber que <u>a tração T que o cordão exerce sobre a esfera é sempre perpendicular à sua trajetória circular em cada ponto</u> (por ser radial) e, portanto, não realiza trabalho durante as oscilações do pêndulo.

Durante a descida do pêndulo, a força peso P (na verdade a sua componente tangencial) está a favor da velocidade do pêndulo, realizando um trabalho positivo sobre ele e, portanto, sendo responsável pelo aumento da sua energia cinética no trecho descendente.

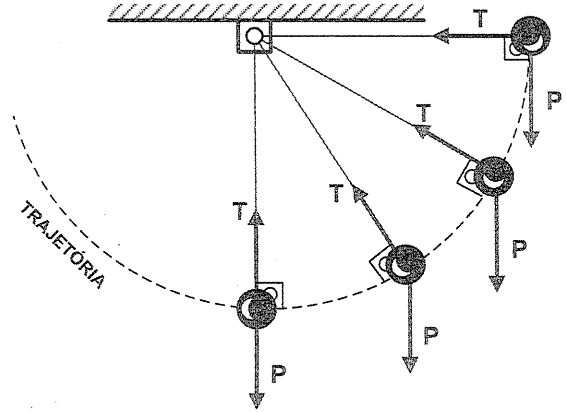
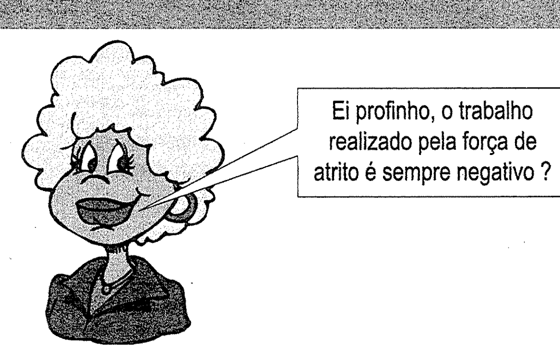


Figura 10 – Forças centrípetas nunca realizam trabalho.

A tração T não realiza trabalho durante esse movimento, não contribuindo para variações de energia cinética do pêndulo. Sua função se restringe a guiar a esfera em sua trajetória circular, fornecendo parte da aceleração centrípeta (actp) necessária a esse tipo de movimento.

Propriedade 1: Forças que atuam na direção radial ou centrípeta (perpendiculares à velocidade do móvel) nunca realizam trabalho, por serem normais à trajetória.



Nem sempre, amiga Claudete ! Em alguns casos curiosos, a força de atrito pode realizar trabalho positivo. Considere o exemplo mostrado na Figura 11. Um bloco B encontra-se em repouso sobre um plano horizontal liso quando, de repente, um *segundo bloco A é arremessado horizontalmente sobre ele.*

Devido ao atrito trocado entre A e B, parte da velocidade de A é transferida para o bloco B e o conjunto "A+B" passa a se mover sobre o plano horizontal liso com velocidade V em comum em movimento uniforme.

De onde vem a energia cinética adquirida pelo bloco B nesse episódio ? Ela é proveniente do trabalho positivo realizado pela força de atrito $Fat_{AB} \rightarrow$ que A exerce sobre B enquanto escorrega sobre sua superfície. Este é um exemplo de situação em que a força de atrito realiza um trabalho positivo.

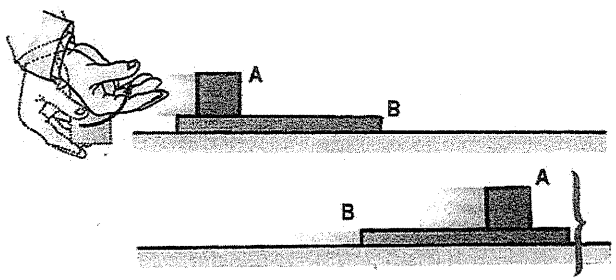


Figura 11– Quando o bloco A é lançado sobre a superfície áspera de um bloco B inicialmente em repouso, o atrito que A exerce sobre B acelera este último, fornecendo energia cinética a ele, realizando sobre ele um trabalho positivo !

1.5 TRABALHO REALIZADO POR FORÇA CONSTANTE INCLINADA

Considere uma caixa que sofre um deslocamento D sob ação de uma força F constante em direção, sentido e valor, como mostra a Figura 12:

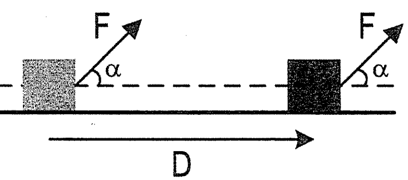


Figura 12– Uma caixa movendo-se sob ação de uma força F inclinada em um ângulo α com a direção do movimento

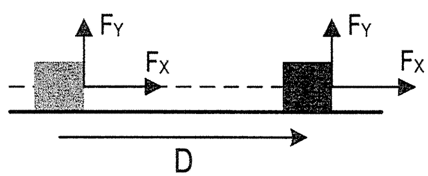


Figura 13– Apenas a componente F_X da força na direção do movimento realiza trabalho.

Para calcular o trabalho realizado pela força F, durante o deslocamento dessa caixa, decomponha inicialmente a força F, substituindo a mesma pelas suas componentes perpendiculares F_X e F_Y, tais que $\vec{F} = \vec{F}x + \vec{F}y$.

Sendo o trabalho uma grandeza escalar, ele é simplesmente calculado pela soma escalar dos trabalhos realizados individualmente por cada uma de suas componentes F_X e F_Y durante o referido deslocamento (Figura 13). Matematicamente, temos:

$$T_F = T_{Fx} + T_{FY}$$

O trabalho da componente Fx é dado por: $T_{Fx} = F_x \,.\, D = (F.\cos\alpha).\, D$

A componente F_Y não realiza trabalho durante o deslocamento horizontal, por ser perpendicular a esse deslocamento: $T_{FY} = 0$. Assim:

$$T_F = T_{Fx} + T_{FY} = F.\cos\alpha\,.D + 0$$

$$T_F = F.\cos\alpha\,.D$$

Propriedade 2: O trabalho realizado por uma força (vetorialmente) constante $\vec{F}$, quando o seu ponto de aplicação sofre um deslocamento vetorial $\vec{D}$ numa direção que forma um ângulo α com a direção da força, é dado por:

$$T = |\vec{F}|\,.\,|\vec{D}|\,.\cos\alpha \qquad \textbf{(eq3)}$$

1.6 PRINCÍPIO DO TRABALHO TOTAL OU TRABALHO RESULTANTE

Quando várias forças atuam sobre um móvel, durante um deslocamento, algumas realizam trabalho positivo "dando Ecin" ao móvel, enquanto outras realizam trabalho negativo "tirando Ecin" do móvel, durante o deslocamento. Há, ainda, aquelas que realizam trabalho nulo, caso em que "nem dão nem tiram" Ecin do corpo, geralmente por serem perpendiculares à trajetória seguida.

Assim, para saber se, no cômputo geral, o corpo "ganhou" ou "perdeu" Ecin naquele deslocamento, precisamos somar as contribuições de todas as forças individualmente, adicionando os trabalhos realizados por cada uma delas, determinando, assim, o "trabalho total ou resultante" realizado sobre o corpo no referido deslocamento.

O trabalho total ou resultante é que revelará o "lucro efetivo de Ecin" sofrido pelo corpo naquele deslocamento. Essa idéia simples é denominada "**Princípio do Trabalho Total**", cuja expressão matemática é:

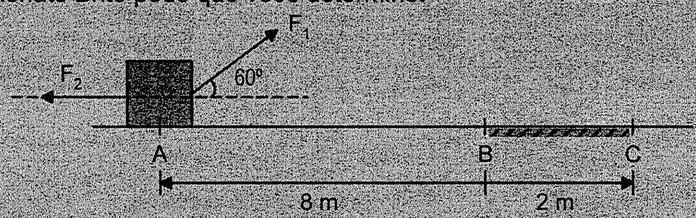
$$T_{total} = T_{F1} + T_{F2} + T_{F3} + \ldots + T_{Fn} = Ec_{Final} - Ec_{inicial} \qquad \textbf{(eq4)}$$

Esse princípio também é conhecido como **Teorema da Energia Cinética**.

A partir desse ponto, o leitor começara a visualizar porque "Trabalho e Energia" é a melhor ferramenta da Mecânica para resolver problemas de Dinâmica.

Ratifico que os corpos estão sendo tratados como puntiformes e não estamos considerando possíveis variações de temperatura (energia interna) associada a eles.

Exemplo Resolvido 1: a figura mostra uma caixa de massa m = 5 kg sobre um solo horizontal, partindo do repouso no ponto A sob ação das forças constantes F_1 = 40 N e F_2 = 10N que agem que agem sobre a caixa até passar pelo ponto C. Apenas no trecho BC existe atrito, de intensidade F_{AT} = 5 N. O prof. Renato Brito pede que você determine:



a) o trabalho realizado por cada uma das forças F_1, F_2, F_{AT}, normal N e peso P no percurso total AC;
b) a velocidade da caixa ao passar pelo ponto C;
c) quanto deveria ser a intensidade da força de atrito F_{AT} no trecho BC capaz de fazer a caixa parar em C.

Solução:

a) A seguir, calcularemos o trabalho realizado por cada força constante, em todo o trecho AC, lembrando de atribuir o respectivo sinal algébrico:

$$T_{F1} = +F_1.\cos 60^\circ.D = +40.(1/2).10 = +200J$$

O trabalho de F_1 é positivo pelo fato de esta força estar agindo a favor do deslocamento da caixa. O valor desse trabalho realizado, fisicamente, significa que a força F_1 "deu" (transferiu) 200J de energia cinética para essa caixa nesse deslocamento.

$$T_{F2} = -F_2.D = -10.10 = -100J$$

O trabalho de F_2 é negativo pelo fato de esta força estar agindo contra o deslocamento da caixa. O valor desse trabalho realizado, fisicamente, significa que a força F_2 "tirou" 100J de energia cinética desta caixa nesse deslocamento.

$$T_P = T_N = 0\ J$$

O trabalho do peso P $\downarrow$ e da normal N$\uparrow$ é nulo nesse episódio, pelo fato de estas forças estarem agindo perpendicularmente ao deslocamento D$\rightarrow$ da caixa. O valor desse trabalho realizado, fisicamente, significa que estas forças "não deram nem retiraram" energia cinética dessa caixa nesse deslocamento.

$$T_{Fat\,AC} = T_{Fat\,AB} + T_{Fat\,BC} = 0 + (-Fat.d) = -5.(2) = -10J$$

A força de atrito não realiza trabalho no trecho AB por ter uma intensidade nula naquele trecho. No trecho BC, o Fat cinético $\leftarrow$ age contrário ao deslocamento d$\rightarrow$ da caixa e, portanto, realiza trabalho negativo. No cômputo geral, a força de atrito, em todo o percurso AC, "retirou" 10 J de energia cinética da caixa, transferindo para o solo na forma de energia térmica.

b) Interpretando fisicamente, vimos que a força F_1 "deu" 200 J de energia cinética para a caixa, no trecho AC, enquanto F_2 e o Fat "retiraram", respectivamente, 100J e 10J dela. No cômputo geral, a caixa teve lucro ou prejuízo de Ecin nesse trajeto ? Ora, um lucro de 90J, é intuitivo ! Esse cálculo intuitivo que se faz, mentalmente, é exatamente o raciocínio que está por traz da aplicação do Princípio do Trabalho Total:

$$T_{total} = T_{F1} + T_{F2} + T_N + T_P + T_{Fat} = Ecin_F - Ecin_i \qquad \textbf{(eq5)}$$
$$(+200) + (-100) + 0 + 0 + (-10) = Ecin_F - Ecin_i$$
$$+90 = Ecin_F - Ecin_i$$

Do exposto, se a caixa lucrou 90J de Ecin no trajeto AC, e possuía Ecin inicial nula no ponto A (Ecin $_i$ = 0J, a caixa parte do repouso), quantos joules de Ecin ela terá ao passar pelo ponto C ? Em outras palavras, qual será sua velocidade ao passar pelo ponto C ?

$$+90 = Ecin_F - Ecin_i = \frac{m.v^2}{2} - 0 = \frac{5.v^2}{2} - 0 \quad \Rightarrow \quad v = 6\ m/s$$

c) A seguir, determinaremos quanto deve ser o novo valor da força de atrito a fim de que a caixa pare ao atingir o ponto C. O leitor, à primeira vista, poderia julgar que teríamos um trabalho algébrico muito grande para chegar a esse resultado desejado. Entretanto, essa ferramenta maravilhosa chamada "Trabalho e Energia" nos permite chegar ao valor do novo Fat de forma rápida, concisa e elegante.

Nesse novo episódio, a caixa novamente partirá do ponto A e se deslocará até o ponto C sob ação das mesmas forças F_1, F_2, N, e P, sem que haja nenhuma alteração em suas intensidades, exceto a da força de atrito, que deverá ser aumentada a fim de que a caixa pare ao atingir o ponto C. Assim, os trabalhos realizados pelas forças F_1, F_2, N, e P, nesse novo episódio, serão exatamente os mesmos de antes. Apenas o trabalho da força de atrito sofrerá uma alteração, passando a valer:

$$T_{Fat\,AC} = T_{Fat\,AB} + T_{Fat\,BC} = 0 + (-Fat'.d) = -Fat'.(2)$$

onde Fat' é a intensidade da nova força de atrito a ser determinada. Assim, aplicando novamente o Princípio do Trabalho Total, levando em consideração que a caixa parte do repouso no ponto A e deve parar ao atingir o ponto C, temos:

$$T_{total} = T_{F1} + T_{F2} + T_N + T_P + T_{Fat} = Ecin_F - Ecin_i$$
$$(+200) + (-100) + 0 + 0 + (-Fat'.2) = Ecin_C - Ecin_A \qquad \textbf{(eq6)}$$
$$(+200) + (-100) + 0 + 0 + (-Fat'.2) = 0 - 0$$
$$Fat' = 50\ N$$

O presente exemplo resolvido nos mostrou como o Princípio do Trabalho Total resolve problemas de Dinâmica de forma simples, elegante e concisa. Do ponto de vista do prof. Renato Brito, Trabalho e Energia é a melhor ferramenta da Mecânica.

Para você valorizar essa ferramenta, Claudete, veja como teríamos que resolver essa questão sem fazer uso de Trabalho e Energia:

Em cada trecho AB e BC, a caixa se desloca em movimento uniformemente variado (MUV), com acelerações distintas. Dada a velocidade inicial ($V_A = 0$), como determinar a velocidade V_B ? Ora, pela equação de Torricelli no trecho AB:

$$V_B^2 = V_A^2 + 2.(a_1).\Delta s_{AB} \qquad \textbf{(eq7)}$$

Entretanto, ainda é preciso determinar o valor da aceleração a_1 nesse trecho:

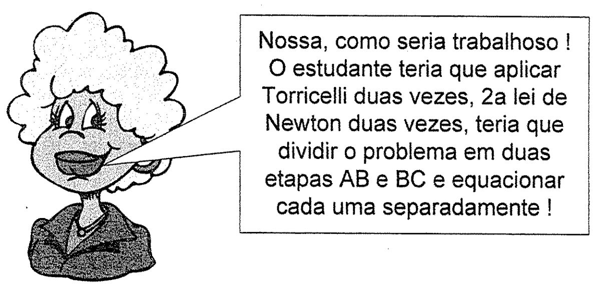
$$F_R = m.a_1 \;\Rightarrow\; (F_{1X} - F_2) = m.a_1 \;\Rightarrow\; F_1.\cos60^\circ - F_2 = m.a_1 \qquad \textbf{(eq8)}$$

Tendo determinado V_B, a partir de eq7 e eq8, como determinar a velocidade V_C ? Ora, pela equação de Torricelli no trecho BC:

$$V_C^2 = V_B^2 + 2.(a_2).\Delta s_{BC} \qquad \textbf{(eq9)}$$

Entretanto, ainda é preciso determinar o valor da aceleração a_2 nesse trecho:

$$F_R = m.a_2 \;\Rightarrow\; (F_{1X} - F_2 - Fat) = m.a_2 \;\Rightarrow\; F_1.\cos60^\circ - F_2 - Fat = m.a_2 \qquad \textbf{(eq10)}$$

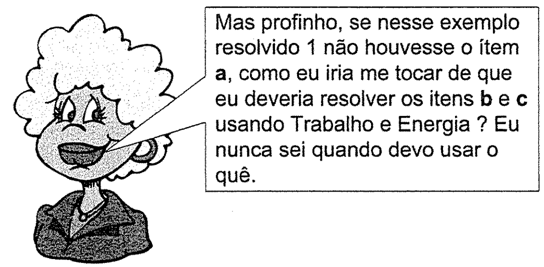


Exatamente, Claudete ! Como podemos ver, a resolução do mesmo item **b** através da ferramenta Trabalho e Energia se mostrou muito vantajosa, visto que:

- fizemos uso de apenas uma equação (a equação eq5), que traduz o Princípio do Trabalho Total;
- em vez de dividirmos o problema em duas etapas e equacionarmos cada uma separadamente (como fizemos em eq7, eq8, eq9 e eq10), contabilizamos diretamente o trabalho realizado por todas as forças no trecho ABC e

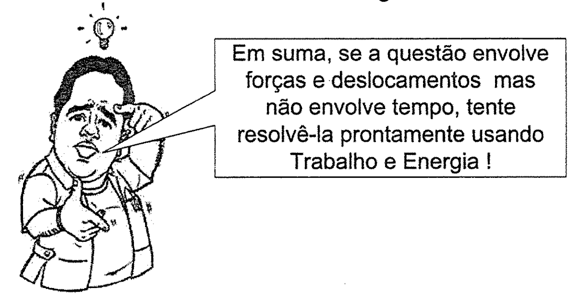
chegamos logo ao valor da velocidade final v_C (equacionamento eq5), de forma concisa e elegante.

Essa é a grande vantagem da ferramenta Trabalho e Energia: o estudante **NUNCA** mais dividirá a solução de um problema de Dinâmica em várias etapas, embora ele seja sempre tentado a isso. De agora em diante, todas as resoluções terão uma **ÚNICA** etapa.



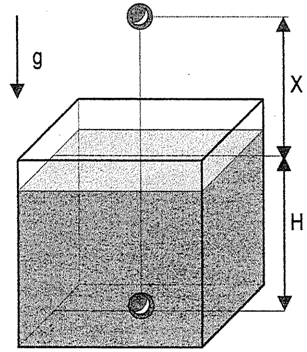
Essa dificuldade universal dos estudantes de Física só é superada com muita prática de resolução de exercícios e experiência. Entretanto, alguns comentários podem ser úteis:

- Trabalho e Energia é, indiscutivelmente, a melhor ferramenta da Mecânica. Ela sempre proporciona as resoluções mais otimizadas, com mínimo de processamento algébrico. Sempre que você se deparar com um problema que tiver várias opções para ser resolvido e uma delas for usar Trabalho e Energia, não pense duas vezes ! Resolver usando Trabalho e Energia é SEMPRE mais vantajoso do que usar os métodos convencionais que, em geral, envolvem o uso direto da segunda lei de Newton aliada à equação de Torricelli do MUV;
- Praticamente todos os problemas de Dinâmica que envolvem forças e deslocamentos, velocidades, coeficientes de atrito, massas, etc., <u>mas não envolvem o parâmetro **tempo**</u>, são prontamente solucionados utilizando Trabalho e Energia.
- Problemas de Dinâmica que envolvem o parâmetro tempo não são solucionáveis por energia pelo fato de que o tempo não figura em nenhuma das relações matemáticas de Trabalho e Energia.



Exemplo Resolvido 2: Uma bolinha maciça de isopor, de densidade **d**, é abandonada no fundo de um tanque contendo água até uma altura **H**. Se a gravidade local vale **g** e a densidade da água vale ρ, o prof. Renato Brito pede que você determine a altura máxima **x** atingida pela bola, medida a partir da superfície da água. Despreze quaisquer forças de resistência.

Solução:



Lendo atentamente o enunciado do problema, observamos que o parâmetro "tempo" não faz parte dos dados fornecidos no problema, assim como também não é a incógnita a ser determinada. O problema envolve forças (peso e empuxo) e deslocamento (H e X), mas não envolve a variável tempo! Assim, apliquemos os métodos de Trabalho e Energia.

A pequena "ervilha de isopor" parte do repouso ($V_A = 0$) do fundo do tanque e sobe aceleradamente até atingir a superfície da água sob ação das forças peso P e empuxo E, com E > P, visto que o isopor é menos denso que a água.

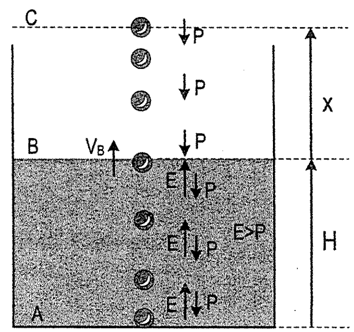


Figura 14

Após a bola atingir a superfície da água (nível B), o empuxo da água deixa de atuar (e o empuxo atmosférico pode ser desprezado), ficando a mesma sob ação exclusiva da força peso P, responsável pelo retardamento da bolinha no trecho BC.

O estudante, provavelmente, ficará tentado a dividir o problema em duas etapas: primeiro determinar a velocidade V_B com que a bolinha atinge a superfície da água (trecho AB) para, em seguida, determinar a altura X atingida pela bolinha fora da água (trecho BC). Essa prática, entretanto, é absolutamente condenável ! Afinal, a grande vantagem da ferramenta Trabalho e Energia é exatamente o fato de que, com ela, não precisamos dividir os problemas em várias etapas. Assim, apliquemos Princípio do Trabalho Total no percurso que se inicia no ponto A e termina no ponto C, sem considerar pontos intermediários:

> Ratifico que os corpos estão sendo tratados como puntiformes e estamos desprezando possíveis variações de temperatura (energia interna) da água nem da bolinha motivadas por conversão de energia mecânica em energia térmica. Desprezamos também a variação contínua do empuxo quando a bola atravessa a superfície livre da água.

$$T_{total\ A\to C} = T_{peso\ A\to C} + T_{empuxo\ A\to C} = Ecin_C - Ecin_A \qquad \textbf{(eq11)}$$

$$T_{peso\ A\to C} = -F.D = -P.(H+x)$$

$$T_{empuxo\ A\to C} = T_{empuxo\ A\to B} + T_{empuxo\ B\to C} = (+E.H) + 0 = +E.H$$

Substituindo em eq11, vem:

$$T_{total\ A\to C} = T_{peso\ A\to C} + T_{empuxo\ A\to C} = Ecin_C - Ecin_A$$

Note que a bolinha parte do repouso no ponto A e pára ao atingir o ponto C, isto é, $v_A = v_C = 0$.

$$-P.(H+x) + E.H = \frac{m.v_C^2}{2} - \frac{m.v_A^2}{2}$$

$$-P.(H+x) + E.H = 0 - 0. \quad \text{Isolando x, vem} \quad x = \frac{(E-P).H}{P} \qquad \textbf{(eq12)}$$

O empuxo E, suposto constante durante todo o percurso AB, pode ser determinado em função da densidade do líquido ($d_{liq} = \rho$) e do volume imerso da bolinha ($V_{submerso} = V$) pelo princípio de Arquimedes:

$$E = d_{liq}.V_{sub}.g = \rho.V.g \qquad \textbf{(eq13)}$$

O peso P da bolinha pode ser determinado em função da densidade do isopor e do volume V da bolinha:

$$P = m.g = (d.V).g \qquad \textbf{(eq14)}$$

Substituindo **eq13** e **eq14** em **eq12**, vem:

$$x = \frac{(E-P).H}{P} = \left(\frac{E}{P}-1\right).H = \left(\frac{\rho.V.g}{d.V.g}-1\right).H \Rightarrow x = \left(\frac{\rho}{d}-1\right).H$$

Assim, determinamos a altura x atingida pela bolinha acima da superfície da água. Ratificamos a importância do estudante NUNCA dividir a resolução do problema em várias etapas, atribuindo vários pontos intermediários entre os pontos inicial e final.

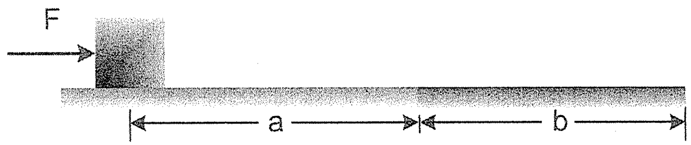
Na resolução desse Exemplo Resolvido 2, por exemplo, o estudante, provavelmente, é tentado a dividir o equacionamento do problema em duas etapas: primeiro determinar a velocidade V_B com que a bolinha atinge a superfície da água (trecho AB) para, em seguida, determinar a altura X atingida pela bolinha fora da água (trecho BC). Essa prática, entretanto, é absolutamente condenável ! Afinal, a grande vantagem da ferramenta Trabalho e Energia é exatamente o fato de que, com ela, não precisamos dividir os problemas em várias etapas.

Na resolução de problemas de Dinâmica usando Trabalho e Energia, NUNCA devemos arbitrar pontos intermediários entre os pontos inicial e final. A grande vantagem dessa fantástica ferramenta da Mecânica consiste no fato de ela permitir que SEMPRE se equacione o problema em única etapa, sem pontos intermediários, levando a uma resolução elegante e concisa do ponto de vista do processamento algébrico.

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

Questão 01 -

O bloco da figura parte do repouso, empurrado por uma força F de intensidade constante que atua durante todo o percurso. O trecho **a** é liso, e o trecho **b** é áspero. O prof. Renato Brito pede para você determinar a intensidade da força de atrito que agiu sobre o bloco no trecho **b**, sabendo que o bloco pára ao final do percurso.

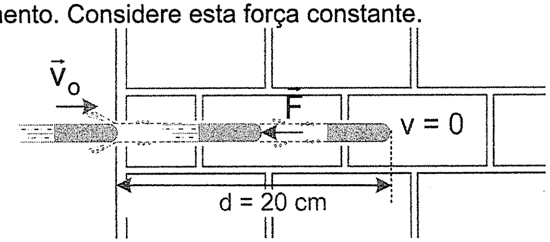


a) $F \cdot \left(1+\frac{a}{b}\right)$ b) $F \cdot \left(1+\frac{b}{a}\right)$ c) $F\frac{a}{b}$ d) $F\frac{b}{a}$ e) $F\frac{2b}{a}$

Questão 02

Um projétil de massa m = 100 g atinge perpendicularmente uma parede vertical com velocidade escalar 60 m/s. O projétil penetra na parede e desloca-se 20 cm até parar. Determine a intensidade da força que a parede exerce no projétil e que se opõe ao movimento. Considere esta força constante.

a) 100 N
b) 400 N
c) 600 N
d) 700 N
e) 900 N



Questão 03 - (ITA 95)

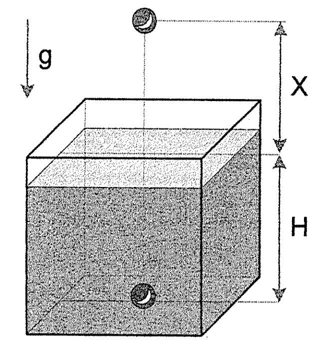
Um projétil de massa m = 5 g atinge perpendicularmente uma parede com velocidade V = 400 m/s e penetra 10 cm na direção do movimento. Se a mesma bala fosse disparada agora com uma velocidade de 600 m/s, supondo a mesma desaceleração constante da primeira vez, a penetração seria de:

a) 15 cm
b) 225 cm
c) 22,5 cm
d) 250 cm
e) 45 cm

Questão 04 (UECE)

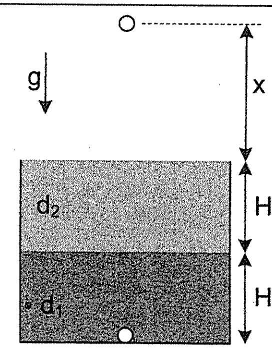
Uma pequena esfera de isopor, de densidade d = 0,2 g/cm³, é abandonada no fundo de um tanque contendo água até uma altura H = 10 cm. Se a gravidade local vale g = 10 m/s² e a densidade da água vale ρ = 1 g/cm³, determine a altura máxima x atingida pela bola, medida a partir da superfície da água. Despreze quaisquer forças de resistência (atrito, viscosidade etc.)

a) 10 cm
b) 20 cm
c) 30 cm
d) 40 cm
e) 50 cm



Questão 05 -

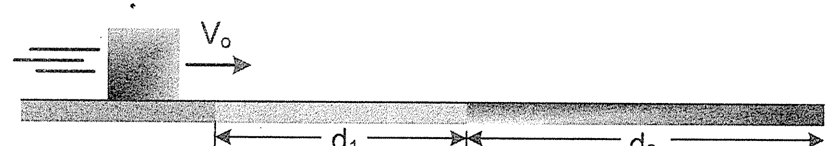
A figura mostra dois líquidos imiscíveis 1 e 2, de densidades d_1 e d_2, ocupando alturas respectivamente iguais a H_1 e H_2, no interior de um recipiente cilíndrico reto, num local onde a gravidade vale g. Uma bolinha de dimensões desprezíveis e densidade d_3, com $d_3 < d_2 < d_1$, é abandonada do repouso a partir do fundo desse recipiente. Desprezando quaisquer atritos, o prof. Renato Brito pede que você determine a altura máxima x atingida pela bolinha, medida a partir da superfície livre do líquido 2.



Questão 06 -

Um bloco de madeira foi lançado sobre um solo horizontal com velocidade $\mathbf{v_o}$ e atravessa dois trechos consecutivos de mármore e granito, de comprimentos $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$ e coeficientes de atrito μ_1 e μ_2. Sabendo que a gravidade local vale **g** e que o bloco pára ao final do percurso, determine $\mathbf{v_o}$.

Dados: d_1 = 1 m, d_2 = 2 m, μ_1 = 0,3, μ_2 = 0,25, g = 10 m/s²



Questão 07 -

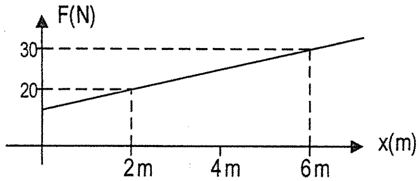
Uma partícula de massa m, presa por um fio ao centro de uma mesa horizontal áspera, descreve uma trajetória circular de raio R. Sabendo que a gravidade local vale g e que a velocidade inicial v_o da partícula cai à metade, após três voltas completas, determine:

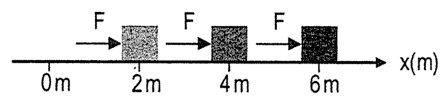
a) o coeficiente de atrito cinético entre a partícula e a mesa;

b) quantas voltas a partícula dará até parar, ao todo.

1.7 TRABALHO REALIZADO POR FORÇA DE INTENSIDADE VARIÁVEL

Uma caixa se move ao longo de um eixo x sujeita a uma força horizontal cuja intensidade varia com a abscissa x de acordo com o gráfico a seguir:





Como se calcula o trabalho realizado por essa força de intensidade variável, no deslocamento da caixa desde x = 2 m até x = 6 m ? Tentar aplica a expressão T = F.D será impossível, visto que a força F não pára de mudar de valor durante esse deslocamento. Qual valor da força você substituiria na expressão T = F.D ? Assim, vemos que a expressão $T = F.D.\cos\alpha$ se restringe ao cálculo do trabalho realizado por uma força que seja constante em direção, sentido e valor.

Uma forma alternativa de calcular o trabalho realizado pela força, independentemente de ela ter módulo constante ou variável, é determinar a área sob o gráfico F x D, entre as duas posições desejadas, como indica a figura a seguir :

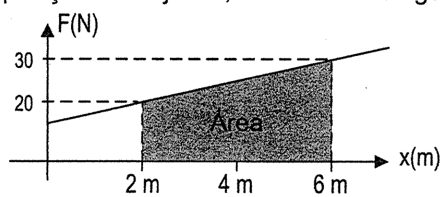


Figura 15

A área do trapézio em destaque vale 100 unidades de área (N.m) e, portanto, 100 J é o valor do trabalho realizado pela força F no deslocamento do móvel entre as posições x = 2m e x = 6 m.

Propriedade 3: a área sob a curva, no gráfico da intensidade da força F em função do deslocamento D, é numericamente igual ao módulo do trabalho realizado pela força F durante o referido deslocamento, admitindo que a força e o deslocamento ocorram numa mesma direção. Caso contrário, é preciso tomar apenas a componente da força na direção do movimento.

Note que apesar de haver várias maneiras corretas de se calcular o trabalho realizado por uma força, o seu significado físico é sempre o mesmo que aprendemos anteriormente: ele ainda representa o ganho (ou perda) de energia cinética que a força propicia ao móvel durante o deslocamento.

Exemplo Resolvido 3: Uma partícula de massa M = 2 kg se move ao longo do eixo cartesiano x. O módulo da força resultante horizontal que atua sobre a partícula, em newtons, é dado por F = 12 – 4x, onde x é a sua abscissa em metros. Se a partícula estava em repouso na posição x = 0, determine:

a) a velocidade máxima atingida pela caixa;

b) a velocidade da caixa ao passar pela posição x = 4 m.

Solução:

Vemos que a força varia linearmente com a abscissa x da caixa. A tabela abaixo, obtida atribuindo-se alguns valores a x, mostra os valores correspondentes da força F durante o deslocamento da caixa:

F (N)	+12 N	+8 N	+4 N	0 N	– 4 N	– 8 N	– 12 N
X (m)	0 m	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m

Vemos que, nesse contexto, está sendo dado um tratamento escalar para a grandeza Força, atribuindo-lhe um sinal algébrico positivo quando ela aponta (F→) a favor do eixo x, e um sinal algébrico negativo quando ela aponta (F←) no sentido contrário desse eixo.

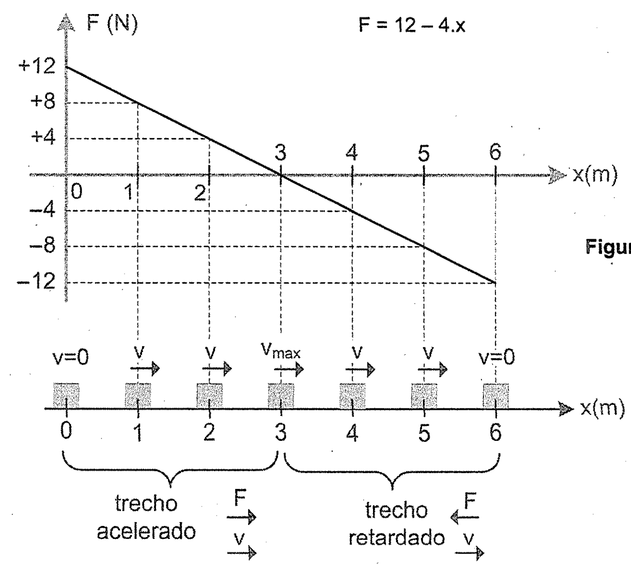


Figura 16

A Figura 16 mostra o movimento da caixa, partindo do repouso (v=0) em x = 0 e se movendo a favor do eixo x até atingir o ponto x = 6 m. Observando o sinal algébrico (+/–) da força F, vemos que ela (F→) aponta a favor da velocidade v→ da caixa em todo o trecho $0 \le x < 3$ m, fazendo com que seu movimento seja acelerado nessa etapa (Figura 16), em outras palavras, a velocidade da caixa aumenta nesse trecho atingindo o valor máximo em x = 3 m. A partir dessa posição, o movimento passa a ser retardado (F←, v→), a velocidade diminui até a caixa atingir a posição x = 6 m, quando ela pára (v=0) e inverte o sentido do movimento. A caixa executará um eterno movimento oscilatório (MHS) entre as posições extremas x = 0 e x = 6 m.

a) Para determinar a velocidade máxima da caixa, isto é, a sua velocidade em x = 3 m, aplicaremos o princípio do Trabalho Total no trecho $0 \le x \le 3$ m. Note que, apesar das forças normal N↑ e peso P↓ também agirem na caixa em todo o trajeto, elas não realizam trabalho por serem perpendiculares à trajetória horizontal:

$$T_{total} = T_P + T_N + T_F = Ecin_F - Ecin_i$$

Na expressão acima, a posição inicial refere-se a x = 0 m, enquanto a posição final refere-se a x = 3 m. Todos os trabalhos serão calculados da posição inicial até a posição final. Como a força F tem módulo variável, seu trabalho será calculado pela área sob o gráfico (figura 17):

$$T_F = +\left(\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}\right) = +\left(\frac{3 \times 12}{2}\right) = +18 \text{ J}$$

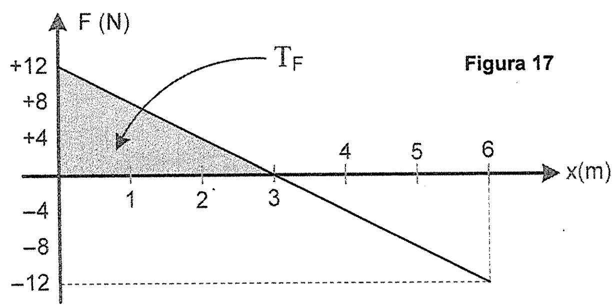


Figura 17

Aplicando o Princípio do Trabalho total, vem:

$$T_{total} = T_P + T_N + T_F = Ecin_F - Ecin_i$$

$$T_{total} = 0 + 0 + 18 = \frac{2.(v_F)^2}{2} - 0$$

$$v_F = \sqrt{18} \Rightarrow v_F = 3.\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Assim, a velocidade máxima atingida pela caixa, ao passar pela posição x = 3 m, vale $v_{max} = 3.\sqrt{2}$ m/s

b) Para calcularmos a velocidade da caixa em x = 4 m, aplicaremos o princípio do Trabalho Total no trecho $0 \le x \le 4$ m :

$$T_{total} = T_P + T_N + T_F = Ecin_F - Ecin_i$$

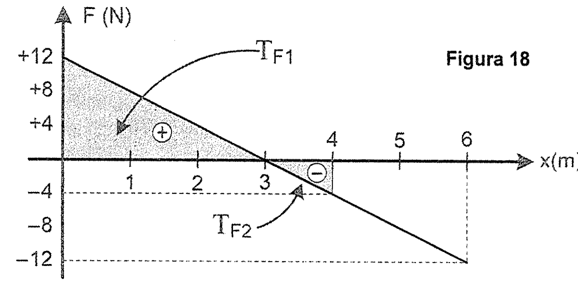


Figura 18

Na expressão acima, a posição inicial refere-se a x = 0 m, enquanto a posição final refere-se a x = 4 m. Todos os trabalhos serão calculados da posição inicial até a posição final. Como a força F tem módulo variável, seu trabalho será calculado pela área sob o gráfico. Note que a força F realiza trabalho positivo no trecho $0 \le x \le 3$ m, ao passo que, no trecho $3 \le x \le 4$ m, ela realiza trabalho negativo (figura 18). O trabalho da força F no percurso total ($0 \le x \le 4$ m) será a soma algébrica dos trabalhos em cada um desses trechos:

O trabalho realizado pela força F no trecho $0 \le x \le 3$ m (veja figura 18) vale:

$$T_{F1} = +\left(\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}\right) = +\left(\frac{3 \times 12}{2}\right) = +18 \text{ J}$$

O trabalho realizado pela força F no trecho $3 \le x \le 4$ m (veja figura 18) vale:

$$T_{F2} = -\left(\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}\right) = -\left(\frac{1 \times 4}{2}\right) = -2 \text{ J}$$

Assim, o trabalho realizado pela força F no trecho $0 \le x \le 4$ m vale:

$$T_F = T_{F1} + T_{F2} = +18 + (-2) \Rightarrow T_F = +16 \text{ J}$$

Retomando o nosso objetivo, aplicaremos o princípio do Trabalho Total no trecho $0 \le x \le 4$ m para determinar a velocidade da caixa em x = 4 m:

$$T_{total} = T_P + T_N + T_F = Ecin_F - Ecin_i$$

$$T_{total} = 0 + 0 + 16 = \frac{2.(v_F)^2}{2} - 0 \Rightarrow v_F = 4 \text{ m/s}$$

Assim, a velocidade da caixa, ao passar pela posição x = 4 m, vale v = 4 m/s. Vale ressaltar que o movimento dessa caixa não é uniformemente variado

(MUV), visto que sua aceleração é variável durante o percurso. Portanto, não há como se aplicar a equação de Torricelli ($V^2 = V_o^2 + 2.a.\Delta s$) para a resolução desse problema.

1.8 CÁLCULO DO TRABALHO REALIZADO PELA FORÇA ELÁSTICA

Uma interessante aplicação da Propriedade 3 (página 20) consiste no cálculo do trabalho realizado pela força elástica Fel = k.x que, usualmente, tem intensidade variável durante a realização do trabalho.

A Figura 19 mostra uma esfera que rola ao longo de um plano horizontal liso e encontra uma mola inicialmente não deformada (x = 0), passando a sofrer desta a ação de uma força elástica que irá se opor ao seu movimento, diminuindo a sua energia cinética, realizando um trabalho negativo. O diagrama da Figura 20 mostra as força que atuam sobre a esfera num deslocamento genérico A→B durante o qual a força elástica aumenta de intensidade desde $Fel_A = k.x_A$ até $Fel_B = k.x_B$ (com $x_B > x_A$) devido ao aumento da deformação x da mola.

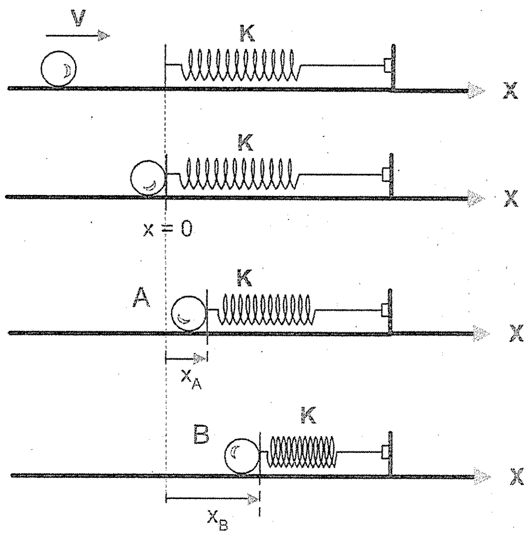


Figura 19 – a força elástica aumenta de intensidade desde $Fel_A = k.x_A$ até $Fel_B = k.x_B$ (com $x_B > x_A$) devido ao aumento da deformação x da mola.

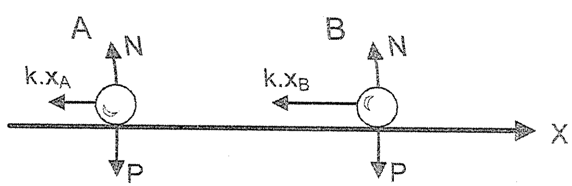


Figura 20 – Diagrama das forças que agem sobre a esfera no trajeto AB

Como a intensidade da força elástica Fel = k.x varia, durante o movimento d esfera (x aumenta), a expressão T = F.D não se aplica ao cálculo desse trabalho. Nesse caso, fazendo uso da propriedade 3, o trabalho realizado pel força elástica será determinado através do cálculo da área sob o gráfico F x X mostrado na Figura 21.

O módulo do trabalho realizado pela força elástica Fel que atua na esfera quando a mesma se desloca da posição A até a posição B (veja Figuras 19 e 20), numericamente igual à área hachurada no gráfico da Figura 21. Matematicamente temos:

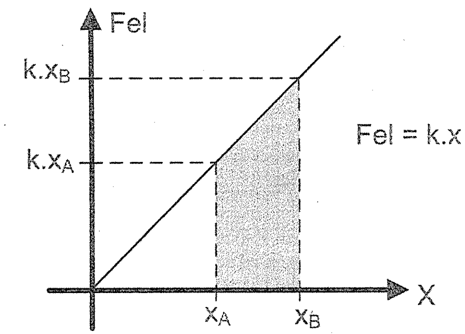


Figura 21 – Gráfico do módulo da força elástica Fel em função da deformação x da mola

$$|T_{FEL\ A\text{-}B}| = \text{área } \Delta \text{ maior} - \text{área } \Delta \text{ menor}$$

$$|T_{FEL\ A\text{-}B}| = \frac{x_B.(k.x_B)}{2} - \frac{x_A.(k.x_A)}{2} = \frac{k.x_B^2}{2} - \frac{k.x_A^2}{2}$$

$$|T_{FEL\ A\text{-}B}| = \left(\frac{k.x_B^2}{2} - \frac{k.x_A^2}{2}\right)$$

Tendo determinado o módulo do trabalho realizado pela Fel no trecho A→ acrescentaremos a ele o sinal negativo "–", já que o trabalho realizado pe força elástica é negativo nesse trajeto (a força se opõe ao movimento da esfera Assim:

$$T_{FEL\ A\to B} = (-1).\left(\frac{k.x_B^2}{2} - \frac{k.x_A^2}{2}\right) = \frac{k.x_A^2}{2} - \frac{k.x_B^2}{2}$$

$$\boxed{T_{FEL\ A\to B} = \frac{k.x_A^2}{2} - \frac{k.x_B^2}{2}} \qquad \textbf{(eq15)}$$

Pronto ! A expressão eq15 acima calcula o trabalho realizado pela força elástica no trecho A→B da figura 19. O termo $k.x^2 / 2$ que se repete, na relação eq15, é interpretado como uma energia associada à deformação x da mola, **uma energia que fica armazenada na mola** sempre que ela está comprimida (x<0) ou elongada (x>0), que denominaremos energia potencial elástica:

$$Epot = \frac{k.x^2}{2} \qquad \textbf{(eq16)}$$

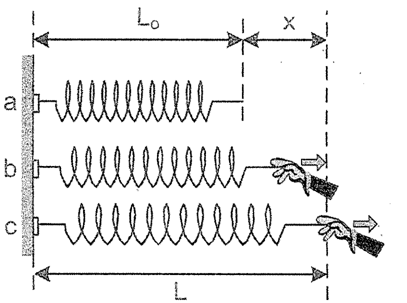


Figura 22 – (a) a mola encontra-se em seu comprimento natural L_o, isto é, relaxada; **(c)** a mola encontra-se elongada, apresentando uma deformação $x = | L - L_o |$

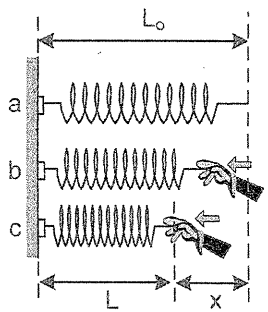


Figura 23 – (a) a mola encontra-se em seu comprimento natural L_o, isto é, relaxada; **(c)** a mola encontra-se comprimida, com uma deformação $x = | L - L_o |$

Retornando às figuras 19 e 20, aplicaremos o Princípio do Trabalho Total (teorema da energia cinética) nesse trecho A→B :

$$T_{total\ A \to B} = T_{Peso\ A \to B} + T_{N\ A \to B} + T_{Felást\ A \to B} = Ecin_B - Ecin_A$$

No trecho A→B da Figura 20, o trabalho do peso P, assim como o da normal N, é nulo. O trabalho da força elástica é dado pela relação eq15. Substituindo, vem:

$$T_{total\ A \to B} = 0 + 0 + \left(\frac{k.x_A^2}{2} - \frac{k.x_B^2}{2} \right) = Ecin_B - Ecin_A$$

$$T_{total\ A \to B} = 0 + 0 + (Epot_A - Epot_B) = Ecin_B - Ecin_A$$

$$Epot_A + Ecin_A = Ecin_B + Epot_B \qquad \textbf{(eq17)}$$

Denominando "Energia mecânica" a soma da energia potencial armazenada na mola com a energia cinética da esfera, a relação eq17 pode ser reescrita como :

$$Emec_A = Emec_B \qquad \textbf{(eq18)}$$

Assim, durante o episódio mostrado nas Figuras 19 e 20, vimos que a soma "Epot + Ecin" permaneceu constante. Esse fato de deve ao comportamento da força elástica que, ao realizar trabalho, meramente converteu energia cinética em energia potencial elástica, permanecendo constante a energia mecânica do

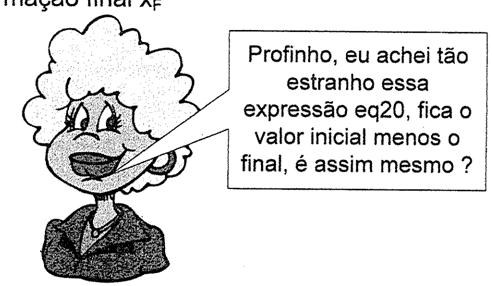
sistema. Voltaremos a tratar novamente da conservação da energia mecânica adiante.

Generalizado o resultado obtido na relação eq15, sempre que uma mola evolui entre duas posições inicial e final, com deformações respectivamente iguais a x_i e x_F, o trabalho realizado pela força elástica, durante esse deslocamento, é dado pelas expressões eq19 ou eq 20 :

$$\boxed{T_{FEL\ i \to F} = \frac{k.(x_i)^2}{2} - \frac{k.(x_F)^2}{2}} \qquad \textbf{(eq19)}$$

$$\boxed{T_{FEL\ i \to F} = Epot\ i - Epot_F} \qquad \textbf{(eq20)}$$

As expressões acima são a forma correta de se calcular o trabalho realizado pela força elástica durante um deslocamento. O sinal algébrico do trabalho já é determinado automaticamente ao se efetuar o cálculo da expressão eq15, não sendo necessário ajustes adicionais. Logicamente, o trabalho da força elástica pode ser positivo ou negativo, conforme a deformação inicial xi seja maior ou menor que a deformação final x_F



É verdade, Claudete. Apesar de parecer estranho, está tudo correto. Sempre que desejarmos calcular o trabalho realizado por uma força que possua uma energia potencial associada a si, podemos fazê-lo utilizando a relação eq20.

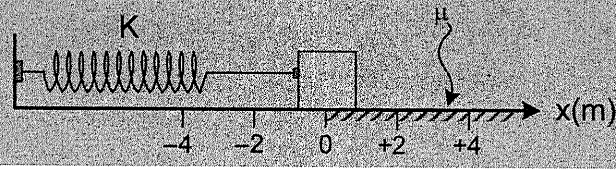
Essa classe de forças que possuem uma energia potencial associada são chamadas forças conservativas. A força elástica Fel = k.x, conforme vimos, possui a energia potencial $Epot = k.x^2 / 2$ associada a si. Essa expressão $k.x^2 / 2$ apareceu naturalmente durante o cálculo do trabalho realizado pela força elástica (eq15) com base na Figura 21. Assim, a força elástica é dita conservativa.

É recomendado ao estudante parar a leitura nesse ponto e retornar às Figuras 19, 20 e 21 para rever como chegamos à relação eq15 (que levou às relações eq19 e eq20). Adiante trataremos do conceito de forças conservativas e energia potencial mais detalhadamente.

Exemplo Resolvido 4: A figura mostra uma mola de constante elástica k = 10 N/m conectada a uma caixa de massa M = 2 kg inicialmente localizada na abscissa x = 0, posição esta em que a mola encontra-se relaxada. Em seguida, a caixa é levada até a abscissa x = –4 m, de onde é abandonada do repouso. Sabendo que o solo horizontal é liso para x < 0, e tem coeficiente de atrito μ = 0,6 para x ≥ 0, determine:

a) a velocidade da caixa ao passar pela abscissa x = +2 m;

b) a abscissa x em que a caixa vai parar pela primeira vez.



Solução:

Durante o movimento dessa caixa, a força resultante que age sobre ela será a resultante entre a força de atrito Fat e a força elástica Fel = k.|x|, sendo que esta última tem módulo variável visto que a mola apresenta deformação x variável. Por este motivo, a força resultante agindo sobre a caixa, bem como a sua aceleração, será variável, de forma que o movimento da caixa não será MUV, o que nos impede de aplicar a equação de Torricelli ($V^2 = V_o^2 + 2.a.\Delta s$)

a) Para determinar a velocidade da caixa, quando parte do repouso da abscissa xi = –4 m e passa pela abscissa x_F = +2 m, faremos uso do Princípio do Trabalho Total:

$$T_{total} = T_{Peso} + T_{Normal} + T_{Felástica} + T_{Fat} = Ecin_F - Ecin_i$$

Na expressão acima, a posição inicial refere-se a xi = –4 m, enquanto a posição final refere-se a x_F = +2 m. Todos os trabalhos serão calculados da posição inicial até a posição final. A força peso P↓ e a normal N↑ não realizarão trabalho por serem perpendiculares à trajetória horizontal.

Determinando o trabalho da força elástica pela expressão eq15, vem:

$$T_{FEL\ i\to F} = \frac{K.(x_i)^2}{2} - \frac{K.(x_F)^2}{2} = \frac{10.(-4)^2}{2} - \frac{10.(2)^2}{2} = 80 - 20 = 60\ J$$

Em todo o trecho –4 m ≤ x ≤ +2 m, a força de atrito só realiza trabalho no trecho 0 ≤ x ≤ +2 m. Sendo a força de atrito constante nesse trecho, seu trabalho pode ser calculado pela expressão eq3:

$$T_{Fat} = -Fat.d = -\mu.N.d = -\mu.M.g.d = -(0,6).(2).\ 10.\ (2-0) = -24\ J$$

Assim, temos:

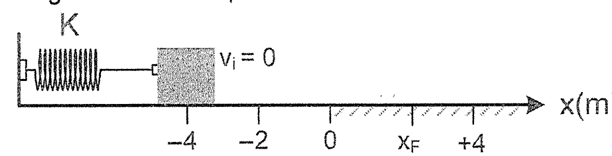
$$T_{total} = T_{Peso} + T_{Normal} + T_{Felástica} + T_{Fat} = Ecin_F - Ecin_i$$

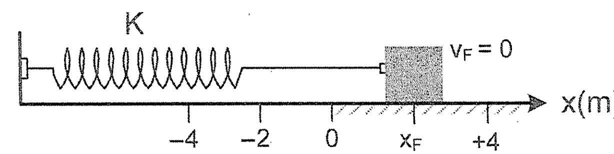
$$T_{total} = 0 + 0 + 60 + (-24) = \frac{2.(v_F)^2}{2} - 0$$

$$v_F = 6\ m/s$$

Assim, determinamos a velocidade da caixa, ao passar pela abscissa x = +2 m.

b) Seja x_F a abscissa da caixa quando ela parar (v_F = 0) pela primeira vez. A caixa deverá partir do repouso (vi = 0) da abscissa inicial xi = –4 m e parar (v_F = 0) ao atingir a abscissa x_F > 0 a ser determinada.





Novamente, faremos uso do Princípio do Trabalho Total, calculando o trabalho de todas as forças entre as posições inicial e final. Vale ressaltar que a força de atrito só realizará trabalho no trecho onde há atrito (entre x = 0 e x = x_F):

$$T_{FEL\ i\to F} = \frac{K.(x_i)^2}{2} - \frac{K.(x_F)^2}{2} = \frac{10.(-4)^2}{2} - \frac{10.(x_F)^2}{2} = 80 - 5.(x_F)^2$$

$$T_{Fat} = -Fat.d = -\mu.N.d = -\mu.M.g.d = -(0,6).(2).10.\ (x_F - 0) = -12.x_F$$

Aplicando o Princípio do Trabalho Total, vem:

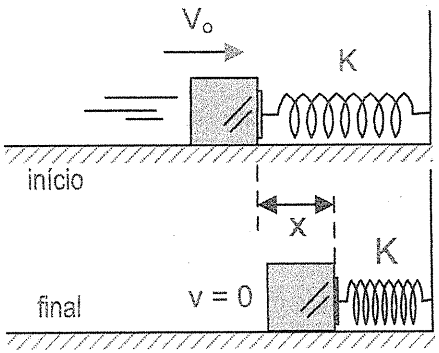
$$T_{total} = T_{Peso} + T_{Normal} + T_{Felástica} + T_{Fat} = Ecin_F - Ecin_i$$

$$T_{total} = 0 + 0 + 80 - 5.(x_F)^2 + (-12.x_F) = 0 - 0$$

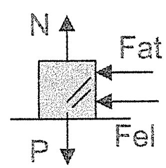
$5.(x_F)^2 + 12.x_F - 80 = 0$, resolvendo a equação do 2º grau, encontramos:

$$x_F \cong +2,98\ m$$

Exemplo Resolvido 5: Um bloco de massa m = 0,5 kg estava escorregando ao longo de um solo horizontal com atrito em movimento retardado, quando encontra uma mola fixa a uma parede e a comprime, causando uma máxima deformação x = 10 cm. Sabendo que a constante elástica da mola vale k = 160 N/m, o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o solo vale μ = 0,4 e a aceleração da gravidade vale g = 10 m/s², determine a velocidade que restava a essa caixa, no momento em que se encostou à mola.



Solução:
Durante o movimento do bloco, quatro forças agem sobre ele, conforme o diagrama de força abaixo. Durante a compressão da mola, a força elástica Fel Tem intensidade crescente, embora o atrito cinético Fat permaneça constante, donde se conclui que a força resultante $F_R \leftarrow$ agindo na caixa tem módulo crescente:



$$F_R = Fel + Fat = m.\mathbf{a}$$

A 2a lei de Newton acima nos assegura que a caixa freia com aceleração **a** ← de módulo crescente, de forma que o movimento retardado do bloco não será um MUV e a equação de Torricelli não se aplica à solução desse problema, que só é resolvido, no Ensino Médio, pelos métodos de energia.
Aplicando o Princípio do Trabalho Total, desde o instante em que a caixa toca a mola (situação inicial) até o instante em que a caixa pára (instante final), temos:

$$T_{Total} = \Sigma T_{Todos} = Ecin_{\,final} - Ecin_{\,inicial}$$

$$T_N + T_{Fat} + T_{peso} + T_{felástica} = Ecin_F - Ecin\ i$$

Note que pela relação eq19 , o trabalho realizado pela força elástica vale:

$$T_{felástica} = \left(\frac{k.x_i^2}{2} - \frac{k.x_F^2}{2}\right) = \left(0 - \frac{k.x^2}{2}\right)$$

Assim, vem:

$$T_N + T_{Fat} + T_{peso} + T_{felástica} = Ecin_{\,final} - Ecin_{\,inicial}$$

$$0 + (-\ \mu.m.g.x) + 0 + \left(0 - \frac{k.x^2}{2}\right) = 0 - \frac{m.V_o^2}{2}$$

$$-\ \mu.m.g.x = \frac{k.x^2}{2} - \frac{m.V_o^2}{2}$$

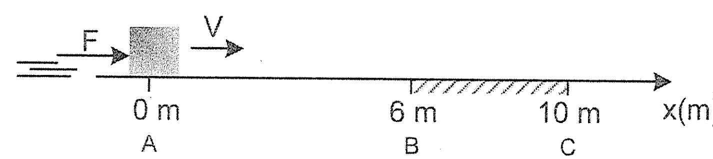
$$-\ (0{,}4).(0{,}5).(10).(0{,}1) = \left(\frac{160}{2}\right)\left(\frac{1}{10}\right)^2 - \frac{0{,}5.V_o^2}{2}$$

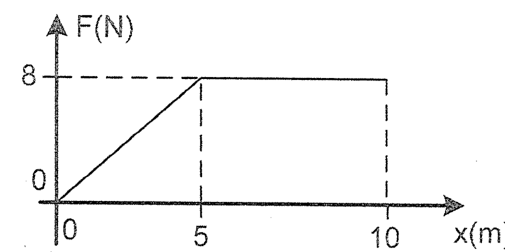
$$-0{,}2 = 0{,}8 - \frac{V_o^2}{4} \Rightarrow \boxed{V_o = 2\ m/s}$$

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

Questão 08 -

Uma caixa de massa m = 5 kg move-se sobre o eixo horizontal **x**, passa pelo ponto A com velocidade V = 4 m/s e sofre a ação de uma força F cuja intensidade é descrita pelo gráfico abaixo:





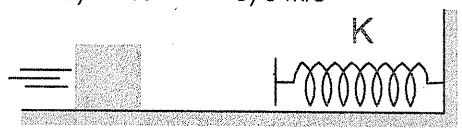
Entretanto, devido à força de atrito Fat existente apenas no trecho BC, a caixa pára ao atingir o ponto C. Determine:
a) a intensidade da força de atrito no trecho BC.
b) o coeficiente de atrito no trecho BC?

Dica: o estudante não deve resolver o problema dividindo-o em várias partes, escrevendo várias equações. O mais interessante da ferramenta Trabalho e Energia é exatamente o fato de que, com uma única equação, o problema está resolvido.

Questão 09

Um bloco de massa m = 1,0 kg desloca-se sobre um plano horizontal com atrito e comprime uma mola de constante elástica k = 10 N/m. O coeficiente de atrito vale μ = 0,3 e a aceleração da gravidade vale g = 10 m/s^2. Sabendo que a máxima compressão atingida pela mola vale 40 cm, calcule a velocidade da caixa ao tocar a mola.

a) 1 m/s b) 2 m/s c) 3 m/s d) 4 m/s e) 5 m/s



Questão 10

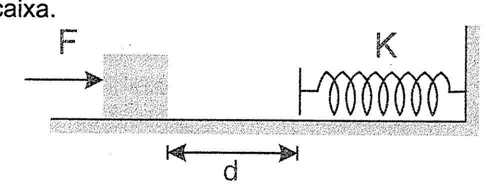
Uma partícula de massa 0,5 kg se move ao longo do eixo Qx sob ação de uma força horizontal cujo valor escalar, em newtons, é dado por F = 2 – 2x com **x** em metros. Se a partícula estava em repouso na abscissa **x** = 0, determine:

a) o tipo de movimento executado pela partícula;
b) a velocidade máxima atingida pela partícula;
c) a maior abscissa **x** que a partícula atinge.

Questão 11 -

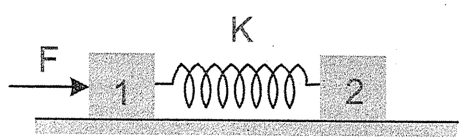
Seja uma caixa de massa m = 2 kg inicialmente em repouso a uma distância **d** de uma mola de constante elástica K = 100 N/m presa a uma parede. Uma força F = 4 N (constante) passa a agir sobre a caixa, empurrando-a em direção à mola. Sabendo que a máxima deformação x sofrida pela mola, nesse episódio, foi de 20 cm, o prof. Renato Brito pede que você determine:

a) a distância inicial d da caixa à mola;
b) a aceleração da caixa ao parar devido à ação da mola;
c) a velocidade máxima atingida pela caixa.



Questão 12 -

A figura mostra dois blocos de massas m_1 e m_2 inicialmente em repouso, conectados entre si por uma mola relaxada, de constante elástica **K**. Sabendo que a gravidade local vale **g** e que o coeficiente de atrito entre os blocos e solo vale μ, determine a intensidade da menor força horizontal constante que se deve aplicar ao bloco 1 a fim de mover o bloco 2.



1.9 PRINCÍPIO DA TRAJETÓRIA ALTERNATIVA (P.T.A)

Considere um corpo que se move por uma trajetória genérica desde um ponto A até um ponto genérico C. Definimos como **força vetorialmente constante** toda aquela que permanece constante em direção, sentido e valor durante todo um deslocamento.

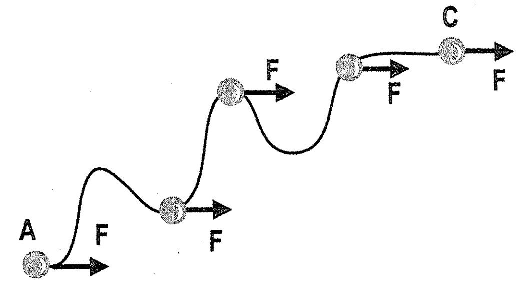


Figura 24 – Apesar de várias forças distintas estarem agindo sobre a bolinha, levando-a descrever a trajetória sinuosa AC, estamos interessados em determinar o trabalho de apenas uma dessas forças: a força vetorialmente constante F.

A fim de calcular o trabalho realizado por uma força vetorialmente constante ao longo de uma trajetória qualquer, fazemos uso do "Princípio da Trajetória Alternativa", enunciado da seguinte forma:

Princípio da Trajetória Alternativa

O trabalho realizado por uma <u>força vetorialmente constante</u>, ao longo de um trajeto A→C qualquer, independe do trajeto seguido pelo móvel entre aqueles pontos A e C. Esse trabalho terá sempre o mesmo valor, para qualquer trajetória seguida pelo móvel ao se deslocar do mesmo ponto A até o mesmo ponto C.

Com base nesse princípio, o trabalho realizado pela força F (vetorialmente constante) da Figura 24, ao longo do trajeto AC, pode ser calculado através de uma trajetória alternativa (Figura 25) mais simples que a original, desde que a nova trajetória parta da mesma origem A e chegue até a mesma extremidade C. Optamos pela trajetória alternativa ABC mostrada na Figura 25, composta por um trecho (AB) paralelo à força F e outro trecho (BC) perpendicular a essa força. Para calcular o trabalho no percurso ABC, determinaremos o seu valor em cada um dos trechos retilíneos AB e BC, e somaremos posteriormente.

$$T_{AC} = T_{ABC} = T_{AB} + T_{BC}$$

$$T_{AC} = F.D + 0$$

$$T_{AC} = F.D$$

Note que o trabalho realizado pela força F no trecho vertical BC (Figura 25) é nulo, visto que a força $\vec{F}$ é perpendicular ao deslocamento $\vec{D}$ naquele percurso.

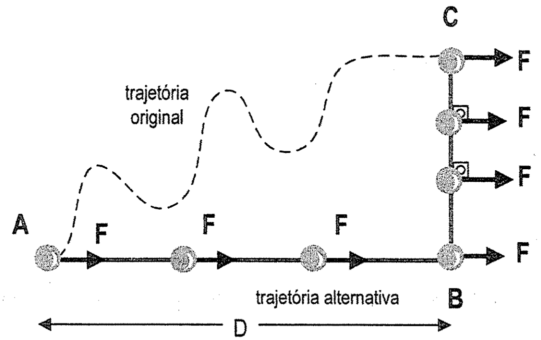


Figura 25 – Trajetória alternativa tomada para o cálculo do trabalho da força vetorialmente constante F.

É notável a grande simplificação matemática obtida quando fazemos uso do Princípio da Trajetória Alternativa no cálculo do trabalho realizado por forças vetorialmente constantes, especialmente nos casos em que a trajetória original é bastante sinuosa. Adiante, aprenderemos que esse princípio também se aplica ao trabalho realizado por forças conservativas.

A força peso (num campo gravitacional uniforme g↓) é um exemplo clássico de força vetorialmente constante. Afinal, o peso de um móvel de massa M tem intensidade constante M.g, direção sempre vertical e sentido sempre apontando para baixo ↓ durante qualquer deslocamento do móvel. Assim, é sempre possível calcular o trabalho realizado pela força peso através de uma trajetória alternativa simplificadora.

Note que, excetuando-se as "forças vetorialmente constantes" e as forças conservativas (peso, força elétrica e força elástica), o trabalho de todas as demais forças deve ser calculado ao longo da trajetória original.

Exemplo Resolvido 6: Um pêndulo constituído por uma esfera de massa M = 5 kg, presa a um fio ideal de comprimento L = 1 m, está inicialmente em repouso, quando sofre a ação de uma força F = 90 N horizontal constante causada por um forte vento naquela direção. Pede-se determinar a velocidade final com que a bola atingirá o teto. Admita $g = 10\ m/s^2$.

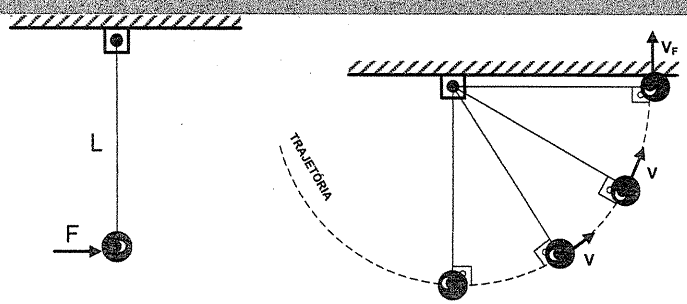


Figura 26 - Nessa questão, queremos determinar a velocidade final V_F com que a bola irá se chocar com o teto.

Solução:

Durante a subida da bola, três forças atuam sobre a mesma: peso P, tração T e a **força horizontal constante** F exercida pelo forte vento horizontal, como mostra a figura 27.

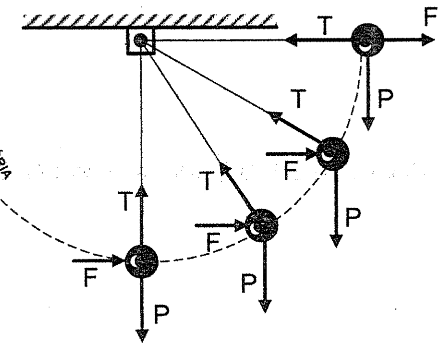


Figura 27

As forças P e F são constantes em direção, sentido e intensidade durante todo o percurso. Isso significa que o trabalho realizado por essas duas forças pode ser calculado através de uma trajetória alternativa a fim de minimizar o esforço algébrico.

Conforme vimos na Figura 10 (página 9), o trabalho realizado pela tração T é nulo durante o movimento de um pêndulo simples, visto que essa força se mantém perpendicular (α = 90°) à trajetória circular durante todo o percurso, devido à sua característica radial: $T_{Tração} = 0$

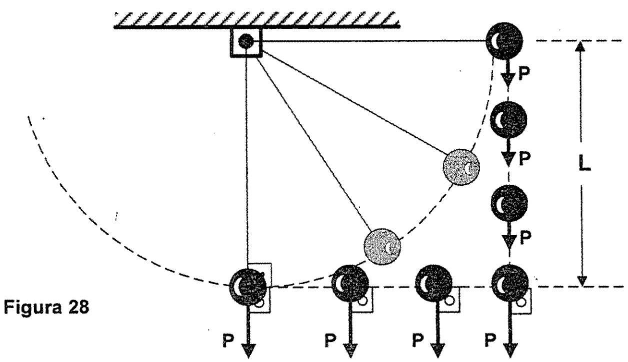


Figura 28

O trabalho do peso será calculado tomando-se (mentalmente) a trajetória alternativa horizontal + vertical ilustrada na Figura 28:

$$T_{Peso} = T_{Peso\text{-}horizontal} + T_{Peso\text{-}vertical}$$

Note que o peso é perpendicular à trajetória no trecho horizontal ($T_{Peso\text{-}horizontal} = 0$) e se opõe ao movimento da esfera, durante a subida ($T_{Peso\text{-}vertical} < 0$). Assim, vem:

$$T_{Peso} = T_{Peso\text{-}horizontal} + T_{Peso\text{-}vertical} = 0 + (-).P.D$$

Sendo D = L, temos:

$$T_{Peso} = 0 - M.g.L = -M.g.L$$

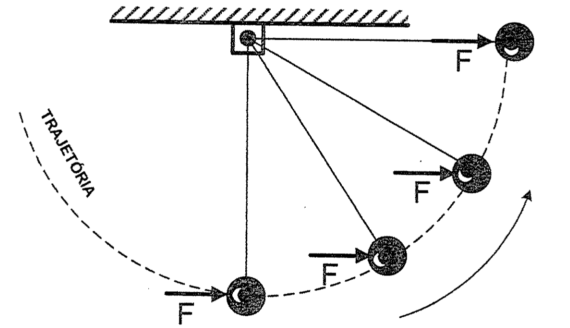


Figura 29

O trabalho da força F também será calculado tomando (mentalmente) a trajetória alternativa horizontal+vertical ilustrada na figura 30. O trabalho realizado pela força F é nulo no trecho vertical pois $\alpha = 90°$, a força é perpendicular ao deslocamento :

$$T_F = T_{F\text{-}horizontal} + T_{F\text{-}vertical} = +F.D + 0$$

Sendo D = L, vem:

$$T_F = +F.L$$

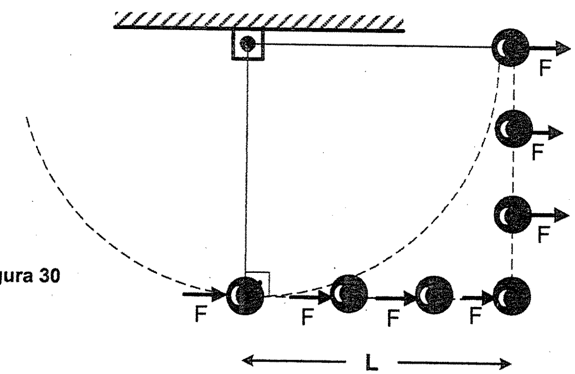


Figura 30

Agora podemos determinar o trabalho total realizado sobre a esfera, durante o seu movimento de subida:

$$T_{Total} = T_{Tração} + T_{Peso} + T_F = Ecin_F - Ecin_i$$

$$T_{Total} = 0 + (-M.g.L) + F.L = \frac{M.V^2}{2} - \frac{M.V_o^2}{2}$$

$$(-M.g.L) + F.L = \frac{M.V^2}{2} - 0$$

$$F.L - M.g.L = \frac{M.V^2}{2}$$

Substituindo os valores numéricos, vem:

$$90 \times 1 - 5 \times 10 \times 1 = \frac{5.V^2}{2} \Rightarrow \boxed{v = 4 \text{ m/s}}$$

Concluímos que a bola atinge o teto com uma velocidade v = 4 m/s . Note que o movimento executado pela esfera não se trata de um MU, nem sequer de um MUV. Assim, não há outra maneira de se resolver esse exercício (em 2º grau) sem utilizar os conceitos de trabalho e energia.

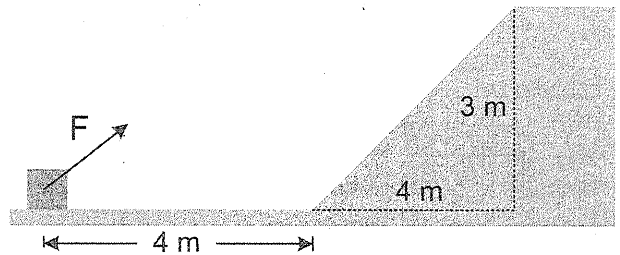
Adicionalmente, durante a subida do pêndulo, houve aumento simultâneo das energias cinética (Ecin) e potencial (Epot) do sistema, o que assegura o aumento da sua energia mecânica (Emec = Epot + Ecin).

Conforme aprenderemos adiante, esse aumento da Emec do sistema se deve ao trabalho realizado pela força F (não conservativa), e inviabiliza qualquer tentativa de resolver esse problema por conservação da energia mecânica.

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

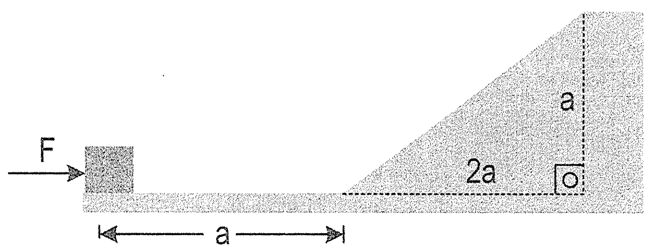
Questão 13 -

A figura mostra uma caixa de massa 1,5 kg inicialmente em repouso sobre um plano horizontal. Se uma força constante **F** = (6.**i** + 8.**j**) newtons passar a agir sobre a caixa, com que velocidade ela atingirá o andar superior ?
Adote g = 10 m/s^2.



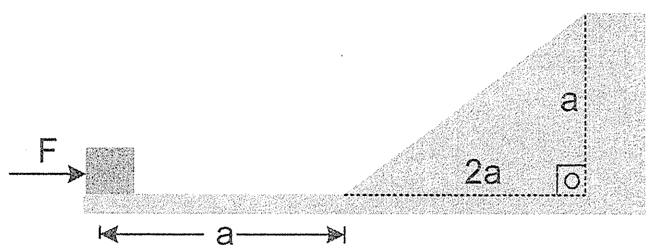
Questão 14 -

A figura mostra uma caixa de massa m em repouso num plano horizontal liso. O prof. Renato Brito pede para você determinar a intensidade da menor força F (horizontal e constante) capaz de fazer a caixa subir a rampa lisa e atingir o piso superior. Despreze atritos e admita gravidade g.



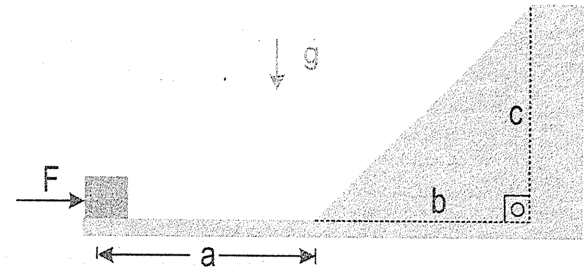
Questão 15 -

Ainda a respeito da questão anterior, se a força horizontal e constante aplicada ao bloco tivesse intensidade apenas F = m.g/4, qual a altura máxima que a caixa atingiria ladeira acima ? Despreze atritos e considere a gravidade g.



Questão 16

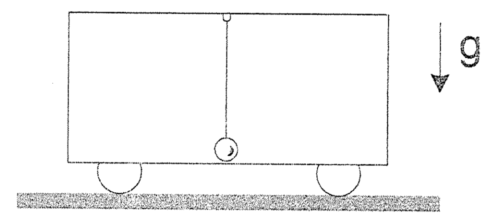
A figura mostra uma caixa de massa m em repouso sobre um plano horizontal liso. O prof. Renato Brito pede que você determine a intensidade da menor força F (horizontal e constante) capaz de fazer a caixa subir a rampa lisa e atingir o piso superior. Despreze atritos e admita gravidade g.



Questão 17 -

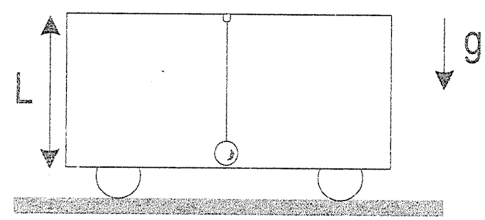
Um pêndulo composto por um fio ideal de comprimento L = 1 m, conectado a uma esfera de massa M = 5 kg, encontra-se conectado ao teto de um vagão inicialmente em repouso, num local onde g = 10 m/s^2. Bruscamente, o vagão passa a se deslocar com aceleração a = 18 m/s^2 para a esquerda. O prof Renato Brito pede para você determinar com que velocidade vertical **v** a esfera se chocará com o teto, no referencial do vagão.

a) 2 m/s b) 4 m/s c) 6 m/s d) 8 m/s e) 10 m/s



Questão 18 -

Admita que o vagão da questão anterior tenha uma altura **L** que coincide com o comprimento do pêndulo suspenso ao teto inicialmente em repouso. Se o vagão, bruscamente, passar a se deslocar para a esquerda com aceleração **a**← constante, determine a altura máxima atingida pela esfera do pêndulo em relação ao piso do vagão. Despreze atritos e admita gravidade **g**.



1.10 TRABALHO DA FORÇA DE ATRITO – PRINCÍPIO DA PROJEÇÃO

Nesta seção, veremos uma interessante propriedade do trabalho realizado pela força de atrito em rampas com inclinação qualquer, constante ou variável.

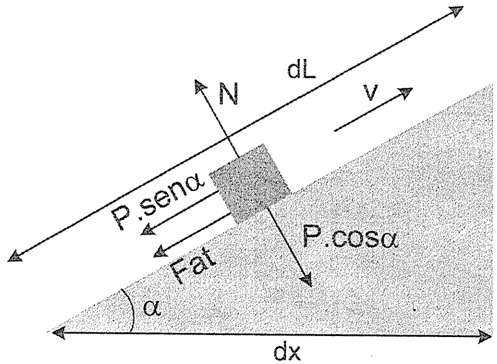


Figura 31 – caixa subindo ladeira infinitesimal de comprimento dL

Considere a caixa da Figura 31 subindo a rampa (por inércia) sob ação exclusiva das forças de contato com a rampa (normal N e atrito Fat) e da gravidade. Como a trajetória é retilínea, não há aceleração centrípeta na direção normal, o que permite escrever:

$$N = P.\cos\alpha = m.g.\cos\alpha \qquad \textbf{(eq21)}$$

A força de atrito cinético agindo sobre a caixa tem intensidade:

$$Fat = \mu.N \; = \; \mu.m.g.\cos\alpha \qquad \textbf{(eq22)}$$

O triângulo retângulo da Figura 31 permite escrever:

$$dx = dL.\cos\alpha \qquad \textbf{(eq23)}$$

O trabalho realizado pela força de atrito, durante esse deslocamento infinitesimal dL na mesma direção da força, é dado por:

$$dT_{Fat} \; = \; Fat\,.dL \; = \; \mu.m.g.\cos\alpha.\,dL \; = \; \mu.m.g.\,dL.\cos\alpha \Rightarrow$$

$$dT_{Fat} = \mu.m.g.\,dx \qquad \textbf{(eq24)}$$

A relação eq24 nos mostra que, desde seja satisfeita a relação eq21 durante o deslocamento do corpo, o trabalho realizado pela força de atrito cinético está relacionado apenas com a projeção horizontal **dx** do deslocamento da caixa, independente da inclinação α em questão.

Para generalizar, admita que a caixa novamente se desloque sob ação exclusiva das mesma forças da Figura 31 mas, desta vez, ao longo de uma linha poligonal qualquer, como mostrado na Figura 32.

O trabalho realizado pela força de atrito cinético, ao longo de uma linha poligonal genérica, é a soma dos trabalhos realizados em cada um dos segmentos que a compõem. Generalizando, com base na Figura 32, podemos escrever:

$$T_{Fat} = \Sigma dT_{Fat} = dT_{Fat\,1} + dT_{Fat\,2} + dT_{Fat\,3} + \ldots\ldots + dT_{Fat\,N}$$

$$T_{Fat} = -Fat_1.dL_1 - Fat_2.dL_2 - Fat_3.dL_3 - \ldots\ldots\ldots - Fat_N.dL_N$$

$$T_{Fat} = -\mu.m.g.dL_1.\cos\alpha_1 - \mu.m.g.dL_2.\cos\alpha_2 - \mu.m.g.dL_3.\cos\alpha_3 - \ldots\; \mu.m.g.dL_N.\cos\alpha_N$$

$$T_{Fat} = -\mu.m.g.\,(dL_1.\cos\alpha_1 + dL_2.\cos\alpha_2 + dL_3.\cos\alpha_3 + \ldots dL_N.\cos\alpha_N)$$

Considerando a relação eq23, temos:

$$T_{Fat} = -\mu.m.g.\,(dx_1 + dx_2 + dx_3 + \ldots\ldots + dx_N)$$

$$T_{Fat} = -\mu.m.g.X \qquad \textbf{(eq25)}$$

onde o termo X, na relação eq25 acima, representa o comprimento da projeção horizontal da linha poligonal. De agora em diante, chamaremos o conteúdo da relação eq25 de **Princípio da Projeção**.

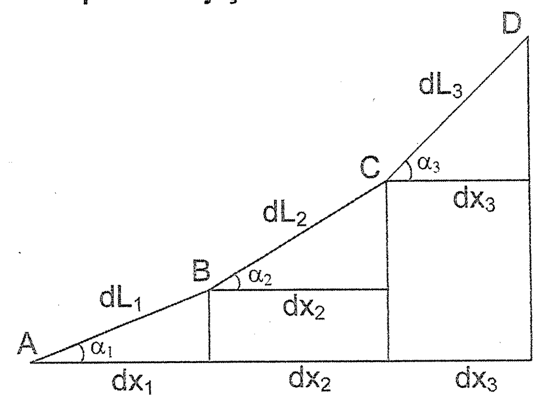


Figura 32 – caixa sofrendo um deslocamento ao longo de uma linha poligonal ABCD

Vale ressaltar que, apesar de esse princípio ser bastante interessante, simplificando o processamento algébrico em uma ampla gama de questões que requerem o cálculo do trabalho realizado pela força de atrito, **o seu uso se restringe a situações em que o deslocamento do corpo ocorre de tal forma a satisfazer a relação eq21 em todos os instantes.**

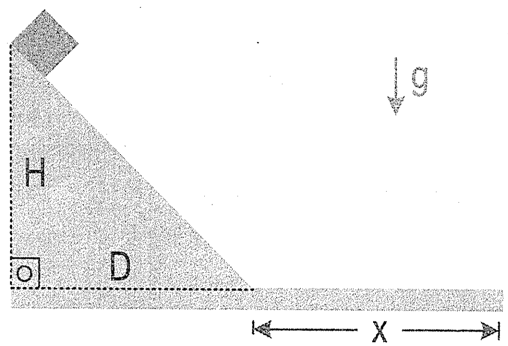
Se o corpo seguisse uma trajetória curvilínea, por exemplo, o Princípio da Projeção não seria mais válido, visto que a curvatura da trajetória obrigaria a presença de uma aceleração centrípeta actp, nos levando a reescrever a relação eq21 da seguinte forma:

$$F_{R\,ctp} \; = \; N - P.\cos\alpha \; = \; \frac{m.v^2}{R} \qquad \textbf{(eq26)}$$

Nesse caso, o Princípio da Projeção só seria aproximadamente válido caso o deslocamento fosse realizado muito lentamente de forma que, para $v \cong 0$, a relação eq6 equivaleria à relação eq1.

Os Exemplos Resolvidos 6, 7 e 8 (página 103) do volume 1 dessa obra mostram outras situações físicas em que os corpos se deslocam em trajetória retilínea, num referencial não inercial, sem satisfazer a relação eq21. Nesses casos, o Princípio da Projeção também perde sua utilidade.

Exemplo Resolvido 7: Um bloco de massa m é abandonado do alto de uma rampa de altura H a partir do repouso. Sabendo que a gravidade local vale g e que o coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície, em todo o percurso, vale μ, determine a distância x que o bloco percorre até parar.



Solução:

Durante todo o percurso, agem no bloco as forças peso P, normal N e atrito Fat. Sendo o peso uma força vetorialmente constante, seu trabalho ao longo do percurso pode ser calculado através de uma trajetória alternativa (Figura 33) mais simples:

$$\tau_{Peso} = \tau_{Peso\text{-}vertical} + \tau_{Peso\text{-}horizontal} = +P.H + 0 = +m.g.H$$

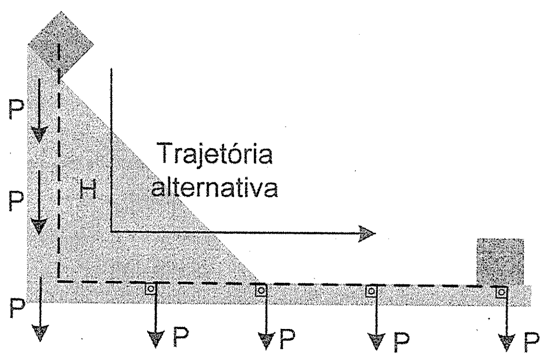


Figura 33 – Trajetória alternativa para o cálculo do trabalho realizado pela força peso

Em todo o percurso, a normal N que age no bloco (Figura 34) se mantém perpendicular à trajetória original, de forma que seu trabalho realizado ao longo da trajetória original é nulo ($\tau_N = 0$).

Vale ressaltar que o trabalho realizado pela normal N só pode ser calculado ao longo da trajetória original, não sendo correto calculá-lo ao longo de uma trajetória alternativa. A razão disso é que a normal N não é uma força vetorialmente constante (nem conservativa como veremos adiante), conforme requerido pelo Princípio da Trajetória Alternativa apresentado na página 33.

Pelo Princípio da Projeção (eq25), o trabalho realizado pela força de atrito, desde a posição inicial até a posição final (Figura 34), é dado por:

$$\tau_{Fat} = -\mu.m.g.(D + X)$$

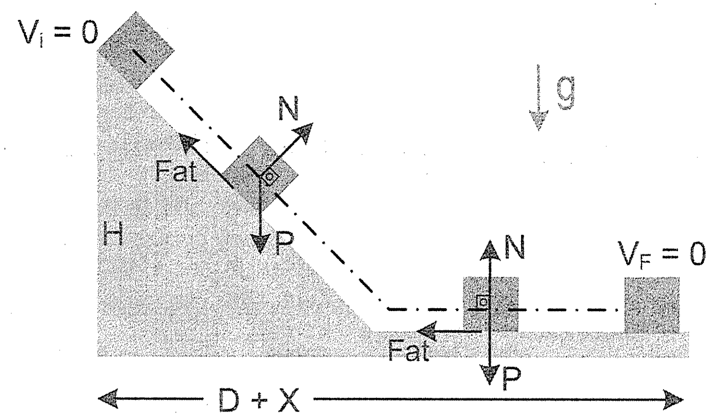


Figura 34 – Diagrama de forças

Assim, aplicando o Princípio do Trabalho Total, desde a posição inicial do bloco (topo da rampa) até a sua posição final (Figura 34), lembrando que as velocidades inicial e final do bloco são nulas, temos:

$$\tau_{total} = \Sigma\tau_{todos} = \tau_{Peso} + \tau_N + \tau_{Fat} = Ecin_F - Ecin\ i$$

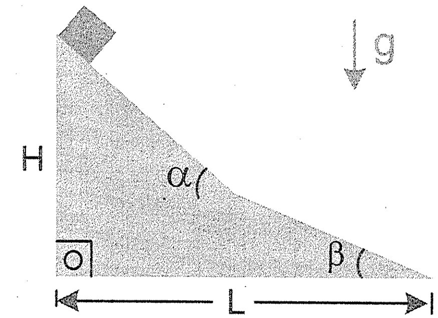
$$+m.g.H + 0 - \mu.m.g.(D + X) = 0 - 0$$

$$\boxed{X = \frac{H}{\mu} - D}$$

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

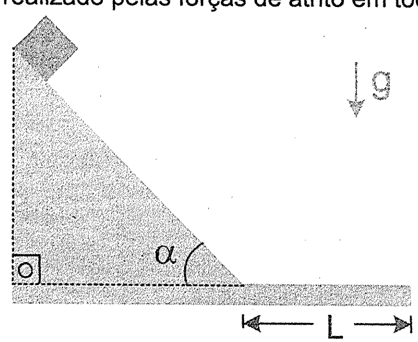
Questão 19 -

Um bloco de massa **m** é abandonado do repouso de uma altura **H** e desce ao longo de dois planos consecutivos com inclinações respectivamente α e β com a horizontal e largura **L**, num local onde a gravidade vale **g**. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético em todo o percurso vale μ, o prof. Renato Brito pede que você determine a velocidade final da caixa.

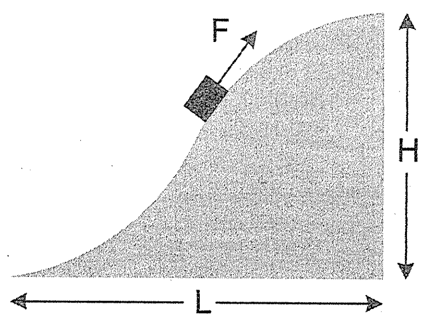


Questão 20 -

Um bloco de massa **m** é abandonado do repouso do alto de um plano inclinado que forma um ângulo α com a horizontal num local de gravidade **g**. Após atingir o solo horizontal, o corpo ainda percorre uma distância L até parar. Se o coeficiente de atrito em todo o deslocamento vale μ, determine o trabalho realizado pelas forças de atrito em todo o percurso.



Questão 20



Questão 21

Questão 21 -

Um bloco de massa **m** foi lentamente rebocado colina acima por uma força **F** que, em cada instante, é tangente à trajetória. Determine o trabalho realizado por essa força, sabendo que a altura da colina vale **H**, sua largura vale L e o coeficiente de atrito vale μ.

1.11 A ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL

Nesta seção, faremos uso do Princípio da Trajetória Alternativa do Prof. Renato Brito a fim de calcular o trabalho realizado pela força peso num trajeto AB qualquer. Ao longo da seção, os conceitos de energia potencial, forças conservativas e forças não-conservativas serão gradativamente apresentados ao leitor de forma natural e coerente.

Seja uma bola de massa m caindo em trajetória parabólica, como mostra a Figura 35, sob ação exclusiva da força peso P num campo gravitacional uniforme.

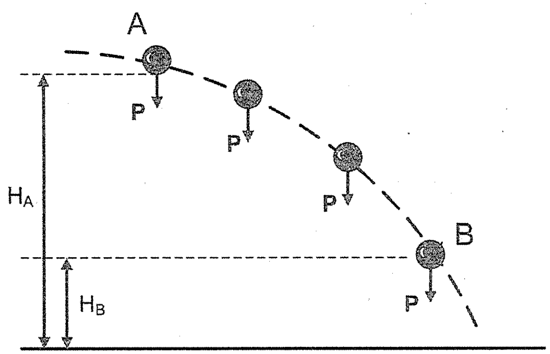


Figura 35 –bola caindo em trajetória parabólica, sob ação exclusiva da força peso P num trajeto AB.

Calcularemos, formalmente, a seguir, o trabalho realizado pela força peso no trajeto AB. Sendo o peso uma força vetorialmente constante, o trabalho realizado por ela no percurso AB pode ser calculado ao longo de uma trajetória alternativa mais simples, com a condição de que essa nova trajetória também se inicie no mesmo ponto A e termine no mesmo ponto B.

Assim, apenas para efeito de cálculo, consideraremos que a bola segue uma trajetória alternativa com um trecho vertical paralelo à força peso seguido de um trecho horizontal perpendicular a essa força (Figura 36). Note que o trabalho da força peso no trajeto horizontal será nulo. Assim:

$$T_{\text{Peso } A\to B} = T_{\text{peso vertical}} + T_{\text{peso horizontal}}$$

$$T_{\text{Peso } A\to B} = +F.D + 0$$

sendo $F = P = m.g$ e $D = H_A - H_B$ (veja Figura 35), vem:

$$T_{\text{Peso } A\to B} = m.g.(H_A - H_B) + 0$$

$$T_{\text{Peso } A\to B} = m.g.H_A - m.g.H_B \qquad \textbf{(eq27)}$$

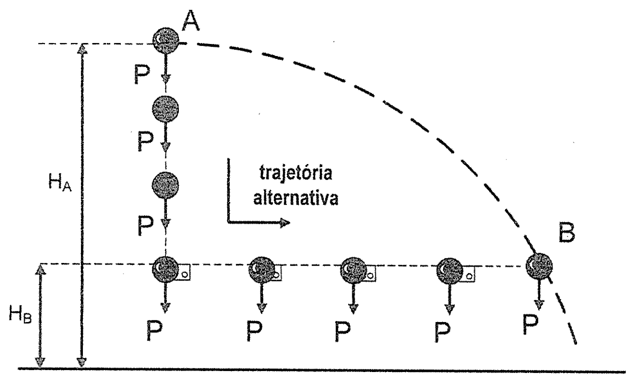


Figura 36 – Trajetória alternativa tomada para o cálculo do trabalho da força vetorialmente constante peso P.

Assim, segundo a expressão eq27, quando um corpo se desloca entre dois pontos A e B genéricos num campo gravitacional uniforme, o trabalho realizado pela força peso nesse deslocamento só depende das alturas inicial e final (H_A e H_B), sendo independente, portanto, da trajetória seguida por ele entre os pontos A e B.

Mais uma vez, a exemplo do que ocorreu nas relações eq15 e eq16 - página 25, o termo m.g.H que se repete, na relação eq27, é interpretado como uma energia associada à altura h da bola no campo gravitacional g da Terra, **energia essa que, a rigor, fica armazenada no campo gravitacional do sistema Terra-corpo,** sendo denominada Energia Potencial Gravitacional :

$$Epot\ g = m.g.H \qquad \textbf{(eq28)}$$

Voltando à Figura 35, pelo Princípio do Trabalho Total (teorema da energia cinética), o trabalho realizado pela força peso sobre a bola, no trajeto AB, é o responsável pelo aumento da energia cinética desse corpo naquele trajeto :

$$T_{Total\ A \to B} = T_{Peso\ A \to B} = Ecin_B - Ecin_A \qquad \textbf{(eq29)}$$

Usando a relação eq27, temos:

$$T_{Total\ A \to B} = m.g.H_A - m.g.H_B = Ecin_B - Ecin_A$$

$$T_{Total\ A \to B} = Epotg_A - Epotg_B = Ecin_B - Ecin_A$$

$$Epotg_A + Ecin_A = Epotg_B + Ecin_B \qquad \textbf{(eq30)}$$

Denominando "Energia mecânica" a soma da energia potencial gravitacional com a energia cinética da bola, a relação eq30 pode ser reescrita como :

$$Emec_A = Emec_B \qquad \textbf{(eq31)}$$

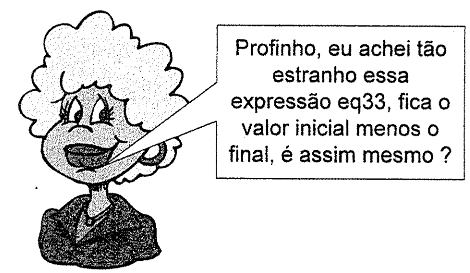
Assim, durante o movimento da bola na Figura 35, vimos que a soma "Epot + Ecin" permaneceu constante. Esse fato deve-se ao comportamento da força peso que, ao realizar trabalho, meramente converteu energia potencial gravitacional em energia cinética, permanecendo constante a energia mecânica do sistema. Voltaremos a tratar novamente da conservação da energia mecânica adiante.

Generalizado o resultado obtido na relação eq27, sempre que um corpo se desloca entre dois pontos inicial e final de um campo gravitacional uniforme g, de alturas respectivamente iguais a Hi e H_F (alturas essas logicamente medidas em relação a um mesmo nível de referência arbitrário), o trabalho realizado pela força peso nesse deslocamento só depende das alturas inicial e final, sendo dado pelas expressões eq32 e eq33:

$$\boxed{T_{Peso\ i \to F} = m.g.H_i - m.g.H_F} \qquad \textbf{(eq32)}$$

$$\boxed{T_{Peso\ i \to F} = Epot_i - Epot_F} \qquad \textbf{(eq33)}$$

As expressões eq32 e eq33 são algumas das várias formas de se calcular o trabalho realizado pela força peso durante um deslocamento. O sinal algébrico do trabalho já é determinado automaticamente ao se efetuar o cálculo dessas expressões , não sendo necessário ajustes adicionais.



É verdade, Claudete. Apesar de parecer estranho, está tudo correto. Conforme vimos na interpretação da relação eq20 página 27, sempre que desejarmos calcular o trabalho realizado por uma força que possua uma energia potencial associada a si, podemos fazê-lo utilizando as relações eq20 ou eq33.

Essa classe de forças que possuem uma energia potencial associada são chamadas forças conservativas. A força elástica Fel = k.x, conforme vimos, possui a energia potencial Epot = $k.x^2 / 2$ associada a si. Da mesma forma, a força peso P = m.g possui a energia potencial Epot = m.g.h associada a si. Essa expressão m.g.H apareceu *naturalmente* durante o cálculo do trabalho realizado pela força peso (eq27) com base na Figura 35. Assim, a força peso (a força gravitacional em geral) também é dita conservativa.

É recomendado ao estudante parar a leitura nesse ponto e retornar às Figuras 35 e 36 para rever atentamente na página 25 como chegamos à relação eq15 (que levou às relações eq28, eq32 e eq33). A partir desse ponto, trataremos formalmente do conceito de forças conservativas.

1.12 FORÇAS CONSERVATIVAS

A definição formal diz que forças conservativas são aquelas cujo trabalho realizado entre dois pontos genéricos A e B independe da trajetória seguida entre esses pontos. Em outras palavras, ao se calcular o trabalho realizado por essa força ao longo de qualquer uma das inúmeras trajetórias que começam no mesmo ponto A e terminam no mesmo ponto B (Figura 37), sempre se obtém o mesmo resultado.

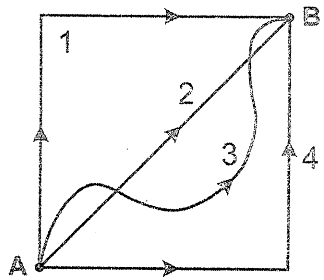


Figura 37 – o trabalho realizado por uma força conservativa no percurso A→B, através de qualquer uma das quatro trajetórias acima, é o mesmo.

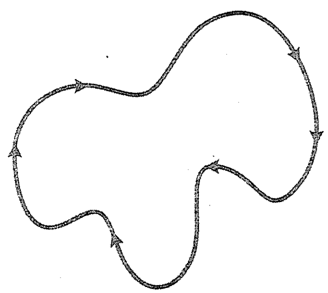


Figura 38 – o trabalho realizado por uma força conservativa através de qualquer percurso fechado é sempre nulo.

Outra definição equivalente é dizer que forças conservativas são aquelas cujo trabalho realizado em qualquer percurso fechado (Figura 38) é sempre nulo. Por percurso fechado entende-se aquele cujo ponto inicial coincide com o ponto final.

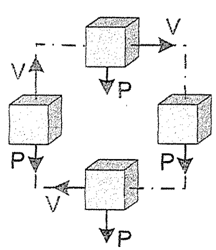


Figura 39 – o trabalho realizado pela força peso, em qualquer trajetória fechada, é sempre nulo, o que caracteriza uma força conservativa.

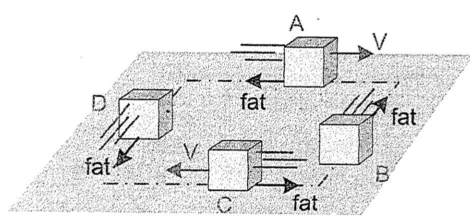


Figura 40 – o trabalho realizado pela força de atrito numa trajetória fechada não é nulo, o que caracteriza uma força não-conservativa.

Em termos práticos, forças conservativas são todas aquelas que possuem uma função potencial (energia potencial) associada a si. Essas funções potenciais são funções auxiliares que aparecem *naturalmente* durante o cálculo do trabalho realizado pela força conservativa, como ocorreu no caso da força elástica (relações eq19 e eq20) e no caso da força peso (relações eq32 e eq33).

Na natureza, apenas três e somente três forças possuem energia potencial associada e são ditas conservativas. São elas:

- A força gravitacional (peso)
- A força elétrica (não abordada nesse livro)
- A força elástica

Cada uma possui a sua respectiva energia potencial :

Forças Conservativas	Energia Potencial	Trabalho Realizado
Força peso	$Ep = m.g.H$	$T = mg.H_i - m.g.H_F$
Força elétrica	$Ep = q\,.\,v$	$T = q.V_i \;-\; q.V_F$
Força elástica	$Ep = \frac{K.x^2}{2}$	$T = \frac{Kx_i^2}{2} - \frac{Kx_F^2}{2}$

Em linhas gerais, o trabalho realizado por qualquer força conservativa pode ser calculado com o auxílio da sua própria função potencial, de acordo com a relação:

$$T_{FC} = Epot\,i - Epot_F \qquad \textbf{(eq34)}$$

$$T_{FC} = -(Epot_F - Epot_i)$$

$$T_{FC} = -\Delta Epot \qquad \textbf{(eq35)}$$

As funções potenciais são funções da posição do corpo dentro do sistema. Por esse motivo, os valores fornecidos por essas funções são interpretados fisicamente como sendo energias potenciais, isto é, energias que ficam armazenadas no sistema e que estão relacionadas a alguma coordenada espacial, como no caso da deformação x da mola, ou da altura H do corpo em relação a algum nível de referência arbitrário.

Todas as demais forças da natureza são não conservativas visto que não possuem energia potencial associada a si. Assim, são não conservativas as forças de atrito, força magnética, tração, normal, empuxo etc. Afinal, você nunca ouviu falar em energia potencial atrítica, magnética, normáltica, empuxíltica etc. ☺, ouviu ?

As forças conservativas têm duas peculiaridades que as distinguem das demais forças:

I. o trabalho realizado pelas forças conservativas, entre duas posições inicial e final, só depende das energias potenciais inicial e final (conforme eq34), independendo da trajetória seguida pelo ponto de aplicação da força entre essas posições.

II. As forças conservativas conseguem realizar trabalho sem alterar a energia mecânica do sistema.

Veremos a seguir como as forças conservativas realizam trabalho sem alterar a energia mecânica do sistema.

1.13 APRIMORANDO O CONCEITO DE TRABALHO

No começo desse capítulo, aprendemos grosso modo que quando uma força realiza um trabalho positivo de +N joules sobre um corpo, ela "dá" N joules de energia cinética para ele. Entretanto, nem sempre esse acréscimo na sua energia cinética é percebido diretamente no aumento de sua velocidade pelo fato de, geralmente, haver várias outras forças atuando simultaneamente sobre ele, cada uma com suas contribuições positivas ou negativas na energia cinética dele, de modo que, pelo princípio do trabalho total (teorema da energia cinética), só saberemos quanto foi o "lucro" de energia cinética do corpo, ao longo do deslocamento, ao somarmos os trabalhos (as contribuições de energia cinética) realizados por cada força no referido deslocamento.

Entretanto, ainda não explicamos como a força "dá" N joules de energia cinética para um corpo. De onde provém essa energia ? Afinal, sabemos dos princípios gerais de conservação de energia que, "na natureza, energia não é criada nem destruída mas, tão somente, é transformada de uma modalidade de energia em outra." Vemos então a necessidade de aprimorar o nosso conceito de trabalho.

De forma mais elegante, de agora em diante, diremos que "realizar trabalho é converter energia".

Propriedade 4: quando uma força realiza um trabalho de N joules, ela está convertendo N joules de uma modalidade de energia em N joules de outra modalidade de energia.

Quando dois corpos interagem, eles trocam entre si um par de forças tipo ação-reação. Os trabalhos realizados por essas forças estão relacionados com a energia transferida entre esses corpos durante a interação entre eles.

Na página 24, por exemplo, vimos que a força elástica (conservativa), ao realizar um trabalho negativo de –N joules, converteu N joules de energia cinética em N joules de energia potencial elástica, energia essa que fica armazenada no sistema na deformação da mola.

Fato semelhante ocorreu na página 46 em que a força peso (conservativa), ao realizar um trabalho positivo de +N joules, converteu N joules de energia potencial gravitacional em N joules de energia cinética, o que pôde ser percebido no aumento da velocidade da bola durante a sua descida.

Assim, em se tratando de forças conservativas (força peso, força elétrica ou força elástica) realizando trabalho, podemos generalizar dizendo que:

Propriedade 5

- Ao realizar um trabalho positivo de +N joules, uma força conservativa converte N joules de energia potencial em N joules de energia cinética;
- Ao realizar um trabalho negativo de –N joules, uma força conservativa converte N joules de energia cinética em N joules de energia potencial.

Esse comportamento das forças conservativas pode ser compreendido matematicamente a partir da relação eq35, que nos mostra que o trabalho realizado por uma força conservativa corresponde a menos a variação da energia potencial associada a ela ($-\Delta Epot$). Entretanto, pelo teorema da energia cinética, esse trabalho também corresponde à sua contribuição de energia cinética $\Delta Ecin$ para o movimento do corpo. Assim:

$$T_{FC} = -\Delta Epot = \Delta Ecin \qquad \textbf{(eq36)}$$

A expressão acima nos mostra que o trabalho realizado por uma força conservativa corresponde a variações iguais de energia potencial e energia cinética em módulo, porém, com sinais opostos, ou seja, quando uma dessas energias aumenta, a outra diminui na mesma quantidade.

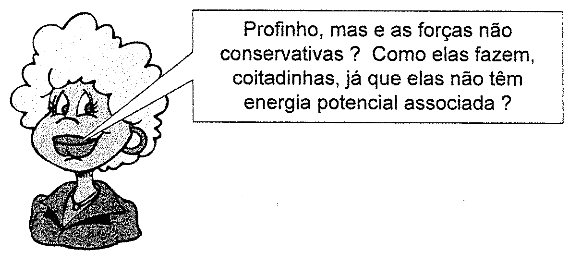
De fato, o que acontece, quando uma força conservativa realiza trabalho, é uma mera conversão de uma dessas modalidades de energia na outra, de tal forma que a soma delas "Epot + Ecin" não é alterada pelo trabalho realizado por uma força conservativa.

Em termos matemáticos, pode-se escrever :

$$T_{FC} = -\Delta Epot = \Delta Ecin \;\Rightarrow\; \Delta Epot + \Delta Ecin = 0 \;\Rightarrow\; \Delta(Epot + Ecin) = 0$$
$$\Delta Emec = 0 \;\Rightarrow\; Emec_F = Emec_i$$

Propriedade 6: Forças conservativas realizam trabalho sem alterar a energia mecânica do sistema (Emec = Epot + Ecin). Se a energia mecânica de um sistema sofre alguma variação durante um processo, ela decorre do trabalho realizado pelas forças não-conservativas.

Assim, ao realizar trabalho, a força conservativa compensa suas contribuições de energia cinética armazenando mais ou menos energia potencial no sistema, não contribuindo para a alteração da energia mecânica do sistema. Cada força conservativa tira proveito da sua própria energia potencial para isso: a força gravitacional se utiliza da sua energia potencial gravitacional, a força elétrica se utiliza da sua energia potencial elétrica e a força elástica se utiliza da sua energia potencial elástica.



1.14 TRABALHO REALIZADO PELAS FORÇAS NÃO CONSERVATIVAS

Quando uma força não-conservativa realiza trabalho, ela contribui (positivamente ou negativamente) com a energia cinética do sistema, mas não é capaz de compensar esse fato armazenando mais ou menos energia potencial nele visto que tais forças não têm energia potencial associada. Com isso, ao realizar trabalho, elas variam a energia mecânica do sistema.

Para exemplificar, veja o exemplo da Figura 41: o garoto está aplicando uma força F = 10 N ao sistema caixa que passa a se mover com velocidade crescente. Após um deslocamento d = 5 m, o garoto (a força F) realiza um trabalho $T = F.d = 10 \times 5 = +50$ J, o que significa que a energia cinética da caixa aumenta 50 J. Entretanto, nada ocorre à energia potencial do sistema caixa (Epot = 0), de tal forma que, claramente, a sua energia mecânica aumenta 50 J devido ao trabalho realizado pela força não conservativa F.

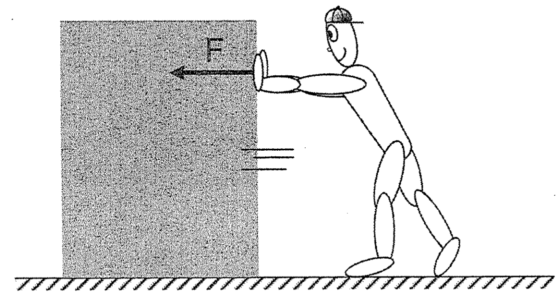


Figura 41 – Quando a força F realiza trabalho, a caixa adquire velocidade crescente. Ocorre transferência de energia do garoto para a caixa, aumentando a energia mecânica desta. O garoto, por sua vez, precisará se alimentar novamente para repor a energia cedida para a caixa na forma de trabalho.

Esse comportamento das forças não conservativas é traduzido, matematicamente, pelo princípio do trabalho realizado pelas forças não conservativas:

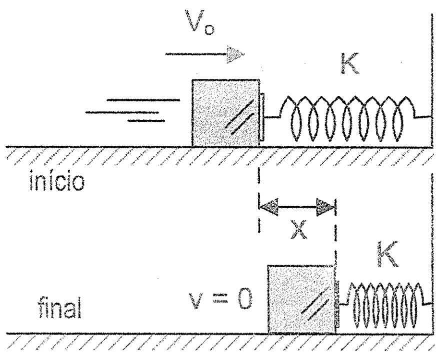
$$\boxed{\Sigma T_{FNC} = Emec_F - Emec_i} \qquad \textbf{(eq37)}$$

Assim, no caso da Figura 41, vimos que, ao realizar um trabalho de +50 J, a força não conservativa F converte 50 J de energia interna do garoto (energia química guardada no corpo do garoto) em 50 J de energia mecânica que é transferida ao sistema caixa, incrementando sua energia mecânica em 50 J.

Propriedade 7

- Ao realizar um trabalho positivo de +N joules, uma força não-conservativa (FNC) converte N joules de alguma modalidade de energia em N joules de energia mecânica (energia potencial ou cinética), incrementando a energia mecânica do sistema em N joules. Quando uma força não conservativa (FNC) realiza trabalho positivo, ela é denominada **força injetativa.**
- Ao realizar um trabalho negativo de –N joules, uma força não-conservativa (FNC) dissipa N joules de energia mecânica do sistema, convertendo essa energia mecânica em energia térmica (calor), energia sonora etc. Com isso, o sistema sofre um decréscimo de N joules em sua energia mecânica. Quando uma força não conservativa (FNC) realiza trabalho negativo, ela é denominada **força dissipativa.**

Exemplo Resolvido 8: Um bloco de massa m = 0,5 kg estava escorregando ao longo de um solo horizontal com atrito em movimento retardado, quando encontra uma mola fixa a uma parede e a comprime, causando uma máxima deformação x = 10 cm. Sabendo que a constante elástica da mola vale k = 160 N/m, o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o solo vale μ = 0,4 e a aceleração da gravidade vale g = 10 m/s^2, determine a velocidade que restava a essa caixa, no momento em que encostou na mola.



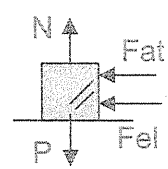
Solução:
Esse problema foi resolvido anteriormente (Exemplo Resolvido 5, página 30) pelo Princípio do Trabalho Total. Entretanto, como sabemos, é uma mera questão de conveniência a escolha do princípio de energia a ser usado para a resolução do problema. Afinal de contas, todos levarão à mesma resposta correta.

Assim, para ilustrar, resolveremos este exemplo desta vez através do princípio do trabalho realizado pelas forças não conservativas (eq37). Ao aplicarmos esse princípio, são computados apenas os trabalhos realizados pelas forças não conservativas agindo no sistema.

Analisando o diagrama das forças que agem sobre o bloco durante seu movimento retardado, identificamos prontamente as forças conservativas (as que possuem energia potencial) e as não conservativas. São elas:

$F_{conservativas}$ = { P, Força elástica }

$F_{não\text{-}conservativas}$ = { N, Fat }



Pelo princípio do trabalho realizado pelas forças não conservativas (eq37), podemos escrever:

$$\Sigma T_{FNC} = \text{Emec}_F - \text{Emec i}$$

$$T_N + T_{Fat} = (\text{Epot}_F + \text{Ecin}_F) - (\text{Epot}_i + \text{Ecin}_i)$$

A energia potencial do sistema é computada como sendo a soma de todas as possíveis energias potencias (gravitacional, elástica e elétrica) presentes :

$$\text{Epot sistema} = \text{Epot grav} + \text{Epot elást} + \text{Epot elétr}$$

$$\text{Epot sistema} = m.g.H + \frac{k.x^2}{2} + \text{Epot elétr}$$

No sistema em questão, a caixa não possui altura (H = 0) nem possui energia potencial elétrica, restando ao sistema apenas a energia potencial elástica eventualmente armazenada na mola. Assim, temos:

$$T_N + T_{Fat} = (\text{Epot}_F + \text{Ecin}_F) - (\text{Epot i} + \text{Ecin i})$$

$$0 + (-\text{Fat.d}) = \left(\frac{k.x^2}{2} + 0\right) - \left(0 + \frac{m.V_o^2}{2}\right).$$

Sendo Fat = μ.N = μ.m.g e d = x, vem:

$$0 + (-\mu.m.g.\,x) = \left(\frac{k.x^2}{2} + 0\right) - \left(0 + \frac{m.V_o^2}{2}\right).$$

$$-\mu.m.g.\,x = \frac{k.x^2}{2} - \frac{m.V_o^2}{2}$$

$$-(0,4).(0,5).(10).(0,1) = \left(\frac{160}{2}\right)\left(\frac{1}{10}\right)^2 - \frac{0,5.V_o^2}{2}$$

$$-0,2 = 0,8 - \frac{V_o^2}{4} \Rightarrow \boxed{V_o = 2 \text{ m/s}}$$

Assim, concluímos que a velocidade da caixa, ao tocar a mola, vale 2 m/s.

Os exemplos resolvidos 5 e 7 mostraram que todo problema que pode ser resolvido pelo Princípio do Trabalho Total também pode ser resolvido pelo Princípio do Trabalho Realizado pelas Forças Não-Conservativas. Escolher um ou outro é uma mera questão de conveniência do estudante.

1.15 CONDIÇÕES PARA A CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA

Dizemos que um sistema é conservativo, durante um certo episódio, quando a sua energia mecânica se conserva nesse episódio (Emec_F = Emec i). Entretanto, de acordo com o princípio do trabalho realizado pelas forças não conservativas (eq37), a condição para que a conservação de energia ocorra, em um certo episódio, é que o trabalho total realizado pelas forças não conservativas seja nulo. Matematicamente:

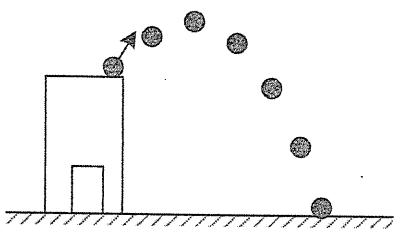
$$\text{Emec}_F = \text{Emec i} \Leftrightarrow \Sigma T_{FNC} = \text{Emec}_F - \text{Emec i} = 0 \Leftrightarrow \Sigma T_{FNC} = 0$$

$$\Sigma T_{FNC} = 0 \quad \text{(ao longo de todo o trajeto)} \qquad \textbf{(eq38)}$$

Uma análise refinada revela que essa condição é satisfeita, basicamente, em três casos:

Caso 1: apenas forças conservativas atuam no sistema

É o caso do movimento de projéteis no campo gravitacional sob ação exclusiva da força peso (desprezando-se a resistência do ar). Durante todo o movimento, a única força agindo é conservativa, isto é, ao realizar trabalho, meramente converte energia potencial em energia cinética (ou vice-versa), não alterando a energia mecânica do sistema.



Assim, durante todo o movimento do projétil da figura acima, a soma "Epot + Ecin" permanece constante, embora cada uma das energias Epot e Ecin mudem de valor durante o movimento.

Caso 2: forças não-conservativas agem no sistema, mas elas não realizam trabalho.

É o caso do pêndulo simples. Investigando as forças que agem nele, identificamos apenas as forças peso P e tração T, das quais apenas o peso é conservativo. Se a tração T é uma força não-conservativa, a realização de trabalho por parte dela promoveria uma mudança da Emec do sistema.

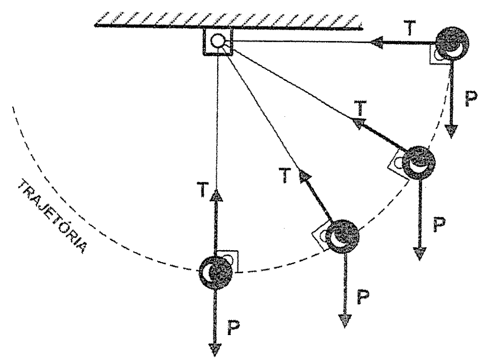


Figura 42 – durante a oscilação do pêndulo, a tração não realiza trabalho por ser radial, permanecendo perpendicular à trajetória circular o tempo todo

Entretanto, conforme vimos na página 9, durante as oscilações de um pêndulo simples, a tração T não realiza trabalho, visto que permanece perpendicular à trajetória. Por esse motivo, no pêndulo simples, temos:

$$\Sigma T_{FNC} = Emec_F - Emec_i$$

$$T_{tração} = Emec_F - Emec_i$$

$$0 = Emec_F - Emec_i \quad \Rightarrow \quad Emec_F = Emec_i$$

Caso 3: forças não-conservativas realizam trabalho no sistema, entretanto, a soma desses trabalhos é nula ($\Sigma T_{FNC} = 0$)

Para exemplificar, sejam duas caixas A e B abandonadas do repouso como mostra a Figura 51. Investigando o sistema, vemos que as forças não conservativas agindo nele são as forças de tração T_1, T_2 (de mesmo módulo T) e a normal N_A.

Quando o sistema é abandonado a partir do repouso, suponha que cada caixa sofra um deslocamento **D**. As forças T_1 e P_B realizam trabalho positivo, T_2 realiza trabalho negativo e N_A realiza trabalho nulo. Quanto resultará a soma dos trabalhos realizados pelas forças não-conservativas ?

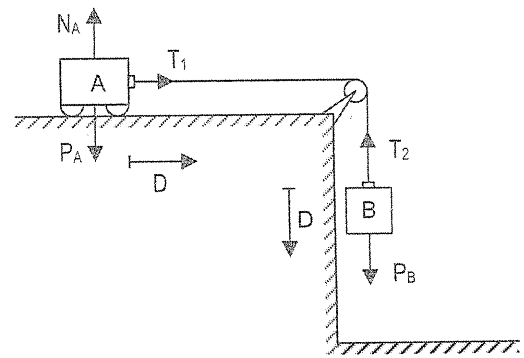


Figura 51 – Apesar de haver três forças não conservativas no sistema, ele ainda é conservativo. Por que ?

Identificando as forças do sistema, temos:

$$F_{Conservativas} = \{ P_A , P_B \}$$

$$F_{Não\text{-}Conservativas} = \{ T_1, T_2, N_A \}$$

Note que as trações T_1 e T_2 têm módulos iguais ($T_1 = T_2 = T$) e realizam trabalhos de sinais opostos $T_{T1} = +T.D$, $T_{T2} = -T.D$. A normal N_A realiza trabalho nulo por ser perpendicular à trajetória horizontal ($T_{NA} = 0$). Calculando o trabalho total realizado pelas forças não-conservativas, temos:

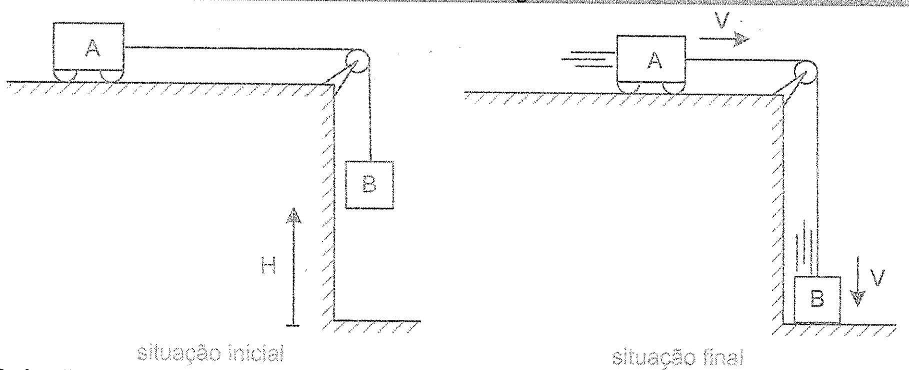
$$\Sigma T_{FNC} = T_{T1} + T_{T2} + T_{NA}$$

$$\Sigma T_{FNC} = +T.D + (-T.D) + 0$$

$$\Sigma T_{FNC} = 0$$

Assim, vemos que a energia mecânica do sistema da Figura 51 permanece constante durante esse episódio. O decréscimo da energia potencial do sistema, durante a descida da caixa B, é exatamente igual ao acréscimo na sua energia cinética. Afinal, o que está ocorrendo é uma mera conversão de energia potencial em energia cinética, ou seja, uma mera conversão de uma modalidade de energia mecânica em outra modalidade de energia mecânica, de forma que a energia mecânica do sistema permanece invariável.

Exemplo Resolvido 9: Considere que as duas caixas da Figura 51 possuem mesma massa M e que a caixa B estava a uma altura H do solo quando o sistema é abandonado a partir do repouso. Se a gravidade local vale g, determine a velocidade com que a caixa B atinge o solo.



Solução:

Como o sistema é conservativo, podemos aplicar a conservação da energia mecânica:

$Emec\ i_{\ Sistema} \;=\; Emec_{\ F\ Sistema}$

$(Emec_{\ A} + Emec_{\ B})_{\ antes} = (Emec_{\ A} + Emec_{\ B})_{\ depois}$

Note que, como o fio não estica, as caixas apresentam velocidades iguais entre si em cada instante ($V_A = V_B = V$). Elas vão acelerando igualmente durante todo o episódio:

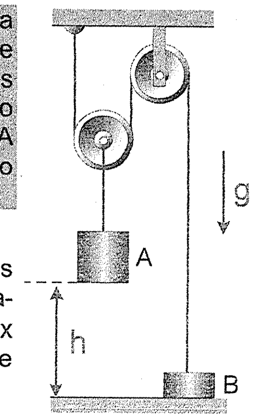
$(Epot_{\ A} + Ecin_{\ A} + Epot_{\ B} + Ecin_{\ B})_{\ antes} = (Epot_{\ A} + Ecin_{\ A} + Epot_{\ B} + Ecin_{\ B})_{\ depois}$

$(\cancel{Epot}_{\ A} + 0 + Epot_{\ B} + 0)_{\ antes} = (\cancel{Epot}_{\ A} + Ecin_{\ A} + 0 + Ecin_{\ B})_{\ depois}$

$M.g.H \;=\; M.V^2/\,2 \;+\; M.V^2/\,2 \quad\Rightarrow\quad V = \sqrt{g.H}$

Assim, ambas possuem velocidade $V = \sqrt{g.H}$ quando a caixa B atinge o solo.

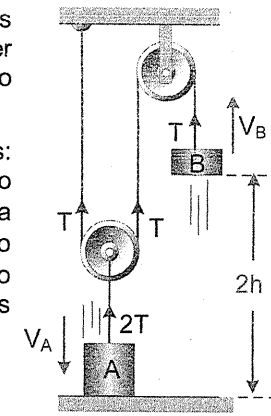
Exemplo Resolvido 10: A figura mostra um sistema formado por dois blocos **A** e **B**, de massas iguais a **4M** e **M**, respectivamente, conectados por fios e polias ideais num local em que a gravidade vale **g = 10 m/s²**. Se o sistema é abandonado a partir do repouso, com o bloco A a uma altura h = 80 cm do solo, qual a velocidade do bloco B quando A atingir o solo ?



Solução:

Conforme aprendemos no Capítulo 7 sobre Vínculos Geométricos no volume 1 desta coleção, a cada deslocamento x↓ do bloco A corresponderá um deslocamento ↑2x do bloco B, visto que o comprimento do fio permanece constante durante o movimento dos blocos.

Assim, no instante em que A tocar o solo, após ter descido uma distância h, B terá subido uma altura 2h. Adicionalmente, em razão do vínculo geométrico, as velocidades dos blocos A e B satisfazem a relação $V_B = 2.V_A$ em qualquer instante, assim como suas acelerações satisfazem a relação $a_B = 2.a_A$.



No sistema, agem apenas duas forças não-conservativas: a tração 2T no bloco A e a tração T no bloco B. Como o bloco A sofre um deslocamento h↓ sob ação da força ↑2T, o trabalho realizado por 2T vale –(2T).h. Já o bloco B sofre um deslocamento ↑2h sob ação da força ↑T, cujo trabalho realizado será +T.(2h). Assim, o trabalho das forças não conservativas agindo no sistema resulta nulo:

$$\Sigma T_{FNC} = -(2T).h \;+\; T.(2h) \;=\; 0$$

Com isso, com base em eq37, concluímos que o sistema é conservativo:

$\Sigma T_{FNC} \;=\; Emec_{\ F} \;-\; Emec_{\ i} \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad Emec\ i_{\ Sistema} \;=\; Emec_{\ F\ Sistema}$

$(Emec_{\ A} + Emec_{\ B})_{\ antes} \;=\; (Emec_{\ A} + Emec_{\ B})_{\ depois}$

$(Epot_{\ A} + Ecin_{\ A} + Epot_{\ B} + Ecin_{\ B})_{\ antes} \;=\; (Epot_{\ A} + Ecin_{\ A} + Epot_{\ B} + Ecin_{\ B})_{\ depois}$

$$(\,4M.g.h + 0 + 0 + 0\,) \;=\; \left(0 \;+\; \frac{4M.V_A^2}{2} + M.g.2h \;+\; \frac{M.V_B^2}{2}\right), \quad \text{com} \quad V_B = 2.V_A$$

$$2M.g.h \;=\; \left(\frac{4M.V_A^2}{2} \;+\; \frac{M.(2V_A)^2}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad 2M.g.h \;=\; 4M.V_A^2$$

$10\,.\,(0{,}8) \;=\; 2.V_A^2 \quad\Rightarrow\quad V_A = 2\ m/s.$

Sendo $V_B = 2.V_A$, em qualquer instante, temos $V_B = 4\ m/s.$

Exemplo Resolvido 11: A figura mostra um sistema formado por dois blocos **A** e **B**, de massas respectivamente iguais a **M** e **2M**, conectados por fios e polias ideais num local em que a gravidade vale $\mathbf{g = 10\ m/s^2}$. Se o sistema é abandonado a partir do repouso, com o bloco A uma altura H = 30 cm do solo, o prof. Renato Brito pede que você determine a velocidade desse bloco ao atingir o solo. Admita que durante o escorregamento de B, só há atrito entre B e o chão num pequeno trecho de comprimento d = 2,5 cm, com coeficiente de atrito cinético $\mu = 1{,}5$.

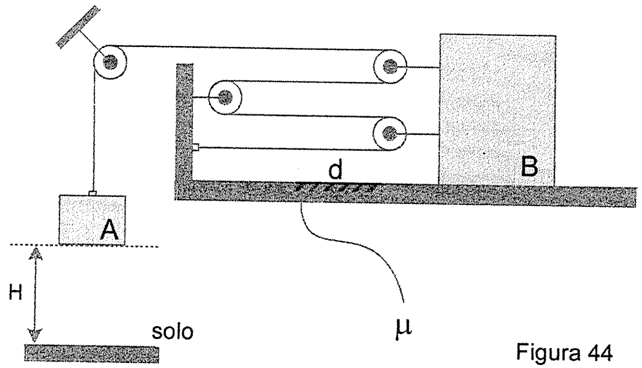


Figura 44

Solução:

Conforme aprendemos no capítulo 7 sobre Vínculos Geométricos, no volume 1 desta obra, o fato de o comprimento do fio permanecer constante, durante o movimento dos blocos, implica que qualquer deslocamento ↓X da caixa A para baixo será acompanhado de um correspondente deslocamento ←X/4 da caixa B para a esquerda. Adicionalmente, as velocidades e acelerações dessas caixas, em cada instante, se relacionam por:

$$V_A = 4.V_B$$
$$a_A = 4.a_B$$

Assim, a descida da caixa A até tocar o solo é acompanhada de um deslocamento D = H/4 = 30/4 = 7,5 cm da caixa B para a esquerda. Segundo o enunciado, durante esse escorregamento da caixa B, só haverá atrito no solo num trecho de comprimento d = 2,5 cm, sendo o restante do seu percurso (7,5 – 2,5 = 5 cm) liso.

Observe a colocação de forças no sistema na figura 45. Quando a caixa A se desloca ↓H para baixo, a tração que age na caixa A realiza um trabalho –T.H, enquanto a tração total 4T que age na caixa B realiza um trabalho de mesmo módulo +4T.(H/4), de forma que a soma dos trabalhos das trações é nula (assim como ocorreu no caso da Figura 51). A normal N_B que o solo aplica à caixa B realiza um trabalho nulo, por ser perpendicular à trajetória. Lembrando que apenas o trabalho realizado pelas forças não-conservativas agindo no sistema é o responsável pela variação da energia mecânica dos blocos A e B (eq37), temos:

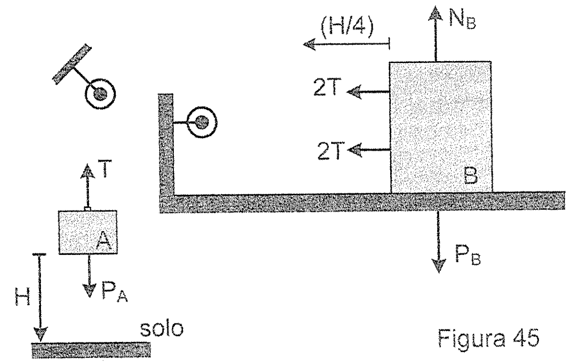


Figura 45

$$\Sigma T_{FNC} = Emec_{Final} - Emec_{inicial}$$

$$T_{FAT} + T_T + T_{4T} + T_{NB} = (Epot_F + Ecin_F) - (Epot\ i + Ecin\ i)$$

$$(-Fat.d) + (-T.H) + (+4T.H/4) + 0 = \left(0 + \frac{M_A.V_A^2}{2} + \frac{M_B.V_B^2}{2}\right) - (M_A.g.H + 0 + 0)$$

Com $Fat = \mu.N_B = \mu.(M_B.g) = \mu.(2M).g = 2\mu.M.g$, $V_A = 4.V_B$, $M_A = M$, $M_B = 2M$. Substituindo, vem:

$$-2\mu.M.g.d + 0 = 0 + \frac{M.V_A^2}{2} + \frac{2M}{2}.\left(\frac{V_A}{4}\right)^2 - M.g.H$$

$$-2\mu.M.g.d = \frac{9.M.V_A^2}{16} - M.g.H$$

$-32.\mu.g.d = 9.V_A^2 - 16.g.H$, com d = 2,5 cm, H = 30 cm, temos:

$$-32.(1{,}5).(10).(2{,}5\times10^{-2}) = 9.V_A^2 - 16.(10).(0{,}3) \Rightarrow V_A = 2\ m/s$$

Assim, quando a caixa A atinge o solo, sua velocidade vale V_A = 2 m/s, ao passo que a velocidade da caixa B vale $V_B = V_A / 4 = 2/4 = 0{,}5$ m/s.

1.16 CONSIDERAÇÕES SOBRE A CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA

É comum o estudante considerar o Princípio da Conservação da Energia Mecânica c mais importante dentre os estudados no presente capítulo. Entretanto, é importante salientar que, conforme vimos, a conservação da energia mecânica trata-se de um caso particular do **Princípio do Trabalho realizado pelas forças não-conservativas**, nas situações particulares em que $\Sigma T_{FNC} = 0$.

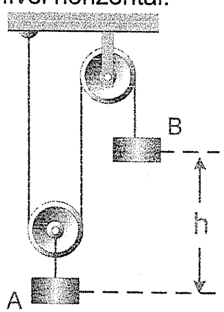
Dentre as ferramentas estudadas nesse capítulo, as mais poderosas para a resolução de problemas são os princípios do **Trabalho Total** e do **Trabalho realizado pelas forças não-conservativas** sintetizados nas expressões eq4 página 11 e eq37 página 53. Esses princípios são gerais e valem independentemente do sistema ser ou não conservativo. Optar por um ou outro, na resolução de c exercícios, é uma mera questão de conveniência, visto que todo problema que é resolvido por um deles também será resolvido pelo outro.

No Exemplo Resolvido 20, página 82, aprenderemos que esses princípios de energia aqui estudados não se aplicam a sistemas com massa variável.

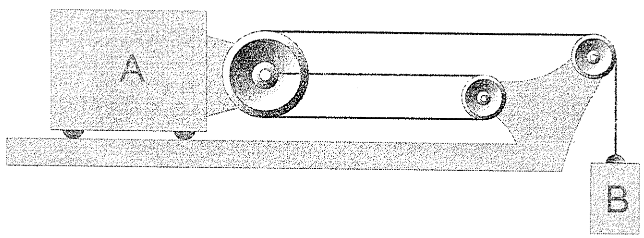
PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

Questão 22 -

A figura mostra dois blocos A e B de massas iguais inicialmente em repouso num local onde a gravidade vale g. O desnível inicial entre eles vale h. Sendo o sistema abandonado a partir do repouso, determine a velocidade de cada bloco quando eles cruzarem entre si, isto é, quando eles passarem por um mesmo nível horizontal.



questão 22



questão 23

Questão 23 -

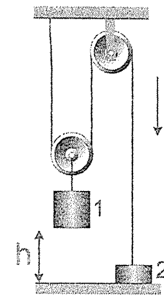
A figura mostra um carrinho A e um bloco B, de massas 2m e m conectados entre si por fios e polia ideais num local em que a gravidade vale g. Sendo o sistema liberado do repouso, determine a velocidade do carrinho A após o carrinho B ter descido uma altura H. Todos os atritos são desprezíveis.

Questão 24 -

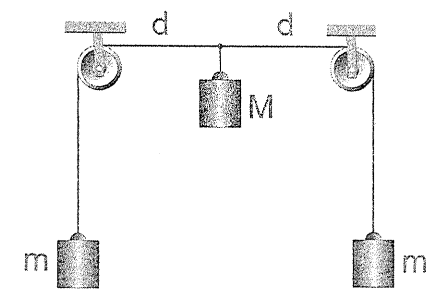
No sistema da figura, a massa do corpo 1 é **n** ($n > 4$) vezes maior que a do corpo 2. A massa da polia e dos fios, assim como o atrito, são desprezíveis. Em um certo momento, o corpo 2 é abandonado a partir do repouso e o sistema passa a se mover. Determine a máxima altura atingida pelo corpo 2 em função de **n**, da altura **h** inicial do corpo 1 e da gravidade local **g**.

Questão 25 -

A figura mostra dois blocos de massa m conectados entre si através de um fio e duas polias ideais. Um terceiro bloco, de massa M, é preso a esse fio a igual distância **d** das duas polias e o sistema é abandonado do repouso num local em que a gravidade vale **g.** O prof. Renato Brito pede que você determine a máxima distância vertical que o bloco central descerá até atingir a posição de repouso momentâneo.



questão 24



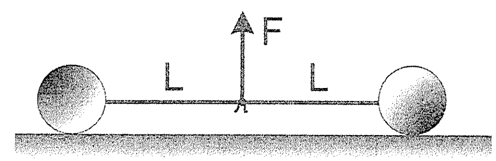
questão 25

Questão 26 -

A figura mostra duas esferas de mesma massa m, em repouso, conectadas entre si por um fio ideal de comprimento 2L num local em que a gravidade vale g. Se uma força constante F vertical é aplicada ao ponto médio da corda, como mostra a figura, determine:

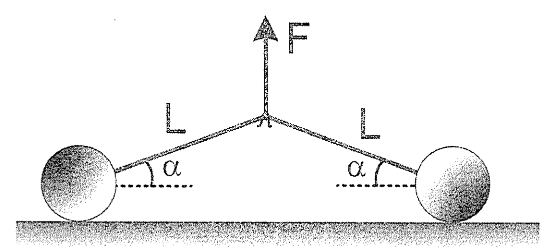
a)o menor valor de F para que as bolas não percam contato com o solo;

b)a velocidade das bolas quando elas colidirem entre si, admitindo que as bolas não percam contato com o solo. Considere que as bolas sejam puntiformes.



Questão 27

A figura mostra duas esferas de mesma massa m e, em repouso, conectadas entre si por um fio ideal de comprimento 2L num local em que a gravidade vale g. A partir da posição inicial mostrada na figura, uma força constante $F < 2mg$ vertical é aplicada ao ponto médio da corda. Determine a velocidade das bolas quando elas colidirem entre si. Admita que as bolas sejam puntiformes.



1.17 TRABALHOS REALIZADOS POR FORÇAS INTERNAS

Nem sempre é fácil determinar quais forças estão efetivamente realizando trabalho sobre um corpo ou sistema. Em alguns casos, a atuação das forças internas pode esconder algumas armadilhas às quais o estudante deve estar atento. A seguir, descreveremos algumas situações particularmente interessantes.

Caso 1 : um patinador empurrando uma parede com as mãos

Considere um patinador que empurra uma parede com as mãos a fim de impulsionar o seu corpo para trás como mostra a Figura 46. Ao fazer isso, ele adquire velocidade e, conseqüentemente, energia cinética, o que nos permite concluir que há realização de trabalho positivo sobre o patinador.

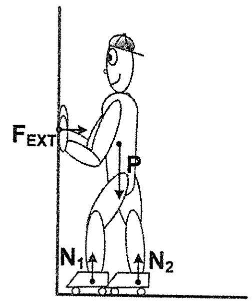


Figura 46 A

Durante esse episódio, a parede, a Terra e o chão liso interagem com o patinador, aplicando sobre ele, respectivamente, as forças externas F_{EXT}, o peso P e as normais N_1 e N_2. Assim, qual dessas forças externas agindo sobre o garoto (Figura 46a) realiza trabalho sobre ele ?

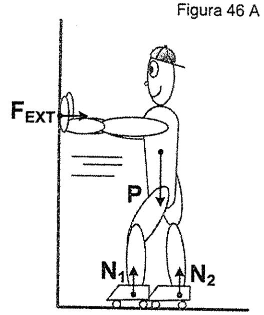


Figura 46 B

Observando a seqüência da figura 46, vemos que as forças $P\downarrow$, $N_1\uparrow$ e $N_2\uparrow$ são perpendiculares ao deslocamento horizontal $d\rightarrow$ sofrido pelo garoto e, portanto não realizam trabalho nesse episódio.

E o que dizer da força F_{EXT} de contato entre a parede e as mãos do patinador ? Sabemos que a condição necessária para que haja realização de trabalho é que "<u>o ponto de aplicação da força</u>" sofra um deslocamento na direção da referida força. Qual o ponto de aplicação da força F_{EXT} ? Ora, a mão do garoto. E qual o deslocamento sofrido pela mão do garoto durante todo o tempo em que ele está tocando a parede (Figuras 46A e 46B) ? Esse deslocamento é nulo, já que a mão só passa a se deslocar em relação à Terra depois que perde o contato com a parede, situação em que a força de contato F_{EXT} já não está mais atuando.

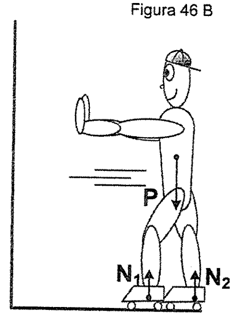


Figura 46 C

Assim, apesar de a força que a parede aplica sobre a mão do patinador (F_{EXT}) ser a força externa responsável pela sua aceleração

$$F_R = F_{EXT} = m.a$$

ainda assim ela não realiza trabalho sobre o garoto nesse episódio visto que seu ponto de aplicação (a mão do garoto) não sofre deslocamento durante todo o tempo de atuação dessa força.

Propriedade 8: Para que uma força realize trabalho, o seu ponto de aplicação deve necessariamente sofrer um deslocamento em relação à Terra (referencial inercial).

Do exposto, vimos que nenhuma das **forças externas** agindo no patinador (Figura 46) realiza trabalho sobre ele. Ainda assim, o aumento da sua energia cinética, durante a fase de aceleração (Figura 46A e 46B), evidencia que está havendo realização de trabalho sobre ele. Afinal, qual força está realizando trabalho sobre o patinador ?

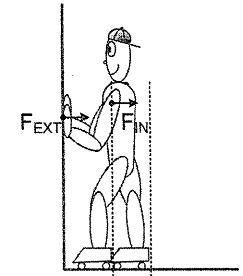


Figura 47 A

Observando mais atentamente a Figura 46, vemos que nem todas as partes do corpo do garoto (tórax, mãos, cotovelos) se deslocam igualmente. O seu tórax, por exemplo, começa a se deslocar antes da sua mão. Esta só passa a se mover (em relação à Terra) quando o garoto perde o contato com a parede (Figura 46C).

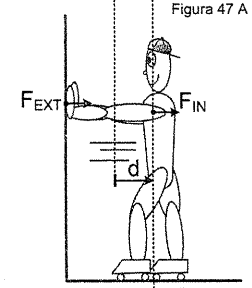


Figura 47 B

Propriedade 9: Quando as partes de um corpo se deslocam diferentemente, durante o seu movimento, é conveniente que ele não seja mais tratado como um único objeto, mas, sim, como um sistema de partículas que se movem independentemente uma das outras, apesar de interagirem entre si através da ação das **forças internas.**

Na análise energética de sistemas de partículas, não só o trabalho das forças externas deve ser considerado, mas também o trabalho das **forças internas** ao sistema.

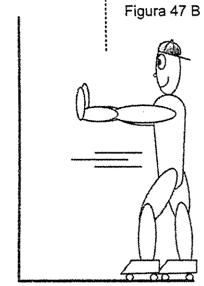


Figura 47 C

A Figura 47 mostra uma das forças internas ao sistema "patinador", realizando trabalho positivo sobre ele, justificando o aumento da sua energia cinética: a força F_{IN} que o seu braço aplica sobre o seu tórax durante a fase de aceleração (Figuras 47A e 47B).

Note que, diferentemente do ponto de aplicação da F_{EXT} (a mão), o ponto de aplicação da força $F_{IN}\rightarrow$ (o tórax do garoto) sofre um deslocamento $d\rightarrow$ e, portanto, realiza trabalho durante a fase de aceleração do corpo. Cessada essa fase, a mão perde o contato com a parede e o braço pára de empurrar o tórax do garoto, que prossegue em MRU.

Em linhas gerais, nesse episódio do patinador, podemos dizer que a energia cinética que ele adquire, durante a fase de aceleração, provém do trabalho realizado **pelas forças internas** ao sistema . Essas forças, em última análise, são aquelas exercidas pela musculatura dos braços e antebraços durante o ato de empurrar a parede.

Adiante, na página 182 no capítulo 2, voltaremos a analisar esse sistema do ponto de vista do Impulso e da quantidade de movimento. Veremos que, apesar de a força externa Fext não realizar trabalho, ela aplica impulso ao sistema, sendo a responsável pela variação da quantidade de movimento do seu centro de massa. Já as forças internas Fin ao sistema realizam trabalho, aumentando a energia cinética do seu centro de massa, embora não tenham qualquer relação com o aumento da sua quantidade de movimento. Conforme veremos no capítulo 2, apenas forças externas alteraram a quantidade de movimento de um sistema.

Caso 2: pessoa caminhando num solo horizontal

De forma análoga ao exemplo do patinador, nenhuma **força externa** realiza trabalho sobre uma pessoa quando ela está caminhando num solo horizontal.

Para uma melhor compreensão, observe atentamente a Figura 48: a cada passada da pessoa, o pé que está em contato com o solo permanece imóvel (não sofre deslocamento em relação ao solo) enquanto o resto do corpo é impulsionado para a frente.

Dessa forma, esse pé é a única parte do corpo da pessoa a receber do solo a ação de forças externas (normal N↑ e atrito estático Fat →) mas estas não realizam trabalho visto que o referido pé não se desloca enquanto durar o contato entre ele e o solo. A terceira força externa a agir na pessoa é o seu peso P, que também não realiza trabalho por agir numa direção perpendicular ao deslocamento horizontal D→ do pedestre. Assim, quando a pessoa acelera ou retarda o seu passo, de onde provém a variação da sua energia cinética ?

Ora, a cada passada, o pedestre encontra-se apoiado em um dos seus pés, enquanto sua outra perna, juntamente com o resto do corpo, são impulsionados para frente pela ação das **forças internas** exercidas pela musculatura dos membros inferiores.

Mais uma vez, qualquer trabalho positivo ou negativo que seja realizado sobre um pedestre, durante o seu movimento ao longo de uma superfície horizontal, será devido à ação das **forças internas.**

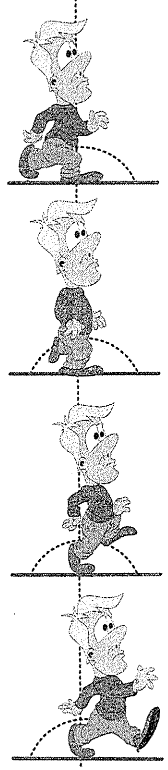


Figura 48

Assim como no caso do patinador, o pedestre também não deverá ser interpretado como um único objeto, mas sim como um sistema de partículas móveis, visto que as diferentes partes do seu corpo não se deslocam da mesma forma em relação ao solo durante o seu movimento.

Quando as partes de um corpo se deslocam diferentemente durante o seu movimento, é conveniente que ele não seja mais tratado como um único objeto, mas sim como um sistema de partículas. Nesses casos, não só o trabalho das forças externas deve ser considerado, mas também o trabalho das **forças internas** ao sistema.

Caso 3: veículo se movendo aceleradamente

Fato semelhante ao do pedestre ocorre quando um veículo se desloca em movimento acelerado (ou retardado) sem que ocorra escorregamento (derrapagem) entre seus pneus e o solo.

O carro da figura 49, por exemplo, tem tração nas rodas traseiras e está se deslocando aceleradamente para frente. Durante seu movimento, as rodas traseiras recebem, do solo, uma força de atrito para frente, agindo no sentido de impedir o escorregamento relativo entre o pneu e chão durante o rolamento tracionado dele.

Apesar de o atrito ser a força resultante externa (Figura 49) responsável pela aceleração do veículo como um todo (o atrito de rolamento nas rodas dianteiras está sendo desprezado), ele não realiza trabalho sobre o carro durante seu movimento. Por qual motivo ?

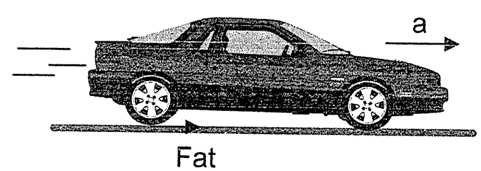


Figura 49 – A força de atrito estático que o solo aplica sobre as rodas tracionadas do carro agem no sentido de impedir o deslizamento dessas rodas em relação ao solo.

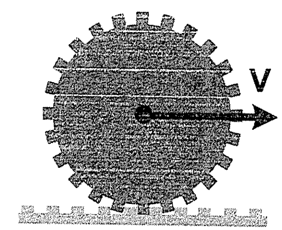


Figura 50 – apenas um único dente da roda encontra-se imóvel em qualquer instante: aquele em contato com a cremalheira, por estar sempre está encaixado entre dois dentes fixos da cremalheira.

Mais uma vez, atentamos ao ponto de aplicação da força de atrito, isto é, o ponto de contato entre a roda e o chão. Esse ponto de cada roda sempre se encontra em repouso em relação à Terra em cada instante. Para um melhor entendimento, a figura 50 dá uma visão microscópica de como se dá a interação entre uma roda do carro e o chão. Admitindo que o pneu do carro role sobre o solo sem escorregar, ele não difere de uma roda dentada rolando sobre uma cremalheira.

Quando a roda dentada rola ao longo da cremalheira fixa ao solo (Figura 50), todos os dentes da sua periferia circular apresentam alguma velocidade em relação ao solo, com exceção do seu dente extremo inferior, isto é, aquele em contato com a cremalheira. Afinal, ele sempre se encontra encaixado entre dois dentes fixos da cremalheira e, conseqüentemente, imóvel em cada instante.

Pelo mesmo motivo, o ponto de contato entre o pneu do carro e o chão sempre se encontra imóvel em relação ao solo. Assim, a força de atrito que o solo aplica nesse ponto de contato nunca está realizando trabalho sobre a roda, pelo fato de esse ponto nunca estar sofrendo deslocamento.

Dessa forma, vemos que nenhuma das forças externas agindo sobre o carro (peso P, atrito, normais N) está realizando trabalho sobre ele. Sendo assim, de onde vem a energia cinética adquirida pelo móvel em seu movimento acelerado ?

Mais uma vez, o carro adquire energia cinética à custa do trabalho realizado pelas **forças internas** trocadas entre as partes móveis do motor do carro (pistão, eixo, correias, virabrequim etc.). Ao realizar trabalho, essas forças estão convertendo a energia potencial química do combustível em energia cinética.

Assim, tendo em vista esses três casos mostrados nessa seção, percebemos que o princípio do trabalho total (teorema da energia cinética) expresso pela relação eq4 deve ser aprimorado para passar a incluir também o trabalho realizado pelas forças internas:

$$\boxed{T_{total} = \Sigma T_{F\ internas} + \Sigma T_{F\ externas} = Ecin_F - Ecin\ i} \qquad \textbf{(eq39)}$$

A versão eq39 do princípio do trabalho total (teorema da energia cinética) dever ser usada, em vez da versão eq4 página 11, sempre que forças internas ao sistema estiverem realizando trabalho no sistema (veja a propriedade 9 página 65). A dificuldade em aplicar a relação eq39 reside no fato de que nem sempre se consegue identificar a força interna que está realizado o trabalho, em especial, nas situações que envolvem atrito.

Exemplo Resolvido 12: Considere que o patinador da Figura 46, de massa M = 80 kg, esteja inicialmente em repouso sobre o solo liso quando empurra a parede bruscamente, recebendo desta uma força Fext = 320 N. Admita que, durante a fase em que ele é acelerado por empurrar a parede, seu tórax (centro de massa) sofre um deslocamento d = 50 cm em relação à Terra.

a) qual a velocidade adquirida pelo tórax do garoto (seu centro de massa) após empurrar a parede ?

b) quanto foi o incremento de energia cinética do patinador, nesse episódio ?

c) qual força realizou trabalho sobre ele, aumentando a sua energia cinética ?

d) Se a força externa que parede aplica sobre o garoto não realiza trabalho sobre ele, então, o que significa o produto "Fext.d" ?

Solução:

a) Pela segunda lei de Newton, a resultante das forças externas que agem sobre o patinador, na Figura 46, é exatamente a força Fext que a parede aplica sobre ele. Essa força é a responsável pela aceleração do centro de massa do garoto:

$$F_R = F_{ext} = M \cdot a_{cm}$$

$$320 = 80 \cdot a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = 4\ m/s^2$$

Admitindo que essa seja a aceleração média do patinador, durante esse deslocamento, aplicaremos a equação de Torricelli do MUV:

$$V^2 = V_o^2 + 2.a.d, \quad \text{com } a = 4\ m/s^2 \text{ e } d = 50\ cm = 0,5\ m, \text{ vem:}$$

$$V^2 = 0^2 + 2 \times 4 \times 0,5 \Rightarrow V = 2\ m/s$$

Após empurrar a parede, o patinador perde o contato com ela e prossegue em MRU com velocidade 2 m/s por inércia.

b) A variação da energia cinética do patinador, nesse episódio, vale:

$$\Delta Ecin = Ecin_F - Ecin\ i = \frac{M.V^2}{2} - \frac{M.V_0^2}{2} = \frac{80.2^2}{2} - 0 = 160\ J$$

c) conforme discutido na página 64, a força Fext não realiza trabalho sobre o garoto visto que o ponto de aplicação dessa força (a mão do garoto) não sofre deslocamento algum durante a fase de aceleração do patinador. Isso pode ser facilmente confirmado observando que as mãos do patinador ainda encontram-se imóveis em relação à Terra nas Figuras 46A e 46B. As demais forças peso P e normal também não realizam trabalho por serem perpendiculares à trajetória horizontal do seus pontos de aplicação. Assim, essa variação de energia cinética de 160 J é o trabalho realizado pelas forças internas F_{IN} (figura 47) que os braços do patinador aplicam sobre o seu tórax durante a fase de aceleração.

d) A segunda lei de Newton permite escrever:

$$F_R = F_{ext} = M \cdot a_{cm} \qquad \textbf{(eq40)}$$

A equação de Torricelli do MUV permite escrever:

$$V^2 = V_o^2 + 2.(a_{cm}).d \qquad \textbf{(eq41)}$$

Multiplicando, membro a membro, a relação eq41 por M/2 e usando eq40, temos:

$$V^2 = V_o^2 + 2.(a_{cm}).d \quad \Rightarrow \quad \frac{M.V^2}{2} = \frac{M.V_0^2}{2} + 2.(a_{cm}).d.\frac{M}{2}$$

$$\frac{M.V^2}{2} = \frac{M.V_0^2}{2} + M.a_{cm}.d \quad \Rightarrow \quad \frac{M.V^2}{2} = \frac{M.V_0^2}{2} + Fext.d$$

$$(\pm)Fext.d = \frac{M.V^2}{2} - \frac{M.V_0^2}{2} \qquad \textbf{(eq42)}$$

A expressão eq42 é idêntica ao teorema da energia cinética. Ela afirma, matematicamente, que o produto "Fext. d" é igual à variação da energia cinética sofrida pelo patinador nesse episódio, a menos de um sinal "±" que deve ser ajustado convenientemente.

Apesar disso, sendo conhecedores da definição de trabalho realizado por uma força, sabemos que a força Fext efetivamente não realizou trabalho algum sobre o patinador. Adicionalmente, a distância **d** no produto "Fext .d" não corresponde ao deslocamento sofrido pelo ponto de aplicação da força Fext (as mãos do patinador) mas, sim, ao deslocamento sofrido pelo seu centro de massa (Figura 47B). As mãos do patinador nem se deslocam em relação à Terra durante a atuação da força Fext. Afinal, o deslocamento delas só tem início no momento em que o patinador perde o contato com a parede (Figura 46C), situação em que a força de contato Fext já não atua mais.

Assim, apesar de a força Fext ser força resultante externa responsável pela aceleração do centro de massa do patinador (conforme eq40), ela não realiza trabalho.

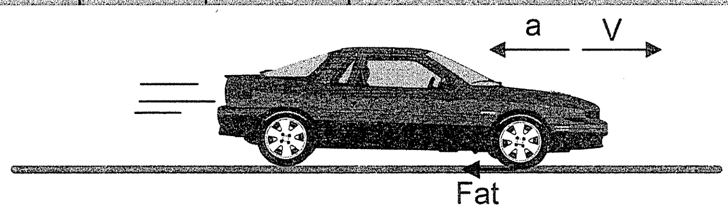
Em suma, a expressão eq42 pode ser usada para se determinar a velocidade adquirida pelo patinador (para resolver o item a desse problema), mas o produto "Fext. d" não pode ser chamado de "trabalho realizado pela força Fext". Esse produto Γ = Fext. d = 320. (0,5) = 160 J é chamado **pseudo-trabalho** realizado pela força externa Fext.

Esse pseudo-trabalho corresponde ao trabalho que a resultante das forças externas realizaria, caso ela agisse diretamente sobre o centro de massa do sistema, sendo sempre determinado pelo produto do módulo da resultante das forças externas pelo deslocamento sofrido pelo centro de massa na direção dessa força (Γ = Fext. d). Conforme vimos em eq42, o pseudo-trabalho será igual à variação da energia cinética do centro de massa do sistema.

Exemplo Resolvido 13: Considere que um carro de massa M = 800 kg esteja se movendo com velocidade 72 km/h quando seu motorista pisa o freio e imprime às rodas dianteiras uma força de atrito estático (resultante) constante de intensidade Fat = 1600 N. O atrito de rolamento nas rodas traseiras é desprezível. Determine:

a) Quais forças realizam trabalho sobre o carro durante a frenagem;

b) A distância que o carro percorre até parar.



Solução:

a) Sobre o carro agem as forças externas peso P↓, as normais N ↑ em cada roda e a força de atrito estático Fat← nas rodas dianteiras. Desprezemos a resistência do ar. Conforme analisamos e discutimos anteriormente, nenhuma dessas forças externas está realizando trabalho durante essa frenagem. O trabalho é realizado internamente ao sistema, convertendo energia mecânica em energia térmica no sistema de frenagem do veículo;

b) aplicando a equação eq36 do pseudo-trabalho, temos:

$$(\pm)\text{Fext.d} = \frac{M.V^2}{2} - \frac{M.V_0^2}{2}, \text{ com } V_o = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}, \ V = 0$$

$$-1600.d = \frac{800.(0)^2}{2} - \frac{800.(20)^2}{2} \Rightarrow d = 100 \text{ m}$$

Usar a relação eq42 equivale a aplicar a 2ª lei de Newton aliada à equação de Torricelli para o MUV. Logicamente, o mesmo resultado seria encontrado.

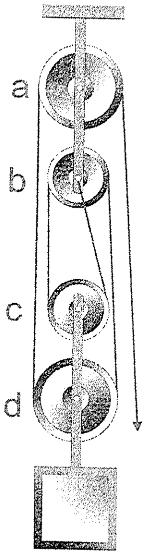
Exemplo Resolvido 14: A figura mostra um sistema composto por duas polias fixas (**a** e **b**) e duas polias móveis (**c** e **d**) inventado por Arquimedes para obter vantagem mecânica ao elevar grandes massas. Admita que todos os trechos de fio sejam aproximadamente verticais, despreze atritos e as massas das polias. Seja **g** a gravidade local e **M** a massa a ser levantada pelo sistema, o prof. Renato Brito pergunta:

a) Com que tração **T** devemos puxar a extremidade livre do fio para levantar o bloco com velocidade constante ?

b) Que comprimento de fio deve ser puxado a fim de que o bloco suba uma altura vertical **h** ?

c) Qual o trabalho realizado ao levantar o bloco uma altura **h**, fazendo uso desse dispositivo ?

d) Os resultados aqui obtidos foram para um sistema com vantagem mecânica N = 4. Como podemos generalizar esse resultado para um sistema com vantagem mecânica N qualquer ?



Solução:

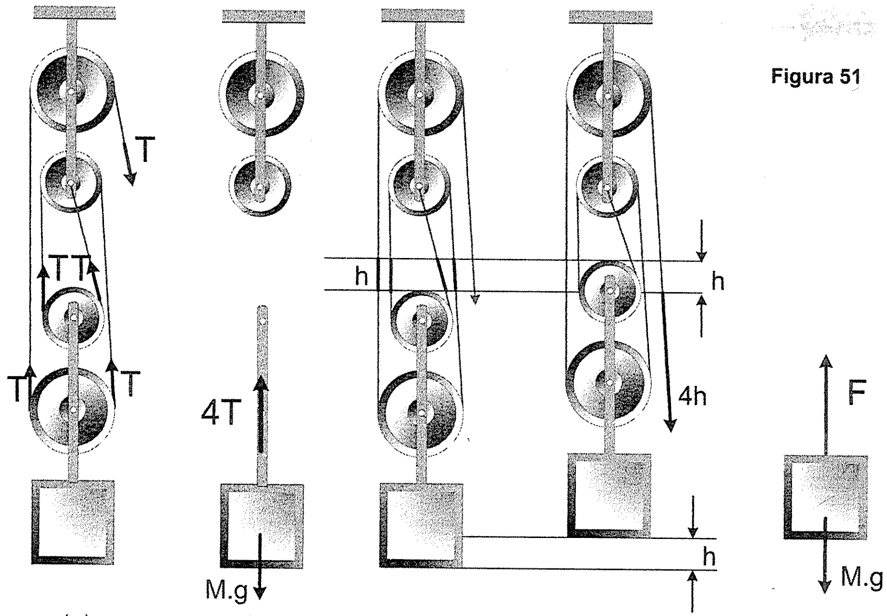
a) Sendo o fio ideal (massa nula), ele transmite integralmente, a todos os seus pontos, a tração T que um operador exerce em sua extremidade livre. Assim, ao puxar a extremidade do fio com uma força de tração T (veja Figura 51a), uma tração 2T age tanto na polia **c** quanto na polia **d**, totalizando uma força 4T (Figura 51b) puxando o bloco para cima. Assim, para que o bloco da Figura 51b suba com velocidade constante (a = 0, F_R = 0), devemos ter:

$$4T = M.g \Rightarrow T = M.g / 4$$

Eis a grande vantagem do sistema de polias: para elevar um peso M.g com velocidade constante, fazendo uso do sistema de polias, será necessário uma força quatro vezes menor que o peso dele. Com isso, dizemos que a vantagem mecânica desse sistema vale N = 4.

b) observando a Figura 51c, vemos em destaque quatro pequenos trechos de fio aproximadamente verticais, de comprimento **h** cada um. Na Figura seguinte (51d), o bloco (juntamente com as polias móveis c e d) subiu uma altura **h** e esses quatro pequenos trechos de fio se deslocaram de forma que a extremidade livre do fio só pode ter descido uma altura **4h**, visto que o comprimento total do fio é constante. Assim, para que o bloco suba uma altura vertical **h**, a extremidade livre do fio deve descer uma altura **4h**.

Figura 51



(a) (b) (c) (d) (e)

c) Para levantar o bloco de peso M.g até uma altura **h**, com velocidade constante, sem fazer uso do sistema de polias (Figura 51e), o operador aplica diretamente ao bloco uma força F = M.g, realizando um trabalho T = F.d = M.g.h. Mas, o que muda na realização desse trabalho quando o operador faz uso do sistema de polias móveis ?

Ora, ao resolver os itens **a** e **b**, vimos que, para o bloco subir uma altura **h,** o operador deverá puxar uma extensão **4h** da corda. Adicionalmente, para que o bloco suba com velocidade constante, o operador deverá aplicar à extremidade livre do fio uma força de intensidade apenas T = M.g / 4 (Figura 51b). Com isso, deslocando a extremidade livre da corda uma distância 4h sob ação de uma força constante M.g/4, o operador realizará um trabalho:

$$\mathrm{T} = \mathrm{F.d} = \left(\frac{\mathrm{M.g}}{4}\right).(4\mathrm{h}) = \mathrm{M.g.h}$$

Assim, vemos que o trabalho realizado pelo operador para elevar o bloco é sempre o mesmo, quer usando o sistema de polias (Figura 51a), quer aplicando a força diretamente sobre o bloco (Figura 51e). O gasto de energia por parte do operador será sempre o mesmo. A vantagem de usar o sistema de polias é claramente o fato de que será preciso fazer uso de uma força quatro vezes menor que a usual, o que é compensando pela necessidade de puxar um comprimento de fio quatro vezes maior que o de costume.

Em linhas gerais, podemos dizer que os multiplicadores de força, tais como as polias de Arquimedes ou suas alavancas, são dispositivos que permitem a realização de um mesmo trabalho, fazendo uso de uma força menor que a usual.

d) A vantagem mecânica desse sistema vale N = 4, visto que ele permite fazer uso de uma força 4 vezes menor para a realização do mesmo trabalho. Em linhas gerais, um sistema com vantagem mecânica N qualquer permite a realização do mesmo trabalho fazendo uso de uma força N vezes menor. Logicamente, esse uso de uma força N vezes menor é compensado pela necessidade de um deslocamento da extremidade livre da corda N vezes maior :

$$\mathrm{T} = \mathrm{F.d} = \left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{N}}\right).(\mathrm{N.d})$$

1.18 O CONCEITO DE POTÊNCIA MÉDIA E POTÊNCIA INSTANTÂNEA

O conceito de potência está presente no seu dia-a-dia em várias circunstâncias. Falamos sobre a potência de um aparelho de som, da potência de uma lâmpada, de um chuveiro elétrico, de motores etc. A unidade de potência no SI é o watt definido como:

$$1 \text{ watt} = 1\,\frac{\text{joule}}{\text{segundo}}$$

Dizer que uma lâmpada A consome uma potência de 20 W significa dizer que ela consome 20J de energia elétrica por segundo. Se outra lâmpada B consome uma potência elétrica 40W significa que ela consome energia elétrica num ritmo duas vezes maior que A, pois consome 40J por segundo.

Se duas lâmpadas diferem apenas pela potência, aquela que consume maior potência elétrica consome energia mais rapidamente que a outra mas, por outro lado, iluminará melhor.
Essa comparação nos permite perceber que, fisicamente, potência é a rapidez com que a energia é consumida, transformada, "produzida" , dissipada etc.

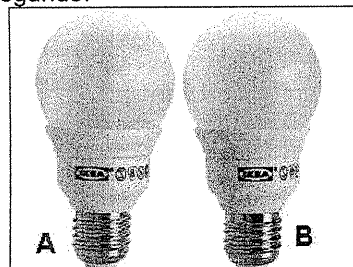


Figura 52- Se duas lâmpadas diferem apenas pela potência, aquela que consumir maior potência elétrica consumirá energia mais rapidamente, mas iluminará melhor.

Matematicamente, podemos escrever :

$$\text{Potência média} = \frac{\text{energia processada}}{\text{tempo gasto}} \qquad \textbf{(eq43)}$$

Podemos também falar em potência média desenvolvida por uma força constante, durante a realização de um trabalho:

$$\text{Pot}_{\,M} = \frac{\mathrm{T}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{F.d.}\cos\alpha}{\Delta t} \qquad \textbf{(eq44)}$$

A potência média é calculada em um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ que precisa ser especificado. Quando as grandezas que aparecem na relação eq44 variam no tempo, é mais comum utilizarmos o conceito de potência instantânea, matematicamente expresso por:

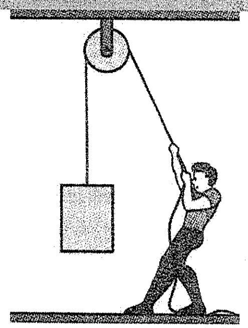
$$Pot_{\,instantânea} = \frac{T}{\Delta t} = \frac{F.d.\cos\alpha}{\Delta t} = F.\frac{d}{\Delta t}.\cos\alpha = F.v.\cos\alpha \qquad \textbf{(eq45)}$$

onde α é o ângulo formado entre os vetores **F** e **v**. Os parâmetros **F**, **v** e α são todos tomados no mesmo instante **t** desejado.

Exemplo Resolvido 15: A figura ilustra Raul levantando uma caixa de massa M desde o solo até uma altura H. Pede-se determinar o trabalho realizado pelo Raul e a potência que ele desenvolve, ao levantar a caixa, nos seguintes casos:

a) a caixa sobe com velocidade constante v;

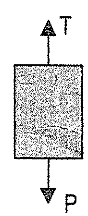
b) a caixa parte do repouso ($V_{inicial} = 0$) e pára ($V_{final} = 0$) ao atingir a altura desejada H, gastando um tempo Δt no processo de subida. Não se sabe como a velocidade dela se comporta durante a subida.



Solução:

a) Durante a subida da caixa, atuam sobre ela apenas as forças tração T e peso P. Como o movimento é uniforme, a caixa sobe em equilíbrio (dinâmico) com aceleração nula ($a = 0$, $F_R = 0$) e, portanto, temos $T = P = M.g$ = constante durante toda a subida.

Calcular o trabalho realizado pelo Raul significa calcular o trabalho realizado pela força que o Raul exerce sobre a caixa, no caso, a tração T. Como a tração T tem intensidade constante, o seu trabalho pode ser calculado pela expressão $\mathrm{T} = F.\,D$:



$$\mathrm{T}_{Raul} = \mathrm{T}_{tração} = F.D = T.H = M.g.H$$

A potência desenvolvida pelo Raul, portanto, é a potência desenvolvida pela tração T:

$$Pot_{\,Raul} = Pot_{\,tração} = \frac{\mathrm{T}_{tração}}{\Delta t} = \frac{M.g.H}{\Delta t} = M.g.\frac{H}{\Delta t} = M.g.V$$

b) Nesse caso, como não sabemos como a velocidade se comporta, não sabemos quanto vale a tração T no fio durante a subida da caixa. A tração poderia ser expressa em função da aceleração escalar **a** vertical do bloco, conforme a 2ª lei de Newton:

$$F_R = T - M.g = M.a$$

Entretanto, nada sabemos sequer sobre a aceleração do bloco. Não sabemos se ela é constante ou variável. Assim, o valor da tração T em cada instante é indefinido, portanto, não temos como calcular o seu trabalho através da expressão $\mathrm{T} = F.\,D$. Como calcularemos o trabalho realizado pela tração T nesse caso ?

Nessas situações em que não há como calcular o trabalho de uma força diretamente, ele deve ser calculado indiretamente. Para isso, podemos fazer uso do Princípio do Trabalho Total expresso em (eq4):

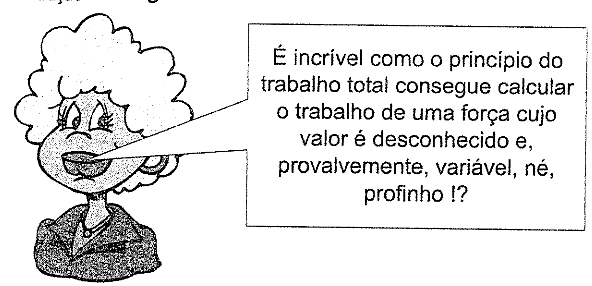
$$\mathrm{T}_{total} = \mathrm{T}_{peso} + \mathrm{T}_{tração} = Ecin_{final} - Ecin_{inicial}$$

Como a força peso é constante durante a subida, podemos calcular o seu trabalho pela expressão $\mathrm{T} = F.\,D$:

$$\mathrm{T}_{peso} = -F.\,D = -M.g.H \quad \text{(negativo na subida)}$$

Como o corpo parte do repouso e pára, ao atingir a altura H, as energias cinéticas inicial e final são nulas ($Ecin_{final} = Ecin_{inicial} = 0$). Assim:

$$\mathrm{T}_{total} = \mathrm{T}_{peso} + \mathrm{T}_{tração} = Ecin_{final} - Ecin_{inicial}$$
$$(-M.g.H) + \mathrm{T}_{tração} = 0 - 0$$
$$\mathrm{T}_{tração} = M.g.H$$



De fato, Claudete, você está começando a perceber a beleza e o poder dos princípios físicos. O princípio do Trabalho Total se prestaria para resolver tanto o item **a** quanto o item **b** desse exemplo resolvido, ao passo que a expressão $\mathrm{T} = F.D$ só se aplica no caso particular do item **a** em que a força F tem um valor conhecido e constante no tempo.

A potência desenvolvida pelo Raul, portanto, é a potência desenvolvida pela tração T:

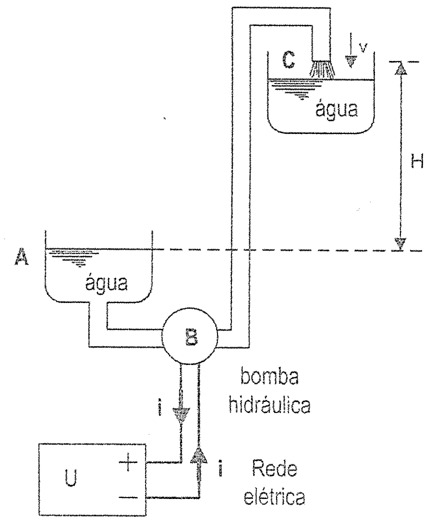
$$Pot_{\,Raul} = Pot_{\,tração} = \frac{\mathrm{T}_{tração}}{\Delta t} = \frac{M.g.H}{\Delta t} \quad \text{(potência média)}$$

Em geral, quando nada é dito sobre a forma como um corpo é levantado, considera-se que ele parte do repouso (na posição inicial) e chega em repouso (à posição final) conforme o item b. Assim, o trabalho realizado para levantar um corpo, na maioria das situações, pode ser calculado pela expressão $\mathrm{T}_{levantar} = M.g.H$.

Exemplo Resolvido 16: Uma bomba (B) leva água à taxa de 0,03 m^3 por segundo, de um depósito (A) para uma caixa (C) no topo de uma casa. O desnível vertical entre o depósito e a caixa d'água vale H = 9,8 m e a velocidade da água na extremidade do tubo de descarga é v = 2 m/s. Considerar g = 10 m/s^2.
a) Qual a potência desenvolvida pela bomba hidráulica ?
b) Sabendo que ela opera com rendimento de 75 %, qual a potência elétrica que ela recebe ?
c) Determine a corrente elétrica puxada por essa bomba, sabendo que ela está conectada a uma rede elétrica que fornece uma tensão U = 200 V.

Solução:

a) Para determinar a potência desenvolvida pela bomba, calcularemos inicialmente o trabalho realizado por ela ao elevar a água, fazendo uso do Princípio do Trabalho Total.
Durante a subida da água, atuam sobre ela o seu peso (que realiza trabalho negativo na subida), a "força" ascendente exercida pela bomba d´água (que realiza trabalho positivo na subida), além de forças tangenciais exercidas pela tubulação da água, mas essas não realizam trabalho. Assim, usando o Princípio do Trabalho Total, escrevemos:



$$T_{total} = T_{peso} + T_{bomba} = Ecin_{final} - Ecin_{inicial}$$

$$(-m.g.H) + T_{bomba} = \frac{m.v^2}{2} - 0 \quad \Rightarrow \quad T_{bomba} = \frac{m.v^2}{2} + m.g.H$$

Assim, para determinar a potência desenvolvida pela bomba, dividimos cada membro da expressão acima por Δt:

$$\frac{T_{bomba}}{\Delta t} = \frac{m.v^2}{\Delta t.2} + \frac{m.g.H}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad Pot_{bomba} = \frac{m}{\Delta t}.\left(\frac{v^2}{2} + g.H\right) \quad \textbf{(eq46)}$$

O termo $m/\Delta t$ é a vazão (em massa) de água do sistema, expresso em unidades do SI (kg/s). Lembrando que o volume de 1m^3 corresponde a 1000 litros (para qualquer substância), e que 1 kg de água ocupa um volume de 1 litro, podemos escrever:

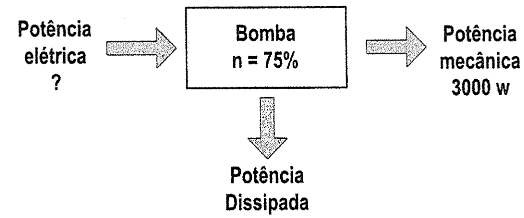
$$\frac{0{,}03\ m^3}{1\ s} \equiv \frac{30\ litros}{1\ s} \equiv \frac{30\ kg}{1\ s} = \frac{m}{\Delta t}$$

Substituindo na expressão **(eq46)** para a Pot_{bomba}, vem:

$$Pot_{bomba} = \frac{m}{\Delta t}.\left(\frac{v^2}{2} + g.H\right) = \frac{30\ kg}{1\ s}.\left(\frac{2^2}{2} + 10.\ 9{,}8\right)$$

$$Pot_{bomba} = 30\ .\ 100 = 3000\ W$$

b) Observe o diagrama da bomba hidráulica mostrado a seguir. Como a bomba opera com rendimento de 75%, isso significa que a potência mecânica, obtida em sua saída, é 75% da potência elétrica que ela recebe em sua entrada.



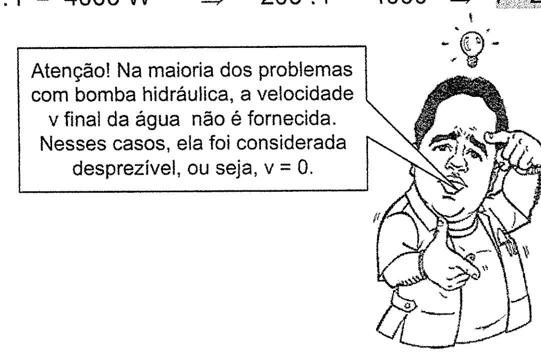
Assim, vem:

$$Pot_{mec} = 0{,}75 \times Pot_{elétr} \quad \Rightarrow \quad 3000 = 0{,}75 \times Pot_{elétr}$$

$$Pot_{elétr} = 4000\ W$$

c) Sabendo a tensão elétrica U = 200V recebida pela bomba hidráulica, determinamos a corrente elétrica que ela puxa:

$$Pot_{elétr} = U\ .\ i = 4000\ W \quad \Rightarrow \quad 200\ .\ i = 4000 \quad \Rightarrow \quad i = 20A$$

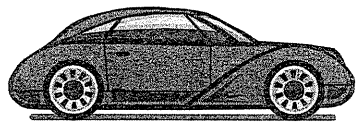


Assim, na maioria dos problemas envolvendo bomba d'água, a expressão **(eq46)** se simplifica para:

$$Pot_{bomba} = \frac{M.g.H}{\Delta t} \qquad \textbf{(eq47)}$$

A expressão (eq47) também calcula a potência mecânica de uma hidrelétrica.

Exemplo Resolvido 17: Um Masserati de massa M = 1000 kg consegue partir do repouso e atingir a incrível velocidade de 144 km/h (40 m/s) em 5 segundos. Admitindo que o mesmo desenvolva uma aceleração constante, determine:
a) a aceleração do móvel;
b) a potência desenvolvida pelo carro num instante **t** genérico ($0 \le t \le 5s$);
c) a potência média desenvolvida no intervalo [0s, 5s].



Solução:
a) a aceleração escalar do móvel coincide com a aceleração média dada por:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(40-0)\ m/s}{(5-0)\ s} = 8\ m/s^2$$

b) a força motriz que acelera esse veículo é dada pela 2ª lei de Newton:

$$F_R = M.a = 1000\ .\ 8\ = 8000\ N$$

A potência instantânea, desenvolvida por essa força motriz, é dada pela expressão eq39. A velocidade do móvel no instante t é dada pela cinemática do MUV:

$$V = V_o + a.t\ =\ 0\ +\ 8.t\ \Rightarrow\ V = 8.t$$

Assim, a potência (instantânea) desenvolvida pelo motor do carro num instante **t** genérico é dada por:

$$Pot(t)\ = F(t).V(t) =\ 8000\ .\ 8.t\ \Rightarrow\ Pot\ =\ 64000.t$$

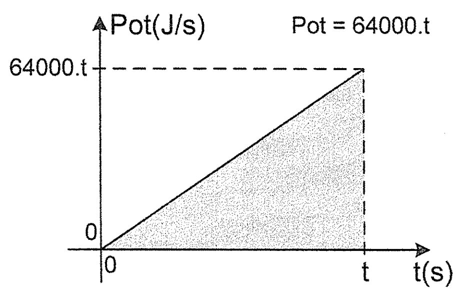


Figura 53 - Gráfico da potência instantânea desenvolvida pelo veículo

c) A Figura 53 mostra o gráfico da potência instantânea desenvolvida pelo veículo. A área sob o gráfico fornece o trabalho realizado pelo motor no intervalo de tempo [0s, 5s], ou seja, a quantidade de energia química do combustível efetivamente convertida em energia mecânica:

$$T_{motor}\ \equiv\ \text{área do gráfico} = \frac{t \times 64000t}{2} = 32.000.t^2 = 32.000.(5)^2 = 800.000\ J$$

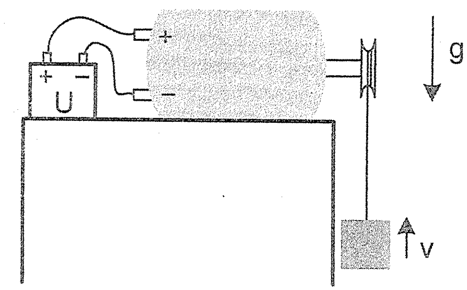
Esse mesmo resultado teria sido obtido pelo Teorema da Energia Cinética:

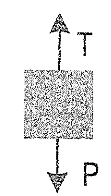
$$T_{motor}\ = Ecin_{\ final} - Ecin_{\ inicial}\ = \frac{M.V^2}{2} - 0 = \frac{1000.(40)^2}{2} - 0 = 800.000\ J$$

A potência média desenvolvida pelo veículo, nesse intervalo de tempo, vale:

$$Pot_{\ média} = \frac{T\ motor}{\Delta t} = \frac{800.000J}{5s} = 160.000\ J/s = 160.000\ W$$

Exemplo Resolvido 18: Na situação da figura, o motor elétrico faz com que o bloco de massa m = 40 kg de massa suba com velocidade constante v = 3 m/s. O cabo que sustenta o bloco é ideal, a resistência do ar é desprezível e adota-se $g = 10\ m/s^2$. Considerando que nessa operação o motor está ligado a uma rede elétrica que fornece uma tensão U = 200V e puxa uma corrente elétrica i = 10 A, calcule:
a) a potência útil desse motor
b) o seu rendimento.





Solução:
Um motor é uma máquina que recebe energia elétrica em seus terminais de entrada e a converte em energia mecânica a ser disponibilizada em seu eixo para alguma finalidade, como, por exemplo, elevar um bloco.

Durante a subida do bloco, agem nele a tração T com que o motor puxa o bloco (transmitida ao bloco através do cabo) e o peso P do bloco.

O trabalho mecânico realizado pelo motor , para elevar o bloco em uma distância vertical Δh, é o trabalho realizado pela força que o motor exerce no bloco, ou seja, o trabalho realizado pela tração T.

Mas quanto vale a tração T ? Ela é constante ou variável ? Ora, como o bloco sobe em MRU (velocidade constante, equilíbrio dinâmico, aceleração nula a = 0), a força resultante nele é nula, assim, a tração tem a mesma intensidade do peso (T = P = M.g = constante).

Sendo constante a tração T, seu trabalho pode ser calculado por $\mathrm{T} = \mathrm{F.d}$:

$$\mathrm{T}_{motor} = \mathrm{T}_{tração} = \mathrm{T}.\Delta h = \mathrm{M.g.}\Delta h$$

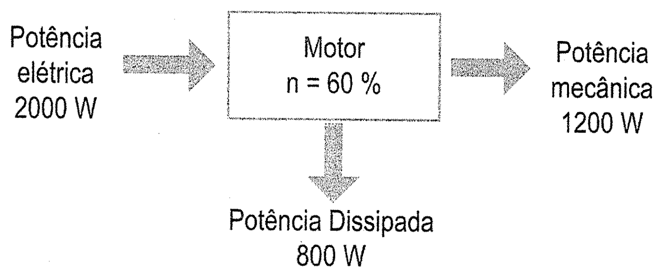
Assim, a potência mecânica desenvolvida pelo motor, para levantar a caixa com velocidade v constante, vale:

$$Pot_{motor} = \frac{\mathrm{T}_{motor}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{T}_{tração}}{\Delta t} = M.g.\frac{\Delta h}{\Delta t} = M.g.v = 40 \times 10 \times 3 = 1200 \text{ J/s} = 1200\text{ W}$$

Esse motor gasta 1200 J/s levantando esse bloco com essa velocidade. Mas de onde provém essa energia ? Ora, ele recebe energia elétrica para converter em energia mecânica. Quantos joules por segundo o motor recebe de energia elétrica da fonte ?

$Pot_{elétrica} = U.i = 200 \times 10 = 2000 \text{ J/s} = 2000\text{ W}$

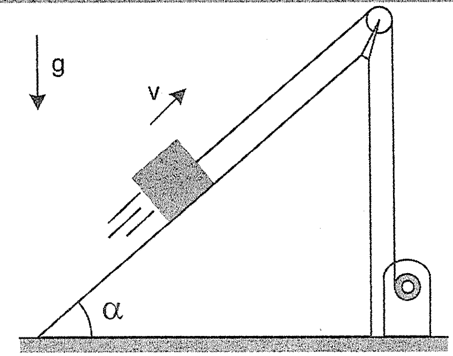
Assim, se o motor recebe 2000 J/s da fonte elétrica e converte 1200 J/s em energia mecânica, a potência dissipada será 2000 J/s – 1200 J/s = 800 J/s.



Adicionalmente, como o motor converte em energia mecânica 1200 J de cada 2000J que recebe em sua entrada, ele está operando com rendimento:

$$\eta = \frac{Pot_{motor}}{Pot_{elétrica}} = \frac{1200}{2000} = 0,6 = 60\%$$

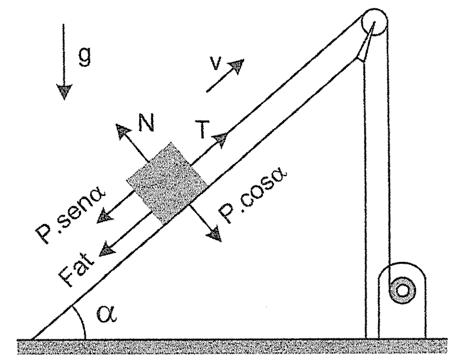
Exemplo Resolvido 19: O motor da figura arrasta o bloco de massa M = 10 kg com velocidade constante v = 4 m/s ladeira acima. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano inclinado é 0,50. Qual a potência útil do motor nesse deslocamento? Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\cos\alpha = 0,80$; $\text{sen}\,\alpha = 0,60$



Solução:

Durante a subida do bloco, age sobre ele uma força de atrito cinético de intensidade:

$Fat = \mu.N = \mu.(M.g.\cos\alpha) = 0,5 \,.\, 10.\, 10.\, 0,8 = 40\text{ N}$



A tração que arrasta o bloco pode ser determinada lembrando que o bloco se move em MRU (equilíbrio dinâmico) com força resultante nula (a = 0, $F_R = 0$):

$T = P.\text{sen}\alpha + Fat = M.g.\text{sen}\alpha + Fat = 10.10.0,6 + 40 = 100\text{ N}$

A potência desenvolvida pelo motor será a potência desenvolvida pela tração T, dada por $Pot_{motor} = T.v.\cos\theta$, onde $\theta = 0^o$ é o ângulo formado entre a tração T e a velocidade v do bloco:

$Pot_{motor} = T.v.\cos\theta = 100 \times 4 \times 1 = 400\text{ W}$

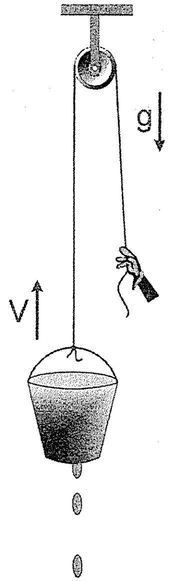
Exemplo Resolvido 20: A figura mostra um balde de m = 500g, contendo inicialmente 2,5 litros de água, sendo levantado com velocidade constante desde o chão até uma altura h = 5 m em 20 s. Entretanto, devido a um pequeno orifício em sua base, o balde está vazando água a uma taxa de 0,05 litro/s. O prof. Renato Brito pede que você determine:

a) A força que o operador aplica na corda, em função da altura h;

b) O trabalho realizado pelo operador para levantar o balde até a altura h = 5m;

c) A potência média desenvolvida pelo operador durante essa operação;

d) A potência desenvolvida pelo operador no instante t = 12 s.



Solução:

a) Durante a subida, o balde se move com velocidade constante dada por:

$$V = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{5\ \text{m}}{20\ \text{s}} = 0{,}25\ \text{m/s}$$

A altura do balde varia com o tempo de acordo com a função:

$$h = h_o + V.t = 0 + 0{,}25.t \Rightarrow \boxed{h = 0{,}25.t} \qquad \textbf{(eq48)}$$

O balde (de massa 0,5 kg) inicialmente contém 2,5 litros de água (2,5 kg de água), totalizando uma massa M = 3 kg no instante t = 0 s. Entretanto, o mesmo derrama água a uma taxa de 0,05 litros por segundo (0,05 kg/s), de forma que a massa do conjunto balde+água (em Kg) varia com o tempo de acordo com a função M = 3 – 0,05.t, e o seu peso P será dado por:

$$P = M.g = (3 - 0{,}05.t).10 \Rightarrow \boxed{P = 30 - 0{,}5.t} \qquad \textbf{(eq49)}$$

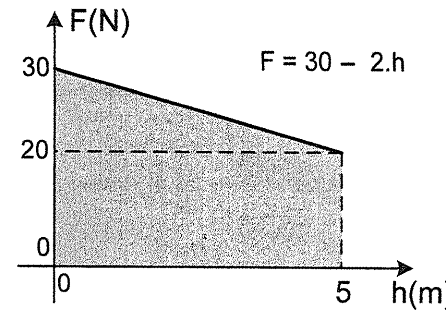
Como o balde é levantado com velocidade constante (a = 0, F_R = 0, equilíbrio dinâmico), a força resultante atuando sobre ele deve ser nula. Assim, a tração F que operador exerce sobre a corda e é transmitida até o balde deve ser igual ao peso do balde em cada instante:

$$F = P \Rightarrow \boxed{F = 30 - 0{,}5.t} \qquad \textbf{(eq50)}$$

Isolando o parâmetro **t** em eq48 e substituindo em eq50, encontramos a variação da força de tração F aplicada pelo operador em função da altura h:

$$F = 30 - 0{,}5.t = 30 - 0{,}5.\left(\frac{h}{0{,}25}\right) = 30 - 2.h \Rightarrow \boxed{F = 30 - 2.h} \qquad \textbf{(eq51)}$$

b) Como a força F é variável, não podemos calcular o trabalho realizado por ela pela relação $\mathcal{T}$ = F.d.cosα. Nesse caso, calcularemos a área sob o gráfico F x h da função linear expressa em eq51:



$$\mathcal{T}_F \overset{n}{=} \text{área} = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(30+20).5}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{T} = 125\ \text{J}} \qquad \textbf{(eq52)}$$

c) Como o operador realizou um trabalho de 125 J durante 20 s, a potência média desenvolvida por ele, nesse intervalo de tempo, é dada por:

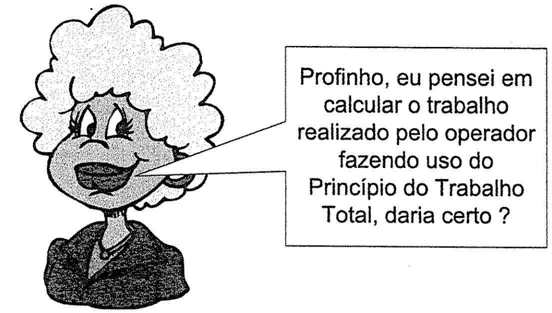
$$Pot_m = \frac{\mathcal{T}_F}{\Delta t} = \frac{125\ \text{J}}{20\ \text{s}} = 6{,}25\ \text{J/s} = \boxed{6{,}25\ \text{W}}$$

d) No instante t = 12 s, o balde se move com velocidade V = 0,25 m/s sob ação de uma força F cuja intensidade é dada pela relação eq50:

$$F = 30 - 0{,}5.t = 30 - 0{,}5.(12) = \boxed{24\ \text{N}}$$

Assim, a potência desenvolvida pela força tensora F, no instante T = 12 s, é dada pela relação eq45 :

$$Pot_{\text{instantânea}} = F.V.\cos\alpha = 24.(0{,}25).1 = 6\ \text{J/s} = \boxed{6\ \text{W}}$$



Claudete, vejamos o que ocorre ao aplicarmos o Princípio do Trabalho Total (Teorema da Energia Cinética) para calcular o trabalho realizado pelo operador no item b desse problema.

O trabalho total realizado sobre o balde, durante a sua subida, é a soma dos trabalhos realizados pela tração F e pelo seu peso P:

$$\mathcal{T}_{Total} = \Sigma\mathcal{T}_{Todos} = \mathcal{T}_F + \mathcal{T}_{peso} = Ecin_{final} - Ecin_{inicial} \qquad \textbf{(eq53)}$$

Entretanto, como o bloco sobe em MRU, a tração F e o pelo P que agem sobre ele têm o mesmo valor, mesma direção e sentidos contrários em cada instante. Adicionalmente, como ambas as forças também sofrem igual deslocamento durante a subida, realizam trabalhos iguais em módulo (dado por eq46), mas de sinais opostos:

T_F = +125 J (Tração F ↑ aponta a favor do deslocamento ↑ na subida)

T_{Peso} = – 125 J (Peso P ↓ aponta contra o deslocamento ↑ na subida)

Como a massa do balde+água, em t = 0 s, vale M_i = 3 kg, sua energia cinética inicial vale:

$$Ecin_{\,inicial} = \frac{M_i.V_i^2}{2} = \frac{3.(0,25)^2}{2}$$

Como a massa do balde+água, no instante final t = 20 s, vale apenas M_F = 2 kg, sua energia cinética final vale:

$$Ecin_{\,Final} = \frac{M_i.V_i^2}{2} = \frac{2.(0,25)^2}{2}$$

Substituindo em eq53, temos:

$$T_{Total} = T_F + T_{peso} = Ecin_{\,final} - Ecin_{\,inicial}$$

$$(-125\text{ J}) + (+125\text{ J}) = \frac{2.(0,25)^2}{2} - \frac{3.(0,25)^2}{2}$$

O cálculo acima nos mostra que chegamos a uma clara incompatibilidade ao tentar fazer uso do Princípio do Trabalho Total nesse problema, pelo fato da massa do sistema balde+água ser variável. Isso ocorre pelo fato do Princípio do Trabalho Total (Teorema da Energia Cinética) não ser válido em sistemas com massa variável.

Propriedade 10: O Princípio do Trabalho Total (Teorema da Energia Cinética), bem como o Princípio do Trabalho Realizado pelas Forças Não-Conservativas, **não são válidos** para sistemas com massa variável.

1.19 – COMPLEMENTOS – A EQUAÇÃO DE TORRICELLI GENERALIZADA

A equação de Torricelli usual (eq48) se aplica a movimentos com aceleração escalar constante (MUV), conforme o gráfico da Figura 54:

$$V^2 = V_o^2 + 2.a.(x-x_o) \qquad \textbf{(eq54)}$$

Entretanto, o termo "$a.(x-x_o)$" representa a área sombreada sob o gráfico da aceleração escalar em função da posição escalar X mostrado na Figura 54.

Dessa forma, aproveitamos para generalizar, afirmando que a equação de Torricelli, em sua forma mais geral, pode reescrita como:

$$V^2 = V_o^2 + 2.(\text{área}) \qquad \textbf{(eq55)}$$

onde o termo "área" se refere à área sob o gráfico da aceleração escalar em função da posição X do móvel.

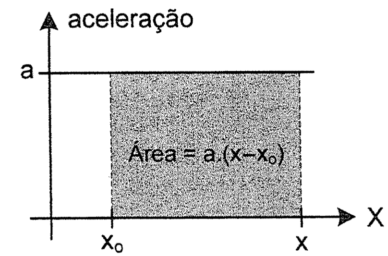


Figura 54

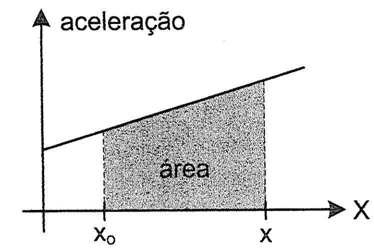
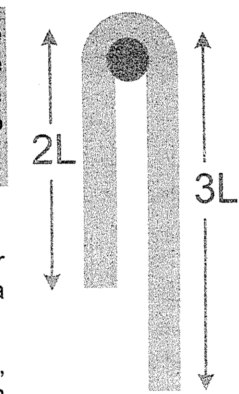


Figura 55

Essa versão generalizada da equação de Torricelli se aplica até mesmo quando a aceleração varia durante o movimento, como no caso genérico do gráfico da Figura 55.

Podemos tirar proveito desse fato para resolver problemas de Dinâmica nos quais o gráfico da aceleração escalar em função de x seja acessível e possua um formato que permita o cálculo direto da área sob a curva sem recursos de Cálculo Integral. Afinal de contas, matar uma mosca com um canhão não tem graça, tem ☺ ?

Exemplo Resolvido 21: Uma corda homogênea uniforme de comprimento 5L é pendurada verticalmente em um suporte liso e abandonada do repouso da posição indicada na figura. Determine a velocidade da corda, ao perder o contato com o suporte.



Solução:

A aceleração desse sistema varia linearmente desde o valor inicial $a_i = g/5$ até o valor final $a_F = g$ enquanto a corda sofre um deslocamento escalar $\Delta y = 2L$.

Para se determinar a aceleração inicial a_i desse sistema, podemos fazê-lo calculando a aceleração do sistema análogo mostrado na Figura 56b pela aplicação direta da segunda lei de Newton:

$$F_R = \text{massa}.\,a_i \quad\Rightarrow\quad 3Mg - 2Mg = 5M.a_i \quad\Rightarrow\quad a_i = g/5$$

A partir da configuração inicial, o sistema sofrerá um deslocamento escalar $\Delta y = 2L$ até assumir a configuração final mostrada na Figura 56c, na qual a corda encontra-se em queda livre sob ação exclusiva da gravidade, donde se concluir que sua aceleração final vale $a_F = g$.

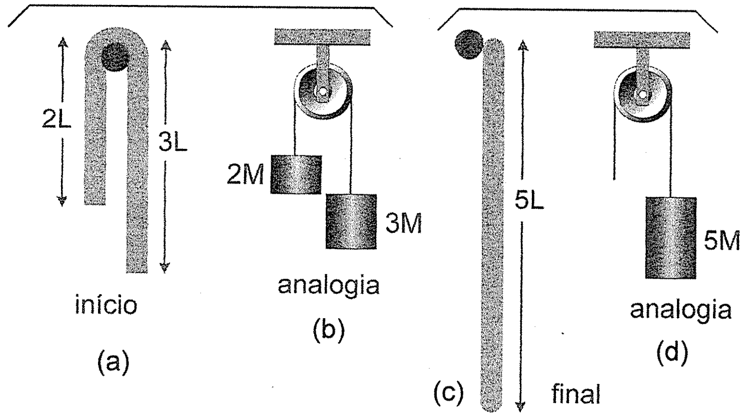


Figura 56

A aceleração escalar da corda varia, em função da sua ordenada y, de acordo com o gráfico abaixo:

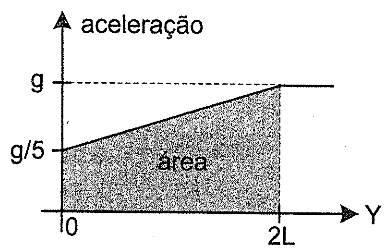


Figura 57

A área sob a curva corresponde à área de um trapézio, sendo dada por:

$$\text{área} = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{\left(g+\frac{g}{5}\right).2L}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{área} = \frac{6gL}{5}}$$

Assim, para determinar a velocidade final da corda, aplicamos a equação de Torricelli generalizada eq55:

$$V^2 = V_o^2 + 2.(\text{área}) \qquad \textbf{(eq55)}$$

$$V^2 = 0^2 + 2.\left(\frac{6gL}{5}\right)$$

$$\boxed{V = 2\sqrt{\frac{3gL}{5}}}$$

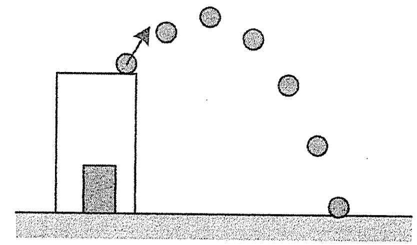
PROBLEMAS PROPOSTOS

Questão 28 -

Um coco foi rebolado do alto de um prédio de 15 m de altura com uma velocidade V_o = 10 m/s numa direção que forma um ângulo $\alpha = 60^o$ com a horizontal. Se a gravidade local vale $g = 10$ m/s^2 e a resistência do ar é desprezível, pede-se determinar:

a) a velocidade do coco ao atingir o solo

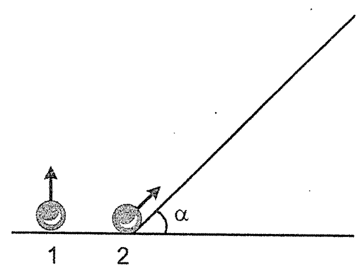
b) a altura máxima atingida pelo coco



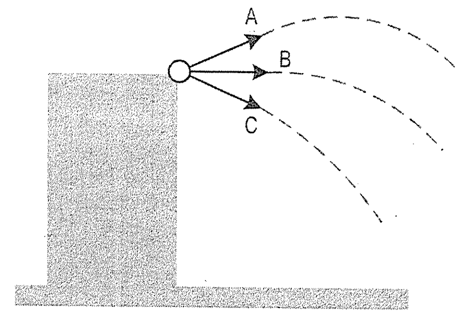
Questão 29

(UFPI 2003) Um projétil é lançado de uma altura de 2,2 metros acima do solo, com uma velocidade inicial que faz um ângulo de 60° com a horizontal. O valor da aceleração da gravidade no local é igual a 10 m/s^2 e o projétil atinge o solo com uma velocidade de 12 m/s. Podemos afirmar corretamente que sua velocidade no ponto mais alto de sua trajetória tem módulo igual a:

a) 6,0 m/s. b) 5,0 m/s c) 4,0 m/s d) 3,0 m/s. e) 2,0 m/s.



questão 30



questão 31

Questão 30 -

Duas esferas 1 e 2, de mesma massa m, são lançadas com mesma velocidade inicial V_o, sendo que a 1ª bola foi lançada verticalmente para cima, ao passo que a 2ª bola, ao longo de um plano liso de inclinação α com a horizontal. Sendo g a aceleração da gravidade, pode-se afirmar que:

a) as esferas atingem a mesma altura máxima ao mesmo tempo;

b) as esferas atingem a mesma altura máxima, mas a bola 1 chega lá antes da esfera 2;

c) as esferas atingem a mesma altura máxima, mas a bola 2 chega lá antes da esfera 1;

d) a altura máxima atingida pela esfera 1 é superior à altura máxima atingida pela esfera 2

e) a altura máxima atingida pela esfera 2 é superior à altura máxima atingida pela esfera 1

Questão 31 -

Três pedras A, B e C, de massas respectivamente m, 2m e 3m, são lançados de uma mesma altura H com velocidades iniciais V_O idênticas em módulo, num local onde a gravidade vale g. A figura mostra a trajetória descrita por cada pedra. Sejam V_A, V_B e V_C as velocidades com que cada uma delas toca o solo e, T_A, T_B e T_C os tempos de vôo dos corpos. Pode-se afirmar que :

a) $V_A > V_B > V_C$ e $T_A = T_B = T_C$

b) $V_A = V_B = V_C$ e $T_A > T_B > T_C$

c) $V_B > V_A > V_C$ e $T_A > T_B > T_C$

d) $V_B = V_C = V_A$ e $T_A = T_B = T_C$

Questão 32 (Cesgranrio)

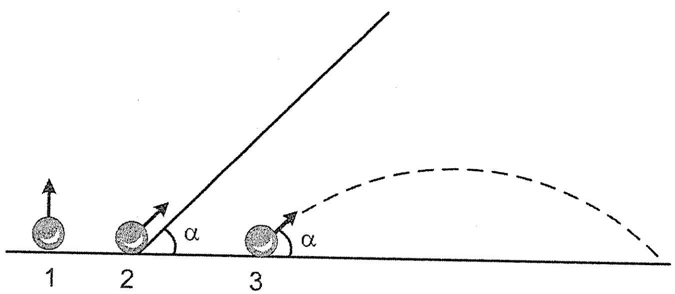
Três bolinhas de aço idênticas são lançadas a partir do mesmo plano horizontal e com a mesma velocidade inicial em módulo:

I) a bola 1 é lançada verticalmente;

II) a bola 2 é lançada ao longo de um plano inclinado liso muito grande, de inclinação α;

III) a bola 3 é lançada em direção oblíqua (projétil), numa direção inicial que forma ângulo α com a horizontal.

Sejam h_1, h_2 e h_3, respectivamente, as alturas máximas atingidas pelas três bolas. Se todos os atritos são desprezíveis, podemos afirmar que:

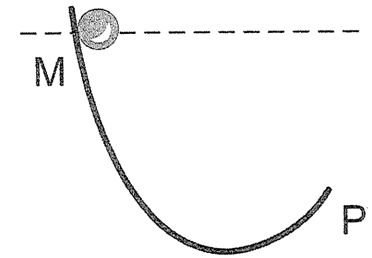


a) $h_1 = h_2 = h_3$ b) $h_1 > h_2 > h_3$ c) $h_1 = h_2 > h_3$

d) $h_1 > h_2 = h_3$ e) $h_1 < h_2 = h_3$

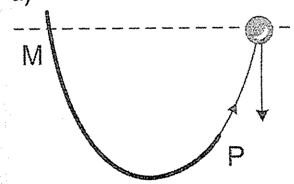
Questão 33 - (Cesgranrio-RJ)

Uma bolinha de aço é abandonada (velocidade inicial nula) a partir do ponto **M** da calha indicada na figura, de onde desliza com atrito desprezível.

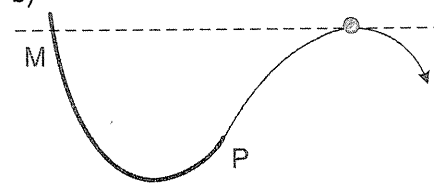


Qual das opções seguintes melhor representa a trajetória da bola depois de sair da calha na extremidade **P**? (Despreza-se a resistência do ar.)

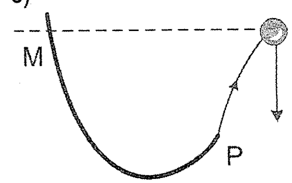
a)



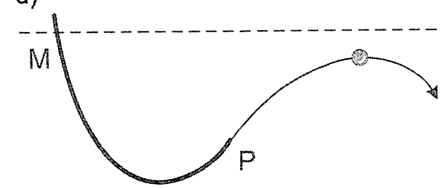
b)



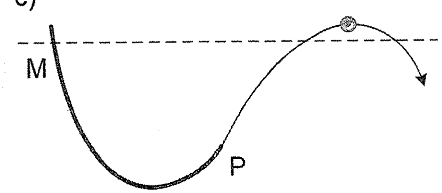
c)



d)

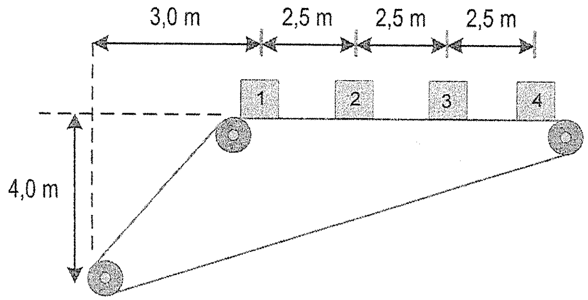


e)



Questão 34 -

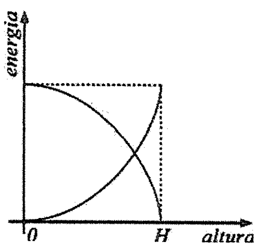
Quatro corpos considerados como pontos materiais, de massas m iguais, estão sobre uma esteira transportadora, que se encontra parada e travada na posição indicada na figura. O corpo 1 está no início do trecho inclinado da esteira e as massas desta e dos roletes podem ser consideradas desprezíveis, quando comparadas com as massas dos quatro corpos. Num determinado instante, destrava-se o sistema e a esteira começa a movimentar-se, transportando os corpos, sem escorregamento. Calcule a velocidade do corpo 1, quando deixar a esteira no ponto A. Adote $g = 10\ m/s^2$.



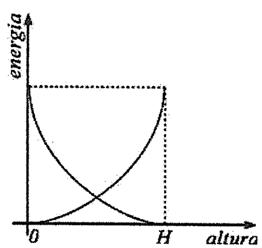
Questão 35 -

(UFPB) Ao efetuar a manutenção em uma torre de alta tensão, um eletricista deixa cair, de uma altura *H*, um alicate. Sendo desprezível a resistência do ar, as energias cinética e potencial do alicate, em função de sua altura em relação ao solo, estão mais bem representadas no gráfico

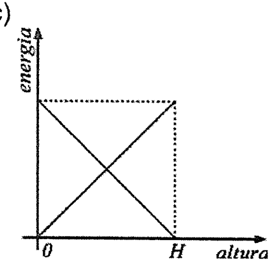
a)



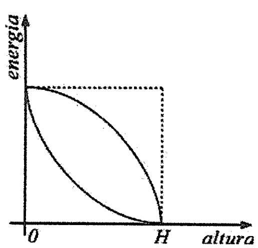
b)



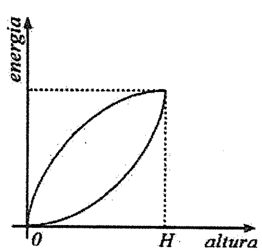
c)



d)



e)

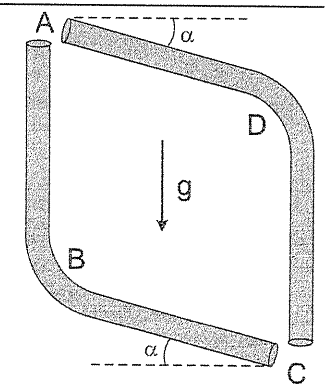


Questão 36 - (ITA 97)

Na figura, ABC e ADC são tubos contidos em um mesmo plano vertical. Todos os trechos AB, BC, AD e DC têm o mesmo comprimento L, estando AB e DC posicionados verticalmente. Uma esfera 1 parte do repouso em A, percorre o tubo ABC e atinge C com velocidade v_1, gastando um tempo Δt_1 nesse percurso. Outra esfera 2 parte do repouso em A, percorre o tubo ADC e atinge C com velocidade v_2, gastando um tempo Δt_2 nesse percurso. Desprezando qualquer dissipação de energia mecânica pergunta-se:

a) qual a maior velocidade final, v_1 ou v_2 ?

b) qual intervalo de tempo será maior, Δt_1 ou Δt_2 ?

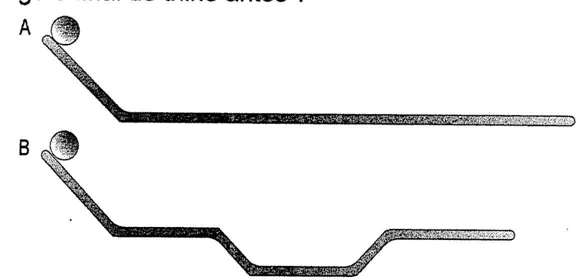


Questão 37 -

Duas bolas são liberadas do repouso, ao mesmo tempo, da extremidade esquerda dos trilhos A e B lisos, de mesmo comprimento, que diferem apenas por uma ligeira depressão no trilho B, como mostra a Figura.

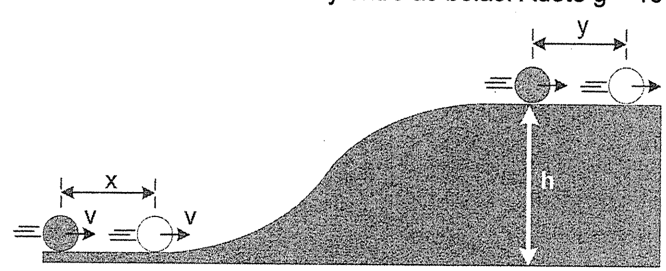
a) qual delas atinge o final do trilho com maior velocidade final ?

b) qual delas atinge o final do trilho antes ?



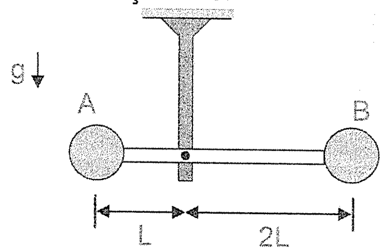
Questão 38 -

Duas bolinhas movem-se sem atrito sobre uma superfície horizontal com a mesma velocidade $v = 10\ m/s$, distanciadas entre si $x = 5\ m$. Em seguida, elas sobem uma rampa e atingem a superfície horizontal superior a uma altura $h = 1{,}8\ m$. Determine a nova distância y entre as bolas. Adote $g = 10\ m/s^2$.



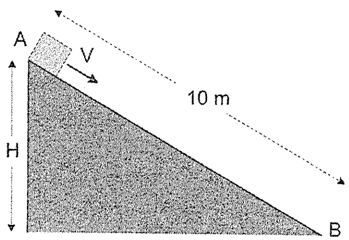
Questão 39 -

Duas esferas de massa m estão fixas a uma haste rígida de massa desprezível e comprimento 3L como mostra a figura. A haste está livre para girar em torno de um ponto fixo. O prof. Renato Brito pede para você determinar a velocidade da esfera B ao passar pela posição mais baixa durante a rotação livre.

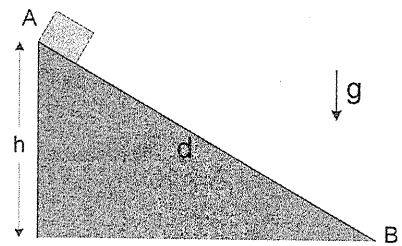


Questão 40 - (FUVEST)

Um bloco de 2,0 kg é lançado do topo de um plano inclinado, com velocidade escalar de 5,0 m/s, conforme indica a figura. Durante a descida, atua sobre o bloco uma força de atrito constante de intensidade 7,5N, que faz o bloco parar após deslocar-se 10 m. Calcule a altura **H**, desprezando o efeito do ar e adotando $g = 10\ m/s^2$



questão 40



questão 41

Questão 41 - (FUVEST)

Um pequeno corpo de massa m é abandonado em A com velocidade nula e escorrega ao longo do plano inclinado, percorrendo a distância **d**. Ao chegar a B, verifica-se que sua velocidade é igual a $\sqrt{gh}$. Pode-se então deduzir que o valor da força de atrito que agiu sobre o corpo, supondo-a constante, é:

a) zero.

b) mgh / d.

c) mg/ 2.

d) mgh / (2d).

e) mgh / (4d).

Questão 42 –

Um corpo de massa m, inicialmente em repouso, é puxado para cima por uma corda, ao longo de uma rampa lisa inclinada com a horizontal em um ângulo α. A tração T na corda é mantida paralela ao plano. Depois de ter percorrido uma distância L, ao longo da rampa, a velocidade do corpo vale v. O trabalho realizado pela tração T, nesse deslocamento, vale :

a) $m.g.L.sen\alpha$

b) $m.g.L.cos\alpha$

c) $m.g.L.cos\alpha + m.v^2 / 2$

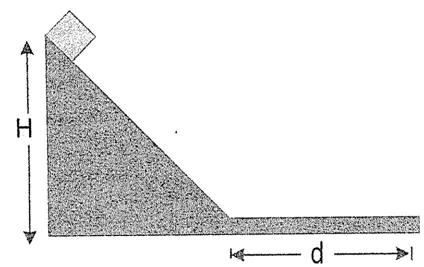
d) $m.g.L.sen\alpha + m.v^2 / 2$

e) $T.L.cos\alpha$

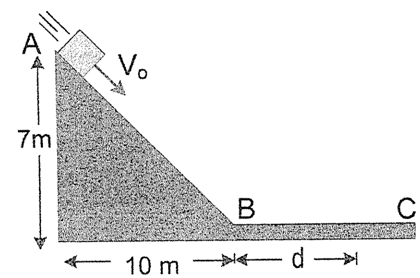
Questão 43 –

Um bloco de massa **m**, abandonado no topo de um plano inclinado liso de altura **h**, desce a ladeira e atinge um piso horizontal rugoso, de coeficiente de atrito μ, onde o bloco, então, percorre uma distância **d** até parar. Se a aceleração da gravidade vale g, a distância **d** vale:

a) $\mu . H$ b) $\dfrac{H}{\mu}$ c) $\dfrac{H}{\mu+1}$ d) $\dfrac{H.\mu}{\mu+1}$



questão 43



Questão 44

Questão 44 - (UFMG)

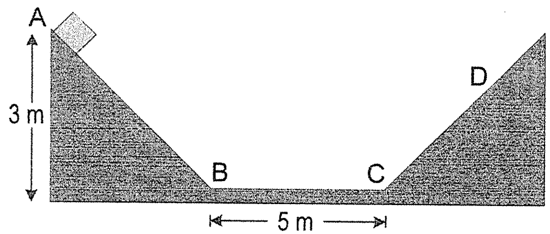
Um corpo de massa m possui velocidade inicial em *A* de 2 m/s e percorre a trajetória ABC, como mostra a figura. O trecho em rampa é perfeitamente liso e a partir do ponto *B* existe atrito de coeficiente igual a 0,10. A distância horizontal d que o corpo percorre até parar é (adote $g = 10\ m/s^2$)

a) 60 m b) 81 m c) 72 m d) 90 m e) 45 m

Dica: o aluno não deve resolver o problema dividindo-o em várias partes, escrevendo várias equações. O mais interessante da ferramenta Trabalho e Energia é exatamente o fato de que, com uma única equação, o problema está resolvido.

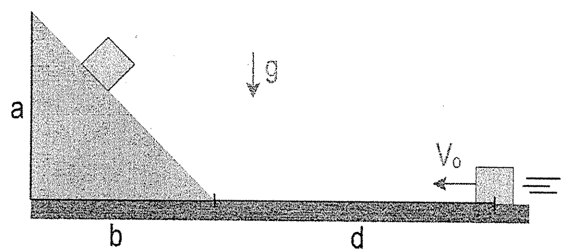
Questão 45 –

Um bloco é abandonado em repouso num ponto *A* de um plano inclinado, conforme a figura. Os trechos inclinados AB e CD são perfeitamente lisos e o trecho horizontal BC apresenta atrito de coeficiente $\mu = 0{,}40$. O prof. Renato Brito pede para você determinar a altura máxima que o bloco atinge no trecho CD.



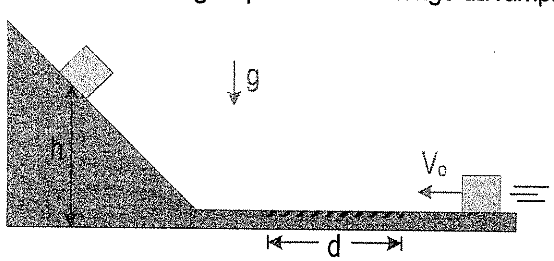
Questão 46 –

Um bloco é lançado horizontalmente com velocidade inicial V_o em direção a uma rampa inclinada, como mostra a figura abaixo, num local em que a gravidade vale **g**. Sabendo que o coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície, em todo percurso, vale μ, o prof. Renato Brito pede que você determine a altura máxima atingida pelo bloco ao longo da rampa, em função de **V_o, g, a, b, μ** e **d.**



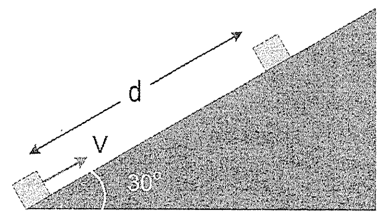
Questão 47

Um bloco é lançado horizontalmente com velocidade inicial V_o em direção a uma rampa inclinada. Durante o percurso horizontal, existe um trecho de comprimento **d** onde há atrito, cujo coeficiente cinético vale μ. O prof. Renato Brito pede que você determine a altura máxima **h** atingida pelo bloco ao longo da rampa.

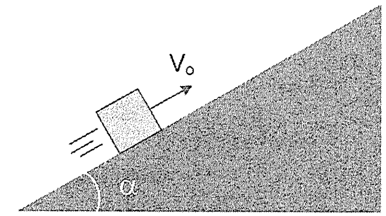


Questão 48 – (ITA)

Da posição mais baixa de um plano inclinado de 30° com a horizontal, lança-se um bloco de massa 5 kg com velocidade de 4 m/s no sentido ascendente. O bloco sobe e desce, retornando a esse ponto com uma velocidade de 3 m/s. Determine a distância d percorrida pelo bloco em seu movimento ascendente ($g = 10\ m/s^2$).



Questão 48



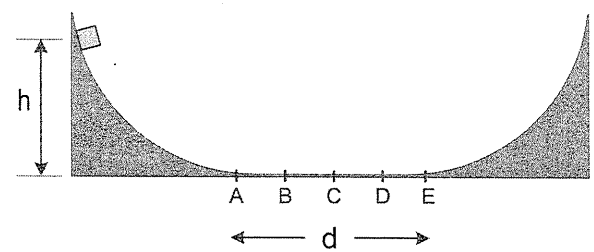
Questão 49

Questão 49 – (ITA 2008)

Na figura, um bloco sobe um plano inclinado, com velocidade inicial V_0. Considere μ o coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície. Determine a sua velocidade na descida ao passar pela posição inicial.

Questão 50 –

Uma pequena caixa de massa m é abandonada a uma altura $h = 5{,}0$ m e escorrega ladeira abaixo em direção ao trecho horizontal onde o coeficiente de atrito vale $\mu = 0{,}2$, e que se encontra dividido em quatro segmentos iguais. Sabendo que só existe atrito no trecho horizontal e que d = 10 m, o prof. Renato Brito pede para você determinar em qual ponto a caixa vai parar.



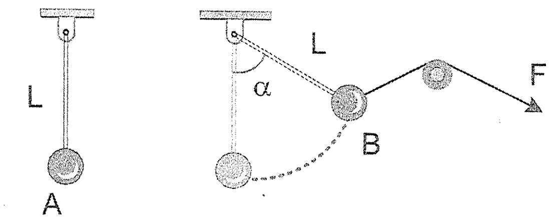
Questão 51

A figura acima mostra a vista em corte de uma bacia de paredes lisas fixa ao solo horizontal. Só existe atrito no trecho horizontal ABCDE, onde o coeficiente de atrito vale μ. Uma pequena caixa de massa m é abandonada de uma altura H o interior da bacia e escorrega oscilando várias vezes, de um lado para o outro ao longo da superfície do recipiente, perdendo energia até finalmente parar no ponto A. O prof. Renato Brito pede para você determinar quantas vezes a caixa passa pelo ponto C até parar:

Questão 52 - (UECE 2006.1)

Uma esfera de massa M é presa verticalmente ao teto por um fio leve inextensível de comprimento L e está inicialmente parada na posição A. Em seguida, uma força F é aplicada à esfera até que a mesma atinja a posição final B em que o fio forma um ângulo α com a vertical. Na posição final, a esfera é mantida em equilíbrio estático. Se a gravidade local vale g e todos os atritos são desprezíveis, o trabalho realizado pela força F nessa operação vale:

a) M.g.L.senα
b) M.g.L.cosα
c) M.g.L.(1 – senα)
d) M.g.L. (1 – cosα)
e) M.g.L.tgα



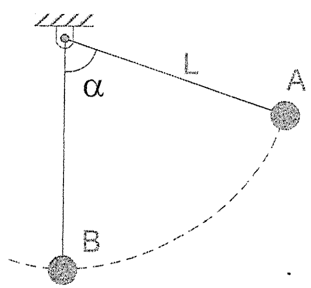
Questão 53

Admita que a mesma esfera da questão anterior seja levada desde o repouso da posição A até a mesma posição final B, lá chegando com uma velocidade V. Determine o trabalho realizado pela força F nessa operação.

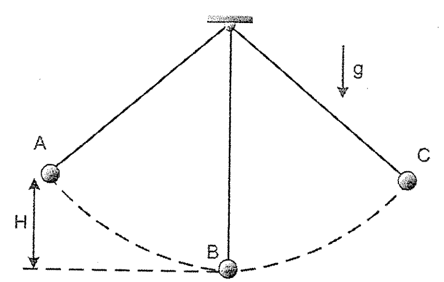
Questão 54 -

O fio ideal da figura tem comprimento L e a esfera tem massa m. A esfera é abandonada do repouso da posição *A* que forma um ângulo α = 60° com a vertical . Sendo g a aceleração da gravidade e desprezando-se a resistência do ar, determine:

a) a velocidade da bola ao passar pela posição B em função de g e L;
b) a tração no fio na posição B em função de m e g;
c) a direção, o sentido e o módulo da aceleração da bola, ao passar pela posição B.
d) a direção, o sentido e o módulo da aceleração da bola, ao partir do repouso da posição A.



Questão 54



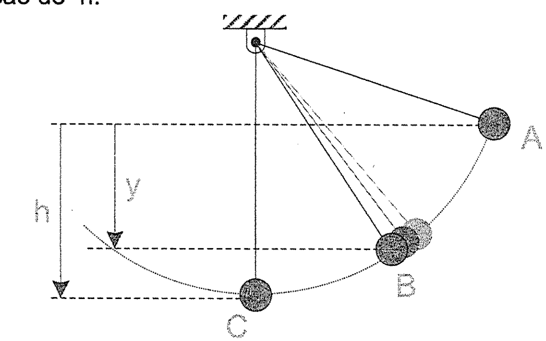
Questão 55

Questão 55 -

O prof. Renato Brito conta que uma pequena esfera de massa **M** está conectada a um fio de comprimento 3L e é abandonada do repouso a partir de uma posição **A** a uma altura h = L do solo, passando a oscilar periodicamente entre os extremos **A** e **C**. Considerando a gravidade g, determine as trações no fio, respectivamente, nas posições B (tangenciando o solo sem tocá-lo) e C.

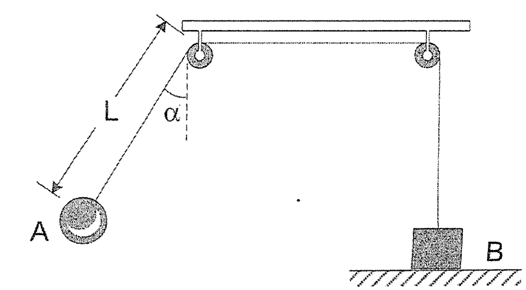
Questão 56 -

Um pêndulo simples, suspenso a um ponto fixo, encontra-se inicialmente em repouso no ponto C, situação em que o fio encontra-se no seu limite de ruptura. O prof. Renato Brito toma a bolinha do pêndulo e a leva até o ponto A, cujo desnível vertical em relação ao ponto C vale **h**. Abandonando a bolinha do repouso, a partir do ponto A, o pêndulo desce espontaneamente e o seu fio se rompe ao passar por um ponto B. Determine o desnível vertical **Y** entre os pontos A e B em função de h.



Questão 57 (ITA)

O fio ideal da figura passa por duas polias fixas e lisas e tem em uma das extremidades uma esfera *A* e na outra um bloco *B*. A massa da esfera *A* vale 1 kg e a massa do bloco *B* vale 2 kg. Adotando g = 10m/s^2 e desprezando a resistência do ar, o prof. Renato Brito pede para você determinar qual o maior ângulo α em que podemos soltar a esfera *A*, de tal maneira que o bloco *B* não deixe o piso.

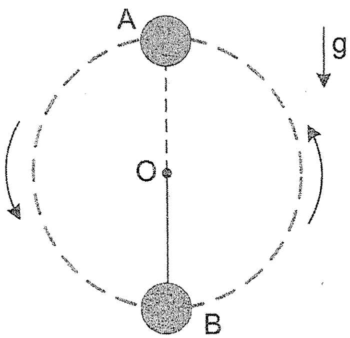


Questão 58

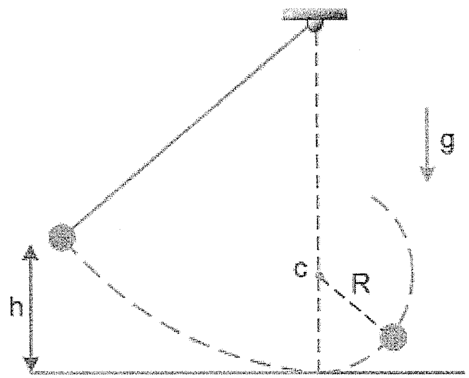
Uma esfera de massa m, ligada a um ponto fixo O, deverá realizar voltas circulares contidas em um plano vertical. No local, a aceleração da gravidade vale g e a influência do ar é desprezível. O prof. Renato Brito pede que você determine a velocidade mínima que a esfera deve possuir, ao passar pelo ponto B, de modo que permita a realização de uma volta completa (looping circular), nos seguintes casos:

a) o elemento conexão entre a esfera do pêndulo e o ponto O é um fio inextensível, flexível e de massa desprezível.

b) o elemento de conexão entre a esfera do pêndulo e o ponto O é uma haste rígida de massa desprezível.



questão 58



Questão 59

Questão 59 (Vunesp)

A figura, fora de escala, mostra um pêndulo simples abandonado à altura H do ponto mais baixo da trajetória. Na vertical que passa pelo ponto de sustentação, um pino faz o fio curvar-se e o pêndulo passa a descrever uma trajetória circular de raio R e centro C. O menor valor de h para que a esfera pendular descreva uma circunferência completa (looping) é:

a) 1,0 R

b) 1,5 R

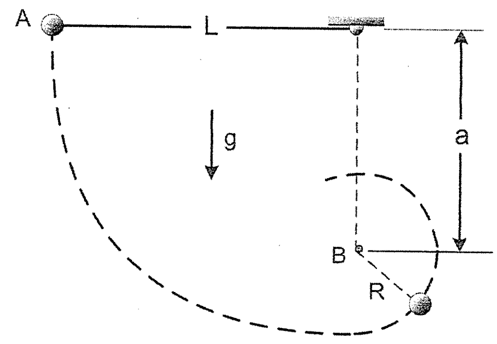
c) 2,0 R

d) 2,5 R

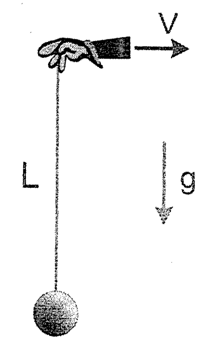
e) 3,0 R

Questão 60

O pêndulo mostrado na figura parte do repouso em A e descreve um ângulo reto antes da corda tocar o pino B. Determine o menor valor da distância **a** para a qual a esferazinha do pêndulo descreverá uma circunferência de centro em B.



questão 60



questão 61

Questão 61

Um operador suspende, por um fio de comprimento **L**, uma esfera de massa **M**, inicialmente em repouso num local em que a gravidade vale **g**. Pergunta-se:

a) com que velocidade horizontal mínima (constante) V o operador deve, subitamente, passar a mover sua mão a fim de que a esfera dê uma volta completa ao redor de sua mão durante o movimento posterior ?

b) qual a tração no fio quando ele passar pela posição horizontal ?

Questão 62

Um pêndulo é abandonado do repouso da posição horizontal A num local em que a gravidade vale g como mostra a figura abaixo . A aceleração resultante da bolinha do pêndulo, em função do ângulo α, é dada por:

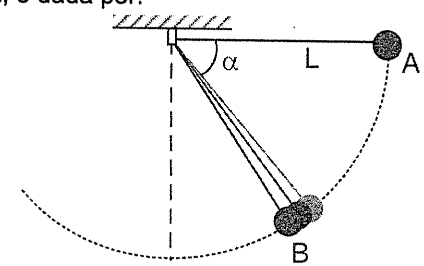
a) $g.\sqrt{3.\text{sen}^2\alpha + 1}$

b) $g.\sqrt{3.\cos^2\alpha + 1}$

c) $2g.\sqrt{\text{sen}^2\alpha + 1}$

d) $2g.\sqrt{\cos^2\alpha + 1}$

e) g

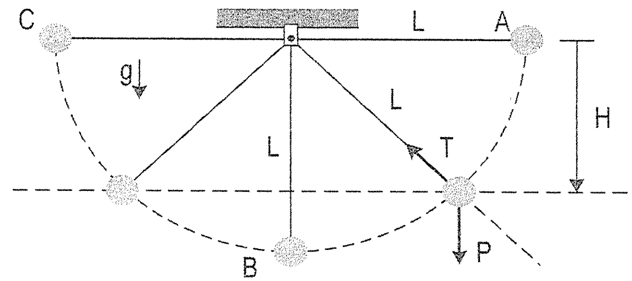


Questão 63

Um pêndulo simples de massa m e comprimento L foi abandonado do repouso da posição horizontal A num local onde a gravidade vale g. O prof. Renato Brito pede para você determinar:

a) a tração T no fio, após o pêndulo ter descido uma altura vertical H;

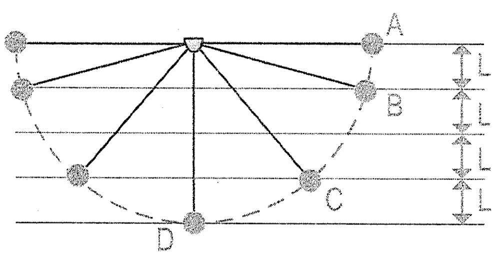
b) o gráfico da tração T em função da altura H, com $0 \leq H \leq L$.



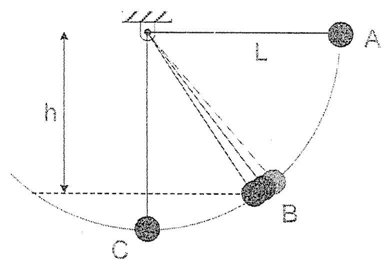
Questão 64 -

Um pêndulo, constituído de um fio de comprimento 4L conectado a uma esfera de massa **m**, foi abandonado do repouso da posição horizontal A e oscila livremente, na ausência de forças dissipativas. Sabendo que as trações T_C e T_B, respectivamente nas posições B e C, diferem entre si em 30 N e que a gravidade local vale g = 10 m/s^2, o prof. Renato Brito pede que você determine a massa **m** da esfera.

a) 1kg b) 2 kg c) 3 kg d) 4 kg e) 5 kg



Questão 64



Questão 65

Questão 65

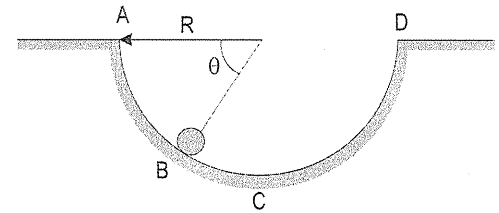
Um pêndulo simples, suspenso a um ponto fixo, é composto por uma esfera de massa m = 2 kg presa a um fio ideal de comprimento L = 8 m. O pêndulo encontra-se inicialmente na posição horizontal A, de onde é abandonado a partir do repouso. Se a gravidade local vale g = 10 m/s^2 , determine a tração T no fio quando a esfera passar pelo ponto B, após ter descido uma altura vertical h = 6 m

Questão 66

A pequena esfera de massa M da figura é abandonada em repouso da borda A do hemisfério ACD perfeitamente liso. Se a gravidade local vale g, o prof. Renato Brito pede para você determinar:

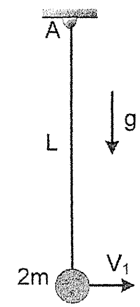
a) a velocidade da bola ao passar pelo ponto B.

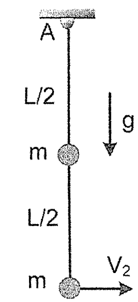
b) a força normal exercida pela superfície sobra a bola, ao passar pelo ponto B.



Questão 67 (ITA) -

Uma haste rígida de peso desprezível e comprimento L carrega uma massa 2m em sua extremidade. Outra haste, idêntica, suporta uma massa m em seu ponto médio e outra massa m em sua extremidade. As hastes podem girar ao redor do ponto fixo A, conforme as figuras. Qual é a velocidade horizontal mínima que deve ser comunicada às suas extremidades para que cada haste deflita até atingir a horizontal? Considere conhecida a intensidade da aceleração da gravidade g.

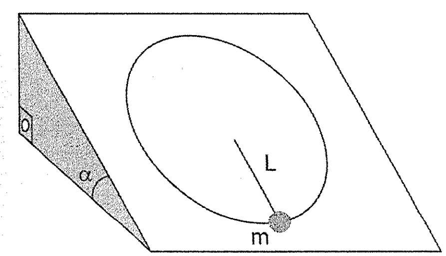




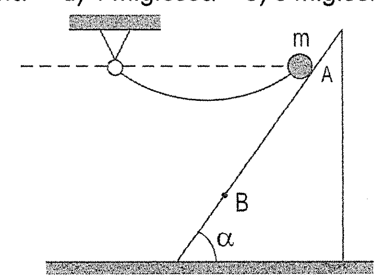
Questão 68 -

A figura mostra um pêndulo simples que descreve uma trajetória circular apoiado sobre um plano inclinado liso que forma um ângulo α com a horizontal. Sejam T_1 e T_2, respectivamente, as trações no fio nos pontos mais alto e mais baixo da trajetória circular. Se a massa do pêndulo vale **m** e a gravidade local vale **g**, a diferença $T_2 - T_1$ vale:

a) m.g.senα b) 2 m.g.cosα c) 3 m.g.senα d) 4 m.g.cosα e) 6 m.g.senα



Questão 68



Questão 69

Questão 69 (ITA) -

Um pêndulo, constituído por uma partícula de massa m suspensa por um fio ideal de comprimento L, é solto a partir do repouso, na posição A, e desliza sem atrito ao longo de um plano de inclinação α, como mostra a figura, num local onde a gravidade vale g. Considere que a esfera do pêndulo abandona suavemente o plano no ponto B, após percorrer uma distancia d sobre ele. A tração no fio, no instante em que o copo deixa o plano, vale:

a) $m.g\left(\frac{d}{L}\right)\cos\alpha$. b) $m.g.\cos\alpha$. c) $3.m.g\left(\frac{d}{L}\right)\text{sen }\alpha$. d) $m.g.\left(\frac{d}{L}\right)\text{sen}\alpha$.

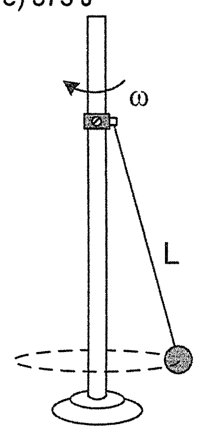
e) 3.m.g

Questão 70 -

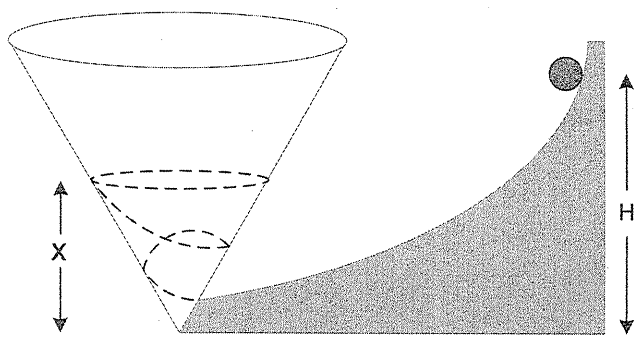
A figura mostra um pêndulo formado por um fio de comprimento L = 5m e uma massa M = 4kg, conectado a um mastro vertical que pode girar em torno do seu eixo vertical, acionado por um motor elétrico que não aparece na figura. O motor parte do repouso e aumenta a sua velocidade angular muito suavemente, o mesmo ocorrendo ao pêndulo cônico, que acompanha o movimento circular do mastro. Considere que, para certa velocidade angular ω, a esfera do pêndulo está descrevendo um movimento circular de raio R = 3m no plano horizontal.

A partir desse ponto, o motor imprime um gradativo aumento na sua velocidade até que, horas depois, a velocidade angular do pêndulo havia duplicado. Sendo $g = 10\ m/s^2$, o prof. Renato Brito pede para você determinar o trabalho realizado pelo motor para duplicar a velocidade angular desse pêndulo cônico.

a) 445 J
b) 495 J
c) 525 J
d) 555 J
e) 575 J



Questão 70



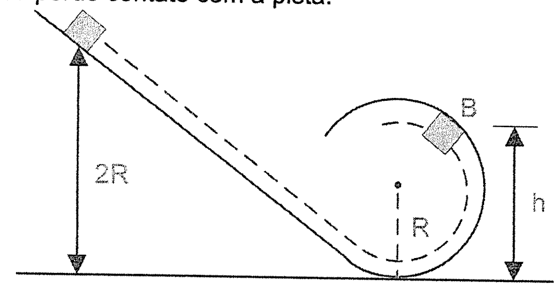
Questão 71

Questão 71

Uma esfera de massa M é abandonada do repouso a partir de uma altura H e desce a ladeira, penetrando numa superfície cônica, vertical, sem atrito. O prof. Renato Brito pede para você determinar a altura x, a partir do chão, em que a esfera estacionará, em movimento circular uniforme, num plano horizontal.

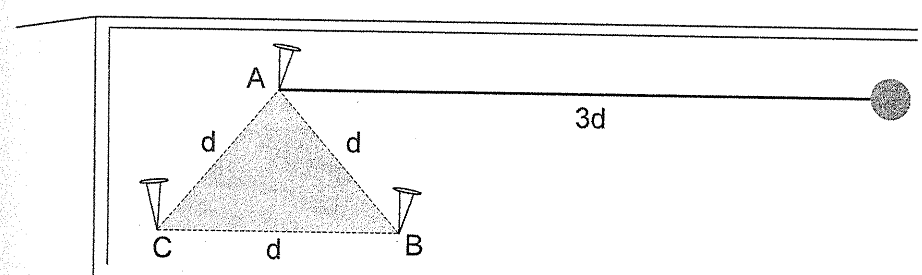
Questão 72 -

Um pequeno bloco é abandonado do repouso do ponto *A* de uma pista contida num plano vertical, com o formato mostrado na figura. Desprezam-se os atritos. O trecho circular tem raio R. Determine, em função de R, a altura h que define a posição do ponto *B*, onde o bloco perde contato com a pista.



Questão 73 (John Hopkins University – EUA) -

Giselly Dostoievski fincou três grandes pregos A, B e C na porta do seu armário, como mostra a figura, formando um triângulo equilátero de lado **d**. Um pêndulo de comprimento 3**d** foi amarrado ao prego A e abandonado a partir do repouso de uma posição inicial em que o fio encontra-se na horizontal. Se a massa da bola vale **M** e a gravidade local vale **g**, o prof. Renato Brito pede para você determinar a velocidade da bola no instante em que o fio ficar frouxo (foló ☺) pela primeira vez.



Questão 74

Uma bolinha de massa m é abandonada do repouso do alto de um hemisfério liso de raio R, num local onde a gravidade vale g. Pede-se determinar a altura H em que a bolinha perderá o contato com o hemisfério.

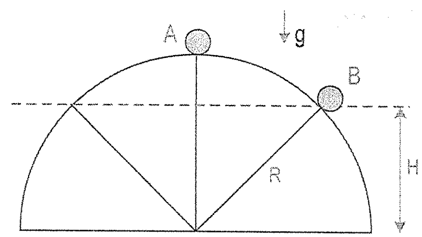
a) 2R/3

b) 3R/4

c) 4R/5

d) R/2

e) 3R/5



Questão 75 (ITA) -

Sobre um plano com inclinação de um ângulo α sobre o horizonte fixa-se um trilho ABCDE, composto das porções AB = DE = L (na direção do declive do plano inclinado) e da semicircunferência BCD de raio **R**, à qual AB e ED são tangentes. A partir de **A** lança-se uma bolinha ao longo de AB, por dentro do trilho. Desprezando todos os atritos e resistências, podemos afirmar que a mínima velocidade inicial que permite que a bolinha descreva toda a semi-circunferência BCD é:

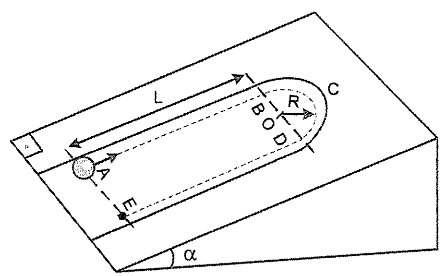
a) $\sqrt{(3R+2L)g\,\text{sen}\alpha}$

b) $\sqrt{2gL.\text{sen}\,\alpha}$

c) $\sqrt{(2R+3L)g.\text{sen}\alpha}$

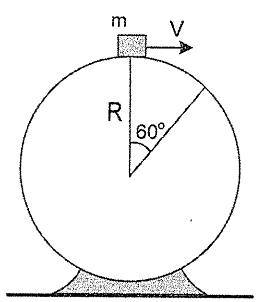
d) $\sqrt{3gR+2gL}$

e) $\sqrt{(2R+3L)g.\cos\alpha}$

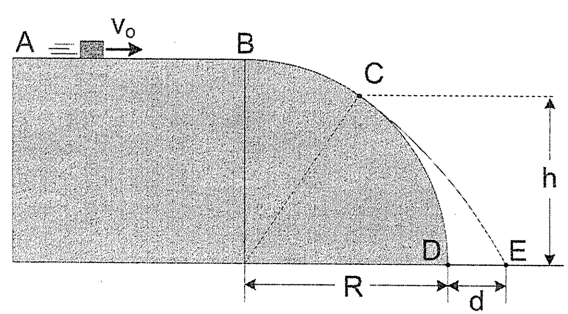


Questão 76 (ITA 2005) -

Um objeto pontual de massa **m** desliza com velocidade inicial $\vec{V}$, horizontal, do topo de uma esfera em repouso, de raio **R**. Ao escorregar pela superfície, o objeto sofre uma força de atrito de módulo constante dado por Fat = 7 mg/4π. Determine a velocidade inicial do objeto, a fim de que ele se desprenda da superfície esférica após percorrer um arco de 60°.



questão 76



Questão 77

Questão 77 -

Um bloquinho desliza com velocidade V_0 sobre a superfície horizontal AB. Desprezando-se o atrito e sabendo-se que $V_0 = 0{,}5\sqrt{gR}$, onde R é o raio do trecho circular e g, a gravidade local, determine:

a) a altura **h** do ponto C onde o bloco deixará a superfície cilíndrica BD;

b) a distância **d** do ponto D ao ponto E onde o bloco atingirá o solo.

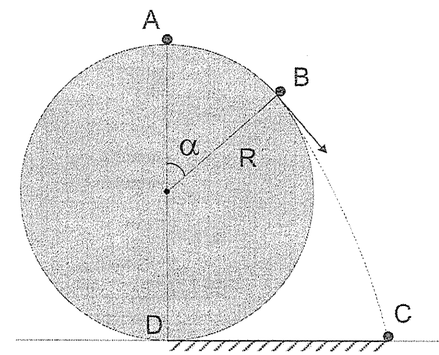
Questão 78

Uma bolinha de massa m é abandonada do repouso do ponto A no topo de uma esfera de raio R fixa ao solo. A bolinha, então, escorrega ao longo da superfície da esfera, perdendo o contato em B e prosseguindo até colidir com o solo no ponto C. O prof. Renato Brito pede que você determine:

a) o cosseno do ângulo α que define a posição do ponto B;

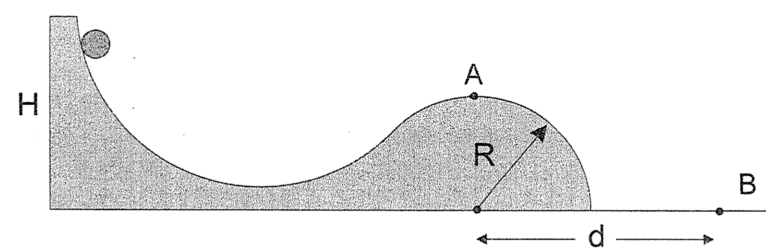
b) a velocidade da bolinha, ao perder o contato em B;

c) a distância CD na figura.



Questão 79 -

Uma esfera, abandonada de uma altura H a partir do repouso, desce a ladeira sem atrito e permanece sobre os trilhos até o ponto A, onde perde o contato e passa a mover sob ação exclusiva da gravidade **g**.



A altura H, a partir da qual o carrinho iniciou seu movimento, vale:

a) 3R/2 b) 2R/3 c) 4R/3 d) 5R/4 e) 2R

Questão 80 -

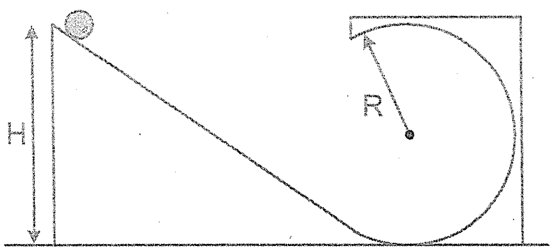
Após perder o contato em A, o carrinho move-se sob ação exclusiva da gravidade, atingindo o solo no ponto B. A distância **d,** em destaque na figura, vale:

a) $R\sqrt{2}$ b) 2R c) $R\sqrt{3}$ d) 3R e) 4 R

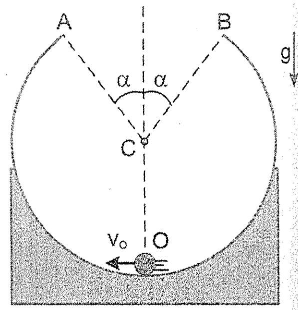
Questão 81 -

A figura a seguir mostra a trajetória percorrida por uma esfera que foi abandonada do repouso a uma altura H = 2R sobre um plano inclinado num local em que a gravidade vale g. Se os atritos são desprezíveis, o prof. Renato Brito pede para você determinar:

a) a velocidade atingida pela bola no ponto mais alto da sua trajetória;
b) a altura máxima atingida pela bolinha em todo seu percurso.



Questão 81



Questão 82

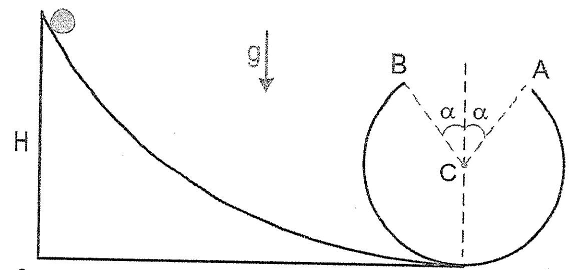
Questão 82 - (Olimpíada Brasileira de Física) -

Considere um trilho envergado em forma de arco de circunferência com raio igual a R instalado verticalmente, como representa a figura. No local, a aceleração da gravidade tem módulo g e a resistência do ar é desprezível.

Supondo-se conhecido o ângulo α, qual deve ser a intensidade da velocidade V_o com que se deve lançar um pequeno objeto do ponto O, o mais baixo do trilho, para que ele possa deslizar livremente saltando da extremidade A para a extremidade B, executando assim um looping completo ?

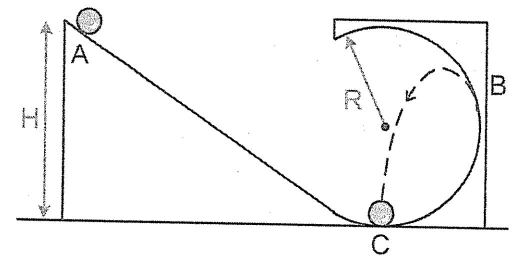
Questão 83 - (ITA 2010)

Considere um trilho envergado em forma de arco de circunferência com raio igual a R instalado verticalmente, como representa a figura. No local, a aceleração da gravidade tem módulo g e a resistência do ar é desprezível. Supondo-se conhecido o ângulo α, a partir de qual altura H deve-se abandonar uma pequena esfera, a partir do repouso, a fim de que ela possa deslizar livremente saltando da extremidade A para a extremidade B, executando assim um movimento periódico completo ?



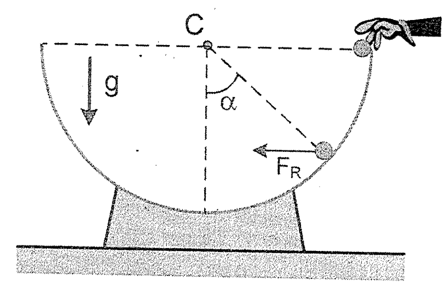
Questão 84 -

A figura a seguir mostra a trajetória percorrida por uma esfera que foi abandonada no ponto A a uma altura H sobre um plano inclinado. Se os atritos são desprezíveis, o prof. Renato Brito pede que você determine H em função de R, a fim de que a esfera caia exatamente no ponto C, o ponto mais baixo do trecho circular.



Questão 85 (UFRJ) -

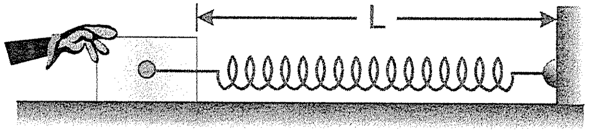
Uma bolinha de gude com dimensões desprezíveis é abandonada, a partir do repouso, da borda de um hemisfério oco e passa a deslizar sem atrito em seu interior. Determine a posição angular α para a qual a força resultante agindo sobre a bolinha aponta na direção horizontal.



Questão 86 -

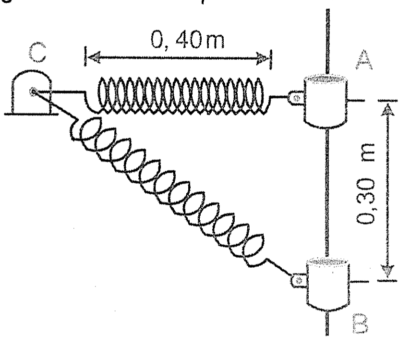
Uma mola de constante elástica k = 100 N/m tem comprimento natural L_o = 50 cm e está conectada a um bloco de massa m = 2 kg. Uma pessoa começa então a puxar o bloco desde a posição inicial, na qual a mola apresenta um comprimento L_1 = 60 cm, até uma posição final na qual a mola apresenta comprimento L_2 = 70 cm.

Sabendo que o bloco parte do repouso ($v_1 = 0$) até a velocidade $v_2 = 4$ m/s, calcule o trabalho realizado pela pessoa nesse episódio. Todos os atritos são desprezíveis.

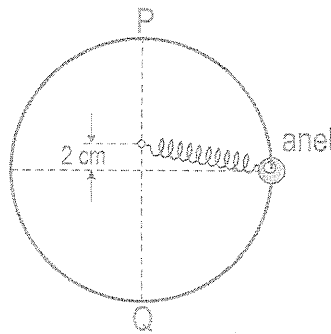


Questão 87

O anel de massa 1,2 kg, desliza sem atrito ao longo da guia vertical. A mola ligada ao anel tem um comprimento de 0,20 m, quando não deformada, e sua constante elástica é de 48N/m. Abandonando-se o anel em repouso na posição *A*, determine sua velocidade na posição *B*, após descer 0,30 m. Considere $g = 10$ m/s^2 e despreze atritos.



Questão 87



Questão 88

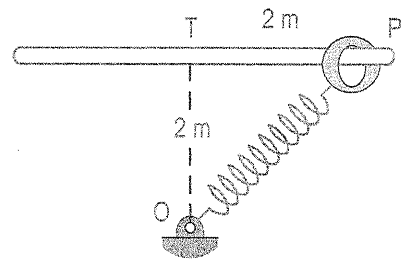
Questão 88 - (ITA 2006)

Um anel de peso 30 N está preso a uma mola e desliza sem atrito através de um aro circular de raio 10 cm situado num plano vertical, conforme mostrado na figura. Considerando que a mola não se deforma quando o anel se encontra na posição P e que a velocidade do anel seja a mesma nas posições P e Q, determine o valor da constante elástica da mola. Atritos são desprezíveis.

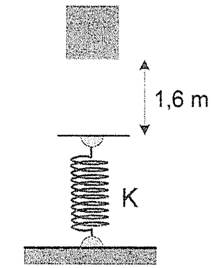
Questão 89 (ITA 2008)

Um aro de 1 kg de massa encontra-se preso a uma mola de massa desprezível, constante elástica k = 10 N/m e comprimento inicial $L_o = 1$ m quando não distendida, afixada no ponto O. A figura mostra o aro numa posição P em uma barra horizontal fixa ao longo da qual o aro pode deslizar sem atrito. Soltando o aro do ponto P, qual deve ser sua velocidade, em m/s, ao alcançar o ponto T, a 2 m de distância?

a) $\sqrt{30,0}$ b) $\sqrt{40,0}$ c) $\sqrt{23,4}$ d) $\sqrt{69,5}$ e) $\sqrt{8,2}$



questão 89



questão 90

Questão 90 -

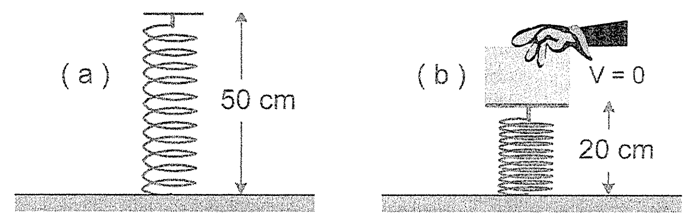
O bloco de massa m = 8 kg é abandonado do repouso da posição indicada na figura. A constante elástica da mola é K = 200 N/m. Sendo $g = 10$ m/s^2, determine:

a)a máxima velocidade atingida pelo bloco;

b)a máxima deformação que a mola sofre.

Questão 91 -

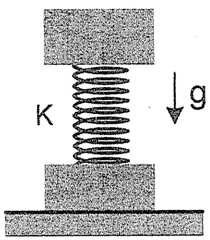
Na figura **a** temos uma mola não deformada de constante elástica k = 1 200 N/m. Na figura **b** um bloco de massa m = 0,60 kg é mantido em repouso, comprimindo a mola. Adote $g = 10$ m/s^2. Se o bloco for liberado, qual será a altura máxima atingida por ele, em relação ao solo?



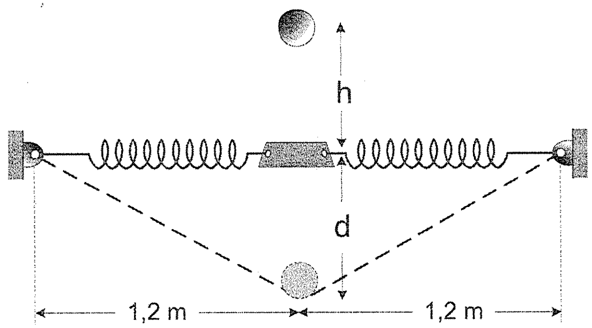
Questão 92 -

A figura mostra dois blocos de mesma massa m presos a uma mola de constante elástica K num local onde a gravidade vale g. Na situação mostrada na figura, o sistema encontra-se em equilíbrio. Um operador irá empurrar a caixa superior para baixo lentamente, causando uma deformação extra Δx nessa mola e, bruscamente, liberar o sistema.

O prof. Renato Brito pede que você determine a mínima compressão Δx que essa mola deve sofrer a fim de que a caixa inferior salte da mesa quando o sistema for liberado.



questão 92



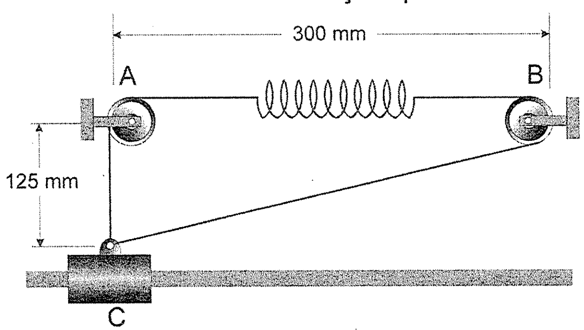
questão 93

Questão 93

Duas molas estão ligadas entre si por um pedaço de tecido de massa desprezível. A tensão inicial em cada mola é de 480 N e a constante de mola de cada uma delas é k = 2400N/m. Uma bola de 4,2 kg é abandonada, do repouso, a uma altura h acima do pano e, após atingi-lo, produz um deslocamento máximo d = 0,9 m. Determine a altura h. ($g = 10\ m/s^2$)

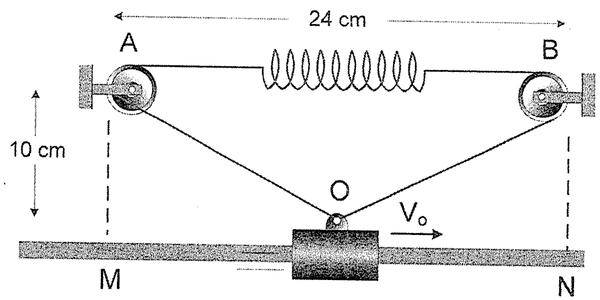
Questão 94 -

O cursor C de 0,8 kg pode deslizar sem atrito ao longo da barra horizontal, como indica a figura. A mola tem constante k = 300 N/m e um comprimento, quando não deformada, de 500 mm. Solta-se o cursor do repouso na posição indicada na figura. Determinar a máxima velocidade alcançada pelo cursor.



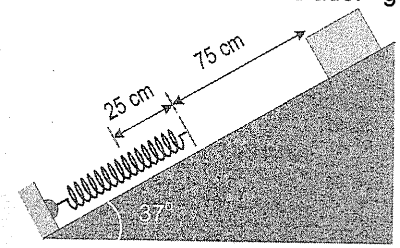
Questão 95

O cursor de massa 0,5 kg pode deslizar sem atrito ao longo da barra horizontal MN sem atrito, como indica a figura. A mola tem constante k = 100 N/m e encontra-se relaxada na posição simétrica mostrada na figura. Pede-se determinar a mínima velocidade V_o com que o cursor deve passar pela posição O a fim de atingir a extremidade N da barra ?

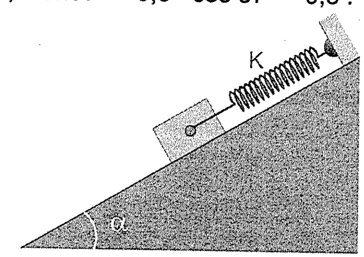


Questão 96 -

Uma caixa parte do repouso e desliza sobre um plano inclinado de 37º com a horizontal, indo de encontro a uma mola de constante elástica igual a 160 N/m, comprimindo-a de 25 cm. O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o plano inclinado vale $\mu = 0,5$ e a caixa foi inicialmente abandonada a uma distância de 75 cm da mola relaxada. O prof. Renato Brito pede para você determinar a massa m dessa caixa. Dado: $g = 10\ m/s^2$, sen37° = 0,6 cos 37° = 0,8 .



questão 96



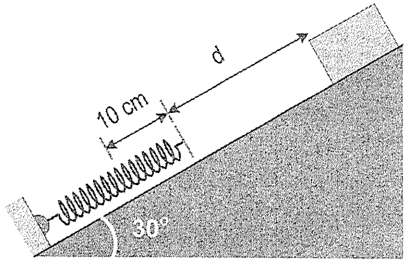
Questão 97

Questão 97 -

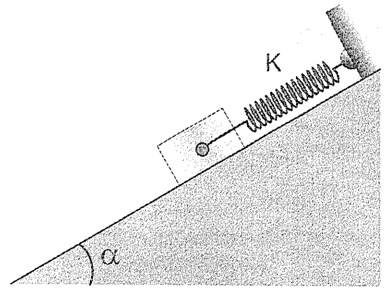
No dispositivo representado na figura, o atrito entre o bloco e o plano inclinado é desprezível; o bloco de massa M está preso a uma mola ideal de constante elástica k. Empurra-se o bloco contra a mola até esta se achar comprimida em uma distância **d** em relação ao seu comprimento natural. A seguir, o bloco é largado a partir do repouso. Qual a distância percorrida pelo bloco até parar pela primeira vez ? A gravidade local vale g.

Questão 98

Um bloco de massa 2 kg encontra-se inicialmente em repouso sobre um plano inclinado liso, a uma distância **d** de uma mola. Abandonado o bloco, o mesmo desliza ladeira abaixo até encontrar a mola, causando-lhe uma máxima compressão de 10 cm. Sabendo que a constante elástica da mola vale K = 1000 N/m, determine a distância inicial d. ($g = 10\ m/s^2$).



Questão 98



Questão 99

Questão 99

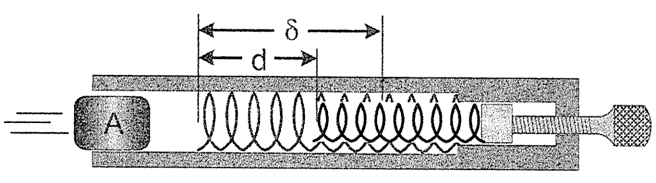
A figura mostra um bloco de massa 10 kg inicialmente em repouso sobre um plano inclinado, conectado a uma mola de constante elástica k = 1280 N/m. Nessa situação, o bloco está comprimindo a mola, causando-lhe uma deformação x = 0,5 m. Ao abandonarmos o sistema, determine a velocidade atingida pelo bloco quando a mola atingir seu comprimento natural. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a rampa vale $\mu = 0,25$. Adote $g = 10\ m/s^2$, $sen\alpha = 0,6$ e $cos\alpha = 0,8$.

Questão 100 -

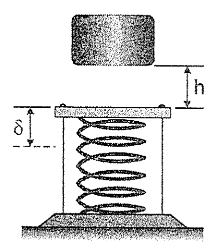
O encaixe de duas molas é usado para parar o êmbolo A de massa m = 1200g a partir de uma velocidade v = 5 m/s e inverter sua direção de movimento. A mola de dentro aumenta a desaceleração, e o ajuste de sua posição é usado para controlar o ponto exato no qual a inversão ocorre. Se este ponto deve corresponder a uma deflexão máxima $\delta = 500$ mm para a mola de fora, determine o ajuste da mola interna calculando a distância d. A mola interna tem constante elástica $k_1 = 50$ N/m e a mola externa, uma constante elástica $k_2 = 88$ N/m.

Questão 101 -

O cilindro de massa m = 6 kg é solto, a partir do repouso, da posição mostrada na figura e cai sobre uma mola que foi inicialmente pré-comprimida $x_o = 50$ mm por uma bandeja leve presa a fios de retenção. Se a constante elástica da mola vale K = 4kN/m, calcule a compressão adicional δ da mola produzida pelo cilindro em queda. Adote $g = 10\ m/s^2$ e h = 100mm.



Questão 100



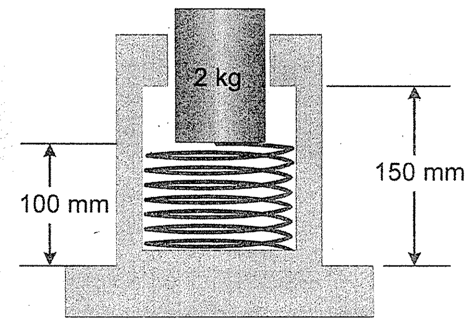
Questão 101

Questão 102

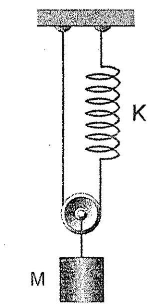
O pistão de 2 kg é abandonado a partir do repouso na posição mostrada na figura na qual a mola, de constante elástica K = 400 N/m e comprimento natural 200 mm, encontra-se inicialmente comprimida. Calcule a altura máxima h acima da posição inicial alcançada pelo pistão. ($g = 10\ m/s^2$)

Questão 103 -

O sistema da figura é abandonado a partir do repouso com a mola inicialmente elongada 10 cm. Sabendo que a massa do cilindro pendurado vale M = 16 kg, determine a velocidade que ele atinge após descer 5 cm. A mola possui rigidez k = 400 N/m. Despreze a massa da roldana e dos fios e adote $g = 10\ m/s^2$.



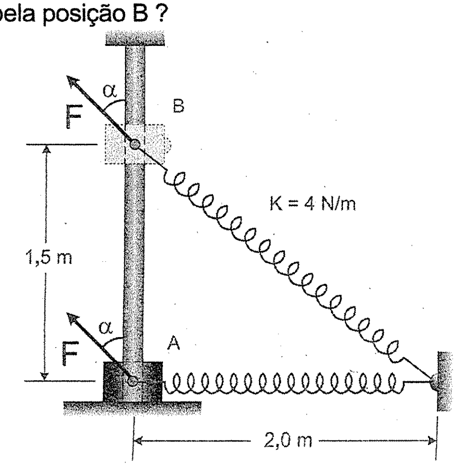
Questão 102



Questão 103

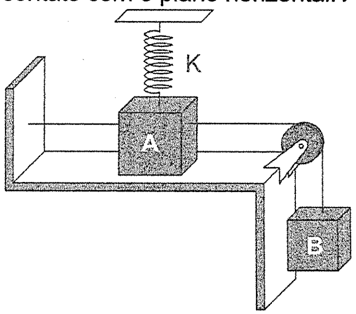
Questão 104

O colar possui massa M = 3 kg e está preso a uma mola leve que possui rigidez k = 4 N/m e um comprimento natural de $L_o = 1,5$ m. O colar é solto a partir da posição A e desliza para cima da haste lisa sob ação de uma força constante de intensidade F = 70N que forma um ângulo $\alpha = 60°$ com a vertical. Qual a velocidade do colar ao passar pela posição B ?

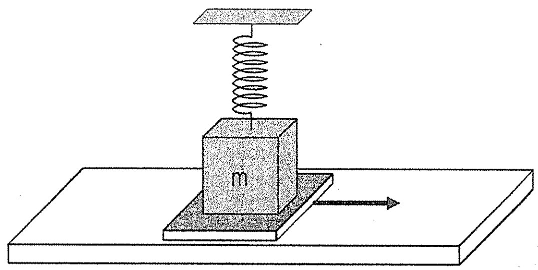


Questão 105 -

A figura ilustra duas caixas A e B de mesma massa **m**, inicialmente em repouso, conectadas entre si através de fios ideais. A caixa A está conectada ao teto através de uma mola ideal, inicialmente relaxada, de comprimento natural $\mathbf{L_o}$ e constante elástica $K = 5m.g/L_o$. Num certo instante, o fio que conecta a caixa A à parede é cortado e o sistema passa a se mover. O prof. Renato Brito pede para você determinar a velocidade da caixa B no instante em que a caixa A perde o contato com o plano horizontal. Admita a gravidade **g** e despreze todos os atritos.



questão 105



questão 106

Questão 106 -

Sobre uma tábua que se encontra em um plano horizontal liso, existe um bloco de massa m = 8 kg, unido ao teto através de uma mola ideal, inicialmente relaxada na vertical, de comprimento natural L_o = 2m. O coeficiente de atrito entre a tábua e o bloco vale $\mu = 0,5$. A tábua é lentamente afastada para a direita até a posição em que o bloco fica na iminência de se movimentar sobre ela, situação em que o fio forma com a vertical um ângulo $\alpha = 37°$. O prof. Renato Brito pede para você determinar o trabalho realizado pela força de atrito nesse episódio, em joules, no referencial da Terra. Dado sen37° = 0,6 cos 37° = 0,8, g = 10 m/s^2.

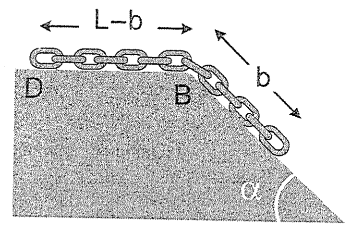
Questão 107 -

É sabido que a intensidade do campo gravitacional atrativo, no interior da Terra, varia linearmente com a distância ao centro do planeta, desde o valor nulo (g = 0, no centro da Terra) até o seu valor máximo (g = 10 m/s^2) na sua superfície. Admita que seja possível cavar um poço que atravesse a Terra diametralmente. Se uma pedra for abandonada na entrada desse poço, a partir do repouso, com que velocidade ela atingirá o centro do planeta ?

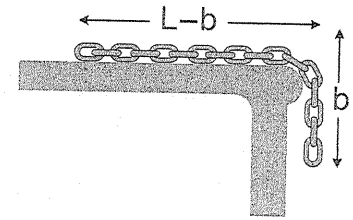
Dado: raio da Terra R = 6400 km.

Questão 108 -

Uma corrente flexível de comprimento **L** e massa **m** é colocada inicialmente em repouso sobre uma superfície lisa ABC. Inicialmente, apenas um pedaço de comprimento **b** encontra-se pendente no plano inclinado. O prof. Renato Brito pede para você determinar a velocidade da corrente quando a sua extremidade D atingir o ponto B. A gravidade local vale g.



Questão 108



Questão 109

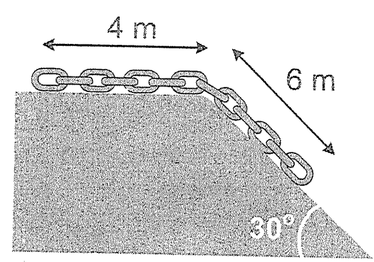
Questão 109

Uma corrente flexível de comprimento **L** e massa **m** é colocada inicialmente em repouso sobre uma mesa **lisa** e reta. Inicialmente, apenas um pequeno pedaço de comprimento **a** encontra-se pendente na vertical. O prof. Renato Brito pede para você determinar a velocidade da corrente no instante que o último elo perde o contato com a superfície horizontal da mesa. A gravidade local vale g.

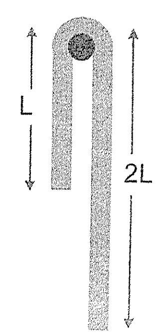
Questão 110

Uma corrente flexível de comprimento **L** = 10 m e massa 2 kg é colocada inicialmente em repouso sobre uma superfície lisa ABC. Inicialmente, apenas um pedaço de comprimento **6 m** encontra-se pendente no plano inclinado. O velocidade da corrente quando a sua extremidade D atingir o ponto B, vale aproximadamente (g = 10 m/s^2) :

a) 4,2 m/s b) 5,6 m/s c) 6,4 m/s d) 8,1 m/s e) 9,3 m/s



Questão 110



Questão 111

Questão 111

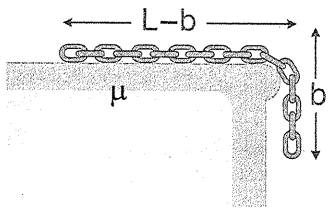
Uma corda de massa M e comprimento 3 L é abandonada do repouso na posição vertical apoiada num pino como mostra a figura. Se a gravidade local vale g, determine a velocidade da corda no instante em que ela perder o contato com o pino. Admita que todos os atritos sejam desprezíveis.

Questão 112 -

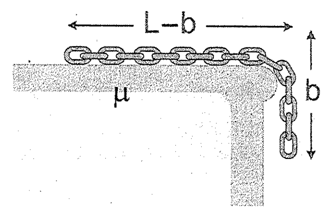
Uma corrente flexível de comprimento **L** e massa **m** é colocada inicialmente em repouso sobre uma mesa reta, com apenas uma parte vertical de comprimento **b** pendente. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre a mesa e a corrente vale μ, o prof. Renato Brito pede que você determine a velocidade da corrente no instante que o último elo perde o contato com a superfície horizontal da mesa. A gravidade local vale g.

Questão 113

Uma corrente de comprimento L, mostrada na figura, é solta a partir do repouso com o comprimento **b** de elos pendurados apenas o suficiente para iniciar o movimento. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre os elos e a superfície horizontal possuem essencialmente o mesmo valor μ. Sendo **g** a gravidade local, o prof. Renato Brito pede que você determine a velocidade da corrente quando o último elo deixar a borda. Despreze qualquer atrito no canto.



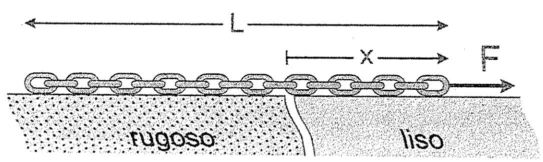
Questão 112



Questão 113

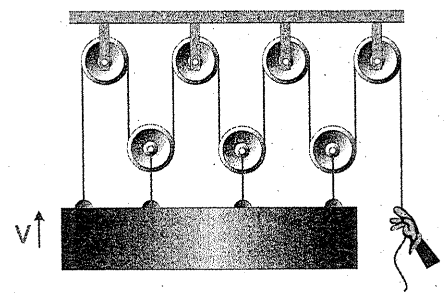
Questão 114

Uma corda pesada com massa λ por unidade de comprimento é puxada por uma força constante *F* ao longo de uma superfície horizontal que é composta de um trecho liso e um trecho rugoso. A corrente está inicialmente em repouso na superfície rugosa com x = 0. Se o coeficiente de atrito cinético entre a corrente e a superfície rugosa vale μ e a gravidade local vale g, determine a velocidade da corrente quando x = L. A força F é maior que $\mu.\lambda.g.L$ para iniciar o movimento.

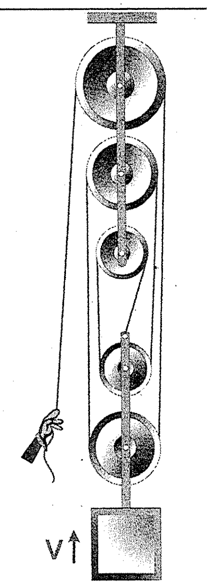


Questão 115

A figura mostra um bloco de massa m = 35 kg que está subindo com velocidade constante v = 20 cm/s num local onde a gravidade vale g = 10 m/s^2, sendo rebocado por um operador que faz uso de um sistema polias.



a) Qual a vantagem mecânica desse sistema de polias ?
b) Qual a força de tração que o operador aplica à corda durante essa operação ?
c) Qual extensão da corda é puxada pelo operador a cada segundo ?
d) Qual a potência desenvolvida pelo operador ?



Questão 116

Questão 116

A figura mostra um bloco de massa m = 30 kg que está subindo com velocidade constante v = 20 cm/s num local onde a gravidade vale g = 10 m/s^2, sendo rebocado por um operador que faz uso de um sistema polias.

a) Qual a vantagem mecânica desse sistema de polias ?
b) Qual a força de tração que o operador aplica à corda durante essa operação ?
c) Qual extensão da corda é puxada pelo operador a cada segundo ?
d) Qual a potência desenvolvida pelo operador ?

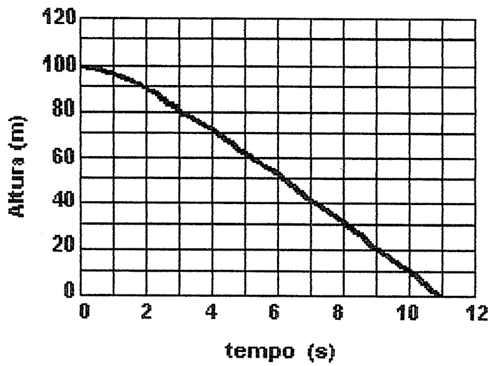
Questão 117

Uma pedra de peso **p** é jogada verticalmente para cima com velocidade inicial v_o. Se uma força de intensidade constante **f** , devida à resistência do ar, age sobre a pedra durante todo o percurso, e se a gravidade local vale **g**, Determine:

a) a altura máxima atingida pela pedra em função de **g, p, f** e $\mathbf{v_o}$.
b) a velocidade da pedra, ao atingir o solo, em função de **p, f** e $\mathbf{v_o}$.

Questão 118 (Unicamp) -

Uma criança solta uma pedrinha de massa m = 50g, com velocidade inicial nula, do alto de um prédio de 100m de altura. Devido ao atrito com o ar, o gráfico da altura da pedrinha em função do tempo não é mais a parábola y = 100 – 5t^2, mas sim o gráfico representado adiante.



a) Com que velocidade a pedrinha atinge o chão ?
b) Se a força de resistência do ar é do tipo F = K.v, onde v é a velocidade do corpo, determine a constante K no SI.
c) Qual é o trabalho realizado pela força de resistência do ar entre t = 0 e t =11 s?

Questão 119 (UFC)

Um bloco de massa m = 2,0 kg é liberado do repouso, no alto de um edifício de 130 metros de altura. Após cair 120 metros, o bloco atinge sua velocidade terminal, de 20 m/s, por causa da resistência do ar. Use g = 10 m/s^2 para a aceleração da gravidade.
a) Determine o trabalho realizado pela força devida à resistência do ar ao longo dos primeiros 120 metros de queda.
b) Determine o trabalho total realizado sobre o bloco nos últimos 10 metros de queda.

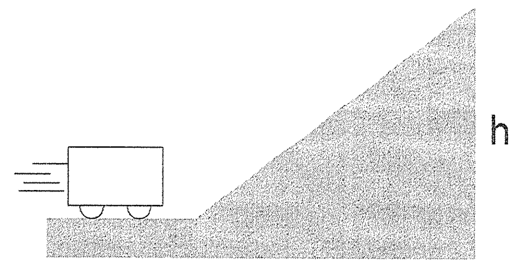
Questão 120 (Fuvest-SP)

Um corpo de massa *m* está executando movimento circular sobre um plano horizontal, preso a um pino central através de um fio ideal de comprimento R. O coeficiente de atrito entre o corpo e o plano é μ, constante. No instante inicial, o corpo tem velocidade de módulo *V*.
a) Qual deve ser o valor de *V* para que o corpo pare após duas voltas completas?
b) Qual o tempo gasto pelo corpo para percorrer a última volta antes de parar?
c) Qual o trabalho realizado pela força de atrito durante a última volta?

Questão 121

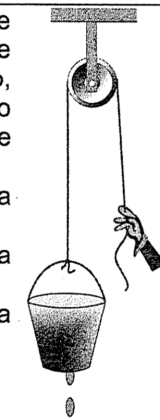
Juquinha, um garoto muito levado, adora brincar de carrinho (Veja Figura). Certa vez, o garoto estava brincando e percebeu que, ao empurrar o carrinho com uma velocidade horizontal 10**V**, o brinquedo subia uma rampa sem atrito até a altura máxima h = 9**d**. Entretanto, as rodinhas do carrinho quebraram e, com o atrito entre o carrinho e a rampa, o brinquedo passou a subir apenas até a altura máxima

h = 4**d**. Para que o carrinho, agora sem rodinhas, volte a atingir a mesma altura máxima de antes, Juquinha precisa empurrá-lo com que velocidade horizontal ?
a) 12 V b) 15 V c) 18 V d) 20 V e) 24 V



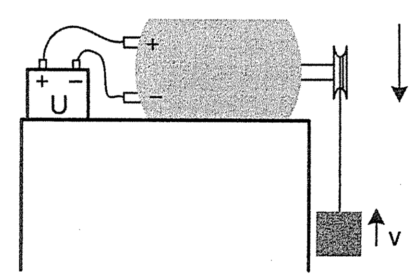
Questão 122

A figura mostra um balde de m = 500g, contendo inicialmente 2 litros de água, sendo levantado com velocidade constante desde o chão até uma altura h = 10 m em 20 s. Entretanto, devido a um pequeno orifício em sua base, o balde está vazando água a uma taxa de 0,04 litro/s. O prof. Renato Brito pede que você determine:
a) A força que o operador aplica na corda, em função da altura h;
b) O trabalho realizado pelo operador para levantar o balde até a altura h = 10 m;
c) A potência média desenvolvida pelo operador durante essa operação;
d) A potência desenvolvida pelo operador no instante t = 12 s.



Questão 123

Na situação da figura, o motor elétrico faz com que o bloco de 15 kg de massa suba com velocidade constante de 2 m/s. O cabo que sustenta o bloco é ideal, a resistência do ar é desprezível e adota-se g = 10 m/s^2. Considerando que nessa operação o motor apresenta rendimento de 60%, calcule:
a) a potência mecânica desenvolvida pelo motor;
b) a potência elétrica que ele recebe nos seus terminais;
c) Se o motor for alimentado pela rede elétrica de 200V, determine a corrente elétrica que o motor puxa;
d) a potência dissipada pelo motor.



Questão 124

Um motor elétrico (veja figura da questão anterior) faz com que um bloco de 40 kg de massa suba com velocidade constante de 3,0 m/s. O cabo que sustenta o bloco é ideal, a resistência do ar é desprezível e adota-se $g = 10\ m/s^2$. Considerando que nessa operação o motor está ligado a uma rede elétrica que fornece uma tensão U = 200V e puxa uma corrente elétrica i = 10 A, calcule:

a) a potência útil desse motor

b) o seu rendimento.

Questão 125

Qual a potência mecânica desenvolvida por uma bomba que leva água a uma taxa de 0,04 m^3 por segundo, de um depósito para uma caixa d'água no topo de uma casa, a altura de 9,2 m ? A água é despejada na caixa d'água com uma velocidade é 4 m/s. Adote $g = 10\ m/s^2$ e despreze as dissipações de energia.

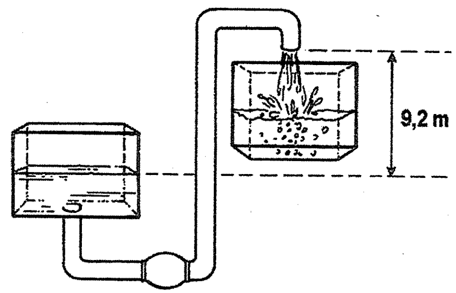
a) 2500 W

b) 2000 W

c) 1500 W

d) 4000 W

e) 3000 W



Questão 126

Suponha que o motor da bomba hidráulica da questão anterior estivesse desenvolvendo uma potência mecânica de 1000 w. Em quanto tempo esta bomba encheria uma caixa de 500 litros colocada a uma altura de 9,6 m ? A água será injetada na caixa C com velocidade escalar de 4 m/s. ($g = 10\ m/s^2$)

Questão 127 (UFPE)

Um homem usa uma bomba manual para extrair água de um poço subterrâneo a 60 m de profundidade. Calcule o volume de água, em litros, que ele conseguirá bombear, caso trabalhe com potência constante de 50 W durante 10 minutos. Despreze todas as perdas e adote $g = 10\ m/s^2$.

Questão 128 (FUVEST)

Uma esteira rolante transporta 15 caixas de bebida por minuto, de um depósito no subsolo até o andar térreo. A esteira tem comprimento de 12 m, inclinação de 30° com a horizontal e move-se com velocidade constante. As caixas a serem transportadas já são colocadas com a velocidade da esteira. Se cada caixa pesa 200 N, determine a potência do motor que move a esteira.

Questão 129

O esquema representa uma esteira rolante que opera continuamente, com uma inclinação de 30° com a horizontal, transportando caixas de bebida de peso 50 N de um depósito no subsolo até o andar térreo. O transporte é feito de forma que, sobre a esteira, sempre existem 4 caixas de bebida, que se deslocam com velocidade de 3 m/s. O motor que aciona a esteira opera com rendimento de 75 % e é alimentado pela rede elétrica de 200 volts. Se a gravidade vale $g = 10\ m/s^2$, determine a corrente elétrica "puxada" pelo motor.

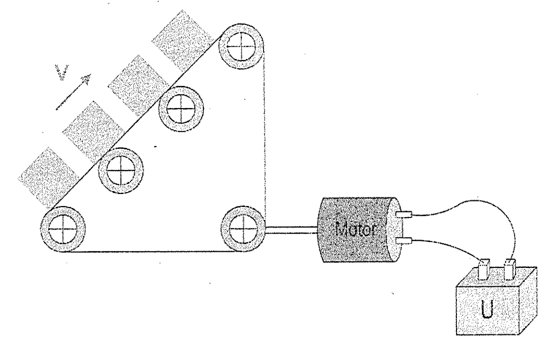
a) 6 A

b) 5 A

c) 4 A

d) 2 A

e) 1 A

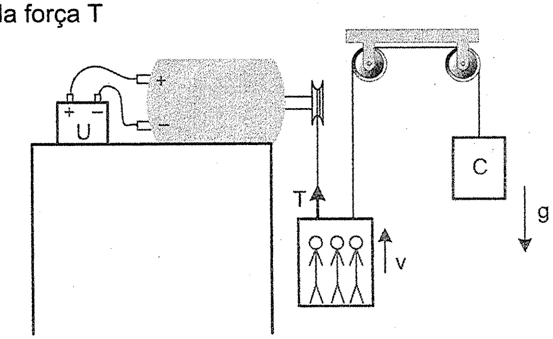


Questão 130 -

Um elevador de massa 1000 kg tem um contrapeso C de massa 900 kg. Na situação da figura, o elevador está subindo com velocidade constante v = 2 m/s transportando três pessoas de massas 40 kg, 50 kg e 70 kg. Desprezando a resistência do ar, calcule:

a) a intensidade da força T exercida pelo motor sobre o elevador;

b) a potência da força T



Questão 131

Um automóvel de massa m = 500 kg é acelerado uniformemente a partir do repouso até uma velocidade $v_o = 40$ m/s em $t_o = 10$ s. Determine:

a) a potência média desenvolvida por esse automóvel, nesse intervalo de 10 segundos

b) a potência instantânea desenvolvida pelo automóvel, no instante t = 6 s.

Questão 132 -

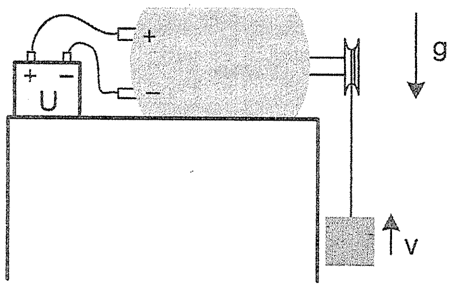
(AFA) O motor da figura imprime ao corpo de massa *m* uma aceleração para cima de módulo igual a *g*. Calcule a potência fornecida pelo motor em função do tempo, sabendo-se que o corpo partiu do repouso no instante *t* = 0.

a) $P = 2mg^2t$

b) $P = \dfrac{mg^2}{2t}$

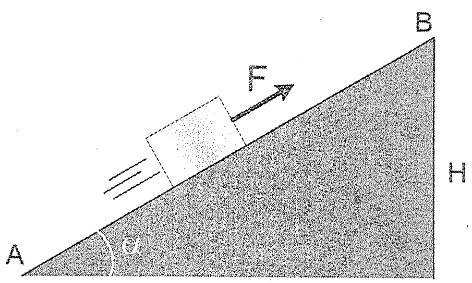
c) $P = \dfrac{2mg^2}{t}$

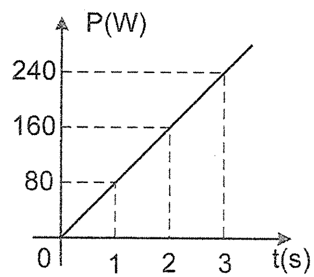
d) $P = mgt^2$



Questão 133 -

Um bloco de massa 4,0 kg parte do repouso da base de um plano inclinado, no instante t = 0 s, puxado por uma força F, cuja potência em função do tempo é dada pelo gráfico abaixo. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a rampa vale μ = 0,25 e a altura da rampa vale H = 2,4 m. Sabendo que o bloco atinge o topo da rampa no instante t = 2s, determine a velocidade final do bloco.
Dados: g = 10 m/s^2, sen α = 0,60 e cos α = 0,80.





Questão 134 -

O shopping Aldeota tem uma escada rolante que liga um andar a outro situado 7,5 m acima. O comprimento da escada é de 12 m e ela se move a 0,6 m/s. Sendo g = 10 m/s^2, o prof. Renato Brito pergunta:

a) Qual deve ser a potência mínima do motor para transportar até 100 pessoas por minuto, sendo a massa média de 70 kg ?
b) Um homem de 70 kg sobe a escada rolante em 8s. Que trabalho o motor realiza sobre ele ?
c) Se o homem, chegando ao meio da escada, põe-se a descer de tal forma a permanecer sempre no meio dela, isto requer que o motor realize trabalho ? Em caso afirmativo, com que potência ?

Questão 135 -

Um ciclista pedala a uma potência constante. Numa estrada horizontal, ele consegue desenvolver uma velocidade máxima $\mathbf{v_1}$, enquanto ao subir uma rampa de inclinação α, desenvolve uma velocidade máxima $\mathbf{v_2}$. Admita que a força de resistência do ar seja do tipo R = –k.v^2, onde v é a velocidade do ciclista em relação ao ar. Se a massa do conjunto ciclista+bicicleta vale **m** e a gravidade local vale **g**, determine a potencia desenvolvida pelo ciclista.

Questão 136

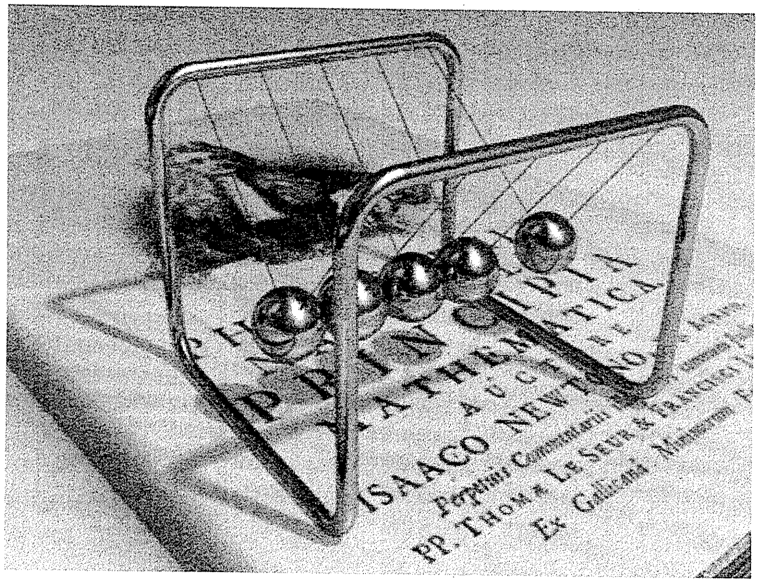
Um ciclista pedala a uma potência constante. Descendo uma ladeira, ele consegue desenvolver uma velocidade máxima $\mathbf{v_1}$ = 10 km/h, ao passo que, subindo a mesma ladeira, ele só atinge uma velocidade máxima $\mathbf{v_2}$ = 2,5 km/h. Admitindo que a força de resistência do ar seja do tipo R = –k.v^1, onde v é a velocidade do ciclista em relação ao ar, determine a velocidade máxima desenvolvida por esse ciclista num trecho horizontal.

Questão 137

A força necessária para manter um barco com velocidade constante é proporcional ao quadrado da velocidade do barco em relação à água. Sabendo-se que a potência necessária para manter a velocidade do barco a 10 km/h é 10 kW, qual é a potência requerida para manter a velocidade do barco a 20 km/h ?

2 SISTEMAS DE PARTÍCULAS

DINÂMICA DO CENTRO DE MASSA
SISTEMAS COM MASSA VARIÁVEL



2.1 A QUANTIDADE DE MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA

Todo corpo que tem massa e tem velocidade tem, associado a si, uma grandeza vetorial denominada "Quantidade de Movimento", representada pelo vetor $\vec{Q}$, definida como:

$$\vec{Q} = m.\vec{V} \qquad \textbf{(eq1)}$$

A quantidade de movimento de uma partícula tem sempre a mesma direção e mesmo sentido da sua velocidade $\vec{V}$ sendo, portanto, tangente à trajetória descrita pela partícula em cada instante do seu movimento.

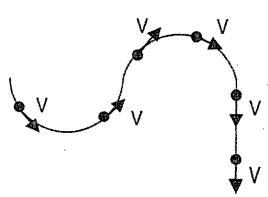


Figura 1 – Assim como a velocidade do móvel, a sua quantidade de movimento também é tangente à trajetória do corpo em cada instante.

Devido ao seu caráter vetorial, a quantidade de movimento de uma partícula varia sempre que houver variação da sua velocidade, quer na sua direção, quer no seu sentido, quer no seu valor numérico (módulo). Assim, podemos dizer que:

- a quantidade de movimento de uma partícula é dita constante se e somente se a partícula se encontrar em um dos seguintes estados: 1) repouso (permanente) ou (2) movimento retilíneo e uniforme (MRU);
- A quantidade de movimento de uma partícula é variável em qualquer movimento curvilíneo (não retilíneo), visto que sua direção varia continuamente (Figura 1);
- Quando uma partícula descreve um MCU (movimento circular uniforme), sua velocidade, aceleração e quantidade de movimento não permanecem constantes. Elas variam com o tempo visto que mudam de direção a cada instante. Apenas os módulos dessas grandezas permanecem constantes.

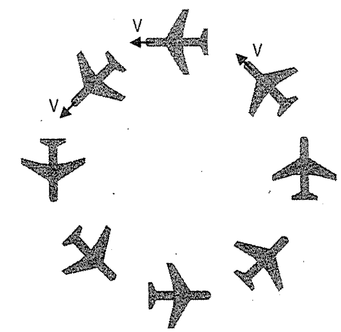


Figura 2 – Em um MCU, a velocidade, a aceleração e a quantidade de movimento do móvel variam.

2.2 - O IMPULSO: O GANHO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Considere uma bola de bilhar de massa M que rola com velocidade inicial V_i e sofrerá uma tacada, isto é, sofrerá a ação de uma força constante F, durante um intervalo de tempo Δt, na mesma direção e sentido do movimento, conforme a Figura 3:

Percebemos que a ação da força aumentou a velocidade da bola e, portanto, a sua quantidade de movimento Q = m.V , ou seja, houve um ganho de quantidade de movimento devido à ação dessa força, ganho esse que será calculado a seguir.

Supondo F constante durante o intervalo Δt, teremos um MUV com aceleração constante **a** tal que F = M.a. Assim :

$$V_F = V_i + a\Delta t \quad \Rightarrow \quad M.V_F = M.V_i + M.a\Delta t \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{M.V_F = M.V_i + F\Delta t}} \qquad \textbf{(eq2)}$$

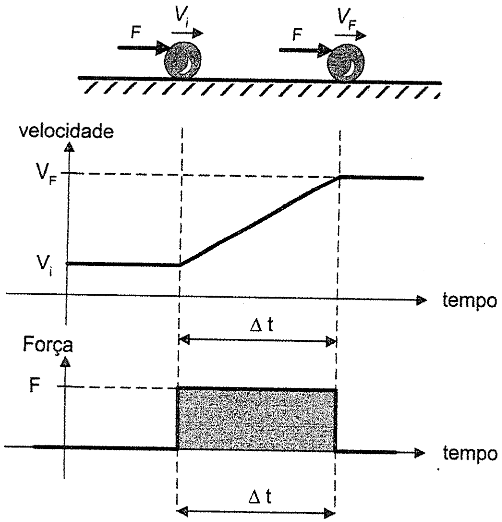


Figura 3

A relação eq2 nos diz que:

A quantidade de movimento $M.V_F$ que a bola que a bola possuirá depois (da tacada) é a quantidade de movimento que ela tinha antes $M.V_i$ "mais" a quantidade de movimento que ela "ganhou" durante a tacada.

Esse ganho de quantidade de movimento, matematicamente expresso pelo termo $F.\Delta t$, é chamado de *"Impulso aplicado pela força F no intervalo de tempo Δt"*.

Apesar da simplicidade do cálculo mostrado anteriormente, o leitor deve perceber que estamos lidando com grandezas vetoriais, e que a relação eq2, rigorosamente, deve ser reescrita como:

$$M.\vec{V}_F = M.\vec{V}_i + \vec{F}.\Delta t \qquad \textbf{(eq3)}$$

- $\vec{Q}_F = M.\vec{V}_F$ é o vetor quantidade de movimento final, que aponta na mesma direção e sentido do vetor $\vec{V}_F$;
- $\vec{Q}_i = M.\vec{V}_i$ é o vetor quantidade de movimento inicial, que aponta na mesma direção e sentido do vetor $\vec{V}_i$;
- $\vec{I} = \vec{F}.\Delta t$ é o vetor Impulso, que aponta na mesma direção e sentido do vetor força $\vec{F}$.

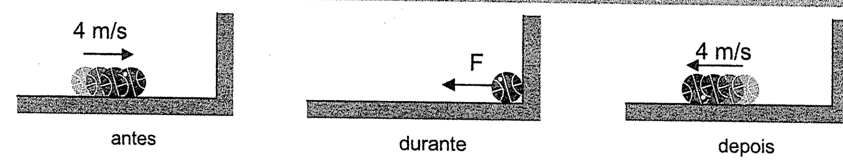
Reescrevendo eq2, chegamos ao **Teorema do Impulso**:

$$\boxed{\vec{Q}_F = \vec{Q}_i + \vec{I}} \qquad \textbf{(eq4)}$$

Em problemas unidimensionais, onde todas as grandezas vetoriais envolvidas apontam numa mesma direção, é possível deixar de lado o formalismo dos vetores, adotando-se um eixo nessa respectiva direção e dando um tratamento escalar às grandezas vetoriais, atribuindo sinais algébricos – ou + para elas, conforme estejam contra a favor ou contra o eixo adotado.

Em problemas bidimensionais, o tratamento vetorial fornecerá uma resolução mais elegante e concisa, embora ainda seja possível trabalhar com as componentes escalares de cada vetor ao longos dos eixos x e y. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo Resolvido 1: uma bola de boliche, rolando com velocidade V_i = 4 m/s, colide elasticamente com uma parede, retornando com a mesma velocidade em módulo V_F = 4 m/s. Se a massa da bola vale m = 2 kg e se o impacto com a parede durou Δt = 0,20 s, determine a intensidade da força média F que a parede exerce na bola, durante o impacto:



1ª solução – Com tratamento Vetorial.

Determinemos a direção, o sentido e os módulos dos vetores $\vec{Q}_i$ e $\vec{Q}_F$ da bola de boliche:

$Q_i = m.V_i$ = 2 kg x 4 m/s = 8 kg.m/s , assim, $\vec{Q}_i = 8 \rightarrow$

$Q_F = M.V_F$ = 2 kg x 4 m/s = 8 kg.m/s, assim, $\vec{Q}_F = 8 \leftarrow$

Pela relação eq4, podemos escrever:

$$\vec{Q}_F = \vec{Q}_i + \vec{I} \qquad \textbf{(eq4)}$$

Substituindo os respectivos vetores na expressão vetorial eq4, vem:

$$\vec{Q}_F = \vec{Q}_i + \vec{I}$$

$$\leftarrow 8 = 8 \rightarrow + \vec{I},$$

$$\leftarrow 8 + 8 \leftarrow = \vec{I} \quad \Rightarrow \quad \vec{I} = 16 \leftarrow$$

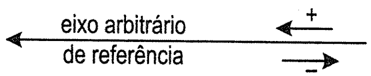
Assim, determinamos que o impulso vale 16 N.s, sendo horizontal e apontando pra esquerda, na mesma direção e sentido da força F, como já era esperado. Assim:

$$I = F.\Delta t \;\Rightarrow\; 16 = F.0,2 \;\Rightarrow\; F = 80\text{ N}$$

2ª solução – Com tratamento Escalar.

Sempre que todos os vetores envolvidos no problema tiverem a mesma direção, isto é, forem paralelos (podendo ter sentidos iguais ou opostos), é possível também dar um tratamento escalar à solução do problema. Para isso, basta arbitrar um eixo orientado na mesma direção dos vetores envolvidos,

considerando um valor algébrico positivo para aqueles que apontarem no mesmo sentido do eixo arbitrário, e um sinal algébrico negativo para aqueles que apontarem contra o eixo.
Nessa resolução, adotaremos um eixo horizontal para a esquerda:



Assim, as quantidades de movimento escalar receberão sinais algébricos conforme o eixo acima:

$Q_i = -m.V_i = -2\ kg \times 4\ m/s = -8\ kg.m/s$
$Q_F = +m.V_F = +2\ kg \times 4\ m/s = +8\ kg.m/s$

Aplicando o teorema do Impulso em sua forma escalar (ou seja, levando em conta os sinais algébricos), temos:

$(Q_F) = (Q_i) + (I)$
$(+8) = (-8) + (I) \Rightarrow I = +16\ kg.m/s$

O sinal algébrico positivo encontrado indica que o impulso I aponta a favor do eixo arbitrado, ou seja, aponta para a esquerda ←, como era esperado.

$I = F.\Delta t \Rightarrow 16 = F.0,2 \Rightarrow F = 80\ N$

Exemplo Resolvido 2: numa importante final futebolística, Ronaldinho cobra um pênalti e a bola, depois de chocar-se contra o travessão, sai numa direção perpendicular à do movimento inicial. A bola, que tem m = 0,50 kg de massa, incide no travessão com velocidade de módulo V_i = 80 m/s e recebe deste uma força de intensidade média F = 5000 N. Calcule o módulo da velocidade da bola V_F imediatamente após o impacto sabendo que o impacto da bola no travessão dura Δt = 0,01 s.

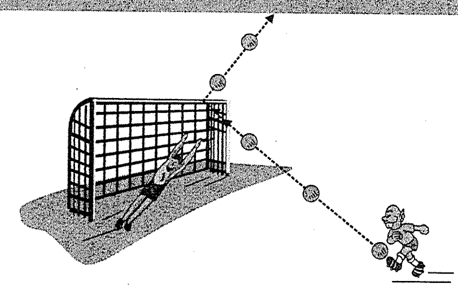
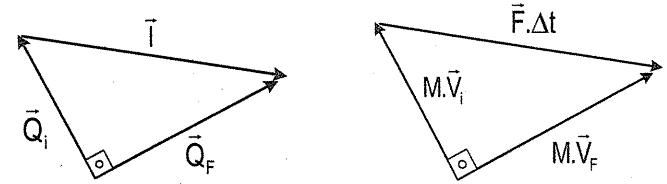


Figura 4

Solução:
Nesse problema, os vetores envolvidos ($\vec{V}_i$ e $\vec{V}_F$) não apontam numa mesma direção, portanto não há como adotar um eixo arbitrário e fazer uso de sinais algébricos.
Inevitavelmente, esses tipos de problemas bidimensionais ou mesmo os tridimensionais são mais facilmente solucionados usando o tratamento vetorial. A Figura

indica que os vetores $\vec{V}_i$ e $\vec{V}_F$ são perpendiculares entre si, assim como também serão perpendiculares entre si os vetores $\vec{Q}_i = M.\vec{V}_i$ e $\vec{Q}_F = M.\vec{V}_F$. Utilizando as relações eq3 e eq4, o diagrama vetorial pode ser esquematizado conforme a figura a seguir:



$\vec{Q}_F = \vec{Q}_i + \vec{I}$ $\qquad$ $M.\vec{V}_F = M.\vec{V}_i + \vec{F}.\Delta t$

Determinando os módulos dos vetores $\vec{Q}_i$ e $\vec{I}$, vem:

$Q_i = m.V_i = 0,50\ kg \times 80\ m/s = 40\ kg.m/s$

$I = F.\Delta t = 5000\ N \times 0,01\ s = 50\ N.s$

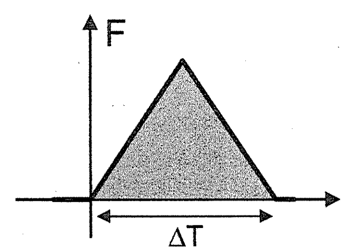
Os diagramas vetoriais mostram que a relação entre os módulos de $\vec{Q}_i$, $\vec{Q}_F$ e $\vec{I}$ é dada pelo teorema de Pitágoras:

$|Q_F|^2 + |Q_i|^2 = |I|^2 \Rightarrow |Q_F|^2 + |40|^2 = 50^2 \Rightarrow Q_F = 30\ kg.m/s$

$Q_F = M.V_F = 0,5 \times V_F = 30 \Rightarrow V_F = 60\ m/s$

2.3 - IMPULSO APLICADO POR UMA FORÇA DE INTENSIDADE VARIÁVEL

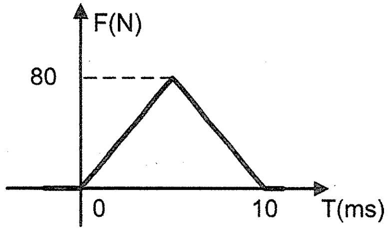
O impulso de uma força constante pode ser calculado pela expressão $I = F.\Delta t$. Entretanto, se a força varia durante o intervalo de tempo, seu cálculo só pode ser feito conhecendo-se o comportamento da força durante o impulso, através do gráfico F x t :



Propriedade:

Calculando-se se a área hachurada sob o gráfico F x t, num dado intervalo de tempo, determinamos o valor numérico do impulso realizado pela força F durante aquele intervalo.

Exemplo Resolvido 3: Uma bola de bilhar, de massa 800 g, estava rolando com velocidade de 40 cm/s, quando recebeu uma tacada na mesma direção e sentido do seu movimento. Se a força aplicada pelo taco teve intensidade F descrita pelo gráfico a seguir, determine:



a) O impulso I aplicado pelo taco.
b) A velocidade da bola, após a tacada.
c) A intensidade da Força média que atuou sobre a bola durante o impacto.

Solução:

a) Neste caso, a expressão $I = F.\,\Delta t$ não se aplica, pois F tem intensidade variável naquele intervalo de tempo. Determinemos a intensidade do impulso I pelo cálculo da área sob a curva:

$$I \overset{n}{=} \text{área do triângulo} = \frac{B \times h}{2} = \frac{10.10^{-3} \times 80}{2} = 0{,}4 \text{ N.s}$$

b) $M.V_F = M.V_i + I$

$(0{,}8 \text{ kg}).\, V_F = (0{,}8 \text{ kg}).(\,0{,}4 \text{ m/s}\,) + 0{,}4 \text{ N.s}$

$V_F = 0{,}9 \text{ m/s} = 90 \text{ cm/s}$

Assim, determinamos a velocidade adquirida pela bola após receber o impulso.

c) No caso em que a força tem intensidade variável, podemos escrever:

$$I = F_{média} \times \Delta t \quad \textbf{(eq5)}$$

Assim: $I = F_{média} \times \Delta t \Rightarrow 0{,}4 = F_{média} \times 10.10^{-3} \Rightarrow F_{média} = 40 \text{ N}$

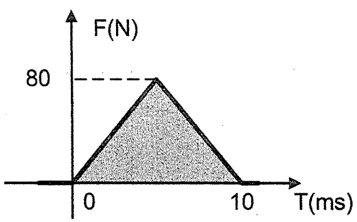


Figura 5

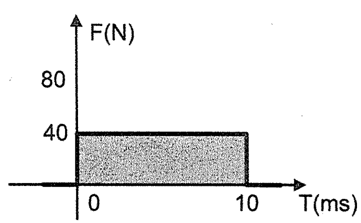


Figura 6

As áreas hachuradas nos gráficos das Figuras 5 e 6 são iguais. Isso significa que os impulsos aplicado por essas forças, nesse intervalo de tempo, são idênticos.

Aqui está claramente ilustrado o conceito de força média: uma força constante de intensidade de 40 N (Figura 6), atuando durante o mesmo intervalo de 10 milissegundos, aplica o mesmo impulso que a força original variável da Figura 5. Dizemos que o valor médio da força descrita pelo gráfico da Figura 5 vale $F_{média} = 40$ N

2.4 - O CONCEITO DE SISTEMA

De agora em diante, estamos interessados em estudar as interações entre os corpos de um sistema. Estamos interessados em estudar a Dinâmica do sistema com base nas Leis de Newton. Nosso primeiro passo será definir quais corpos pertencem ao nosso sistema.

Corpos que pertencem ao sistema: todos os corpos que estejam livres para se mover, que não estejam travados nem possuam massa infinitamente grande, comparada aos demais corpos do sistema.

Corpos que não pertencem ao sistema: corpos que estejam travados ou que apresentem massa infinitamente grande quando comparada às demais massas do sistema.

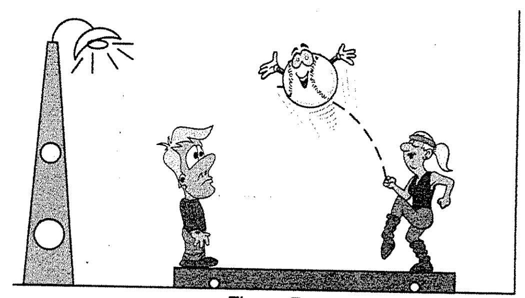


Figura 7

Na figura 7, por exemplo, podemos destacar os seguintes corpos que estão interagindo entre si, isto é, trocando pares de força ação-reação: menino, menina, bola, plataforma, parede, poste, chão e Terra.

A Terra interage com todas as demais massas do sistema (gravitacionalmente), causando-lhes peso. O chão está interagindo com a plataforma, trocando um par de forças de contato (normal) e, eventualmente, um par de atritos. A menina, por sua vez, joga a bola para o menino, trocando com a bola um par de forças de contato. A bola pode, eventualmente, colidir com a parede ou com o poste de iluminação pública.

A 2ª lei de Newton afirma que uma força F causa, a um corpo de massa M, uma aceleração **a** tal que **a** = F / M. Entretanto, existem corpos que "não aceleram", ainda que forças sejam aplicadas a eles, tais como a parede, o chão, o poste.

O prof. Renato Brito costuma dizer que estes corpos agem "como se" estivessem travados (fixos, presos). Matematicamente, tudo se passa como se eles apresentassem massa infinitamente grande ($M = \infty$) quando comparada às demais massas do sistema. Afinal, tendo massa infinita, a aceleração destes corpos será sempre nula ($a = 0$), qualquer que seja a força F que os corpos do sistema exerçam sobre ele:

$$\text{Se } M = \infty \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{M} = \frac{F}{\infty} = 0,\ \forall F$$

Assim, excluímos do sistema todos os corpos que tenham esse comportamento, isto é, que estejam travados (fixos). Dizemos que eles fazem parte do *ambiente*. No nosso exemplo, portanto, temos:

Ambiente = { Terra, chão, parede e poste}

Sistema = { menino, menina, bola e plataforma}

2.5 - O conceito de Forças Internas e Externas

Considere todas as forças que agem em nosso sistema da Figura 7, isto é, todas as forças que agem nos corpos que pertencem ao nosso sistema. Isso implica que estamos, necessariamente, falando sobre todas as forças que agem sobre os seguintes corpos:

Sistema = { menino, menina, bola e plataforma}

Assim, não nos interessam as forças que agem sobre a Terra, a parede, o chão ou o poste.

Esse grupo de "forças que agem no sistema" ainda pode ser dividido em dois subgrupos: as forças internas e as forças externas.

Forças internas que agem no sistema – Dizemos que a força é interna quando ambos, tanto "o corpo que exerce a força" quanto "aquele que sofre a referida força", são corpos pertencentes ao sistema. Por exemplo:

1) a força que a menina aplica na bola.

2) A força que a bola aplica na menina

3) A força de atrito que a plataforma aplica no sapato do menino

4) A força de atrito que o sapato do menino aplica na plataforma

5) A força normal N que a menina aplica na plataforma

6) A força normal N que a plataforma aplica na menina

Decorre da definição que, quando uma interação se dá internamente ao sistema, tanto a ação quanto a reação estão "dentro do sistema" agindo em corpos do sistema.

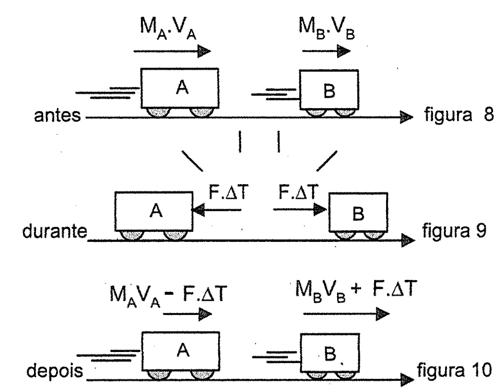
Forças Externas que agem no sistema – São as forças que "os corpos que estão fora do sistema" exercem sobre "os corpos que pertencem ao sistema". Nesse caso, a interação não ocorre internamente ao sistema, se dando através da sua fronteira. Por exemplo:

1) a força que a parede aplica na bola.
2) a força normal N que o chão exerce sobre a plataforma
3) a força peso que a Terra exerce na menina
4) a força peso que a Terra exerce na bola
5) a força peso que a Terra exerce no menino
6) a força que o poste aplica na bola
7) a força de atrito que o chão aplica na plataforma

Decorre da definição que, quando a interação se dá através da fronteira do sistema, se a ação atuar em um corpo pertencente ao sistema, a sua reação agirá sobre um corpo que está fora do sistema; e vice-versa.

2.6 – AÇÃO-REAÇÃO: TRANSFERÊNCIAS DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A figura 8 mostra duas caixas, com suas respectivas quantidades de movimento, prestes a colidirem sobre um solo liso. No momento do impacto, as caixas trocam um par de forças de contato F e –F de mesmo valor e sentidos opostos (ação e reação). A duração ΔT do impacto é a mesma para ambas as caixas. Ora, a mesma força F agindo durante o mesmo intervalo de tempo ΔT, significa que as caixas trocaram impulsos $F.\Delta T$ iguais em módulo, mas de sentidos contrários.



O impulso $F.\Delta T$ que a caixa A sofreu, durante o impacto, é contrário ao seu movimento (figura 9) e, portanto, representa a quantidade de movimento que ela <u>perdeu</u> naquela ocasião. Pelo Teorema do impulso, representado pela equação eq2 ou eq3, podemos escrever:

$$Q_A' = Q_A - F.\Delta T$$

$$Q_A' = M_A.V_A - F.\Delta T$$

Por outro lado, o impulso $F.\Delta T$ que a caixa B sofreu é favorável ao seu movimento (Figura 9) e, por sua vez, representa a quantidade de movimento que ela ganhou durante o impacto. Pelo Teorema do impulso, representado pela equação eq2 ou eq3, podemos escrever:

$$Q_B' = Q_B + F.\Delta T$$

$$Q_B' = M_B.V_B + F.\Delta T$$

Assim, vemos que a quantidade de movimento que A perdeu, durante o impacto, é exatamente a mesma quantidade de movimento que a caixa B ganhou naquela ocasião. Isso nos mostra que:

Todo par de impulsos trocados entre dois corpos, durante uma interação, representa uma mera transferência de quantidade de movimento de um corpo para o outro corpo. Esse par de impulsos trocados sempre tem mesmo valor, mesma direção e sentidos contrários (3ª Lei de Newton – Ação e reação). Para um dos corpos ele representará um "ganho de quantidade de movimento" ao passo que, para o outro, uma "perda de quantidade de movimento".

Vimos que a quantidade de movimento do móvel A diminuiu, durante essa colisão, ao passo que a do B aumentou. Mas o que ocorre à "*quantidade de movimento total do sistema*" $Q_{sistema}$?

A quantidade de movimento total do sistema $Q_{sistema}$ é dada pela soma das quantidades de movimento de todos os corpos que pertencem a ele. No exemplo acima, como o sistema é formado apenas pelos corpos A e B, temos que:

$$Q_{sistema\text{-}antes} = Q_A + Q_B = M_A.V_A + M_B.V_B$$

$$Q_{sist\text{-}depois} = Q_A' + Q_B' = (M_A.V_A - F.\Delta T) + (M_B.V_B + F.\Delta T)$$

$Q_{sist\text{-}depois} = M_A.V_A + M_B.V_B$, o que permite concluir que:

$$Q_{sist\text{-}antes} = Q_{sist\text{-}depois}$$

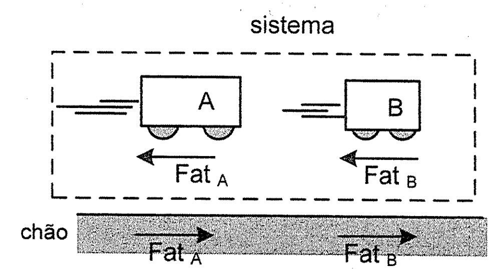
Assim vemos que a "quantidade de movimento total do sistema" permaneceu inalterada durante essa interação. Mas por que isso ocorreu ?

1) a transferência de quantidade de movimento se deu através de um par de forças internas $\{\leftarrow F, \rightarrow F\}$ ao sistema.
2) Isso significa que tanto o corpo que recebeu quanto o que cedeu quantidade de movimento (qdm), durante essa transferência, pertencem ao sistema, estão "dentro da sua fronteira".
3) Como a qdm que B ganhou ($F.\Delta t$) é exatamente igual à qdm que A perdeu (daí o nome "transferência"), a qdm total do sistema permanece inalterada.

Isso nos permite concluir que:

Forças internas sempre agem aos pares, no interior de um sistema e nunca alteram a sua qdm total do sistema. Isto ocorre pelo fato de que, estando a "ação" agindo num corpo que está dentro do sistema e a "reação", em outro corpo que também pertence ao sistema (essa é a definição de forças internas), essa interação consiste em uma mera transferência de qdm entre dois corpos que pertencem ao sistema. O acréscimo de qdm sofrido por um provirá do decréscimo de qdm do outro corpo, de forma que a soma das qdm's de todos os corpos do sistema não é alterada pela ação dos pares de forças internas.

E se houvesse uma interação através de forças externas ao sistema, por exemplo, se houvesse atrito entre os carrinhos (que pertencem ao sistema) e o chão (que não pertence ao sistema), a qdm total do sistema permaneceria inalterada ?



Ora veja, o par de forças de atrito Fat_A que agiria na caixa A e no chão (ação-reação) transferiria, em cada intervalo de tempo Δt, uma quantidade de movimento "$Fat_A.\Delta t$" da caixa (que está dentro do sistema) para o chão (que está fora do sistema), mostrando claramente que qdm do sistema seria transferida pela fronteira, de forma que a qdm total do sistema certamente diminuiria com o passar do tempo.

Isso nos permite concluir que:

Forças externas agindo num sistema alteram a sua quantidade de movimento total. Isto se dá pelo fato de que, estando a "ação" agindo num corpo que está dentro do sistema e a "reação", num corpo que está fora do sistema (veja a definição de força externa), essa interação obrigatoriamente implicará transferência de qdm através da fronteira do referido sistema, de forma que sua qdm total ou aumentará ou diminuirá durante essa interação.

Essa análise nos leva ao conceito de Sistema Mecânico isolado.

2.7- SISTEMA MECÂNICO ISOLADO NA DIREÇÃO HORIZONTAL

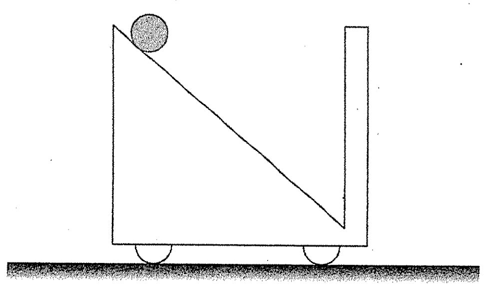
Dizemos que um sistema mecânico encontra-se isolado de forças externas na direção horizontal, num certo intervalo de tempo Δt, quando a resultante das forças externas horizontais $\longleftrightarrow$ que agem sobre o sistema, durante aquele intervalo de tempo, for nula.

Conseqüência: a quantidade de movimento total do sistema, na direção horizontal, durante todo aquele intervalo de tempo, permanecerá inalterada.

Isso significa que a quantidade de movimento horizontal de alguns corpos do sistema pode aumentar, enquanto outras podem diminuir, durante aquele intervalo de tempo (devido a forças internas, transferências internas), mas a soma delas, ou seja, a quantidade de movimento (horizontal) total do sistema permanecerá constante naquele intervalo de tempo. Simbolicamente, podemos escrever:

$$Q_{x\ \text{sistema antes}} = Q_{x\ \text{sistema depois}} \qquad \textbf{(eq6)}$$

Exemplo Resolvido 10: Considere um carrinho de madeira de massa M que se encontra apoiado sobre um solo horizontal liso. Seja uma bola de boliche de massa m que é abandonada sobre a superfície inclinada do carrinho. Admita que todos os corpos encontram-se parados em relação à Terra e que todas as superfícies são lisas. Descreva o comportamento do sistema, após liberado a partir do repouso.



Solução:
Analisando o problema vemos que os corpos que estão destravados, isto é, que estão livres para se mover e, portanto, fazem parte do sistema, são:

Sistema = { bola, carrinho }

Os demais corpos estão travados ou apresentam massa infinitamente grande, de forma que não aceleram, durante as interações com os demais corpos do sistema. Esses não fazem parte do sistema, são eles:

Ambiente = {*Terra, chão* }

A terra e o chão não são mero coadjuvantes nesse episódio, visto que aplicam respectivamente as forças <u>peso</u> (força de campo) e <u>normal</u> (força de contato) nos corpos do sistema.
Observe o diagrama de forças na figura 13a. Note que nem todas as forças da figura estão agindo "no sistema". Em outras palavras, nem todas estão agindo nos corpos que pertencem ao sistema, isto é, na bola ou no carrinho.

As forças que nos interessam são apenas as forças que agem no sistema. São elas:

Forças internas que agem no sistema:
N_1 : força que a bola aplica no carrinho
N_1 : força que o carrinho aplica na bola
F: força que a bola aplica no carrinho durante o choque
F: força que o carrinho aplica na bola durante o choque

Forças externas que agem no sistema:
M.g: Força com que a Terra atrai o carrinho
m.g: Força com que a Terra atrai a bola
N: Força que o chão aplica no carrinho

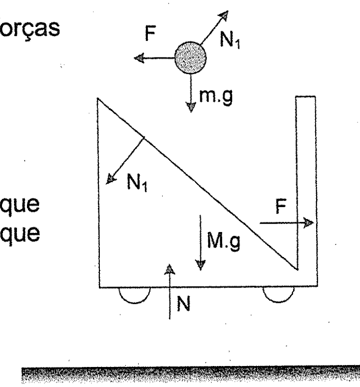
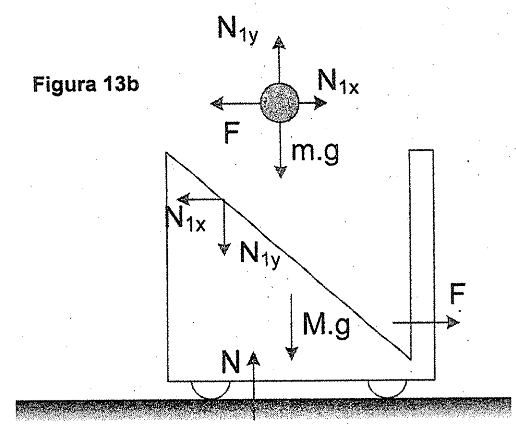


Figura 13a

Figura 13b



Observe a seqüência inicial de imagens que descrevem o movimento da bolinha e do carrinho, quando o sistema é liberado do repouso. Enquanto a bolinha vai descendo a rampa aceleradamente, indo para a direita, o carrinho recua aceleradamente para a esquerda. Observe o diagrama de forças na figura 13b atenciosamente e responda mentalmente:

Quais forças horizontais $\rightarrow$ aceleram a bola para a direita ?
Resposta: a componente $N_{1x} \rightarrow$ da normal.

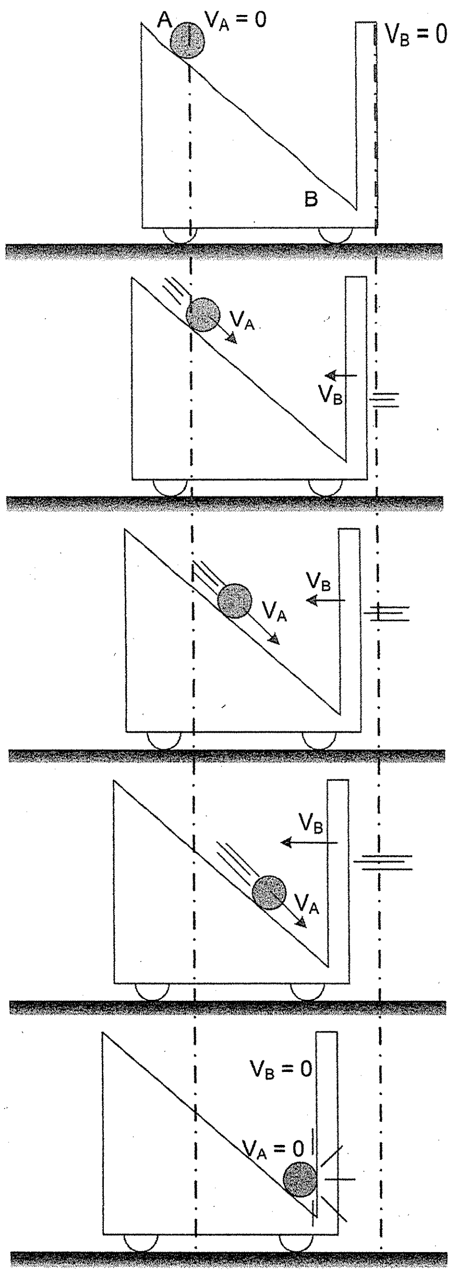
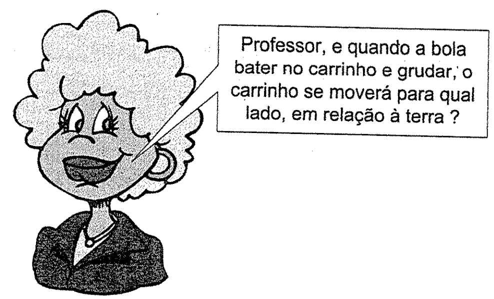


Figura 13c

Quais forças horizontais ← aceleram o carrinho para a esquerda?
Resposta: a componente N_{1x}← da normal.

Ora, Claudete. As forças verticais que agem sobre a bola (↓m.g e N_{1y}↑ veja figura 13b) são responsáveis pela sua aceleração vertical ↓, isto é, pelo seu movimento vertical.



Claudete, responderemos a sua pergunta com duas abordagens alternativas, visando a lhe fazer entender ao máximo.

1ª abordagem: Nessa 1ª abordagem, analisaremos se o sistema se encontra ou não isolado na direção horizontal. Lembre-se: Um sistema encontra-se isolado na direção horizontal ↔ quando a resultante das *forças externas* que agem na direção horizontal é nula.

No sistema em questão, estão agindo apenas duas forças externas, sendo ambas verticais: ↓M.g e m.g↓. Como nenhuma força externa ↔ horizontal está agindo no sistema (figura 13b), podemos dizer que ele se encontra isolado mecanicamente, nessa direção.

Na prática, isso significa que a quantidade de movimento horizontal ↔ do sistema não tem como mudar durante todo o tempo que ele permanecer isolado nessa direção. Isso porque nenhuma força externa horizontal injeta ou retira quantidade de movimento do sistema através de sua fronteira. Apenas forças internas estão agindo na horizontal transferindo quantidade de movimento entre os corpos do sistema apenas internamente.

Qual a quantidade de movimento horizontal do sistema no início do episódio ?

$$Q_{sistema\text{-}i} = Q_{carro\text{-}i} + Q_{bola\text{-}i} = M.V_{carro\text{-}i} + m.V_{bola\text{-}i}$$

Como a bola e carro partem do repouso, temos $V_{carro\text{-}i} = V_{bola\text{-}i} = 0$, portanto:

$$Q_{sistema\text{-}i} = M.V_{carro\text{-}i} + m.V_{bola\text{-}i} = 0 + 0 = 0$$

Desde o instante inicial até o impacto da bola com o carrinho, o sistema encontra-se , o sistema está isolado de forças externas horizontais, o que nos permite escrever:

$$Q_{\text{sistema inicial x}} = Q_{\text{sistema final x}}$$

Admitindo que, após o impacto, carrinho e bola passem a se moverem para a direita → com velocidade comum v, determinemos essa velocidade :

$$Q_{\text{sistema inicial x}} = Q_{\text{sistema final x}}$$

$$0 + 0 = (M + m).\,v \quad \Rightarrow \quad v = 0$$

Isso mostra que, logo após o impacto, carrinho e bola compartilham da mesma velocidade comum v = 0, isto é, ambos param em relação à Terra. Não é curioso ? Veja o movimento do sistema, passo a passo, na Figura 13c.

2ª abordagem: Nessa 2ª abordagem, para esclarecer, mais detalhadamente, o motivo do sistema bola+carrinho parar de se mover após a colisão, observe o eixo do tempo na figura 14. No instante inicial t_o o sistema é liberado do repouso. As forças internas horizontais N_{1x} (se concentre na figura 13b) aceleram horizontalmente o carrinho e a bola, afastando um do outro, em todo o intervalo $[t_o, t_2]$. Entretanto, a colisão da bola com o carrinho, que ocorre no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, se encarrega de desacelerar cada corpo do sistema até o repouso.

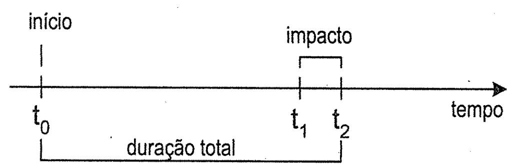


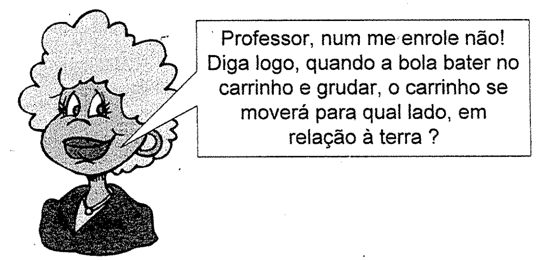
Figura 14

- Inicialmente, todo o sistema encontra-se em repouso (sempre adotamos o referencial em relação à Terra em problemas de qdm), portanto temos $Qx_{sistema} = 0$. Acompanhe pela tabela adiante.
- Durante todo o intervalo de tempo Δt que vai do instante t_o até t_2 (veja seta do tempo figura 14), as forças internas horizontais $\leftarrow N_{1x}$ e $N_{1x}\rightarrow$ (figura 13b) transferem iguais quantidades de movimento $N_{1x}.\Delta t$ (horizontal) do carrinho para a bola, sem alterar, portanto, a quantidade de movimento total do sistema bola+carrinho. Durante a descida da bolinha, a sua quantidade de movimento horizontal vai aumentando com o tempo (0, +10, +30, +50....), a do carrinho vai diminuindo com o passar do tempo (0, –10, –30, –50...), enquanto a soma delas, isto é, a qdm total do sistema, permanece constante (nula

nesse caso) durante todo esse episódio, conforme mostra a tabela abaixo (com valores fictícios), visto que o sistema encontra-se isolado de forças externas na horizontal.

$Q_{x\ carrinho}$ +	$Q_{x\ bola}$ =	$Q_{x\ sistema}$	Etapa
0	0	0	Início (t_o)
–10	+10	0	A
–30	+30	0	B
–50	+50	0	C
0	0	0	Impacto $[t_1 , t_2]$

- O sinal escalar negativo da qdm do carrinho indica que ele se move para trás ←, ao contrário da bolinha, que tem qdm com sinal escalar positivo, indicando que ela se move para frente →.
- O impacto da bola com o carrinho tem uma duração $\Delta tp = t_2 - t_1$. Durante esse curto intervalo de tempo, o carrinho e a bolinha sofrerão impulsos iguais mas opostos, de intensidade $F.\Delta tp$, que representarão uma transferência de uma quantidade de movimento horizontal $F.\Delta tp$ da bola para o carrinho.



Bom, Claudete, nessa 2ª abordagem, admitiremos que bolinha e o carrinho partem do repouso e, após colidirem, prosseguem juntos para a direita → com uma velocidade comum **V** a ser determinada (veja figura 15) . Determinaremos, por cálculo direto, essa velocidade comum v aplicando o *teorema do impulso* isoladamente para cada corpo do sistema, na direção horizontal.

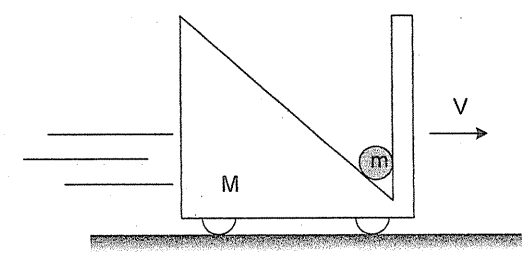


Figura 15

Usaremos notação vetorial, ao invés de fazer uso de sinais algébricos (tratamento escalar):

$$\vec{Q}_{carro\ final} = \vec{Q}_{carro\ inicial} + \vec{I}_{carro}$$

Substituiremos os vetores na expressão vetorial, colocando o módulo de cada vetor próximo a ele:

$$\vec{Q}_{carro\ final} = \vec{Q}_{carro\ inicial} + \vec{I}_{carro}$$

$$\rightarrow M.v = \vec{0} + (\leftarrow N_{1x}.\Delta t + \rightarrow F.\Delta tp) \quad \textbf{(eq7)}$$

onde $\Delta t = t_2 - t_o$ e $\Delta tp = t_2 - t_1$ são as durações de cada impulso.

$$\vec{Q}_{bola\ final} = \vec{Q}_{bola\ inicial} + \vec{I}_{bola}$$

$$\rightarrow m.v = \vec{0} + (\rightarrow N_{1x}.\Delta t + \leftarrow F.\Delta tp) \quad \textbf{(eq8)}$$

Note que a orientação dos vetores nas relações eq7 e eq8 estão de acordo com o diagrama de forças horizontais que agem no carrinho e na bola (figura 13b). Adicionalmente, arbitramos que a bola e o carrinho compartilhariam uma velocidade v→ para a direita após o impacto (figura 15). A escolha do sentido para onde aponta essa velocidade v é arbitrário, você dá o seu palpite (seu chute).

Somando, membro a membro, as relações eq7 e eq8, vem:

$$\rightarrow M.v = \vec{0} + (\leftarrow N_{1x}.\Delta t + \rightarrow F.\Delta tp) \quad \textbf{(eq7)}$$

$$\rightarrow m.v = \vec{0} + (\rightarrow N_{1x}.\Delta t + \leftarrow F.\Delta tp) \quad \textbf{(eq8)}$$

$$\rightarrow M.v + \rightarrow m.v = \leftarrow N_{1x}.\Delta t + \rightarrow F.\Delta tp + \rightarrow N_{1x}.\Delta t + \leftarrow F.\Delta tp$$

Desenvolvendo e essa expressão vetorial, vem:

$$\rightarrow (M+m).v = (\leftarrow N_{1x}.\Delta t + \rightarrow N_{1x}.\Delta t) + (\rightarrow F.\Delta tp + \leftarrow F.\Delta tp)$$

$$\rightarrow (M+m).v = \vec{0} + \vec{0} \quad \Rightarrow \quad v = 0$$

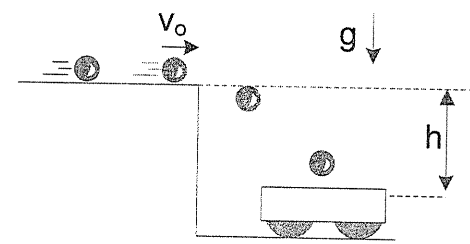
Uau ! O leitor pôde comprovar, matematicamente, porque o sistema "pára" após a colisão entre a bola e o carrinho. Percebemos que os impulsos internos sempre aparecem aos pares e se cancelam dois a dois :

$$\leftarrow N_{1x}.\Delta t + \rightarrow N_{1x}.\Delta t = \vec{0}$$

$$\rightarrow F.\Delta tp + \leftarrow F.\Delta tp = \vec{0}$$

É por esse motivo que os impulsos aplicados pelas forças internas findam não alterando a quantidade de movimento total do sistema, visto que eles sempre aparecem aos pares e se cancelam dois a dois, quando consideramos o sistema como um todo.

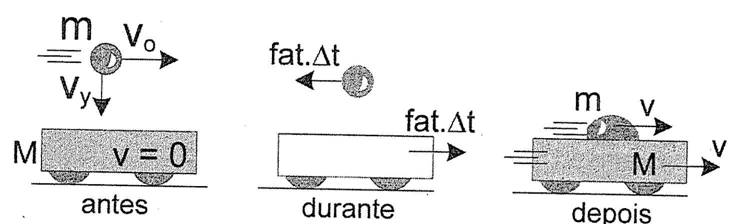
Exemplo Resolvido 4: Uma bolinha de chiclete de massa m, que se move com velocidade V_o num plano horizontal liso, cai de uma altura h e "gruda" num carrinho de massa M, inicialmente em repouso (veja a figura a seguir). Determine a velocidade adquirida pelo carrinho, após esse episódio.



Análise teórica e solução:

No instante que antecede o impacto entre a gosma e o carrinho, o sistema carrinho + gosma possuía a qdm horizontal da gosma $m.v_o$→ e a qdm vertical da gosma $m.v_y$↓ conforme a figura abaixo.

Após o impacto, gosma e carrinho compartilham da mesma velocidade horizontal v em relação à Terra (com $v < v_o$) e o sistema, nessa situação final, possui apenas a qdm horizontal da gosma m.v→ e do carrinho M.v→, todas em relação à Terra.



Assim, na direção horizontal, percebemos que:

- a gosma possuía uma "grande" qdm $m.v_o$→ antes do impacto, mas possui apenas uma qdm m.v→ após o impacto ($v < v_o$). Vemos que a qdm horizontal da gosma sofreu um decréscimo;
- o carrinho não possuía nenhuma qdm horizontal antes do impacto, mas possui qdm horizontal M.v→ após o impacto. Vemos que o carrinho teve um acréscimo de qdm na horizontal.
- Observando o sistema durante o impacto, entendemos facilmente o ocorrido. Pela 3ª lei de Newton, as forças internas fat→ e fat← têm o mesmo valor e, adicionalmente, agem durante o mesmo intervalo de tempo Δt, produzindo, dessa forma, impulsos de mesmo valor e sentidos contrários.
- O impulso fat.Δt← que age na gosma representa o seu decréscimo de qdm, ao passo que o impulso fat.Δt→ que age no carrinho representa o acréscimo em sua qdm. De fato, a interação interna (fat.Δt→ e fat.Δt←) ocorrida no sistema **meramente transfere uma quantidade de movimento fat.Δt da gosma para o carrinho** na horizontal.

Segundo o Teorema do impulso, a qdm que o corpo vai ter depois (Q_F) é igual à qdm que ele tinha antes (Qi) mais a qdm que ele ganhou (+I), caso ele tenha "ganhado", ou menos a que ele perdeu (–I), se ele tiver perdido.

Matematicamente:

$$Q_F = Q_i \pm I$$

Assim, aplicando o Teorema do Impulso ao carrinho (massa M), na direção horizontal, temos:

Carrinho: $Q_{Final\ x} = Q_{inicial\ x} + I$

$$M.v = 0 + fat.\Delta t \qquad \textbf{(eq9)}$$

Aplicando o Teorema do Impulso à gosma (massa m), na direção horizontal, temos:

gosma: $Q_{Final\ x} = Q_{inicial\ x} - I$

$$m.v = m.v_o - fat.\Delta t \qquad \textbf{(eq10)}$$

Somando eq9 e eq10, membro a membro, encontraremos o teorema do impulso para o sistema carrinho + gosma. Veja:

Sistema carrinho + gosma: $(M.v + m.v) = (0 + m.v_o) + (fat.\Delta t - fat.\Delta t)$ **(eq11)**

Fisicamente, a relação eq11 nos diz que: a qdm que o sistema possui depois do impacto (M.v + m.v) é a qdm que ele já possuía antes ($0 + m.v_o$) mais tudo que ele lucrou pela sua fronteira (fat.Δt – fat.Δt).

Vemos que o sistema não teve lucro algum pela fronteira (fat.Δt – fat.Δt = 0). A transferência de qdm horizontal se deu através de um par de impulsos internos ao sistema, o que constitui uma mera transferência interna de qdm, **e transferências internas não alteram a soma das qdm**. Veja abaixo como a soma das qdm do sistema depois é exatamente igual à soma das qdm do sistema antes do impacto, tomando todas na direção horizontal:

$$(M.v + m.v) = (0 + m.v_o) + (fat.\Delta t - fat.\Delta t)$$

$$(M.v + m.v) = (0 + m.v_o) + 0 \qquad \textbf{(eq11)}$$

$$(M + m).v = m.v_o \Rightarrow \boxed{v = \frac{m.v_o}{M+m}} \qquad \textbf{(eq12)}$$

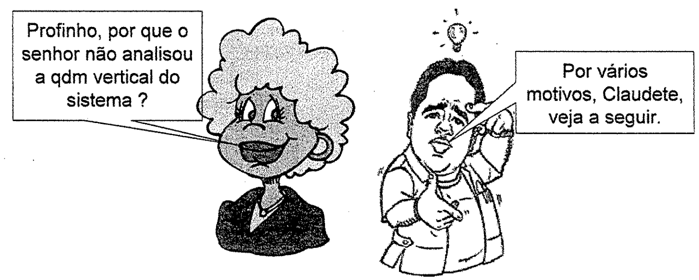
Assim, chegamos ao resultado buscado. Para que o leitor compreendesse fisicamente o que, de fato, ocorreu no sistema, durante a colisão, isto é, a transferência de parte da qdm horizontal da gosma para o carrinho, o prof. Renato Brito:

- mostrou em detalhes as figuras do antes, do durante e do depois da colisão, destacando o par de impulsos internos na horizontal responsável pela transferência de parte da qdm horizontal da gosma para o carrinho;

- escreveu o teorema do impulso separadamente para cada corpo na direção horizontal (eq9 e eq10) e somou membro a membro, para encontrar o teorema do impulso para os sistema todo (eq11), esclarecendo matematicamente porque a transferência interna (fat.Δt – fat.Δt = 0) de qdm não altera a soma (algébrica ou vetorial) das qdm's do sistema na direção horizontal.

Dessa forma, encontramos a velocidade comum compartilhada pelo carrinho e pela gosma na horizontal após a colisão, dada pela relação eq12.

Logicamente, o leitor que já esteja treinado, consegue visualizar mentalmente a transferência interna de qdm horizontal sendo, portanto, capaz de escrever a relação eq11 diretamente ($\Sigma Q_{x\ depois} = \Sigma Q_{x\ antes}$) sem precisar escrever o teorema do impulso individualmente para cada corpo do sistema e somá-los membro a membro. Entretanto, é preciso estar realmente certo de que houve a transferência interna de qdm horizontal no sistema. Muitas vezes o estudante equaciona o sistema admitindo que tenha havido essa transferência interna quando, de fato, não foi exatamente esse o ocorrido. Para mais detalhes, veja as questões 4, 7 e 9.

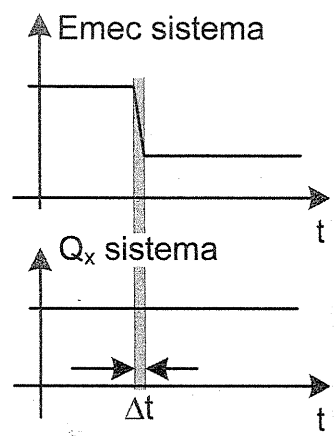


- Em primeiro lugar, vemos que o problema pede que determinemos a velocidade horizontal do carrinho após a colisão. Assim, como queremos determinar uma grandeza na direção horizontal, faz sentido que analisemos o sistema apenas na direção horizontal;
- Em segundo lugar, sendo Q uma grandeza vetorial, podemos nos dar ao luxo de aplicar o teorema do impulso ao sistema somente na horizontal sem nos preocupar em fazer uso dele na vertical. Afinal, as qdm's horizontais só são afetadas por impulsos horizontais, ao passo que as qdm's verticais só são afetadas por impulsos verticais, sendo, portanto, independentes.
- Note que, sendo Trabalho e Energia grandezas escalares, **não** é possível, portanto, aplicar os teoremas de trabalho e energia somente numa direção sem levar em consideração as demais (energia cinética, por exemplo, não tem direção). Os princípios de trabalho e energia devem ser usados levando-se em conta a grandeza toda e, não somente, a energia cinética associada a uma das componentes da velocidade, ignorando-se a parcela de Ecin associada à outra componente. Essa independência entre as direções horizontal e vertical *só é verdadeira quando se trata de grandezas vetoriais, tais como impulso e qdm.*

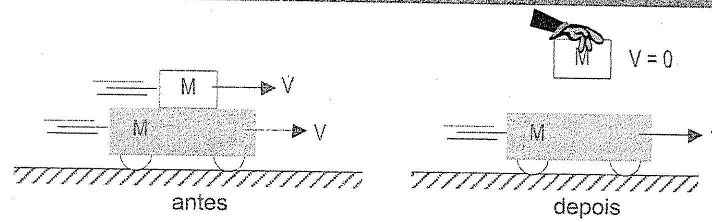
- Na vertical, a qdm do sistema não se conserva. Ocorre uma transferência de qdm na vertical entre o sistema e a Terra, transferência essa que é imperceptível tendo em vista que a massa da Terra é muito maior que a massa dos corpos do nosso sistema.
- Em todos os problemas que envolvem impactos verticais com o chão (Terra), a qdm do sistema nunca se conservará na vertical. A Terra amortece o impacto vertical. Nessa classe de problemas, verifique se o sistema conserva pelo menos a sua qdm na direção horizontal.

Claudete, esse tipo de colisão em que os dois corpos permanecem grudados é conhecida como "colisão bate-gruda", tecnicamente conhecida como **colisão inelástica**. Nessa classe de colisões, sempre uma parte da energia mecânica do sistema é sempre dissipada em calor, energia sonora etc. Dessa forma, a energia mecânica do sistema após a colisão é menor que a energia mecânica dele logo antes da colisão.

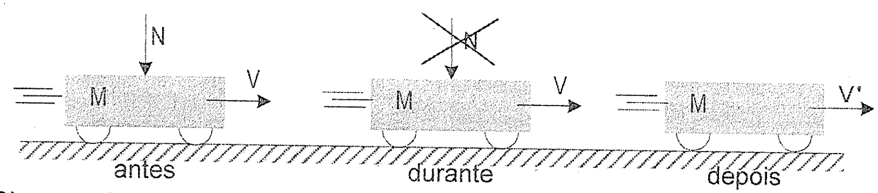
Os gráficos ao lado mostram a Emec do sistema e a sua qdm Q_x horizontal, em função do tempo. Vemos que apenas a Q_x do sistema permanece constante nesse episódio (conforme a relação eq11), enquanto parte da Emec do sistema é dissipada em calor e som durante o breve intervalo de tempo Δt em que ocorre a colisão inelástica.



Exemplo Resolvido 5: A figura mostra um carrinho de massa M que se move num solo horizontal liso com velocidade constante V, carregando um bloquinho de mesma massa M. Rapidamente, uma pessoa retira suavemente o bloquinho de cima do carrinho. Determine a nova velocidade do carrinho.



Análise Teórica e Solução:
Segundo a lei da Inércia, proposta por Galileu e refinada por Newton, a velocidade horizontal v→ do carrinho só aumentará ou diminuirá de valor em resposta a uma força horizontal respectivamente a favor F→ dessa velocidade ou contra F← ela. Nesse episódio, alguma força horizontal atuou nesse carrinho ☺ ?



Observando a figura acima, vemos que a única mudança sofrida pelo carrinho, durante esse episódio, foi que a força normal exercida pelo bloquinho sobre ele foi suprimida quando o bloquinho foi retirado de cima do carrinho. Assim, de acordo com a lei da Inércia, considerando a total ausência de forças horizontais, a velocidade horizontal desse carrinho não pode ter mudado durante esse episódio, o que nos permite concluir que v' = v.

Sei que essa análise tão básica e simples do problema, com base meramente na lei da Inércia, pode parecer frustrante para a maioria dos leitores do universo IME ITA mas, ainda assim, é uma resolução fisicamente clara e concisa baseada numa das leis mais elementares da mecânica.

Dessa forma, chegamos à resposta da questão mas, certamente, suscitamos muitas dúvidas.

Antes de ler essa resolução, por exemplo, muitos leitores talvez estivessem esperando uma resposta v' = 2v com base nesse cálculo sofismático abaixo:

$$\Sigma Qx_{\text{antes}} = \Sigma Qx_{\text{depois}} \Rightarrow M.v + M.v = 0 + M.v' \Rightarrow v' = 2v$$

Entretanto, esse resultado viola frontalmente a lei da Inércia e, portanto, deve ser abandonado.

Algumas pessoas tentam analisar o problema com base na quantidade de movimento do sistema. Eu particularmente acho desnecessário mas posso fazê-lo a fim de esclarecer as eventuais dúvidas dos leitores. De antemão, afirmo que a resposta do problema já foi encontrada (v' = v) e ela não mudará mais, para que o leitor não tenha mais esperanças em contrário ☺.

Para analisar se a quantidade de movimento do sistema se conserva ou não, durante esse episódio, devemos definir primeiramente quem será o nosso sistema. Consideremos os dois casos a seguir:

Caso 1: Sistema carrinho

Admitindo que o sistema seja apenas o carrinho, as qdm's inicial e a qdm final desse sistema valem:

$$Q_{\text{sistema início}} = M.V_{\text{inicial}} = M.v$$

$$Q_{\text{sistema final}} = M.V_{\text{final}} = M.v$$

Vemos que a quantidade de movimento do sistema se conserva, nesse caso 1, o que faz sentido, tendo em vista que o sistema carrinho encontra-se completamente isolado da ação de forças externas.

Caso 2: Sistema carrinho + bloquinho

Admitindo que o sistema seja o carrinho + bloquinho, a qdm inicial e a qdm final desse sistema valem:

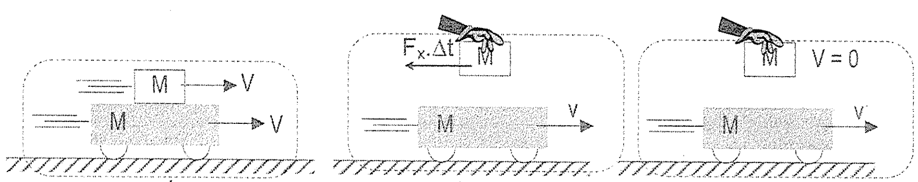
$$Q_{\text{sistema início}} = M.v + M.v = 2M.v$$

$$Q_{\text{sistema final}} = M.v + 0 = M.v$$

Vemos que a quantidade de movimento do sistema não se conserva, nesse caso 2, o que faz sentido, tendo em vista que o sistema carrinho + bloquinho sofre a ação de uma força externa Fx ← (que o operador exerce sobre o bloquinho) responsável por levar o bloquinho ao repouso, após ser retirado de cima do carrinho. Em outras palavras, esse sistema não se encontra isolado de forças externas na horizontal. Aplicando o teorema do impulso ao sistema nesse caso 2, temos:

$$Q_{\text{sist F}} = Qsist_i + I_{ext}$$

$$M.v = 2M.v + (-F_x.\Delta t)$$



antes durante depois

O cálculo sofistmático que leva ao resultado incoerente v' = 2v está errado pois parte do pressuposto de que o sistema carrinho + bloquinho encontra-se isolado, aplicado a conservação da qdm a esse sistema quando, na verdade, ele não se encontra isolado. Afinal, uma quantidade de movimento $F_x.\Delta t$ é transferida pela fronteira do sistema, do bloquinho para o operador, justificando o decréscimo da Q_{sistema}.

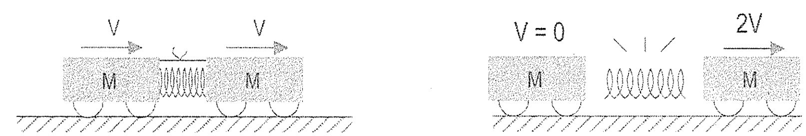
Exemplo Resolvido 6: A figura mostra dois carrinhos de mesma massa M que se movem juntos num solo horizontal liso com velocidade constante V, conectados entre si por um fio ideal. Presa entre eles existe uma mola comprimida. Considere que, de repente, o fio se rompe, a mola se solta impulsionando os carros. Sabendo que o carro de trás perde toda a sua velocidade quando a mola se solta, determine a velocidade final do carro da frente.

antes depois

Solução:

Nesse problema, nosso sistema é composto pelos dois carrinhos e pela mola de massa nula. Após a mola ser liberada, ela claramente aplica um par de impulsos ←k.x.Δt e k.x.Δt→ aos dois carrinhos, impulsos estes que meramente transferem uma quantidade de movimento k.x.Δt do carrinho de trás para o carrinho da frente e, conforme vimos, transferências internas de qdm não alteram a soma das qdm do sistema, o que nos permite escrever:

$$\Sigma Q_{\text{antes}} = \Sigma Q_{\text{depois}} \quad\Rightarrow\quad M.v + M.v = 0 + M.v' \quad\Rightarrow\quad v' = 2v$$

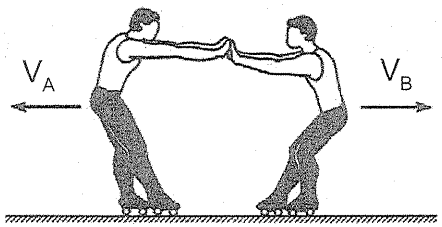


antes depois

Note que o cálculo da conservação da qdm do sistema leva ao resultado correto desse problema. Entretanto, esse mesmo cálculo leva a um resultado incoerente, no Exemplo Resolvido 5. Qual a diferença ?

A diferença é que, no exemplo resolvido 5 – caso 2 – o sistema não estava isolado, portanto, fazer uso da conservação da qdm nesses casos leva a um resultado incoerente. Já no exemplo resolvido 6, vemos claramente que o sistema está isolado de forças externas. O carrinho da frente sofre um aumento de velocidade claramente devido à transferência interna de qdm do carrinho de trás para o da frente, através de um par de impulsos de mesmo valor e sentidos opostos da força elástica. Conforme sabemos, **transferências internas não alteram a soma** (algébrica ou vetorial das qdm's do sistema).

Exemplo Resolvido 7: Dois irmãos Adriano e Beto, de massas respectivamente iguais a 60 kg e 80 kg, encontram-se sobre patins, inicialmente em parados num solo liso. Subitamente, os irmão se empurram, e Adriano adquire uma velocidade de 4 m/s. Determine:
a) a velocidade adquirida por Beto;
b) o instante em que a distância entre os patinadores atinge 35 m.
c) o aumento de energia mecânica do sistema
d) de onde provém esse aumento da energia mecânica do sistema.



Análise teórica e solução:

Adriano (A) e Beto (B) formam um sistema isolado. Quando A e B se empurram, mutuamente, trocam entre si um par de forças internas(ação-reação) de mesmo módulo F, durante um mesmo intervalo de tempo Δt. Durante essa interação, uma quantidade de movimento $F.\Delta t$ é meramente transferida de A para B. Conforme sabemos, uma mera transferência interna de qdm não altera a soma das qdm's do sistema. Assim, podemos escrever:

$$\Sigma Q_{\text{antes}} = \Sigma Q_{\text{depois}} \quad \Rightarrow \quad (Q_A + Q_B)_{\text{antes}} = (Q_A + Q_B)_{\text{depois}}$$

a) Adotaremos um eixo positivo para a direita $\rightarrow$ e atribuiremos sinal algébrico positivo para grandezas vetoriais a favor do eixo e, negativo para grandezas vetoriais que apontem contrário ao eixo.

$$(Q_A + Q_B)_{\text{antes}} = (Q_A + Q_B)_{\text{depois}}$$
$$0 + 0 = -m_A.v_A + m_B.v_B$$
$$0 + 0 = -(60).(4) + (80).v_B$$
$$v_B = 3 \text{ m/s}$$

b) A velocidade relativa entre os patinadores vale 4 + 3 = 7 m/s. A distância entre eles aumenta 7 m a cada 1 segundo, portanto, atingirá 35 m depois de decorridos 5 s do instante inicial.

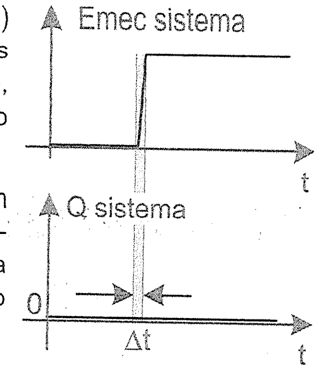
c) A energia mecânica do sistema era nula inicialmente. Após esse empurrão, a Emec do sistema aumentou para:

$$\text{Emec}_F = m_A.v_A^2 / 2 + m_B.v_B^2 / 2 = (60).(4)^2 / 2 + (80).(3)^2 / 2 = 840 \text{ J}$$

Assim, o aumento da Emec do sistema vale:

$$\Delta E_{mec} = E_{mec\,F} - \text{Emec}_i = 840 - 0 = 840 \text{ J}$$

Note que a qdm do sistema, que era nula (0 + 0) antes do empurrão, continua nula (–240 + 240) após o empurrão. Afinal, transferências internas de qdm, realizadas através da ação de forças internas, não alteram a qdm do sistema.



Nesse caso, entretanto, as forças internas não eram conservativas. Assim, durante o empurrão, elas realizaram trabalho e levaram ao aumento da energia cinética (mecânica) do sistema, conforme o gráfico ao lado.

d) O aumento da energia mecânica provém do trabalho realizado pelas forças internas do sistema, mais especificamente, das forças dos músculos dos rapazes. Elas realizaram um trabalho de 840 J, convertendo 840 J de energia interna do sistema em energia mecânica.
Os rapazes precisarão se alimentar para repor essa energia interna que eles perderam, convertida em energia mecânica do sistema, durante o breve empurrão trocado entre eles.

Exemplo Resolvido 8 (UECE 2003): Um núcleo radioativo de Urânio-235 decai espontaneamente para Tório-231 pela emissão de uma partícula alfa (α) com energia cinética $K\alpha$ = 4600 keV. A reação nuclear é:

$$^{235}U \rightarrow {}^{4}\alpha + {}^{231}Th$$

Sabendo que a massa da partícula alfa vale 4,00u, então a energia cinética de recuo do núcleo de Tório (de massa 231u) é aproximadamente igual a:

a) 80 Kev b) 50 Kev c) 20 Kev d) 110 Kev

Solução:

A partícula alfa (A) e o Tório (B) emitidos formam um sistema isolado. Quando A e B se empurram, mutuamente, trocam entre si um par de forças internas (ação-reação) de mesmo módulo F, durante um mesmo intervalo de tempo Δt. Durante essa interação, uma quantidade de movimento $F.\Delta t$ é meramente transferida de A para B. Conforme sabemos, uma mera transferência interna de qdm não altera a soma das qdm's do sistema. Assim, podemos escrever:

$$\Sigma Q_{\text{antes}} = \Sigma Q_{\text{depois}} \quad \Rightarrow \quad (Q_A + Q_B)_{\text{antes}} = (Q_A + Q_B)_{\text{depois}}$$

Adotaremos um eixo positivo para a direita $\rightarrow$ e atribuiremos sinal algébrico positivo para grandezas vetoriais a favor do eixo e, negativo para grandezas vetoriais que apontem contrário ao eixo.

$$(Q_A + Q_B)_{\text{antes}} = (Q_A + Q_B)_{\text{depois}}$$

$$0 + 0 = -m_A.v_A + m_B.v_B$$

$$m_A.v_A = m_B.v_B \Rightarrow \boxed{\frac{v_A}{v_B} = \frac{m_B}{m_A}} \quad \textbf{(eq13)}$$

Para encontrar uma relação entre as energias cinéticas das partículas A e B emitidas, calculemos a razão entre elas:

$$\frac{Ecin_A}{Ecin_B} = \frac{m_A.v_A^2/2}{m_B.v_B^2/2} = \frac{m_A}{m_B}.\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 \overset{eq1}{=} \frac{m_A}{m_B}.\left(\frac{m_B}{m_A}\right)^2, \text{ ou seja, } \boxed{\frac{Ecin_A}{Ecin_B} = \frac{m_B}{m_A}}$$

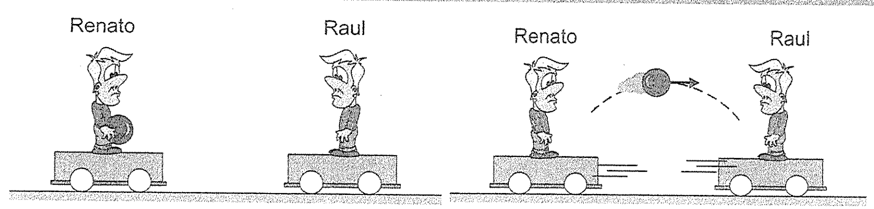
(eq14)

Assim, conhecendo-se as massas $m_A = 4u$, $m_B = 231u$ e a energia cinética $Ecin_A = 4600$ keV da partícula α emitida, podemos facilmente determinar a energia cinética do Tório (B) emitido, fazendo uso da relação eq14:

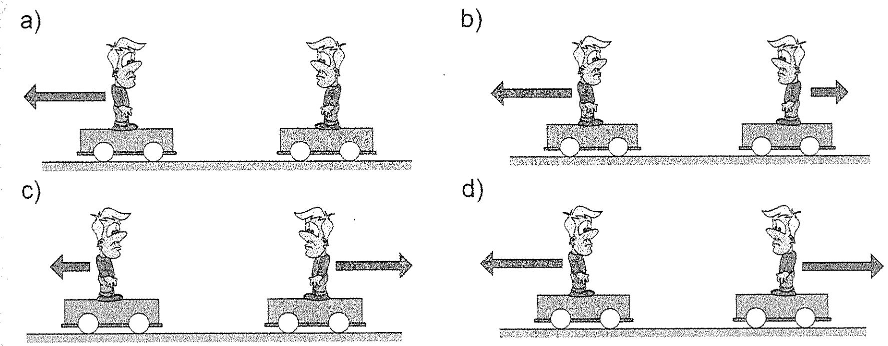
$$Ecin_B = Ecin_A.\left(\frac{m_A}{m_B}\right) = 4600 \text{ KeV}\left(\frac{4\text{ u}}{231\text{ u}}\right), \text{ donde se conclui que:}$$

$$\boxed{Ecin_B \cong 80 \text{ KeV}}$$

Exemplo Resolvido 9: A figura mostra dois irmãos Renato e Raul, de mesma massa, que estão em pé sobre dois carrinhos idênticos que podem se mover sobre um solo horizontal liso. Inicialmente todo o sistema encontra-se em repouso quando Renato arremessa a pesada bola de boliche para Raul, que a recebe e joga de volta para o irmão. Após várias jogadas, considere um momento em que a bola está no ar, a caminho de Raul. Qual dos diagramas abaixo melhor representa as velocidades de Renato e Raul nesse momento ?



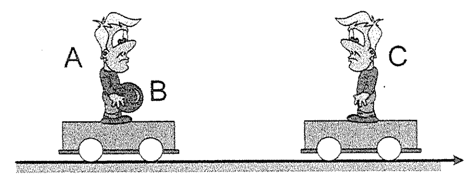
situação inicial situação final



Breve análise interativa:

A resolução dessa questão poderia ser breve e curta. Entretanto, aproveitarei essa questão para mostrar numericamente as transferências internas de qdm, enquanto os garotos jogam a bola, um para o outro, sucessivas vezes. É interessante e esclarece muitos aspectos sutis desse assunto.

Admita que A, B e C sejam, respectivamente, o Renato, a Bola e o Raul. Como daremos um tratamento escalar às grandezas vetoriais, adotaremos, como referencial, um eixo horizontal apontando para a direita (veja figura).



Estágio 1: inicialmente, A, B e C estão em repouso, $Q_A = Q_B = Q_C = 0$, portanto, $Q_{sist} = Q_A + Q_B + Q_C = 0$, veja a tabela 1.

1ª transferência de qdm: de repente, A pega a bola (B) e a arremessa para frente (Figura 11). Nessa ocasião, A e B trocam entre si um par de forças internas (ação-reação) de mesmo módulo $\leftarrow$F e F$\rightarrow$ (Figura 11), que agem durante um mesmo intervalo de tempo Δt. Admita que $F.\Delta t = 10$ N.s. Durante essa 1ª interação, uma quantidade de movimento $F.\Delta t = 10$ N.s é meramente transferida de A para B, como pode ser visto na tabela 1. Q_A diminui 10 unidades, ao passo que Q_B aumentou 10 unidades.

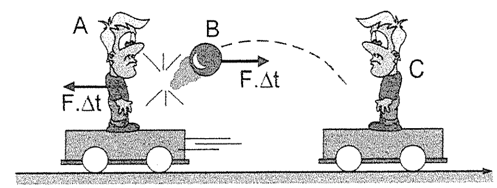


***Figura 11** – 1ª transferência*

Estágio 2: Assim, após a 1ª transferência interna de qdm, A se move para trás e a bola B se move para frente, ambos com a mesma qdm em módulo: 10 (Veja tabela 1). Admitindo que A tenha massa maior do que B, A terá menor velocidade do que B no estágio 2. A qdm Q_{sist} do sistema, por sua vez, continua nula, como se pode verificar na tabela 1.

	Q_A +	Q_B +	Q_C =	Q_{sist}	
estágio 1	0	0	0	0	
	−10	+10			1ª transferência
estágio 2	−10	10	0	0	
		−7	+7		2ª transferência
estágio 3	−10	3	7	0	
		−15	+15		3ª transferência
estágio 4	−10	−12	22	0	

Tabela 1

2ª transferência de qdm: agora, a bola B se choca com Raul (C), que agarrará a bola. Dessa forma, B e C trocam entre si um par de forças internas (ação-reação) de mesmo módulo $\leftarrow F$ e $F \rightarrow$ (Figura 12), que agem durante um mesmo intervalo de tempo Δt. Admita que $F.\Delta t = 7$ N.s. Durante essa 2ª interação, uma quantidade de movimento $F.\Delta t = 7$ N.s é meramente transferida da bola B para o garoto C, como pode ser visto na tabela 1. Q_B diminui 7 unidades, ao passo que Q_C aumentou 7 unidades.

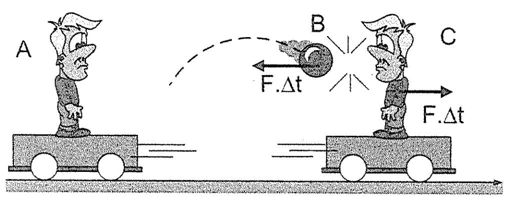


Figura 12 – 2ª transferência

Estágio 3: nesse estágio, após a 2ª transferência de qdm, A continua indo para trás com a mesma qdm adquirida no estágio 2 (veja tabela 1). Já B e C se movem para frente com a mesma velocidade em relação à Terra (visto que C está se movendo para frente agarrado à bola B). Apesar disso, Q_B e Q_C têm módulos diferentes nesse estágio, porque B tem massa menor do que C.

3ª transferência de qdm: agora, o garoto C decide mandar a bola B de volta para o garoto A. Assim, C interage fortemente com a bola B, arremessando-a de volta. Ao fazer isso, C troca com B um par de forças internas $\leftarrow F$ e $F \rightarrow$ (ação-reação) de mesmo módulo, durante um mesmo intervalo de tempo Δt. Admita que $F.\Delta t = 15$ N.s. Assim, durante essa 3ª interação, 15 N.s de qdm são transferidas da bola B para o garoto C como pode ser visto na tabela 1. Q_B diminui 15 unidades, ao passo que Q_C aumentou 15 unidades.

	Q_A +	Q_B +	Q_C =	Q_{sist}	
estágio 1	0	0	0	0	
	−10	+10			1ª transferência
estágio 2	−10	10	0	0	
		−7	+7		2ª transferência
estágio 3	−10	3	7	0	
		−15	+15		3ª transferência
estágio 4	−10	−12	22	0	

Tabela 1

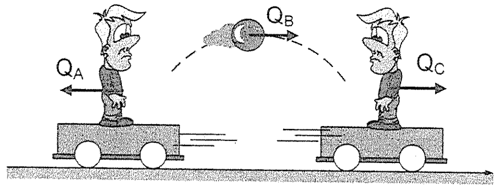
Estágio 4: nesse estágio, A ainda continua indo para trás com a mesma qdm adquirida no estágio 2 (veja tabela 1). A bola B agora se move para trás em direção ao garoto A. Já o garoto C, após jogar a bola B de volta para A (3ª transferência), se move para frente com enorme qdm $Q_C = 22$ N.s.

Observando a tabela 1, vemos que, a cada interação interna ao sistema ABC, parte da qdm de um membro do sistema é transferida para outro integrante dele. O que um "perde" de qdm é exatamente o que o outro "ganha" de qdm, de tal forma que a soma algébrica das qdms (chamada de qdm do sistema Q_{sist}) permanece nula o tempo todo.

As qdms individuais de cada integrante do sistema mudam, com o passar do tempo, mas Q_{sist} permanece constante visto que transferências internas não alteram a soma das qdms (Q_{sist}).

Resolução do exemplo 9:

Essa questão deseja saber, após varias jogadas, qual dos garotos A ou C terá maior velocidade num instante em que a bola B estiver no ar, indo de A para C, como mostra a Figura a seguir.



Sejam Q_A, Q_B e Q_C, respectivamente, os módulos das qdms dos corpos A, B e C no referido instante acima. Pela conservação da qdm do sistema, podemos escrever:

$$\Sigma Q_{\text{antes}} = \Sigma Q_{\text{depois}}$$

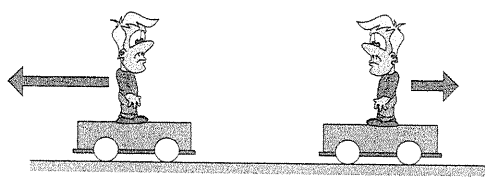
$$0 + 0 + 0 = (-Q_A) + (+Q_B) + (+Q_C)$$

$$Q_A = Q_C + Q_B \Rightarrow Q_A > Q_C.$$

Entretanto, como A e C têm massas iguais, vem:

$$Q_A > Q_C \Rightarrow \cancel{m}.V_A > \cancel{m}.V_C \Rightarrow V_A > V_C$$

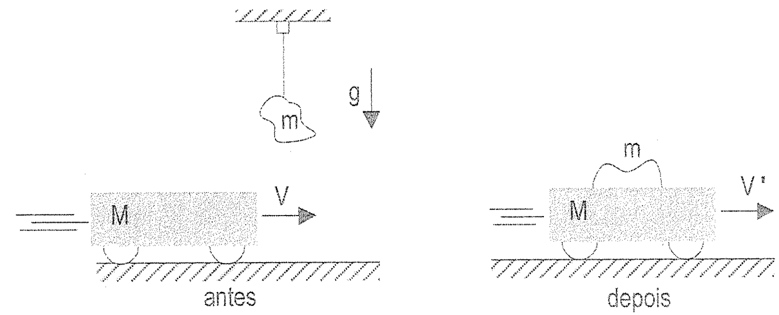
A resposta correta é a letra B



PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

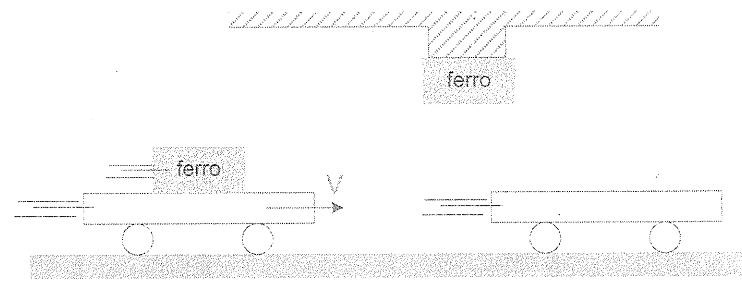
Questão 01

A figura mostra um carrinho de massa M que se move num solo horizontal liso com velocidade constante V. Uma massa plástica de massa m que se encontrava suspenso ao teto através de um fio, irá cair e aderir ao carrinho durante a sua passagem. Pede-se determinar a nova velocidade V' do sistema (carrinho + bloco) após esse episódio.



Questão 02

A figura mostra um carinho de madeira de massa **m** que se move com velocidade **v** sobre um solo horizontal liso, carregando um bloco de ferro de massa **2m**. Subitamente, ao passar por um eletroímã fixo ao teto, o bloco de ferro é abruptamente retirado de cima do carrinho.

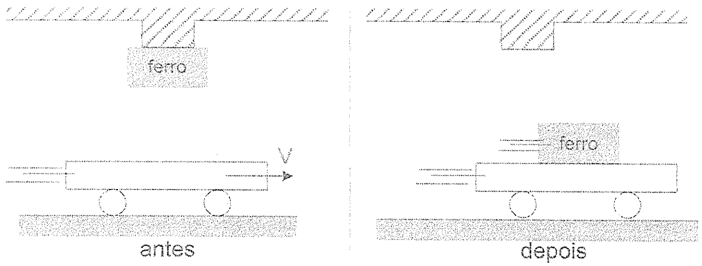


Assim, após essa brusca remoção, o carrinho passa a se mover com velocidade:

a) 3v/2   b) 2v/3   c) 3v   d) 2v   e) v

Questão 03

O mesmo carrinho da questão anterior passa novamente sob o eletroímã com velocidade **v**. Durante a passagem, o eletroímã deixa cair verticalmente, sobre o carrinho, o bloco de ferro de massa **2m**, que adere ao carrinho (devido ao atrito entre eles).



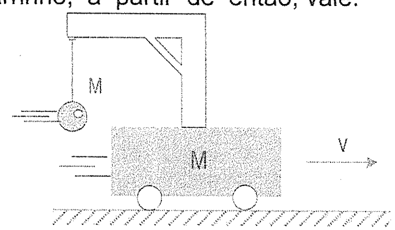
A velocidade final do conjunto carro+bloco, na situação final, vale:

a) 3v/2 b) 2v/3 c) 3v d) 2v e) v/3

Questão 04

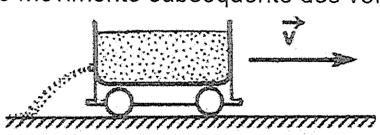
Um carrinho de massa M carrega pendurada uma bola de mesma massa M, conforme a figura a seguir. O conjunto (carrinho+bola) se move com velocidade constante V sobre um plano horizontal sem atrito. Em dado instante, o fio que sustenta a bola se rompe. A velocidade do carrinho, a partir de então, vale:

a) V/2
b) V
c) 2V
d) –V
e) – V/2

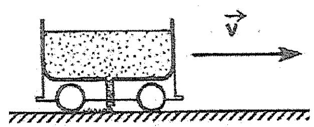


Questão 05 –

A figura mostra dois carros A e B que estavam se movendo em movimento uniforme com velocidade V para a direita, sobre um solo horizontal liso carregando água, quando de repente, as válvulas de contenção do líquido se rompem e ambos os veículos passam a derramar água. O carro A derrama água lateralmente, ao passo que B derrama água por um orifício em sua parte inferior. Sobro movimento subseqüente dos veículos, pode-se afirmar que:



A



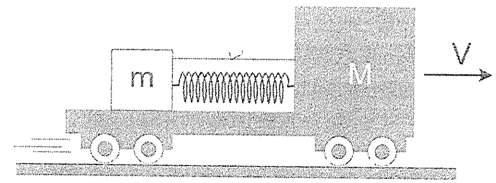
B

a) A e B ganharão velocidade crescente para a direita;
b) A se moverá com velocidade cada vez menor até parar.
c) B se moverá com velocidade decrescente
d) As velocidades de A e B não sofrerão alteração
e) A se moverá com velocidade crescente, ao passo que B permanecerá em movimento uniforme

Questão 06 –

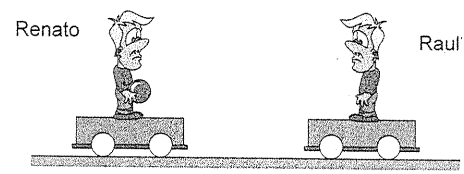
Um carrinho de massa M = 3 kg move-se em linha reta sobre um piso horizontal sem atrito. A velocidade do carrinho é de 6 m/s. Sobre o carrinho, encontra-se fixada uma mola que é comprimida por um bloco de massa m = 0,50 kg. Inicialmente, o bloco encontra-se preso ao carrinho, atado por um fio. Em um instante, o fio se rompe e a mola empurra o objeto para trás, projetando-o horizontalmente para fora do carrinho com uma velocidade de 6 m/s em relação à Terra. Uma vez livre do objeto desse bloco, qual a velocidade adquirida pelo carrinho ?

a) 6 m/s
b) 8 m/s
c) 10 m/s
d) 12m/s
e) 14m/s



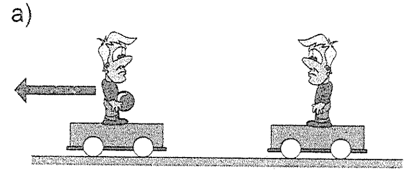
Questão 07

A figura mostra dois irmãos Renato e Raul, de mesma massa, que estão em pé sobre dois carrinhos idênticos que podem se mover sobre um solo horizontal liso. Inicialmente todo o sistema encontra-se em repouso quando Renato arremessa a pesada bola de boliche para Raul, que a recebe e joga de volta para o irmão e assim sucessivamente.

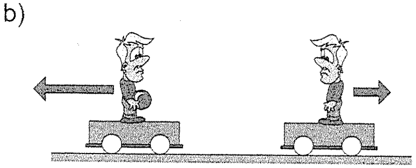


Qual dos diagramas abaixo melhor representa as velocidades de Renato e Raul, após várias jogadas, num momento em que Renato está segurando a bola ?

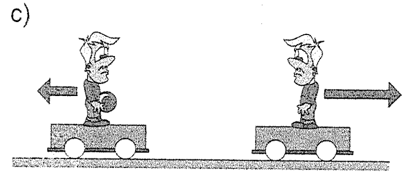
a)



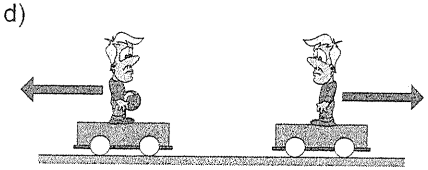
b)



c)



d)

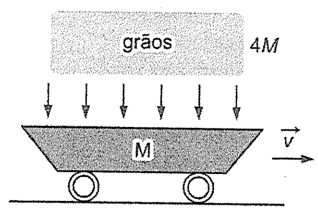


Questão 08 -

Um corpo de massa M ligado a uma mola ideal constitui um sistema massa-mola horizontal que executa oscilações com amplitude A_0 sobre uma mesa lisa. No instante em que o corpo passa pela posição central da oscilação, cai verticalmente sobre ele um pedaço de massa de modelar de massa m, ficando pregada ao corpo. Determine a nova amplitude das oscilações desse sistema massa-mola.

Questão 09 – (ITA 2005)

Um vagão-caçamba de massa M se desprende da locomotiva e corre sobre trilhos horizontais com velocidade constante v = 72 km/h (portanto, sem resistência de qualquer espécie ao movimento). Em dado instante, a caçamba é preenchida com uma carga de grãos de massa igual a 4M, despejada verticalmente a partir do repouso de uma altura de 6 m. Supondo que toda a energia liberada no processo seja integralmente convertida em calor para o aquecimento exclusivo dos grãos, então, a quantidade de calor por unidade de massa recebido pelos grãos é



a) 15 J/kg.

b) 80 J/kg.

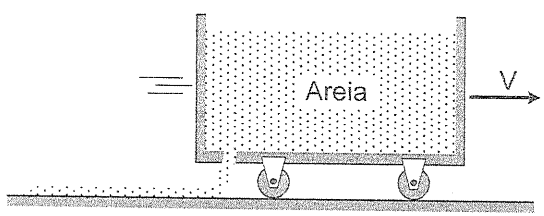
c) 100 J/kg.

d) 463 J/kg

e) 578 J/kg.

Questão 10 –

Um vagão transportador de areia move-se sem atrito sobre trilhos retilíneos horizontais com velocidade v = 2 m/s quando, de repente, passa a derramar areia por baixo, a uma taxa constante de 25 g/s. Sabendo que a massa do vagão vazio vale M = 100 kg e a massa de areia inicialmente contida no vagão vale m = 4 kg, o prof. Renato Brito pede que você determine a distância que o vagão percorre até derramar toda a areia. Adote $g = 10\ m/s^2$.



a) 120 m

b) 250 m

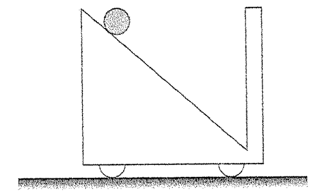
c) 320 m

d) 450 m

e) 540 m

Questão 11

Um carrinho de massa M encontra-se inicialmente em repouso sobre um solo horizontal liso. Uma bola de massa m é abandonada (a partir do repouso) sobre a superfície inclinada do carro e vai descendo a ladeira, à medida que o carrinho recua para trás. Pode-se afirmar que, após a bolinha colidir inelasticamente com a parede do carrinho, a velocidade do conjunto:



a) apontará para a direita v→ caso M > m;

b) apontará para a direita v→ caso m > M;

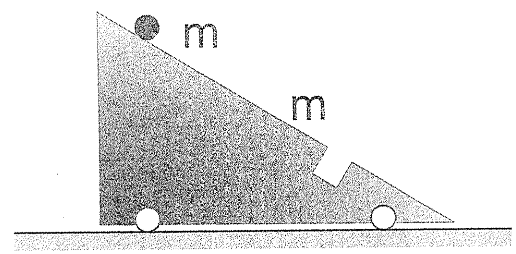
c) apontará para a esquerda v ← caso m > M;

d) será nula apenas se M = m;

e) será nula, independente de M e m.

Questão 12

Seja um prisma triangular de massa m inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal lisa. Uma esfera de mesma massa m, que se encontra inicialmente em repouso sobre o prisma, é abandonada do repouso pelo prof. Renato Brito e desliza sem atrito sobre a superfície inclinada, desde a altura h, até ser encaçapada pelo buraco na rampa.



Pode-se afirmar que, nesse episódio, o prisma :

a) move-se inicialmente para a esquerda e pára logo após a bola ser encaçapada.

b) move-se inicialmente para a esquerda e, logo após a bola ser encaçapada, inverte o sentido do seu movimento, retardando em seguida até parar.

c) move-se inicialmente acelerado para a esquerda e, logo após a bola ser encaçapada, prossegue em movimento retardado até parar.

d) move-se inicialmente acelerado para a direita e, logo após a bola ser encaçapada, prossegue em movimento retardado até parar.

e) move-se inicialmente para a esquerda e depois retoma à sua posição inicial.

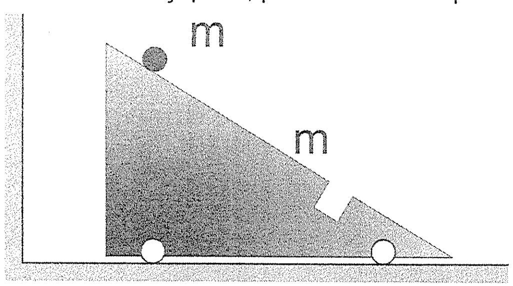
Questão 13 –

Ainda na questão anterior, se houver atrito entre o prisma e o chão, pode-se afirmar que, nesse episódio, o prisma:

a) move-se inicialmente para a esquerda e pára logo após a bola ser encaçapada.
b) move-se inicialmente para a esquerda e, logo após a bola ser encaçapada, inverte o sentido do seu movimento, retardando em seguida até parar.
c) move-se inicialmente acelerado para a esquerda e, logo após a bola ser encaçapada, prossegue em movimento retardado até parar.
d) move-se inicialmente acelerado para a direita e, logo após a bola ser encaçapada, prossegue em movimento retardado até parar.
e) move-se inicialmente para a esquerda e depois retoma à sua posição inicial.

Questão 14 –

Seja um prisma triangular de massa m inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal lisa. Uma esfera de mesma massa m é abandonada do repouso do alto da superfície inclinada do prisma e desliza sem atrito ladeira abaixo. Durante a descida da esfera, o prisma recua para trás até encostar inelasticamente numa parede e, em seguida, a bola é encaçapada pelo buraco na rampa. Após a bola ser encaçapada, pode-se afirmar que:



a) o prisma se moverá para a esquerda em MRU
b) o prisma permanecerá em repouso visto que o sistema esteve isolado de forças externas horizontais durante todo esse episódio;
c) o prisma se moverá para a direita em MRU devido à força interna que a bola aplica sobre ele, quando ela cai na caçapa.
d) o prisma se moverá para a direita em MRU devido à força externa que a parede aplica sobre ele durante o tempo em que ele permanece em contato com a parede.
e) o prisma se moverá para a direita em MRU devido à força externa que a parede aplica sobre ele, quando a bola cai na caçapa.

Questão 15 –

Seja uma cunha de massa M inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal lisa, presa a um batente através de um fio ideal inextensível e flexível. Sua superfície tem inclinação α com a horizontal. Uma bolinha de massa m é abandonada em repouso sobre a superfície inclinada da cunha e desliza sem atrito, desde a altura h, até ser encaçapada pelo buraco na rampa. Se a gravidade local vale g, determine a velocidade final adquirida pelo conjunto:

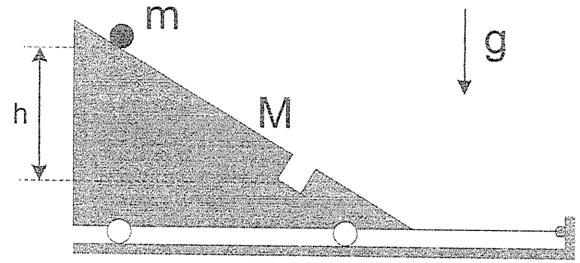
a) $\dfrac{m.g.\text{sen}\alpha}{m+M}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

b) $\dfrac{m.g.\cos\alpha}{m+M}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

c) $\dfrac{m.g.\text{tg}\alpha}{m+M}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

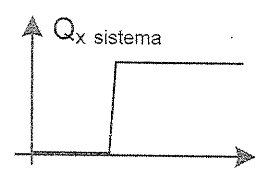
d) $\dfrac{m.g}{(m+M)}\sqrt{\dfrac{2h}{g.\text{sen}\alpha}}$

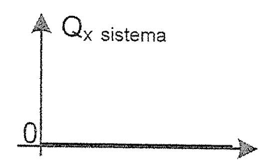
e) $\dfrac{m.g}{(m+M)}\sqrt{\dfrac{2h}{g.\cos\alpha}}$

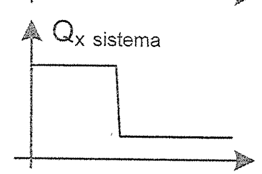


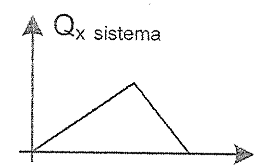
Questão 16

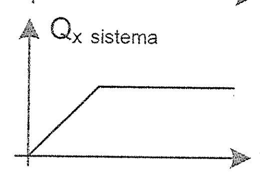
Determine qual gráfico abaixo melhor representa a quantidade de movimento horizontal Q_X do sistema em função do tempo, em cada uma das questões 11, 12, 13 e 14.

a)


b)


c)


d)


e)


2.8 – O CENTRO DE GRAVIDADE DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

O centro de gravidade de um corpo rígido é o ponto tal que, se imaginarmos o corpo suspenso por este ponto e com liberdade para girar em todos os sentidos ao redor deste ponto, o corpo assim sustentado permanecerá em repouso e preservará sua posição original, qualquer que seja a orientação do corpo em relação à Terra. A origem deste conceito é experimental e atribuída a Arquimedes que viveu por volta do ano 250 a.C.

Para melhor compreendê-lo, considere um halteres composto por duas massas **3m** e **m** presas a uma haste rígida de massa desprezível mostrado na Figura 16, suspenso através de um fio num campo gravitacional uniforme g.

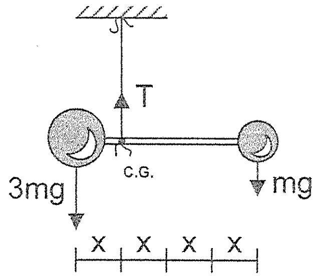


Figura 16

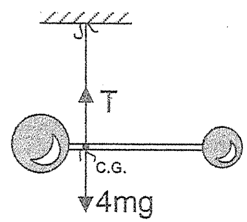


Figura 17

Segundo Arquimedes, estando os pesos dos corpos na razão 3:1, o centro de gravidade do halteres é o ponto que divide o segmento na razão inversa 1:3. Suspendendo o sistema pelo seu centro de gravidade, vemos que, de fato, o corpo fica em equilíbrio de rotação (equilíbrio dos momentos) e translação.

Observando as Figuras 16 e 17, vemos que é possível interpretar a ação da força gravitacional sobre esse sistema tanto de forma distribuída – o peso agindo individualmente em cada corpo do sistema (Figura 16) – quanto de forma concentrada – admitindo que todo o peso do sistema aja diretamente sobre o seu centro de gravidade (Figura 17). Assim, dizemos modernamente que o centro de gravidade do sistema é o ponto de aplicação da força gravitacional sobre ele.

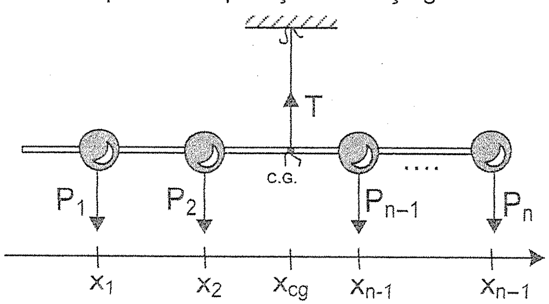


Figura 18

Considere agora um sistema composto por n corpos de pesos iguais a P_1, P_2, P_3,...., P_n respectivamente posicionados sobre um eixo cartesiano nas abscissas x_1, x_2, x_3, ..., x_n. Queremos determinar a abscissa x_{cg} do centro de gravidade desse sistema, ou seja, o ponto através do qual devemos suspender o sistema para que ele permaneça em equilíbrio de forças (equilíbrio de forças) e de momentos (equilíbrio de translação).

Equacionemos o equilíbrio dos momentos, escrevendo que a soma dos momentos dos pesos (Figura 18), tomados em relação ao c.g., deve ser nulo:

$$P_1.(x_{cg} - x_1) + P_2.(x_{cg} - x_2) + ... + P_{n-1}.(x_{cg} - x_{n-1}) + P_n.(x_{cg} - x_n) = 0$$

$$x_{cg}.(P_1 + P_2 ...... + P_{n-1} + P_n) = P_1.x_1 + P_2.x_2 ...... + P_{n-1}.x_{n-1} + P_n.x_n$$

$$x_{cg} = \frac{P_1.x_1 + P_2.x_2 + ... + P_{n-1}.x_{n-1} + P_n.x_n}{P_1 + P_2 + ... + P_{n-1} + P_n}$$

$$x_{cg} = \frac{m_1.g_1.x_1 + m_2.g_2.x_2 + ... + m_{n-1}.g_{n-1}.x_{n-1} + m_n.g_n.x_n}{m_1.g_1 + m_2.g_2 + ... + m_{n-1}.g_{n-1} + m_n.g_n} \quad \textbf{(eq15)}$$

A relação eq15 nos fornece a abscissa do centro de gravidade desse sistema. Entretanto , se o campo gravitacional agindo no sistema for uniforme, teremos:

$$g_1 = g_2 = g_3 = g_{n-1} = g_n = g \quad \textbf{(eq16)}$$

Substituindo eq16 em eq15, vem:

$$x_{cg} = \frac{m_1.g.x_1 + m_2.g.x_2 + ... + m_{n-1}.g.x_{n-1} + m_n.g.x_n}{m_1.g + m_2.g + ... + m_{n-1}.g + m_n.g}$$

$$x_{cm} = \frac{m_1.x_1 + m_2.x_2 + ... + m_{n-1}.x_{n-1} + m_n.x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_{n-1} + m_n} \quad \textbf{(eq17)}$$

Assim, vemos que, quando o campo gravitacional é uniforme, o centro de gravidade é calculado por uma expressão mais simples (eq17) e passa a ser chamado de centro de massa do sistema (cm). Nesse livro, sempre trabalharemos com campos gravitacionais uniformes e, portanto, os conceitos de centro de gravidade e centro de massa poderão ser tratados sem distinção.

2.9 – A VELOCIDADE DO CENTRO DE MASSA

Quando as partículas que compõem um sistema estão se movendo, o centro de massa cm desse sistema de partículas geralmente também está em movimento. Entretanto, é possível que as partículas de um sistema se movam de tal forma que o deslocamento de algumas massas acabe compensando o deslocamento das outras massas desse sistema e, assim, o seu CM ainda permaneça em repouso ! São os chamados "sistemas compensados".

A velocidade do centro de massa de alguns sistemas, nos casos mais simples, pode ser determinado intuitivamente. Veja a seguir:

Caso 1: Na Figura 19, o centro de massa do sistema, composto por duas esferas A e B (massas 3M e 1M), divide o segmento AB que liga as esferas na razão inversa das massas **1:3** em cada instante, confira ! Como todos os corpos do sistema se movem com a mesma velocidade v, a distância entre eles permanece constante.

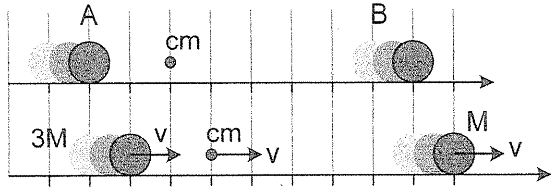


Figura 19

As partículas que compõem o sistema nem se aproximam nem se afastam uma das outras. Nesses casos, a velocidade Vcm do centro de massa é a mesma velocidade v compartilhada por todas as partículas do sistema, independente das suas massas, ou seja, Vcm = v.

Caso 2: Na figura 20, o centro de massa do sistema, composto por duas esferas A e B (massas 1M e 1M) , divide o segmento AB na razão inversa das massas **1:1** em cada instante, isto é, o cm está sempre no ponto médio do segmento AB, confira !

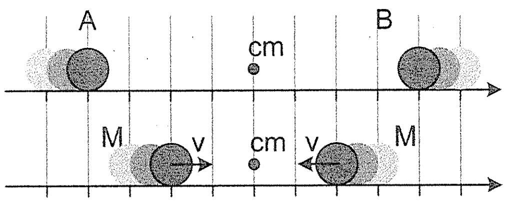
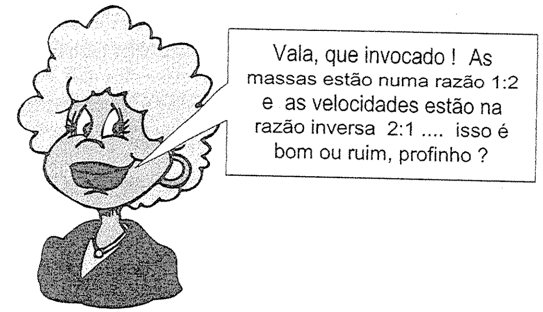


Figura 20

É intuitivo o fato de que esse ponto médio do segmento AB permanecerá imóvel durante o movimento das partículas, visto que elas se movem no mesmo ritmo (velocidades iguais) em direção àquele ponto em MRU. Esse é o caso mais simples de <u>*compensação*</u>, isto é, as partículas se movem de forma que o movimento de uma compensa o movimento da outra, permanecendo em repouso o c.m. do sistema.

Caso 3: Na figura 21, como já estamos acostumados, o centro de massa do sistema, composto por duas esferas A e B (massas 1M e 2M), divide o segmento AB que liga as esferas na razão inversa das massas **2:1**, em cada instante (confira na figura). Entretanto, as velocidades 2v e v dessas esferas estão na razão inversa das massas **1:2.**



Observe a figura 21 atentamente e perceba os seguintes detalhes:

- A distância que separa a bola A do "c.m. do sistema" é o dobro da distância que separa B do cm, em qualquer instante. Confirme esse fato agora, olhando a Figura 21.
- Adicionalmente, a distância que A percorre, em cada intervalo de tempo, é sempre o dobro da distância percorrida pelo B naquele intervalo de tempo, por ter o dobro da sua velocidade. Confira essas deslocamentos sofridos por cada bola agora na Figura 21.

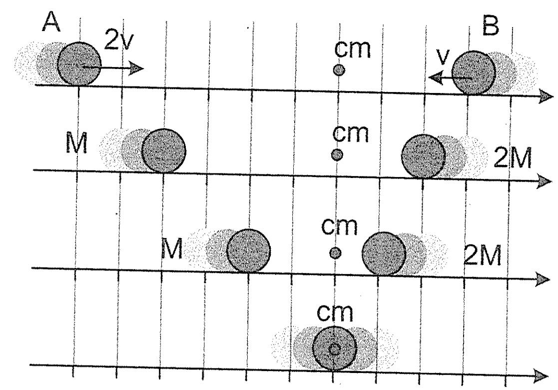


Figura 21

Assim, sempre que a massa 2M percorre uma distância x, a massa M percorrerá uma distância 2X, ou seja, os deslocamentos se compensam de tal forma que o c.m. do sistema AB permanece parado $v_{cm} = 0$ durante o movimento das partículas. Esse também é um exemplo de "sistema compensado".

Acabamos de ver 3 casos onde é possível determinar a velocidade do centro de massa intuitivamente. Entretanto, nem sempre essa determinação da v_{cm} será intuitiva. Nesses casos, podemos determinar a v_{cm} pela expressão geral:

$$V_{cm} = \frac{m_A.v_A + m_B.v_B}{m_A + m_B} \qquad \textbf{(eq18)}$$

Esse cálculo poderá ser feito vetorialmente ou escalarmente (adotando-se um eixo e considerando sinais algébricos), dependendo do tipo de problema. Podemos aplicar a expressão acima para determinar v_{cm} nos casos 1, 2 e 3 que acabamos de analisar, apenas a título de verificação:

Caso 1 – Figura 19:

$$Vcm_1 = \frac{m_A.v_A + m_B.v_B}{m_A + m_B} = \frac{3M.(+v) + M.(+v)}{3M + M} = +v$$

Caso 2 – Figura 20:

$$Vcm_2 = \frac{m_A.v_A + m_B.v_B}{m_A + m_B} = \frac{M.(+v) + M.(-v)}{3M + M} = \frac{0}{4M} = 0$$

Caso 3 – Figura 21:

$$Vcm_3 = \frac{m_A.v_A + m_B.v_B}{m_A + m_B} = \frac{M.(+2v) + 2M.(-v)}{M + 2M} = \frac{0}{3M} = 0$$

Assim, fazendo uso da relação **eq18**, encontramos os valores que já eram esperados para v_{cm} em cada caso, conforme discutimos anteriormente.

A relação eq18 é geral e vale mesmo quando a determinação de v_{cm} não é intuitiva. Por exemplo, quanto vale a v_{cm} do sistema mostrado na Figura 22 ?

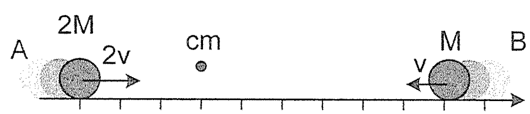


Figura 22

Pela relação eq18, podemos escrever:

$$V_{cm} = \frac{m_A.v_A + m_B.v_B}{m_A + m_B} = \frac{2M.(+2v) + M.(-v)}{2M + M} = +v$$

O sinal positivo indica que o centro de massa do sistema está se movendo para a direita (a favor do eixo) com velocidade v.

Assim, no sistema da Figura 22, tanto os corpos A e B quanto o centro de massa do sistema estão em movimento. Além disso, como A e B se movem em sentidos opostos, eles acabarão se encontrando.

Pense e responda: o encontro de A e B ocorrerá à esquerda, à direita ou sobre o centro de massa do sistema na Figura 22 ☺ ?

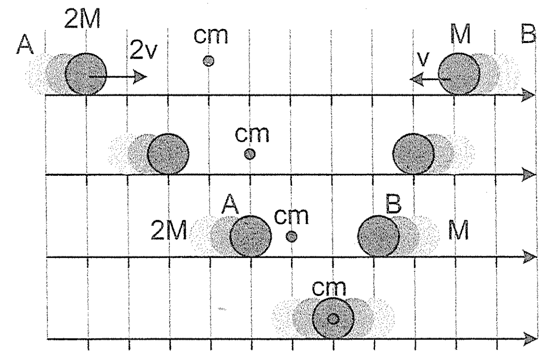


Figura 23 - O encontro de duas partículas sempre ocorrerá no centro de massa cm do sistema formado por essas duas partículas

Ora, pela própria definição de centro de massa do sistema, onde ele estará quando A e B se encontrarem (se superpuserem)? ☺ Se você sorriu, você percebeu que a resposta está dentro da pergunta. Afinal, *"onde quer que você esteja, você sempre estará lá ☺"*.

O encontro de duas partículas sempre ocorrerá no centro de massa do sistema formado por essas duas partículas, quer esse c.m. esteja parado ou em movimento.

2.10 – SISTEMAS COMPENSADOS

Um sistema é dito compensado quando seu centro de passa permanece em repouso, apesar de as partículas que o compõem estarem em movimento.

Seja um sistema formado por quatro partículas A, B, C e D que se encontram sobre o eixo x de um sistema de coordenadas cartesianas, inicialmente posicionadas nas abscissas x_{Ai}, x_{Bi}, x_{Ci} e x_{Di} respectivamente.

Considere que as partículas A e B sofram deslocamentos de módulos respectivamente iguais a $\leftarrow d_A$ e $\leftarrow d_B$ para a esquerda, enquanto C e D sofram deslocamentos de módulos respectivamente iguais a $d_C \rightarrow$ e $\rightarrow d_D$ para a direita. Dessa forma, suas abscissas passam a valer:

$$\begin{aligned} x_{AF} &= x_{Ai} - d_A \\ x_{BF} &= x_{Bi} - d_B \qquad \textbf{(eq19)} \\ x_{CF} &= x_{Ci} + d_C \\ x_{DF} &= x_{Di} + d_D \end{aligned}$$

Para que o deslocamento Δx_{cm} do centro de massa desse sistema tenha sido nulo, qual relação deve ser satisfeita ?

$$\Delta x_{cm} = \frac{m_A.\Delta x_A + m_B.\Delta x_B + m_C.\Delta x_C + m_D.\Delta x_D}{m_A + m_B + m_C + m_D} = 0$$

$$m_A.(x_{AF} - x_{Ai}) + m_B.(x_{BF} - x_{Bi}) + m_C.(x_{CF} - x_{Ci}) + m_D.(x_{DF} - x_{Di}) = 0$$

Usando as relações eq19, vem:

$$m_A.(-d_A) + m_B.(-d_B) + m_C.(+d_C) + m_D.(+d_D) = 0$$

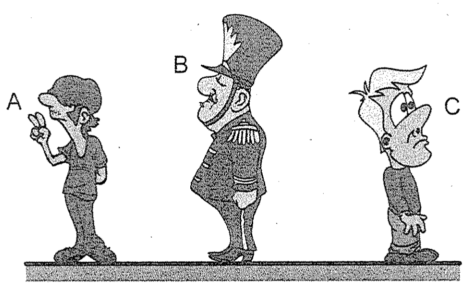
$$m_A.\,d_A + m_B.d_B = m_C.d_C + m_D.d_D \qquad \textbf{(eq20a)}$$

onde $\leftarrow d_A$ e $\leftarrow d_B$ são os módulos dos deslocamentos para a esquerda, e $d_C\rightarrow$ e $\rightarrow d_D$ são os módulos dos deslocamentos para a direita, todos medidos em relação à Terra. Podemos generalizar essa relação eq20a reescrevendo:

$$\sum M_i.D_i = \sum m_i.d_i \qquad \textbf{(eq20b)}$$

onde D_1, D_2, D_3,.... D_i são os módulos dos deslocamentos para a esquerda $\leftarrow$ e d_1, d_2, d_3,....d_i são os módulos dos deslocamentos para a direita $\rightarrow$, todos medidos em relação à Terra.

Exemplo Resolvido 11: Sejam 3 pessoas Afonso (A), Bartolomeu (B) e Carlão (C) que se encontram parados como mostra a figura. Suas massas valem respectivamente 2m, 3m e 5m. Se A e B derem respectivamente, 10 passos e 5 passos para a esquerda, quantos passos C deve dar para a direita, simultaneamente, a fim de que o centro de massa desse sistema permaneça em repouso durante esse episódio ? Considere que cada pessoa tenha um passo do mesmo comprimento.



Solução:
A condição para que as partículas de um sistema se movam de forma que seja nulo o deslocamento do seu centro de massa é dada pela relação eq20a ou eq20b.

De acordo com a relação eq20a, vem:

$$m_A.\,d_A\leftarrow + m_B.d_B\leftarrow = m_C.d_C\rightarrow$$

$$(2m)(10p) + (3m).(5p) = (5m).x \quad \Rightarrow \quad x = 7p$$

Generalizações: considere um sistema contendo n partículas que se movem com suas respectivas velocidades $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ .... $\vec{V}_n$ e suas respectivas acelerações $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$... $\vec{a}_n$. A velocidade com que se move o centro de massa do sistema, bem como a sua aceleração, são dadas por:

$$\boxed{\vec{V}_{cm} = \frac{m_1.\vec{V}_1 + m_2.\vec{V}_2 + m_3.\vec{V}_3 + ... + m_n.\vec{V}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n}} \qquad \textbf{(eq21)}$$

$$\boxed{\vec{a}_{cm} = \frac{m_1.\vec{a}_1 + m_2.\vec{a}_2 + m_3.\vec{a}_3 + ... + m_n.\vec{a}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n}} \qquad \textbf{(eq22)}$$

Exemplo Resolvido 12: Um sistema é composto por duas bolas de sinuca que se movem em MRU sobre uma superfície horizontal lisa com velocidades $\vec{V}_A = (3i + 5J)$ m/s e $\vec{V}_B = (6.i - 1J)$ m/s. Sendo $m_A = 4$ kg e $m_B = 2$ kg, determine a velocidade $\vec{V}_{cm}$ do centro de massa desse sistema:

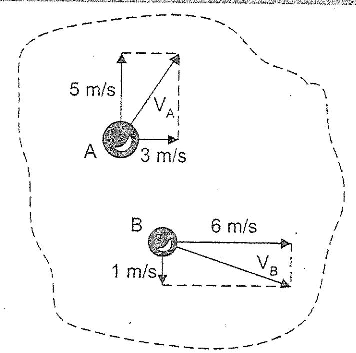


Figura 24

Solução: como se trata se um sistema bidimensional (XY), efetuaremos o cálculo de $\vec{V}_{cm}$ vetorialmente, fazendo uso dos versores unitários **i** e **j**:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m_A.\vec{V}_A + m_B.\vec{V}_B}{m_A + m_B} = \frac{4.(\,3i + 5J) + 2.(\,6i - 1j\,)}{4+2}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{12.i + 20.j + 12.i - 2.j}{6} = (\,4.i + 3.j\,)\ \text{m/s}$$

$$|\vec{V}_{cm}| = \sqrt{4^2 + 3^2} \quad \therefore \quad |\vec{V}_{cm}| = 5\ \text{m/s}$$

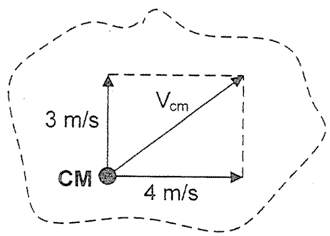


Figura 25

Assim, vemos que o centro de massa do sistema se move a 5 m/s na direção indicada na figura 25.

Podemos entender o movimento do centro de massa como sendo o movimento do sistema como um todo. Em certo sentido, podemos dizer que o movimento do sistema da Figura 24 corresponde ao movimento de uma partícula de massa 4 kg + 2kg = 6 kg que se move com velocidade 5 m/s numa direção dada pela figura 25.

2.11 - A RELAÇÃO ENTRE QUANTIDADE DE MOVIMENTO DE UM SISTEMA E A VELOCIDADE DO SEU CENTRO DE MASSA.

A quantidade de movimento Q de uma partícula é uma grandeza vetorial definida como o produto da sua massa pela sua velocidade $\vec{Q} = m.\vec{v}$. Para um sistema de partículas, a sua quantidade de movimento total é a soma das qdms de todas as partículas que compõem o sistema.

$$\boxed{\vec{Q}_{sist} = m_A.\vec{V}_A + m_B.\vec{V}_B + ...} \qquad \textbf{(eq23)}$$

Exemplo Resolvido 13: Considere as duas bolas de bilhar A e B de massas $m_A = 4$ kg e $m_B = 2$ kg da Figura 24, rolando sobre um plano horizontal liso em MRU com velocidades $\vec{V}_A = (3i + 5J)$ m/s e $\vec{V}_B = (6i - 1J)$ m/s. Determine a quantidade de movimento total desse sistema:

Solução:

Efetuando o cálculo direto, vem:

$$\vec{Q}_{sist} = m_A.\vec{V}_A + m_B.\vec{V}_B + ... \quad \text{(eq17)}$$

$$\vec{Q}_{sist} = (4\text{ kg}).(3.i + 5.J)\text{ m/s} + (2\text{ kg}).(6.i - 1.J)\text{ m/s}$$

$$\vec{Q}_{sist} = (12.\mathbf{i} + 20\,\mathbf{j}) + (12.\mathbf{i} - 2.\mathbf{j})\text{ kg.m/s}$$

$$\vec{Q}_{sist} = (24.\mathbf{i} + 18\,\mathbf{j})\text{ kg.m/s} \Rightarrow |\vec{Q}_{sist}| = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30\text{ kg.m/s}$$

A seguir, observemos a expressão geral eq21 que determina a Vcm do centro de massa de um sistema:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m_1.\vec{V}_1 + m_2.\vec{V}_2 + m_3.\vec{V}_3 + ... + m_n.\vec{V}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n} \qquad \textbf{(eq21)}$$

O numerador da relação eq21 traz a quantidade de movimento total do sistema:

$$\vec{Q}sist = m_1.\vec{V}_1 + m_2.\vec{V}_2 + m_3.\vec{V}_3 + ... + m_n.\vec{V}_n$$

Enquanto o seu denominador traz a massa total do sistema:

$$M_{total} = m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n$$

Assim, podemos reescrever a relação eq15 como sendo:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m_1.\vec{V}_1 + m_2.\vec{V}_2 + m_3.\vec{V}_3 + ... + m_n.\vec{V}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n} = \frac{\vec{Q}_{sist}}{M_{total}}$$

Assim, encontramos uma relação entre Q_{sist} e Vcm :

$$\boxed{\vec{Q}_{sist} = M_{total} . \vec{V}_{cm}} \qquad \textbf{(eq24)}$$

A expressão acima nos diz que "calcular a quantidade de movimento total (eq23) de um sistema de partículas" equivale a calcular a quantidade de movimento do seu centro de massa (eq24), admitindo que esse ponto se mova com velocidade Vcm e seja portador de toda a massa M_{total} do sistema.

Podemos verificar a relação eq24 a partir dos valores obtidos nos exemplos resolvidos 13 e 14 anteriores:

$$\vec{Q}_{sist} = (24.i + 18\,j)\text{ kg.m/s}$$
$$\vec{V}_{cm} = (4.i + 3.j)\text{ m/s}$$
$$M_{total} = m_A + m_B = 4 + 2 = 6\text{ kg}$$

De fato, temos que:

$$\vec{Q}_{sist} = M_{total} . \vec{V}_{cm} = 6 . (4.i + 3.j) = (24.i + 18\,j)\text{ kg.m/s}$$

Segundo a relação eq24, os vetores $\vec{Q}_{sist}$ e $\vec{V}_{cm}$ apontam sempre na mesma direção e sentido, visto que M_{total} é sempre um número positivo. Adicionalmente, aplicando-se o módulo em ambos os membros da relação vetorial eq24, encontramos a relação entre os módulos desses vetores:

$$\vec{Q}_{sist} = M_{total} . \vec{V}_{cm} \Rightarrow |\vec{Q}_{sist}| = |M_{total}. \vec{V}_{cm}| = |M_{total}| . |\vec{V}_{cm}|$$

$$\boxed{Q_{sist} = M_{total} . V_{cm}} \qquad \textbf{(eq25)}$$

Podemos *facilmente verificar a relação escalar eq25, a partir dos valores obtidos* nos exemplos resolvidos 13 e 14:

Q_{sist} = 30 kg.m/s, M_{total} = 6 kg e V_{cm} = 5 m/s

De fato, $Q_{sist} = M_{total} \,.\, V_{cm} = 6 \times 5 = 30$ kg.m/s

2.12 – A SEGUNDA LEI DE NEWTON PARA SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Seja o sistema da figura 26, composto por três massas m_1, m_2 e m_3. Considere, também, a presença de uma quarta massa m_{ext} externa ao sistema. Admitindo que todas as 4 partículas interajam entre si, cada uma delas sofrerá forças devido às outras 3 partículas, ou seja, cada partícula sofrerá a ação de três forças como mostra a figura 27.

Conforme vimos anteriormente, **força internas que agem no sistema** são forças trocadas entre duas partículas que pertencem ao sistema, que estão dentro do sistema. Quando a força age no sistema, mas é exercida por um corpo que está fora do sistema, esta força é denominada **força externa que age no sistema.**

Assim, como o sistema (figura 26) é composto apenas pelas partículas 1, 2 e 3, são internas ao sistema apenas os pares de forças trocadas entre essas 3 partículas, duas a duas, isto é, $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{13}$, $\vec{F}_{31}$, $\vec{F}_{23}$ e $\vec{F}_{32}$.

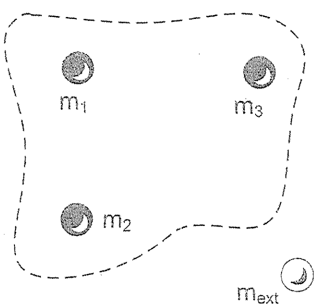


Figura 26

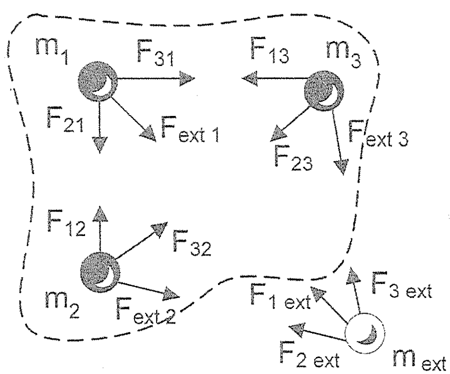


Figura 27

Nesse ponto, é fácil perceber que o número de forças internas que agem no sistema é sempre par, em qualquer situação.

As forças externas que agem no sistema são as forças $\vec{F}_{ext-1}$, $\vec{F}_{ext-2}$ e $\vec{F}_{ext-3}$, visto que são exercidas respectivamente pelo corpo que está fora do sistema (m_{ext}) em cada uma das massas m_1, m_2 e m_3 que pertencem ao sistema.

A partícula 1, por exemplo, sofrerá a ação das seguintes forças (Figura 27):

$\vec{F}_{21}$ = força que a partícula 2 exerce na partícula 1

$\vec{F}_{31}$ = força que a partícula 3 exerce na partícula 1

$\vec{F}_{ext-1}$ = força que a partícula externa ao sistema exerce na partícula 1

Assim, a 2ª Lei de Newton para a partícula 1 permite escrever a seguinte relação vetorial:

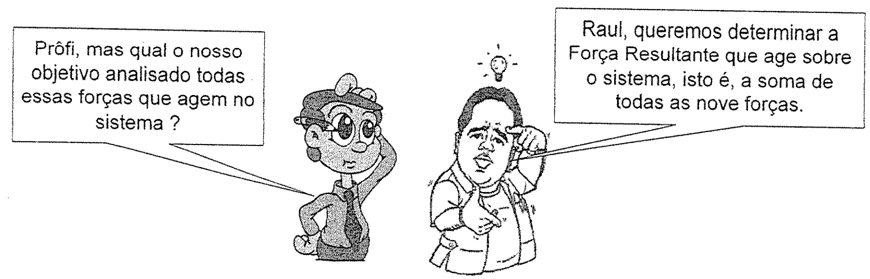
$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{ext-1} = m_1 \,.\, \vec{a}_1 \qquad \textbf{(eq26)}$$

Para as massas m_2 e m_3 do sistema, podemos escrever:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{ext-2} = m_2 \,.\, \vec{a}_2 \qquad \textbf{(eq27)}$$

$$\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{ext-3} = m_3 \,.\, \vec{a}_3 \qquad \textbf{(eq28)}$$

Ao todo, percebemos que 9 (nove) forças estão agindo no sistema da Figura 27, sendo 6 internas e 3 externas.



Antes disso, notemos que, de acordo com a 3ª lei de Newton, para cada força interna $\vec{F}_{AB}$ que atua sobre uma partícula do sistema, há outra força, igual porém oposta $-\vec{F}_{AB}$, que atua sobre outra partícula do sistema. Quando se faz a soma de todas as forças atuantes no sistema, esses pares de forças internas se cancelam duas a duas (por exemplo: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$).

$$\vec{F}_R = \cancel{\vec{F}_{12}} + \cancel{\vec{F}_{21}} + \cancel{\vec{F}_{13}} + \cancel{\vec{F}_{31}} + \cancel{\vec{F}_{23}} + \cancel{\vec{F}_{32}} + \vec{F}_{ext-1} + \vec{F}_{ext-2} + \vec{F}_{ext-3}$$

Somando, membro a membro, as expressões da 2ª lei de Newton dadas pelas relações eq26, eq27 e eq28, temos:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{ext-1} + \vec{F}_{ext-2} + \vec{F}_{ext-3} = m_1.\vec{a}_1 + m_2.\vec{a}_2 + m_3.\vec{a}_3$$

visto que as forças internas se cancelam mutuamente, duas a duas. A expressão acima da força resultante $\vec{F}_R$ ainda pode ser simplificada, fazendo uso da expressão da aceleração do centro de massa :

$$\vec{a}_{cm} = \frac{m_1.\vec{a}_1 + m_2.\vec{a}_2 + m_3.\vec{a}_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \text{ o que implica:}$$

$$m_1.\vec{a}_1 + m_2.\vec{a}_2 + m_3.\vec{a}_3 = (m_1 + m_2 + m_3).\,\vec{a}_{cm}$$

Substituindo, vem:

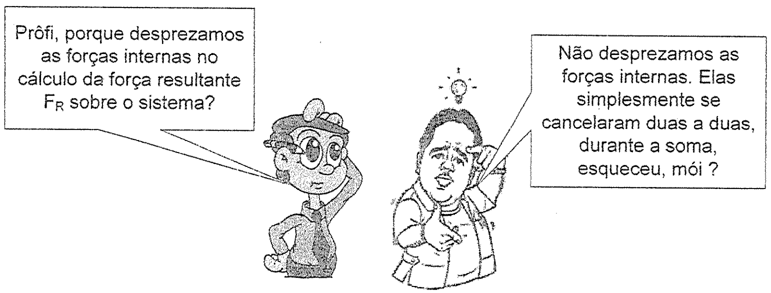
$$\vec F_R = \vec F_{ext-1} + \vec F_{ext-2} + \vec F_{ext-3} = m_1.\vec a_1 + m_2.\vec a_2 + m_3.\vec a_3$$

$$\vec F_R = \vec F_{ext-1} + \vec F_{ext-2} + \vec F_{ext-3} = (m_1 + m_2 + m_3).\ \vec a_{cm} \text{ , ou :}$$

$$\vec F_R = \vec F_{ext-1} + \vec F_{ext-2} + \vec F_{ext-3} = M_{total}.\ \vec a_{cm}$$

$$\boxed{\vec F_R = \vec F_{R-ext} = M_{total}.\vec a_{cm}} \qquad \textbf{(eq29)}$$

A expressão eq29 acima, que representa a 2ª Lei de Newton para sistemas, afirma que a resultante das forças externas F_{R-ext} é quem determina a aceleração a_{cm} do centro de massa do sistema.



A relação eq29 é a expressão da 2ª lei de Newton para sistemas. Ela nos permite concluir que:

Por mais complexo que seja um sistema de corpos, o seu movimento pode ser entendido como a superposição de dois movimentos mais simples: (1) o seu movimento macro, isto é, o movimento do seu centro de massa CM (2) e o seu movimento micro (interno ao sistema), isto é, o movimento das partículas que compõem o sistema em relação ao seu centro de massa.

A Figura 28 mostra um garoto que salta de um trampolim. As partes internas do sistema (braços, pernas, tronco, membros) podem se mover mutuamente devido às forças internas trocadas pelos seus músculos (movimento interno ao sistema). Entretanto o seu movimento macro, isto é, o movimento do seu CM, é regido pela resultante das forças externas que agem no garoto, isto é, o seu peso. O centro de massa do garoto descreverá uma trajetória parabólica, independente da acrobacia que o garoto faça enquanto estiver no ar.

- A forças internas a um sistema definem como será o movimento interno das partes que compõem o sistema, em relação ao seu centro de massa, o chamado movimento *micro*. Elas permitem que as partículas que compõem o sistema se aproximem ou se afastem do seu centro de massa, mas são incapazes de perturbar o movimento do c.m. Esse papel é executado apenas pelas forças externas ao sistema.

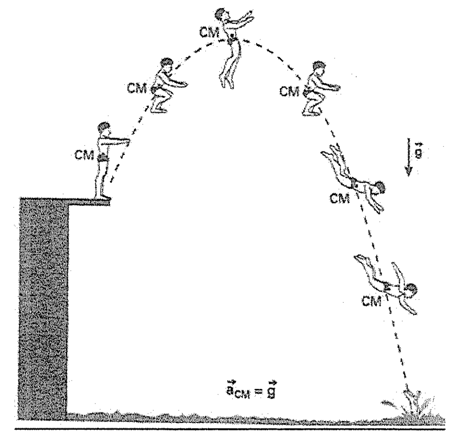


Figura 28

- Quando um sistema formado por duas bolas presas a uma mola é lançado obliquamente, num campo gravitacional uniforme, as forças elásticas (internas ao sistema) determinam o movimento interno de oscilação das partículas em relação ao centro de massa (c.m.) do sistema. Entretanto, a força peso (resultante das forças externas agindo no sistema) determina a trajetória parabólica executada pelo c.m. do sistema.

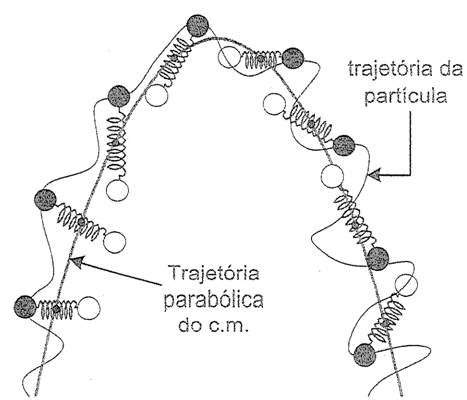


Figura 29 – Trajetória parabólica executada pelo c.m. do sistema e a trajetória executada pela bolinha preta durante as oscilações do sistema massa mola..

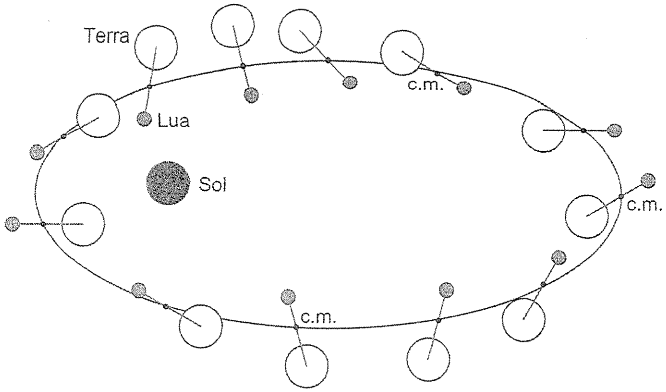


Figura 30 – Representação fora de escala da trajetória elíptica descrita pelo centro de massa do sistema Terra-Lua gravitando o sol, que ocupa um dos focos da elipse. Sendo a massa da Terra 81 vezes maior do que a massa da Lua, o centro de massa do sistema Terra-Lua, na verdade, encontra-se dentro da Terra.

- O movimento de rotação do sistema terra-lua em torno do c.m. desse sistema é governado pelas forças internas gravitacionais trocadas entre a terra e a lua (Figura 30). Já o movimento do seu centro de massa, que descreve uma trajetória elíptica em torno do sol, é governado pela resultante das forças externas que agem no sistema terra-lua, ou seja, a força que o sol (que está fora do sistema terra-lua) exerce no centro de massa do sistema terra-lua.
- Eventos que são desencadeados pela ação de forças internas, como a explosão de uma granada, ou uma colisão entre duas bolas de sinuca, em nada afetam a dinâmica do movimento do centro de massa que, conforme já disse, é definida exclusivamente pela ação das forças externas ao sistema.

A Figura 31 mostra uma granada que foi lançada obliquamente num campo gravitacional uniforme. Seu centro de massa descreve uma trajetória parabólica, devido à ação da força gravitacional (externa ao sistema granada). Quando essa granada explode, as forças da explosão (internas ao sistema) impulsionam os fragmentos em todas as direções mas não afetam o movimento do centro de massa do sistema, que permanece sobre a sua trajetória parabólica original durante todo o tempo em que a resultante das forças externas agindo no sistema granada + fragmentos for a força gravitacional.

Quando o primeiro fragmento tocar o solo, o sistema granada + fragmentos passa a sofrer a ação de outra força externa (a normal N aplicada pelo solo ao fragmento), alterando assim a trajetória do centro de massa do sistema.

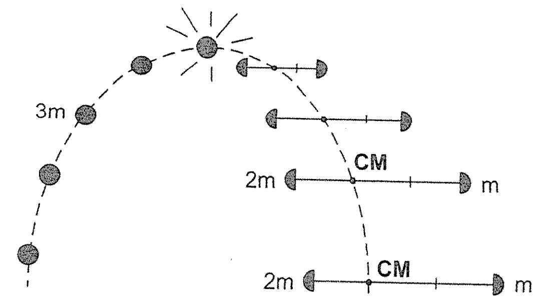


Figura 31 – Após a explosão da granada, o centro de massa dos fragmentos segue sua trajetória parabólica original, como se nada tivesse acontecido, até que o primeiro fragmento toque o solo.

O fato de que apenas forças externas ao sistema são capazes de alterar o estado de movimento ou de repouso do seu centro de massa nos permite entender de forma mais clara muitas situações simples do dia a dia, como por exemplo, o caso de uma pessoa que está dentro de um carro parado e tenta movê-lo, empurrando o mesmo como na Figura 32.

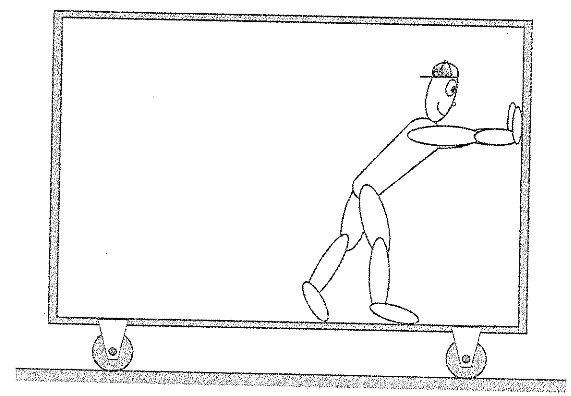


Figura 32 – uma pessoa que se encontra no interior de um carro não consegue tirá-lo do repouso empurrando suas paredes. A força aplicada é interna ao sistema carro-pessoa.

A força que a pessoa aplica à parede do carro é interna ao sistema pessoa + carro, não agindo, portanto, no centro de massa desse sistema. Entretanto, a pessoa pode sair do sistema, descendo do carro e apoiando seus pés firmemente no solo com atrito. Estando, agora, a pessoa fora do sistema carro, a força que ela aplica ao carro passa a ser externa a esse sistema (Figura 33), sendo, portanto, capaz de tirar do repouso o centro de massa do sistema carro.

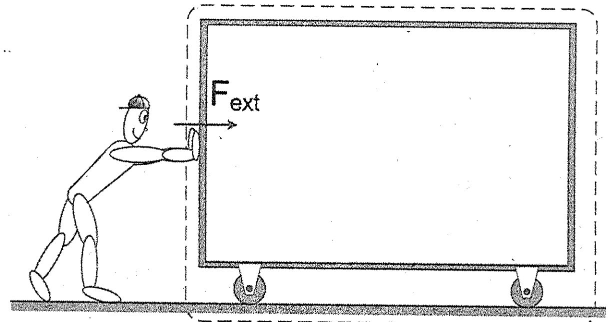


Figura 33 – uma pessoa fora do sistema carro é capaz de tirar o centro de massa desse sistema do repouso, visto que a força que a pessoa aplica ao carro é externa ao sistema carro.

Analogamente, o protótipo da Figura 34 não tem como sair do repouso impulsionado pela força que o ventilador solidário ao protótipo aplica à vela de pano. Essa força é interna ao sistema sendo, portanto, incapaz de alterar o estado de repouso do seu centro de massa.

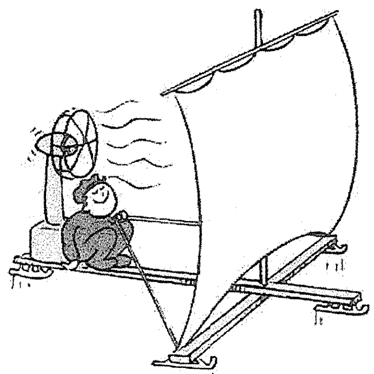


Figura 34 – Forças internas ao sistema não aceleram o seu centro de massa.

Se forças internas pudessem acelerar o centro de massa de um sistema, os problemas de combustíveis para veículos estariam facilmente resolvidos, de acordo com o esquema mostrado na Figura 35. Um caminhão poderia ser acelerado atraído pela força magnética exercida por um forte ímã preso ao próprio caminhão, dispensando o uso de gasolina ☺.

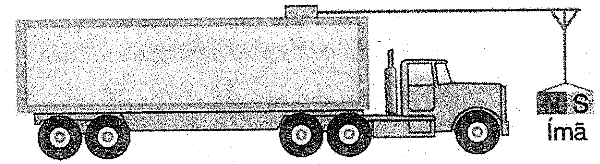


Figura 35 - Seria essa a solução para a crise do petróleo ☺ ?

Conforme já dissemos, as força internas a um sistema são responsáveis apenas pelo movimento das partes do sistema em relação ao seu centro de massa, sendo incapazes de alterar o estado de repouso ou de movimento do c.m. do sistema.

Para melhor compreender essa característica das forças internas, considere o sistema da Figura 36 no qual pai e filho encontram-se em repouso sobre patins. Estando o centro de massa do sistema também em repouso, pai e filhos se empurram mutuamente, trocando entre si um par de forças internas.

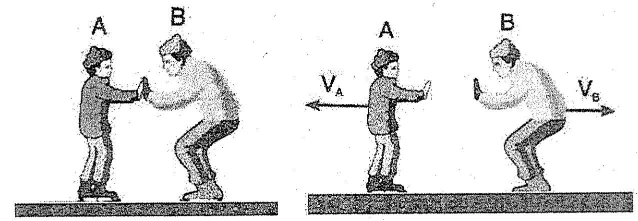


Figura 36 – Ao se empurrarem mutuamente, pai e filho adquirem velocidade em sentidos opostos. O centro de massa desse sistema, entretanto, permanece em repouso.

Com isso, pai e filho adquirem velocidades em sentidos opostos, mas o centro de massa do sistema permanece em repouso $V_{cm} = 0$, o que implica que a quantidade de movimento do sistema $Q_{sist} = M_{total}.V_{cm} = 0$ permanece nula, mesmo após esse empurrão interno. Pai e filho adquirem quantidades de movimento de mesmo valor e sentidos opostos, de forma que a soma delas permanece nula mesmo após o empurrão.

É importante atentar para o fato de que, apesar de as forças internas serem incapazes de alterar a quantidade de movimento do sistema Q_{sist} , elas alteram a energia cinética do sistema, conforme ocorrido nesse episódio.

Quando, por exemplo, um patinador empurra a parede horizontalmente, a força externa F_{ext} que a parede exerce sobre suas mãos aplica o *sistema patinador* um impulso externo $F_{ext}.\Delta t\rightarrow$ responsável pelo aumento da quantidade de movimento desse sistema.

A força externa responsável pela aceleração adquirida pelo centro de massa do sistema patinador, conforme a relação eq29 ($F_{R\text{-}ext} = M_{Total}.a_{cm}$), é a essa força $F_{ext}\rightarrow$ que a parede exerce sobre ele.

Essa força, entretanto, não realiza trabalho sobre o *sistema patinador* (conforme discutimos na página 65) visto que seu ponto de aplicação (as mãos do patinador) não sofre deslocamento em relação à Terra durante todo o seu tempo de atuação.

O ganho de energia cinética desse sistema provém do trabalho realizado pelas forças internas (forças exercidas internamente entre as partes móveis do sistema).

Em suma, as forças externas F_{ext} agindo sobre esse sistema aplicam um impulso externo sobre ele, mas não realizam trabalho sobre ele. Já as forças internas a esse sistema realizam trabalho sobre ele (incrementando a energia cinética do sistema), mas são incapazes de alterar a quantidade de movimento Q_{sist} desse sistema.

Compreender essas sutilezas conceituais leva o leitor a uma visão mais profunda e ampla da Mecânica.

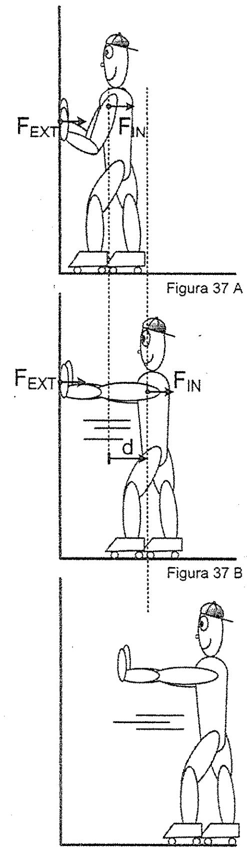


Figura 37 A

Figura 37 B

Figura 37 C

2.13 - SISTEMAS MECÂNICOS ISOLADOS E A PRIMEIRA LEI DE NEWTON PARA SISTEMAS

Conforme estudamos no volume 1 da presente coleção, a primeira lei de Newton para partículas afirma que:

Se uma partícula estive livre da ação de forças (em um referencial inercial), sua velocidade permanecerá constante (em direção, sentido e módulo), podendo ser nula ou não. Em outras palavras, se uma partícula estive livre da ação de forças (em um referencial inercial), ou ela está em repouso (equilíbrio estático) ou ela está se movendo em movimento retilíneo uniforme (equilíbrio dinâmico).

Por outro lado, conforme acabamos de aprender, a segunda lei de Newton para sistemas é dada pela expressão:

$$\boxed{\vec{F}_{R\ externas} = M_{total}\,.\,\vec{a}_{cm}} \qquad \textbf{(eq29)}$$

De forma análoga à primeira lei de Newton para partículas e, com base na relação eq29, enunciamos a primeira lei de Newton para sistemas:

Se a resultante das forças externas que atuam sobre um sistema de partículas for nula, o seu centro de massa tem aceleração nula. Assim, ou o seu centro de massa está parado, ou está em movimento retilíneo e uniforme em um referencial inercial:

$$\vec{F}_{R\ externas} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{cm} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_{cm} = \textbf{constante}$$

Um sistema que satisfaz essa condição é chamado de **sistema mecânico isolado.** Assim, se um sistema encontra-se mecanicamente isolado, permanecem constantes a sua $\vec{V}_{cm}$, bem como a sua $\vec{Q}_{sist} = M_{total}.\vec{V}_{cm}$.

Esse estado de equilíbrio permanecerá até que alguma força externa atue sobre o sistema, acelerando o seu centro de massa. As figuras 32, 34, 35 e 36 mostram exemplos bastante elucidativos de sistemas isolados de forças externas.

O estudo de sistemas mecânicos isolados se torna particularmente interessantes, em relação aos demais sistemas, exatamente pelo fato de que a sua quantidade de movimento $\vec{\mathbf{Q}}\mathbf{sist}$ e a velocidade $\vec{V}_{cm}$ do seu centro de massa permanecem constantes em qualquer processo que não envolva a ação de forças externas, tais como colisões internas ao sistema, a explosão de uma bomba etc.

Considere, por exemplo, o caso de um sistema composto por duas bolas de bilhar A e B que se deslocam em MRU sobre uma superfície horizontal sem atrito (Figura 38).

Esse sistema está mecanicamente isolado, visto que as forças externas (normal e peso trocada entre as bolas e a terra) se equilibram mutuamente. Assim, o seu centro de massa também se move em MRU e assim permanecerá até que alguma força externa interfira no sistema.

Admita, por exemplo, que $M_A = 2.M_B$, de tal forma que o centro de massa desse sistema está, a qualquer momento, sobre a reta que liga os centros dessas duas bolas, dividindo a distância entre elas na proporção 2:1 como mostra a figura 38.

O centro de massa do sistema se desloca em trajetória retilínea com velocidade $\vec{V}_{cm}$ constante. Caso as bolas venham a colidir entre si, nesse evento (a colisão) as forças trocadas durante o impacto são forças internas ao sistema (trocadas entre dois corpos que pertencem ao sistema) e que, portanto, em nada interferem no movimento do seu centro de massa de acordo com a relação eq29.

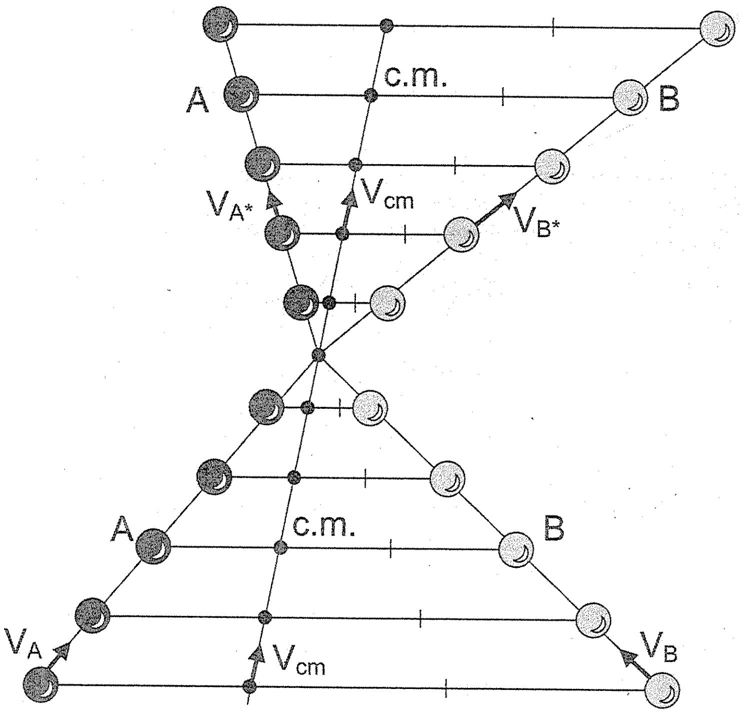


Figura 38 - o centro de massa do sistema isolado se desloca em movimento retilíneo e uniforme e ignora eventos internos ao sistema, tais como uma colisão.

Isso significa que, apesar de as qdm's individuais das bolas A e B mudarem, devido à transferência interna de qdm que ocorre entre elas durante a colisão, a qdm do sistema $Q_{sist} = M.V_{cm}$, bem como a velocidade do seu centro de massa V_{cm}, permanecem inalterados durante todo esse episódio. O centro de massa do sistema prossegue em sua trajetória retilínea original com velocidade constante $\vec{V}_{cm}$ como se nenhuma colisão tivesse ocorrido, visto que ele simplesmente ignora qualquer interação interna ao sistema, como colisões internas, explosões etc. Isso não é incrível ? ☺ Isso tudo está implícito na relação eq29.

Lembre-se que, conforme vimos anteriormente, o impulso trocado internamente entre as bolas trata-se de uma mera transferência de quantidade de movimento de uma para a outra, de forma que a somas vetorial das suas quantidades de movimento permanece inalterada, após a transferência (após o impacto).

Nesse exemplo, verificamos que, em toda e qualquer colisão interna a um sistema, tanto a qdm do sistema $\vec{Q}_{sist} = M.\vec{V}_{cm}$ quanto a velocidade $\vec{V}_{cm}$ do seu centro de massa se conservam. Matematicamente:

$$\boxed{\vec{V}_{cm\ antes} = \vec{V}_{cm\ depois} \quad \text{ou} \quad \vec{Q}_{sist\ antes} = \vec{Q}_{sist\ depois}} \qquad \textbf{(eq30)}$$

Em outras palavras, a conservação da qdm $\vec{Q}_{sist}$ de um sistema isolado de forças externas, durante um processo, equivale à conservação da sua $\vec{V}_{cm}$ e nada mais é do que a lei da Inércia (primeira lei de Newton) aplicada ao seu centro de massa.

Exemplo Resolvido 14: Considere um homem de massa m que se encontra parado sobre a extremidade uma prancha de massa 4m e comprimento L, também em repouso em relação ao solo. Só existe atrito entre o homem e a prancha. De repente, o homem começa a caminhar para frente até atingir a outra extremidade, quando novamente pára se de mover em relação à prancha. Analise esse sistema.

Solução: Inicialmente, homem e prancha encontram-se em repouso em relação à Terra. Conseqüentemente:

$$Q_{sist} = Q_{homem} + Q_{prancha} = (m_{homem} + m_{prancha}).V_{cm} = 0$$

Como não há atrito entre a prancha e o chão, o sistema prancha + homem encontra-se isolado de forças externas na horizontal. Dessa forma, tanto a Q_{sist} quanto a V_{cm} devem permanecer nulas enquanto o sistema interagir apenas internamente.

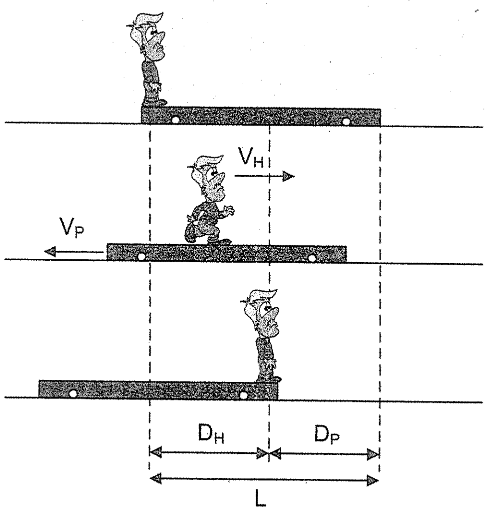
Quando o homem caminha para frente, ao longo da prancha, adquire velocidade à custa de uma mera transferência interna de qdm entre ele e a prancha, viabilizada pelo par de impulsos internos $Fat.\Delta t\leftarrow$ e $Fat.\Delta t\rightarrow$ trocados entre ele e a prancha.

Para adquirir mais e mais qdm, o homem intensifica os impulsos internos $Fat.\Delta t\leftarrow$ e $Fat.\Delta t\rightarrow$ provocando mais transferência interna de qdm entre ele e a prancha. Quanto mais qdm ele adquirir para a esquerda, mais qdm a prancha adquire para a direita, de forma que a soma (vetorial ou algébrica) delas permanece nula, visto que se trata de uma mera transferência interna de qdm.

Dessa forma, ainda que o homem corra sobre a prancha, a velocidade Vcm do centro de massa do sistema homem+prancha permanece nula durante todo o episódio devido à ausência de forças externas capazes de alterar o estado de repouso do c.m. desse sistema.

Para reduzir a sua velocidade e chegar ao repouso, o homem provoca uma inversão no sentido dos impulsos internos $Fat.\Delta t\leftarrow$ e $Fat.\Delta t\rightarrow$, de forma a transferir de volta para a prancha a qdm que havia recebido dela. Inevitavelmente, quando o homem atingir o repouso, a prancha também atingirá o repouso.

Trata-se de um sistema compensado. O seu centro de massa do sistema homem + prancha permanece imóvel, em relação à Terra, durante todo o deslocamento do homem e da prancha. Conforme dissemos anteriormente, as forças internas ao sistema (Fat ← e Fat→) se encarregam de aproximar ou afastar as partes do sistema, em relação ao seu centro de massa, mas são incapazes de alterar o estado de repouso do próprio centro de massa.



Os deslocamentos D_H e D_P do homem e da prancha, em relação à Terra, podem ser relacionados entre si pela conservação da Q_{sist}:

$$\Sigma Q_{antes} = \Sigma Q_{durante} = \Sigma Q_{depois}$$

$$0 + 0 = (+m_H.V_H) + (-m_P.V_P)$$

$$+m_H.V_H = m_P.V_P \quad \Rightarrow \quad m_H.\frac{D_H}{\cancel{\Delta t}} = m_P.\frac{D_P}{\cancel{\Delta t}}$$

$$m_H.D_H = m_P.D_P \qquad \text{(em relação à Terra)}$$

Note que a relação acima equivale a uma aplicação da relação eq20a. Afinal, esse também é um sistema compensado.

Sendo $m_H = m$ e $m_P = 4m$, temos: $m.D_H = 4m.D_P \quad \Rightarrow \quad D_H = 4.D_P$.

Adicionalmente, os deslocamentos D_H e D_P do homem e da prancha, em relação à Terra, podem ser vistos na Figura 40 e satisfazem a relação:

$$D_H + D_P = L$$

Assim, resolvendo o sistema de equações, determinamos as distâncias percorridas pelo homem e pela prancha em relação à Terra, enquanto o centro de massa do sistema homem + prancha permaneceu parado o tempo todo:

$$D_P = \frac{L}{5} \quad \text{e} \quad D_H = \frac{4.L}{5}$$

2.14 – CENTRO DE MASSA E SISTEMAS COMPENSADOS

Fizemos uma pequena abordagem sobre sistemas compensados na seção 2.10. Vimos que as condições para que o sistema seja compensado **na direção horizontal** são:

- O centro de massa do sistema encontra-se em repouso, em relação à Terra, na direção horizontal, ou seja, $Vcm_x = 0$;
- O sistema encontra-se isolado de forças externas na direção horizontal, isto é, qualquer movimento interno ao sistema, na horizontal, decorre apenas da ação de forças internas, forças estas que são incapazes de tirar o c.m. do sistema do repouso horizontal, de acordo com a segunda lei de Newton para sistemas dada pela relação eq29.
- De acordo com a relação eq25, sendo nula a $Vcm_x = 0$, será permanentemente nula a quantidade de movimento horizontal do sistema $Qsist_x$, ou seja:

$$Qsist_x = Q_{1x} + Q_{2x} + Q_{3x} + \ldots + Q_{nx} = M_{total} . Vcm_x = 0$$

As partes do sistema podem adquirir qdm horizontal decorrente apenas de transferências internas de qdm horizontal, viabilizadas pela ação de forças internas horizontais trocadas entre os corpos que pertencem ao sistema.

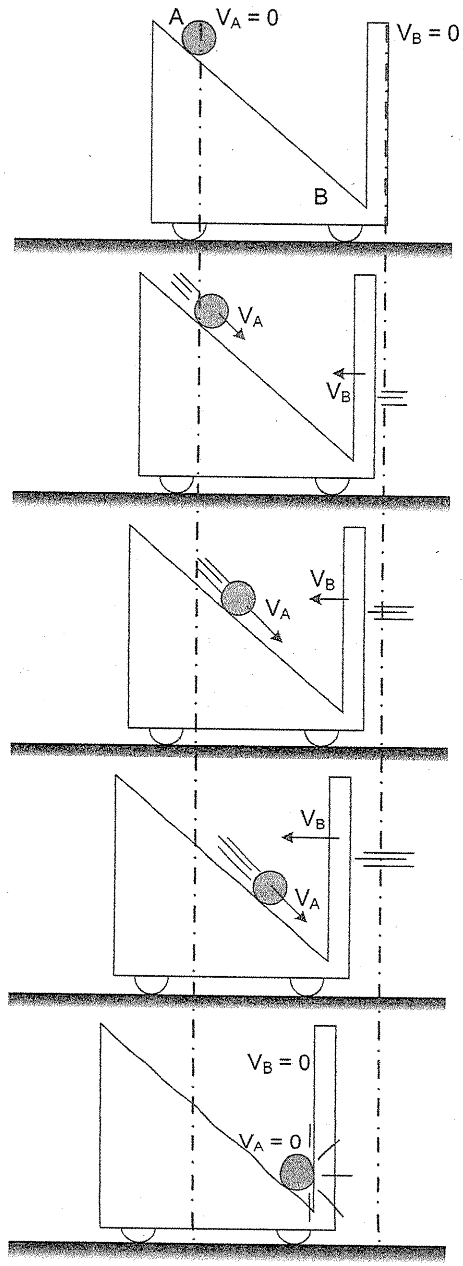


Figura 39

Agora que possuímos bons conhecimentos sobre o centro de massa de um sistema e suas propriedades, recordemos o exemplo da Figura 11, reproduzida na Figura 39.

A bolinha e o carrinho parte do repouso $V = 0$ (em relação à Terra), portanto, o centro de massa do sistema estava inicialmente parado $Vcm = 0$. O sistema encontra-se isolado de forças externas horizontais, conforme o diagrama de forças da Figura 13B e, portanto, todo o movimento interno ao sistema (na horizontal) decorre apenas das forças internas horizontais que transferem qdm internamente ($Nx.\Delta t$ e $F.\Delta t$) naquela direção. Elas fazem as partes do sistema se aproximar ou se afastar horizontalmente do seu centro de massa, mas são incapazes de mover o próprio centro de massa (c.m.) do sistema na direção horizontal.

$$Qsist_x = M_{total}.Vcm_X = (m_{carrinho} + m_{bola}).Vcm_X$$

$$Qsist_x = Qcarrinho_x + Qbola_x = 0 + 0 = 0$$

Note que "afirmar que a qdm horizontal do sistema $Qsist_x = \Sigma Q_x$ é nula não implica dizer que a qdm horizontal Qx de cada corpo do sistema deva ser obrigatoriamente nula". Afinal, para que a soma seja nula, é possível que as quantidades de movimento individuais tenham sentidos opostos (sinais opostos) e acabem resultando uma soma nula, como mostra a tabela a seguir:

$Qcarrinho_x$ +	$Qbola_x$ =	$Qsist_x$	Etapa
0	0	0	Início (t_o)
–10	+10	0	A
–30	+30	0	B
–50	+50	0	C
0	0	0	Impacto $[t_1, t_2]$

Durante todo esse episódio, o centro de massa desse sistema descreve uma trajetória retilínea vertical, em relação à Terra. Ele desce verticalmente em movimento acelerado, mas não sofre nenhum deslocamento na direção horizontal. Nessa direção temos:

$$Qsist_x = Qcarrinho_x + Qbola_x = 0 + 0 = 0$$

$$(-M.V_{carrinho})_x + (+m.V_{bola})_x = 0 \quad \Rightarrow \quad M.V_{carrinho-x} = m.V_{bola-x}$$

$$M.\frac{D_{carrinho-x}}{\cancel{\Delta}t} = m.\frac{D_{bola-x}}{\cancel{\Delta}t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M.D_{carrinho-x} = m.D_{bola-x}} \quad \textbf{(eq31)}$$

Com:

$D_{carrinho-x}$ = distância horizontal percorrida pelo carrinho em relação à Terra.

D_{bola-x} = distância horizontal percorrida pela bola em relação à Terra.

ote que eq31 equivale a eq20a. As massas se movem de forma que o movimento uma compensa o movimento da outra, mantendo o CM em repouso horizontal.

e você não acredita que o centro de massa do sistema não sofreu deslocamento orizontal, então mostrarei matematicamente (para você deixar de ser teimoso). artindo da relação eq17, vem:

$$Xcm_{\,inicio} = \frac{M.X_{carrinho} \;+\; m.\,x_{bola}}{M \;+\; m} \qquad \textbf{(eq32)}$$

ntretanto, após um intervalo de tempo Δt qualquer, o carrinho terá se movido na distância $Dx_{carrinho}$ para a direita, de forma que sua nova abscissa, no sistema de oordenadas, passará a valer:

$$X_{final\ carrinho} \;=\; X_{\,carrinho} \;-\; D_{carrinho\text{-}x} \qquad \textbf{(eq33)}$$

nalogamente, para a bolinha que se moveu para direita (em relação à Terra) emos:

$$X_{final\ bola} \;=\; X_{\,bola} \;+\; D_{bola\text{-}x} \qquad \textbf{(eq34)}$$

eterminando a abscissa final Xcm do centro de massa, após esse intervalo de empo Δt, vem:

$$Xcm_{\,final} = \frac{M.X_{final\ carrinho} \;+\; m.\,x_{final\ bola}}{M \;+\; m} \qquad \textbf{(eq35)}$$

sando eq33 e eq34 em eq35, vem:

$$m_{\,final} = \frac{M.(X_{carrinho} \;-\; D_{carrinho\text{-}x}) \;+\; m.\,(x_{\,bola} + D_{bola\text{-}x})}{M \;+\; m}\text{, usando } \textbf{eq31}:$$

$$m_{\,final} = \frac{M.X_{carrinho} \;-\; \cancel{M}.\,\cancel{D}x_{\,carrinho} \;+\; m.\,x_{\,bola} \;+\; \cancel{m}.\cancel{D}x_{bola}}{M \;+\; m}$$

$$Xcm_{\,final} = \frac{M.X_{carrinho} \;+\; m.x_{bola}}{M \;+\; m} \qquad \textbf{(eq36)}$$

omparando eq32 com eq36, vemos que, de fato:

$$Xcm_{\,final} \;=\; \frac{M.X_{carrinho} \;+\; m.\,x_{bola}}{M \;+\; m} \;=\; Xcm_{\,inicial} \qquad ☺$$

você ainda teimar com isso, vou lhe dar um cascudo ! ☺

2.15 - SISTEMAS MECÂNICOS NÃO ISOLADOS NA DIREÇÃO VERTICAL

Na maioria das situações, os sistemas isolados só estão isolados na direção horizontal. É difícil manter um sistema isolado na vertical em situações que envolvem impactos verticais, colisões verticais, visto que a ação de forças externas tais como peso P↓ e Normal ↑ freqüentemente transfere quantidade de movimento entre o sistema e o chão que, usualmente, não pertence ao sistema (por ter massa infinitamente grande).

Quando as partes do sistema aceleram na vertical, tem-se $|N| \neq |P|$, ou seja, haverá uma força resultante externa vertical ↑(N–P) ou ↓(P–N) causando essa aceleração acm_Y do seu centro de massa, alterando a sua velocidade vertical Vcm_Y. Conforme a relação eq25, uma mudança em Vcm_Y implica uma variação da qdm vertical $Qsist_Y$ do sistema.

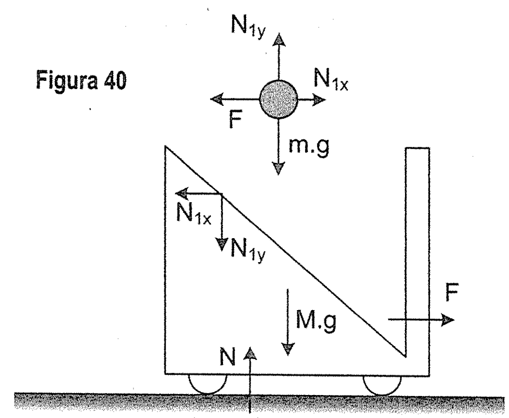
No caso da figura 40, o centro de massa do sistema parte do repouso e é acelerado pela resultante das forças externas verticais que agem no sistema:

$$F_{R\ externas\ Y} \;=\; M_{total}\ {}_{x}\ a_{cmY}$$

$$(M.g \;+\; m.g \;-\; N_1)\downarrow \;=\; (M + m).\ a_{cm\ Y1}\downarrow \qquad \textbf{(eq37)}$$

Durante a descida, o centro de massa do sistema se deslocará com uma aceleração cuja componente vertical vale $a_{cmy1}\downarrow$, desde o instante inicial até o instante que antecede o impacto. Durante a fração de segundos que dura o impacto, o centro de massa do sistema será bruscamente desacelerado até repouso.

Figura 40



Assim, na vertical, será requerida uma enorme aceleração $a_{cm\ Y2}\uparrow$ para frear o centro de massa durante o impacto. Naquela fração de segundos, o centro de massa estará descendo retardado ($\downarrow V_{cmY}$, $\uparrow a_{cm\ Y2}$), sendo requerida uma força $F_{R\ externas\ Y2}\uparrow$ vertical para cima.

Assim:

$$F_{R\ externas\ Y2} \uparrow = M_{total} \times a_{cm\ Y2} \uparrow$$

$$(N_2 - M.g - m.g) \uparrow = (M + m).\ a_{cm\ Y2} \uparrow \qquad \textbf{(eq38)}$$

Note que, durante a descida acelerada da bolinha (relação eq37) temos M.g + m.g > N, porém, durante a fração de segundos que dura o impacto (relação eq38), temos N > M.g + m.g. A normal N, assim como as componentes verticais de aceleração a_{cmY1} e a_{cmY2}, assume um valor diferente em casa ocasião.
Note, portanto, que, desde o instante inicial até o impacto, a normal N que sustenta o sistema carrinho + bola sobre o piso não é igual ao peso total do sistema (conforme eq37), visto que seu centro de massa esteve acelerado $a_{cmY1}\downarrow$ verticalmente.
Entretanto, após o impacto vertical, o centro de massa do sistema ficará em repouso permanente, em equilíbrio, teremos $a_{cmY} = 0$. Substituindo $a_{cmY} = 0$ em qualquer uma das relações eq37 ou eq38, vem:

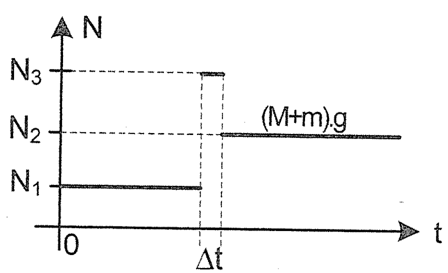
$$(N_3 - M.g - m.g) = (M + m).\ a_{cm\ Y}$$

$$(N_3 - M.g - m.g) = (M + m).\ 0$$

$$(N_3 - M.g - m.g) = 0$$

$$N_3 = M.g + m.g \qquad \textbf{(eq39)}$$

A relação eq39 fornece o valor da normal N após o impacto, quando carrinho e bola permanecem em repouso permanente em relação à Terra.

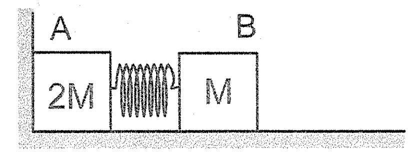


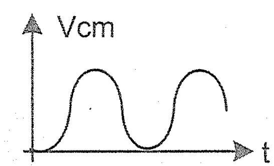
O sistema da Figura 40, portanto, não está isolado na vertical (sua qdm vertical varia com o tempo). Já o sistema da página 186 permanece isolado tanto na horizontal quanto na vertical (N = P) desde que o garoto não salte, pois, do contrário, durante os impactos verticais, teremos N > P e o centro de massa do sistema menino + prancha adquirirá aceleração vertical, a qdm vertical do sistema variará.

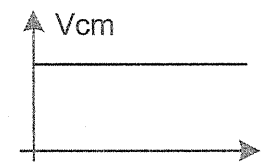
PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

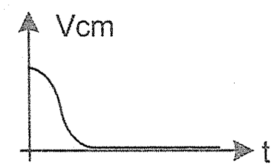
Questão 17

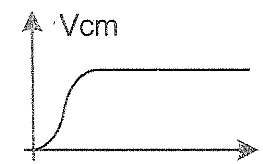
O conjunto abaixo, formado por duas caixas A e B conectadas a uma mola, encontra-se sobre um solo horizontal liso. Admita que a mola esteja inicialmente comprimida. Qual o gráfico que melhor representa a velocidade do seu centro de massa, em função do tempo, quando esse sistema é abandonado a partir do repouso ?



a) 

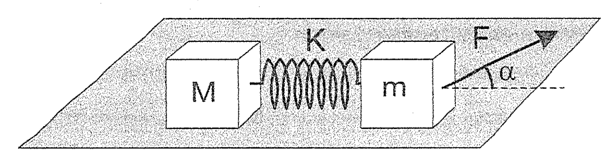
b) 

c) 

d) 

Questão 18

O conjunto abaixo, formado por duas caixas de massas M e m conectadas a uma mola, encontra-se sobre um plano horizontal liso. A mola apresenta uma elongação inicial x_o e sua constante elástica vale K. Uma força F, contida num plano horizontal, age sobre o bloco de massa m numa direção que forma um ângulo α com o eixo longitudinal do sistema. A aceleração inicial do centro de massa desse sistema vale:



a) $\dfrac{F.\cos\alpha}{m} - \dfrac{K.x_o}{M}$

b) $\dfrac{F}{m} + \dfrac{K.x_o}{M}$

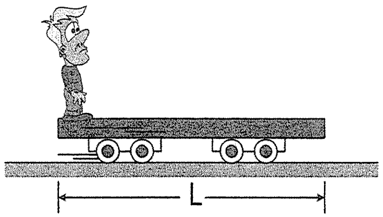
c) $\dfrac{F}{M} - \dfrac{K.x_o}{m}$

d) $\dfrac{F}{M+m}$

e) $\dfrac{F.\cos\alpha}{M+m}$

Questão 19

Um homem de massa **m** encontra-se na extremidade de um vagão-prancha em repouso. O vagão tem massa **9m** e comprimento L. O homem caminha até a extremidade oposta do vagão e pára.



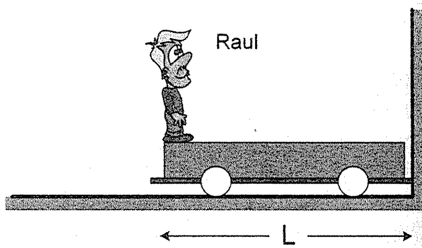
Desprezando-se o atrito entre o vagão e os trilhos, o deslocamento do homem em relação ao solo é:

a) $\frac{L}{10}$ b) L c) $\frac{L}{3}$ d) $\frac{9L}{10}$ e) $\frac{L}{9}$

Questão 20

O prof. Raul Brito, de massa 60 kg, está inicialmente parado sobre uma plataforma de comprimento L = 2,6 m e massa 5 kg que repousa encostada numa parede vertical. Em seguida, Raul caminha até a outra extremidade da plataforma visando a tocar a parede mas, ao chegar lá, fica desapontado ao perceber que a plataforma se afastou da parede durante o seu movimento. Qual a distância final entre a plataforma e a parede ?

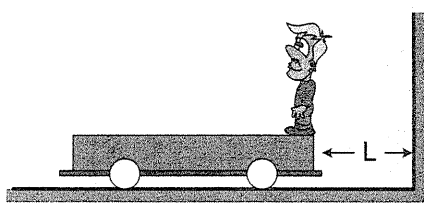
a) 0,2 m
b) 0,4 m
c) 1,6 m
d) 2,0 m
e) 2,4 m



Questão 21 –

Raul (massa 2M) está inicialmente parado sobre uma plataforma (massa 4M) que repousa a uma distância L de uma parede. Se cada passo de Raul corresponde a uma distância L/2, quantos passos ele deve dar ao longo da plataforma até que a mesma encoste-se à parede ?

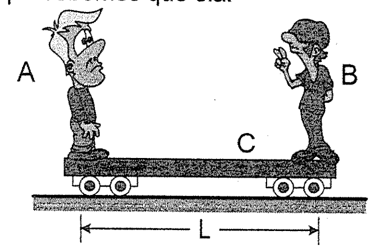
a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10



Questão 22 –

A figura mostra Afonso (2M) e Bartolomeu (M) conversando, ambos em repouso sobre uma plataforma (M) de comprimento L parada em relação ao solo liso. De repente, Afonso e Bartolomeu decidem trocar de posição sobre a plataforma e caminham em sentidos opostos, até que Afonso atinja a extremidade direita da plataforma e Bartolomeu, por sua vez, atinja a extremidade esquerda. Observando a posição da prancha, antes e após esse episódio, percebemos que ela:

a) se moveu L/3 para a esquerda;
b) se moveu L/4 para a esquerda;
c) se moveu L/5 para a esquerda;
d) se moveu L/6 para a esquerda
e) se moveu L/3 para a direita.



Questão 23

Você (massa 80 kg) e sua amiga estão em um barco a remo (de massa 60 kg) em um lago com águas calmas. Você está no centro do barco e ela está atrás de você, a 2 m do centro. Você fica cansado e para de remar. Ela se oferece para remar e, após o barco atingir o repouso, vocês trocam de lugar. Você nota que, após a alternância de lugares, o barco se moveu 20 cm em relação à margem. Qual é a massa da sua amiga ?

Questão 24 (ITA) –

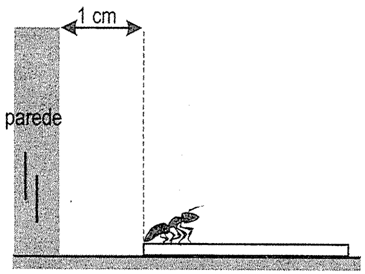
Uma lâmina de material muito leve de massa **5m** está em repouso sobre uma superfície sem atrito como mostra a figura. A extremidade esquerda da lâmina está a 1 cm de uma parede. Uma formiga, considerada como um ponto de massa m, está inicialmente em repouso sobre essa extremidade, como mostra a figura. A seguir, a formiga caminha para frente muito lentamente, sobre a lâmina. A que distância **d** da parede estará a formiga no momento em que a lâmina tocar a parede ?

a) 2 cm b) 3 cm c) 4 cm d) 5 cm e) 6 cm

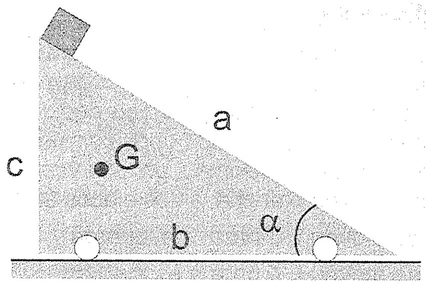
Questão 25 (ITA)

Uma rampa rolante pesa 120N e se encontra inicialmente em repouso, como mostra a figura. Um bloco que pesa 80N, também em repouso, é abandonado no ponto 1, deslizando a seguir sobre a rampa. São dados ainda: a = 15 m e senα = 0,6. Desprezando os possíveis atritos e as dimensões do bloco, pode-se afirmar que a distância percorrida pela rampa no solo, até o instante em que o bloco atinge o ponto 2, é:

a) 16,0 m b) 24,0 m c) 30,0 m d) 9,6 m e) 4,8 m



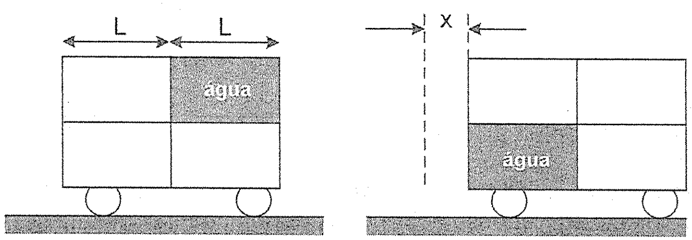
questão 24



questão 25

Questão 26

Um carro tanque, de comprimento 2L, é composto de 4 compartimentos de água idênticos, ligados entre si através de dutos comunicadores. A massa do carro vazio vale M e cada compartimento suporta uma massa m de água. Certa vez, o carro encontrava-se parado sobre um solo horizontal liso, contendo água apenas em um dos seus comportamentos superiores. Abrindo-se uma válvula interna, toda a água desse compartimento, gradativamente, escoou para um dos compartimentos inferiores, como mostra a figura. Determine o deslocamento x sofrido pelo carro, nesse episódio.



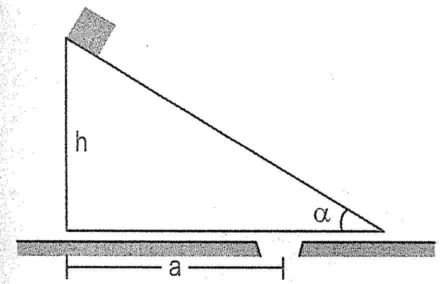
antes depois

Questão 27

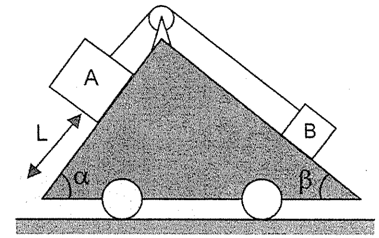
Uma cunha de massa **M** encontra-se em repouso sobre um solo horizontal liso. Um pequeno dado de massa **m** e dimensões desprezíveis é abandonado em repouso do alto da superfície inclinada da cunha que forma um ângulo α com a horizontal. Determine a altura **h** que a cunha deve ter a fim de que o dado caia dentro do orifício O no solo posicionado como mostra a figura.

Questão 28 –

Sejam dois blocos A e B de massas m_A e m_B, conectados entre si através de fio e o polia ideais. Esses blocos encontram-se apoiados sobre uma cunha C de massa m_C livre para se mover sobre um solo horizontal liso. Quando o sistema é abandonado a partir do repouso, determine a distância horizontal percorrida pela cunha, quando a caixa A percorrer uma distância L ladeira abaixo. Todos os atritos são desprezados.



questão 27



questão 28

Questão 29 - **(ITA)**

As massas m_1 = 3,0 kg e m_2 = 1,0 kg, foram fixadas nas extremidades de uma haste homogênea, de massa desprezível e 40 cm de comprimento. Este sistema foi colocado verticalmente sobre uma superfície plana, perfeitamente lisa, conforme mostra a figura, e abandonado. A massa m_1 colidirá com a superfície a uma distância **x** do ponto P dada por:

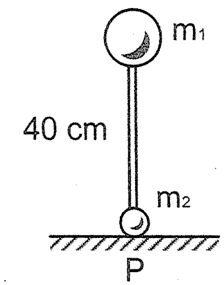
a) x = 0 (no ponto P)

b) x = 10cm

c) x = 20cm

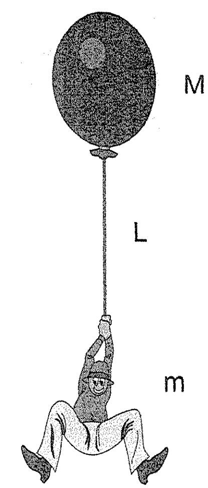
d) x = 30cm

e) x = 40cm



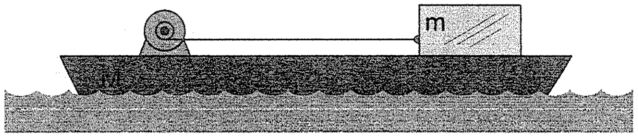
Questão 30

O balão, a corda ideal e o garoto estão em equilíbrio no ar, flutuando devido à ação do empuxo atmosférico. A massa do balão vale M, a massa do garoto vale m e o comprimento da corda vale L. Se o garoto conseguir subir ao longo da corda até tocar o balão, que distância este descerá ?



Questão 31 -

Uma barcaça está inicialmente parada num porto de águas paradas e carrega uma caixa que pesa m = 600 kg. A barcaça tem massa de M = 3.000 kg e está equipada com um guincho utilizado para deslocar a carga ao longo do convés. Não considerando qualquer atrito entre a caixa e a barcaça, determine:



a) a velocidade da barcaça e da caixa em relação à Terra quando o guincho está puxando o cabo numa velocidade de 1,5 m/s em relação ao guincho;
b) o deslocamento sofrido pela barcaça após 12 m de cabo ter sido pelo guincho;
c) resolver os itens a e b novamente, agora admitindo que haja atrito entre a caixa e a barcaça, com $\mu = 0{,}30$.

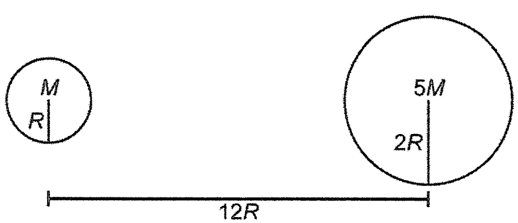
Questão 32 -

Sejam A e B duas pequenas esferas de cargas e massas respectivamente iguais a +3q , 2m, –2q, 3m , localizadas nas abscissas $x_A = 0$ e $x_B = 10L$ de um eixo horizontal liso. Quando abandonadas a partir do repouso, as cargas se atraem e se deslocam, uma em direção à outra. Pede-se determinar:
a) a velocidade da carga A, quando a carga B estiver com velocidade $v_B = 400$ m/s;
b) a abscissa do ponto aonde as cargas vão se chocar.

Questão 33 - (ITA 2005)

Dois corpos esféricos de massa M e 5M e raios R e 2R, respectivamente, são liberados no espaço livre. Considerando que a única força interveniente seja a da atração gravitacional mútua, e que seja de 12R a distância de separação inicial entre os centros dos corpos, então, o espaço percorrido pelo corpo menor até a colisão será de:

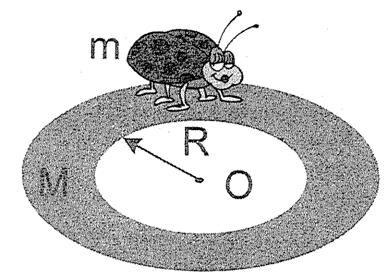
a) 1,5 R. b) 2,5 R. c) 4,5 R. d) 7,5 R. e) 10,0 R.



Questão 34 (ITA 86 – Saraeva) –

Sobre uma superfície perfeitamente lisa, encontra-se em repouso um anel de massa M e raio R. Sobre este anel encontra-se em repouso uma joaninha de massa "m". Se a joaninha caminhar sobre o anel, podemos afirmar que, em relação à Terra:

a) a joaninha não irá se deslocar. Somente o anel adquirirá um movimento de rotação em torno de seu centro de simetria;
b) a joaninha descreverá órbitas circulares em torno do centro do anel, enquanto que o anel girará em sentido contrário em torno do seu centro;
c) a joaninha e o centro de massa do sistema descreverão, respectivamente, órbitas circulares de raios R e m.R/(m+M);
d) o centro de massa do sistema permanecerá em repouso, enquanto que a joaninha descreverá órbitas circulares de raio M.R/(m+M);
e) nenhuma das afirmações acima está correta.



Questão 35

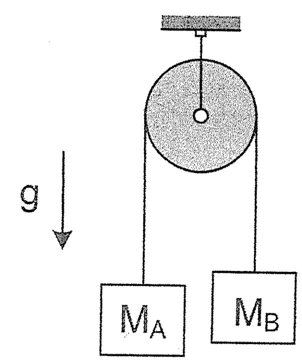
Considere o sistema abaixo formado por duas caixas A e B de massas respectivamente iguais a M_A e M_B, conectadas por fio e polia ideais num local onde a gravidade vale g. A aceleração do centro de massa desse sistema vale:

a) $\left(\dfrac{M_A - M_B}{M_A + M_B}\right)^2 g$

b) $\left(\dfrac{M_A - M_B}{M_A + M_B}\right) g$

c) $2\left(\dfrac{M_A - M_B}{M_A + M_B}\right)^2 g$

d) $2\left(\dfrac{M_A - M_B}{M_A + M_B}\right) g$



2.16 ESTUDO DAS COLISÕES

Uma colisão entre duas partículas ou corpos livres ocorre quando, estando estes inicialmente afastados, se aproximam de forma a interagirem mutuamente durante um breve intervalo de tempo, se afastando em seguida. Durante essa interação, um par de forças de mesmo valor e sentidos contrários meramente transfere quantidade de movimento entre os dois corpos que estão colidindo, alterando suas quantidades de movimento individuais sem, no entanto, alterar a soma vetorial delas.

As forças que agem durante uma colisão são muito mais intensas que as demais forças externas presentes no sistema e seu tempo de atuação é da ordem de 10^{-3} s a 10^{-2} s de duração sendo, assim, denominadas *forças impulsivas*.

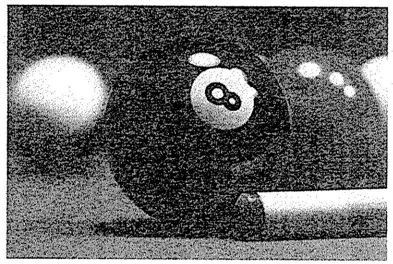


Figura 41 - Colisão entre bolas de bilhar

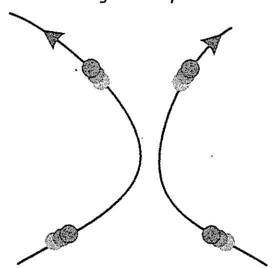


Figura 42 - Colisão entre partículas elétricas que se repelem fortemente.

Colisões ocorrem tanto quanto uma bola de bilhar se choca com outra bola de bilhar, quanto quando uma partícula alfa (núcleo de He) colide com outro núcleo. Nesse ultimo caso, as forças impulsivas trocadas durante a interação são as forças elétricas fortemente repulsivas trocadas entre as cargas elétricas. Ainda que não ocorra um contato direto entre as partículas, essa interação é tratada como uma colisão, visto que tais forças, além de satisfazerem a terceira lei de Newton, são bastante intensas apenas durante um breve intervalo de tempo, cessando após o afastamento das partículas.

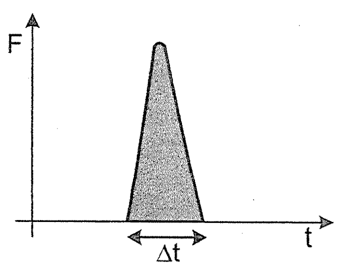


Figura 43 - Gráfico da força impulsiva. O impulso aplicado pela força é proporcional à área sombreada.

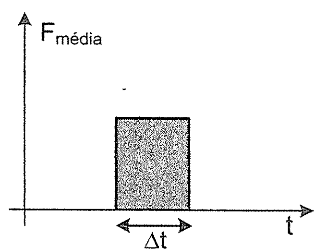


Figura 44 – Gráfico da força impulsiva média.

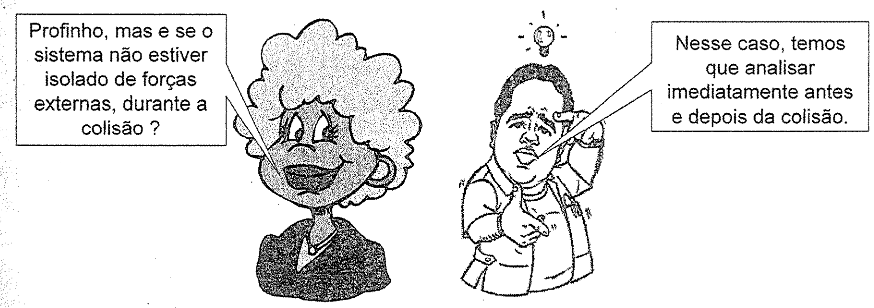
O gráfico da força impulsiva que age durante uma colisão, em função do tempo, seria algo semelhante ao da Figura 43. Entretanto, em geral, não sabemos a forma exata do gráfico F(t) e, na verdade, nem temos interesse nele. Afinal de contas, ao estudarmos uma colisão, não nos interessa saber em detalhes o que ocorre durante o seu transcurso. O que geralmente buscamos é saber como encontraremos o sistema *imediatamente depois* da colisão, conhecendo-se como se encontrava *imediatamente antes*. Em outras palavras, é o resultado da colisão que poderá nos dar alguma informação a respeito da força de interação, e não o contrário.

Embora a forma exata do gráfico da força impulsiva F(t) não seja algo simples de se obter, os resultados experimentais geralmente nos permitem obter o gráfico da força impulsiva média, isto é, aquela força constante que produziria o mesmo impulso (mesma área sombreada nos gráficos das Figuras 43 e 44) no mesmo intervalo de tempo.

2.17 A QUANTIDADE DE MOVIMENTO DO SISTEMA EM COLISÕES

Conforme dissemos anteriormente na seção 2.6, quando dois corpos ou partículas livres colidem, o par de forças internas que agem durante o impacto promove uma mera transferência interna de quantidade de movimento entre os corpos que estão colidindo, e transferências internas não alteram a soma das quantidades de movimento, ou seja, não altera a qdm Q_{sist} do sistema.

Colisões internas a um sistema isolado de forças externas não alteram a sua quantidade de movimento Q_{sist}. Ela permanece constante antes, durante e depois da colisão interna, como se nada tivesse ocorrido (Figura 45).



Ora, Claudete, sendo as forças internas impulsivas muito mais intensas que as forças externas que eventualmente atuem no sistema durante a colisão, o efeito destas últimas pode ser desprezado durante o curtíssimo intervalo de tempo infinitesimal ($\Delta t \cong 0$) que dura uma colisão, permitindo que o sistema possa ser admitido isolado durante o choque. Dessa forma, podemos afirmar que:

Ainda que o sistema não esteja isolado de forças externas durante uma colisão interna, podemos admitir que a sua *a quantidade de movimento Q_{sist} permanece inalterada* durante o breve intervalo de tempo infinitesimal ($\Delta t \cong 0$) em que ocorre. Assim, na Figura 46, vale a relação:

$$\Sigma Q_{\text{logo antes}} = \Sigma Q_{\text{logo depois}} \quad \text{ou} \quad Q_{\text{sist logo antes}} = Q_{\text{sist logo depois}} \qquad \textbf{(eq40)}$$

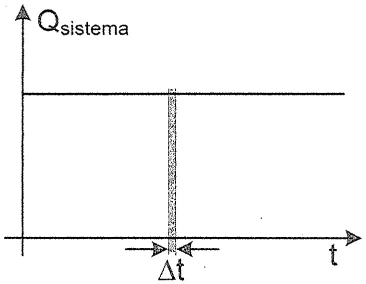


Figura 45 – A qdm de um sistema isolado se mantém constante antes, durante e depois de uma colisão interna.

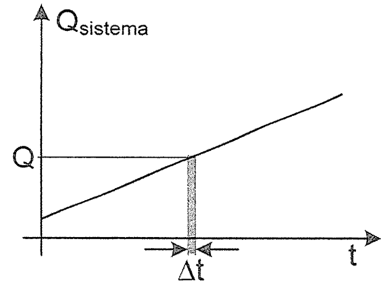


Figura 46 – A qdm de um sistema não isolado varia no tempo. Uma colisão interna não perturba esse comportamento.

Considere, por exemplo, duas bolas que estão caindo em queda livre. Esse sistema não se encontra isolado, visto que está sob ação da força externa gravitacional, responsável pelo aumento linear da qdm desse sistema mostrado no gráfico da Figura 46.

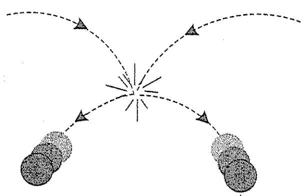


Figura 47 – Uma colisão interna a um sistema não perturba a sua qdm total.

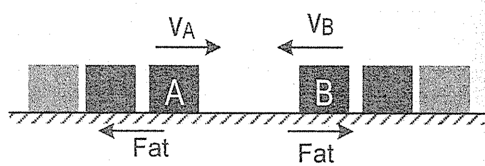


Figura 48 – A qdm desse sistema diminui com o passar do tempo, devido ao atrito externo exercido pelo solo áspero.

Caso essas bolas venham a colidir entre si durante essa queda livre (Figura 47), esse choque não perturba esse comportamento crescente da qdm do sistema, não alterando, portanto, o gráfico da Figura 46.

Essa colisão interna não altera nem a qdm Qsist do sistema, nem a velocidade do seu centro de massa ($Q_{sist} = M_{total} . V_{cm}$), que também se comporta de acordo com o gráfico da Figura 46.

Assim, no caso desses sistemas não isolados, ainda vale a relação eq40, na qual consideramos durante o curtíssimo intervalo de tempo infinitesimal ($\Delta t \cong 0$).

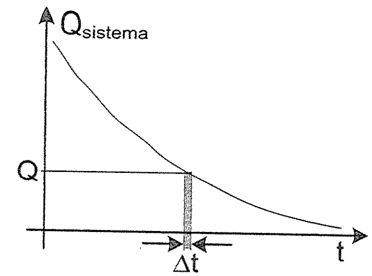


Figura 49 – A qdm do sistema diminui pela ação do atrito externo

Quando, por exemplo, duas caixas A e B se movem ao longo de um solo horizontal áspero (Figura 48), a quantidade de movimento desse sistema vai gradativamente diminuindo pela ação do atrito externo exercido pelo solo, como mostra o gráfico da Figura 49. Ainda assim, uma colisão entre essas caixas não perturba esse comportamento decrescente da quantidade de movimento desse sistema, não sendo nem sequer percebida no gráfico da Q_{sist} em função do tempo. Mesmo nessa colisão com atrito, ainda vale a relação eq40, na qual consideramos durante o curtíssimo intervalo de tempo infinitesimal ($\Delta t \cong 0$).

Logicamente, se o solo fosse absolutamente liso na Figura 48, a qdm Q_{sist} do sistema teria o comportamento mostrado no gráfico da Figura 45.

2.18 A ENERGIA MECÂNICA DO SISTEMA EM COLISÕES

Quando duas bolas de sinuca colidem entre si, ocorre um breve período de deformação seguido de um breve período de restauração.

Período de deformação: durante essa fase, parte da energia cinética do sistema vai sendo gradativamente convertida em energia potencial, à medida que a área de contato entre as bolas cresce. Quando a área de contato entre os corpos atinge um valor máximo, a energia potencial do sistema atinge seu maior valor e ambos os corpos estão compartilhando de uma mesma velocidade em relação à Terra.

Período de restauração: nessa fase, a energia potencial vai sendo gradativamente revertida em energia cinética à medida que a área de contato entre as bolas diminui até zero. Se o impacto não for excessivamente forte e se as bolas forem altamente elásticas, elas irão readquirir sua forma original após essa fase de restauração. Com impactos fortes demais e corpos menos elásticos, uma deformação permanente pode resultar, implicando em perda de energia cinética do sistema.

Em nossa análise, consideraremos que a energia mecânica do sistema seja puramente cinética em todo o período antes e após o impacto, havendo energia potencial apenas durante o breve intervalo de tempo que dura a interação entre os corpos.

Os fenômenos de colisões são quase sempre acompanhados de perda de energia mecânica, que pode ser calculada subtraindo-se a energia cinética do sistema logo após o impacto da sua energia cinética logo antes do impacto. Perde-se energia mecânica pela geração de calor, pela geração e dissipação de tensões elásticas dentro dos corpos, e pela geração de energia sonora.

Quanto à energia mecânica do sistema, uma colisão pode ser classificada:

- Elástica
- Parcialmente elástica
- Inelástica

A *colisão elástica* é aquela que conserva a energia cinética total do sistema, isto é, a soma das energias cinéticas antes e após a colisão é exatamente a mesma:

$$\Sigma Ecin_{\text{ antes}} = \Sigma Ecin_{\text{ depois}} \qquad \textbf{(eq41)}$$

Já as colisões *parcialmente elásticas* e as *inelásticas* são aquelas em que parte da energia cinética do sistema é dissipada em calor, energia sonora, etc., não havendo, assim, conservação da energia cinética total do sistema:

$$\Sigma Ecin_{\text{ antes}} > \Sigma Ecin_{\text{ depois}} \qquad \textbf{(eq42)}$$

Ao contrário das colisão parcialmente elásticas, nas colisões inelásticas os corpos permanecem juntos após a colisão, o que lhes dá o nome popular de colisão **bate-gruda.**

É importante ressaltar que, qualquer que seja o tipo de colisão entre dois corpos livres, sempre ocorrerá a conservação da quantidade de movimento do sistema. Afinal, a lei da conservação da quantidade de movimento do sistema isolado é uma das leis mais gerais e importantes da Física, sendo válida mesmo na escala atômica, nos domínios da Física moderna.

2.19 COLISÕES UNIDIMENSIONAIS E COLISÕES BIDIMENSIONAIS

Denominamos colisão unidimensional aquela na qual todas as velocidades e impulsos envolvidos apontam numa mesma direção (ao longo de um mesmo eixo) antes e após a colisão.

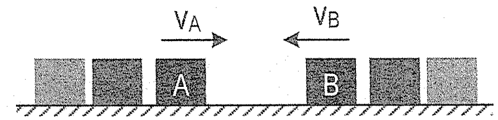


Figura 50 – colisão unidimensional

Já as colisões bidimensionais são aquelas nas quais as velocidades dos corpos, antes e após a colisão, envolvem duas ou mais direções distintas, todas contidas em um mesmo plano.

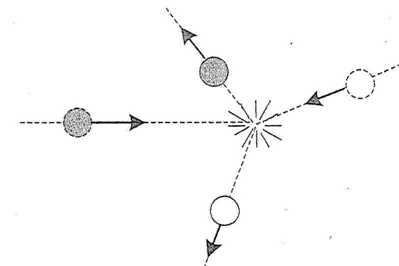


Figura 51 – colisão bidimensional

Nesse livro, estudaremos tanto as colisões unidimensionais quanto as colisões bidimensionais.

2.20 COEFICIENTE DE RESTITUIÇÃO EM COLISÕES UNIDIMENSIONAIS

O coeficiente de restituição (e) de uma colisão é o fator que avalia o grau de elasticidade de uma colisão. Uma colisão 100% elástica tem coeficiente e = 1, ao passo que uma colisão inelástica tem coeficiente nulo e = 0. Matematicamente, esse coeficiente é definido pela razão:

$$e = \frac{|\,V_{\text{relativa-após}}\,|}{|\,V_{\text{relativa-antes}}\,|} \qquad \textbf{(eq43)}$$

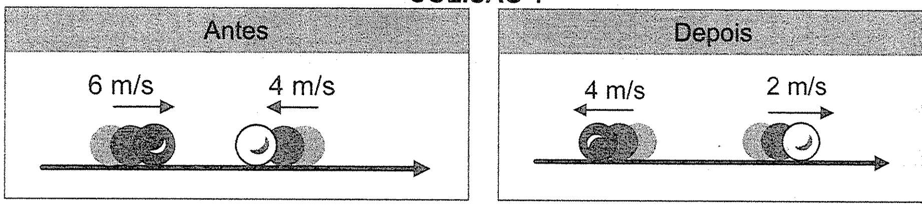
onde $V_{\text{relativa-após}}$ é a velocidade relativa entre os corpos após a colisão, e $V_{\text{relativa-antes}}$ é a velocidade relativa entre os corpos antes da colisão.

O coeficiente de restituição é geralmente considerado constante, para cada par de materiais e geometrias envolvidas na colisão.

As colisões elásticas possuem coeficiente de restituição e = 1, conforme demonstrado no apêndice 1, página 541. As colisões parcialmente elásticas têm coeficiente de restituição no intervalo $0<e<1$. Já as colisões inelásticas têm coeficiente de restituição e = 0 pelo fato de que, sendo uma colisão bate-gruda, os corpos permanecem juntos após a colisão e, assim, a velocidade relativa entre eles passa a ser nula ($V_{rel\ após} = 0$).

A seguir, faremos uma aplicação numérica para melhor esclarecer como se calcula o coeficiente de restituição em colisões unidimensionais:

COLISÃO 1

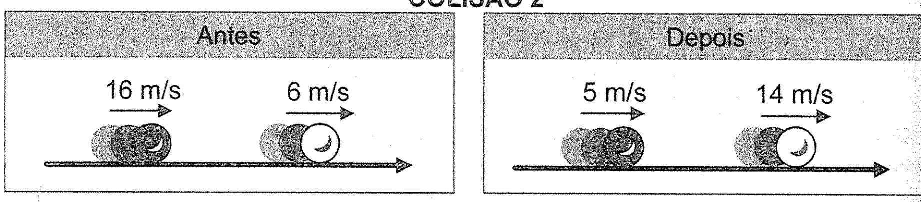


O coeficiente de restituição na colisão 1 acima vale:

$$e_1 = \frac{|V_{relativa-após}|}{|V_{relativa-antes}|} = \frac{4+2}{4+6} = 0,6$$

Estando o coeficiente de restituição encontra-se no intervalo $0 < e_1 < 1$, trata-se de uma colisão parcialmente elástica e portanto, houve dissipação de energia mecânica durante a colisão: $\Sigma Ecin_{\ antes} > \Sigma Ecin_{\ depois}$.

COLISÃO 2

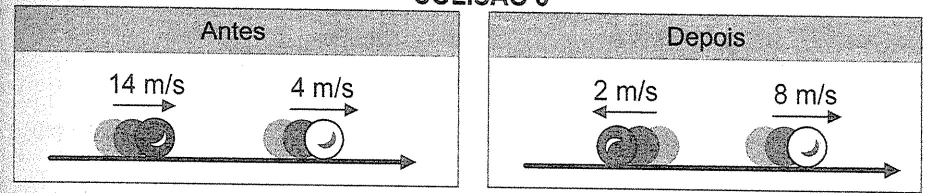


O coeficiente de restituição na colisão 2 acima vale:

$$e_2 = \frac{|V_{relativa-após}|}{|V_{relativa-antes}|} = \frac{14-5}{16-6} = 0,9$$

Estando o coeficiente de restituição encontra-se no intervalo $0 < e_2 < 1$, trata-se de uma colisão parcialmente elástica. Adicionalmente, sendo $e_2 > e_1$, podemos também afirmar que na colisão 2 houve menor perda percentual de energia mecânica do que na colisão 1. Para saber mais sobre essa perda percentual de Emec, durante as colisões, veja a questão 56 ítem b, página 237.

COLISÃO 3



O coeficiente de restituição na colisão 3 acima vale:

$$e_3 = \frac{|V_{relativa-após}|}{|V_{relativa-antes}|} = \frac{2+8}{14-4} = 1$$

Como o coeficiente de restituição vale e = 1, trata-se de uma colisão elástica, e portanto, ocorre conservação da energia mecânica (energia cinética total) do sistema, ou seja: $\Sigma Ecin_{\ antes} = \Sigma Ecin_{\ depois}$

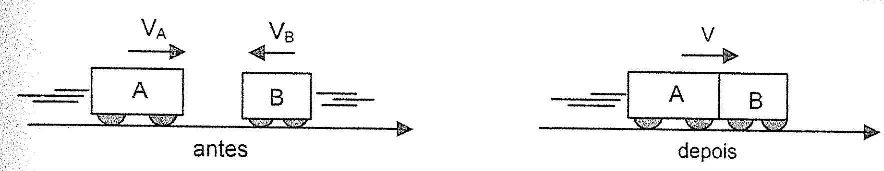
Podemos então resumir da seguinte maneira as propriedades das colisões:

Colisão elástica	Parcialmente elástica	Inelástica
• $\Sigma Q_{\ antes} = \Sigma Q_{\ depois}$ • $\Sigma Ecin_{antes} = \Sigma Ecin_{depois}$ • e = 1	• $\Sigma Q_{\ antes} = \Sigma Q_{\ depois}$ • $\Sigma Ecin_{antes} > \Sigma Ecin_{depois}$ • 0 < e < 1	• $\Sigma Q_{\ antes} = \Sigma Q_{\ depois}$ • $\Sigma Ecin_{antes} > \Sigma Ecin_{depois}$ • e = 0 • bate-gruda

Exemplo Resolvido 15 : A figura mostra duas caixas A e B, de massas 4 kg e 2 kg, que se movem com velocidades 9 m/s e 12 m/s, em sentidos opostos até se chocarem inelasticamente. Determine:

a) A velocidade do conjunto "caixa A + caixa B" após esse choque.

b) A perda de energia mecânica do sistema, devido à colisão



Solução:

a) Como o choque é inelástico, as caixas permanecem unidas após a colisão. Além disso, qualquer que seja o tipo de choque, a quantidade de movimento do sistema deve permanecer inalterada após o impacto. Assim, temos:

$$\Sigma Q_{\ antes} = \Sigma Q_{\ depois}$$

$$(Q_A + Q_B)_{antes} = (Q_A + Q_B)_{depois}$$
$$4.(+9) + 2.(-12) = 4V + 2V$$
$$V = 2 \text{ m/s}$$

Assim, concluímos que o conjunto se moverá com uma velocidade de 2 m/s para a direita, após a colisão.

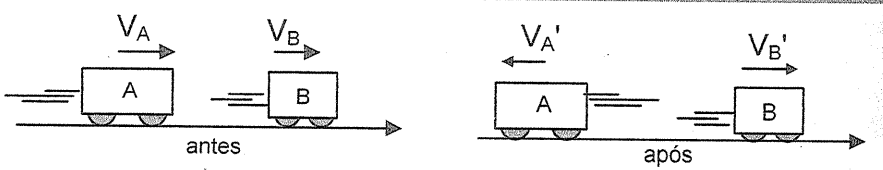
b) Para determinar a perda de energia mecânica do sistema, é suficiente calcular a energia cinética do sistema antes e após a colisão, e verificar o quanto ela variou. Veja:

$$Emec_{\text{sist-antes}} = \frac{m_A.V_A^2}{2} + \frac{m_B.V_B^2}{2} = \frac{4.9^2}{2} + \frac{2.12^2}{2} = 162 + 144$$
$$Emec_{\text{sist-antes}} = 306 \text{ joules}$$
$$Emec_{\text{sist-após}} = \frac{m_A.V_A^2}{2} + \frac{m_B.V_B^2}{2} = \frac{4.2^2}{2} + \frac{2.2^2}{2} = 8 + 4 = 12$$
$$Emec_{\text{sist-após}} = 12 \text{ joules}$$

$$\Delta Emec = Emec_{final} - Emec_{inicial} = 12 - 306 = -294 \text{ J}$$

O resultado mostra que o sistema perdeu 294 joules de energia mecânica, que foi convertida em energia térmica (calor) e energia sonora (som) durante o impacto.

Exemplo Resolvido 16 : A figura mostra duas caixas A e B, de massas M e 3M, que se movem com velocidades 12 m/s e 2 m/s. Determine a velocidade adquirida pelas caixas A e B após sofrerem uma colisão elástica.



Solução: como não sabemos o sentido do movimento da caixa A após a colisão, "arbitramos" o sentido mostrado na figura acima.

Pela conservação da QDM, vem:

$$\Sigma Q_{antes} = \Sigma Q_{depois}$$
$$M.V_A + 3M.V_B = M.(-V_A') + 3M.V_B'$$
$$V_A + 3.V_B = -V_A' + 3.V_B' \Rightarrow 3.V_B' - V_A' = 12 + 3.2$$
$$3.V_B' - V_A' = 18 \qquad \textbf{(eq44)}$$

- Sendo a colisão elástica, tem-se e = 1:

$$e = \frac{|V_{\text{relativa-após}}|}{|V_{\text{relativa-antes}}|} = \frac{V_A' + V_B'}{12 - 2} = 1 \Rightarrow V_A' + V_B' = 10 \qquad \textbf{(eq45)}$$

Resolvendo o sistema de equações eq44 e eq45, vem:

$$V_A' = 3 \text{ m/s} \quad e \quad V_B' = 7 \text{ m/s}.$$

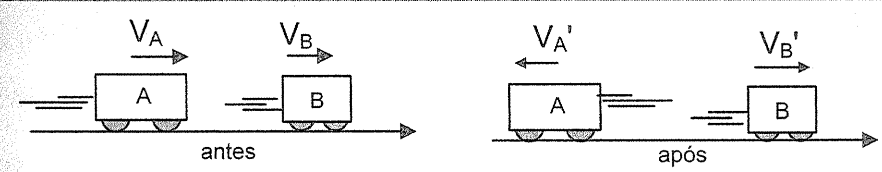
Considerando que nenhuma das velocidades encontradas foi negativa, isso indica que os sentidos que arbitramos para as velocidades após a colisão estão corretos.

É fácil verificar que a energia mecânica do sistema é conservada na colisão elástica:

$$Emec_{\text{sist-antes}} = \frac{m_A.V_A^2}{2} + \frac{m_B.V_B^2}{2} = \frac{(M).12^2}{2} + \frac{(3M).2^2}{2} = 78M \text{ joules}$$

$$Emec_{\text{sist-após}} = \frac{m_A.V_A^2}{2} + \frac{m_B.V_B^2}{2} = \frac{(M).3^2}{2} + \frac{(3M).7^2}{2} = 78M \text{ joules}$$

Exemplo Resolvido 17: A figura mostra duas caixas A e B, de massas M e 3M, que se movem com velocidades 15 m/s e 5 m/s. Determine a velocidade adquirida pelas caixas A e B após sofrerem uma colisão parcialmente elástica, com coeficiente de restituição e = 0,2.



Solução: como não sabemos o sentido do movimento da caixa A após a colisão, "arbitramos" o sentido mostrado na figura acima.

Pela conservação da QDM, vem:

$$\Sigma Q_{antes} = \Sigma Q_{depois}$$
$$M.V_A + 3M.V_B = M.(-V_A') + 3M.V_B'$$
$$V_A + 3.V_B = -V_A' + 3.V_B'$$
$$3.V_B' - V_A' = 15 + 3.5$$
$$3.V_B' - V_A' = 30 \qquad \textbf{(eq46)}$$

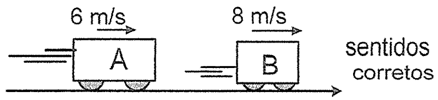
Sendo o coeficiente de restituição e = 0,2, vem:

$$e = \frac{|V_{\text{relativa-após}}|}{|V_{\text{relativa-antes}}|} = \frac{V_A' + V_B'}{15 - 5} = 0,2 \Rightarrow V_A' + V_B' = 2 \qquad \textbf{(eq47)}$$

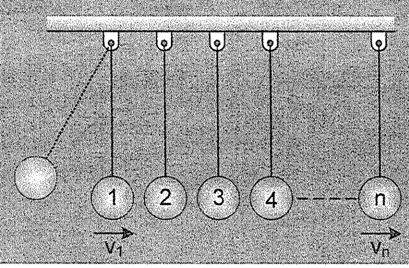
Resolvendo o sistema de equações eq46 e eq47, vem:

$V_A' = -6$ m/s e $V_B' = 8$ m/s.

O sinal negativo encontrado para V_A' indica que acertamos o módulo da velocidade final do móvel A mas erramos apenas o sentido dela. Devemos, assim, meramente inverter o sentido da velocidade final da caixa A na figura:



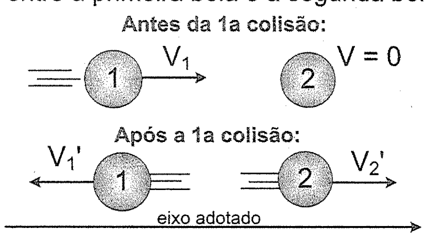
Exemplo Resolvido 18: A figura mostra n esferas de mesma massa m suspensas em fila por fios de comprimentos iguais, com as esferas quase se tocando. Se a esfera 1 é abandonada da posição tracejada e acerta a esfera 2 com velocidade v_1, o prof. Renato Brito pede que você determine a velocidade v_n da n-ésima esfera imediatamente após ser acertada pela esfera que a antecede, pela primeira vez. O coeficiente de restituição entre os choques vale **e**.



Solução:

O prof. Renato Brito chama a atenção do aluno para o fato de que as bolas não estão em contato entre si, como ocorre em muitos problemas semelhantes.

Assim, analisaremos as colisões sucessivas ocorridas entre cada par de bolas, ou seja, entre as bolas 1 e 2, depois entre 2 e 3 e assim por diante. Comecemos estudando a colisão a entre a primeira bola e a segunda bola:



Da definição de coeficiente de restituição **e**, temos:

$$e = \frac{V_{\text{relativa após}}}{V_{\text{relativa antes}}} = \frac{V_1' + V_2'}{V_1} = e \quad \Rightarrow \quad V_1' + V_2' = e.V_1$$

$$V_1' = e.V_1 - V_2' \qquad \textbf{(eq48)}$$

Da conservação da QDM na colisão, temos:

$$\Sigma Q_{\text{antes}} = \Sigma Q_{\text{depois}} \Rightarrow +M.V_1 + 0 = -M.V_1' + M.V_2'$$

$$V_2' = V_1 + V_1' \qquad \textbf{(eq49)}$$

Substituindo eq48 em eq49, vem:

$$V_2' = V_1 + (e.V_1 - V_2') \Rightarrow V_2' = V_1.\left(\frac{e+1}{2}\right) \qquad \textbf{(eq50)}$$

Assim, quando a 1ª bola bate na 2ª bola, esta última sai com a velocidade determinada acima.

Analisando o problema de forma recorrente, percebemos que as primeiras colisões entre cada bola e a bola que a sucede sempre têm as mesmas características em comum **:**

- A bola que vai chegando sempre colide com outra bola de mesma massa e inicialmente em repouso;
- O coeficiente de restituição em cada colisão vale **e**;

Assim, quando a bola 2 colidir com a bola 3, a velocidade de saída da bola 3 pode ser calculada da mesma forma, através de um sistema de equações semelhante a eq48 e eq49, o que levará ao resultado abaixo, análogo ao encontrado na relação eq50:

$$V_3' = V_2'.\left(\frac{e+1}{2}\right) \qquad \textbf{(eq51)}$$

Substituindo eq50 em eq51, temos:

$$V_3' = V_2'.\left(\frac{e+1}{2}\right) = V_1.\left(\frac{e+1}{2}\right).\left(\frac{e+1}{2}\right) = V_1.\left(\frac{e+1}{2}\right)^2$$

Por analogia, para as demais colisões, encontraremos:

$$V_4' = V_3'.\left(\frac{e+1}{2}\right) = V_1.\left(\frac{e+1}{2}\right)^2.\left(\frac{e+1}{2}\right) = V_1.\left(\frac{e+1}{2}\right)^3$$

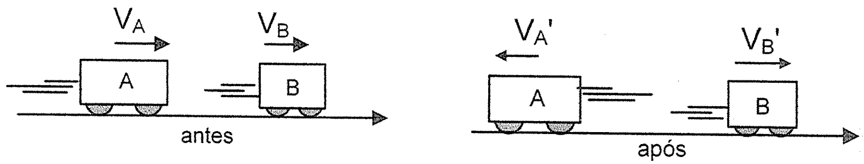
$$V_5' = V_4'.\left(\frac{e+1}{2}\right) = V_1.\left(\frac{e+1}{2}\right)^3.\left(\frac{e+1}{2}\right) = V_1.\left(\frac{e+1}{2}\right)^4$$

Assim, após n−1 colisões, a bola de ordem n sairá, portanto, com velocidade com velocidade Vn dada por:

$$V_n = v_1.\left(\frac{e+1}{2}\right)^{(n-1)}$$

2.21 – COLISÃO ELÁSTICA UNIDIMENSIONAL ENTRE MASSAS IGUAIS

Considere o caso especial de dois corpos A e B de mesma massa, que se movem sobre uma mesma reta e sofrem uma colisão frontal elástica. A seguir mostraremos que, durante a colisão, esses corpos apenas **trocam de velocidades**, ou seja, a velocidade inicial de um passará a ser a velocidade final do outro, e vice-versa:



Para provar esse fato, devemos mostrar que $V_A' = V_B$ e $V_B' = V_A$

Da conservação da quantidade de movimento na colisão, vem:

$$\Sigma Q_{\,antes} = \Sigma Q_{\,depois} \quad \Rightarrow \quad M.V_A + M.(-V_B) = M.(-V_A') + M.V_B'$$

$$V_A - V_B = V_B' - V_A' \qquad \textbf{(eq52)}$$

Como a colisão é elástica, temos:

$$e = 1 \quad \Rightarrow \quad e = \frac{|\,V_{relativa-após}\,|}{|\,V_{relativa-antes}\,|} = \frac{V_A' + V_B'}{V_B + V_A} = 1$$

$$V_B + V_A = V_B' + V_A' \qquad \textbf{(eq53)}$$

somando membro a membro, as equações eq52 e eq53, vem:

$$2V_A = 2V_B' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_B' = V_A}$$

Substituindo em eq52, vem $\mathbf{V_A' = V_B}$

Note que a troca de velocidades só ocorre se os corpos tiverem massas iguais e se a colisão for elástica unidimensional. Para saber o que ocorre caso a colisão seja bidimensional, veja o caso 4 – página 227, bem como a resolução da questão 90 desse capítulo. Você verá que a troca de velocidades ainda continua ocorrendo, sendo que apenas na direção normal (n).

Adicionalmente, perceba que o que ocorre não é uma mera troca dos módulos das velocidades das partículas, mas sim, uma troca dos vetores velocidades (direção, sentido e valor).

Essa propriedade é muito útil e agiliza bastante a resolução de problemas. Veja a seguir alguns exemplos de colisões elásticas onde os móveis de mesma massa apenas trocam de velocidades durante o impacto:

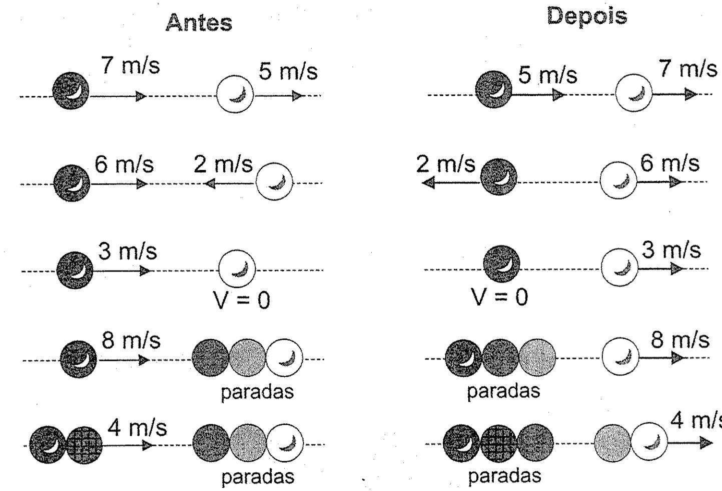


Figura 52 – massas iguais, colisão elástica unidimensional, as bolas trocam de velocidades

Exemplo Resolvido 19: Um conjunto de bolas de aço idênticas, cada uma com massa m, é suspenso por um conjunto de fios cujo espaçamento é igual ao diâmetro das esferas, como mostra a Figura 53. Se uma bola for deslocada e solta, ela colidirá com a fila de bolas estacionárias e, imediatamente, uma bola se deslocará da extremidade oposta com velocidade igual. Se duas bolas forem deslocadas e soltas, duas bolas saltarão na outra extremidade; se três bolas forem deslocadas, o mesmo número de bolas se moverá na outra extremidade e assim por diante. Em cada caso, a velocidade adquirida pelas bolas que saltam na outra extremidade é essencialmente igual à velocidade inicial com a qual o primeiro conjunto de bolas colide com as bolas estacionárias restantes.

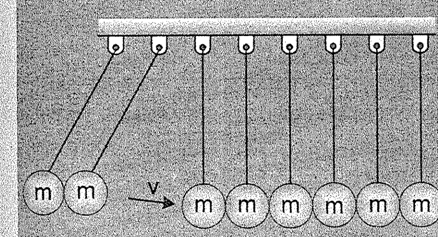


Figura 53

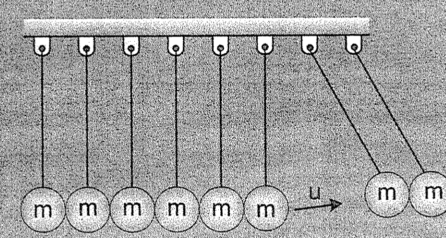


Figura 54

Explique por que esses resultados são observados; em particular, por que, quando duas bolas são liberadas inicialmente, não sai apenas uma bola da outra extremidade com velocidade duas vezes maior que aquela associada ao conjunto inicial de duas bolas antes da colisão.

Solução: Suponha que, inicialmente, n bolas sejam deslocadas e abandonadas, colidindo com as bolas restantes com velocidade inicial v (Figura 53). É muito complexo determinar quais forças atuam para transmitir a quantidade de movimento das bolas que colidem de uma extremidade da fila de bolas estacionárias à outra.

Mas, de qualquer forma, a quantidade de movimento do sistema deve ser conservada na interação da colisão, e se a colisão for elástica, o mesmo deve ocorrer à energia cinética.

Admitindo que um número N de bolas salte na outra extremidade (Figura 54) com velocidade u, imediatamente após a colisão, a conservação da quantidade de movimento do sistema nos permite escrever:

$$\Sigma Q_{antes} = \Sigma Q_{depois} \Rightarrow n.m.v = N.m.u \Rightarrow n^2.m^2.v^2 = N^2.m^2.u^2 \qquad \textbf{(eq54)}$$

Da conservação da energia cinética total, temos:

$$\Sigma Ecin_{antes} = \Sigma Ecin_{depois} \Rightarrow n.\frac{m.v^2}{2} = N.\frac{m.u^2}{2} \qquad \textbf{(eq55)}$$

Dividindo, membro a membro, as relações eq54 e eq55, vem:

$$\frac{n^2m^2v^2}{n.m.v^2} = \frac{N^2m^2u^2}{N.mu^2} \Rightarrow N = n \qquad \textbf{(eq56)}$$

Substituindo-se eq56 em eq55, vem $u = v$.

Podemos ir além e tentar analisar alguns casos mais interessantes, como o proposto abaixo na Figura 55, no qual uma bola de massa 6M se aproxima de um conjunto de bolas estacionárias, todas encostadas entre si, e colide elasticamente. A configuração do sistema após a colisão também é mostrada na Figura 55.

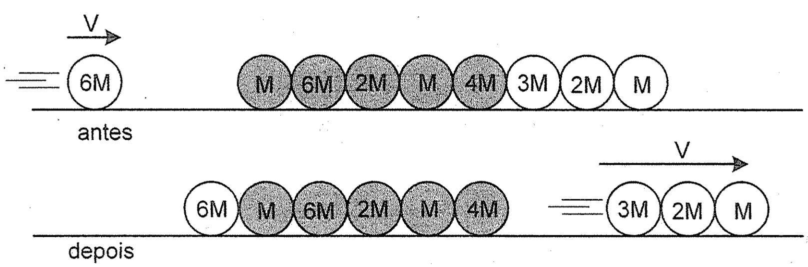


Figura 55 –colisão elástica entre bolas que estão toda encostadas entre si.

Após a colisão, as três bolas da ponta direita se movem com a mesma velocidade inicial v da bola que colidiu com o conjunto de bolas estacionárias.

Uma rápida inspeção nos valores das massas das bolas e das velocidades nos permite verificar que a situação final proposta satisfaz às condições de conservação da quantidade de movimento do sistema e da sua energia cinética total.

$$Q_{sist\ antes} = 6M.V$$

$$Q_{sist\ depois} = 3M.V + 2M.V + M.V = (3M + 2M + M).V = 6M.V$$

$$Ecin_{total\ antes} = \frac{6M.V^2}{2}$$

$$Ecin_{total\ depois} = \frac{3M.V^2}{2} + \frac{2M.V^2}{2} + \frac{M.V^2}{2} = \frac{(3M+2M+M).V^2}{2} = \frac{6M.V^2}{2}$$

Por inspeção, observando os cálculos acima, acabamos percebendo que, para deduzir quais bolas descolarão na outra extremidade após a colisão, podemos impor duas condições:

- **Condição 1:** a velocidade das bolas que descolam, após a colisão, deve ser igual à velocidade inicial da bola que colide com o sistema;
- **Condição 2:** a soma das massas das bolas que descolam, após a colisão, deve ser igual à massa da bola que colide com o sistema.

Impondo essas duas condições, conseguimos determinar a configuração final do sistema após a colisão que satisfará tanto a conservação da quantidade de movimento do sistema quanto a sua energia cinética.

Será que você é capaz de determinar quais bolas descolarão do sistema abaixo, quando a bola de massa 10M colide elasticamente com as demais bolas estacionárias ?

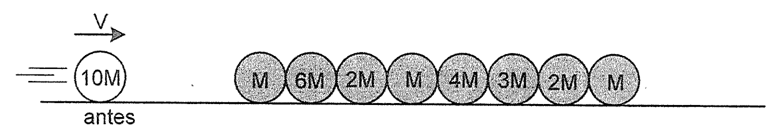


Figura 56

Ora, pela condição 2 acima, como a massa da bola que colide no sistema vale 10M, a soma das massas que se moverão, após a colisão também deverá ser 10M. Assim, deduzimos que a configuração final do sistema deverá ser a ilustrada na Figura 57.

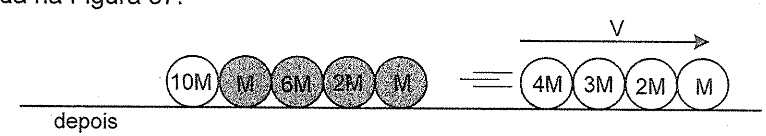


Figura 57

Inspecionando mentalmente os valores das massas e das velocidades, nas Figuras 56 e 57, verificamos prontamente a conservação da quantidade de movimento e da energia cinética do sistema.

Nesse caso, percebemos que não há como satisfazer a condição 2, tendo em vista que a massa da bola que colide com o sistema vale 8M, mas não há como a soma das massas das bolas que descolam do sistema após a colisão totalizar 8M. Nesse caso, como o sistema reage ?

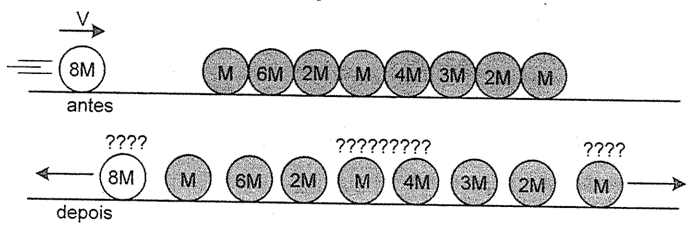


Figura 58

Nesse caso, após a colisão, as bolas se espalham, de forma que nenhuma delas permanecerá estacionária, como havia ocorrido nos casos anteriores. Algumas vão para frente, outras vão para trás com velocidades distintas e, nesse caso, teremos muito mais incógnitas do que equações disponíveis para deduzir a configuração exata do sistema após essa colisão, o que torna esse caso de pouco interesse teórico e prático.

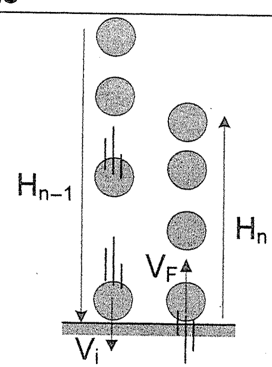
2.22 – PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS EM COLISÕES

Uma bola cai verticalmente do repouso e efetua uma sucessão de colisões com o solo, subindo e descendo.

Inicialmente bola cai de uma altura H_1, colide com o solo e sobe novamente até uma altura H_2, de onde caindo novamente subindo até uma altura H_3 e assim por diante.

A seguir, determinaremos a relação entre duas alturas consecutivas H_{n-1}, H_n e o coeficiente de restituição **e** desse choque.

Seja V_i a velocidade da bola logo antes do impacto. Pela conservação da energia mecânica durante a queda da bola, temos:



$$M.g.H_{n-1} = M.V_i^2/2 \quad \Rightarrow \quad V_i = \sqrt{2.g.H_{n-1}}$$

Seja V_F a velocidade da bola logo após o impacto. Pela conservação da energia mecânica durante a subida da bola, temos:

$$M.g.H_n = M.V_F^2/2 \quad \Rightarrow \quad V_F = \sqrt{2.g.H_n}$$

Pela definição de coeficiente de restituição, vem:

$$e = \frac{|V_{relativa-após}|}{|V_{relativa-antes}|} = \frac{V_F}{V_i} = \frac{\sqrt{2.g.H_n}}{\sqrt{2.g.H_{n-1}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = \sqrt{\frac{H_n}{H_{n-1}}}} \qquad \textbf{(eq57)}$$

Dessa forma, vemos que duas alturas sucessivas H_{n-1} e H_n se relacionam por:

$$\boxed{H_n = H_{n-1} \,.\, e^2} \qquad \textbf{(eq58)}$$

Propriedade das alturas: a relação eq58 mostra que sucessivas alturas H_1, H_2, H_3,...H_n formam uma progressão geométrica de razão e^2.

Sejam T_1, T_2, T_3, ... T_n os sucessivos tempos de queda dessa bola, em seu movimento de sobe-desce. Determinaremos a relação entre dois tempos de queda consecutivos T_{n-1} e T_n.
Como se trata de uma queda livre a partir do repouso, temos:

$$H_n = \frac{g.T_n^2}{2} \quad \textbf{(eq59)} \qquad \text{e} \qquad H_{n-1} = \frac{g.T_{n-1}^2}{2} \quad \textbf{(eq60)}$$

Dividindo, membro a membro, as relações eq59 e eq60, vem:

$$\frac{H_n}{H_{n-1}} = \frac{g.T_n^2}{g.T_{n-1}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_n}{T_{n-1}} = \sqrt{\frac{H_n}{H_{n-1}}}, \quad \text{usando eq57, vem:} \quad \boxed{\frac{T_n}{T_{n-1}} = e} \qquad \textbf{(eq61)}$$

Dessa forma, vemos que dois tempos de queda sucessivos T_{n-1} e T_n se relacionam por:

$$\boxed{T_n = T_{n-1} \,.\, e} \qquad \textbf{(eq62)}$$

Propriedade dos tempos: a relação eq62 mostra que os sucessivos tempos de queda T_1, T_2, T_3,...T_n formam uma progressão geométrica de razão e.

As propriedades das alturas e dos tempos mostradas acima são muito úteis na resolução de problemas envolvendo colisões, conforme veremos adiante.

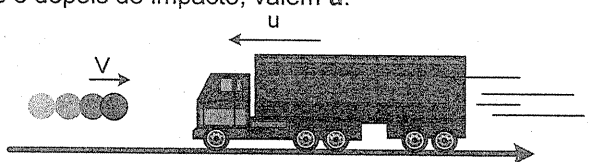
2.23 – Caso Especial: Colisão Unidimensional em que uma das massas é muito maior do que a outra.

O que ocorre quando uma pequena massa colide elasticamente com outra massa milhares de vezes maior ? Para estudarmos essa situação, consideremos uma colisão entre uma bola de tênis e um caminhão.

A seguir, estudaremos tanto o caso em que eles se movem em sentidos opostos, quanto o caso em que eles se movem no mesmo sentido.

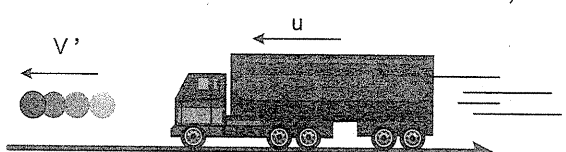
Caso 1: os corpos se movem em sentidos opostos

Ora, sendo a massa do caminhão milhares de vezes maior que a massa da bola de tênis, é intuitivo o fato de que a velocidade do caminhão não será alterada durante esse impacto, de forma que admitiremos que as velocidades do caminhão, antes e depois do impacto, valem **u**.



antes

Seja V' a velocidade da bola após o impacto, conforme a figura abaixo, com V' > u (após o impacto, os corpos se afastam mutuamente):



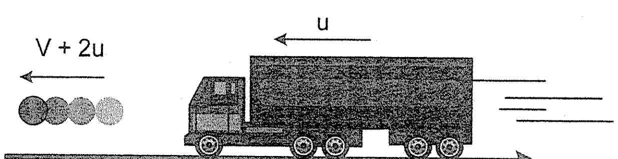
depois

Sendo a colisão elástica (e = 1), podemos escrever:

$$e = \frac{V_{rel.apos}}{V_{rel.antes}} = \frac{V' - u}{V + u} = 1 \Rightarrow V' - u = V + u$$

$$\boxed{V' = V + 2u}$$

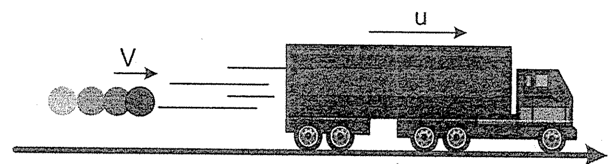
Assim, após o impacto, as velocidades da bola e do caminhão são mostradas na figura abaixo:



depois

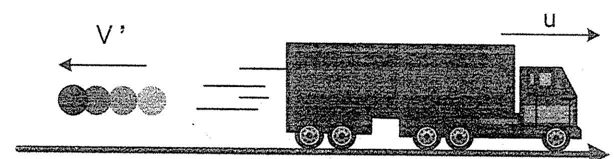
Caso 2: os corpos se movem no mesmo sentido

A mesma análise pode ser feita para o caso em que a bola de tênis e o caminhão se movem no mesmo sentido. Mais uma vez, sendo a massa do caminhão milhares de vezes maior que a massa da bola de tênis, admitiremos que as velocidades do caminhão, antes e após o impacto, valham **u**.



antes

A figura acima mostra a fase de aproximação entre a bola e o caminhão (antes do impacto), em que temos necessariamente V > u. Seja V' a velocidade da bola após o impacto, conforme a figura abaixo:



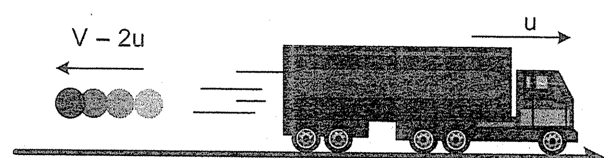
depois

Sendo a colisão elástica (e = 1), podemos escrever:

$$e = \frac{V_{rel.apos}}{V_{rel.antes}} = \frac{V' + u}{V - u} = 1 \Rightarrow V' + u = V - u$$

$$\boxed{V' = V - 2u}$$

Assim, após o impacto, as velocidades da bola e do caminhão são mostradas na figura abaixo:

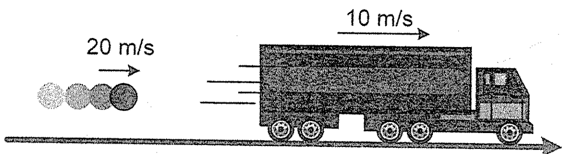


depois

Exemplo Resolvido 20 (UECE): Para Transportar uma carga extremamente pesada, certo caminhão trafega a uma velocidade de 10 m/s. Um rapaz à beira da estrada brinca com uma bola de tênis. Quando o caminhão passa, o rapaz resolve jogar a bola na traseira do mesmo. Sabendo que a bola atinge a traseira do caminhão perpendicularmente, com velocidade de 20 m/s, em relação ao solo, qual a velocidade horizontal final da bola após o choque, considerado perfeitamente elástico ?

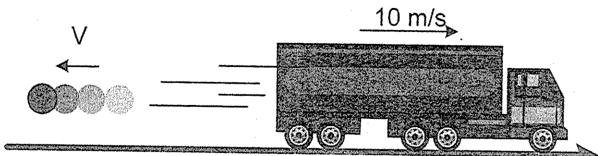
a) 10 m/s b) 20 m/s c) 30 m/s d) zero

Solução:
A figura a seguir mostra a situação que antecede o impacto.



antes

Sendo a massa do caminhão milhares de vezes maior que a massa da bola de tênis, admitiremos que sua velocidade permaneça constante igual a 10 m/s nesse episódio. Seja V a velocidade da bola após o impacto, conforme a figura abaixo:



depois

Sendo a colisão elástica (e = 1), podemos escrever:

$$e = \frac{V_{rel.apos}}{V_{rel.antes}} = \frac{V+10}{20-10} = 1 \quad \Rightarrow \quad V + 10 = 20 - 10 \quad \therefore \quad V = 0$$

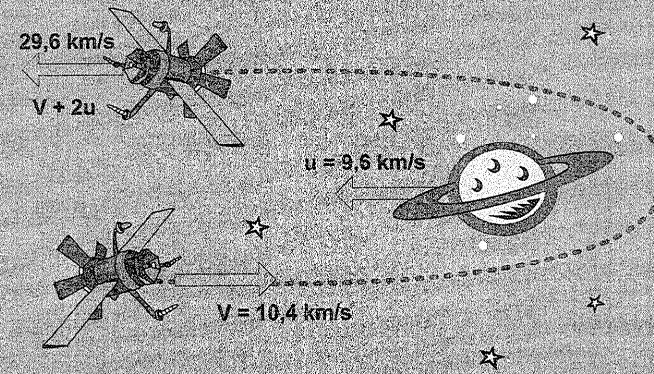
Assim, chegamos ao resultado surpreendente de que a bola pára (V = 0), logo após colidir com o caminhão, caindo verticalmente em seguida, até chegar ao solo.

2.24 - Leitura Complementar
O EFEITO DA BALADEIRA GRAVITACIONAL

A figura mostra o planeta Saturno se movendo com uma velocidade orbital (em relação ao Sol) igual a u = 9,6 km/s. A massa de Saturno é igual a 5,69 x 10^{26} kg. Uma nave espacial com massa de 825 kg se aproxima de Saturno, movendo-se inicialmente com uma velocidade de V = 10,4 km/s. A atração gravitacional de Saturno *(uma força conservativa)* faz com que a nave mude de direção e retome em sentido oposto.

Neste caso, a "colisão" não é um impacto, mas sim uma interação gravitacional. Podemos supor que a velocidade de Saturno seja essencialmente constante durante a interação porque sua massa é muito maior do que a massa da nave. Logo, podemos imaginar o problema como uma colisão elástica (força gravitacional é conservativa) em linha reta (unidimensional), semelhante ao caso 2 recém estudado na seção 17.

Aplicando conservação da quantidade de movimento e conservação da energia mecânica do sistema nave + planeta, conclui-se que a nave voltará com uma velocidade V + 2u = 29,6 km/s (veja caso 2, seção 17), ou seja, sua velocidade praticamente triplicará nesse exemplo específico e sua energia cinética aumentará por um fator $(29,6 / 10,4)^2$ = 8,1 neste processo.



A razão para esse aumento aparentemente misterioso de rapidez é que Saturno não está parada mas, sim, se movendo na sua órbita em torno do Sol. Se Saturno estivesse em repouso, a velocidade da nave se inverteria, mas o seu módulo permaneceria essencialmente constante.

Nesse efeito de ginástica celestial, a nave espacial sofre um aumento de velocidade a partir de quê ? Sua energia cinética aumenta do nada ? Claro que não. Conforme vimos nos cálculos da seção 17, a conservação de energia esta implícita nos cálculos. A energia cinética de saturno, a rigor, precisa ter diminuído para que a energia cinética da nave espacial tenha aumentado. Entretanto, sendo, a massa de saturno, 10^{23} maior que a massa da nave espacial, a redução da velocidade de Saturno é imperceptível.

Este exemplo ilustra uma versão simplificada do efeito da atiradeira gravitacional, usado para fornecer um impulso auxiliar para uma nave espacial (Na realidade, o movimento de uma nave espacial não é retilíneo, como foi suposto neste problema.). A nave espacial Voyager 2, lançada em 1977, usou o efeito da baladeira gravitacional em seu vôo passando nas vizinhanças de Júpiter, Saturno e Urano. Graças à energia cinética adquirida desse modo, a Voyager 2 atingiu o planeta Netuno em 1989; caso não fosse usado o efeito da baladeira gravitacional, essa nave atingiria Netuno somente no ano de 2008.

2.25 – ESTUDO DAS COLISÕES BIDIMENSIONAIS

Nessa seção, estudaremos as colisões bidimensionais. Para fins didáticos, trataremos primeiramente das colisões com anteparos fixos (parede, chão etc.). Em seguida, traremos do caso mais geral da colisão entre dois corpos rígidos livres.

• CASO 1: COLISÃO BIDIMENSIONAL COM UM ANTEPARO FIXO

Considere uma bola rígida de massa m que colide com uma superfície plana lisa, rígida e fixa conforme a Figura 59. Seja n o eixo normal a essa superfície e t o eixo tangencial à mesma. Esse par de eixos define o plano de incidência, que contém as velocidade inicial V_i e a velocidade final V_F da bola.

Quando a bola colide com essa superfície lisa, troca com esta um par de forças impulsivas F que age na direção normal n, levando a uma variação da quantidade de movimento apenas na direção normal. A ausência de forças impulsivas na direção tangencial t garante que a quantidade de movimento do sistema deve se conservar nessa direção.
Assim, pela conservação da quantidade de movimento na direção tangencial, podemos escrever:

$$m.(V_i)_t = m.(V_F)_t \quad \Rightarrow \quad m.V_i.\cos\alpha_i = m.V_F.\cos\alpha_F \qquad \textbf{(eq63)}$$

Em colisões bidimensionais, o coeficiente de restituição **e** relaciona a velocidade relativa entre o corpo e o anteparo, antes e após a colisão, tomando-se apenas as componentes na direção normal n. Assim, pela definição de coeficiente de restituição, vem:

$$e = \frac{|V_{rel-após}|_n}{|V_{rel-antes}|_n} = \frac{(V_F)_n}{(V_i)_n} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{V_F.sen\alpha_F}{V_i.sen\alpha_i} \qquad \textbf{(eq64)}$$

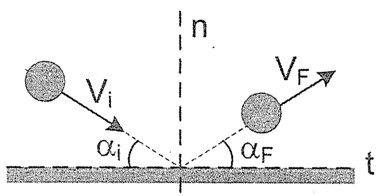


Figura 59

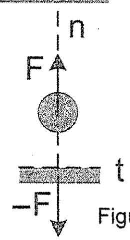


Figura 60

Isolando o valor de V_F / V_i em eq63 e substituindo em eq64, vem:

$$e = \frac{V_F.sen\alpha_F}{V_i.sen\alpha_i} = \frac{\cos\alpha_i.\ sen\alpha_F}{\cos\alpha_F.\ sen\alpha_i} = \frac{tg\alpha_F}{tg\alpha_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{tg\alpha_F = e\ .\ tg\alpha_i} \qquad \textbf{(eq65)}$$

Note que, no caso particular da colisão elástica, temos e = 1, o que implica $\alpha_i = \alpha_F$, isto é, ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão. Era exatamente dessa forma que Isaac Newton demonstrava a lei da reflexão da luz, adotando o

seu modelo corpuscular para a luz segundo o qual ela era composta por um feixe de partículas. A reflexão da luz, segundo esse modelo corpuscular da luz, não passa de uma mera colisão elástica entre essas partículas e a superfície do espelho.

Adicionalmente, note que os resultados obtidos a partir das Figuras 59 e 60, na verdade, não requerem que a superfície plana do anteparo seja horizontal. Qualquer que seja a direção da superfície plana do anteparo, sempre tomamos um eixo normal n a essa superfície e um eixo tangencial a ela e aplicamos os princípios fundamentais:

Princípios Fundamentais em colisões Bidimensionais

- **Na direção tangencial:** não há forças impulsivas agindo nessa direção, de forma que quantidade de movimento do sistema se conserva nessa direção;
- **Na direção normal**: nessa direção, sempre fazemos uso do conceito de coeficiente de restituição, calculando as velocidades relativas entre os corpos antes e depois da colisão, tomando apenas as componentes sobre o eixo normal n.

• CASO 2: COLISÃO ELÁSTICA COM UM ANTEPARO FIXO – ESPELHAMENTO

Considere que uma bola elástica tenha sido lançada obliquamente e descrevia uma trajetória parabólica quando, de repente, colidiu elasticamente com um anteparo fixo. O que ocorrerá à sua trajetória parabólica após essa colisão elástica ? A que distância do anteparo essa bola cairá ?

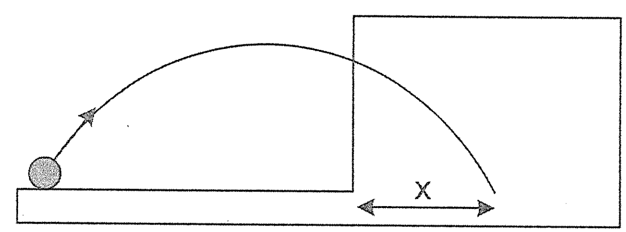


Figura 61

Ora, de acordo com a relação eq64, vimos que quando um corpo livre colide elasticamente com um anteparo plano rígido, essa colisão mais se assemelha ao processo de reflexão da luz num espelho plano, sendo também válida a lei da reflexão ($\alpha_i = \alpha_F$).

Basicamente, o que ocorre é que quando o corpo incide no anteparo fixo com velocidade inicial V (Figura 62), sua componente tangencial V_t se conserva em direção, sentido e valor, durante a colisão (Figuras 63 e 64), ao passo que sua componente normal V_n apenas inverte o seu sentido (Figuras 63 e 64) sem mudança em seu módulo, visto que se trata de uma colisão elástica (e = 1).

Dessa forma, os vetores que representam a velocidade do corpo antes e depois da colisão elástica são simétricos em relação à superfície plana do anteparo fixo, como se um fosse a imagem do outro conjugada por um espelho plano (Figura 65).

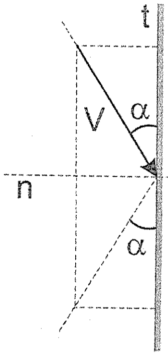


Figura 62

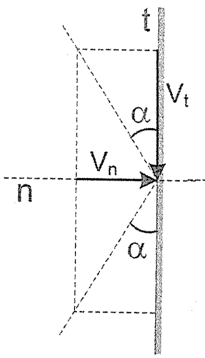


Figura 63

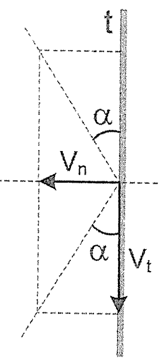


Figura 64

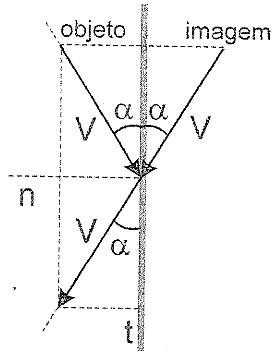


Figura 65

Assim, para determinar a trajetória que o corpo seguirá, após colidir elasticamente com o anteparo fixo, é suficiente rebater o trecho posterior da trajetória original em torno do anteparo.

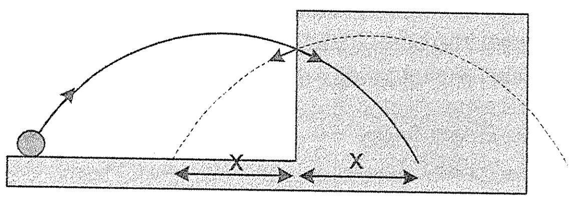


Figura 66 – Espelhamento da Trajetória

Logicamente, esse rebatimento da trajetória é uma conseqüência do fato de que, quando a bola colide elasticamente com o anteparo fixo, sua velocidade é meramente rebatida em relação ao anteparo, conforme a Figura 65.

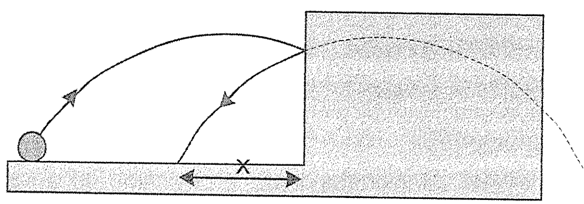


Figura 67

Essa propriedade do espelhamento é muito útil na resolução de problemas mais elaborados envolvendo colisões elásticas, tais como as questões 75, 76 e 77 página 242.

- **CASO 3: COLISÃO BIDIMENSIONAL COM UM ANTEPARO MÓVEL**

Para entender na prática como equacionar esse tipo de colisão, leia com atenção o exemplo resolvido abaixo.

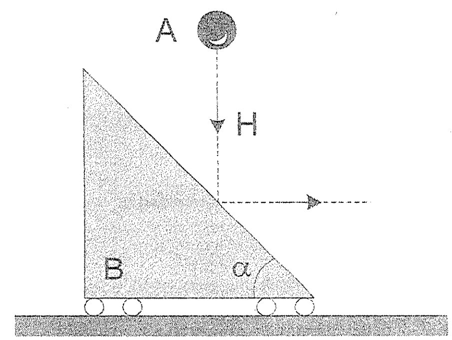
Exemplo Resolvido 21 : Uma bola de A de massa **m** é abandonada do repouso de uma altura H acima um prisma B de massa **M** também inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal lisa. O prisma encontra-se apoiado sobre roletes e é livre para se mover na horizontal. Sabendo que a velocidade da bola, após a colisão, aponta na horizontal para a direita, o prof. Renato Brito pergunta:

a) Qual o coeficiente de restituição **e** dessa colisão em função de **M**, **m** e α ?

b) Qual a velocidade de recuo do prisma B, após a colisão ?

c) Se a colisão for elástica, a bola ricocheteará horizontalmente após a colisão, caso α = 45° ?

d) Qual deveria ser o coeficiente de restituição desse choque a fim de que a bola ricocheteasse horizontalmente, após colidir com um prisma de inclinação α = 30° e massa igual à massa da bola (M = m) ?



Solução:

a) Seja V_o a velocidade vertical da bola logo antes de se chocar com o prisma, e V_1 a velocidade da bola logo após colidir com o prisma e ser rebatida horizontalmente, como mostra a Figura 68A. Seja V_2 a velocidade de recuo do prisma após o impacto. Todas as velocidade são tomadas em relação à Terra.

Como, durante a colisão, a bola só sofre forças impulsivas na direção normal n (Figura 68B), sua quantidade de movimento necessariamente se conserva na direção tangencial t, o que nos permite escrever:

$$m.(V_0)_t = m.(V_1)_t \quad \Rightarrow \quad m.V_o.\text{sen}\alpha = m.V_1.\cos\alpha \quad \textbf{(eq66)}$$

O sistema bola + prisma está livre da ação de forças externas na direção horizontal. Assim, a quantidade de movimento horizontal desse sistema se conserva:

$$\Sigma Qx_{antes} = \Sigma Qx_{depois} \Rightarrow 0 + 0 = -M.V_2 + m.V_1 \Rightarrow \boxed{M.V_2 = m.V_1} \quad \textbf{(eq67)}$$

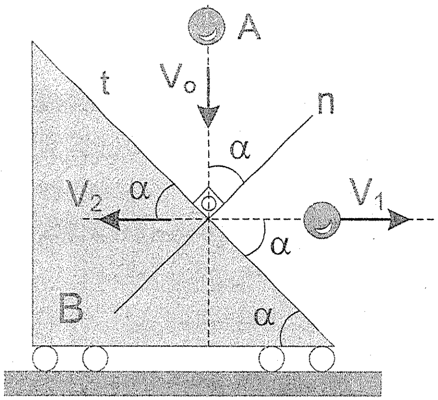


Figura 68A

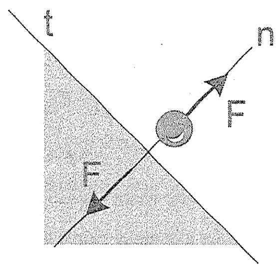


Figura 68B

Em seguida, aplicamos o conceito de coeficiente de restituição **e**, determinando as velocidades relativas entre a bola e o prisma, antes e após a colisão, tomando apenas as componentes das velocidades na direção normal n:

$$e = \frac{|V_{rel-após}|_n}{|V_{rel-antes}|_n} = \frac{(V_2)_n + (V_1)_n}{(V_o)_n} = \frac{V_2.sen\alpha + V_1.sen\alpha}{V_o.\cos\alpha} \quad \textbf{(eq68)}$$

Extraindo V_2 da relação eq67, V_o da relação eq66 e substituindo em eq68, vem:

$$e = \frac{V_2.sen\alpha + V_1.sen\alpha}{V_o.\cos\alpha} = \frac{\frac{m}{M}V_1.sen\alpha + V_1.sen\alpha}{\frac{V_1.\cos\alpha}{sen\alpha}.\cos\alpha} = \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

Assim, finalmente concluímos que: $\boxed{e = \left(1+\frac{m}{M}\right).tg^2\alpha}$ **(eq69)**

b) A velocidade V_o da bola, após cair a altura H a partir do repouso, é facilmente determinada por conservação de energia mecânica durante a queda:

$$m.g.H = \frac{m.V_o^2}{2} \Rightarrow \boxed{V_o = \sqrt{2gH}} \quad \textbf{(eq70)}$$

Da relação eq66, temos que: $\boxed{V_1 = V_o.\ tg\alpha}$ **(eq71)**

Da relação eq67, temos que: $\boxed{V_1 = \frac{M}{m}.V_2}$ **(eq72)**

Da relação eq69, temos que: $\boxed{tg\alpha = \sqrt{\frac{M.e}{(M+m)}}}$ **(eq73)**

Substituindo eq70, eq72 e eq73 em eq71, encontramos:

$$V_2 = \sqrt{2gH}.\frac{m}{M}\sqrt{\frac{M.e}{M+m}} \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2M.g.H.e}{M+m}}}$$

c) De acordo com o resultado obtido no item a, se a colisão for elástica (e = 1) e o ângulo α valer 45° ($tg\alpha = 1$), teremos:

$$e = \left(1+\frac{m}{M}\right).tg^2\alpha \Rightarrow 1 = \left(1+\frac{m}{M}\right).(1)^2 \Rightarrow \boxed{\frac{m}{M} = 0} \quad \textbf{(eq74)}$$

Vemos que a condição imposta pela relação eq74 não tem com ser satisfeita, visto que ambas as massas M e m são não nulas. Apenas no limite quando M tende a infinito ($M \to \infty$), a relação eq74 seria satisfeita.

Assim, concluímos que, se a colisão for elástica e α = 45°, a bola que cai verticalmente sobre o prisma jamais rebaterá horizontalmente, exceto se a massa M do prisma tender a infinito, o que, em termos práticos, equivale ao prisma estar fixo ao solo. Somente nesse caso, a bola que cair verticalmente será rebatida horizontalmente, ao colidir com a superfície inclinada do prisma.

Não raro, essa situação física figura em livros de ensino médio ou mesmo em questões de exames vestibulares, com a afirmação de que essa bola caindo verticalmente é rebatida horizontalmente, na colisão elástica para α = 45°. Entretanto, trata-se de um equívoco.

d) De acordo com o resultado obtido no item a, para $\alpha = 30°$ e M = m, temos:

$$e = \left(1+\frac{m}{M}\right).tg^2\alpha = \left(1+\frac{m}{m}\right).\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \quad \therefore \quad \boxed{e = 2/3}$$

• CASO 4: COLISÃO OBLÍQUA E ELÁSTICA ENTRE DUAS PARTÍCULAS DE MASSAS IGUAIS, ESTANDO UMA DELAS INICIALMENTE EM REPOUSO

Um caso de colisão muito útil para o estudo da Física de Partículas é aquele no qual uma partícula colide elasticamente com outra partícula de mesma massa da primeira inicialmente em repouso.

Se a colisão fosse frontal (unidimensional), vimos na seção 2.21 que as partículas meramente trocariam de velocidades. Entretanto, no caso em que a colisão for oblíqua, **as partículas se movem em direções perpendiculares entre si após o choque.** Demonstraremos a seguir.

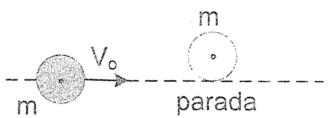


Figura 69

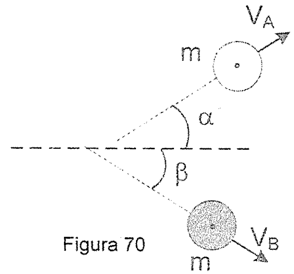


Figura 70

A conservação da quantidade de movimento vetorial do sistema nos permite escrever:

$$\Sigma\vec{Q}_{antes} = \Sigma\vec{Q}_{depois}$$

$$m.\vec{V}_o + m.\vec{0} = m.\vec{V}_A + m.\vec{V}_B \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_o = \vec{V}_A + \vec{V}_B \qquad \textbf{(eq75)}$$

Adicionalmente, a conservação da energia cinética total do sistema nos permite escrever:

$$\Sigma Ecin_{\,antes} = \Sigma Ecin_{\,depois}$$

$$\frac{m.V_o^2}{2} + 0 = \frac{m.V_A^2}{2} + \frac{m.V_B^2}{2}$$

$$V_o^2 = V_A^2 + V_B^2 \qquad \textbf{(eq76)}$$

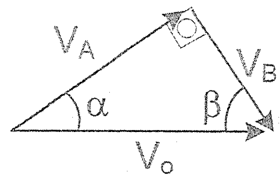


Figura 71

Interpretando geometricamente, a relação eq75 nos diz que os vetores $\vec{V}_o$, $\vec{V}_A$ e $\vec{V}_B$ formam um triângulo conforme mostrado na Figura 71. Já a relação eq76 tem o formato do teorema de Pitágoras, o que nos garante que o triângulo formado pelos vetores (Figura 71) é retângulo, portanto:

$$\boxed{\alpha + \beta = 90^\circ}$$

Assim, demonstramos que, quando uma partícula colide obliquamente e elasticamente com outra partícula de mesma massa, inicialmente em repouso, suas velocidades após a colisão são perpendiculares entre si.

Adicionalmente, a lei dos senos nos permite escrever: $\dfrac{V_A}{sen\beta} = \dfrac{V_B}{sen\alpha}$ **(eq77)**

- **CASO 5: COLISÃO CENTRAL OBLÍQUA ENTRE DUAS ESFERAS**

A Figura 72 mostra uma colisão bidimensional entre duas esferas 1 e 2, de massas m_1 e m_2, que se aproximam em rota de colisão com velocidades v_1 e v_2. Nesse *tipo de colisão, o eixo normal n é o eixo que contém passa pelo centro das* duas esferas, no momento da colisão. O eixo tangencial é perpendicular ao eixo *normal* e *tangencia* as duas esferas *no* ponto de contato entre elas.

Como cada esfera só recebe forças impulsivas na direção normal (Figura 73), durante o impacto, a quantidade de movimento de cada esfera se conserva na direção tangencial:

$$m_1.(V_1)_t = m_1.(V_1')_t \quad \Rightarrow \quad m_1.V_1.\cos\alpha_1 = m_1.V_1'.\cos\alpha_1' \qquad \textbf{(eq78)}$$

$$m_2.(V_2)_t = m_2.(V_2')_t \quad \Rightarrow \quad m_2.V_2.\cos\alpha_2 = m_2.V_2'.\cos\alpha_2' \qquad \textbf{(eq79)}$$

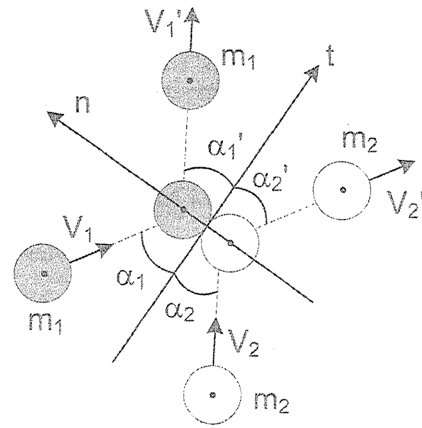


Figura 72

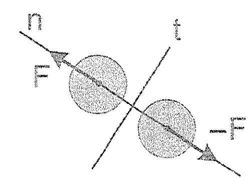


Figura 73

A quantidade de movimento do sistema se conserva na direção normal n, o que nos permite escrever:

$$m_1.(V_1)_n + m_2.(V_2)_n = m_1.(V_1')_n + m_2.(V_2')_n \qquad \textbf{(eq80)}$$

Considerando sinais algébricos para as componentes normais das velocidades, adotando como positivo o sentido do eixo normal n na Figura 72, a relação eq80 será escrita como:

$$m_1.(-V_1.sen\alpha_1) + m_2.(+V_2.\,sen\alpha_2) = m_1.(+V_1'.sen\alpha_1') + m_2.(-V_2'.sen\alpha_2') \qquad \textbf{(eq81)}$$

O coeficiente de restituição mais uma vez relacionará as velocidades relativas entre as esferas, antes e depois do impacto, considerando apenas as componentes das velocidades ao longo do eixo normal:

$$e = \frac{|V_{rel-após}|_n}{|V_{rel-antes}|_n} = \frac{(v_1')_n - (v_2')_n}{(v_2)_n - (v_1)_n} \qquad \textbf{(eq82)}$$

Na relação eq82, também estamos considerando sinais algébricos para as componentes normais das velocidades, adotando como positivo o sentido do eixo normal n na Figura 72.

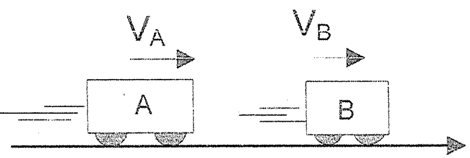
PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

Questão 36

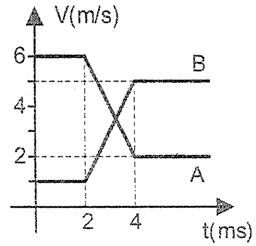
A figura mostra duas caixas A e B, de massas M e 3M, que se movem com velocidades 12 m/s e 2 m/s. Determine a velocidade adquirida pelas caixas A e B após sofrerem uma colisão elástica.

Questão 37

A figura mostra duas caixas A e B, de massas M e 3M, que se movem com velocidades 15 m/s e 5 m/s. Determine a velocidade adquirida pelas caixas A e B após sofrerem uma colisão parcialmente elástica unidimensional, com coeficiente de restituição e = 0,2 .



questões 36 e 37



questão 38

Questão 38

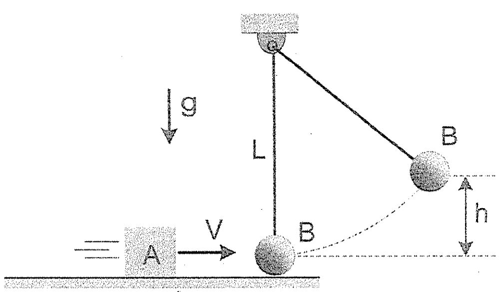
O gráfico representa a velocidade de dois carrinhos A e B em função do tempo, numa colisão unidimensional. Sabendo que a massa do carrinho A vale 20 kg, pede-se determinar :

a) a massa do carrinho B;

b) o coeficiente de restituição da colisão;

Questão 39 (FEI)

Um bloco A de massa m_A = 2 kg se move num plano horizontal liso com velocidade v = 4 m/s em direção a um pêndulo B, de massa m_B = 5 kg inicialmente em repouso. Após a colisão, o pêndulo sobe até uma altura h = 0,2 m. Sendo g = 10 m/s^2, determine:



a) a velocidade v_B da esfera logo após a colisão;

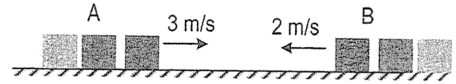
b) o sentido e o valor da velocidade de A após a colisão;

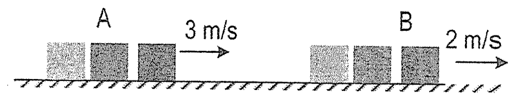
c) a perda de energia mecânica do sistema;'

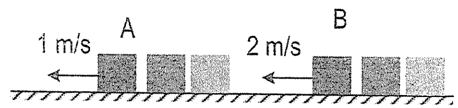
d) o coeficiente de restituição da colisão, e classifique o tipo de colisão.

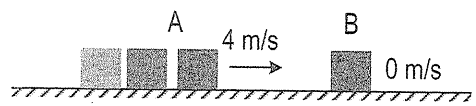
Questão 40

Em cada caso abaixo, duas caixas A e B idênticas sofrerão colisão frontal e elástica. Determine, em cada caso, as velocidades das caixas após a colisão.

a) 

b) 

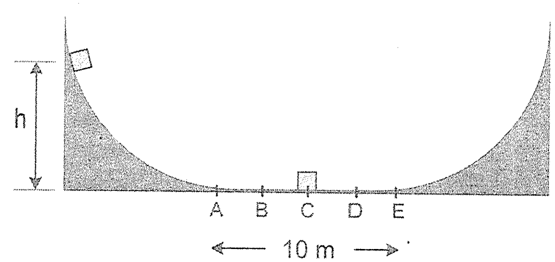
c) 

d) 

Questão 41 –

Uma pequena caixa é abandonada a uma altura h = 5,0 m e escorrega ladeira abaixo em direção ao trecho horizontal onde o coeficiente de atrito vale μ = 0,25. O trecho horizontal mede 10 m e encontra-se dividido em quatro segmentos iguais conforme a figura. No ponto C encontra-se outra caixa rígida, idêntica à primeira. Sabendo que só existe atrito no trecho horizontal e que todas as colisões são elásticas, determine os dois pontos onde as caixas vão parar, ao final desse episódio (g = 10 m/s^2).

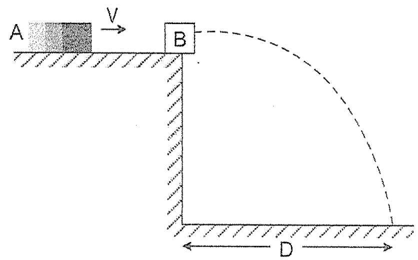
a) A e D b) A e C c) C e E d) B e C e) C e D



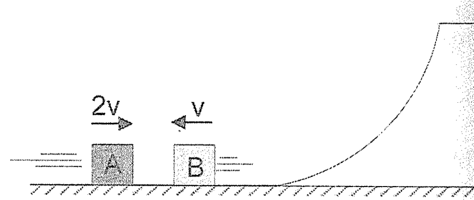
Questão 42 –

Uma caixa A que se move uniformemente sobre um solo horizontal liso colide frontal e inelasticamente com outra caixa B, idêntica à primeira, inicialmente em repouso. Após o impacto, o conjunto AB prossegue em trajetória parabólica, atingindo um alcance horizontal D. Se a colisão tivesse sido elástica, o alcance atingido pela caixa B seria:

a) D b) 2D c) 3D d) 4D e) 6D



questão 42



questão 43

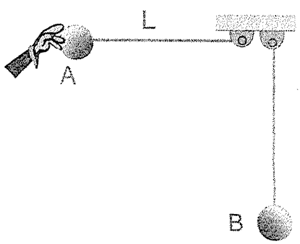
Questão 43

A figura mostra uma caixa A que se move sobre um solo liso com velocidade 2V em direção a uma caixa B, de mesma massa **m**, que se desloca em sentido oposto com velocidade V. Após a colisão inelástica, as duas caixas permanecem unidas e o conjunto prossegue, subindo a rampa até atingir uma altura máxima **H**. Se a colisão tivesse sido elástica, a altura atingida pela caixa B, após a colisão, seria:

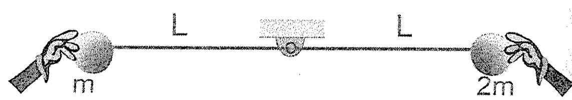
a) 2H b) 4H c) 8H d) 12H e) 16H

Questão 44 - (IME)

Um pêndulo A, de peso $P_A = 10$ N, é solto com velocidade nula de uma posição horizontal e cai livremente até a posição vertical, atingindo o pêndulo B, de peso $P_B = 17$ N, que está inicialmente em repouso. Os pêndulos têm o mesmo comprimento L = 0,45 m. Sabendo que o choque teve coeficiente de restituição e = 0,8, determine a altura que o pêndulo B subirá, medida a partir da sua posição inicial. Considere $g = 10 m/s^2$.



questão 44



questão 45

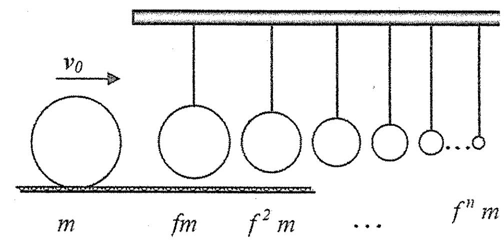
Questão 45

Duas bolinhas de massas m e 2m são amarradas a dois fios leves de mesmo comprimento L. Esses dois pêndulos são fixos a um mesmo ponto de suspensão, são posicionados horizontalmente, como mostra a figura e o sistema é abandonado a partir do repouso. Sabendo que a gravidade local vale g e que a colisão entre as bolinhas é elástica, determine:

a) as velocidades das bolas logo após a primeira colisão;
b) a altura atingida por cada bolinha, após a primeira colisão.

Questão 46 –

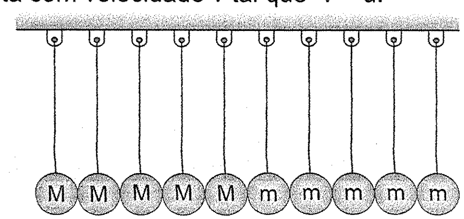
O arranjo da figura abaixo é feito de n esferas suspensas, com seus centros alinhados e que não estão, inicialmente, em contato entre si. A primeira esfera tem massa f .m (em que f é uma constante), a segunda, f^2. m, e assim por diante, ate a n-ésima esfera de massa f^n.m. A primeira massa é atingida por uma esfera de massa m que se desloca a velocidade v_0. Considerando que todas as colisões sejam perfeitamente elásticas e que não haja atrito, determine a velocidade adquirida pela n-ésima bola após a colisão.



Questão 47 –

Considere o sistema abaixo composto por vários pêndulos de massas M e massas m dispostos de forma que todas as esferas se tocam levemente e seus centros encontram-se perfeitamente alinhados.

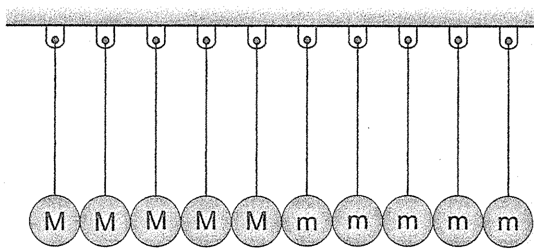
a) Mostre que se N bolas de massa M forem puxadas de um lado e soltas, n bolas de massa m saltarão da extremidade direita da fila, onde n = N.M/m, com a condição de todas as colisões entre as bolas serem elásticas e de M/m ser um número inteiro.
b) Mostre que se as N bolas de massa M puxadas atingirem a extremidade esquerda da fila com velocidade u, as n bolas de massa m saltarão da extremidade direita com velocidade v tal que v = u.



Questão 48 (UECE)

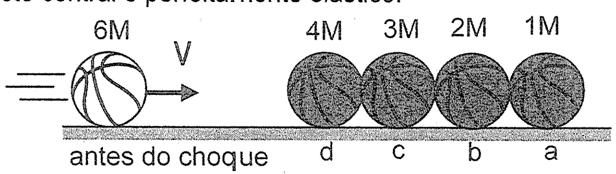
Oito esferas estão suspensas, sendo quatro de massa M = 150g e quatro de massa m = 50g, por fios flexíveis, inextensíveis e de massas desprezíveis, conforme a figura. Se uma esfera de massa M for deslocada de sua posição inicial e solta, ela colidirá frontalmente com o grupo de esferas estacionadas. Considere o choque entre as esferas perfeitamente elástico. O número n de esferas de massa m que se moverão é:

a) um
b) dois
c) três
d) quatro
e) cinco



Questão 49

A Figura mostra 4 bolas **a**, **b**, **c** e **d**, de massas respectivamente iguais a 1M, 2M, 3M e 4M, todas enfileiradas, encostadas entre si, inicialmente em repouso sobre um solo horizontal. Uma quinta bola, de massa 6M, se move com velocidade **V** e sofre uma colisão frontal com a 1ª bola da fila. Nestas condições, após o choque, suposto central e perfeitamente elástico:

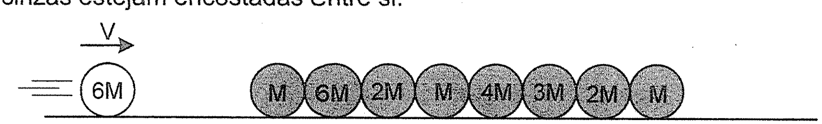


a) A bola **a** adquire uma velocidade 6V;
b) As bolas **a** e **b** adquirem velocidades respectivamente 2**V** e **V**
c) As bolas **a**, **b** e **c** adquirem a mesma velocidade **V**
d) Todas as bolas adquirem a mesma velocidade **V**
e) As bolas **a**, **b** e **c** adquirem a mesma velocidades iguais a **V**, 2**V** e 3**V**, respectivamente.

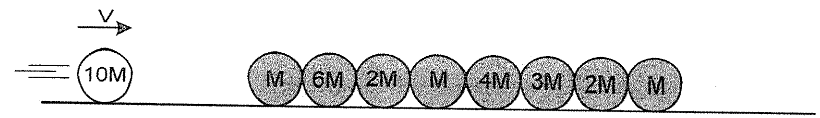
Questão 50

Em cada caso a seguir, descreva o comportamento do sistema, após a colisão elástica entre a bola branca e o conjunto de bolas cinzas. Admita que todas as bolas cinzas estejam encostadas entre si.

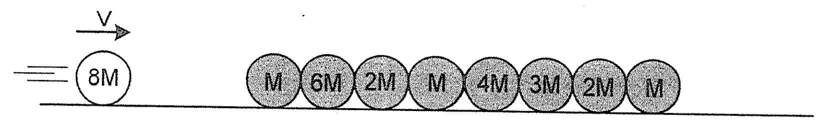
a)



b)

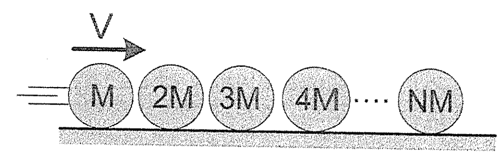


c)



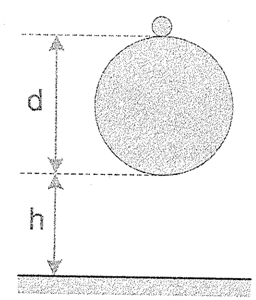
Questão 51 –

N esferas de mesmo raio R estão em repouso sobre um plano horizontal. As esferas estão quase em contato entre si e seus centros encontram-se alinhados. As massas dessas esferas valem respectivamente M, 2M, 3M, ..., NM. Dá-se à esfera de massa M uma velocidade inicial V para a direita e na direção da linha dos centros. Supondo que todas as colisões sejam elásticas e unidimensionais, determine a velocidade de saída da N-ésima bola.

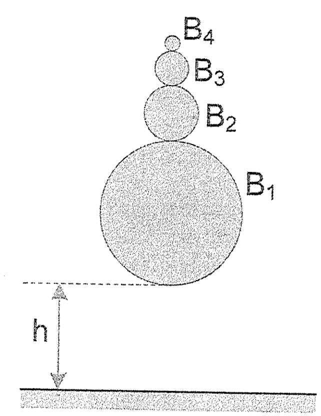


Questão 52 -

Uma bola de tênis de (pequena) massa m repousa sobre uma bola de basquete de (grande) massa M e diâmetro igual a d. O conjunto é abandonado do repouso a uma altura h acima do solo, como mostra a Figura. Sabendo que todas as colisões são elásticas e que M é muito maior que m, determine a que altura a bolinha de tênis subirá após a colisão, medida a partir do solo.



questão 52



questão 53

Questão 53 –

Agora considere n bolas B_1, B_2, B_3...., B_n de massas respectivamente iguais a m_1, m_2, m_3...., m_n (com $m_1 >> m_2 >> m_3 >> .... >> m_n$) empilhadas verticalmente. A parte inferior da bola B_1 encontra-se a uma altura h acima do solo, e a bola B_n encontra-se a uma altura h + d acima do solo. A pilha de bolas é abandonada do repouso. Admita que todas as colisões sejam elásticas.

a) Determine a que altura a bola B_n subirá, acima do solo, em função de **n**, **h** e **d**.

b) Admita agora h = 1 m. Estime o número n de bolas que seriam necessárias para que B_n atinja atingir uma altura da ordem de 4 km. Nesse caso, d pode ser desprezado.

c) Estime o número n de bolas que seriam necessárias para que B_n atinja a velocidade de escape da Terra, da ordem de 11 km/s.

Questão 54 - (ITA 2009)

Considere uma bola de basquete de 600g a 5 m de altura e, logo acima dela, uma de tênis de 60 g. A seguir, num dado instante, ambas as bolas são deixadas cair. Supondo choques perfeitamente elásticos e ausência de eventuais resistências, e considerando g =10 m/s^2, assinale o valor que mais se aproxima da altura máxima alcançada pela bola de tênis em sua ascensão após o choque.

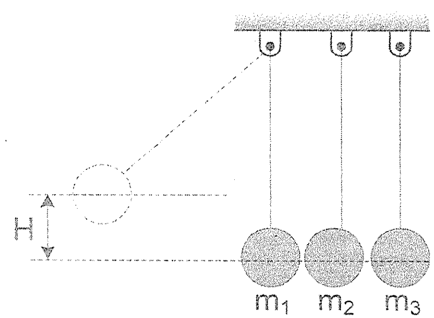
a) 5 m b) 10 m c) 15 m d) 25 m e) 35 m

Questão 55 –

Três esferas de raios iguais e massas diferentes estão suspensas por fios de comprimento iguais, de maneira que quase encostam entre si e seus centros estão alinhados. A esfera de massa m_1 é inclinada até uma altura H e abandonada do repouso. Se a gravidade local vale g, determine:

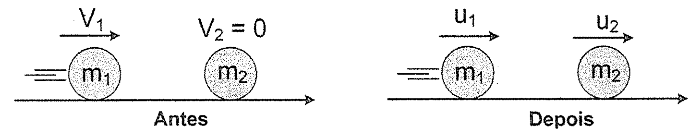
a) as massas m_2 e m_3, sabendo que, após a bola 1 colidir com a bola 2, e esta colidir com a bola 3, as bolas possuem quantidade de movimento de mesmo valor;

b) as alturas H_1, H_2 e H_3 atingidas por cada bola, após esse episódio.



Questão 56 –

Uma bola de massa m_1, movendo-se com velocidade v_1, colide frontalmente com uma segunda bola de massa m_2 em repouso. Admita que o coeficiente de restituição da colisão seja **e**.



a) Denomina-se por Q da colisão a variação da energia mecânica ocorrida nela, isto é, $Q = E_{mec\ Final} - E_{mec\ inicial}$. Determine uma expressão literal para o Q dessa colisão.

b) Determine a fração da energia mecânica do sistema que é dissipada durante o choque.

c) Para qual valor do coeficiente de restituição **e** ocorre máxima dissipação de energia mecânica desse sistema ?

d) Para qual valor do coeficiente de restituição **e** ocorre mínima dissipação de energia mecânica desse sistema ?

Questão 57 -

Verificou-se experimentalmente que, numa colisão frontal de duas esferas sólidas, como é o caso de duas bolas de bilhar, as velocidades após o choque estão relacionadas às velocidades anteriores a este pela expressão $v_1' - v_2' = e.(v_2 - v_1)$ onde **e**, conhecido como coeficiente de restituição, está no intervalo $0 \le e \le 1$. Esse resultado foi descoberto por Newton e tem apenas uma validade aproximada. Como na colisão ocorre conservação da quantidade de movimento do sistema:

a) Determine uma expressão literal para as velocidades v_1' e v_2' das bolas após a colisão em função das velocidades v_1 e v_2 antes da colisão, das massas m_1 e m_2 das bolas e do coeficiente de restituição **e**;

b) Determine uma expressão literal para o Q dessa colisão, onde $Q = \Delta E_{mec}$.

c) Para qual valor de e teremos uma colisão sem perda de energia mecânica (Q = 0), isto é, uma colisão elástica ?

Questão 58

Uma mola de massa m, movendo-se a uma velocidade v, colide frontalmente com outra mola idêntica inicialmente em repouso. Sabendo que a energia cinética das bolas, após a colisão, vale 3/4 da energia cinética inicial, determine o coeficiente de restituição da colisão.

Questão 59 –

Uma bolinha de massa 100 g, se movendo com velocidade u, colide frontalmente com outra bolinha idêntica à primeira, inicialmente em repouso. Se a energia cinética total do sistema formado pelas duas bolinhas, após a colisão, vale 0,2 J, determine:

) o valor máximo para a velocidade u;
) o valor mínimo para a velocidade u.

)uestão 60 –

Jma bola de massa m é abandonada do repouso de uma altura h, num local nde a gravidade vale g, e cai verticalmente colidindo com o piso. Sendo e o oeficiente de restituição dessa colisão, calcule:
) o tempo necessário para que a bola pare de saltar;
) a distância total percorrida pela bola;
) a energia mecânica dissipada no processo.

)uestão 61

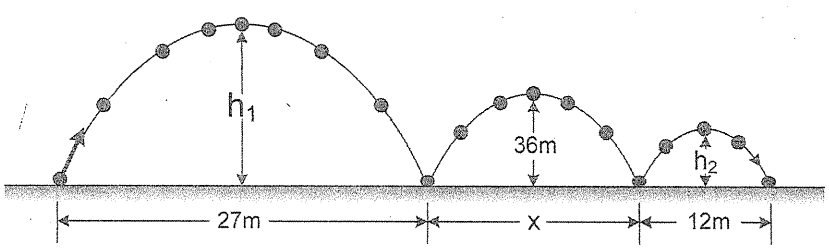
Jma bola cai de uma altura H = 9 m, colide com o solo e sobe novamente até ıma altura X. Em seguida, cai novamente e colide com o solo, subindo até uma ova altura h = 4 m, e assim sucessivamente, até a bola parar. O prof. Renato 3rito pede para você determinar ($g = 10\ m/s^2$) :
) o coeficiente de restituição dos impactos
) a altura X
) a distância total percorrida pela bola até ela parar.

)uestão 62 –

Jma bola de futebol que estava em repouso sobre a superfície de uma quadra é :hutada com velocidade u formando um ângulo α com a horizontal. A gravidade ocal vale g. Sabendo que o coeficiente de restituição entre a bola e a quadra de utebol vale **e**, determine:
)a que distância da posição inicial a bola tocará o solo pela segunda vez;
)a que distância da posição inicial a bola tocará o solo pela n-ésima vez;
)a distância horizontal percorrida pela bola até ela parar de saltar.

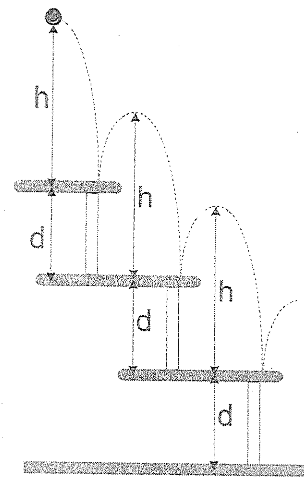
)uestão 63

\ figura mostra uma parte da trajetória descrita por uma bola de tênis que foi ançada obliquamente, a partir do solo, num planeta de gravidade desconhecida. Sabendo que o solo é liso e a resistência do ar é desprezível, o prof. Renato Brito ɔede que você determine as alturas h_1 e h_2 , bem como a distância x.

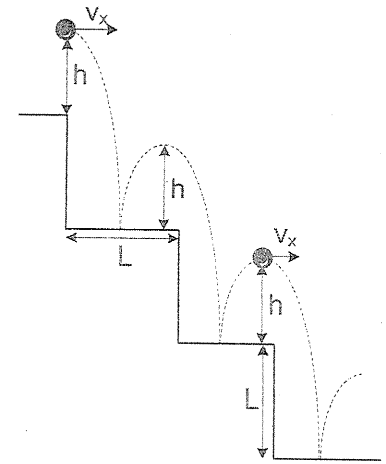


Questão 64 –

Uma bola cai de uma altura h acima do primeiro degrau e desce a escada, como mostra a figura, subindo sempre uma altura h acima de cada degrau. Sendo e o coeficiente de restituição, determine a altura d de cada degrau a fim de que a bola siga a trajetória mostrada na figura.



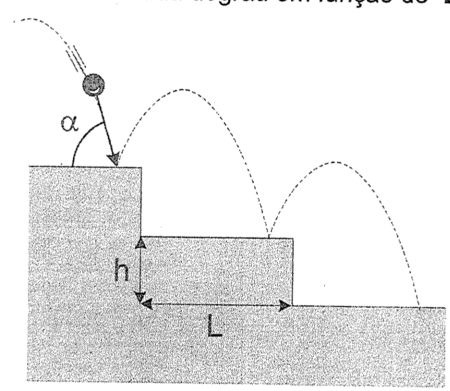
questão 64



questão 65

Questão 65 –

Seja a escada mostrada na figura na qual cada degrau tem comprimento e largura iguais a L. Uma bolinha de aço vai descendo a escada, degrau por degrau, sempre colidindo na mesma posição em cada degrau e sempre atingindo uma mesma altura h acima de cada degrau. Sabendo que o coeficiente de restituição vale **e** e a gravidade local vale g, determine:
a) a velocidade horizontal v_x necessária, em função de **g, L** e **e**;
b) a altura h atingida acima de cada degrau em função de **L** e **e**.



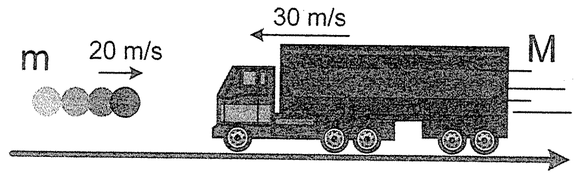
questão 66

Questão 66

Seja a escada mostrada na figura na qual cada degrau tem comprimento **L**. Uma bolinha de aço foi arremessada obliquamente e colide regularmente em cada um dos sucessivos degraus dessa escada. A velocidade da bolinha ao colidir com cada degrau forma um ângulo α com a horizontal e o coeficiente de restituição da colisão vale **e**. Sabendo que a gravidade local vale **g**, o prof. Renato Brito pede que você determine a altura h de cada degrau de forma que a bolinha consiga realmente colidir com cada um dos sucessivos degraus dessa escada.

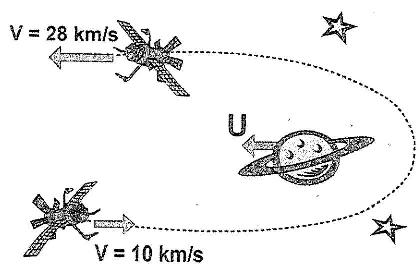
Questão 67

A figura mostra uma bola de tênis que foi lançada com velocidade 20 m/s em direção a um grande caminhão que se move em sentido contrário, com velocidade 30 m/s. Supondo que a colisão seja perfeitamente elástica, determine a velocidade da bola e do caminhão, logo após o impacto.



Questão 68

A nave espacial Voyager 2 usou o efeito da baladeira gravitacional ao tirar proveito da gravidade de saturno para inverter o sentido do seu movimento. Admita que a velocidade da Voyager passou de 10 km/s para 28 km/s, durante essa interação com Saturno. A partir dessas informações, o prof. Renato Brito pede que você determine a velocidade orbital U de Saturno (em relação ao sol).



Questão 69 –

Uma bola de aço caindo verticalmente bate numa placa rígida A e é rebatida horizontalmente como ilustrado. Designando por e o coeficiente de restituição, determine

a) o ângulo α necessário.

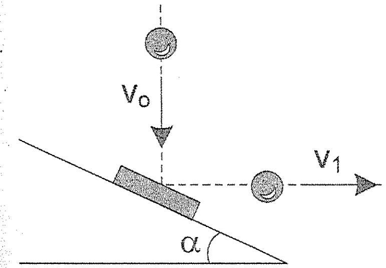
b) o módulo da velocidade v_1.

Questão 70 –

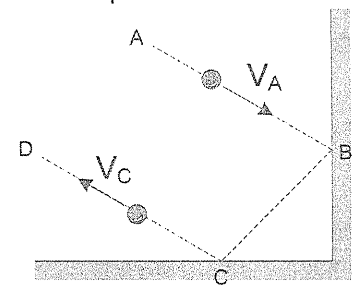
Uma bola atinge um canto de 90° com velocidade inicial V_A. Designando o coeficiente de restituição por **e** e supondo que não existe atrito, determine:

a) o módulo de V_C em função de V_A e do coeficiente de restituição e;

b) mostre que as trajetórias inicial e final AB e CD são paralelas.



questão 69



questão 70

Questão 71 (IME)

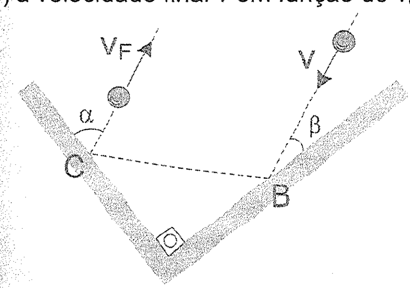
Uma bola de bilhar atinge a tabela de uma mesa no ponto B com uma velocidade v e inclinação $\beta = 15^o$. Sabendo que o coeficiente de restituição vale e = 0,5 nas duas colisões, determine o ângulo α e a velocidade final v_F da bola após colidir no ponto C.

Questão 72

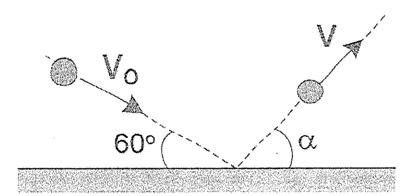
Uma bola de aço colide com um solo horizontal liso com uma velocidade inicial $v_o = 20\sqrt{2}$ m/s formando um ângulo 60º com a direção horizontal. Se o coeficiente de restituição dessa colisão vale $e = \sqrt{3}/3$, determine:

a) o ângulo α após a colisão;

b) a velocidade final v em função de v_o



questão 71



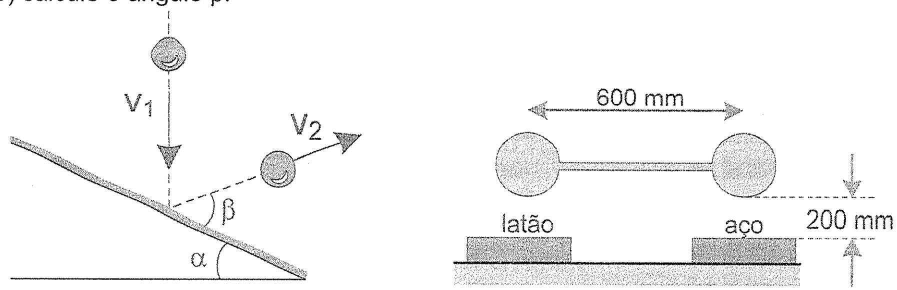
questão 72

Questão 73 – (ITA 2008)

A figura mostra uma bola de massa m que cai com velocidade v_1 sobre uma superfície rígida inclinada de um ângulo β com a horizontal. Sendo e o coeficiente de restituição para esse impacto:

a) calcule o módulo da velocidade v_2 com que a bola é ricocheteada, em função de v_1, α e e;

b) calcule o ângulo β.



questão 73 questão 74

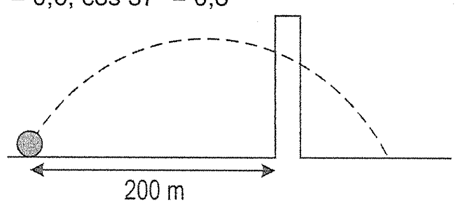
Questão 74 –

Duas bolas de aço idênticas estão interligadas por uma haste rígida de massa desprezível como mostrado na figura e são abandonadas do repouso na posição horizontal de uma altura de 200 mm acima das placas de base pesadas de latão e aço. Se o coeficiente de restituição aço-latão $e_1 = 0{,}3$ e o coeficiente de restituição aço-aço vale $e_2 = 0{,}9$, determine a velocidade angular ω da haste logo após o impacto. Admita que as colisões das bolas com as bases sejam simultâneas.

Questão 75

Uma bola de borracha de 1 kg foi lançada, a partir do solo, com velocidade inicial $V_o = 50$ m/s numa direção que forma um ângulo α = 37° com a horizontal. A trajetória parabólica do projétil está contida num plano perpendicular a um enorme paredão de aço, fixo ao solo a uma distância d = 200m do ponto de lançamento. Sabendo que a bola colide elasticamente com o paredão rígido, determinar a que distância do paredão a bola se chocará com o solo pela primeira vez. Dado: $g = 10\ m/s^2$, sen37° = 0,6, cos 37° = 0,8

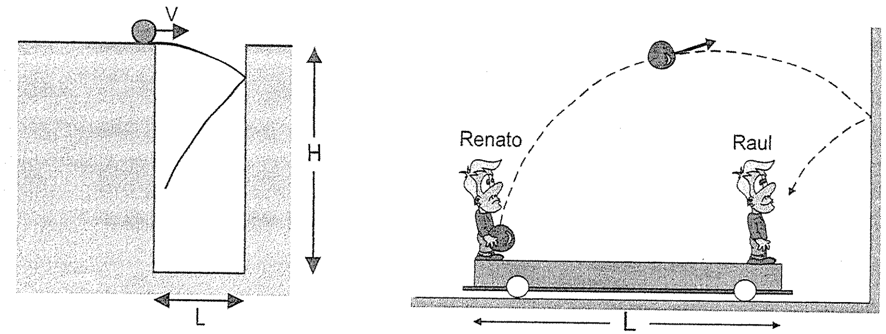
a) 10 m
b) 20 m
c) 30 m
d) 40 m
e) 50 m



Questão 76 –

Uma bola foi lançada com velocidade horizontal v na entrada de um poço de profundidade H = 80 m e secção quadrada de lado L = 6 m, num local em que a gravidade vale $g = 10\ m/s^2$. A bola sofrerá N colisões elásticas sucessivas com as paredes até chegar ao fundo do poço.

a) determine o número N de colisões, para v = 10 m/s;
b) para que tenhamos N = 40, determine o intervalo de valores para v.



questão 76 questão 77

Questão 77 –

Admita que todo o sistema da figura esteja parado quando Renato (de massa 2M) arremessa a bola (de massa M) obliquamente com velocidade V_o formando um ângulo α com a horizontal. A bola colide elasticamente com a parede e chega até as mãos do irmão Raul (de massa 2M). Determine:

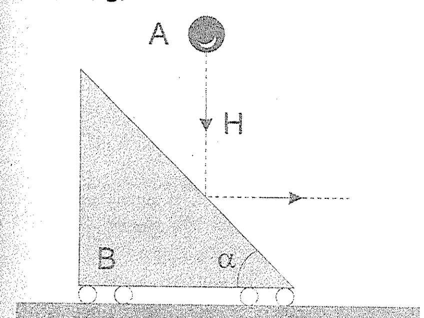
a) a velocidade adquirida pela plataforma (de massa 4M) logo após Renato jogar a bola;

b) a velocidade adquirida pela plataforma logo após Raul segurar a bola.

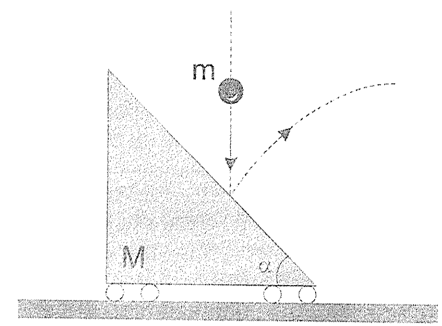
Questão 78

Uma bola A de massa **m** é abandonada do repouso de uma altura **H** sobre um prisma B de massa **M** também inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal lisa. O prisma encontra-se apoiado sobre roletes e é livre para se mover na horizontal. Sabendo que a gravidade local vale **g**, e que a velocidade da bola, após a colisão, aponta na horizontal para a direita, o prof. Renato Brito lhe pergunta:

a) Qual o coeficiente de restituição **e** dessa colisão em função de **M, m** e α ?
b) Quais as velocidades da bola e do prisma, logo após a colisão, em função de **M, m, g, H** e **e** ?



Questões 77, 78, 79 e 80



questão 81

Questão 79 (UNIP-SP)

Na figura temos um plano horizontal sem atrito e um bloco **B**, em repouso, com o formato de um prisma. Uma pequena esfera **A** é abandonada do repouso, da posição indicada na figura, com H = 1,2 m e, após uma queda livre, colide elasticamente com o prisma. Despreze o efeito do ar e adote $g = 10\ m/s^2$. Sabe-se que, imediatamente após a colisão, a esfera **A** tem velocidade horizontal. A massa do prisma **B** é o dobro da massa da esfera **A**. A velocidade adquirida pelo prisma **B**, após a colisão, tem módulo igual a:

a) 2,0 m/s b) 4,0 m/s c) 8,0 m/s d) 16 m/s e) 1,0 m/s

Questão 80

Na figura temos um plano horizontal sem atrito e um prisma **B**, de massa **2m**, inicialmente em repouso, livre para se mover horizontalmente num local onde $g = 10\ m/s^2$. Uma pequena esfera **A**, de massa **m**, é abandonada do repouso, da posição indicada na figura e, após uma queda livre de uma altura H = 15 cm, colide com o prisma, sendo o coeficiente de restituição e = 0,5. Sabendo que, imediatamente após a colisão, a esfera **A** tem velocidade horizontal, o prof. Renato Brito pede que você determine:

a) a velocidade relativa entre A e B logo após a colisão.

b) o ângulo α de inclinação do prisma.

Questão 81 –

Abandona-se do repouso, na posição indicada na figura, uma esfera de massa m = 2 kg. A esfera atinge, com velocidade $v_0 = 26$ m/s, a superfície lisa de um prisma de massa M = 12 kg inicialmente em repouso. O prisma, suportada por roletes, pode mover-se livremente no plano horizontal liso. Sabendo-se que $\alpha = 45°$ e que o coeficiente de restituição entre a esfera e o prisma vale e = 0,5, o prof. Renato Brito pede que você determine a velocidade adquirida pelo prisma após a colisão.

Questão 82 –

Uma esfera de massa **m** é abandonada do repouso de uma altura **H** acima de um prisma de massa **M** que se encontra apoiado sobre um solo horizontal liso. Após colidir elasticamente com o prisma, a esfera adquire velocidade formando ângulo α com a horizontal e descreve uma trajetória parabólica conforme a figura. Se a gravidade local vale **g**, o prof. Renato Brito pede que você determine a altura máxima **h** atingida pela esfera em sua trajetória parabólica.

Questão 83 –

Uma bola de massa **m** é lançada horizontalmente com velocidade $\mathbf{v_o}$ contra um prisma que repousa sobre um solo horizontal liso. O prisma tem massa **M** e sua superfície inclinada faz um ângulo α com a horizontal. Sabendo que, após a colisão, a velocidade da bola é vertical, o prof. Renato Brito pede que você:

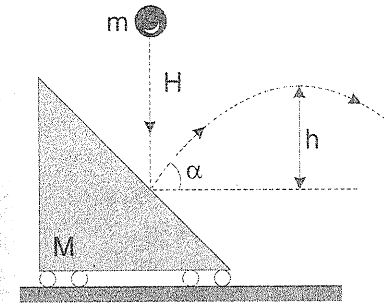
a) determine o coeficiente de restituição **e** dessa colisão, em função de **m, M** e α.

b) admitindo agora que essa colisão seja elástica, determine uma relação entre **m, M** e α, usando apenas conservação da energia mecânica e da quantidade de movimento;

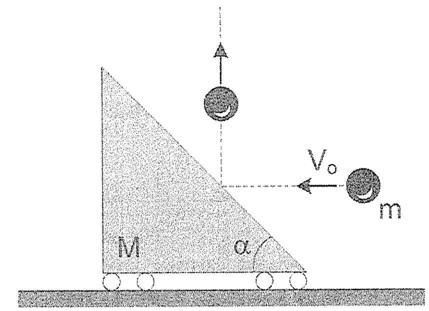
c) compare as relações obtidas nos itens a e b. Elas coincidem, admitindo colisão elástica (e = 1) ?

d) determine a velocidade do prisma após a colisão, em função de **m, M** e $\mathbf{v_o}$

e) determine a altura máxima atingida pela bolinha, medida a partir da posição da colisão, em função de $\mathbf{v_o}$, **m**, **M**, do coeficiente de restituição **e** da gravidade local **g**.



questão 82



questão 83

Questão 84

Uma bola de massa **m** é lançada horizontalmente com velocidade $\mathbf{v_o}$ contra um prisma que repousa sobre um solo horizontal liso. O prisma tem massa **M** e sua superfície inclinada faz um ângulo α com a horizontal. Sabendo que, após a colisão, a velocidade da bola é vertical, o prof. Renato Brito lhe pergunta:

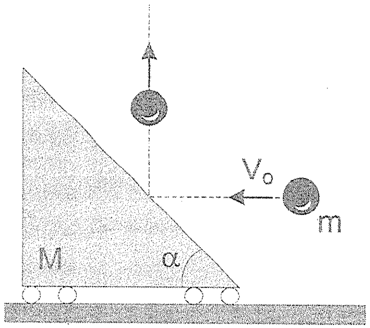
a) quanto vale o coeficiente de restituição **e** dessa colisão, em função de **m, M** e α ?

b) se a inclinação da rampa valesse $\alpha = 45°$ e a colisão fosse elástica, a bola lançada horizontalmente ricochetearia verticalmente, após a colisão ?

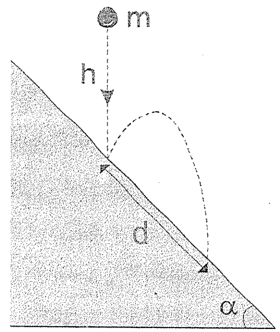
c) que condição limite deveria satisfazer as massas dos corpos a fim de que a bola lançada horizontalmente ricocheteasse verticalmente, admitindo colisão fosse elástica e $\alpha = 45°$?

Questão 85 –

Uma bola cai do repouso, a partir de uma altura h, sobre um plano inclinado de inclinação α com a horizontal, num local em que a gravidade vale g. Após colidir com o plano inclinado, a bola salta novamente. A que distância **d** a bola colidirá com a rampa novamente ? Admita que o coeficiente de restituição vale **e**.



questão 84

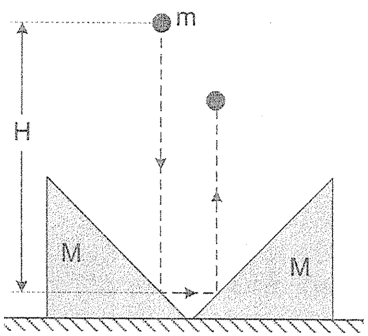


questão 85

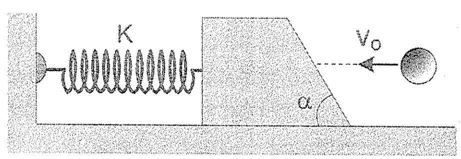
Questão 86 –

Sobre um plano horizontal liso repousam duas cunhas idênticas, de mesma massa M e mesma inclinação com a horizontal, livres para se mover ao longo da superfície horizontal. Uma esfera de massa m é abandonada do repouso, de uma altura H (veja figura) ricocheteia na 1ª cunha, em seguida, repica na 2ª cunha e sobe verticalmente. Admitindo que todas as colisões sejam elásticas e que M >> m, determine a altura final atingida pela esfera.

a) $\left(\dfrac{M-m}{M+m}\right).H$ b) $\left(\dfrac{2M-m}{2M+m}\right).H$ c) $\left(\dfrac{M-2m}{M+2m}\right).H$ d) $\left(\dfrac{M-m}{M+2m}\right).H$



questão 86



questão 87

Questão 87 –

Uma esfera de massa m = 4 kg é lançada horizontalmente com velocidade v_o = 16 m/s contra a superfície inclinada de um bloco de massa M = 18 kg, inicialmente em repouso, conectado a uma mola ideal de constante elástica

K = 20 KN/m fixa à parede. Admita que todos os atritos sejam desprezíveis, g = 10 m/s^2 e a inclinação da superfície do bloco vale α = 60º. Sabendo que o coeficiente de restituição dessa colisão vale e = 0,75, determine:

a) a velocidade adquirida pelo bloco logo após o impacto;

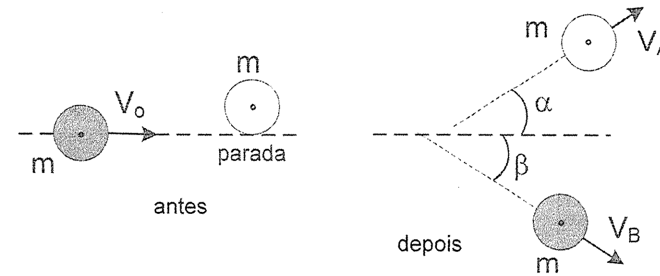
b) a deformação máxima sofrida pela mola.

Questão 88 –

Uma esfera de massa 2 kg se move com velocidade V_o = 20 m/s e colide obliquamente com outra esfera de mesma massa 2 kg inicialmente em repouso. Sabendo que a colisão foi elástica e oblíqua e que senβ = 0,6, determine:

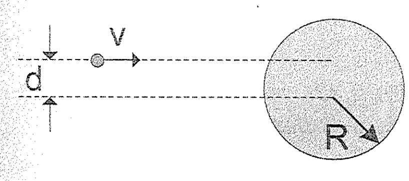
a) a soma $\alpha + \beta$;

b) velocidade de cada esfera, após a colisão.

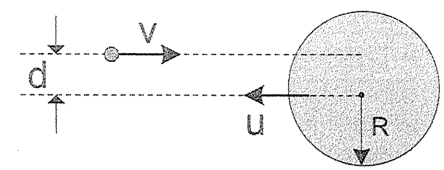


Questão 89 –

Uma pequena partícula se movendo com velocidade v colide elasticamente com uma esfera de mesma massa e raio R inicialmente em repouso. A trajetória retilínea da partícula passa a uma distância d do centro da esfera. Determine a velocidade final de cada corpo após a colisão.



questão 89



questão 90

Questão 90 –

Uma pequena partícula se movendo com velocidade V = 20 m/s colide elasticamente com uma esfera de mesma massa e raio R = 10 cm que se movia em sentido contrário com velocidade u = 6,25 m/s. A trajetória retilínea da partícula passa a uma distância d = 6 cm do centro da esfera. Determine a velocidade final da partícula após a colisão.

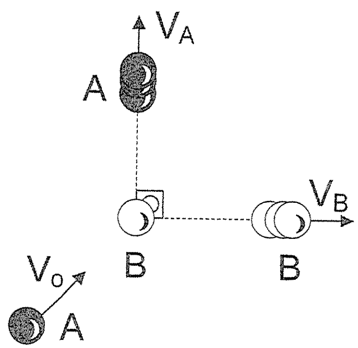
Questão 91 –

Um corpo A de massa 6 kg se move com velocidade V e colide elasticamente com outro corpo B inicialmente em repouso. Após a colisão, A passa a se mover com velocidade V/2 numa direção perpendicular à direção inicial. Determine a massa do corpo B.

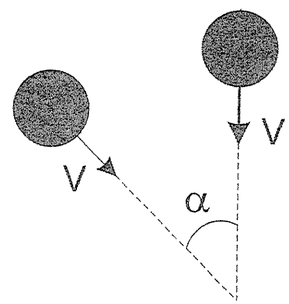
Questão 92 –

Uma bola A, de massa 20 kg, move-se com velocidade $V_o = 5$ m/s em direção a uma bola B, inicialmente em repouso. Após o impacto, as bolas se movem em direções perpendiculares entre si com velocidades $V_A = 3$ m/s e $V_B = 8$ m/s. Todo o episódio ocorre num plano horizontal liso. Determinar a massa da bola B:

a) 10 kg b) 20 kg c) 30 kg d) 40 kg e) 50 kg



questão 92



questão 93

Questão 93

Dois discos de mesma massa m se movem sobre uma mesa de ar com velocidades de mesmo modulo v, fazendo entre si um ângulo α. Os discos sofrem uma colisão inelástica entre si e prosseguem com uma velocidade comum v/2. Determine:

a) o ângulo α;

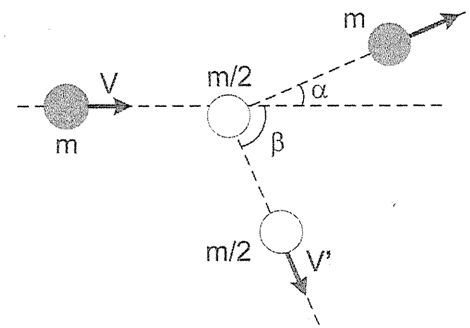
b) a energia mecânica dissipada na colisão.

Questão 94

Uma partícula de massa m e velocidade v se choca elasticamente com outra partícula em repouso, cuja massa vale m/2, prosseguindo numa direção que forma um ângulo α = 30° com a direção inicial, como mostra a figura. Determine:

a) a velocidade v' da segunda partícula, após a colisão;

b) o ângulo β.



Questão 95 –

Uma câmara de bolhas é um dispositivo muito utilizado para o estudo de partículas atômicas. Trata-se de uma câmera preenchida por um líquido superaquecido, isto é, um líquido mantido metaestavelmente acima do ponto de ebulição, mantido sob pressão para evitar que sofra ebulição. Quando uma partícula penetra esse líquido, ela rompe essa metaestabilidade e o seu rastro no interior da câmara é revelado pela formação de micro bolhas no caminho por onde a partícula passa.

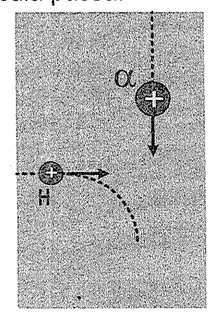


imagem 1

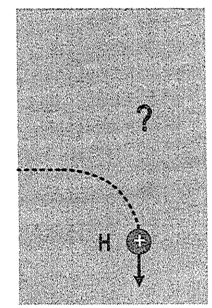
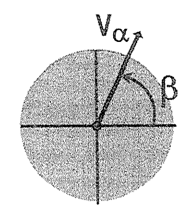


imagem 2



A imagem 1 é uma foto flagrando a interação elétrica entre uma partícula alfa α_4^{+2} e um dêuteron H_2^{+1} no interior de uma câmara de bolhas. No instante da foto, as partículas se moviam num mesmo plano em direções perpendiculares entre si e suas energias cinéticas valiam $Ecin_\alpha = 10$ eV e $Ecin_H = 20$ eV.

Devido à forte repulsão eletrostática entre elas, regida pela Lei de Coulomb, suas trajetórias, assim como suas energias cinéticas, sofrem variações. A imagem 2 mostra uma foto posterior em que se percebe um desvio de 90° na direção da trajetória seguida pelo dêuteron, cuja energia cinética passou a valer $Ecin_H = 80$ eV. A trajetória da partícula α nessa imagem não está visível devido a uma falha na revelação fotográfica.

onsiderando que o sistema encontra-se isolado e que a única interação entre as artículas é de natureza elétrica, o prof. Renato Brito pede que você determine:

) a energia cinética da partícula α na imagem 2 .

) o ângulo β (medido no ciclo trigonométrico, $0° \leq \beta \leq 360°$) que define a orientação da velocidade $V\alpha$ da partícula α na imagem 2.

uestão 96 – (ITA)

figura mostra a vista superior de uma mesa de bilhar. Uma bola A move-se om velocidade V sobre a mediatriz dos centros de duas bolas B e C idênticas à rimeira, inicialmente imóveis. Se as bolas colidem elasticamente, pode-se firmar que a velocidade da bola A, após a colisão, será:

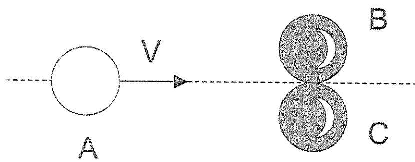
) V/5 para a esquerda;

) V/5 para a direita;

) 2V/5 para a esquerda;

) 2V/5 para a direita;

) V para a esquerda



2.26 – SISTEMAS COM MASSA VARIÁVEL – FORÇA PROPULSORA

Considere um vagão de massa contendo água em seu interior se movendo com velocidade escalar v. A massa do sistema vagão + água vale m. De repente, uma válvula de contenção se abre e o vagão passa a ejetar água a uma taxa constante $\phi = \Delta m/\Delta t$

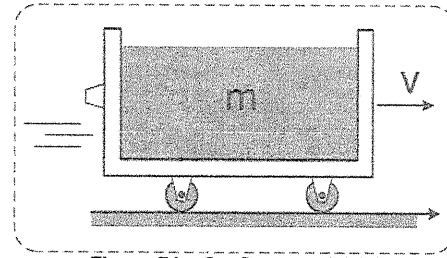


Figura 74 – Configuração inicial

Logicamente, durante o processo de ejeção da água, o vagão exerce uma força $F\leftarrow$ na porção Δm que deixou o vagão. Pela lei da ação e reação, esta porção aplica ao vagão uma força $F\rightarrow$ de mesmo valor e sentido contrário (Figura 75) que acaba fazendo o papel de força propulsora nesse vagão.

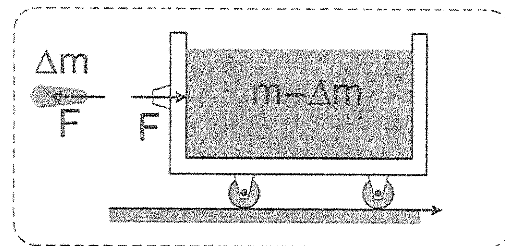


Figura 75 Força propulsora F trocada entre o vagão e a porção de água ejetada

Estamos interessados em determinar a intensidade da força propulsora $F\rightarrow$ que age no vagão durante esse processo de ejeção da água na Figura 75.

Admita que, num intervalo de tempo infinitesimal Δt, a velocidade do vagão sofra um aumento de v para $v + \Delta v$. Assim, a aceleração do vagão nesse episódio vale:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \textbf{(eq83)}$$

e a força propulsora que age nele é dada por:

$$F = m.a = m.\frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \textbf{(eq84)}$$

Para determinar o valor da força F, dada pela relação eq84, faremos uso do princípio da conservação da quantidade de movimento de sistemas isolados.

Entendemos por **sistemas isolados** aqueles que não interagem com nenhum corpo fora da sua fronteira. Adicionalmente, para um sistema ser isolado, não deve haver transferência de matéria através de sua fronteira. Afinal, como a própria matéria que passa pela fronteira é portadora de qdm, a transferência de matéria pela fronteira implica automaticamente uma transferência de qdm através da fronteira, violando o conceito de sistema isolado.

Assim, tomaremos como sistema o conjunto **"vagão + água + água ejetada"**. Sem sombra de dúvidas, esse sistema está livre da ação de forças externas na horizontal, além de possuir massa total invariável. Dessa forma, podemos garantir que sua quantidade de movimento horizontal é conservada no referencial da Terra.

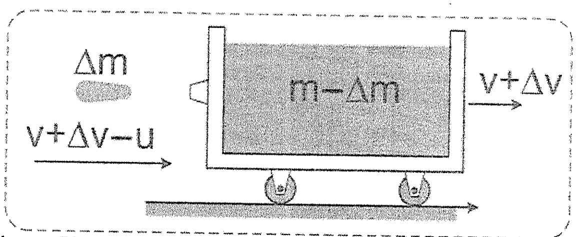


Figura 76 – Velocidades do vagão e da porção ejetada Δm em relação à Terra. Note que a velocidade da porção Δm ejetada, em relação ao vagão, vale **u**.

Admita que a porção de massa Δm seja ejetada com velocidade **u** em relação ao vagão, na Figura 76. Assim, qual a velocidade dessa porção Δm ejetada em relação à Terra ? Ora, sua velocidade em relação à Terra valerá $v + \Delta v - u$.

Assim, a qdm inicial do sistema *"vagão + água + água ejetada"*, em relação à Terra (Figura 74), antes de ejetar a massa, é dada por:

$$Q_{sist\ antes} = m.v$$

Após o intervalo de tempo infinitesimal Δt, a porção Δm terá sido ejetada do vagão e a qdm do sistema *"vagão + água + água ejetada"*, em relação à Terra (Figura 76), é dada por:

$$Q_{sist\ depois} = (m-\Delta m).(v+\Delta v) + \Delta m.(v + \Delta v - u)$$

Pela conservação da qdm do sistema, temos:

$$m.v = (m-\Delta m).(v+\Delta v) + \Delta m.(v + \Delta v - u)$$

Desenvolvendo, encontramos:

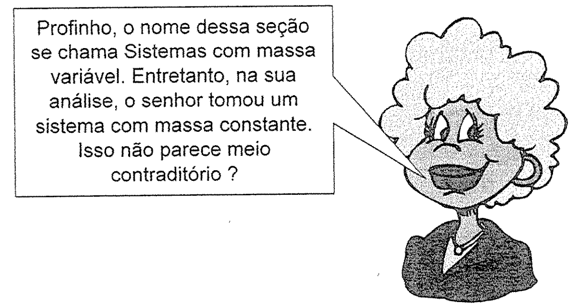
$$m.\Delta v = \Delta m.u \qquad \textbf{(eq85)}$$

Substituindo eq78 em eq77, vem:

$$F = m.a = m.\frac{\Delta v}{\Delta t} = u.\frac{\Delta m}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_e = \left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right).u} \qquad \textbf{(eq86)}$$

força propulsora

onde $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ é a taxa com que o vagão ejeta massa (em kg/s) e **u** é a velocidade com que a massa é ejetada em relação ao vagão. Essa força propulsora também é conhecida como **empuxo** e não deve ser confundida com o empuxo de Arquimedes.



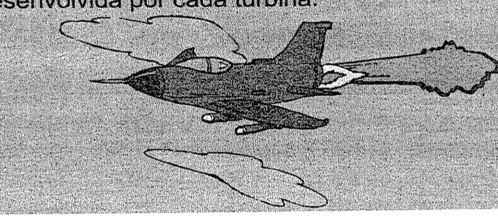
Quando usamos o título "sistema com massa variável", trata-se de uma força de linguagem, uma alusão ao fato de o vagão estar perdendo massa durante esse episódio. Ainda assim, para fazer uso do principio da conservação da qdm do sistema, é preciso atentar para três aspectos importantes:

- o sistema precisa estar livre da ação de forças externas na direção desejada;
- o sistema deve ter massa total constante para ser dito isolado. Eventuais massas ejetadas ainda devem ser consideradas parte integrante do sistema.
- todas as velocidades devem ser tomadas em relação ao mesmo referencial inercial, em geral, a própria

Exemplo Resolvido 22: Um avião a jato, voando com velocidade $v = 700$ m/s expele gases com velocidade $U = 800$ m/s em relação às turbinas, descarregando a uma taxa $\phi = 100$ kg/s. O prof. Renato Brito pede para você determinar:

a) a intensidade da força propulsora (empuxo) dessa turbina;

b) a potência desenvolvida por cada turbina.



Solução:

a) Aplicando diretamente a relação eq79, temos:

$$F_e = \left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right).u = \frac{100\ kg}{1\ s} \times 800\ m/s \quad \Rightarrow \quad F = 80.000\ N$$

Cada turbina desse avião à jato aplica sobre ele uma força de 80.000 N. Essa força, nesse contexto, é denominada empuxo.

b) A potência desenvolvida pela força propulsora F, agindo no avião que se move com velocidade v, vale:

$$Pot = F.v = 80.000N \times 700\ m/s \quad \Rightarrow \quad Pot = 56.000.000\ W$$

2.27 – SISTEMAS COM GANHO DE MASSA

Um vagão se move com velocidade v quando passa a receber água da chuva que cai verticalmente. Com isso, o vagão passa a ser desacelerado por uma força de empuxo F_e a ser determinada.

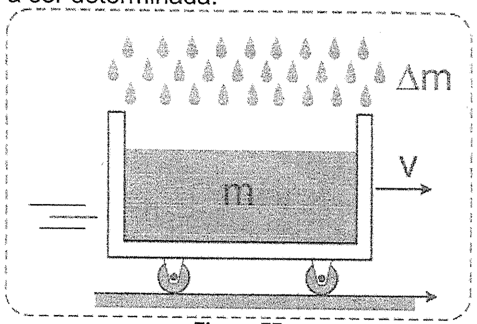


Figura 77

A figura 77 mostra a configuração inicial do sistema composto pelo vagão, a água contida no vagão e a porção de água Δm da chuva, totalizando uma massa $m + \Delta m$. A porção de água Δm em queda livre não possui velocidade horizontal ($v_x = 0$), de modo que a qdm horizontal do sistema inicialmente vale:

$$Q_{x\ sistema\ antes} = m.v + \Delta m.v_x = m.v + \Delta m.0 = m.v$$

Em seguida, um par de impulsos internos transfere, num intervalo de tempo Δt, uma quantidade de movimento horizontal $F.\Delta t$ do vagão para a água da chuva (Figura 78). Com isso, a velocidade horizontal da porção de massa aumenta de $v_x = 0$ para o valor final $v_x = v - \Delta v$, ao passo que a velocidade do vagão decresce de v para $v - \Delta v$, todas tomadas em relação à Terra.

Como sabemos, essa transferência interna de qdm não altera a qdm horizontal do sistema, que se mantém isolado durante todo o episódio. Assim a conservação da qdm horizontal do sistema nos permite escrever:

$$Q_{x\ sistema\ antes} = Q_{x\ sistema\ depois}$$

$$m.v = (m + \Delta m).(v - \Delta v)$$

$$m.v = m.v - m.\Delta v + \Delta m.v - \Delta m.\Delta v$$

Na expressão acima, o termo $\Delta m.\Delta v$ é um produto de dois infinitésimos e, portanto, pode ser desprezado no cálculo. Dizemos que se trata de um termo de segunda ordem.

$$\cancel{m}.v = \cancel{m}.v - m.\Delta v + \Delta m.v - 0$$

$$m.\Delta v = \Delta m.v \qquad \textbf{(eq87)}$$

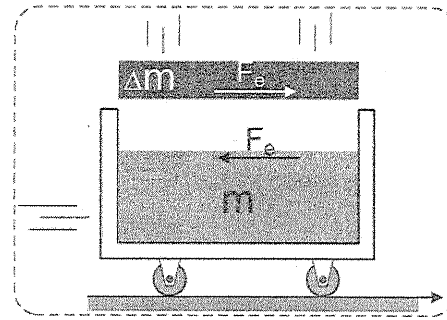


Figura 78 – ação da força empuxo F interna desacelerando o vagão, transferindo qdm do vagão para a porção de água da chuva.

Do exposto, vimos que, num intervalo de tempo infinitesimal Δt, a velocidade do vagão sofra um decréscimo de v para $v - \Delta v$. Assim, o módulo da aceleração do vagão nesse episódio vale:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \textbf{(eq88)}$$

e a empuxo F_e que age nele é dada por:

$$F_e = m.a = m.\frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \textbf{(eq89)}$$

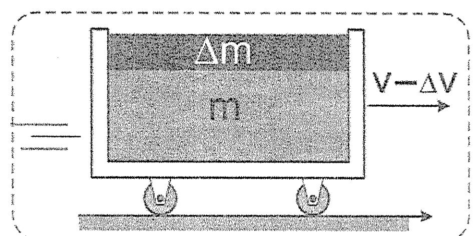


Figura 79 – Configuração final do sistema

Substituindo eq87 em eq89, vem:

$$F_e = m.a = m.\frac{\Delta v}{\Delta t} = v.\frac{\Delta m}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_e = \left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right).v} \qquad \textbf{(eq90)}$$

força empuxo

onde $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ é a taxa com que o vagão recebe massa (em kg/s) e v, mais uma vez, é a velocidade relativa entre a porção de massa Δm é a velocidade com que a massa é ejetada em relação ao vagão. Essa força propulsora também é conhecida como **empuxo** e não deve ser confundida com o empuxo de Arquimedes ☺.

Para todos os efeitos, quando o vagão se move sob a chuva, ele recebe a ação da força de empuxo F_e contra o seu movimento, responsável pela sua desaceleração.

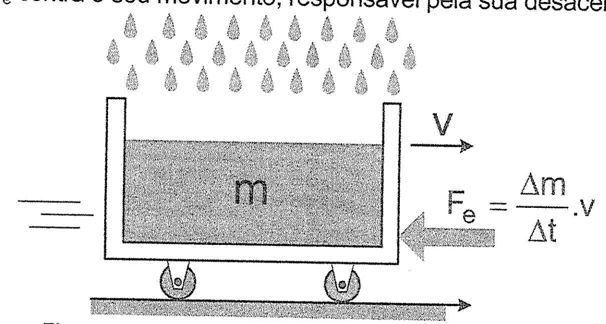


Figura 80 – Força empuxo retardando o vagão

Certamente, Claudete. Para isso, basta, por exemplo, que uma pessoa empurre o vagão, aplicando sobre ele uma força f⟶ de mesmo valor, mesma direção e sentido contrário ao do empuxo F_e⟵ externa, de forma a equilibrar a ação dele (Figura 81).

Dessa forma, o vagão se moverá com velocidade constante, devido ao equilíbrio das forças.

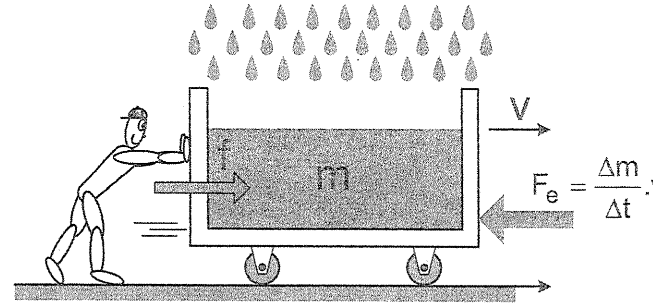
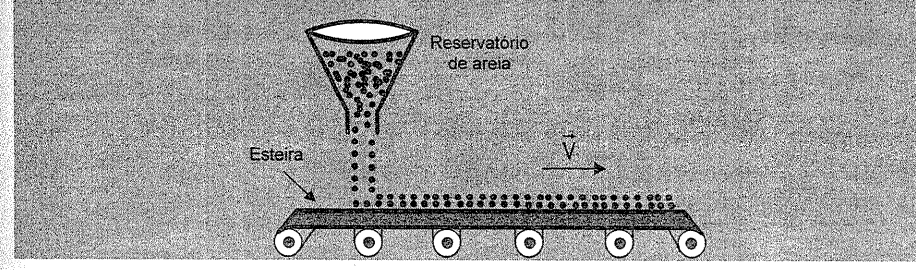


Figura 81 – Força f equilibrando a ação do empuxo F_e a fim de manter a caixa com velocidade constante.

Exemplo Resolvido 23: Deixa-se cair continuamente areia de um reservatório a uma taxa de 3,0 kg/s diretamente sobre uma esteira que se move na direção horizontal com velocidade v = 4 m/s constante. Considere que a camada de areia depositada sobre a esteira passa a se locomover com a mesma velocidade v, devido ao atrito. Desprezando a existência de quaisquer outros atritos, determine a força requerida para manter a esteira movendo-se com velocidade constante.



Solução:

Para que a areia que cai sobre a esteira adquira a mesma velocidade desta, um par de forças trocadas horizontalmente (atrito) age no sentido de acelerar a areia e retardar o movimento da esteira. Essa força que age no sentido de retardar a esteira é genericamente chamada de empuxo, sendo calculada pela relação eq83:

$$F_e = \left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right).v = \frac{3kg}{1\,s}.4\ m/s \quad \Rightarrow \quad F_e = 12\,N$$

Para manter a esteira se movendo com velocidade constante, seus motores devem compensar a ação desse empuxo aplicando uma força de 12 N a favor do movimento da esteira.

.28 – O EMPUXO E A VELOCIDADE RELATIVA

) empuxo é a força que age num corpo ou sistema, quando ele sofre um créscimo ou decréscimo de massa. Usando maior formalismo matemático, podemos generalizar dizendo que, em qualquer caso, o empuxo é dado pela expressão vetorial abaixo:

$$\vec{F}_e = \frac{\Delta m}{\Delta t}.\vec{V}_{rel} \qquad \textbf{(eq91)}$$

nde:

$\Delta m/\Delta t$ é a taxa de variação de massa do corpo ou sistema;

$\vec{V}_{rel}$ é a velocidade relativa da porção de massa Δm em relação a m, ou seja, a velocidade da porção de massa Δm no sistema de referência da massa m.

la relação eq91, está subentendido a seguinte convenção de sinais algébricos:

$\frac{\Delta m}{\Delta t} > 0$ quando a massa do corpo ou sistema está aumentando;

$\frac{\Delta m}{\Delta t} < 0$ quando a massa do corpo ou sistema está diminuindo;

ssim, de acordo com a relação eq91, o empuxo $\vec{F}_e$ aponta na mesma direção e sentido de $\vec{V}_{rel}$ quando a massa do corpo ou sistema está aumentando; e na mesma direção e sentido contrário ao de $\vec{V}_{rel}$ quando a massa do corpo ou sistema está diminuindo.

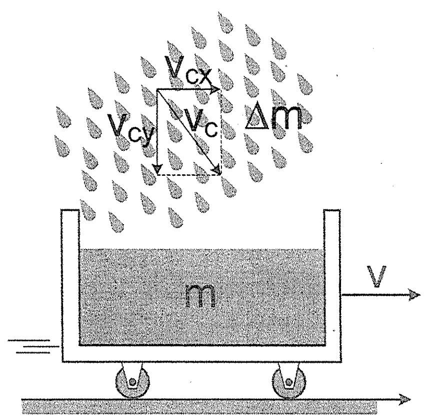


Figura 82 – chuva inclinada

la maioria das situações, estamos interessados apenas numa das componentes do empuxo como, por exemplo, a componente dele na direção do movimento da massa m. Assim, para determinar apenas a componente do empuxo na direção de interesse, fazemos uso da componente da $\vec{V}_{rel}$ na direção desejada.

Assim, para esclarecer, considere uma chuva que esteja caindo com velocidade Vc inclinada, conforme a Figura 82, sendo esta velocidade em relação à Terra.

Para determinarmos a componente do empuxo na direção do movimento do vagão (massa m), isto é, a sua componente horizontal F_{ex}, precisamos da velocidade relativa entre Δm (chuva) e m (vagão), na direção horizontal. Sendo Vcx a componente horizontal da velocidade da chuva e V a velocidade horizontal do vagão, ambos em relação à Terra, a velocidade relativa desejada tem módulo:

$$V_{rel} = |\, V - V_{CX} \,|$$

Assim, a componente horizontal do empuxo agindo no vagão tem módulo:

$$F_{ex} = \left|\frac{\Delta m}{\Delta t}\right|.|V_{rel}| = \left|\frac{\Delta m}{\Delta t}\right|.|\, V - V_{CX}| \qquad \textbf{(eq92)}$$

Se $V_{CX} > V$, é intuitivo o fato de que a chuva exercerá no vagão um empuxo a favor $F_{ex}\rightarrow$ do movimento dele, acelerando o vagão (Figura 83).

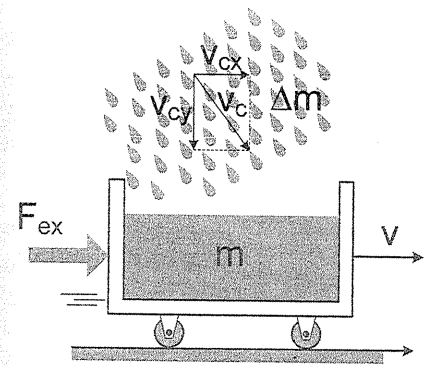


Figura 83 – caso Vcx > V

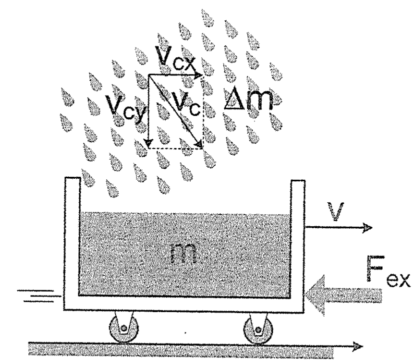


Figura 84 – caso Vcx < V

Caso contrário ($V > V_{CX}$), a componente horizontal do empuxo $F_{ex} \leftarrow$ agirá no sentido de retardar o vagão (Figura 84).

Finalmente, caso V = Vcx, a velocidade relativa entre m e Δm na horizontal será nula ($V_{rel} = V - V_{CX} = 0$) e, nesse caso, não haverá empuxo horizontal agindo sobre o vagão ($F_{ex} = 0$). Nesse caso, apesar de se mover sob a chuva, o vagão se moverá com velocidade constante (desprezando a ação de outras forças dissipativas).

Note que, embora não tenha sido mostrado nas figuras, existe também uma componente vertical do empuxo $F_{ey}\downarrow$ agindo sobre o vagão devido à velocidade relativa Vrel = Vcy$\downarrow$ entre a chuva (Δm) e o vagão (m) naquela direção, dada por:

$$F_{ey} = \left|\frac{\Delta m}{\Delta t}\right|.V_{cy}$$

Quando um navio, por exemplo, ejeta água a uma taxa $\Delta m/\Delta t$ com velocidade V_o em relação ao próprio navio, numa direção que forma um ângulo α com a horizontal (Figura 85), este navio recebe, da água expelida, uma força empuxo Fe, na mesma direção e sentido contrário da velocidade relativa V_o (Figura 86), de intensidade dada pela relação eq91:

$$F_e = \frac{\Delta m}{\Delta t}.V_o$$

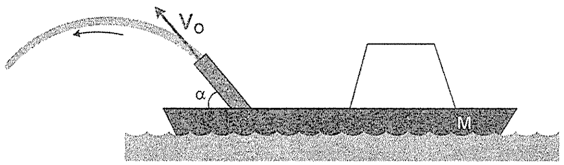


Figura 85

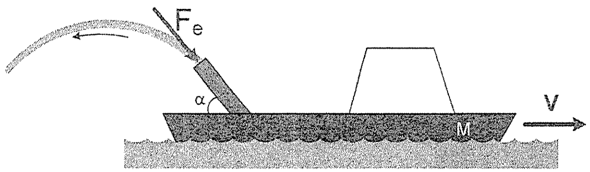


Figura 86

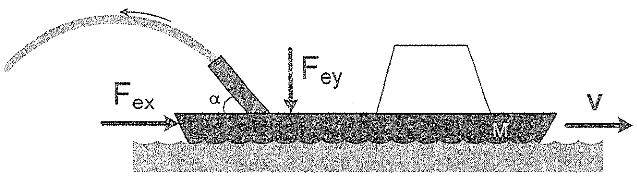


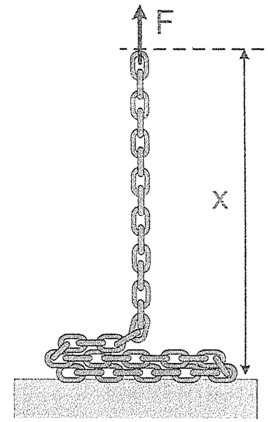
Figura 87

Entretanto, a componente do empuxo na direção $\rightarrow$ do movimento do navio (Figura 87) vale apenas $F_{ex} = F_e.\cos\alpha$, ao passo que a componente vertical do empuxo aponta para baixo $\downarrow$ e tem módulo $F_{ex} = F_e.\text{sen}\alpha$.

Exemplo Resolvido 24: Uma corrente fina, flexível, cuja densidade linear é λ, está amontoada sobre uma mesa, como mostra a figura. Um operador segura uma das extremidades da corrente e a suspende verticalmente com velocidade constante v num local onde a gravidade local vale g. Para tanto, ele precisa exercer uma força F sobre essa extremidade.

a) ache uma expressão para o módulo dessa força **F** em função da altura **x** da extremidade superior da corrente em relação ao nível da mesa;

b) Se a corrente possui um comprimento total L, calcule o trabalho realizado por essa força F para levantar essa corrente com velocidade constante V, desde x = 0 até x = L, quando o último elo perde o contato com a mesa.



Solução:

a) A densidade linear da corda vale λ, assim, a massa Δm de qualquer trecho da corrente de comprimento ΔL vale $\Delta m = \lambda.\Delta L$.

Seja m a massa do comprimento x da corrente que já se encontra na vertical movendo-se com velocidade v. Assim, temos:

$$m = \lambda.x \qquad \textbf{(eq93)}$$

Em cada instante, esse trecho vai "ganhando mais massa". Isso ocorre por que, em cada instante, uma nova porção de corrente de comprimento Δx e massa $\Delta m = \lambda.\Delta x$ que se encontrava em repouso na horizontal passa a integrar o trecho vertical sendo abruptamente acelerada da velocidade zero para a velocidade v do trecho vertical da corrente.

Logicamente, pela lei da ação e reação, quando o trecho vertical da corrente puxa para cima $F_e\uparrow$ uma porção de corrente ainda em repouso, recebe dessa da porção de corrente a reação puxando o trecho vertical para baixo $F_e\downarrow$, dificultando a subida do trecho vertical da corrente. É o *"preço que o trecho vertical paga"* para adquirir mais massa.

Como sabemos, essa força que decorre do acréscimo ou decréscimo de massa de um corpo ou sistema é chamada empuxo, sendo dada pela relação eq91.

$$F_e = \frac{\Delta m}{\Delta t}.V_{rel} \qquad \textbf{(eq91)}$$

onde V_{rel} *é a velocidade relativa entre a massa m (o trecho vertical da corrente)* e a porção de massa Δm que ainda se encontra ainda imóvel sobre a mesa.

Ora, como o trecho vertical sobe com velocidade constante v em relação à Terra, a velocidade relativa entre m e Δm vale $V_{rel} = v - 0 = v$.

Dessa forma, podemos calcular o empuxo agindo nessa corrente:

$$F_e = \frac{\Delta m}{\Delta t}.V_{rel} = \frac{\lambda.\Delta x}{\Delta t}.v = \lambda.\frac{\Delta x}{\Delta t}.v = \lambda.v.v$$

$$\therefore \quad F_e = \lambda.v^2 \qquad \textbf{(eq94)}$$

Na Figura 88, vemos o diagrama das forças agindo no trecho vertical da corrente: o seu peso m.g↓, a força F ↑ exercida pelo operador que ergue a corrente e empuxo F_e↓ que a porção da corrente ainda em repouso exerce no trecho vertical em movimento.

Como esse trecho vertical sobe com velocidade constante, a força resultante agindo sobre ele deve ser nula. Assim:

$$F = m.g + F_e, \quad \text{com } m = \lambda.x \text{ e } F_e = \lambda.v^2$$

$$F = \lambda.x.g + \lambda.v^2 \qquad \textbf{(eq95)}$$

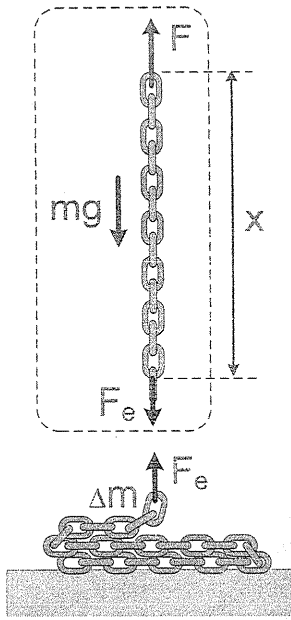


Figura 88

Logicamente, o domínio de validade da função acima se restringe ao comprimento L da corrente, ou seja, $0 \le x \le L$.

A relação eq95 nos diz que a força F a ser aplicada, a fim de suspender a corrente vertical mente com velocidade constante v, é função linear da altura x da extremidade superior da corrente. Quanto maior for a velocidade v constante com que a corrente for erguida em movimento uniforme, maior será a força F requerida.

Entretanto, se a corrente for erguida quase-estaticamente, isto é, erguida com velocidade desprezível ($v \cong 0$), a força F coincidirá com peso do trecho vertical em cada instante, ou seja, $F = \lambda.x.g$.

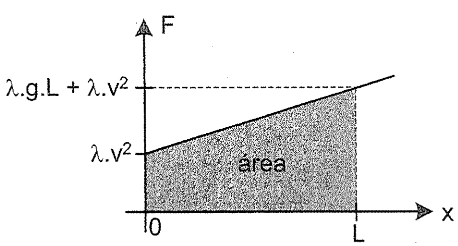


Figura 89

b) O trabalho realizado pela força F, em todo o intervalo $0 \le x \le L$, é numericamente igual à área sob o gráfico da Figura 89. Assim, temos:

$$\tau \overset{n}{=} \text{área} = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(\lambda gL + \lambda v^2 + \lambda v^2).L}{2}$$

$$\tau = \frac{\lambda g L^2}{2} + \lambda v^2 L \qquad \textbf{(eq96)}$$

Assim, ao término do processo de erguimento da corrente, quando o último elo da corrente perde o contato com o solo, a soma da energia potencial gravitacional dessa corrente com a sua energia cinética vale:

$$Emec = Epot + Ecin = m.g.H_{cm} + \frac{mv^2}{2} = (\lambda L).g.\frac{L}{2} + \frac{(\lambda L)v^2}{2}$$

$$Emec = \frac{\lambda g L^2}{2} + \frac{\lambda v^2 L}{2} \qquad \textbf{(eq97)}$$

Para fazer um balanço da energia, compare a energia mecânica (eq97) da corrente ao final do processo de erguimento com o trabalho realizado pelo operador (eq96) para erguê-la completamente.

Pelo *Princípio do Trabalho das Forças Não-Conservativas* (relação eq37 página 53), o trabalho realizado pela força F exercida pelo operador no processo de erguimento da corrente deveria ser igual ao incremento de energia mecânica desse sistema. Entretanto, vemos claramente que o trabalho realizado é maior do que a Emec final desse sistema. Isto se deve às sucessivas colisões inelásticas internas que ocorrem quando cada elo é subitamente levado do repouso até a velocidade v.

Todos os processos mecânicos que trazem embutidas súbitas variações de velocidade são inerentemente inelásticos e, assim, ocorrem com dissipação de energia mecânica. As colisões mecânicas elásticas anteriormente são apenas abstrações, idealizações teóricas que não ocorrem na prática.

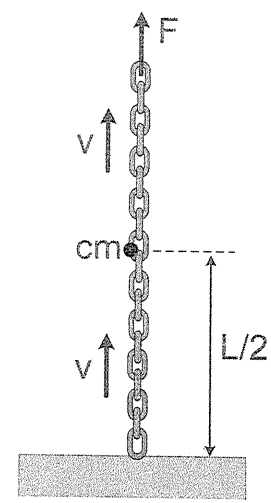


Figura 90

Assim, a energia mecânica dissipada nesse processo vale:

$$Emec_{\text{dissipada}} = \left(\frac{\lambda g L^2}{2} + \lambda v^2 L\right) - \left(\frac{\lambda g L^2}{2} + \frac{\lambda v^2 L}{2}\right) = \frac{\lambda v^2 L}{2} \qquad \textbf{(eq98)}$$

A relação eq98 nos mostra que se pode minimizar a dissipação de energia realizando-se o processo quase-estaticamente, ou seja, erguendo-se a corda com velocidade literalmente nula (v = 0).

Para finalizar, note que o *Princípio do Trabalho Total* (Teorema da Energia Cinética), assim como o *Princípio do Trabalho das Forças Não Conservativas*, não se aplica ao cálculo do trabalho realizado pela força F nesse problema. Isso se deve ao fato de a massa do trecho vertical da corrente ser variável, conforme discutimos largamente na página 82 (exemplo resolvido 20) e na página 84 propriedade 10.

Exemplo Resolvido 25: Seja uma corrente fina, flexível, de comprimento L e massa total M mantida inicialmente em repouso na vertical, com seu elo inferior apenas tocando o solo. Determine a intensidade da força F necessária para descer essa corda em movimento uniforme com velocidade constante v, em função da altura h da extremidade superior dessa corrente em relação ao solo.

Solução:

a) Durante a descida da corrente, cada elo que toca o solo e entra em repouso deixa de exercer tração sobre o elo acima dele. Dessa forma, o diagrama de forças agindo no trecho vertical da corrente é semelhante ao da Figura 88, exceto pelo fato não haver o par de empuxos F_e que agia durante o processo de erguimento dela.

A densidade linear dessa corda vale $\lambda = M/L$, assim a massa do comprimento x pendente vale:

$$m = \lambda.x = \frac{M}{L}.x \qquad \textbf{(eq99)}$$

Dessa forma, como a corrente desce com velocidade constante, vem:

$$F_R = m.a \quad \Rightarrow \quad F - m.g = 0$$

$$F = m.g = \boxed{\frac{Mg}{L}.x}$$

com x diminuindo no intervalo $0 \le x \le L$.

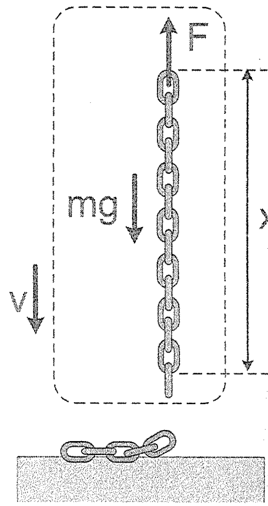


Figura 91

Exemplo Resolvido 26: Uma corrente fina, flexível, de comprimento L e massa total M é mantida inicialmente em repouso na vertical com seu elo inferior apenas tocando o solo. Se a corrente for abandonada do repouso, determine a marcação da balança durante o processo de queda livre da corrente, em função da altura x caída por ela.

Solução:

Durante a queda da corrente, o elo que está entrando em contato com a balança, em cada instante, é bruscamente levado ao repouso durante uma colisão inelástica e exerce sobre a o prato da balança uma força $F_e\downarrow$ (veja Figura 92c) dada pela relação eq84. A marcação da balança, em cada instante, será o peso

do comprimento x da corrente que já se encontra sobre o prato da balança mais essa força empuxo $\downarrow F_e$ (Figura 92c).

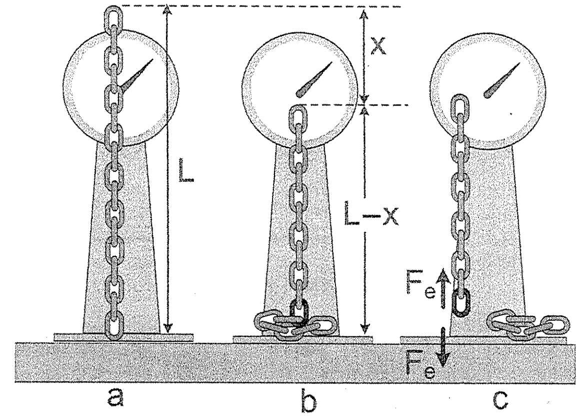


Figura 92

O elo preto da corrente que está entrando em contato com a balança (Figura 92b), após a corrente ter caído uma distância x sob ação da gravidade g, possui uma velocidade relativa ao prato da balança dada por $V_{rel} = \sqrt{2.g.x}$. Assim, a força empuxo $F_e\downarrow$ exercida (Figura 92c), quando uma porção de massa Δm do trecho vertical da corrente é acrescentada à massa m que já se encontra sobre o prato da balança, é dada por:

$$F_e = \frac{\Delta m}{\Delta t}.V_{rel} = \frac{\lambda.\Delta x}{\Delta t}.v = \lambda.\frac{\Delta x}{\Delta t}.v = \lambda.v.v = \lambda.v^2 = \lambda.(\sqrt{2gx})^2, \text{ com } \lambda = M/L$$

$$F_e = \frac{M}{L}.2gx \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_e = \frac{2Mg}{L}.x}$$

Adicionalmente, o peso do comprimento x da corrente que já se encontra sobre o prato da balança (Figura 92c) vale:

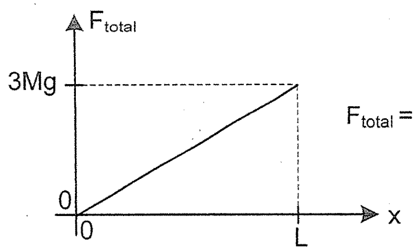
$$P = m.g = (\lambda.x).g = \frac{M}{L}.x.g \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{Mg}{L}.x}$$

Assim, a marcação da balança, após a corrente ter caído uma distância x, vale:

$$F_{total} = F_e + P = \frac{2Mg}{L}.x + \frac{Mg}{L}.x \quad \Rightarrow \quad F_{total} = \boxed{\frac{3M.g}{L}.x} \qquad \textbf{(eq100)}$$

Assim, de acordo com o resultado encontrado, a marcação da balança em cada instante é três vezes maior do que o peso da parte da corrente que já se encontra em repouso sobre o prato da balança ($F_{total} = 3P$).

Durante a queda da corrente, o parâmetro x aumenta no intervalo $0 \le x \le L$, e a marcação da balança (eq100) varia em função de x de acordo com o gráfico abaixo:



$$F_{total} = \frac{3M.g}{L}.x$$

Figura 93

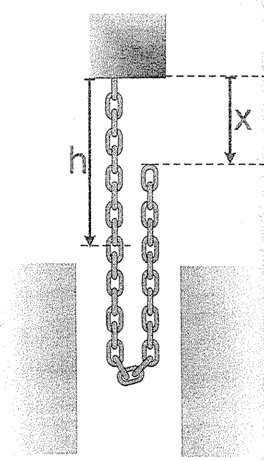
Exemplo Resolvido 27: A extremidade livre de uma corrente de comprimento total L e densidade linear ρ, é abandonada a partir do repouso em x = 0 sob ação da gravidade g. Determine:

a) a força que a corrente exerce no teto, em função da distância x caída pela sua extremidade livre;

b) a tração ao longo do trecho imóvel da corda em função da distância h ao teto e da distância x percorrida pela sua extremidade livre.

Solução:

a) A Figura 94c mostra o diagrama das forças que agem no ramo esquerdo da corrente, durante a queda livre do seu ramo direito.



Agem, nessa parte imóvel da corrente, o seu peso $m.g\downarrow$, a força $F\uparrow$ que o teto exerce sobre o primeiro elo da corrente e o empuxo $F_e\downarrow$ que o elo terminal preto exerce sobre o último elo do ramo esquerdo, ao ser bruscamente levado ao repouso.

Como o ramo esquerdo da corrente permanece em repouso (equilíbrio estático), podemos escrever:

$$F_R = m.a \quad \Rightarrow \quad F - m.g - F_e = 0$$

$$\therefore \quad \boxed{F = m.g + F_e} \qquad \textbf{(eq101)}$$

Para determinarmos o peso m.g do ramo esquerdo, precisamos determinar os comprimentos y e z nas Figuras 94a e 94b.

Da Figura 94b, temos: $x + 2y = L \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{L-x}{2}}$ **(eq102)**

Assim, o comprimento do ramo esquerdo nas Figuras 94b e 94c valem:

$$x + y = x + \frac{L-x}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x + y = \frac{L}{2} + \frac{x}{2}} \qquad \textbf{(eq103)}$$

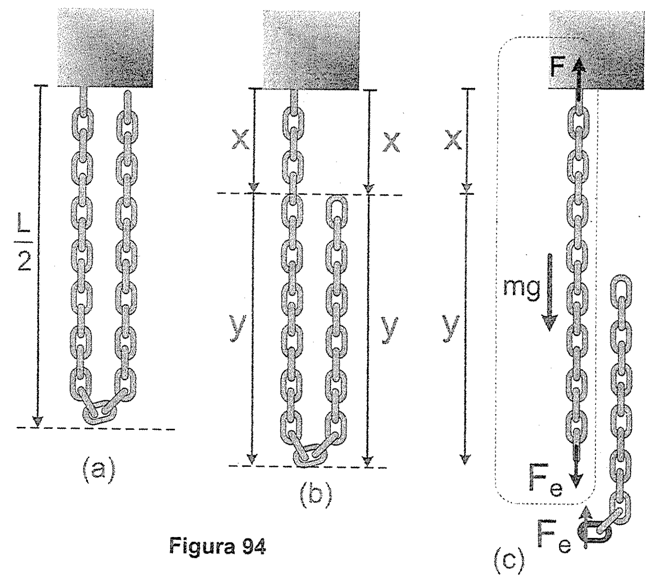


Figura 94

Pelos cálculos acima, percebemos que, no intervalo de tempo Δt em que a extremidade da corda cai uma altura x, o comprimento do ramo esquerdo da corrente aumenta de L/2 para L/2 + x/2.

Isso indica que, nesse intervalo de tempo Δt, uma massa $\Delta m = \lambda(x/2)$ foi incorporada ao ramo esquerdo da corda e foi levado bruscamente da velocidade $v = \sqrt{2g.x}$ ao repouso, ao interagir com o último elo do ramo esquerdo da corrente (de massa m), exercendo sobre ele um empuxo F_e dado por:

$$F_e = \frac{\Delta m}{\Delta t}.V_{rel} = \frac{\rho.\Delta x/2}{\Delta t}.v = \frac{\rho}{2}.\frac{\Delta x}{\Delta t}.v = \frac{\rho}{2}.v.v = \frac{\rho}{2}.v^2 = \frac{\rho}{2}.(\sqrt{2gx})^2$$

$$\boxed{F_e = \rho.g.x} \qquad \textbf{(eq104)}$$

O peso do ramo esquerdo dessa corrente vale:

$$P = m.g = \rho.(x+y).g \quad \overset{eq103}{\Rightarrow} \quad \boxed{P = \rho\left(\frac{L+x}{2}\right)g} \qquad \textbf{(eq105)}$$

Assim, substituindo eq104 e eq105 em eq101, vem:

$$F = P + F_e = \rho\left(\frac{L+x}{2}\right)g + \rho.g.x \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{(L+3x).\rho g}{2}}$$

b) Para determinar a tração T ao longo do ramo esquerdo da corrente, em função dos parâmetros **x** e **h**, durante o processo de queda livre, determinemos primeiramente o peso P_c daquele trecho da corda (Figura 95a).

Da geometria, vemos que:

$$x + y = h + c \quad \Rightarrow \quad c = (x + y) - h$$

Usando eq103 vem:

$$c = \frac{L+x}{2} - h \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{L+x-2h}{2}} \qquad \textbf{(eq106)}$$

Assim, o peso do trecho c da corrente vale:

$$P_c = m_c.g = \rho.c.g = \rho.\frac{(L+x-2h)}{2}.g$$

$$\boxed{P_c = \frac{\rho g.(L+x-2h)}{2}} \qquad \textbf{(eq107)}$$

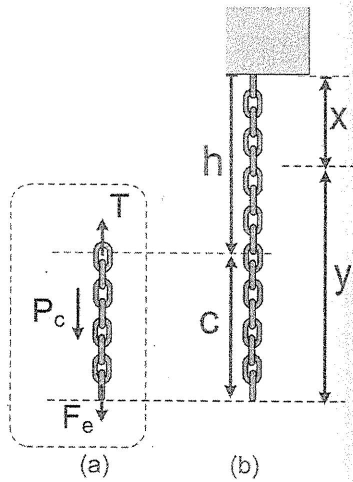


Figura 95

Aplicando a 2ª lei de Newton ao trecho c da corda na Figura 95a, que se encontra em equilíbrio estático, vem:

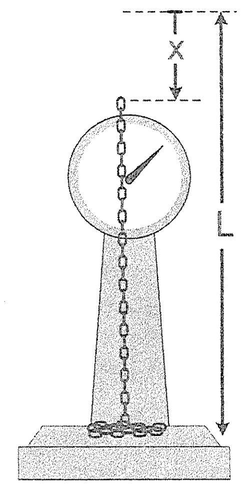
$$F_R = m_c.a \quad \Rightarrow \quad T - P_c - F_e = 0, \text{ usando eq105 e eq107, vem:}$$

$$T = P_c + F_e = \frac{\rho g.(L+x-2h)}{2} + \rho.g.x \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{\rho g.(L+3x-2h)}{2}} \qquad \textbf{(eq108)}$$

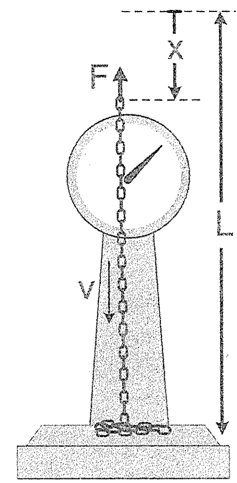
PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

Questão 97

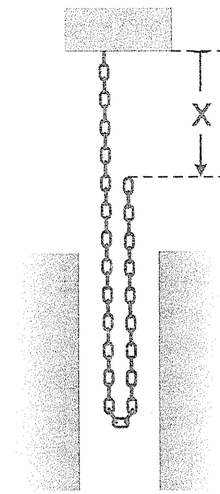
Uma corrente fina, flexível, de comprimento total L e densidade linear ρ é abandonada do repouso da posição vertical, com seu último elo inferior apenas tocando o prato de uma balança, determine a marcação da balança durante o processo de queda livre da corrente, em função da altura x caída por ela.



Questão 97



Questão 98



Questão 99

Questão 98

A extremidade superior de uma corda de comprimento total L e densidade linear ρ é abaixada com uma velocidade constante v pela força F. Determine:

a) a marcação da balança em função de ρ, da distancia x descida pela corrente e da gravidade g;

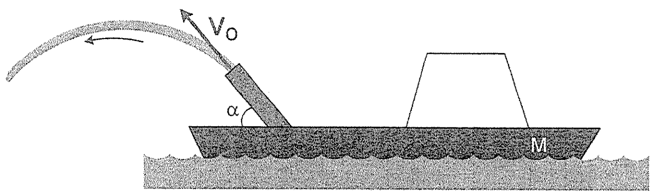
b) a intensidade da força F em função de x, ρ e g.

Questão 99

A extremidade livre de uma corrente de comprimento total L e massa total M é abandonada do repouso da posição indicada na figura, em x = 0, sob ação da gravidade g. Determine a força que a corrente exerce no teto, em função da distância x caída pela sua extremidade livre

Questão 100

Um navio cargueiro encontra-se em alto mar e faz uso de um sistema de propulsão que coleta água pela base do seu caso ejetando 24 toneladas de água por minuto com velocidade 54 km/h em relação ao navio numa direção que forma um ângulo α = 60º com a horizontal. O navio se move com velocidade constante sob ação de uma força de resistência ao seu movimento dada por R = k.v, onde v é a velocidade do navio em relação ao mar e a constante vale k = 400 kg/s. Determine a velocidade v do navio.

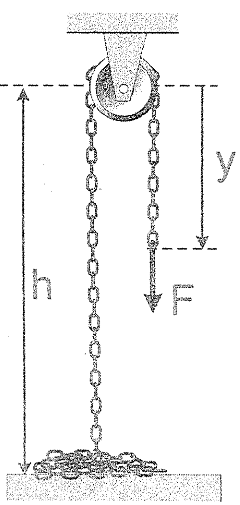


Questão 101 –

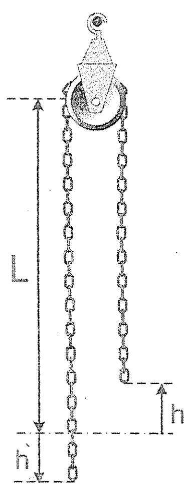
A corrente da figura tem comprimento total L, densidade linear ρ e todos os atritos são desprezíveis. Desprezando o pequeno tamanho e a massa da polia, determine:

a) A força F necessária para descer a corrente com uma velocidade constante v, em função de ρ, g, v, h e y;

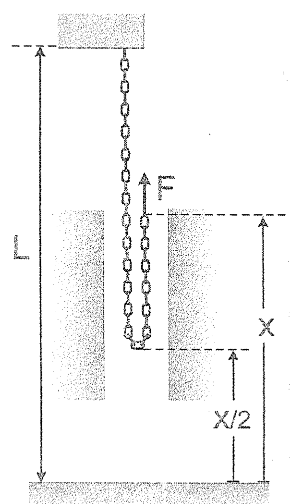
b) A força que o solo exerce na pilha de corrente.



Questão 101



Questão 102



Questão 103

Questão 102 –

A corrente de densidade linear ρ passa pela pequena roldana que gira livremente e é solta a partir do repouso com apenas uma pequena descompensação h para iniciar o movimento. Despreze o peso da roldana e de sua estrutura de apoio e o peso da pequena quantidade de corrente em contato com a roldana. À medida que h varia no intervalo $0 \leq h \leq L$, determine:

a) a aceleração a em função de h;

b) a velocidade da corda em função de h;

c) a força R suportada pelo gancho que mantém a roldana suspensa em função de h.

Questão 103 –

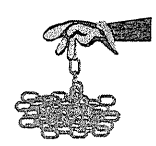
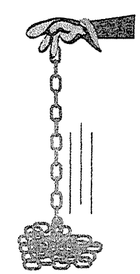
A extremidade livre da corrente flexível de densidade linear ρ e comprimento total L recebe uma velocidade constante v para cima, à medida que é suspensa por uma força F. Determine:

a) Uma expressão literal para a força F em função de ρ, v, g e x;

b) Uma expressão literal para a tração T que a extremidade superior da corda exerce no teto em função de ρ, v, g e x;

Questão 104 –

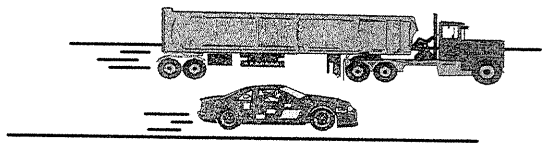
Uma corrente fina de densidade linear ρ e comprimento total L encontra-se amontoada. Você segura uma extremidade e abandona o restante da pilha que cai em queda livre num local onde a gravidade vale g. Determine, em função do tempo t, a força que deve ser exercida pela mão na extremidade superior da corrente para mantê-la em repouso durante a queda do restante da corrente.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Questão 105 –

Um caminhão carregado e um pequeno automóvel movem-se ambos com a mesma quantidade de movimento. Sobre esse movimento, considere as afirmativas a seguir:



I - A velocidade do automóvel é maior que a do caminhão;

II - O impulso que deve ser aplicado para frear o caminhão é maior que o impulso que deve ser aplicado para fazer parar o automóvel;

III- Se ambos são freados (até parar) por meio de forças de mesma intensidade, o caminhão leva mais tempo até parar completamente que o carro;

IV- Se ambos são freados (até parar) por meio de forças de mesma intensidade, a distância percorrida pelo caminhão será maior do que a percorrida pelo automóvel durante a frenagem.

Pode-se afirmar que:
a) apenas I é verdadeira;
b) apenas I e II são verdadeiras;
c) apenas I e III são verdadeiras;
d) apenas II e IV são verdadeiras;
e) todas as afirmativas são verdadeiras.

Questão 106

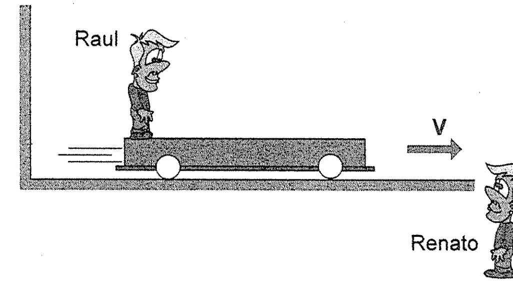
Uma bola de futebol, inicialmente em repouso, é chutada por um jogador, que lhe aplica um impulso I. Se a massa da bola vale M, o trabalho realizado pela força do chute vale:

a) $\frac{I^2}{2.M}$ b) $\frac{I^2}{3.M}$ c) $\frac{I^2}{4.M}$ d) $\frac{I^2}{5.M}$ e) $\frac{I^2}{6.M}$

Questão 107 –

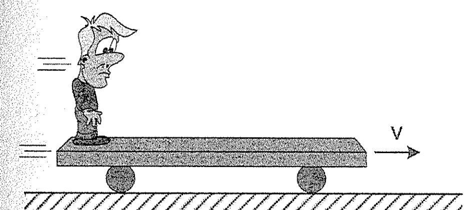
Considere o garoto Raul, de massa 2M, em repouso sobre a plataforma (massa 4M) se desloca com velocidade V = 20 cm/s em relação ao solo liso. A partir de certo instante, o garoto Raul começa a caminhar ao longo da plataforma para a direita, o que faz com que a mesma se mova com velocidade menor em relação ao solo. Com que velocidade Raul deve caminhar em relação à plataforma para que a mesma passe a ficar parada em relação ao irmão Renato, que observa a cena imóvel no solo ?

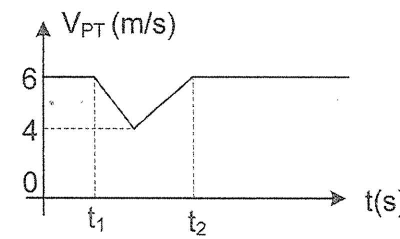
a) 20 cm/s
b) 30 cm/s
c) 40 cm/s
d) 50 cm/s
e) 60 cm/s



Questão 108 **(UFC adaptada)**

A figura mostra um atleta de massa M parado sobre uma prancha de massa 2M. A prancha se desloca para a direita, com velocidade constante, V_{PT} = 6 m/s em relação à Terra, sobre trilhos horizontais, retos e sem atrito. Em dado instante de tempo t_1, o atleta começa a correr sobre a prancha, indo de uma extremidade à outra, onde pára no instante t_2. A velocidade V_{PT} da prancha em relação à Terra, durante todo esse episódio, é dada pelo gráfico abaixo.



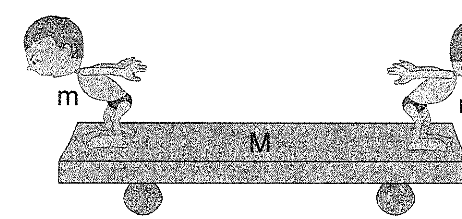


A velocidade máxima do atleta em relação à prancha, durante sua corrida sobre ela, foi:

a) 2m/s b) 4m/s c) 6m/s d) 8m/s e) 10m/s.

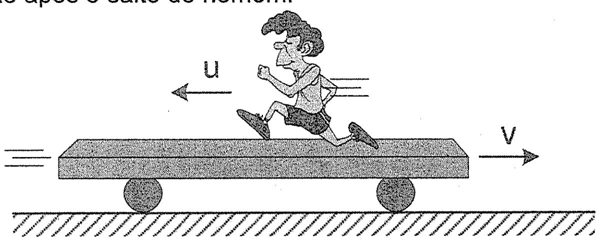
Questão 109 –

Dois atletas de massa m encontram-se em repouso sobre uma plataforma de massa M que está parada sobre um solo horizontal liso. Inicialmente, o atleta da esquerda salta para a esquerda com uma velocidade u em relação à plataforma. Em seguida, o outro atleta salta para a direita com velocidade de mesmo módulo u em relação à plataforma. Determine o sentido e o valor da velocidade da plataforma após esse episódio.



Questão 110 -

Um homem de massa **m** encontra-se parado sobre um vagão de massa **M** que se move com velocidade v por inércia, como mostra a figura, em um trecho retilíneo e horizontal de linha férrea sem atrito. Em seguida, o homem começa a correr em sentido oposto ao do movimento do vagão e, chegando à extremidade deste, salta de modo que sua velocidade em relação ao vagão, no instante em que está deixando o vagão pela extremidade esquerda, vale u←. Determine a velocidade do vagão após o salto do homem.



Questão 111 -

Uma prancha de massa M encontra-se inicialmente em repouso livre para se mover ao longo de um plano horizontal liso. Sobre a prancha estão N homens de massa m.

a) Num primeiro episódio, os N homens correm juntos até a extremidade direita da prancha e saltam dela simultaneamente. Admita que a velocidade deles em relação à prancha, logo após o salto, seja $\vec{u}\rightarrow$. Determine a velocidade adquirida pela prancha após o salto dos homens;

b) Num segundo episódio, cada um dos N homens corre até a extremidade direita da prancha e salta dela, um após o outro. Admita que a velocidade de cada um deles em relação à prancha, logo após o salto, seja $\vec{u}\rightarrow$. Determine a velocidade adquirida pela prancha após o salto do último homem.

c) Em qual dos dois episódios a prancha adquire maior velocidade, após todos os homens terem pulado?

Questão 112

Uma prancha de massa M pode deslizar sem atrito sobre um solo horizontal. Sobre a prancha estão dois homens de mesma massa m. Numa primeira situação, os homens correm e pulam juntos e possuem velocidade horizontal v em relação à prancha, ao perder o contato com ela. Na segunda situação, cada homem corre e pula, um de cada vez, com a mesma velocidade horizontal v em relação à prancha ao perder o contato com ela. Determine:

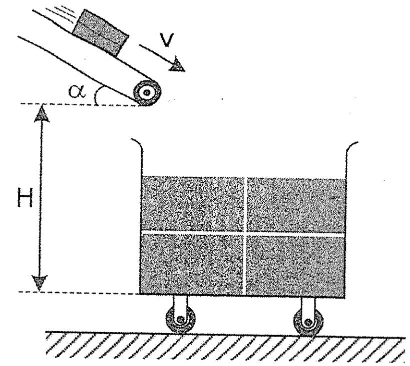
a) a velocidade adquirida pela prancha no primeiro caso;

b) a velocidade adquirida pela prancha no segundo caso;

c) em qual caso a velocidade adquirida pela prancha foi maior.

Questão 113 –

Uma caixa de massa m = 10 kg é descarregada de uma correia transportadora com velocidade de 4 m/s formando ângulo $\alpha = 60°$ com a horizontal e desembarca num carro de massa M = 30 kg. Sabendo que o carro está inicialmente em repouso e pode correr livremente, determine a velocidade final do carro.



Questão 114 –

Resolva o problema, supondo que uma caixa única de 10 kg é substituída por duas caixas de 5 kg cada. Quando a segunda caixa atinge o carro, a primeira caixa de 5 kg já se encontra parada em relação ao carro.

Questão 115 - (ITA 85) –

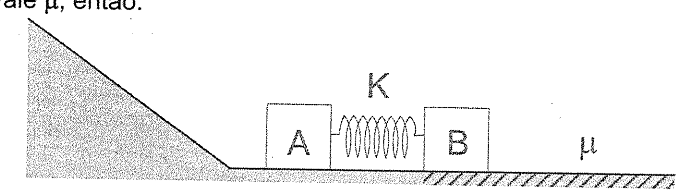
Um atleta de massa 60,0 kg carregando um corpo de 15,0 kg dá um alto de inclinação 60°, em relação ao plano horizontal com velocidade inicial 10 m/s. Ao atingir a altura máxima lança horizontalmente para trás o corpo com velocidade 2 m/s em relação ao centro de massa do sistema formado por ele próprio mais o corpo. Adotando para aceleração da gravidade o valor $g = 10{,}0\ m/s^2$, podemos afirmar que o atleta ganhará, em alcance horizontal, a distância:

a) $0{,}87\sqrt{3}$ m b) $-0{,}25\sqrt{3}$ m c) $0{,}25\sqrt{3}$ m d) $1{,}25\sqrt{3}$ m e) zero

Questão 116 –

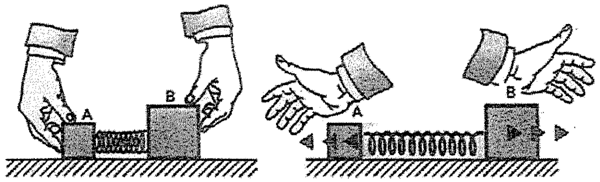
Sejam dois blocos A e B, de massas 2M e M, estavam inicialmente em repouso, comprimindo uma mola elástica ideal. Quando o sistema é liberado, o bloco A adquire movimento e sobe a rampa lisa, atingindo uma altura máxima **H**. O bloco B, por sua vez, percorre uma distância **D** sobre um solo rugoso até parar. Se o coeficiente de atrito vale μ, então:

a) $\mu.D = 4.H$
b) $\mu.D = 2.H$
c) $\mu.H = 2.D$
d) $\mu.H = 4.D$
e) $\mu.D = H$



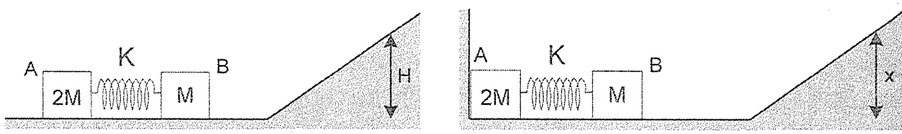
Questão 117

Uma mola, de comprimento natural 20 cm e constante elástica $K = 25.10^3$ N/m, foi comprimida entre duas caixas A e B, de massas 2 kg e 8 kg, sobre um solo liso. Quando o comprimento da mola estava reduzido a 16 cm, o operador abandona as caixas simultaneamente. Determine a velocidade adquirida por cada caixa, após perder o contato com a mola.



Questão 118 –

Duas caixas A e B estão em repouso conectadas através de uma mola que armazena energia mas encontra-se travada por um fio de nylon. Queimando-se o fio, a caixa B desloca-se pelo solo liso e sobe a rampa até uma altura H, enquanto a caixa A adquire velocidade para a direita.

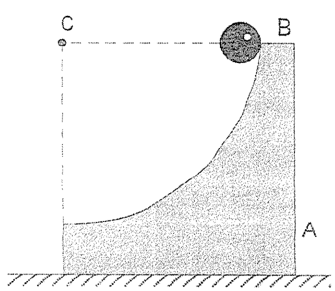


Se a caixa A estivesse encostada numa parede fixa, ao queimar o fio de nylon, a caixa B subiria a rampa até uma altura X igual a:

a) 3H/2 b) 4H/3 c) 5H/3 d) 5H/4 e) 2H

Questão 119 –

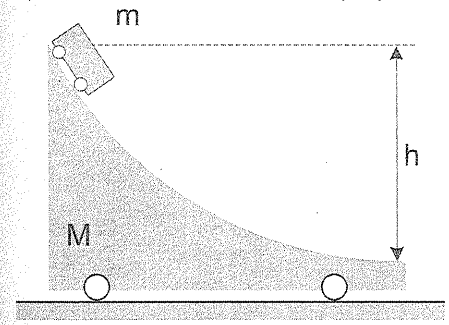
Na figura, o bloco A (massa 4M) e a esfera B (massa M) encontram-se inicialmente em repouso, com A apoiado num plano horizontal liso. Largando-se a esfera **B** na posição indicada, ela desce, descrevendo uma trajetória circular (1/4 de circunferência) de 1 m de raio e centro em **C**. Adotando $g = 10\ m/s^2$, determine as velocidades de **A** e de **B** no instante em que a esfera perde o contato com o bloco.



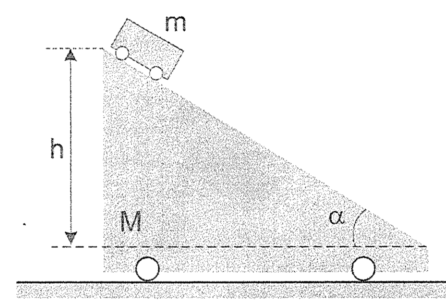
Questão 120

Um carro de massa M tem a forma de uma rampa curva cuja extremidade inferior é horizontal. Ele está em repouso sobre uma superfície horizontal lisa quando um carrinho de massa m é abandonado na rampa à altura vertical h acima da extremidade inferior da mesma. Sabendo que todos os atritos são desprezíveis e a gravidade local vale g, determine:

a) a velocidade da rampa no instante em que o carrinho perde o contato com ela;
b) a velocidade v do carrinho pequeno nesse instante.



questão 120



questão 121

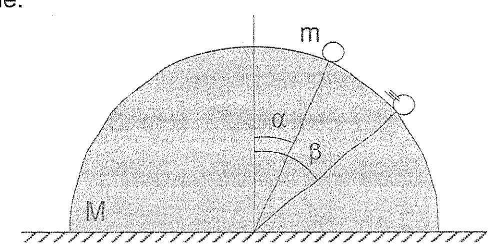
Questão 121 –

Uma rampa possui massa M e sua superfície inclinada faz um ângulo α com a horizontal. Ela está em repouso sobre uma superfície horizontal lisa quando um carrinho de massa m é abandonado sobre ela a uma altura vertical h acima da sua extremidade inferior. Sabendo que todos os atritos são desprezíveis e a gravidade local vale g, determine:

a) a velocidade da rampa no instante em que o carrinho perde o contato com ela;
b) a velocidade v do carrinho pequeno nesse instante.

Questão 122 (Seletiva para a IPHO) –

Um hemisfério de massa M e raio R encontra-se inicialmente em repouso, livre para se mover sobre uma superfície horizontal lisa. Uma bolinha de massa m e raio r é abandonada do repouso sobre o hemisfério, numa posição que forma ângulo α com a horizontal. Se a gravidade local vale g, o prof. Renato Brito pede que você determine:

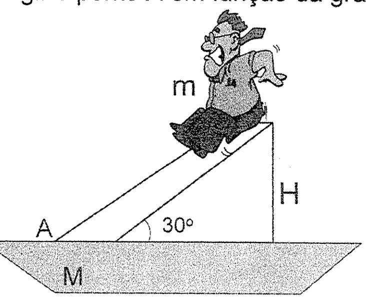


a) a velocidade angular ω da bolinha numa posição que forma um ângulo β com a *vertical, $\beta > \alpha$.*

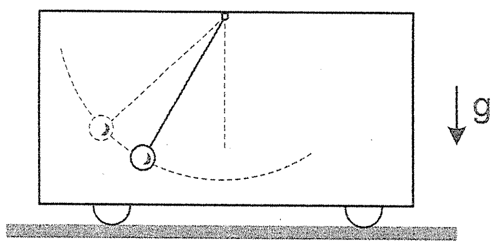
) a velocidade de recuo rampa hemisférica na situação do item a;
 a altura da bolinha em relação à superfície horizontal,quando ela perder o contato com a rampa hemisférica.

uestão 123 - (ITA 78)

m garoto pode deslizar sobre um escorregador solidário com um barco, a partir e uma altura H. O plano do escorregador forma um ângulo 30° com o plano orizontal. A massa m do garoto é igual à metade da massa M do conjunto barco + scorregador. Supondo que o sistema inicialmente esteja em repouso e despreando os atritos, determine a velocidade do barco no instante em que o garoto ingir o ponto A em função da gravidade g e da altura H.



questão 123



questão 124

uestão 124 -

m vagão de massa M está livre para se mover ao longo de um solo horizontal so. Um pêndulo simples de massa **m** e comprimento inicial **L** foi pendurado ao to do vagão como mostra a figura. Estando o sistema inicialmente em repouso, pêndulo é abandonado a partir de uma posição em que o fio forma um ângulo com a direção vertical. Qual será a velocidade do vagão quando o fio do êndulo estiver fazendo um ângulo β com a vertical, com $\beta < \alpha$? A gravidade ale g.

uestão 125

m vagão de massa 2M está livre para se mover ao longo de um solo horizontal liso. m pêndulo simples de mesma massa M e comprimento inicial L foi pendurado ao to do vagão. Estando o sistema inicialmente em repouso, o pêndulo é abandoado a partir de uma posição em que o fio forma um ângulo 60° com a direção ertical. Se a gravidade local vale g. Determine:
 a velocidade máxima atingida pela bolinha durante as oscilações em relação ao vagão ;
 a velocidade máxima atingida pela bolinha durante as oscilações em relação à Terra;
 a amplitude das oscilações executadas pelo vagão.

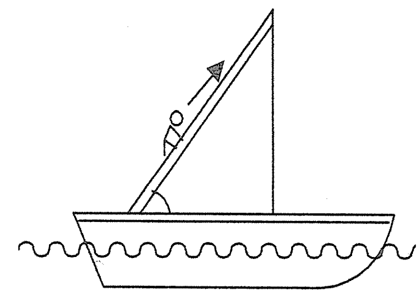
Questão 126 - (SARAEVA – ITA 88) –

Uma cunha com ângulo de base α encontra-se numa mesa horizontal lisa. Pelo plano inclinado da cunha sobe uma joaninha com uma velocidade constante u relativamente à cunha. Determinar a velocidade da cunha. Considera-se, que o besouro começou a mover-se, quando a cunha estava em repouso. A massa da cunha é M, a massa do besouro é m.

Questão 127 - (ITA-81)

No barco da figura há um homem de massa 60 kg subindo uma escada solidária ao barco de inclinada de 60° sobre o plano horizontal. Sabe-se que os degraus da escada estão distanciados de 20 cm um do outro e que o homem galga um degrau por segundo. A massa total do sistema barco mais escada é 300 kg. Sabendo que inicialmente o barco e o homem estavam em repouso em relação à água, podemos concluir que o barco passará a mover-se com velocidade:

a) 10 cm/s
b) 2,0 cm/s
c) 2,5 cm/s
d) $10\sqrt{3}$ cm/s
e) 1,66 cm/s



Questão 128 -

Uma rã de massa m está parada no extremo de uma tábua do massa M e comprimento L. A tábua está flutuando na superfície de um lago. A rã salta, formando um ângulo α em relação à horizontal na direção da tábua. Qual deve ser a velocidade inicial da rã V_o, para que depois do salto a rã encontre-se no outro extremo da tábua ?

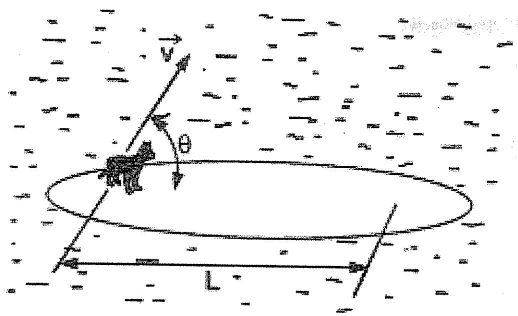
Questão 129 - (ITA 2008)

Na figura, um gato de massa m encontra-se parado próximo a uma das extremidades de uma prancha de massa M que flutua em repouso na superfície de um lago. A seguir, o gato salta e alcança uma nova posição na prancha, à distância L. Desprezando o atrito entre a água e a prancha, sendo θ o ângulo entre a velocidade inicial do gato e a horizontal, e g a aceleração da gravidade, determine a velocidade u de deslocamento da prancha logo após o salto.

a) $\sqrt{\dfrac{gLM}{\left(1+\dfrac{M}{m}\right)m.\text{sen}\alpha\cos\alpha}}$ b) $\sqrt{\dfrac{gLM}{\left(1+\dfrac{M}{m}\right)2m.\ \text{sen}2\alpha}}$ c) $\sqrt{\dfrac{gLM}{\left(1+\dfrac{M}{m}\right)2m.\ \text{sen}\alpha}}$

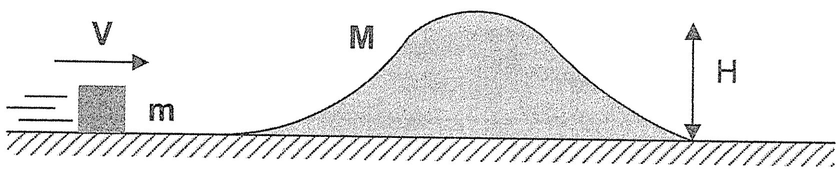
d) $\sqrt{\dfrac{gLm}{\left(1+\dfrac{M}{m}\right)2M.\tan\alpha}}$

e) $\sqrt{\dfrac{gLm}{\left(1+\dfrac{M}{m}\right)M.\tan\alpha}}$



Questão 130 -

A figura ilustra uma plataforma de massa M que pode se mover livremente sobre um solo horizontal liso. Um bloco de massa m é lançado com velocidade V e deseja transpor a plataforma, subindo por um lado e descendo pelo outro, sem perder o contato com a plataforma. Admita que a plataforma tenha uma altura H e que a aceleração da gravidade vale g.



a) Determine a menor velocidade V com que a caixa deve ser impulsionada para atingir seu objetivo;

b) Caso a caixa consiga transpor a plataforma, determine as velocidades finais da caixa e da plataforma;

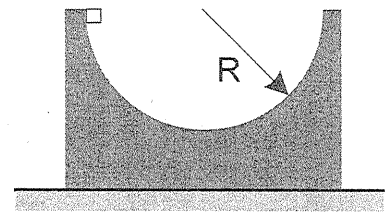
c) Caso a velocidade V da caixa seja insuficiente para transpor a plataforma, determine as velocidades finais da caixa e da plataforma.

Questão 131

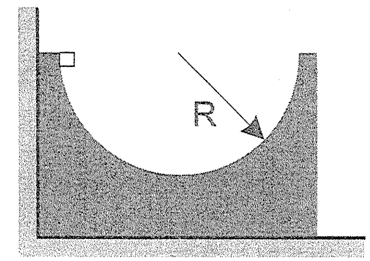
Um bloco simétrico de massa M, com um furo hemisférico de raio R na sua superfície superior, encontra-se em repouso e livre para se mover suma superfície horizontal lisa conforme a figura. Um pequeno corpo de massa m é abandonado, a partir do repouso, do ponto mais alto da rampa hemisférica. Determine a velocidade máxima adquirida pelo bloco, devido à interação com o corpo.

Questão 132 –

Um bloco simétrico de massa M, com um furo hemisférico de raio R na sua superfície superior, repousa sobre um solo horizontal lisa e está encostado em uma parede vertical. Um pequeno corpo de massa m é abandonado, a partir do repouso, do ponto mais alto da rampa hemisférica. Determine a velocidade máxima adquirida pelo bloco, devido à interação com o corpo.



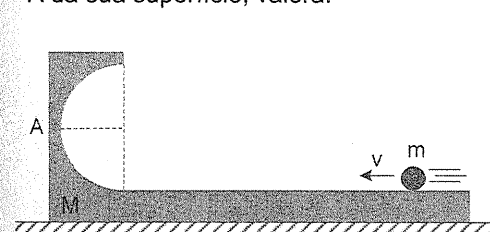
questão 131



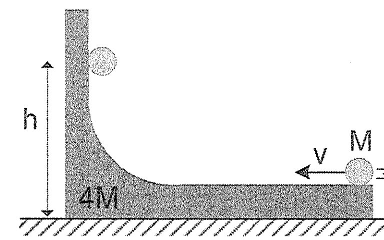
questão 132

Questão 133

A figura mostra uma esfera maciça de massa m que se move com velocidade horizontal v sobre uma plataforma de massa M. A plataforma repousa sobre o solo horizontal liso, contém um trecho semicircular de raio R e está livre para se mover na horizontal. A velocidade da plataforma, quando a esfera atingir o ponto A da sua superfície, valerá:



questão 133



questão 134

a) $\dfrac{m.\sqrt{gR}}{m+M}$ b) $\dfrac{m.\sqrt{2gR}}{m+M}$ c) $\dfrac{M.\sqrt{gR}}{m+M}$ d) $\dfrac{M.\sqrt{2gR}}{m+M}$ e) $\dfrac{m.v}{m+M}$

Questão 134

Uma rampa de massa 4M encontra-se em repouso, livre para se mover ao longo de um solo horizontal liso, quando uma esfera de massa M é lançada sobre sua superfície polida com velocidade inicial V. Determine a altura máxima h atingida pela esfera ao longo da rampa.

a) $\dfrac{V^2}{2.g}$ b) $\dfrac{V^2}{3.g}$ c) $\dfrac{2.V^2}{5.g}$ d) $\dfrac{2V^2}{3.g}$ e) $\dfrac{V^2}{5.g}$

Questão 135

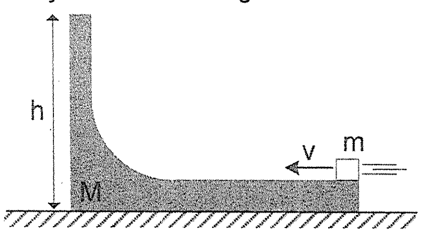
A figura mostra um bloquinho de massa m sobre um bloco maior, de massa M, cuja superfície é horizontal na extremidade direita e vai gradativamente se curvando até se tornar vertical na extremidade esquerda. O bloco maior repousa sobre uma superfície horizontal lisa. De repente, o bloquinho é empurrado para a esquerda e adquire velocidade v. Admita que todos os atritos sejam desprezíveis.

a) Determine a velocidade do bloco maior, quando o bloco menor está escorregando ao longo do trecho vertical da sua superfície;

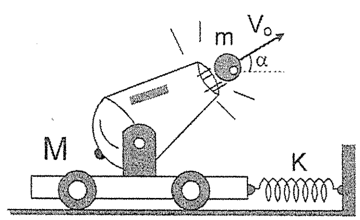
b) Determine a velocidade do bloquinho quando ele perde contato com a superfície do bloco maior, a uma altura h;

c) Determine a altura máxima atingida pelo bloquinho em relação ao solo;

d) Analise e diga se o bloquinho pequeno ainda aterrissará ou não sobre o bloco maior. Adicionalmente, determine a distância horizontal percorrida pelo bloco maior durante o intervalo de tempo em que o bloquinho menor se move sob ação exclusiva da gravidade.



questão 135



questão 136

Questão 136 –

Um canhão está rigidamente ligado a uma carreta, que pode se deslocar sobre trilhos horizontais, mas permanece presa a um batente através de uma mola de constante elástica $k = 4.10^5$ N/m, como mostra a figura. O canhão dispara um projétil de massa m = 200 kg, à velocidade de 160 m/s, num ângulo de 60° com a horizontal. Sendo a massa do canhão com a da carreta 4.000 kg, determine:

a) a velocidade de recuou do canhão

b) a deformação máxima da mola.

Questão 137

Um canhão de massa M = 10 kg encontra-se em repouso sobre um solo horizontal plano num local onde g = 10 m/s² quando dispara uma bala de massa m = 2 kg numa direção que forma um ângulo de 60° com a horizontal. Devido ao disparo, o canhão recua horizontalmente, percorrendo uma distância d = 1,6 m até parar. Sabendo que o coeficiente de atrito entre o canhão e o solo vale $\mu = 0{,}5$, a velocidade de disparo da bala de canhão vale:

a) 20 m/s b) 30 m/s c) 40 m/s d) 50 m/s e) 60 m/s

Questão 138 (ITA)

Um canhão montado sobre uma carreta, apontado numa direção que forma um ângulo de 30º com a horizontal, atira uma bala de 50 kg, cuja velocidade na boca do canhão é de 300 m/s. A massa total do canhão com a carreta é de 5 toneladas e a gravidade vale $g = 9{,}8$ m/s^2.

a) Calcule a velocidade inicial de recuo da carreta.

b) Se o coeficiente de atrito cinético é 0,7, de que distância a carreta recua?

Questão 139 –

De um canhão de massa M, que se encontra em repouso num plano inclinado, se dispara um projétil de massa m com velocidade inicial v_o horizontal. O plano inclinado forma um ângulo α com a horizontal. Se a gravidade local vale g e coeficiente de atrito cinético vale μ, determine a distância que o canhão percorre ladeira acima até parar.

Questão 140 -

Um canhão de massa **M** encontra-se inicialmente em repouso num solo horizontal liso e dispara um projétil de massa **m** numa direção inclinada. Sabendo que a gravidade local vale **g**, determine a velocidade de recuo do canhão, supondo conhecido:

a) a velocidade V_o do projétil em relação à Terra e a inclinação α dessa velocidade $\vec{V}_o$ em relação à horizontal;

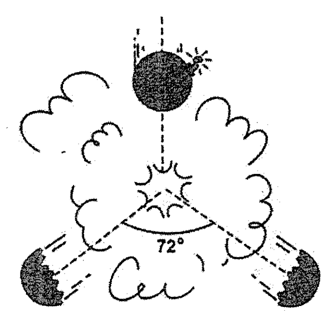
b) a velocidade V_1 do projétil em relação ao canhão e a inclinação β do cano do canhão em relação à horizontal.

c) a velocidade V_o do projétil em relação à Terra e a inclinação β do cano do canhão em relação à horizontal;

d) a velocidade V_1 do projétil em relação ao canhão e a inclinação α da velocidade $\vec{V}_o$ em relação à horizontal;

Questão 141 – (Não deixe de ler a resolução dessa questão ☺)

A granada representada na figura tem velocidade vertical de módulo 40 m/s no momento em que explode, dividindo-se em 2 fragmentos de massas iguais cujas velocidades têm módulos iguais e direções que formam entre si um ângulo de 72°. O módulo da velocidade, em m/s, de cada fragmento, imediatamente após a explosão, será :



a) 80 m/s

b) 60 m/s

c) 50 m/s

d) 45 m/s

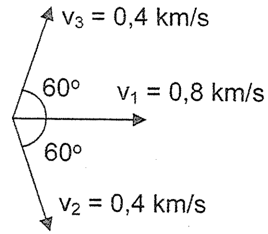
e) 42 m/s

(Dado sen 36° = 0,6 e cos 36° = 0,8)

Questão 142 (UFC)

Uma granada explode no ar quando sua velocidade é $\mathbf{v}_o$. A explosão dá origem a três fragmentos de massas iguais. Imediatamente depois da explosão os fragmentos têm as velocidades iniciais, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, contidas num mesmo plano, indicadas na figura abaixo. Assinale a opção correta para o valor de v_o:

a) 2,0 km/s
b) 1,6 km/s
c) 1,2 km/s
d) 0,8 km/s
e) 0,4 km/s



Questão 143 –

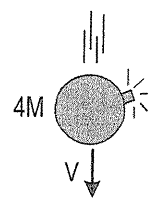
Um canhão dispara uma granada com velocidade de 100 m/s, numa direção que forma um ângulo θ com a horizontal (sen θ = 0,60 e cos θ = 0,80). Ao atingir a altura máxima a granada explode dividindo-se em duas partes iguais. Imediatamente após a explosão, uma das partes é lançada verticalmente para baixo com velocidade de 120 m/s. Nesse instante, o módulo da velocidade da outra parte, em m/s, será de:

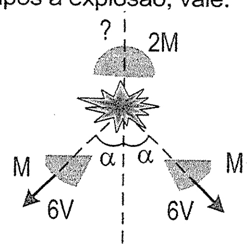
a) 60 b) 80 c) 100 d) 200 e) 400

Questão 144

Uma granada de massa 4M está caindo verticalmente e, ao atingir uma velocidade V, explode em 3 fragmentos de massas M, M e 2M. Os fragmentos menores, logo após a explosão, adquirem velocidade 6V (cada um) formando ângulo $\alpha = 60°$ com a vertical. A velocidade do 3º fragmento, de massa 2M, logo após a explosão, vale:

a) V apontando para cima;
b) V apontando para baixo
c) 2V apontando para cima
d) 2V apontando para baixo
e) nula





Questão 145

Uma granada foi lançada verticalmente para cima com velocidade 30 m/s e explode após 3 segundos em três fragmentos. Logo após a explosão, dois dos pedaços, de massas 6M e 8M, partem em direções perpendiculares entre si, com velocidades de módulo 10 m/s cada. Qual a velocidade do 3º pedaço, de massa 5M, logo após a explosão ($g = 10\ m/s^2$) ?

a) 4 m/s b) 8 m/s c) 16 m/s d) 20 m/s e) 12 m/s

Questão 146 –

Uma granada de massa 7M foi lançada verticalmente para cima e explodiu em três fragmentos ao atingir a altura máxima. Um fragmento de massa 3M e outro fragmento, de massa 2M, adquiriram velocidades respectivamente iguais a 60 m/s e 40 m/s. A velocidade v do 3º fragmento, logo após a explosão, está necessariamente compreendida no intervalo:

a) $100\ m/s \le v \le 260\ m/s$

b) $50\ m/s \le v \le 130\ m/s$

c) $40\ m/s \le v \le 140\ m/s$

d) $60\ m/s \le v \le 150\ m/s$

e) $90\ m/s \le v \le 160\ m/s$

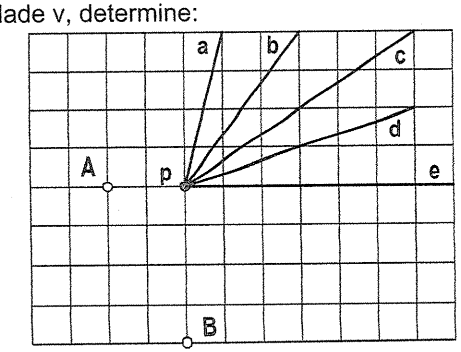
Questão 147 –

Uma granada é lançada verticalmente para cima e explode em três fragmentos de mesma massa ao atingir a altura máxima. Após a explosão, um dos três fragmentos foi impulsionado verticalmente para baixo atingindo o solo t_1 segundos após o detonamento. Os outros dois fragmentos chegaram juntos ao solo t_2 segundos após a explosão. Se a gravidade local vale g, determine a altura em que a granada explodiu.

Questão 148 –

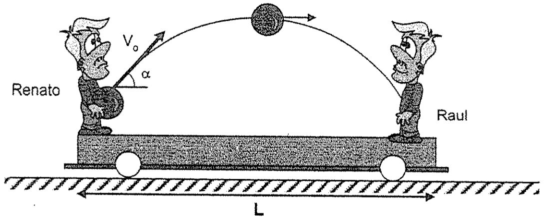
Num certo instante t = 0s, dois móveis A e B, de massas 3m e 2m, se movem sobre um solo horizontal liso em trajetória retilíneas perpendiculares entre si e passam pelas posições indicadas na figura abaixo, ambos em movimento uniforme. Logo em seguida, eles colidem inelasticamente no ponto P, prosseguindo juntos numa das trajetórias retilíneas a, b, c, d ou e mostradas abaixo. Sabendo que, antes da colisão, A se movia com velocidade v, determine:

a) a reta que representa a trajetória seguida pelo conjunto AB após a colisão;
b) a velocidade do conjunto AB após a colisão ;
c) a energia mecânica dissipada na colisão.



uestão 149

 prof. Renato Brito conta que dois irmãos, de massa 2M cada, estão
nicialmente em repouso sobre uma plataforma parada em relação ao solo. A
nassa da plataforma vale 4M e a bola de boliche tem massa 2M. Cansado de
egurar a bola, Renato arremessa a bola para seu irmão, que a segura na outra
xtremidade da plataforma, de comprimento L. Se a bola foi lançada com uma
elocidade V_o formando um ângulo α com a horizontal, pode-se afirmar que,
nquanto a bola estiver no ar:



) a plataforma se moverá em MRU para a esquerda, com velocidade $V_o.\cos\alpha/4$;
) a plataforma se moverá em MRU para a esquerda, com velocidade $V_o.\text{sen}\alpha/4$;
) a plataforma se moverá em MRU para a esquerda, com velocidade $V_o.\cos\alpha/8$;
) a plataforma se moverá em MRU para a esquerda, com velocidade $V_o.\text{sen}\alpha/8$;
) a plataforma se moverá em MRU para a esquerda, com velocidade $V_o.\cos\alpha/2$.

uestão 150

 respeito da situação anterior, depois que o Raul segurar a bola, do outro lado,
 plataforma:

) permanecerá em MRU para a esquerda com velocidade $V_o.\cos\alpha/4$
) a plataforma permanecerá em MRU para a esquerda com velocidade $V_o.\text{sen}\alpha/4$
) a plataforma permanecerá em MRU para a esquerda com velocidade $V_o.\cos\alpha/8$
) a plataforma permanecerá em MRU para a direita com velocidade $V_o.\text{sen}\alpha/8$
) a plataforma permanecerá em repouso em relação ao solo.

uestão 151

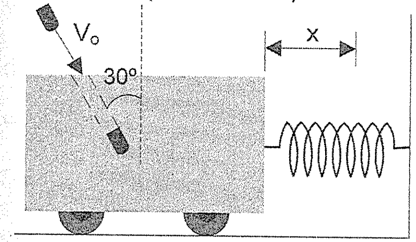
inda a respeito da situação anterior, no momento em que Raul segurar a bola,
o outro lado da plataforma, esta:

) terá se deslocado L/2 para a esquerda
) terá se deslocado L/3 para a esquerda
) terá se deslocado L/4 para a esquerda
) terá se deslocado L/5 para a esquerda
) terá se deslocado L/8 para a esquerda

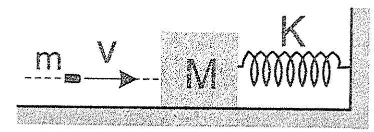
Questão 152 (ITA) –

Um projétil de 5 g é disparado com velocidade de 200 m/s contra um bloco de madeira de 495 g, preso a uma mola de constante elástica k = 5 000 N/m, alojando-se integralmente em seu interior, conforme mostra a figura. A direção do disparo do projétil forma um ângulo de 30º com a vertical. Determine a máxima deflexão **x** que a mola experimentará, em decorrência do impacto.

a) 1 cm b) 2 cm c) 10 cm d) 20 cm e) 40 cm



questão 152



questões 153,154 e 155

Questão 153 (IME-RJ) –

Um bloco com 10 kg de massa está apoiado sobre o plano horizontal e ligado à parede através de uma mola de constante elástica de 10 N/m e massa desprezível. Um projétil de 20 g de massa e com 750 m/s choca-se com o bloco, ficando no interior do mesmo. Calcule a maior compressão da mola. O coeficiente de atrito entre o bloco e o solo vale $\mu = 0{,}2$.

Questão 154 (ITA 87) –

Um bloco de madeira de massa M está oscilando horizontalmente sobre uma mesa sem atrito, sob a ação de uma mola de constante elástica K, simetricamente entre as abscissas x = –A e x = +A de um eixo cartesiano oX, onde A é a amplitude das oscilações. Quando o bloco atinge a extremidade x = –A, é atingido por uma bala de massa m, viajando horizontalmente. A bala se engasta instantaneamente no bloco e a amplitude do movimento passa a ser 2A. Pedem-se:

a) a velocidade da bala antes de atingir o bloco;
b) a máxima velocidade que o sistema atingirá após o choque;
c) a energia mecânica dissipada em calor durante essa colisão.

Questão 155 (ITA 73)

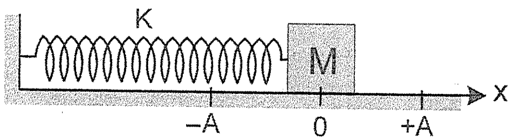
Na figura temos uma massa M = 132 g, inicialmente em repouso, presa a uma mola de constante elástica K = 16 kN/m, podendo se deslocar sem atrito sobre um solo horizontal liso. Atira-se uma bala de massa m = 12 g com velocidade v_o = 200 m/s, incrustando-se nele. Qual a amplitude do movimento que resulta desse impacto ?

a) 25 cm b) 50 cm c) 5 cm d) 1,6 cm e) NRA

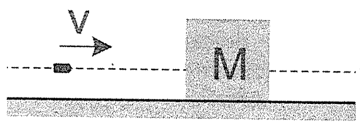
Questão 156 (ITA 78) –

Um sistema massa-mola é constituído por uma caixa de massa M e uma mola de constante elástica K presa a uma parede. O sistema oscila com amplitude A ao longo de uma superfície horizontal lisa. Num certo instante, a caixa atinge a abscissa x = –A e recebe um impulso I horizontal no sentido positivo do eixo x. Nessas condições, pode-se afirmar que a amplitude do movimento subseqüente da partícula será igual a:

a) $\sqrt{A^2 + \dfrac{I^2}{M.K}}$ b) $\dfrac{I}{K.M} - 2A$ c) $\dfrac{I}{K.M}$ d) A   e) $2A - \dfrac{2.I}{K.M}$



questão 156



questões 157 e 158

Questão 157 (ITA 98) –

Uma bala de massa 10 g é atirada horizontalmente contra um bloco de madeira de 100 g que está fixo, penetrando nele 10 cm até parar. Depois, o bloco é suspenso de tal forma que se possa mover livremente e uma bala idêntica à primeira é atirada contra ele. Considerando a força de resistência à penetração da bala na madeira em ambos os casos como sendo a mesma, conclui-se que a segunda bala penetra no bloco a uma profundidade de aproximadamente:

a) 8,0 cm   b) 8,2 cm   c) 8,8 cm   d) 9,2 cm   e) 9,6 cm

Questão 158

Uma bala de massa m = 20 g disparada horizontalmente com velocidade v = 500 m/s atravessa um bloco de madeira de massa M = 10 kg inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal. Ao sair do bloco, a velocidade da bala está reduzida a U = 100 m/s e o bloco escorrega 20 cm ao longo da superfície horizontal até parar. Determine o coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície horizontal.

Questão 159 (ITA 90)

Um projétil de massa m e velocidade v atinge um objeto de massa M, inicialmente imóvel. O projétil atravessa o corpo de massa M e sai dele com velocidade v/2. O corpo que foi atingido desliza por uma superfície sem atrito, subindo uma rampa até a altura h. Nestas condições, a velocidade inicial do projétil era de:

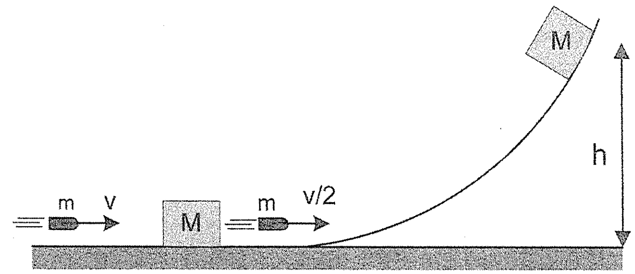
a) $\dfrac{2M}{m}\sqrt{2gh}$

b) $2\sqrt{\dfrac{2M}{m}.gh}$

c) $2\sqrt{\dfrac{M}{m}.gh}$

d) $\sqrt{8gh}$

e) $2\sqrt{gh}$



Questão 160 –

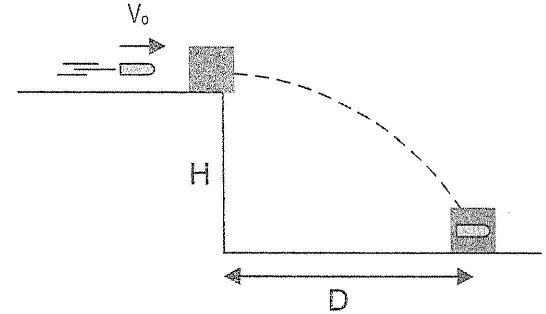
Um projétil de massa m colide inelasticamente com uma caixa de madeira, que despenca de um penhasco e cai a uma distância D da parede, como indica a figura abaixo. Se a massa da caixa vale M e a gravidade vale g, o prof. Renato Brito pede para você determinar a velocidade inicial V_o do projétil.

a) $\dfrac{D.(M+m)}{m}.\sqrt{\dfrac{g}{2H}}$

b) $\dfrac{D.(M+m)}{M}.\sqrt{\dfrac{g}{2H}}$

c) $\dfrac{D.(M+m)}{m}.\sqrt{\dfrac{2g}{H}}$

d) $\dfrac{D.(M+m)}{M}.\sqrt{\dfrac{2g}{H}}$



Questão 161 –

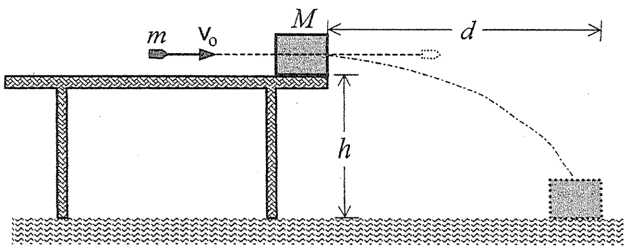
Um bloco de massa M, em repouso na extremidade de uma mesa de altura h, sofre o impacto frontal de um projétil de massa m. A velocidade do projétil, quando atinge o bloco, é horizontal e tem módulo V_o. O projétil atravessa o bloco, saindo dele praticamente sem mudar a direção de sua trajetória. Como resultado do impacto, o bloco é lançado da mesa e cai no chão, a uma distância horizontal *d* da sua posição inicial, conforme mostra a figura abaixo. Desprezando-se os efeitos da resistência do ar, a velocidade do projétil ao deixar o bloco tem módulo:

a) $v_o - \sqrt{\dfrac{M^2gd^2}{2m^2h}}$

b) $\sqrt{V_o - \dfrac{M^2gd^2}{2m^2h}}$

$\sqrt{v_o - \frac{2Mgh}{m}}$

) V_o



uestão 162 (ITA 2007)

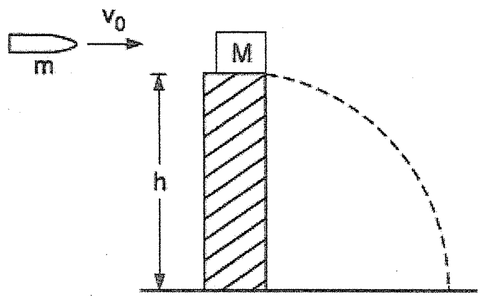
ma bala de massa m e velocidade V_0 é disparada contra um bloco de massa M, ue inicialmente se encontra em repouso na borda de um poste de altura h, onforme mostra a figura. A bala aloja-se no bloco que, devido ao impacto, cai no olo. Sendo g a aceleração da gravidade, e não havendo atrito e nem resistência e qualquer outra natureza, o módulo da velocidade com que o conjunto atinge o olo vale:

) $\sqrt{\left(\frac{m.v_o}{m+M}\right)^2 + 2gh}$

) $\sqrt{V_o^2 + \frac{2ghm^2}{(m+M)^2}}$

) $\sqrt{V_o^2 + \frac{2mgh}{M}}$ d) $\sqrt{V_o^2 + 2gh}$

) $\sqrt{\frac{m.V_o^2}{m+M} + 2gh}$



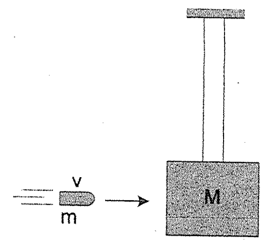
uestão 163

ma bala de massa m = 20 g é disparada horizontalmente com velocidade $_o$ = 300 m/s contra um bloco de madeira de massa M = 500g, inicialmente em epouso, suspenso verticalmente através de um fio ideal. A bala atravessa o bloco de adeira, saindo pela face oposta. Sabendo que o bloco sobe uma altura vertical Δh = 0 cm após o impacto, determine a velocidade horizontal com que a bala sai do loco de madeira.

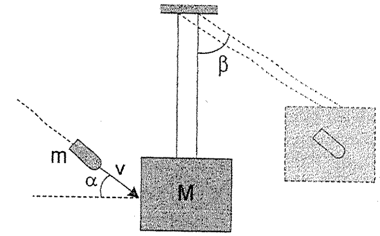
uestão 164

Im projétil de massa m = 0,05 kg incide sobre um bloco de madeira de massa 1 = 29,95 kg suspenso ao teto por duas cordas inextensíveis, conforme mostra figura abaixo. No local, a aceleração da gravidade tem módulo de 10 m/s^2. projétil fica incrustado no bloco e a altura atingida pelo conjunto, após o mpacto, vale 5 cm. A velocidade da bala, antes do impacto, vale:

) 100 m/s b) 200 m/s c) 300 m/s d) 400 m/s e) 600 m/s



questão 164



questões 165

Questão 165 –

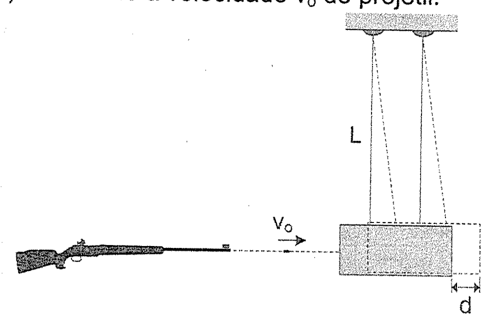
Um projétil de massa m = 10 g colide com uma caixa de madeira maciça de massa M = 1,5 kg suspensa ao teto através de um fio inextensível de comprimento L = 55 cm, ficando alojado na caixa . O projétil incidiu na caixa com uma velocidade v = 400 m/s formando um ângulo α = 30° com a horizontal. Determine (em graus) a máxima deflexão β que o pêndulo sofrerá em relação à vertical. Adote g = 10 m/s^2.

Questão 166 –

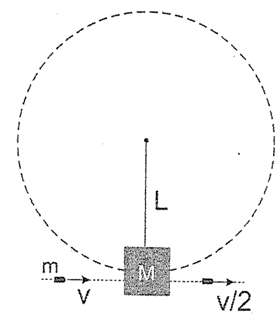
Para se medir a velocidade de saída de um projétil disparado de uma arma, utiliza-se um pêndulo balístico consistindo num bloco de M = 30 kg suspenso por dois fios de comprimento L = 3,6 m como mostra a figura. O pêndulo se afasta em uma distancia horizontal d = 240 mm quando atingido por uma bala de 40 g.

a) Usando a aproximação do binômio de Newton $(1-x)^n \cong 1 - n.x$, para x <<< 1, determine uma expressão aproximada para a altura atingida pela caixa após o impacto do projétil.

b) Determine a velocidade v_o do projétil.



questão 166



questões 167

Questão 167 –

Como se vê na figura, uma bala de massa m e velocidade v atravessa completamente um pêndulo de massa M. A bala emerge com a velocidade v/2. A massa do pêndulo está presa a um ponto fixo através de uma haste rígida de comprimento L e massa desprezível.

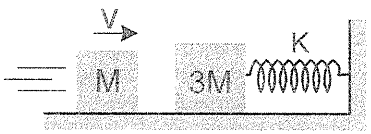
a) Que valor mínimo da velocidade v fará o pêndulo descrever um círculo vertical completo?

b) Que valor mínimo da velocidade v fará o pêndulo descrever um círculo vertical completo, supondo que a haste rígida seja substituída por um fio de nylon flexível ?

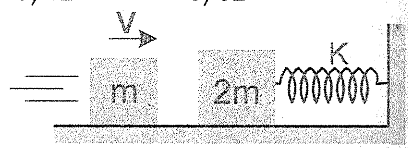
Questão 168

Um bloco de massa M, movendo-se com velocidade V, colide inelasticamente com um bloco de massa 3M, inicialmente em repouso. O conjunto encontra uma mola de constante elástica K, causando uma deformação máxima x = L. Se o bloco de massa 3M fosse retirado do caminho, o bloco de massa M encontraria a mola diretamente, causando uma deformação máxima :

a) L b) 2L c) 3L d) 4L e) 5L



questão 168



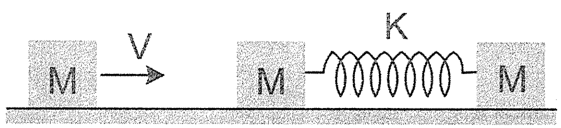
questão 169

Questão 169

Um corpo de massa m colide frontalmente com outro corpo de massa 2m inicialmente em repouso, conectado a uma mola de constante elástica K, conforme a figura. Se o coeficiente de restituição do choque vale e, determine a amplitude das oscilações executadas do sistema massa mola, após a colisão.

Questão 170 –

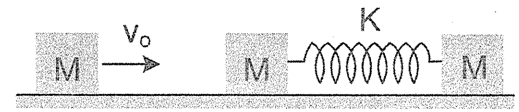
Duas caixas de mesma massa M estão inicialmente em repouso sobre uma superfície plana, horizontal e lisa, conectadas entre si através de uma mola ideal de constante elástica K e comprimento natural L_0. Uma terceira caixa de mesma massa se aproxima do sistema com velocidade V e colide elasticamente como mostra a figura abaixo. Admita que a colisão seja unidimensional. Determine o comprimento máximo e mínimo atingido pela mola durante o movimento posterior do sistema.



Questão 171

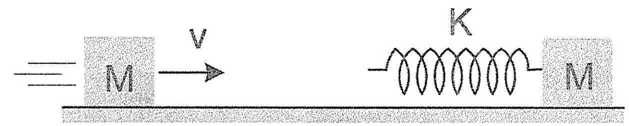
Duas caixas de mesma massa M = 800g estão inicialmente em repouso sobre uma superfície plana, horizontal e lisa, conectadas entre si através de uma mola ideal de constante elástica K = 10 N/m e comprimento natural L = 4m. Uma terceira caixa de mesma massa m = 800 g se aproxima do sistema com uma velocidade V_o = 5 m/s e colide elasticamente como mostra a figura. Admita que a colisão seja unidimensional. Determine o comprimento máximo e mínimo atingido pela mola durante o movimento posterior do sistema.

a) 3,0 m e 5,0 m
b) 2,0 m e 4,0 m
c) 3,5 m e 4,5 m
d) 2,5 m e 5,5 m
e) 1,0 m e 7,0 m



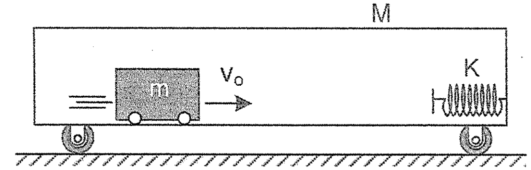
Questão 172

Um bloco de massa M = 2 kg repousa sobre uma superfície horizontal lisa conectado a uma mola ideal de constante elástica K = 100 N/m. Outro bloco de mesma massa se move em direção ao primeiro com velocidade v = 1 m/s. Determine a máxima compressão sofrida pela mola.



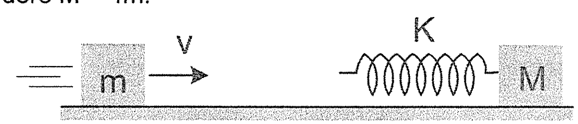
Questão 173

A figura abaixo mostra um pequeno carro de massa m que se desloca para a direita com velocidade constante V_0 = 12m/s sobre o piso sem atrito de outro carro maior de massa M = 2m, que se acha inicialmente em repouso. O carro maior contém ainda uma mola ideal presa internamente na sua extremidade direita. O carro de massa m, em movimento, colide com a mola comprimindo-a até um certo valor máximo. Determine, em cm, essa máxima compressão, sabendo que a constante elástica da mola é k = 400N/m e m = 1,5 kg.



Questão 174

Uma mola de massa desprezível está presa por uma de suas extremidades a um bloco de massa M, inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal. Veja a figura. Outro bloco, de massa m, deslocando-se para a esquerda com velocidade horizontal constante, colide com a extremidade livre da mola ficando a ela aderido. Considere que o sistema não perde energia nem por atrito, nem no processo de adesão do bloco de massa m com a mola. Nestas condições, determine, em porcentagem, a fração da energia inicial do sistema que estará armazenada na mola nos instantes de sua máxima compressão. Para os cálculos, considere M = 4m.

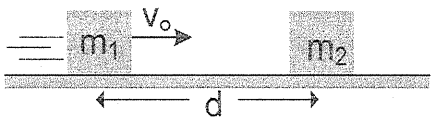


Questão 175 (ITA 2009) –

Num filme de ficção, um foguete de massa m segue uma estação espacial a fim de acoplar-se a ela. Para reduzir o impacto do acoplamento, na estação existe uma mola de comprimento L e constante elástica k. Calcule a deformação máxima sofrida pela mola durante o acoplamento, admitindo que o foguete encontrava-se inicialmente em repouso a uma distancia d > L da estação e partiu com aceleração constante **a** em direção à estação até efetuar o acoplamento, quando passou a se mover com a mesma velocidade da estação.

Questão 176

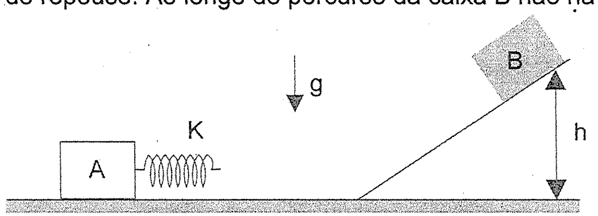
Considere dois blocos de massas m_1 = 2 kg e m_2 = 4 kg que repousam sobre uma superfície horizontal áspera, a uma distância d = 16 cm entre si. O coeficiente de atrito entre cada bloco q a superfície vale μ = 0,2.



Considere que o bloco 1 seja empurrado e adquira uma velocidade inicial v_o = 1 m/s em direção ao bloco 2. Sendo g = 10 m/s^2 e considerando que a colisão seja elástica, determine a nova distância entre os blocos, quando eles entrarem novamente em repouso, após a colisão.

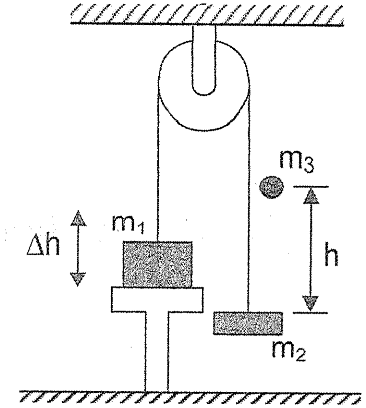
Questão 177 –

Uma caixa A (massa M) encontra-se parada sobre uma superfície horizontal. Uma mola ideal de constante elástica k encontra-se presa a esse caixa, como mostra a figura e o coeficiente de atrito entre a caixa A e o solo vale μ. Outra caixa B, também de massa M, é abandonada de uma altura **h** num plano inclinado liso, com a intenção de escorregar ao longo da superfície até tirar a caixa A do repouso. Sabendo que a gravidade local vale g, determine a mínima altura h a partir da qual a caixa B deve ser abandonada de forma que ela ainda seja capaz de tirar a caixa A do repouso. Ao longo do percurso da caixa B não há atrito.



Questão 178 (ITA) –

Dois corpos de massas m_1 e m_2 estão ligados por um fio inextensível que passa por uma polia, com atrito desprezível, sendo m_1 > m_2. O corpo m_1 repousa inicialmente sobre um apoio fixo. A partir de uma altura h deixa-se cair sobre m_2 um corpo de massa m_3, que gruda nele. Sabendo-se que m_1 > m_2 + m_3, pode se afirmar que a altura máxima atingida por m_1 será:



a) $\left(\dfrac{m_3}{m_2+m_3}\right)^2 \dfrac{m_1+m_2+m_3}{m_1-m_2-m_3}h$

b) $\dfrac{m_3^2(m_1+m_2+m_3)}{(m_1-m_2-m_3)^3}h$

c) $\dfrac{m_3^2}{(m_1+m_2+m_3)(m_1-m_2-m_3)}h$

d) h

e) $\dfrac{m_3^2}{(m_1+m_2+m_3)^2}h$

Questão 179

Duas caixas A e B, de massas 4**m** e **m**, estão ligadas entre si por um fio ideal não extensível que passa por uma polia sem atrito como na figura. A caixa A encontra-se inicialmente em repouso sobre um apoio fixo. A partir de certa altura h, deixa-se cair sobre a caixa B uma pequena esfera de massa 2**m**, que gruda nela ao colidir. Pede-se determinar a máxima altura Δh atingida pelo bloco A, após a colisão.

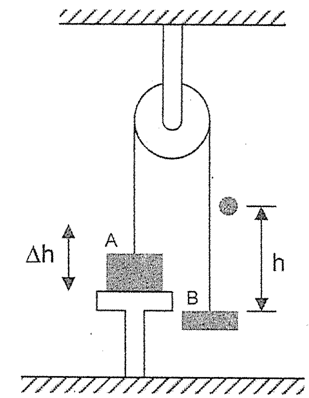
a) $\dfrac{2.h}{9}$

b) $\dfrac{5.h}{9}$

c) $\dfrac{4.h}{7}$

d) $\dfrac{5.h}{7}$

e) $\dfrac{3.h}{8}$



Questão 180 –

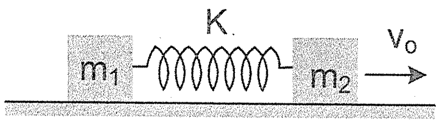
Dois blocos de massas m_1 e m_2 estão conectados entre si através de uma mola ideal de constante elástica k e repousam sobre uma superfície horizontal lisa. Inicialmente, a mola é elongada em um comprimento x_o e o sistema é liberado do repouso. Determine a distância percorrida por cada bloco até parar pela primeira vez.

Questão 181

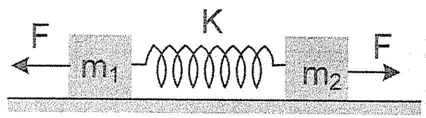
Dois blocos de massas m_1 e m_2 estão conectados entre si através de uma mola ideal de constante elástica k e repousam sobre uma superfície horizontal lisa. A mola encontra-se inicialmente relaxada. Se o bloco de massa m_2 recebe um breve impulso e adquire uma velocidade v_o para a direita, determine:

a) a velocidade do centro de massa do sistema;

b) a máxima deformação que a mola vai atingir.



questão 181



questão 182

Questão 182 –

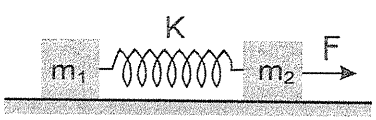
Dois blocos de massas m_1 e m_2 estão conectados entre si através de uma mola ideal de constante elástica k e repousam sobre uma superfície horizontal lisa. A mola encontra-se inicialmente relaxada. Se cada bloco sofre a ação de uma força F constante no sentido de afastá-los, determine:

a) a deformação máxima atingida pela mola;

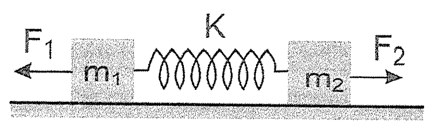
b) a distância percorrida por cada bloco até parar pela primeira vez.

Questão 183 –

Um bloco de massa m_1 está conectado a um bloco de massa m_2 através de uma mola ideal de constante elástica K inicialmente relaxada. Os blocos encontram-se sobre uma superfície horizontal lisa. Se uma força constante horizontal F passa a atuar sobre o bloco de massa m_2, determine a máxima elongação atingida pela mola.



questão 183



questão 184

Questão 184 –

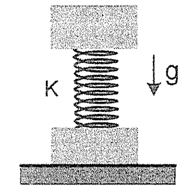
Dois blocos de massas m_1 e m_2 estão conectados entre si através de uma mola ideal de constante elástica k e repousam sobre uma superfície horizontal lisa. A mola encontra-se inicialmente relaxada. Se o bloco 1 é puxado por uma força constante F_1 e o bloco 2 é puxado por outra força constante F_2, como mostra a figura, determine a deformação máxima atingida pela mola.

Questão 185 –

Duas lâminas, cujas massas são iguais a m, estão ligadas através de uma mola de coeficiente de rigidez k e comprimento natural L_o. A lâmina superior foi comprimida para baixo o suficiente para que a deformação da mola fosse igual a x, sendo depois liberada. Determinar a que altura elevar-se-á depois disso o centro de massa do sistema. Desprezar a espessura das lâminas.

Dados:

x = 8 cm, m = 1 kg, k = 500 N/m, g = 10m/s^2, L_o = 10 cm



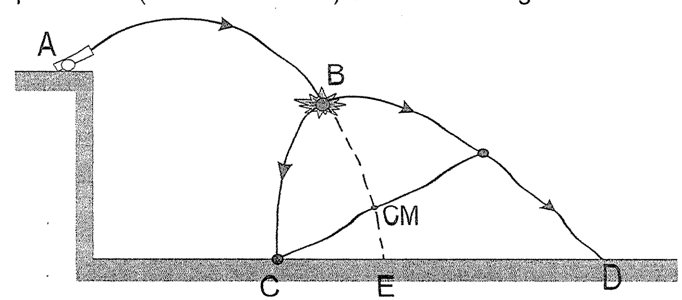
Questão 186 –

Quando uma granada de massa 4M é lançada com velocidade V_o formando um ângulo α com a horizontal, cai a uma distância 2D do ponto de lançamento, caso não haja detonamento. Considere que a granada seja detonada no ponto mais alto da trajetória, explodindo em dois fragmentos de massas 3M e M. Se, após a explosão, o 1° fragmento cair (a partir do repouso) verticalmente a uma distância D do ponto de lançamento, o 2° fragmento cairá a que distância do ponto de lançamento ?

a) 7D b) 6D c) 5D d) 4D e) 3D

Questão 187 (ITA 78)

Uma bomba é atirada a partir da posição A. Na posição B ela explode em dois fragmentos iguais, que atingirão o solo nos pontos C e D, conforme a figura abaixo. Considere os choques dos fragmentos com o solo perfeitamente inelásticos. Pode-se afirmar que o C.M. (centro de massa) de sistema atingirá:



a) a posição E do solo;

b) o ponto médio entre C e D no solo;

c) o ponto D, posição em que o fragmento de maior alcance atingirá o solo;

d) um ponto indeterminado, visto que, quando o primeiro fragmento tocar o solo, o sistema estará sujeito a outra força externa;

e) nenhuma das afirmações acima é correta.

Questão 188 –

Uma esfera de massa 5 kg foi lançada com velocidade v_o = 20 m/s numa direção que forma um ângulo de 45° com a horizontal numa região onde a gravidade vale g = 10 m/s^2. A uma distância de 35 m do lançador encontra-se um paredão vertical rígido perpendicular ao plano da trajetória da bola. A esfera, após colidir elasticamente com a parede, se parte em dois fragmentos que chegam ao solo juntos. Se o fragmento de massa 2 kg cai a 8 m de distância do paredão, determine a que distância do paredão cairá o outro fragmento:

a) 2 m b) 3 m c) 4 m d) 5 m e) 6 m

Questão 189 –

Um rojão, lançado segundo um ângulo de 45°, explode em dois fragmentos ao atingir sua altura máxima de 20 m. Os fragmentos são lançados horizontalmente num local onde a gravidade vale g = 10 m/s^2. Um deles, de massa igual a 100 g, cai no mesmo plano vertical da trajetória inicial, a 90 m de distância do ponto de lançamento. O outro fragmento tem massa igual a 50 g.

a) A que distância do ponto de lançamento cai o fragmento mais leve ?
b) Quais são as velocidades comunicadas aos dois fragmentos em conseqüência da explosão ?
c) Qual é a energia mecânica liberada pela explosão ?

Questão 190

Uma granada de massa 5 kg foi lançada obliquamente, a partir do solo. Ao atingir a altura máxima H = 45 m, a granada, movendo-se a 4 m/s, explode em dois fragmentos A e B de massas m_A = 2 kg e m_B = 3 kg que atingem o solo simultaneamente 3 s após a explosão. Sabendo que o fragmento A cai no solo a uma distância de 30 m do ponto de lançamento e adotando g = 10 m/s^2, determine:

a) a altura em que se encontrava o centro de massa (CM) do sistema formado pelos dois fragmentos, em relação ao solo, 2 s após a explosão;
b) a que distância do fragmento A cairá o fragmento B;
c) Qual é a energia mecânica liberada pela explosão ?

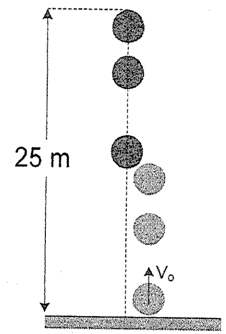
Questão 191

Um corpo, que cai verticalmente, explode em apenas dois fragmentos de massas M e 2M, no momento em que se encontra a uma altura de 2000 m e se move com velocidade v = 60 m/s. Imediatamente após a explosão, o fragmento de massa 2M se move para baixo com velocidade 80 m/s. Sendo g = 9,8 m/s^2, determine a que altura se encontrará o centro de massa do sistema 10s após a explosão.

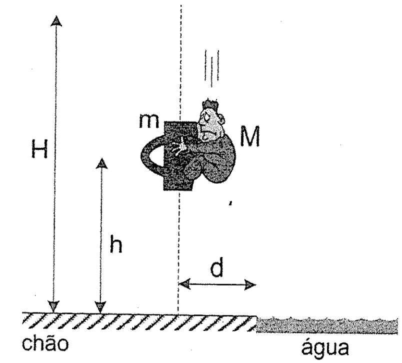
Questão 192 (ITA 2000) –

Uma bola de 0,5 kg é abandonada a partir do repouso a uma altura de 25 m acima do chão. No mesmo instante, uma segunda bola, com massa de 0,25 kg, é lançada verticalmente para cima, a partir do chão, com velocidade de 15 m/s. As bolas sofrerão uma colisão oblíqua. Determine a velocidade do centro de massa do sistema constituído pelas bolas dois segundos após o lançamento.

a) 11 m/s p/ baixo b) 11 m/s p/ cima c) 15 m/s p/ baixo
d) 15 m/s p/ cima e) 20 m/s p/ baixo



questão 192



questão 194

Questão 193 (ITA 92)

Um objeto de massa M é deixado cair de uma altura h. Ao final do 1º segundo de queda o objeto é atingido horizontalmente por um projétil de massa m e velocidade v, que nele se aloja. Calcule o desvio x que o objeto sofre ao atingir o solo, em relação ao alvo pretendido.

a) $\sqrt{\dfrac{2h}{g}}(M+m).v$ b) $\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\dfrac{m}{(M+m)}.v$ c) $\left(\sqrt{\dfrac{2h}{g}}-1\right)\dfrac{m}{(M+m)}.v$

d) $\left(\sqrt{\dfrac{2h}{g}}-1\right)\dfrac{(M+m)}{m}.v$ e) $\left(1-\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\right)(M+m).v$

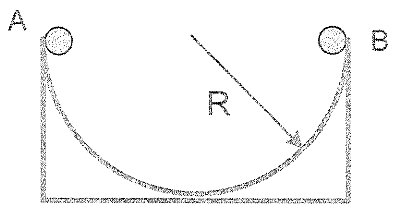
Questão 194

Um homem de massa M cai de uma altura H, a partir do repouso, segurando uma mala de massa m, num local em que a gravidade vale g. Quando ele se encontrava a uma altura h do solo, percebe que, lá embaixo, há uma piscina que pode salvar sua vida, mas a borda dela encontra-se a uma distância d da sua trajetória vertical. Assim, para se salvar, ele arremessa a mala horizontalmente para frente. O prof. Renato Brito pergunta:

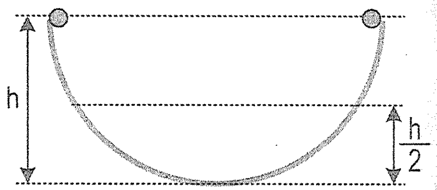
a) qual a velocidade mínima com que a mala deve ser arremessada a fim de que ele caia na água ?
b) lançando a mala com essa velocidade mínima, a que distância da borda da piscina ela cairá ?

Questão 195 (IME) –

A figura mostra um hemisfério oco e liso, cujo plano equatorial é mantido fixo na horizontal. Duas pequenas bolinhas A e B são largadas no mesmo instante, de dois pontos diametralmente opostos, A e B, situados na borda do hemisfério. As partículas colidem no ponto mais baixo do hemisfério e, após a colisão, A atinge uma altura máxima R/2 enquanto B atinge uma altura máxima R/3, onde R é o raio do hemisfério. Determine o coeficiente de restituição do choque.



questão 195



questão 196

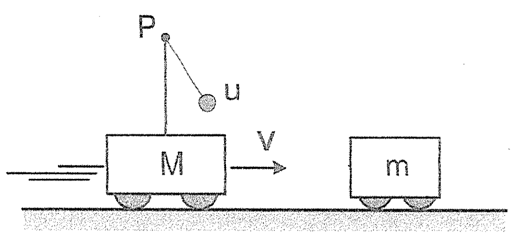
Questão 196

A duas bolas mostradas na figura são largadas simultaneamente nas posições indicadas. Elas colidem frontalmente no fundo da calha e, depois da colisão, atingem simultaneamente a altura máxima h/2. Desprezando qualquer atrito entre as esferas e a calha, pede-se determinar o coeficiente de restituição dessa colisão.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}/2$ c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{3}/2$ e) 0,5

Questão 197 –

A figura mostra um pêndulo simples suspenso a um mastro fixo a um carro de massa M que se move com velocidade constante v. O pêndulo é composto por uma bolinha de massa u conectada a um fio ideal de comprimento L. De repente esse carro colide inelasticamente com outro carro de massa m que se encontrava em repouso logo adiante. Determine a velocidade mínima v a fim de que, após a colisão, a bolinha do pêndulo consiga dar uma volta completa (looping) no plano vertical. Admita que gravidade local valha g, que todos os atritos sejam desprezíveis e que M, m >> u.



Questão 198 (ITA 2008) –

Numa brincadeira de aventura, o garoto (de massa M) lança-se por uma corda amarrada num galho de árvore num ponto de altura L acima do gatinho (de massa m) da figura, que pretende resgatar. Sendo g a aceleração da gravidade e H a altura da plataforma de onde se lança, indique o valor da tração na corda imediatamente após o garoto apanhar o gato para aterrisá-lo na outra margem do lago.

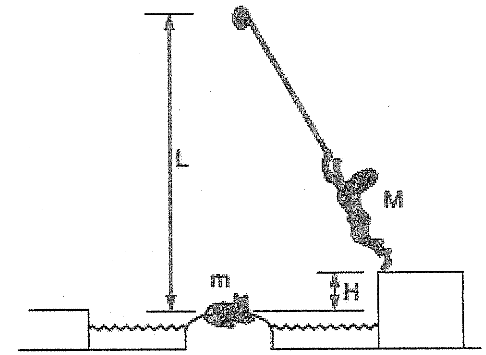
a) $Mg\left(1+\frac{2H}{L}\right)$

b) $(M+m)g.\left[1-\left(\frac{M+m}{M}\right)^2\frac{2H}{L}\right]$

c) $Mg\left(1-\frac{2H}{L}\right)$

d) $(M+m)g.\left[1+\left(\frac{M}{M+m}\right)^2\frac{2H}{L}\right]$

e) $(M+m)g.\left[\left(\frac{M}{M+m}\right)^2\frac{2H}{L}-1\right]$



Questão 199 (ITA) –

(ITA) Um pêndulo simples de comprimento L e massa m é posto a oscilar. Cada vez que o pêndulo passa pela posição de equilíbrio, atua sobre ele, durante um pequeno intervalo de tempo Δt, uma força F. Essa força é constantemente ajustada para, a cada passagem, ter a mesma direção e sentido da velocidade do pêndulo. Quantas oscilações completas são necessárias para que o pêndulo forme um ângulo reto com a direção vertical de equilíbrio ?

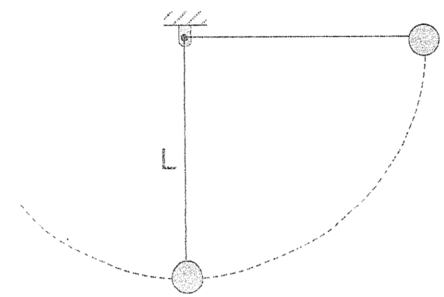
a) $n = \frac{m\sqrt{gL}}{2.F.\Delta t}$

b) $n = \frac{mgL\sqrt{2}}{2.F.\Delta t}$

c) $n = \frac{m\sqrt{2gL}}{2.F.\Delta t}$

d) $n = \frac{mgL}{F.\Delta t}+1$

e) NDA



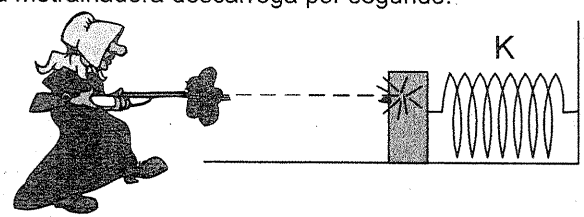
Questão 200

Um atirador, com uma metralhadora, pode resistir a uma força média de recuo de, no máximo, 160N. As balas têm massa 40g cada uma e saem da metralhadora com velocidade de 800m/s. O número máximo de projéteis que podem ser atirados por segundos é:

a) 16 b) 10 c) 8 d) 5 e) 4

Questão 201 –

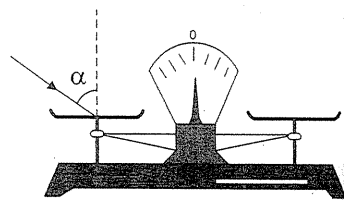
Claudete decidiu testar o poder de fogo de uma metralhadora que ela comprou de presente para Jorge no natal. Para isso, efetua disparos no modo automático contra um bloco de madeira conectado a uma mola de constante elástica K = 1600 N/m. Admita que os projéteis, de massa 100g cada, ficam alojados na madeira a cada impacto, e que são disparados com velocidade 400 m/s. Se a mola sofre uma deformação permanente de 25 cm durante os disparos, pede-se determinar quantos projéteis a metralhadora descarrega por segundo.



Questão 202 –

Uma metralhadora dispara projéteis à razão de 4 projéteis por segundo, os quais atingem o prato de uma balança com velocidade 1 000 m/s, formando um ângulo α = 36° com a vertical. A balança antes de receber os tiros marcava zero. Supondo o choque entre os projéteis e o prato da balança, perfeitamente elástico e que a massa de cada projétil vale m = 20 g, determine a leitura da balança quando está recebendo os tiros. Dado: sen 36° = 0,6 cos36° = 0,8

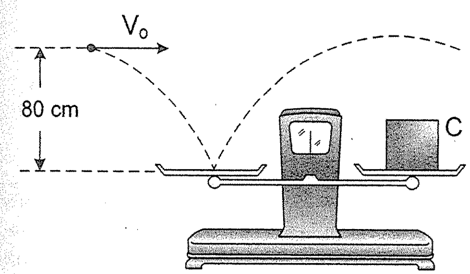
a) 24 N
b) 32 N
c) 64 N
d) 128 N
e) 40 N



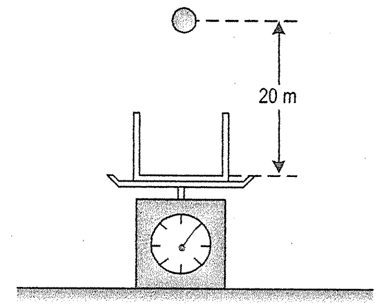
Questão 203

Um dispositivo dispara pequenas bolas de aço à razão de 50 bolas por segundo. As bolas abandonam o dispositivo com velocidade inicial v_o, cuja direção é horizontal, chocam-se elasticamente com um dos pratos de uma balança de

braços iguais, sendo refletidas como ilustra a figura. A aceleração da gravidade tem módulo 10 m/s^2 e a massa de cada bola é 2,0 gramas. Desprezando a resistência do ar, determine a massa do corpo C que deve ser colocado no outro prato da balança, de modo que ela fique em equilíbrio.



questão 203



questão 205

Questão 204 –

Uma caixa é colocada sobre uma balança que é ajustada para zero quando a caixa está vazia. Bolas de gude caem no interior da caixa de altura h acima do fundo da caixa, a uma taxa de N bolas por segundo. Cada bola possui massa m e as colisões são absolutamente inelásticas. Admita que as bolas de gude caiam na caixa sem ricochetear. Qual a marcação da balança t segundos após as bolas começarem a encher a caixa ?

Questão 205

Põe-se uma caixa no prato de uma balança de modo que a leitura é nula quando a caixa está vazia. Deixam-se cair então na caixa pequena bolas, de uma altura de 20 metros, à razão de 4 bolas por segundo, tendo cada bola massa de 10 gramas. Sabendo que os choques entre as bolas e a caixa são perfeitamente inelásticos, determine a leitura da balança, 10 segundos após o instante em que as bolas começam a chegar à caixa. (Adote g = 10m/s^2.)

Questão 206 (ITA 92)

No dispositivo da figura, bolas de gude de 20 g cada uma estão caindo, a partir do repouso, de uma altura de 1 metro, sobre plataforma de uma balança. Elas caem a intervalos de tempo iguais Δt e após o choque estão praticamente paradas, sendo imediatamente retiradas da plataforma. Sabendo que o ponteiro da balança indica, em média, 20 kg, e que a gravidade local vale g = 10 m/s^2, podemos afirmar que a freqüência da queda é:

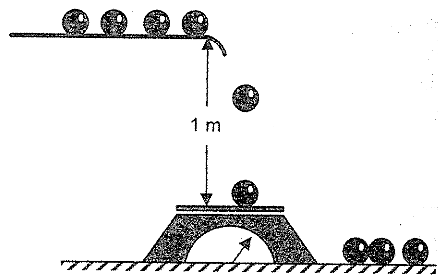
a) $\sqrt{20}$ bolas por segundo.

b) $20\sqrt{5}$ bolas por segundo.

c) 1/ 60 bolas por segundo.

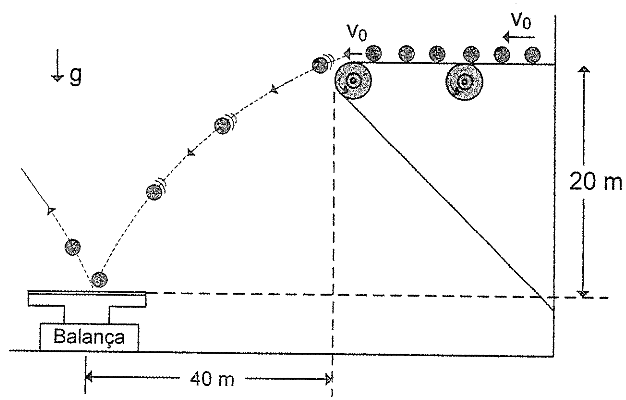
d) $10^3.\sqrt{5}$ bolas por segundo.

e) 10^2 bolas por segundo.



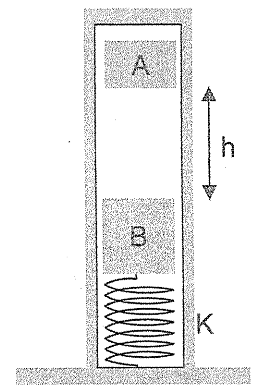
Questão 207

Na figura abaixo, vê-se um trecho de uma linha de produção de esferas. Para testar a resistência das esferas a impacto, são impulsionadas a partir de uma esteira rolante, com velocidade horizontal v_0 de 20 m/s. Tais esferas caem a uma taxa de 4 esferas por segundo e colidem, elasticamente, com a superfície de uma balança estrategicamente posicionada, fixa ao chão. O prof. Renato Brito pede para você determinar a força média registrada pela balança.
Dado: $g = 10\ m/s^2$, massa de cada esfera = 2 kg

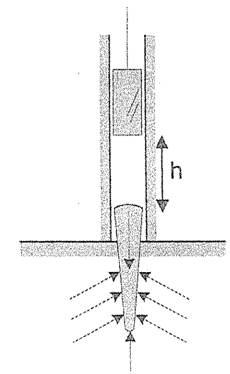


Questão 208 -

Um bloco A de massa m cai de uma altura h sobre um cilindro B de mesma massa m, que repousa em equilíbrio sobre a mola de constante k. Supondo uma colisão perfeitamente inelástica e que a gravidade local vale g, determine o deslocamento máximo sofrido pelo cilindro, a partir da posição inicial de equilíbrio estático.



questão 208 e 209



questão 211

Questão 209 –

O cilindro A de massa m = 2 kg cai de uma altura h = 50 cm sobre o cilindro B de massa M = 6 kg, que repousa sobre a mola de constante k = 100N/m. Supondo uma colisão perfeitamente inelástica e adotando $g = 10\ m/s^2$, determine:

a) o máximo deslocamento do cilindro B;

b) a energia perdida durante o impacto.

Questão 210

Um bloco de massa M = 200 g é suspenso verticalmente ao teto da sala através de uma mola ideal. Quando o bloco repousa em equilíbrio, a mola apresenta uma deformação x_o = 1 cm. Uma bolinha de massa de vidraceiro, de massa m = 120 g, é abandonada a partir do repouso a uma altura h = 64 cm acima desse bloco. Sabendo que, ao colidir com o bloco, a bolinha permanece unida a ele (colisão inelástica), determine a máxima elongação atingida pela mola, após essa colisão ($g = 10\ m/s^2$).

Questão 211 –

Deseja-se enterrar uma estaca de massa m = 2000 kg num solo em que a resistência à penetração vale 500 kN. Cada pancada no martelo de massa M = 8000 kg é resultado de uma queda livre de 1,25 m sobre o topo da estaca. Determine a penetração da estaca no solo com uma pancada. Suponha que o impacto é uma colisão perfeitamente inelástica ($g = 10\ m/s^2$).

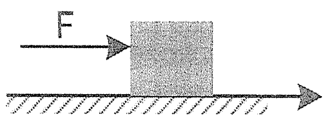
Questão 212 (ITA 82)

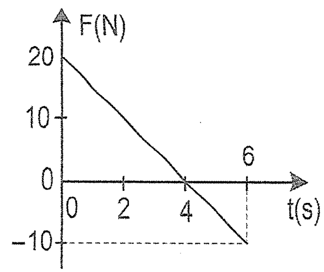
Um martelo de bate-estacas funciona levantando um corpo de pequenas dimensões e de massa 70 kg acima do topo de uma estaca de massa 30 kg. Quando a altura do corpo acima do topo de estaca é de 2,00 m, ela afunda 0,5 m no solo. Supondo um aceleração da gravidade de $10\ m/s^2$ e considerando o choque inelástico, podemos concluir que a força média de resistência à penetração da estaca é de :

a) 1960 N b) 2960 N c) 2900 N d) 2970 N e) 2800 N

Questão 213 –

Um bloco de massa $m = 2$ kg encontra-se inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal quando passa a sofrer a ação de uma força resultante horizontal F cuja valor escalar é dado pelo gráfico F x t abaixo. Determine:



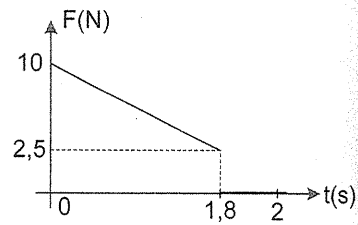


a) o instante no intervalo $0 \leq t \leq 6$s em que a velocidade será máxima;
b) a velocidade máxima atingida pela caixa;
c) a velocidade da caixa no instante $t = 6$s.

Questão 214

Um bloco de peso 15N está inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal áspera e sobre ele é aplicada uma força horizontal F que varia de acordo com o gráfico mostrado abaixo. Sabendo que o coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície vale $\mu = 0{,}25$, determine ($g = 10$ m/s^2):

a) a velocidade do bloco no instante $t = 1$ s;
b) a velocidade do bloco no instante $t = 2$ s;
c) a velocidade máxima atingida pelo bloco, bem como em qual instante ela ocorre;
d) o instante em que o bloco atinge o repouso.



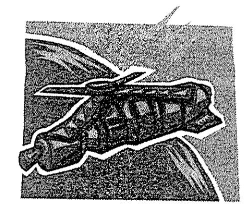
Questão 215 –

Um corpo de massa $m = 600$g move-se livremente sobre um plano horizontal com velocidade constante $v_0 = 10$ m/s. Num certo instante $t = 0$ s, começa a atuar sobre ele uma força F horizontal contrária ao seu movimento, cujo módulo varia com o tempo de acordo com a função $F = t/3$ no SI. Determine o tempo necessário para que o corpo atinja o repouso.

Questão 216 –

Um satélite de massa M move-se em órbita do planeta cajúpiter em movimento circular sob ação exclusiva da força gravitacional de intensidade F, numa órbita de raio R. Determine o impulso médio aplicado pela força F quando o satélite percorre um quarto da circunferência.

a) $\sqrt{FRM}$
b) $2\sqrt{FRM}$
c) $\sqrt{2FRM}$
d) $3\sqrt{FRM}$
e) $3\sqrt{FRM}$



Questão 217

Um corpo de massa 2 kg está em movimento circular uniforme em torno de um ponto fixo, preso à extremidade de um fio de 3 m de comprimento, com velocidade angular de 1 rad/s. O módulo do impulso, exercido pela força que traciona o fio, quando o corpo descreve meia volta, vale:

a) 0 N.s b) 6 N.s c) 9 N.s d) 12 N.s e) 18 N.s

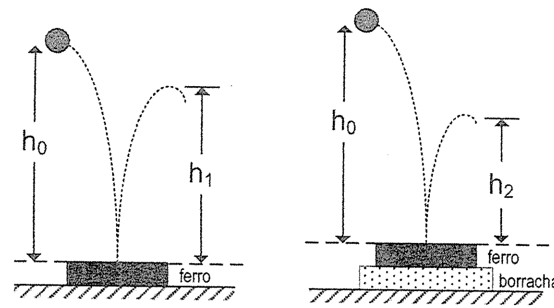
Questão 218

(U Mackenzie-SP) Uma esfera de 0,5 kg, abandonada de uma altura de 1,8 m, choca-se com o solo. Adote $g = 10$ m/s^2. Sabe-se que o choque dura 0,02s e que o coeficiente de restituição entre a esfera e o solo é 0,8. Determine:
a) a velocidade com que a esfera colide com o chão;
b) a velocidade com que a esfera retorna, após a colisão;
c) a força média que age sobre a esfera durante o choque.

Questão 219 –

Uma bola de massa $m = 2$ kg cai de uma altura $h_o = 5$ m acima de uma chapa de ferro posicionada no solo. A bola repica e sobe novamente até uma nova altura $h_1 = 3{,}2$ m, quando a chapa de ferro está apoiada diretamente sobre o chão duro e, até uma altura $h_2 = 1{,}8$ m quando se coloca sob a chapa uma camada de espuma de borracha. Sendo $g = 10$ m/s^2, determine:

a) o coeficiente de restituição entre a bola e a chapa de ferro;
b) a massa M da chapa de ferro.



Questão 220 (AFA 2003)

Um foguete cuja massa vale 6 toneladas é colocado em posição vertical para lançamento. Se a velocidade de escape dos gases vale 1 km/s, a quantidade de gases expelida por segundo, a fim de proporcionar o empuxo necessário para dar ao foguete uma aceleração inicial para cima igual a 20 m/s^2 é :

a) 180 kg b) 120 kg c) 100 kg d) 80 kg e) 60 kg

Questão 221 (AFA 2001)

O motor de um avião a jato que se desloca a 900 km/h, expele por segundo 200 kg de gases provenientes da combustão. Sabendo-se que estes produtos da combustão são expelidos pela retaguarda, com velocidade de 1800 km/h em relação ao avião, pode-se afirmar que a potência liberada pelo motor vale:

a) $1,00 \,.10^5$ W b) $2,50.10^7$ W c) $3,70.10^7$ W d) $3,24 \,.\, 10^8$ W

Questão 222 –

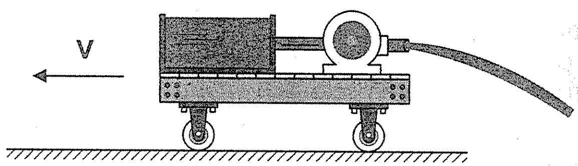
Um avião a jato viaja a 900 km/h. Em cada segundo, penetram nos jatos 150 m^3 de ar que, após a combustão, são ejetados com uma velocidade de 600 m/s em relação ao avião. Tome a densidade doar como 1,3 kg/m^3.

a) Calcule o empuxo resultante exercido sobre o avião.
b) Calcule a potência do sistema a jato.

Questão 223

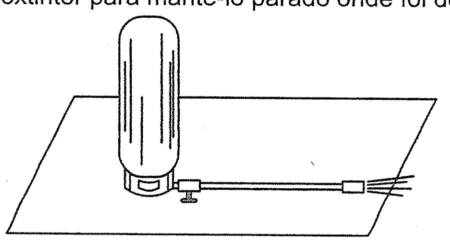
A figura mostra um carrinho com propulsão a jato que se desloca sobre um solo horizontal liso, expelindo água a uma taxa constante de 5 litros por segundo. A água é ejetada pela bomba com velocidade u = 20 m/s em relação ao carrinho. Entretanto, devido à força F de resistência do ar dada por $F = k.v^2$ (SI) se opondo ao seu deslocamento, seu movimento é uniforme. Sendo $k = 4$ $kg.m^{-1}$, esse carro desenvolverá uma velocidade **v** constante de:

a) 5 m/s
b) 4 m/s
c) 3 m/s
d) 2 m/s
e) 1 m/s

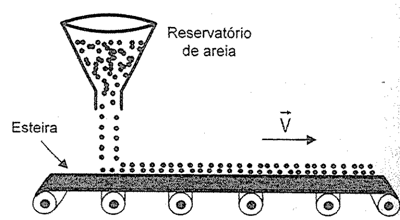


Questão 224 (IME 94) –

Um extintor é colocado em repouso sobre uma superfície áspera e, em seguida, é aberta a torneira da mangueira (veja figura). Admitindo que a massa líquida seja expelida com velocidade v constante, que a mangueira tenha raio de seção reta **r**, que o líquido tenha densidade ρ e que a mangueira permaneça esticada na horizontal, determine a força horizontal que a superfície deve exercer sobre o extintor para mantê-lo parado onde foi deixado.



questão 224



questão 225

Questão 225 (ITA 2000) –

Deixa-se cair continuamente areia de um reservatório a uma taxa de 3,0 kg/s diretamente sobre uma esteira que se move na direção horizontal com velocidade v. Considere que a camada de areia depositada sobre a esteira se locomove com a mesma velocidade v, devido ao atrito. Desprezando a existência de quaisquer outros atritos, conclui-se que a potência em watts, requerida para manter a esteira movendo-se a 4,0 m/s, é:

a) 0
b) 3
c) 12
d) 24
e) 48

Questão 226

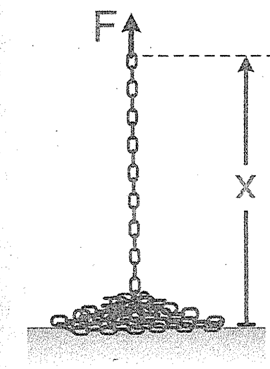
Uma corrente de massa igual a 750 g e 1,5 m de comprimento está jogada no chão. Uma pessoa segura-a por uma das pontas e suspende-a verticalmente, com velocidade constante v = 0,5 m/s.

a) Determine a expressão F(x) da força F exercida pela pessoa em função do comprimento suspenso x da corda, com $0 \leq x \leq 1,5$ m. ($g = 9,8$ m/s^2)
b) Qual é o trabalho realizado para levantar toda a corda até que toda ela perca o contato com o chão ?

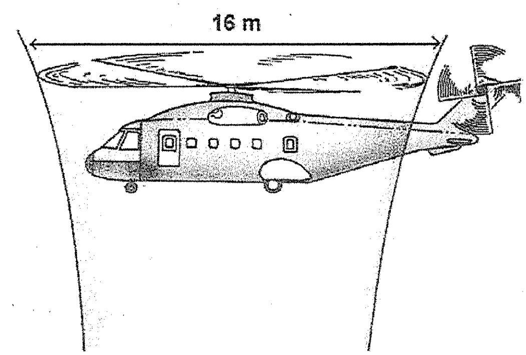
Questão 227 –

O helicóptero mostrado na figura tem massa 10 toneladas, quando vazio, e pode produzir uma corrente de ar para baixo com velocidade máxima v = 25 m/s e diâmetro 16 m. Supondo ρ = 1,2 kg/m^3 a densidade do ar naquela altitude, a massa da carga extra que o helicóptero pode suportar, além do seu prórpio peso, vale, aproximadamente:

a) 1300 kg b) 5100 kg c) 2700 kg d) 3200 kg e) 1900 kg



questões 226



questão 227

Questão 228 (ITA 96)

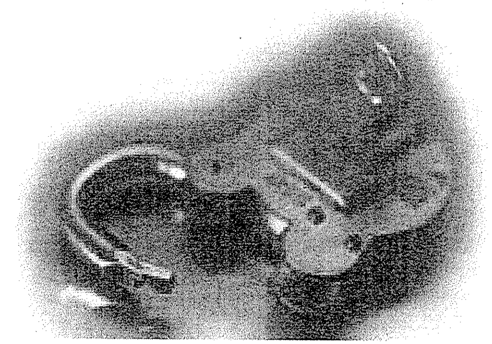
Um avião a jato se encontra na cabeceira da pista coma sua turbina ligada e com os freios acionados, que o impedem de se movimentar. Quando o piloto aciona a *máxima potência, o ar é expelido a uma razão de 100kg por segundo*, a uma velocidade de 600m/s em relação ao avião. Nessas condições:

a) a força transmitida pelo ar expelido ao avião é nula, pois um corpo não pode exercer força sobre si mesmo.
b) as rodas do avião devem suportar uma força horizontal igual a 60kN.
c) se a massa do avião é de 7×10^3kg o coeficiente de atrito mínimo entre as rodas e o piso deve ser de 0,2.
d) não é possível calcular a força sobre o avião com os dados fornecidos.
e) nenhuma das afirmativas acima é verdadeira.

Questão 229 -

No momento inicial, um foguete de massa M movia-se com velocidade V_o livre da ação gravitacional. Ao final de cada segundo, o foguete expele uma porção de gás de massa m cuja velocidade em relação ao foguete, logo antes de ser expelida, vale u. Determine a velocidade adquirida pelo foguete decorridos n segundos.

3 Respostas e Soluções



1 – Trabalho e Energia

Questão 01 – Solução

$T_N = 0$
$T_{FAT} = 0 + (-Fat.\ b)$
$T_P = 0$
$T_F = F.\ (a + b)$
Pelo princípio do trabalho total, temos:
$T_{total} = T_N + T_{FAT} + T_P + T_F = \Delta Ecin = Ecin_F - Ecin_i$
$-Fat.\ b + F.\ (a + b) = 0 - 0$
$Fat = F.(a + b) / b = F.(a/b + 1)$

resposta: letra A

Questão 02 – Resposta: alternativa e

Questão 03 – Solução

Quando a bala penetra a parede, sofre a ação de uma força retardadora F (suposta constante) que realiza trabalho negativo, dissipando energia mecânica em calor. Durante a penetração da parede, o movimento é praticamente horizontal, o trabalho da força peso P é nulo. Pelo princípio do Trabalho total, temos:

$T_{total} = Ecin\ F - Ecin\ i \Rightarrow -F.D = 0 - m.V^2/2 \Rightarrow F.D = m.\ V^2/2$

Quando a bala é atirada com velocidade V_1, ela penetra D_1: $\boxed{F.\ D_1 = \dfrac{m.V_1^2}{2}}$

Quando a bala é atirada com velocidade V_2, ela penetra D_2: $\boxed{F.\ D_2 = \dfrac{m.V_2^2}{2}}$

Note que a força F é a mesma em casa episódio, conforme o enunciado. Dividindo uma equação pela outra, membro a membro, vem:

$$\frac{D_1}{D_2}=\frac{V_1^2}{V_2^2} \Rightarrow \frac{D_1}{D_2}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{10cm}{D_2}=\left(\frac{400}{600}\right)^2 \Rightarrow \frac{10cm}{D_2}=\frac{4}{9} \Rightarrow$$

$D_2 = 22{,}5$ cm

Questão 04 – Resposta: alternativa d

Dica: – veja exemplo resolvido 2 – página 16

Questão 05

Solução: Apesar da tentação de dividir o problema em várias etapas, não o faça. Elegeremos o fundo do tanque como sendo a posição inicial da bola e, a última posição lá em cima como sendo a posição final, sem dar atenção a nenhuma outra posição intermediária, pela absoluta desnecessidade de fazê-lo.

$T_{total} = T_E + T_P = Ecin_F - Ecin_i$

$(+E_1.H_1 + E_2.H_2) + (-P).(H_1 + H_2 + x) = 0 - 0$

com $E_1 = d_1.v.g$, $E_2 = d_2.v.g$, $P = m.g = d_3.v.g$, onde v = volume da bolinha.

$(+d_1.v.g.H_1 + d_2.v.g.H_2) - d_3.v.g.(H_1 + H_2 + x) = 0 - 0$

$d_1.H_1 + d_2.H_2 - d_3.(H_1 + H_2) = d_3.x$

$$x = \frac{H_1.(d_1 - d_3) + H_2.(d_2 - d_3)}{d_3}$$

Questão 06

Solução: $T_{total} = T_N + T_{FAT} + T_P = Ecin_F - Ecin_i$

$(0) + (-Fat_1.d_1 - Fat_2.d_2) + 0 = 0 - m.(v_o)^2/2$

$-\mu_1.m.g.d_1 - \mu_2.m.g.d_2 = -m.(v_o)^2/2$

$2\mu_1.g.d_1 + 2\mu_2.g.d_2 = (v_o)^2$

$2.(0{,}3).10.1 + 2.(0{,}25).10.2 = (v_o)^2 \Rightarrow v_o = 4$ m/s

Questão 07

Solução:

a) Apliquemos o trabalho total ao longo das três primeiras voltas, quando a velocidade cairá à metade do seu valor inicial:

$T_{total} = T_N + T_{FAT} + T_P = Ecin_F - Ecin_i$

$0 + (-Fat.\,d) + 0 = \frac{m.(v_F)^2}{2} - \frac{m.(v_i)^2}{2}$, onde d = 3 voltas completa

$$-\mu.m.g.3.(2\pi R) = \frac{m.\left(\frac{v_o}{2}\right)^2}{2} - \frac{m.(v_o)^2}{2} = \frac{-3m.(v_o)^2}{8} \Rightarrow \mu = v_o^2/(16.\pi.g.R)$$

b) Apliquemos o trabalho total ao longo das **n** primeiras voltas, quando a velocidade inicial v_o será reduzida a zero:

$T_{total} = T_N + T_{FAT} + T_P = Ecin_F - Ecin_i$

$0 + (-Fat.\,d) + 0 = \frac{m.(v_F)^2}{2} - \frac{m.(v_i)^2}{2}$, onde d = **n** voltas completas

$-\mu.m.g.\mathbf{n}.(2\pi R) = \frac{m.(0)^2}{2} - \frac{m.(v_o)^2}{2}$ com $\mu = v_o^2/(16.\pi.g.R)$

$$-\frac{(v_o)^2}{16.\pi.g.R}m.g.\mathbf{n}.(2\pi R) = 0 - \frac{m.(v_o)^2}{2} \Rightarrow \mathbf{n} = 4 \text{ voltas.}$$

Questão 08

Solução:

a) Apliquemos o Princípio do Trabalho Total ao longo do trecho AC. Para isso, precisamos somar todos os trabalhos realizados por todas as forças nesse trecho:

$T_{Fat} = T_{Fat\,AC} = T_{Fat\,AB} + T_{Fat\,BC} = 0 + (-Fat.\,d_{BC}) = -Fat.(10-6) = -Fat.\,4$

Sendo a força F variável, seu trabalho não pode ser calculado por T = F.d, mas sim pela área sob o gráfico F x d.

T_F = área trapézio $= \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(10+5).8}{2} = +60J$

$T_{Total} = \Sigma T_{Todos} = Ecin_{final} - Ecin_{inicial}$

$T_N + T_{peso} + T_{Fat} + T_F = Ecin_C - Ecin_A$

$0 + 0 + (-Fat.\,4) + 60 = 0 - 5.4^2/2 \Rightarrow Fat = 25$ N

b) $Fat = \mu_C.N = \mu_C.m.g$

$25 = \mu_C.5.10 \Rightarrow \mu_C = 0{,}5$

Questão 09 – Resposta: alternativa b

Dica: veja exemplo resolvido 5, página 30.

Questão 10

Respostas

a) MHS de amplitude 1m, entre as abscissas x = 0 m e x = 2m

b) 2 m/s c) x = 2m

Questão 11

Solução:

) Apliquemos o Princípio do Trabalho Total desde a posição inicial (em que a aixa encontra-se em repouso) até a posição final (em que a caixa encontra-se m repouso momentâneo causando máxima compressão à mola) :

$_{Total} = \Sigma T_{Todos} = Ecin_{final} - Ecin_{inicial}$

$_N + T_{peso} + T_{Felast} + T_F = Ecin_F - Ecin_i$

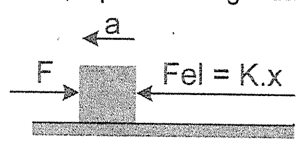
$$+ \ 0 + \left(\frac{K.x_i^2}{2} - \frac{K.x_F^2}{2}\right) + F.(d+x) = Ecin_F - Ecin_i$$

$$+ \ 0 + \left(0 - \frac{K.x^2}{2}\right) + F.(d+x) = 0 - 0$$

$$(d + 0,2) = \frac{100.(0,2)^2}{2} \Rightarrow \boxed{d = 0,3\ m}$$

Segundo o enunciado, quando a caixa pára momentaneamente, a mola ncontra-se comprimida em x = 20 cm = 0,2 m, aplicando sobre a caixa uma rça elástica $F_{elást} \leftarrow$ de módulo K.x = 100 .0,2 = 20 N

alculando a aceleração da caixa, a partir da segunda lei de Newton, vem:



$_R = m.a \Rightarrow K.x - F = m.a \Rightarrow 20 - 4 = 2.a \Rightarrow \boxed{a = 8\ m/s^2 \leftarrow}$

Inicialmente, a caixa parte do repouso em movimento acelerado sob ação da rça externa F→. Ao tocar a mola e comprimi-la gradativamente, a caixa passa a frer desta uma força elástica $F_{elast} \leftarrow$ de módulo crescente (Felást = k.x). ntretanto, o movimento da caixa continua acelerado enquanto o módulo da rça elástica não superar o módulo da força externa F, isto é, enquanto F ≥ Fel, forma que a força resultante F_R = F − Fel ainda aponte a favor $F_R \rightarrow$ do ovimento ($F_R \rightarrow$, $v \rightarrow$). **Assim, a velocidade da caixa aumentará até que corra Fel = F.** A partir desse ponto, a força elástica (que continua aumentando medida que a compressão da mola cresce) superará a força externa F el > F) e a força resultante (F_R = Fel − F) passará a apontar contra o ovimento da caixa ($F_R \leftarrow$, $v \rightarrow$), levando à sua desaceleração gradativa.

eterminemos a deformação da mola no momento em que a caixa atinge a locidade máxima:

F = Felast ⇒ F = K.x ⇒ 4 = 100.x ⇒ $\boxed{x = 0,04\ m}$

Assim, vemos que a velocidade máxima da caixa é atingida quando a deformação da mola atinge x = 0,04 m. Para determinar a velocidade da caixa nessas condições, apliquemos o Princípio do Trabalho Total desde a posição inicial (em que a caixa encontra-se em repouso) até a posição desejada (x = 0,04 m):

$T_{Total} = \Sigma T_{Todas} = Ecin_F - Ecin_i$

$T_N + T_{peso} + T_{Felast} + T_F = Ecin_F - Ecin_i$

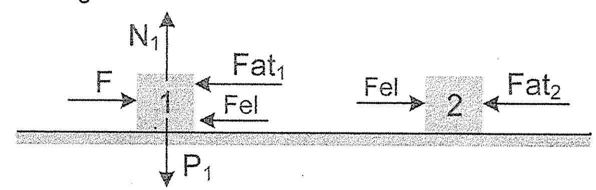
$$0 + 0 + \left(\frac{K.x_i^2}{2} - \frac{K.x_F^2}{2}\right) + F.(d+x) = Ecin_F - Ecin_i$$

$$0 + 0 + \left(0 - \frac{K.x^2}{2}\right) + F.(d+x) = \frac{m.(v)^2}{2} - 0, \text{ com } \mathbf{d} = 0,3\ m \text{ e } \mathbf{x} = 0,04\ m$$

$$4.(0,3 + 0,04) - \frac{100.(0,04)^2}{2} = \frac{2.(v)^2}{2} \Rightarrow v^2 = 1,28 \Rightarrow \boxed{v_{max} = \sqrt{1,28}\ m/s}$$

Questão 12

Solução: Para tornar iminente o escorregamento da caixa 2, a força elástica Fel = k.x tem que crescer o suficiente para se igualar à força de atrito máxima na iminência de escorregar:



$Fel = Fat_{2\ Max} \Rightarrow K.x = \mu.m_2.g \Rightarrow \boxed{x_C = \frac{\mu.m_2.g}{K}}$

O valor de x_C é a deformação crítica (mínima) da mola que tornaria iminente o escorregamento da caixa 2.

Devido à ação da força constante F, a caixa 1 partirá do repouso e comprimirá a mola até lhe causar uma certa deformação máxima, deformação essa que será atingida no momento em que a caixa 1 pára (a fim de inverter o sentido do seu movimento, sob ação da força elástica).

A menor força F capaz de tornar iminente o escorregamento da caixa 2 será aquela que levar a caixa 1 a causar uma deformação máxima $x = x_C$ na mola.

Apliquemos o Princípio do Trabalho Total ao movimento da caixa 1, desde a posição inicial (em que a caixa 1 encontra-se em repouso) até a posição final em que ela pára, ao causar uma deformação final $x_F = x_C$ na mola. É fácil perceber que, durante esse pequeno percurso, a caixa 1 sofrerá um deslocamento $d_1 = x_C$ igual à deformação que ela proporciona à mola:

$$T_{Total} = \Sigma T_{Todas} = Ecin_F - Ecin_i$$

$$T_{N1} + T_{peso\,1} + T_{Felast} + T_F + T_{Fat} = Ecin_F - Ecin_i$$

$$0 + 0 + \left(\frac{K.x_i^2}{2} - \frac{K.x_F^2}{2}\right) + F.d_1 + (-Fat_1.d_1) = 0 - 0$$

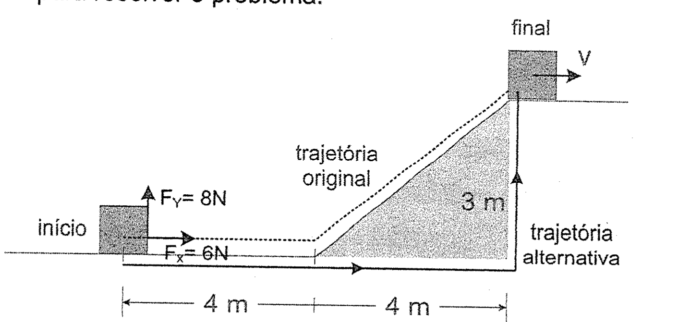
$$0 + 0 + \left(\frac{K.(0)^2}{2} - \frac{K.(x_C)^2}{2}\right) + F.x_C + (-\mu.m_1.g.x_C) = 0 - 0$$

$$F.x_C = \mu.m_1.g.x_C + \frac{K.(x_C)^2}{2}, \quad \text{com} \quad x_C = \frac{\mu.m_2.g}{K}$$

$$F = \mu.m_1.g + \frac{K.x_C}{2} = \mu.m_1.g + \frac{\mu.m_2.g}{2} \Rightarrow F = \frac{(2.m_1 + m_2).\mu.g}{2}$$

Questão 13

Solução: Sobre a caixa agem as forças peso P, normal N além da força F (substituída pelas suas componentes F_X e F_Y). Apliquemos o Princípio do Trabalho Total para resolver o problema.



$$T_{Total} = \Sigma T_{Todas} = Ecin_F - Ecin_i$$

$$T_N + T_{peso} + T_{FX} + T_{FY} = Ecin_F - Ecin_i$$

Calculando o trabalho da força peso pela **trajetória alternativa** (o que é permitido, visto que ela é vetorialmente constante), temos:

$$T_{peso} = T_{peso\text{-}x} + T_{peso\text{-}Y} = 0 + -mg.h = -(1{,}5).(10).(3) = -45\ J$$

O trabalho realizado pela força peso também pode ser calculado pela relação eq32 (página 47), visto que se trata de uma força conservativa:

$$T_{peso} = Epot_i - Epot_F = m.g.hi - m.g.h_F = m.g.(0) - (1{,}5).(10).(3) = -45J$$

$T_N = 0$, visto que a normal N sempre faz 90° com a trajetória original durante todo o percurso.

Calculando o trabalho da componente Fx pela **trajetória alternativa** (o que é permitido, visto que ela é vetorialmente constante), temos:

$$T_{Fx} = T_{Fx\text{-}Hor} + T_{Fx\text{-}Vert} = +F_x.d_x + 0 = (6N).(4 + 4)m = +48\ J$$

$T_{Fx\text{-}Vert} = 0$, visto que F_X faz 90° com a trajetória alternativa no trecho vertical.

Calculando o trabalho da componente F_Y pela **trajetória alternativa** (o que é permitido, visto que ela é vetorialmente constante), temos:

$$T_{Fy} = T_{Fy\text{-}Hor} + T_{Fy\text{-}Vert} = 0 + F_y.d_y = (8N).(3m) = +24\ J$$

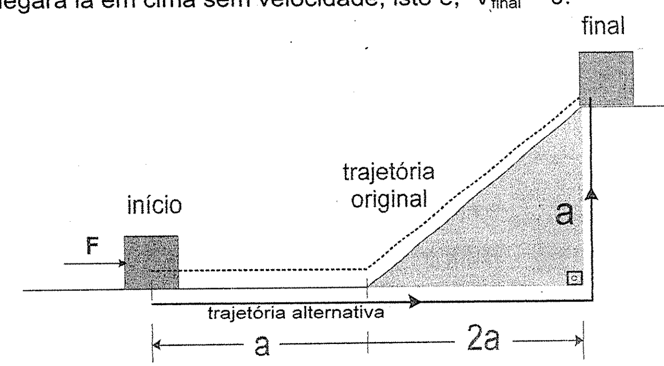
$T_{Fy\text{-}Hor} = 0$, visto que F_y faz 90° com a trajetória alternativa no trecho horizontal.

$$T_N + T_{peso} + T_{Fx} + T_{FY} = Ecin_F - Ecin_i$$

$$0 + (-45) + 48 + 24 = \frac{1{,}5.v^2}{2} - 0 \Rightarrow v = 6\ m/s$$

Questão 14

Solução: A menor força horizontal F que fará a caixa atingir o piso superior é a força F que fizer a caixa atingir o piso superior com velocidade praticamente nula.
A caixa chegará lá em cima sem velocidade, isto é, $V_{final} = 0$.



Pelo princípio do trabalho total, podemos escrever:

$$T_{Total} = \Sigma T_{Todas} = Ecin_F - Ecin_i$$

$$T_N + T_{peso} + T_F = Ecin_F - Ecin_i$$

Calculando o trabalho da força peso pela **trajetória alternativa** (o que é permitido, visto que ela é vetorialmente constante), temos:

$\tau_{peso} = \tau_{peso\text{-}Hor} + \tau_{peso\text{-}Vert} = 0 + -mg.(a) = -m.g.a$

O trabalho realizado pela força peso também pode ser calculado pela relação eq32 (página 47), visto que se trata de uma força conservativa:

$\tau_{peso} = Epot_i - Epot_F = m.g.hi - m.g.h_F = m.g.(0) - m.g.(a) = -m.g.a$

$\tau_N = 0$, visto que a normal N sempre faz 90° com a <u>trajetória original</u> durante todo o percurso.

Calculando o trabalho da força F pela **trajetória alternativa** (o que é permitido, visto que ela é vetorialmente constante), temos:

$\tau_F = \tau_{F\text{-}Hor} + \tau_{F\text{-}Vert} = +F.(3a) + 0 = +F.3a$,

Assim, substituindo, vem:

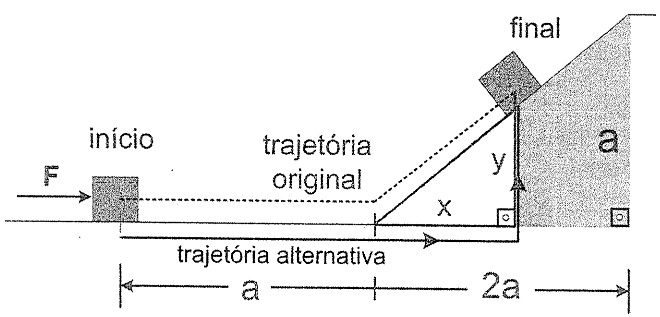
$\tau_{Total} = \Sigma\tau_{Todas} = Ecin_F - Ecin_i$

$\tau_N + \tau_{peso} + \tau_F = Ecin_F - Ecin_i$

$0 + (-mg.a) + F.3a = 0 - 0 \Rightarrow F = m.g / 3$

Questão 15

Solução: A questão anterior mostrou a menor força capaz de fazer a caixa atingir o piso superior vale $F = m.g/3$, de forma que, se uma força menor ($F = m.g/4$) for aplicada à caixa, ela certamente irá parar em algum ponto sobre a rampa, antes de atingir o andar superior.



Seja y a altura máxima atingida pela caixa. Uma semelhança de triângulos simples na figura acima permite escrever:

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{2a} \Rightarrow x = 2y$$

Pelo princípio do trabalho total, podemos escrever:

$\tau_{Total} = \tau_N + \tau_{peso} + \tau_F = Ecin_F - Ecin_i$

Calculando o trabalho da força peso pela **trajetória alternativa** (o que é permitido, visto que ela é vetorialmente constante), temos:

$\tau_{peso} = \tau_{peso\text{-}Hor} + \tau_{peso\text{-}Vert} = 0 + -mg.(y) = -m.g.y$

$\tau_N = 0$, visto que a normal N sempre faz 90° com a <u>trajetória original</u> durante todo o percurso.

Calculando o trabalho da força F pela **trajetória alternativa** (o que é permitido, visto que ela é vetorialmente constante), temos:

$\tau_F = \tau_{F\text{-}Hor} + \tau_{F\text{-}Vert} = +F.(a+x) + 0 = \frac{m.g}{4}.(a+x)$, com $x = 2y$

Assim, substituindo, vem:

$\tau_{Total} = \Sigma\tau_{Todas} = Ecin_F - Ecin_i$

$\tau_N + \tau_{peso} + \tau_F = Ecin_F - Ecin_i$

$0 + (-mg.y) + \frac{m.g}{4}.(a+x) = 0 - 0$, com $x = 2y$

$m.g.y = \frac{m.g}{4}.(a+2y) \Rightarrow 4y = (a + 2y) \Rightarrow y = a/2$

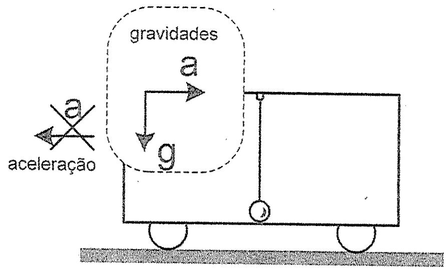
Questão 16 – Resposta: $F = m.g.c / (a + b)$

Questão 17

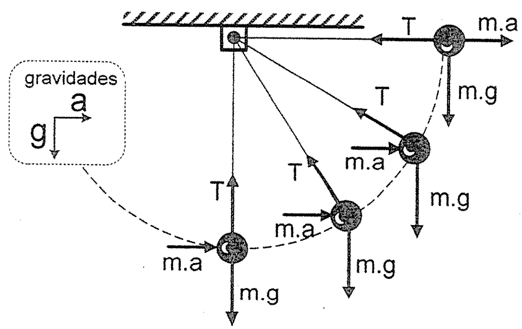
Solução: Esse problema é resolvido mais facilmente no referencial acelerado do vagão. Para efetuarmos essa mudança de referencial, garantindo ainda a validade das leis de Newton no referencial acelerado, faremos uso do **Princípio da Equivalência** (estudado com detalhes no capítulo 4 do volume I desta obra).

Segundo esse princípio, a aceleração **a←** (que o vagão possui no referencial da Terra) será substituída (no referencial do vagão) por uma "gravidade adicional" **→a** de mesmo valor, mesma direção e sentido contrário da aceleração **a→** que será "esquecida", visto que o vagão não apresenta tal aceleração no referencial do próprio vagão (☺ obviamente....).

Assim, do ponto de vista de quem se encontra no referencial do vagão, haverá duas gravidades **a** e **g** igualmente legítimas, conforme estabelecido pelo Princípio da Equivalência.



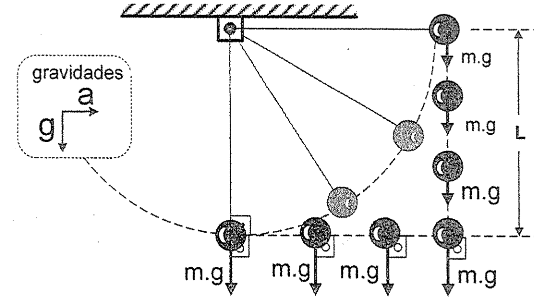
Ora, mas gravidades produzem forças gravitacionais ao atuarem sobre massas, não é verdade ? Assim, da mesma forma que a gravidade **g**↓ (gerada pela massa da Terra) age sobre a massa **m** do pêndulo, produzindo sobre esta a força gravitacional **m.g**↓ ; a gravidade **a**→ (fruto da mudança do referencial inercial para o não inercial) também agirá sobre a referida massa **m**, produzindo nela a *força gravitacional* **m.a** → como mostrado na Figura abaixo:



Assim, no referencial do vagão, a bola partirá do repouso, da posição inicial, e se moverá acelerada até atingir o teto do vagão

As forças **m.g** e **m.a** são constantes em direção, sentido e intensidade durante todo o percurso. Isso significa que o trabalho realizado por essas duas forças pode ser calculado através de uma trajetória alternativa a fim de minimizar o esforço algébrico.

Conforme vimos na Figura 10 (página 9), o trabalho realizado pela tração T é nulo durante o movimento de um pêndulo simples, visto que essa força se mantém perpendicular (α = 90°) à trajetória circular durante todo o percurso, devido à sua característica radial: $T_{\text{Tração}} = 0$



O trabalho do peso será calculado tomando-se (mentalmente) a trajetória alternativa horizontal + vertical ilustrada na figura acima:

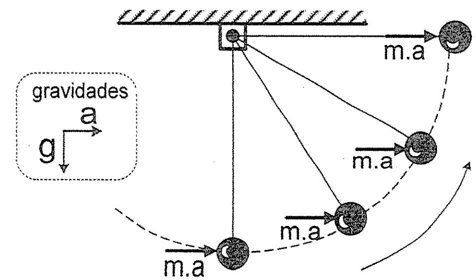
$$T_{\text{Peso}} = T_{\text{Peso-horizontal}} + T_{\text{Peso-vertical}}$$

Note que o peso é perpendicular à trajetória no trecho horizontal ($T_{\text{Peso-horizontal}} = 0$) e se opõe ao movimento da esfera, durante a subida ($T_{\text{Peso-vertical}} < 0$). Assim, vem:

$$T_{\text{Peso}} = T_{\text{Peso-horizontal}} + T_{\text{Peso-vertical}} = 0 + (-).mg.D$$

Sendo D = L, temos:

$$T_{\text{Peso}} = 0 - m.g.L = -m.g.L \Rightarrow T_{\text{Peso}} = -m.g.L$$

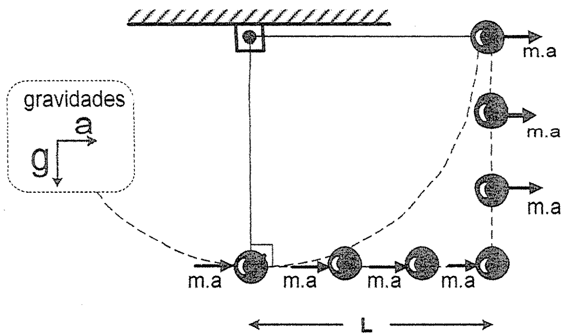


O trabalho da força **m.a** também será calculado tomando (mentalmente) a trajetória alternativa horizontal+vertical ilustrada na figura a seguir. O trabalho realizado pela força **m.a** é nulo no trecho vertical pois α = 90°, a força é perpendicular ao deslocamento :

$$T_F = T_{F\text{-horizontal}} + T_{F\text{-vertical}} = +(m.a).D + 0$$

Sendo D = L, vem:

$$T_F = +(m.a).L$$



gora podemos determinar o trabalho total realizado sobre a esfera, durante o eu movimento de subida:

$$T_{Total} = T_{Tração} + T_{Peso} + T_F = Ecin_F - Ecin_i$$

$$T_{Total} = 0 + (-m.g.L) + m.a.L = \frac{m.v^2}{2} - \frac{m.v_o^2}{2}$$

$$(-m.g.L) + m.a.L = \frac{m.v^2}{2} - 0$$

$$m.a.L - m.g.L = \frac{m.v^2}{2}$$

ubstituindo os valores numéricos, vem:

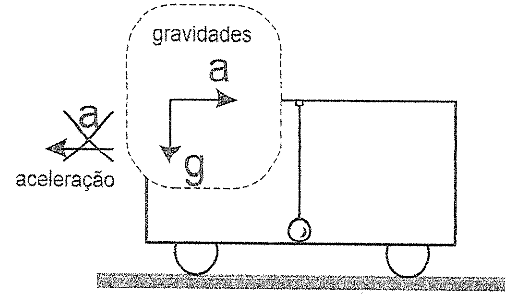
$$5 \times 18 \times 1 - 5 \times 10 \times 1 = \frac{5.v^2}{2} \Rightarrow v = 4 \text{ m/s}$$

oncluímos que a bola atinge o teto com uma velocidade $v = 4$ m/s . Note que o novimento executado pela esfera não se trata de um MU, nem sequer de um IUV. Assim, não há outra maneira de se resolver esse exercício (em 2° grau) em utilizar os conceitos de trabalho e energia.

Questão 18

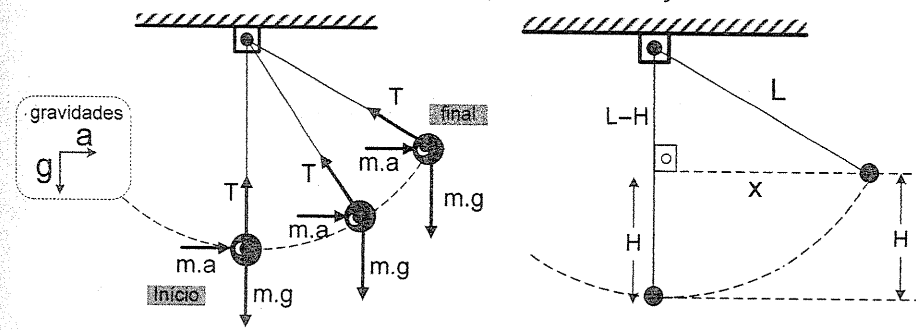
olução: Esse problema é resolvido mais facilmente no referencial acelerado do agão. Para efetuarmos essa mudança de referencial, garantindo ainda a alidade das leis de Newton no referencial acelerado, faremos uso do **Princípio a Equivalência** (estudado com detalhes no capítulo 4 do volume I desta obra).

egundo esse princípio, a aceleração **a**← (que o vagão possui no referencial da erra) será substituída (no referencial do vagão) por uma "gravidade adicional" →**a** de mesmo valor, mesma direção e sentido contrário da aceleração **a**→ que erá "esquecida", visto que o vagão não apresenta tal aceleração no referencial o próprio vagão (☺ obviamente....).



Assim, do ponto de vista de quem se encontra no referencial do vagão, haverá duas gravidades **a** e **g** igualmente legítimas, conforme estabelecido pelo Princípio da Equivalência.

Seguiremos o mesmo raciocínio da resolução da questão 16, que deve ser lida previamente, para melhor compreender a presente resolução.



No referencial do vagão, a esfera pendular parte de repouso, da posição mais baixa, acelera e retarda até parar na posição final de altura máxima. Determinaremos essa altura máxima final aplicando o Princípio do Trabalho Total nesse percurso.
O trabalho do peso será calculado tomando-se (mentalmente) a trajetória alternativa horizontal + vertical, da mesma forma que fizemos na resolução da questão 16 :

$$T_{Peso} = T_{Peso\text{-}horizontal} + T_{Peso\text{-}vertical} = 0 + (-).mg.H$$

$$T_{Peso} = -m.g.H$$

O trabalho da força **m.a** também será calculado tomando (mentalmente) a trajetória alternativa horizontal+vertical da mesma forma que fizemos na resolução da questão 16:

$$T_F = T_{F\text{-}horizontal} + T_{F\text{-}vertical} = +(m.a).X + 0$$

$$T_F = +(m.a).X$$

Agora podemos determinar o trabalho total realizado sobre a esfera, durante o seu movimento de subida:

$$T_{Total} = T_{Tração} + T_{Peso} + T_F = Ecin_F - Ecin_i$$

$$T_{Total} = 0 + (-m.g.H) + m.a.X = \frac{m.v^2}{2} - \frac{m.v_o^2}{2}$$

$$(-m.g.H) + m.a.X = 0 - 0 \Rightarrow g.H = a.X$$

$H = \frac{a}{g}.X$, com $X = \sqrt{L^2 - (L-H)^2}$, pelo teorema de Pitágoras.

$$H^2.\frac{g^2}{a^2} = L^2 - (L^2 - 2LH + H^2) \Rightarrow H^2.\frac{g^2}{a^2} = 2.L.H - H^2 \Rightarrow H.\left[1 + \left(\frac{g}{a}\right)^2\right] = 2.L$$

$$\boxed{H = \frac{2.L}{\left[1 + \left(\frac{g}{a}\right)^2\right]}}$$

Assim, essa é a altura máxima atingida pelo pêndulo no interior do vagão acelerado.

Questão 19

Solução: Apliquemos o Princípio do Trabalho Total ao movimento da caixa, desde a posição inicial (em que a caixa encontra-se em repouso no topo da rampa) até a posição final (na parte mais baixa da rampa):

$$T_{Total} = \Sigma T_{Todas} = Ecin_F - Ecin_i$$

$$T_N + T_{peso} + T_{Fat} = Ecin_F - Ecin_i$$

O trabalho realizado pela força peso pode ser calculado pela relação eq32 (página 47), visto que se trata de uma força conservativa:

$$T_{peso} = Epot_i - Epot_F = m.g.Hi - m.g.H_F = m.g.(H) - 0 = \boxed{m.g.H}$$

Pelo **Princípio da projeção** (veja eq25, página 41), o trabalho da força de atrito, em todo o percurso de descida, é dado por:

$$T_{Fat} = \boxed{-\mu.m.g.L}$$

Substituindo, vem:

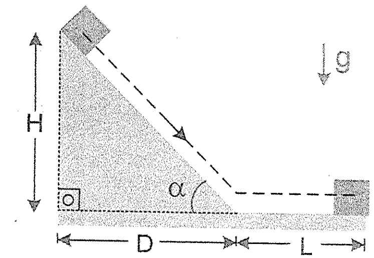
$$T_N + T_{peso} + T_{Fat} = Ecin_F - Ecin_i$$

$$0 + m.g.H + (-\mu.m.g.L) = \frac{m.v^2}{2} - 0 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2g.(H - \mu L)}}$$

O aluno percebe como é notável o **Princípio da Projeção**, que permite efetuar o cálculo do trabalho realizado pela força de atrito sem a necessidade decompor forças nem analisar os ângulos envolvidos.

Questão 20

Solução: A fim de determinar a altura H desconhecida, aplicaremos o Princípio do Trabalho Total ao movimento da caixa, desde a posição inicial até a posição final.



$$T_{Total} = \Sigma T_{Todas} = Ecin_F - Ecin_i$$

$$T_N + T_{peso} + T_{Fat} = Ecin_F - Ecin_i$$

O trabalho realizado pela força peso pode ser calculado pela relação eq32 (página 47), visto que se trata de uma força conservativa:

$$T_{peso} = Epot_i - Epot_F = m.g.Hi - m.g.H_F$$

$$T_{peso} = m.g.(H) - 0 = \boxed{m.g.H}$$

Pelo **Princípio da projeção** (veja eq25, página 41), o trabalho da força de atrito, em todo o percurso de descida, é dado por:

$$T_{Fat} = -\mu.m.g.(D + L) = \boxed{-\mu.m.g.(H.cotg\alpha + L)}$$

Substituindo, vem:

$$T_N + T_{peso} + T_{Fat} = Ecin_F - Ecin_i$$

$$0 + m.g.H - \mu.m.g.(H.cotg\alpha + L) = 0 - 0$$

$$H = \mu.L + \mu.H.cotg\alpha \Rightarrow \boxed{H = \frac{\mu.L}{(1 - \mu.cotg\alpha)}}$$

Para determinar o trabalho realizado pela força de atrito em todo o percurso, apliquemos novamente o Princípio do Trabalho total:

$$T_N + T_{peso} + T_{Fat} = Ecin_F - Ecin_i$$

$$0 + m.g.H + T_{Fat} = 0 - 0$$

$$T_{Fat} = -m.g.H, \text{ com } H = \frac{\mu.L}{(1 - \mu.cotg\alpha)} \Rightarrow \boxed{T_{Fat} = \frac{-m.g.\mu.L}{(1 - \mu.cotg\alpha)}}$$

Questão 21

Solução: Apliquemos o Princípio do Trabalho Total ao movimento da caixa, desde a posição inicial até a posição final.

$$T_{Total} = \Sigma T_{Todas} = Ecin_F - Ecin_i$$

$$T_N + T_{peso} + T_{Fat} + T_F = Ecin_F - Ecin_i$$

O trabalho realizado pela força peso pode ser calculado pela relação eq32 (página 47), visto que se trata de uma força conservativa:

$_{eso} = Epot_i - Epot_F = m.g.Hi - m.g.H_F = 0 - m.g.(H) = \boxed{-m.g.H}$

elo **Princípio da projeção** (veja eq25, página 41), o trabalho da força de atrito, n todo o percurso de descida, é dado por:

$$T_{Fat} = \boxed{-\mu.m.g.L}$$

ote que a caixa vai sendo levada com velocidade constante e praticamente nula urante todo o percurso, de forma que não ocorre variação de energia cinética da iixa durante esse episódio. Assim, temos:

$$T_N + T_{peso} + T_{Fat} + T_F = Ecin_F - Ecin_i$$

$$0 - m.g.H + (-\mu.m.g.L) + T_F = 0$$

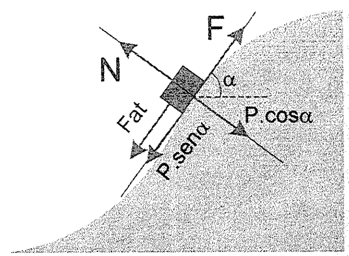
$$\boxed{T_F = \mu.m.g.L + m.g.H}$$

ssim, determinamos o trabalho realizado pelo operador durante esse episódio.

ntretanto, alguns pontos ainda podem não ter ficado claro. Por exemplo:

Por que a caixa precisa ser movida muito lentamente durante esse episódio ?

Por que a força F deve ser manter tangente à trajetória em cada instante ?



sses fatos estão relacionados às condições de alidade do **Princípio da Projeção** mostrado na ágina 41 para o cálculo do trabalho da força de rito.
oltando à página 41, o leitor perceberá que o **rincípio da Projeção**, dado pela relação eq4 e eneralizado na relação eq25 (página 41), só válido se as condições impostas pelas elações eq21, eq22 e eq23 (página 40) forem simultaneamente satisfeitas.

fato de a caixa ser levada muito lentamente ($v \cong 0$), ao longo dessa trajetória urvilínea, permite escrever na direção normal (radial):

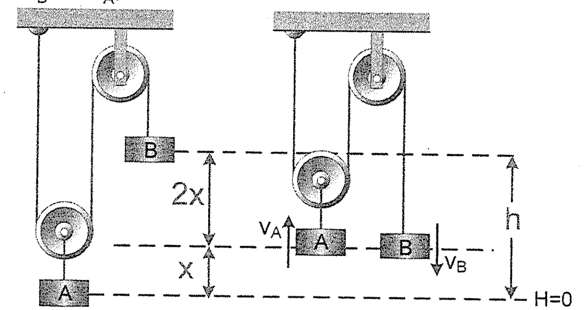
$$FRctp = Fin - Fout = m.v^2 / R$$
$$P.\cos\alpha - N = m.v^2 / R \quad \text{com} \quad v \cong 0$$
$$P.\cos\alpha - N \cong 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = P.\cos\alpha}$$

e a velocidade não fosse praticamente nula, teríamos $N \neq P.\cos\alpha$ e o **Princípio a Projeção** não se aplicaria ao cálculo do trabalho realizado pela força de atrito esse caso.
força F deve ser tangente à trajetória o tempo todo para que ela não tenha enhuma componente na direção da normal N. Caso contrário, mais uma vez a elação $N = P.\cos\alpha$ não seria satisfeita, o que impediria o uso do **Princípio da rojeção** para calcular o trabalho do atrito da força de atrito nesse caso.

Tudo isso são sutilezas que precisam ficar claras para o bom entendimento desse assunto. Em caso de dúvidas, o leitor deve reler as páginas 40 a 42.

Questão 22

Solução: Conforme aprendemos, no Capítulo 7 sobre Vínculos Geométricos, quando a caixa A sobe uma distância x↑, a caixa B desce uma distância correspondente 2x↓. Em qualquer instante, as velocidades das caixas se relacionam por $v_B = 2v_A$.



Sendo o sistema conservativo (veja os Exemplo Resolvidos 10 e 11, página 59), podemos escrever:

$$(Emec_A + Emec_B)_{antes} = (Emec_A + Emec_B)_{depois}$$

$$(Epot_A + Ecin_A + Epot_B + Ecin_B)_{antes} = (Epot_A + Ecin_A + Epot_B + Ecin_B)_{depois}$$

$$(0 + 0 + m.g.3x + 0) = \left(m.g.x + \frac{m.v_A^2}{2} + m.g.x + \frac{m.v_B^2}{2}\right), \text{ com } v_B = 2.v_A$$

$$m.g.x = \frac{m.v_A^2}{2} + \frac{m.(2v_A)^2}{2}, \quad \text{com } 3x = h, \quad x = h/3$$

$$m.g.\frac{h}{3} = \frac{5m.v_A^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_A = \sqrt{\frac{2.g.h}{15}}}, \qquad v_B = 2v_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B = \sqrt{\frac{8.g.h}{15}}}$$

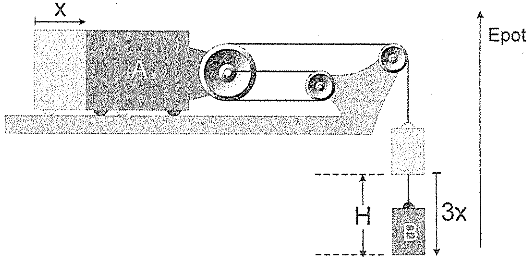
Questão 23

Solução: Conforme aprendemos, no Capítulo 7 sobre Vínculos Geométricos, quando a caixa A sofre um deslocamento x→, a caixa B desce uma distância correspondente 3x↓. Em qualquer instante, as velocidades das caixas se relacionam por $v_B = 3v_A$. Sendo o sistema conservativo (veja os Exemplo Resolvidos 10 e 11, página 59), podemos escrever:

$$(Emec_A + Emec_B)_{antes} = (Emec_A + Emec_B)_{depois}$$

$$(Epot_A + Ecin_A + Epot_B + Ecin_B)_{antes} = (Epot_A + Ecin_A + Epot_B + Ecin_B)_{depois}$$

$$\cancel{Epot_A} + 0 + Epot_{B\,inicial} + 0 = \cancel{Epot_A} + Ecin_{A\,final} + Epot_{B\,final} + Ecin_{B\,final}$$



$$(\, Epot_{B\ inicial} - Epot_{B\ final}\,) = Ecin_{A\ final} + Ecin_{B\ final}$$

$$(+m.g.H) = \frac{(2m).v_A^2}{2} + \frac{m.v_B^2}{2}, \text{ com } v_B = 3.v_A$$

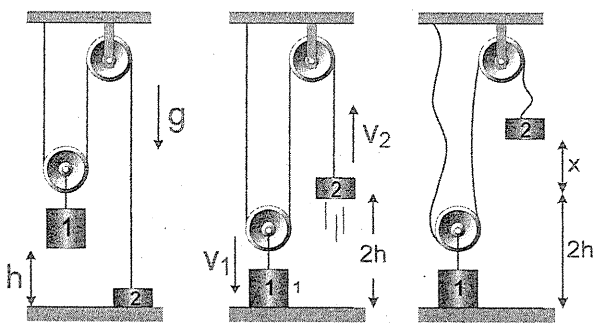
$$+m.g.H = \frac{(2m).v_A^2}{2} + \frac{m.(3.v_A)^2}{2} = \frac{11.m.v_A^2}{2}$$

$$\boxed{v_A = \sqrt{\frac{2.g.H}{11}}} \qquad v_B = 3v_A \Rightarrow \boxed{v_B = 3\sqrt{\frac{2.g.H}{11}}}$$

Note que, em qualquer situação, a energia potencial gravitacional é sempre uma função crescente com a altura h. A energia potencial de um corpo sempre aumenta quando ele se move em sentido oposto ao da gravidade (movimento forçado), e diminui quando o corpo se desloca a favor da gravidade. No problema em questão, a energia potencial da caixa B diminuiu durante seu movimento espontâneo a favor da gravidade.

Questão 24

Solução: Conforme aprendemos, no Capítulo 7 sobre Vínculos Geométricos, quando o corpo 1 sofre um deslocamento h↓, o corpo 2 sobe uma distância correspondente 2h↑. Em qualquer instante, as velocidades das caixas se relacionam por $v_2 = 2.v_1$.



(a) (b) (c)

Sendo o sistema conservativo desde o instante inicial até o momento em que a caixa 1 toca o solo, (veja os Exemplo Resolvidos 10 e 11, página 59), apliquemos a conservação de energia desde a figura **a** até a figura **b** mostrados na figura acima:

$$(Emec_1 + Emec_2)_{antes} = (Emec_1 + Emec_2)_{depois}$$

$$(Epot_1 + Ecin_1 + Epot_2 + Ecin_2)_{antes} = (Epot_1 + Ecin_1 + Epot_2 + Ecin_2)_{depois}$$

$$m_1.g.h + 0 + 0 + 0 = 0 + \frac{m_1.(v_1)^2}{2} + m_2.g.(2h) + \frac{m_2.(v_2)^2}{2}$$

$$m_1.g.h = \frac{m_1.(v_1)^2}{2} + m_2.g.(2h) + \frac{m_2.(v_2)^2}{2} \quad \text{com } v_2 = 2.v_1 \text{ e } m_1 = n.m_2$$

$$(n.m_2).g.h = \frac{n.m_2}{2}.\left(\frac{v_2}{2}\right)^2 + m_2.g.(2h) + \frac{m_2.(v_2)^2}{2}$$

$$n.g.h = \frac{n.(v_2)^2}{8} + 2.g.h + \frac{(v_2)^2}{2} \Rightarrow \boxed{(v_2)^2 = \frac{8.(n-2).g.h}{(n+4)}}$$

A partir da figura **b** até a figura **c**, a tração no fio se torna nula (o fio afrouxa) e o corpo 2 prossegue em MRU sob ação exclusiva da gravidade (a = g), subindo uma distância adicional x até parar. A distância x pode ser prontamente determinada pela equação de Torricelli:

$$(v_{Final})^2 = (v_2)^2 - 2.g.x$$

$$(0)^2 = (v_2)^2 - 2.g.x \Rightarrow x = \frac{(v_2)^2}{2g} = \frac{1}{2g}.\frac{8.(n-2).g.h}{(n+4)} \Rightarrow \boxed{x = \frac{4.(n-2).h}{(n+4)}}$$

Assim, a altura final atingida pela caixa 2, na figura **c**, é dada por:

$$H = 2h + x = 2h + \frac{4.(n-2).h}{(n+4)} \Rightarrow \boxed{H = \frac{6.n.h}{(n+4)}}$$

Questão 25

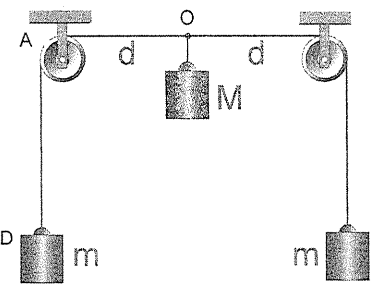
Solução: O sistema, abandonado a partir do repouso, evoluirá até uma posição mais baixa (mostrada na figura abaixo) que não é de equilíbrio, mas apenas de repouso momentâneo. A seguir, determinaremos a distância vertical H máxima descida pelo corpo central.

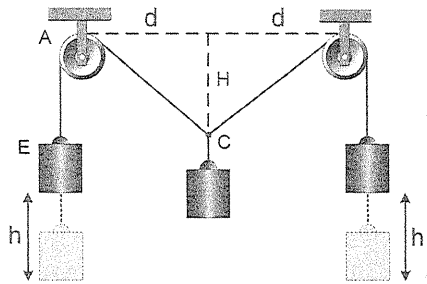
Como o comprimento do fio permanece constante durante todo esse episódio, podemos escrever:

$$OA + AD = CA + AE$$

$$AD - AE = CA - AO \Rightarrow \boxed{h = \sqrt{d^2 + H^2} - d}$$

Durante esse episódio, o sistema é conservativo. As forças de tração internas produzidas pelos fios inextensíveis agem meramente como vínculos geométricos, transmitindo as interações entre os corpos, de forma que seus trabalhos internos acabam se anulando, a exemplo do ocorrido nos Exemplo Resolvidos 10 e 11 na página 59. Assim, o trabalho líquido realizado sobre o sistema é devido às forças gravitacionais, o que nos garante o caráter conservativo do sistema.





Assim, podemos escrever:

$(\text{Emec}_1 + \text{Emec}_2 + \text{Emec}_3)_{\text{antes}} = (\text{Emec}_1 + \text{Emec}_2 + \text{Emec}_2)_{\text{depois}}$

Como não há energia cinética no sistema nem na posição inicial de repouso, nem na posição final de repouso, podemos escrever:

$$\text{Epot}_{1i} + \text{Epot}_{2i} + \text{Epot}_{3i} = \text{Epot}_{1F} + \text{Epot}_{2F} + \text{Epot}_{3F}$$

$$(\text{Epot}_{1i} - \text{Epot}_{1F}) + (\text{Epot}_{2i} - \text{Epot}_{2F}) + (\text{Epot}_{3i} - \text{Epot}_{3F}) = 0$$

$$(-m.g.h) + (+M.g.H) + (-m.g.h) = 0$$

$$M.g.H = 2.m.g.h \quad \Rightarrow \quad M.g.H = 2m.g.\left(\sqrt{d^2+H^2}-d\right)$$

Elevando ao quadrado e reduzindo os termos semelhantes, chegamos à resposta desejada:

$$\boxed{H = \left(\frac{4M.m}{4.m^2 - M^2}\right).d}$$

O leitor deve notar que o cálculo feito acima equivale à aplicação do Princípio do Trabalho total. Veja:

$$T_{\text{Total}} = \Sigma T_{\text{Todas}} = \text{Ecin}_F - \text{Ecin}_i$$

$$T_{\text{peso1}} + T_{\text{peso2}} + T_{\text{peso3}} + T_{\text{trações internas}} = \text{Ecin}_F - \text{Ecin}_i$$

$$(\text{Epot}_{1i} - \text{Epot}_{1F}) + (\text{Epot}_{2i} - \text{Epot}_{2F}) + (\text{Epot}_{3i} - \text{Epot}_{3F}) + 0 = 0 - 0$$

$$(\text{Epot}_{1i} - \text{Epot}_{1F}) + (\text{Epot}_{2i} - \text{Epot}_{2F}) + (\text{Epot}_{3i} - \text{Epot}_{3F}) = 0$$

$$(-m.g.h) + (+M.g.H) + (-m.g.h) = 0$$

Como vemos, o cálculo acima, feito com base no Princípio do Trabalho Total, nos levará à mesma resposta encontrada anteriormente. Entretanto, o leitor precisa estar convicto de que **o trabalho líquido realizado por todas as forças internas que agem meramente como vínculo geométrico, tais como trações em fios inextensíveis ideais e forças de contato entre corpos indeformáveis, acaba sendo nulo.**

Os Exemplo Resolvidos 10 e 11 na página 59 visam exatamente a dar ao leitor a compreensão desse fato usando um argumentação analítica. Na solução deles, foi matematicamente demonstrado que o trabalho total realizado pelas trações internas é nulo. Entretanto, como nem sempre essa exposição analítica será viável, o leitor deve passar a simplesmente aceitar esse fato, desse ponto em diante.

Questão 26

Solução:

a) A resolução da presente questão é sutil e a sua real compreensão reside muito mais no plano abstrato das idéias e dos conceitos, do que propriamente no poder avassalador da matemática avançada. Ou seja, nada de cálculo diferencial e integral ☺. Você pode ir bem longe sem essas ferramentas, desde que tenha bem sedimentado os conceitos físicos.

O conceito de **fio ideal**, por exemplo, trata de um elemento abstrato inextensível que, por ter massa nula, te m como nula também a resultante das forças que agem nele a qualquer instante ($F_R = \mathbf{m}.a = \mathbf{0}.a = \mathbf{0}$). Por esse motivo, na figura s1, a resultante das forças F, T_1 e T_2 que agem na corda (de massa zero) é nula a qualquer tempo, independente da angulação envolvida no problema.

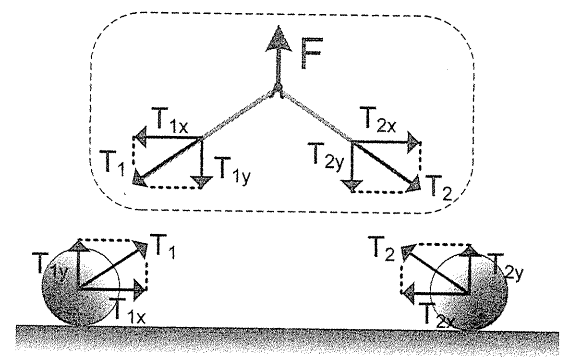


Figura s1 - diagrama de forças agindo no sistema num instante intermediário

Esse equilíbrio das forças em qualquer instante, independentemente dos ângulos envolvidos, nos permite garantir as seguintes relações em módulo:

- Equilíbrio na vertical: $F = T_{1y} + T_{2y}$ **(eq1)**
- Equilíbrio na horizontal: $T_{1x} = T_{2x}$ **(eq2)**
- Pela simetria: $T_1 = T_2$, $T_{1y} = T_{2y}$, $T_{1x} = T_{2x}$ **(eq3)**

Observando a Figura s1, vemos que, para que as bolas não percam o contato com o solo, precisamos ter:

$$T_{1y} \le m.g$$
$$T_{2y} \le m.g$$

Somando, membro a membro, vem: $T_{1y} + T_{2y} \le 2.m.g$ **(eq4)**

De R1 e R4, vem: $F \le 2.m.g$

Então, a maior força crítica pedida no item **a** vale 2.m.g.

b) Pelo fato de a corda ideal ter massa nula (m = 0), o Princípio do Trabalho Total aplicado a ela (região em destaque na Figura s1), durante seu movimento, permite escrever:

$$T_{Total} = \Sigma T_{Todas} = Ecin_F - Ecin_i$$

$$T_F + T_{T1} + T_{T2} = \frac{m.v^2}{2} - \frac{m.v_o^2}{2} = \frac{0.v^2}{2} - \frac{0.v_o^2}{2} = 0$$

$$T_F + T_{T1} + T_{T2} = 0 \qquad \textbf{(eq5)}$$

Note que, na expressão R5 acima, o trabalho T_F realizado pela força F é positivo (força F↑ a favor do deslocamento↑ da corda para cima ↑), ao passo que os demais trabalhos T_{T1} e T_{T2} são negativos (forças T_1 ↙ e T_2 ↘ contra o deslocamento ↑da corda). Assim, em módulo, a relação R5 pode ser reescrita como:

$$T_F = |T_{T1}| + |T_{T2}| \qquad \textbf{(eq6)}$$

Estamos interessados em calcular a velocidade das bolas no instante da colisão entre elas. Sobre cada bola agem uma tração, a força normal N que ela recebe do solo, bem como o seu próprio peso.

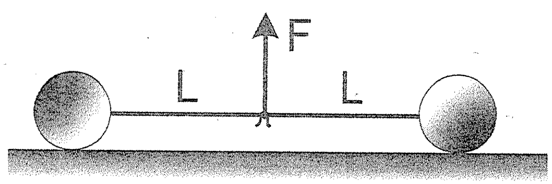


Figura s2 - situação inicial, bolas em repouso

Aplicaremos, a seguir, o Princípio do trabalho total ao sistema formado pelas bolas 1 e 2 desde o instante inicial (Figura s2) até o instante final (Figura s3) em que as duas metades da corda estarão totalmente na vertical:

$$T_{Total} = \Sigma T_{Todas} = Ecin_F - Ecin_i$$

$$(T_{P1} + T_{N1} + T_{T1}) + (T_{P2} + T_{N2} + T_{T2}) = (Ecin_{F1} + Ecin_{F2}) - (Ecin_{i1} + Ecin_{i2})$$

Pela simetria envolvida no problema, é fácil ver que as bolas apresentam velocidades iguais em módulo em qualquer instante ($v_1 = v_2 = v$)

$$(0 + 0 + T_{T1}) + (0 + 0 + T_{T2}) = \left(\frac{m.v^2}{2} + \frac{m.v^2}{2}\right) - (0 + 0)$$

$$T_{T1} + T_{T2} = \frac{m.v^2}{2} + \frac{m.v^2}{2} \qquad \textbf{(eq7)}$$

Na expressão R7 acima, os trabalhos T_{T1} e T_{T2} realizados pelas trações T_1 e T_2 sobre as bolas são positivos, visto que as forças agem a favor do deslocamento das esferas. Assim, das relações R6 e R7, podemos escrever:

$$|T_{T1}| + |T_{T2}| = T_F \qquad \textbf{(eq6)}$$

$$T_{T1} + T_{T2} = \frac{m.v^2}{2} + \frac{m.v^2}{2} \qquad \textbf{(eq7)}$$

$$T_{T1} + T_{T2} = T_F = \frac{m.v^2}{2} + \frac{m.v^2}{2} \qquad \textbf{(eq8)}$$

O ponto de aplicação da força constante F (ponto médio da corda) sofre um deslocamento ↑L para cima, em todo o percurso das bolas do instante inicial (Figura s2) até o instante final (Figura s3). Dessa forma, o trabalho realizado por essa força valer:

$$T_F = F.L \qquad \textbf{(eq9)}$$

Substituindo R9 em R8, vem :

$$F.L = \frac{m.v^2}{2} + \frac{m.v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F.L}{m}} \qquad \textbf{(eq10)}$$

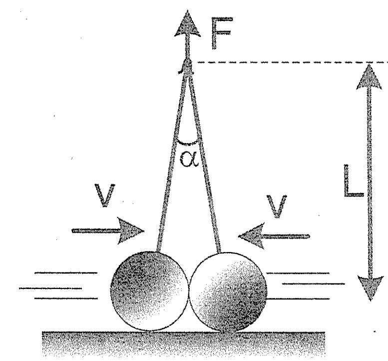


Figura s3 - situação final, bolas colidindo

Ao final da resolução, uma análise conceitual da expressão R10 nos revela um fato esperado: o trabalho realizado pelo operador (isto é, a energia que ele injeta no sistema), ao aplicar a força F, é integralmente convertido na energia cinética das bolas.

Vale ressaltar que, na Figura s3, as dimensões das esferas são puntiformes, de forma que cada metade do fio pode ser suposta vertical ($\alpha \cong 0$ na Figura s3), o que justifica a afirmativa de que o deslocamento do ponto médio da corda, durante esse episódio, foi L↑.

Questão 27 – Resposta: $v = \sqrt{\frac{F.L}{m}.(1 - \text{sen}\alpha)}$

Questão 28

Solução:
Durante o movimento do coco, a única força que age nele é a força peso, que se trata de uma força conservativa. Assim, podemos garantir que a energia mecânica do sistema permanece constante. Matematicamente, temos:

$Epot_A + Ecin_A = Epot_B + Ecin_B = Epot_C + Ecin_C$ (veja figura s4)

$m.g.H_A + m.(v_o)^2/2 = m.g.H_B + m.(v_B)^2/2 = 0 + m.(v_C)^2/2$

$g.H_A + (v_o)^2/2 = g.H_B + (v_B)^2/2 = (v_C)^2/2$, com $v_B = V_o.\cos\alpha = 10.(1/2) =$ **5 m/s**

$10.(15) + 10^2/2 = 10.H_B + 5^2/2 = (v_C)^2/2$

$200 = 10.H_B + 12{,}5 = (v_C)^2/2$

$H_B = 18{,}75$ m e **$v_C = 20$ m/s**

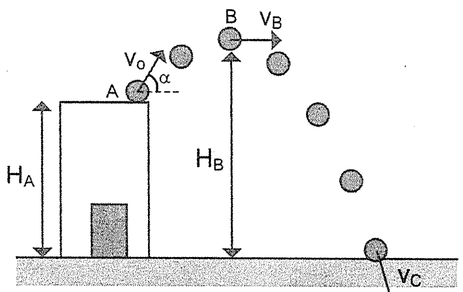
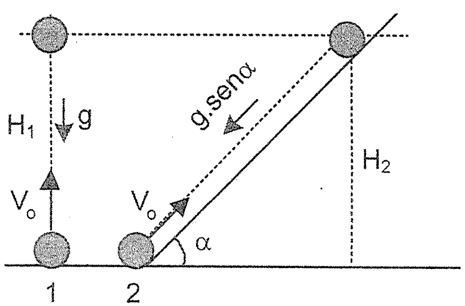


Figura s4

Questão 29 – Resposta: alternativa b

Questão 30 – Resposta: alternativa b

Solução: Claramente temos um sistema conservativo, visto que a única força que realiza trabalho é a força peso. Para calcular a altura máxima atingida por cada bola, vemos que cada uma delas parte com a mesma velocidade inicial V_o e ambas param ao atingir a altura máxima.



Assim, pela conservação de energia, podemos escrever:

$$\text{Emec i} = \text{Emec f} \Rightarrow \frac{M.V_o^2}{2} = M.g.H \Rightarrow H = \frac{V_o^2}{2.g}.$$

O cálculo acima é exatamente o mesmo, tanto para a bola 1 quanto para a bola 2, de forma que ambas acabam atingindo a mesma altura máxima:

$$H_1 = H_2 = \frac{V_o^2}{2.g}.$$

Agora, analisemos o tempo de subida. As bolas partem com a mesma velocidade inicial V_o e vão ser retardadas até parar. Qual delas vai levar mais tempo durante esse processo de frenagem ? Logicamente, aquela que for retardada de forma mais suave, com menor aceleração, vai demorar mais tempo até parar.

A bola 1 é retardada com aceleração $a_1 = \frac{F_R}{M} = \frac{M.g}{M} = g$, ao passo que a bola 2 é retardada com aceleração $a_1 = \frac{F_R}{M} = \frac{M.g.\text{sen}\alpha}{M} = g.\text{sen}\alpha$.

Para a bola 1, o tempo de subida é dado por:

$V_1 = V_o - g.t_1 \Rightarrow 0 = V_o - g.t_1 \Rightarrow$ **$t_1 = V_o/g$**

Para a bola 2, o tempo de subida é dado por:

$V_2 = V_o - (g.\text{sen}\alpha).t_2 \Rightarrow 0 = V_o - (g.\text{sen}\alpha).t_2 \Rightarrow$ **$t_2 = V_o/(g.\text{sen}\alpha)$**

As expressões acima mostram claramente que a bola 2 leva mais tempo prá parar que a bola 1 ($t_2 > t_1$), visto que $g.\text{sen}\alpha < g$. Em suma, **as bolas atingem a mesma altura máxima**, mas **não chegam lá ao mesmo tempo**. A bola 1 chega lá antes. A bola 2 chega lá depois.

Mais uma vez, vemos que a melhor ferramenta para relacionar altura com velocidade, e vice-versa, são os métodos de energia. A análise do parâmetro *tempo*, entretanto, requer uma análise convencional da cinemática aliada às leis de Newton mesmo.

Questão 31 – Resposta: alternativa b

Solução: Uma pedra é lançada com velocidade inicial V_o (o ângulo α não interessa no cálculo da energia cinética visto que energia não tem direção) do alto de um prédio de altura H. Com que velocidade ela chegará ao solo ?

$$\text{Epot i} + \text{Ecin i} = \text{Epot}_F + \text{Ecin}_F$$

$$m.g.H + m.(v_o)^2/2 = 0 + m.(v)^2/2$$

$$2.g.H + (v_o)^2 = 0 + (v)^2 \Rightarrow v = \sqrt{2.g.H + v_o^2}$$

O cálculo feito acima é o mesmo para as pedras A, B ou C, sem distinção, de forma que todas chegam ao solo com a mesma velocidade final V determinada

pela expressão acima, como pode ser facilmente percebido pela conservação da energia mecânica, de forma elegante, simples e objetiva.
E quanto ao tempo de vôo ? O tempo que cada corpo leva para atingir o solo é determinado exclusivamente pela componente vertical ↑↓ do movimento de cada um:

- A pedra A inicialmente tem V_Y inicial para cima ↑.
- A pedra B inicialmente não tem V_y (apenas V_X) .
- A pedra C inicialmente tem V_y inicial para baixo ↓.

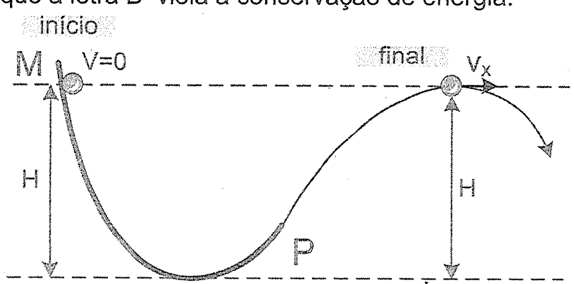
Em outras palavras, analisando apenas o movimento vertical delas, a pedra A foi inicialmente impulsionada para cima ↑, a pedra B foi abandonada a partir do repouso e a pedra C foi impulsionada inicialmente para baixo ↓, todas simultaneamente, a partir de uma mesma altura.
Adivinha qual delas chegará ao solo primeiro ? Logicamente, a que foi lançada diretamente para baixo (pedra C)!
Qual delas demorará mais tempo para chegar ao solo ? Logicamente, a pedra que foi impulsionada para cima (pedra A), visto que ela primeiro irá subir , para depois descer. Assim, os tempos de vôo são tais que $T_A > T_B > T_C$.

Questão 32 – Resposta: alternativa c

Note que, diferentemente das demais bolas, a bola C não pára ao atingir o ponto de altura máxima, apresentando ainda velocidade horizontal v_X (e, portanto, energia cinética) no alto de sua trajetória parabólica.

Questão 33

Solução: A resposta desse problema é o item D. Entretanto, acredito que você esteja inconformado querendo saber por que não pode ser a letra B, certo ? ☺ Vamos ver porque a letra B viola a conservação de energia.



Veja a figura acima. No início, a bola tem Epot = m.g.H e Ecin = 0, visto que ela parte do repouso. Se a situação final descrita na figura fosse correta, ao final, a bola teria a mesma Epot = m.g.H, além de uma Ecin = $m.(v_X)^2 / 2$, de tal forma que:

$$\textbf{Emec final} = m.g.H + m.(v_x)^2/2 \quad > \quad \textbf{Emec inicial} = m.g.H + 0$$

Ou seja, no item B, a bola teria mais energia mecânica ao final do que no início. Entretanto, não há nada que possa justificar esse aumento de energia mecânica, visto que a única força que realiza trabalho sobre a bola é a força peso que é uma força conservativa.
No vértice do movimento parabólico, a bola inevitavelmente terá que possuir velocidade horizontal v_X. Para que essa energia cinética final seja compatível com a conservação de energia, na situação final a bolinha deverá ter uma menor energia potencial gravitacional que na situação inicial, ou seja, ela deverá estar a uma altura menor que na situação inicial. Por esse motivo, a resposta correta é a letra D mesmo. ☺

Questão 34

Solução: As caixas encontram-se presas à correia (que pode se mover livremente sem atrito) e adquirem velocidade à custa exclusivamente do trabalho realizado pela força gravitacional, de forma que o sistema é conservativo.

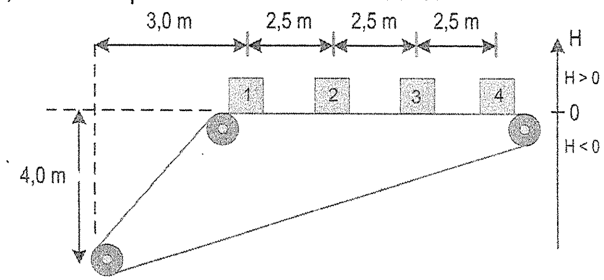


Figura s5 - situação final

Adotamos o nível de referência para Epot = 0 no mesmo nível do trecho horizontal da esteira. Níveis abaixo deste terão energia potencial gravitacional negativa e vice-versa.

Note que, em qualquer situação, a energia potencial gravitacional é sempre uma função crescente com a altura h. A energia potencial de um corpo sempre aumenta quando ele se move em sentido oposto ao da gravidade (movimento forçado), e diminui quando o corpo se desloca a favor da gravidade. No problema em questão, a energia potencial das caixas B diminuirá durante o seu movimento espontâneo a favor da gravidade.

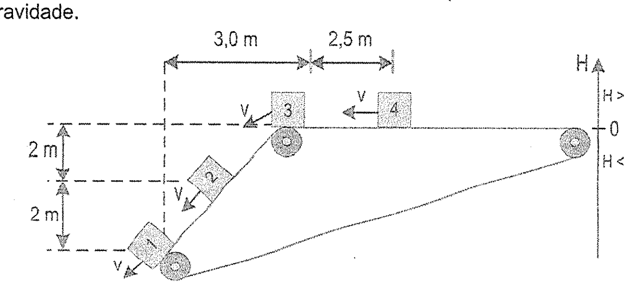


Figura s6 - situação final

Assim, a conservação da energia mecânica do sistema formado pelas quatro caixas permite escrever:

$$(\Sigma Epot + \Sigma Ecin)_{antes} = (\Sigma Epot + \Sigma Ecin)_{depois}$$

$$(0 + 0) = -m.g.H_1 - m.g.H_2 + 4.(m.v^2/2)$$

$$m.g.H_1 + m.g.H_2 = 4.(m.v^2/2)$$

$$g.H_1 + g.H_2 = 2.v^2$$

$$10.(4) + 10.(2) = 2.v^2 \Rightarrow v = \sqrt{30}\ m/s$$

Questão 35

Solução: Um martelo de massa m caiu de uma altura H, a partir do repouso $V_o = 0$. A energia potencial do martelo, em função da altura H, é dada por $Epot = m.g.H^1$, que se trata de uma função do 1º grau na variável **H** onde o termo **"m.g"** é apenas uma constante. Assim, o gráfico $Epot \times H$ é uma reta (veja Figura s7).

Como apenas a força peso realiza trabalho, durante a queda do martelo, e sendo ela uma força conservativa, a energia mecânica (Emec =Epot + Ecin) do martelo permanece constante durante toda sua queda. Assim, podemos escrever:

$$Epot + Ecin = \mathbf{Emec = constante = k}$$

$$m.g.H^1 + Ecin = \mathbf{k}$$

$$Ecin = \mathbf{k} - \mathbf{m.g}.H^1, \text{ onde k e m.g são constantes.}$$

Vemos que Ecin(H) trata-se de uma função do 1º grau na variável H, tal como $Ecin = 10 - 2.H^1$, claramente uma função linear decrescente cujo gráfico pode ser visto na Figura s8.

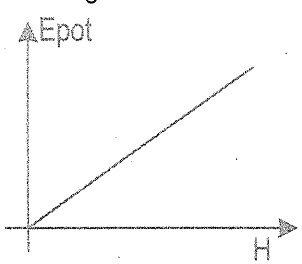


Figura s7 - gráfico da energia potencial do martelo em função da sua altura H.

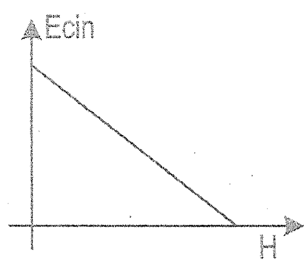


Figura s8 - gráfico da energia cinética do martelo em função da sua altura H.

Ao visualizar a expressão da energia cinética $Ecin = m.v^2/2$, vemos que ela varia proporcionalmente ao quadrado da velocidade v, o que pode induzir o estudante a achar que o gráfico da energia cinética deveria ser uma parábola ☺. Tal gráfico seria uma parábola apenas se estivéssemos analisando a energia cinética em função da velocidade v, e não, a energia cinética em função da altura H.

Questão 36

Solução: Pela conservação da energia mecânica, é fácil ver que, independentemente de ela ter seguido pelo trajeto ABC ou ADC (veja Figura s8) uma bolinha, abandonada em repouso no ponto A, atingirá o ponto C como a mesma velocidade final V_C dada por :

$$Emec_A = Emec_C \Rightarrow m.g.H + 0 = m.(v_C)^2/2 + 0 \Rightarrow v_C = \sqrt{2.g.H}$$

Mas qual dos trajetos será mais demorado ?

Por conservação da energia mecânica, podemos concluir que:

$$v_B = \sqrt{2.g.H_1} \quad e \quad v_D = \sqrt{2.g.H_2}$$

e, sendo $H_1 > H_2$, temos $v_B > v_D$.

Adicionalmente, sendo cada trecho AB, BC, AD e DC retilíneo e de mesmo comprimento L, admitiremos que o movimento da bolinha em cada trecho seja uniformemente variado (MUV). As velocidades escalares médias da bolinha, em cada trecho, são dadas por:

$$v_{AD} = \frac{v_A + v_D}{2} = \frac{0 + v_D}{2} = \frac{v_D}{2} \quad \textbf{(eq11)}; \qquad v_{AB} = \frac{v_A + v_B}{2} = \frac{0 + v_B}{2} = \frac{v_B}{2} \quad \textbf{(eq12)}$$

$$v_{DC} = \frac{v_D + v_C}{2} \quad \textbf{(eq13)}; \qquad v_{BC} = \frac{v_B + v_C}{2} \quad \textbf{(eq14)}$$

Como $v_B > v_D$, de eq11 e eq12 resulta $v_{AB} > v_{AD} \Rightarrow \frac{L}{t_{AB}} > \frac{L}{t_{AD}} \Rightarrow t_{AB} < t_{AD}$

Como $v_B > v_D$, de eq13 e eq14 resulta $v_{BC} > v_{DC} \Rightarrow \frac{L}{t_{BC}} > \frac{L}{t_{DC}} \Rightarrow t_{BC} < t_{DC}$

Sendo $t_{AB} < t_{AD}$ e $t_{BC} < t_{DC}$, somando membro a membro, vem:

$$t_{AB} + t_{BC} < t_{AD} + t_{DC} \Rightarrow t_{ABC} < t_{ADC}.$$

Do exposto, concluímos que, de fato, o tempo de percurso pelo caminho ABC é menor do que pelo caminho ADC, ou seja, $\Delta t_1 < \Delta t_2$.

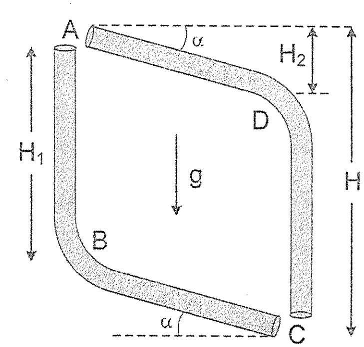


Figura s9 – trajetos seguidos pela bolinha

Os gráficos nas figuras s10 e s11 descrevem, respectivamente, a velocidade da bolinha (em função do tempo) ao longo dos percursos ABC e ADC. Como todos os trechos AB, BC, AD e DC (na Figura s9) têm o mesmo comprimento L, as áreas I, II, III e IV sob esses gráficos V x t (figuras s10 e s11) são todas congruentes e correspondem a essa distância L percorrida pela bolinha em cada um desses trechos.

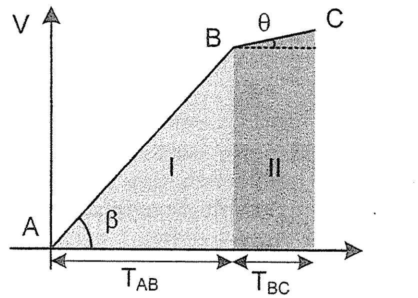


Figura s10 – velocidade da bolinha no trajeto ABC

A inclinação β em cada gráfico corresponde à aceleração da gravidade g com que a bolinha se move (em queda livre) nos trechos AB e DC, ao passo que a inclinação θ corresponde à aceleração g.senα da bolinha nos trechos inclinados BC e AD. Observando o gráfico, é possível notar claramente que $T_{AD} > T_{AB}$ e que $T_{DC} > T_{BC}$, o que nos permite concluir (visualmente) que a travessia da bolinha pelo percurso ADC é mais demorada do que pelo percurso ABC.

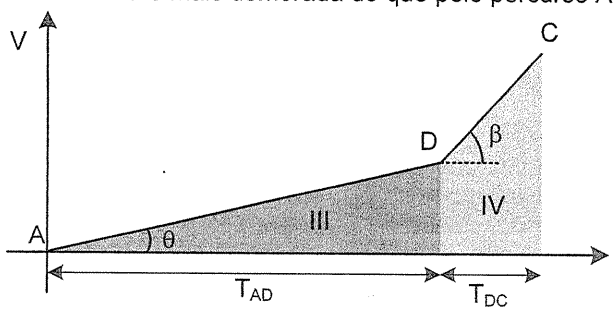


Figura s11 – velocidade da bolinha no trajeto ADC

Questão 37

Solução: Pela conservação da Energia Mecânica, é fácil entender que ambas as bolas atingem o final da rampa com iguais velocidades escalares. Entretanto, qual delas atinge o final da rampa primeiro ?
Observe atentamente o gráfico V x t da Figura S13, que descreve, simultaneamente, a velocidade de cada bolinha em cada instante. A bola A atinge o final da rampa no instante T_A, ao passo que a bola B atinge o final da rampa no instante $T_B > T_A$.

Ainda assim, como ambos os trilhos têm o mesmo comprimento (as bolas percorrem distâncias iguais), as áreas sob os gráficos V x t de cada bolinha, no intervalo de tempo que dura o movimento de cada uma, são iguais, como pode ser verificado visualmente observando a Figura S13. Pode contar os quadradinhos manualmente para verificar a igualdade das áreas ☺.

Adicionalmente, a análise cuidadosa das Figura s12 e s13 também revela que, em qualquer instante do movimento, só duas possibilidades ocorrem :

Caso 1: a velocidade de B é igual à velocidade de A, situação em que a distância entre eles permanece constante, o que ocorre no início e no final do movimento;
Caso 2: a velocidade de B supera a velocidade de A ($V_B > V_A$), ocasião em que B abre vantagem, se distanciando de A durante o trecho da depressão central (veja Figura s12). Note que, até mesmo quando a bolinha B está freiando (durante o trecho de subida da depressão), sua velocidade ainda supera a velocidade da A. Observe esses detalhes no gráfico.

Em outras palavras, não há nenhum instante em que ocorra $V_A > V_B$, de forma que a distância entre A e B nunca diminui durante esse episódio: ou B se afasta de A ou a distância entre eles permanece constante.

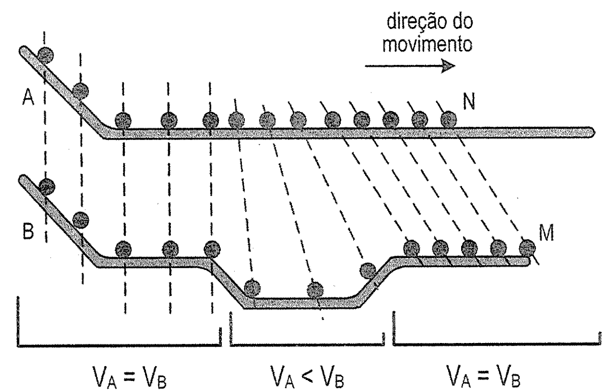


Figura s12 – movimento das bolinhas, quadro a quadro.

Dessa forma, é fácil entender que, quando a bola B atinge o final da sua rampa (posição M na figura s12), a bola A ainda se encontra bem atrás (posição N) , levando ainda um tempo adicional até atingir o final da sua rampa.

Portanto, vemos que a bola B chega antes da bola A ao final do trilho, apesar de ambas atingirem o final do respectivo trilho com a mesma velocidade.

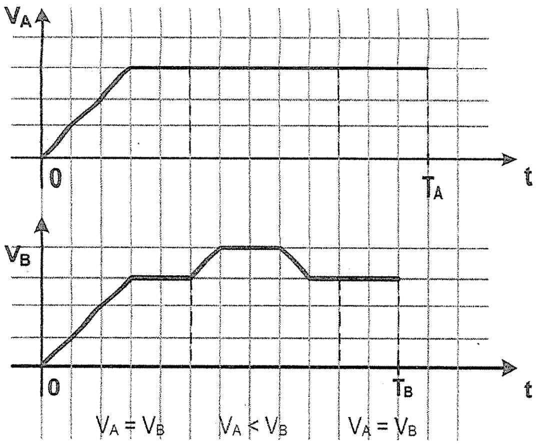
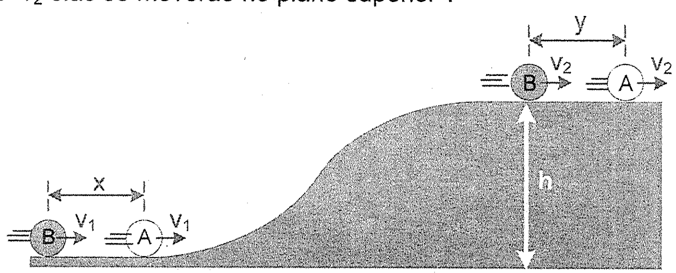


Figura s13 – Gráfico V x t de cada bolinha

Questão 38

Solução: Se cada bola se move no plano inferior com velocidade v_1, com qual velocidade v_2 elas se moverão no plano superior ?



Pela conservação da energia mecânica, aplicada a qualquer uma das bolas, temos:

$$(Epot + Ecin)_{antes} = (Epot + Ecin)_{depois}$$

$$(m_A.g.H + m_A.(v_1)^2 / 2)_{antes} = (m_A.g.H + m_A.(v_2)^2 / 2)_{depois}$$

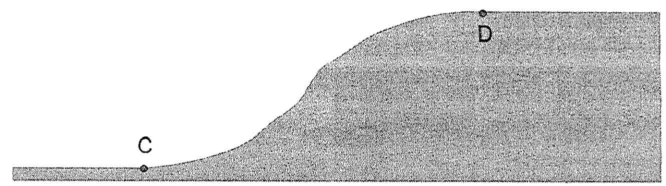
$$(0 + m_A.(v_1)^2 / 2)_{antes} = (m_A.g.H + m_A.(v_2)^2 / 2)_{depois}$$

$$(v_1)^2 = 2.g.H + (v_2)^2$$

$$(10)^2 = 2.10.(1,8) + (v_2)^2 \Rightarrow v_2 = 8 \text{ m/s}$$

As bolas se movem no plano inferior com a mesma velocidade v_1 = 10 m/s e passam pelo ponto C com uma pequena defasagem entre si de:

$$\Delta t = x / v_1 = 5 / 10 = 0{,}5 \text{ s.}$$



O tempo que cada bola leva para percorrer o trecho CD é exatamente o mesmo e, portanto, as bolas também passam pelo ponto D com o mesmo intervalo de 0,5 s entre elas. Isso significa que a bola A passa pelo ponto D com velocidade v_2 = 8 m/s e se move durante 0,5 s com essa velocidade até que B passe pelo ponto D. Nesse intervalo de tempo Δt a bola A percorre a distância $y = v_2 .\Delta t$ = 8 x 0,5 = 4 m. Após a bola B finalmente passar pelo ponto D, a distância y entre elas se mantém constante igual a y, visto que ambas agora compartilham da mesma velocidade v_2 = 8 m/s no andar de cima. Assim, a distância entre as bolas, no andar superior, passa a valer y = 4m.

Questão 39

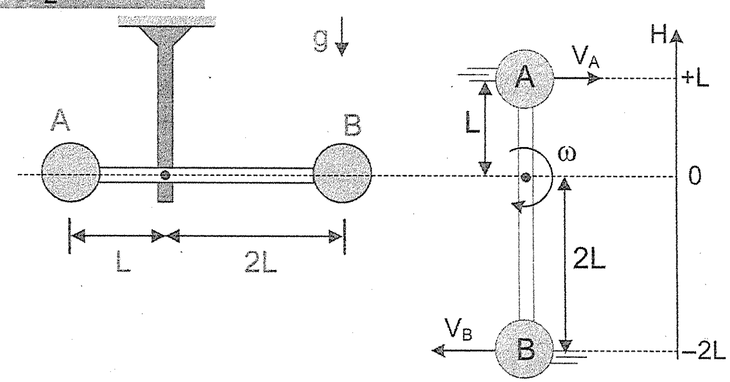
Solução: Sendo o sistema conservativo, podemos escrever:

$$(Emec_A + Emec_B)_{antes} = (Emec_A + Emec_B)_{depois}$$

$$(Epot_A + Ecin_A + Epot_B + Ecin_B)_{antes} = (Epot_A + Ecin_A + Epot_B + Ecin_B)_{depois}$$

$$(0 + 0 + 0 + 0)_{antes} = \left[+m.g.L + \frac{m.v_A^2}{2} + (-m.g.2L) + \frac{m.v_B^2}{2}\right]_{depois}$$

$$\boxed{\frac{m.v_A^2}{2} + \frac{m.v_B^2}{2} = +m.g.L} \quad \textbf{(eq1)}$$



Durante o movimento de rotação, temos:

$$V_A = \omega.R_A = \omega.(L), \quad V_B = \omega.R_B = \omega.(2L) \quad \Rightarrow \boxed{V_B = 2.V_A} \quad \textbf{(eq2)}$$

Das relações eq1 e eq2, vem:

$$\frac{m.v_A^2}{2} + \frac{m.(2.v_A)^2}{2} = +m.g.L \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2.g.L}{5}}.$$ Da relação r16, vem:

$$V_B = 2.v_A = 2\sqrt{\frac{2.g.L}{5}} \Rightarrow V_B = \sqrt{\frac{8.g.L}{5}}$$

Note que, em qualquer situação, a energia potencial gravitacional é sempre uma função crescente da altura H. Uma vez arbitrada um nível de referência para energia potencial gravitacional nula (H = 0), corpos acima da posição de referência terão energia potencial gravitacional positiva, ao passo que corpos abaixo destas posição terão energia potencial gravitacional negativa.

Questão 40

Solução: Durante a descida da caixa, agem sobre ela as forças peso, normal N e a força de atrito. Dentre elas, são não-conservativas a normal N e a força de atrito. Pelo Princípio do Trabalho da Forças Não-conservativas, temos:

$$\Sigma T_{FNC} = Emec_{Final} - Emec_{inicial}$$

$$T_{FAT} + T_{Normal} = (Epot_F + Ecin_F) - (Epot\,i + Ecin\,i)$$

$$(-Fat.d) + 0 = (0 + 0) - \left(m.g.H + \frac{m.v^2}{2}\right)$$

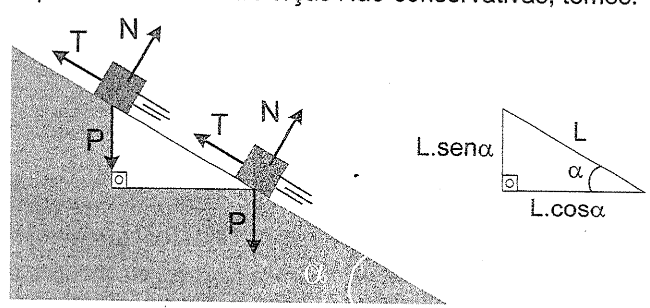
$$(-7{,}5 \times 10) + 0 = (0 + 0) - \left(2.10.H + \frac{2.(5)^2}{2}\right)$$

$$20.H + 25 = 75 \Rightarrow H = 2{,}5\text{ m}$$

Questão 41 – Resposta: alternativa d

Questão 42

Solução: Durante a descida da caixa, agem sobre ela as forças peso, normal N e a força de tração T. Dentre elas, são não-conservativas a normal N e a tração T. Pelo Princípio do Trabalho da Forças Não-conservativas, temos:



$$\Sigma T_{FNC} = Emec_{Final} - Emec_{inicial}$$

$$T_{Tração} + T_{Normal} = (Epot_F + Ecin_F) - (Epot\,i + Ecin\,i)$$

$$T_{Tração} + 0 = \left(m.g.H_F + \frac{m.v^2}{2}\right) - (m.g.H_i + 0)$$

$$T_{Tração} = m.g.H_F - m.g.H_i + \frac{m.v^2}{2} = m.g.(H_F - H_i) + \frac{m.v^2}{2}$$

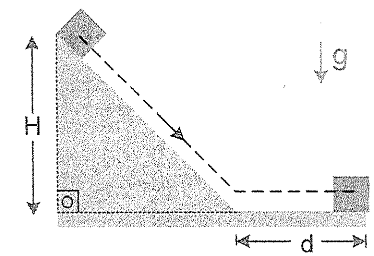
$$T_{Tração} = m.g.L.sen\alpha + \frac{m.v^2}{2}$$

Questão 43

Solução: Durante a descida da caixa, agem sobre ela as forças peso, normal N e a força de atrito. Dentre elas, são não-conservativas a normal N e a força de atrito. Pelo Princípio do Trabalho da Forças Não-conservativas, temos:

$$\Sigma T_{FNC} = Emec_{Final} - Emec_{inicial}$$

$$T_{FAT} + T_{Normal} = (Epot_F + Ecin_F) - (Epot_i + Ecin_i)$$



$$T_{FAT} + T_{Normal} = (Epot_F + Ecin_F) - (Epot\,i + Ecin\,i)$$

$$(-Fat.d) + 0 = (0 + 0) - (m.g.H + 0)$$

$$(-\mu.m.g.d) + 0 = (0 + 0) - (m.g.H + 0) \Rightarrow d = H/\mu$$

Questão 44 – Resposta: alternativa c

Questão 45

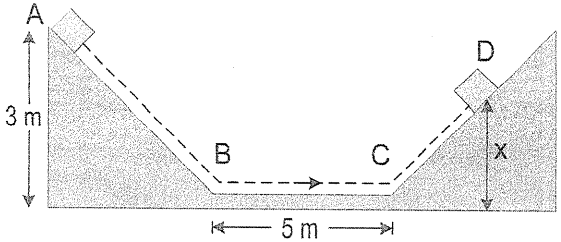
Solução: Durante o movimento da caixa, as forças peso P e normal N agem sobre ela durante todo o percurso. A força de atrito, entretanto só atua durante o trecho horizontal BC. Pelo Princípio do Trabalho da Forças Não-conservativas, temos:

$$\Sigma T_{FNC} = Emec_{Final} - Emec_{inicial},$$

onde A é a posição inicial da caixa e D, a sua posição final.

$$T_{FAT} + T_{Normal} = (Epot_F + Ecin_F) - (Epot_i + Ecin_i)$$

O trabalho realizado pela força de atrito T_{FAT} no percurso todo é o trabalho realizado por ela apenas no trecho horizontal BC, visto que as rampas são lisas:
$T_{FAT} = -Fat.d = -\mu.(N).d = -\mu.(m.g).d$, onde $d = BC = 5m$



Assim, temos:

$T_{FAT} + T_{Normal} = (Epot_F + Ecin_F) - (Epot_i + Ecin_i)$

$-\mu.(m.g).d + 0 = (m.g.x + 0) - (m.g.H + 0)$, com H = 3m

$-\mu.(m.g).d + 0 = m.g.x - m.g.H \Rightarrow -\mu.d + 0 = x - H$

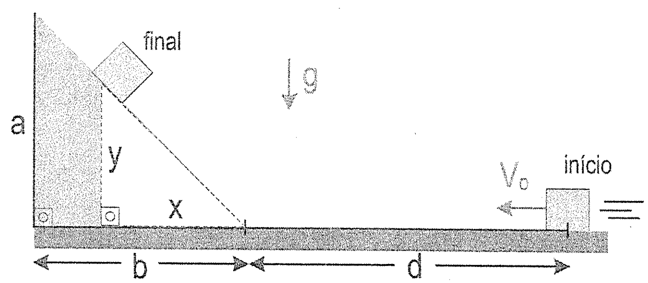
$-0{,}4 \times 5 = x - 3 \Rightarrow \boxed{x = 1\ m}$

Questão 46

Solução: Durante o movimento da caixa, as forças peso P, normal N e força de atrito agem sobre ela durante todo o percurso. Pelo Princípio do Trabalho da Forças Não-conservativas, temos:

$\Sigma T_{FNC} = Emec_{Final} - Emec_{inicial}$,

$T_{FAT} + T_{Normal} = (Epot_F + Ecin_F) - (Epot\ i + Ecin\ i)$



O trabalho realizado pela força de atrito T_{FAT}, desde a posição inicial até a posição final, pode ser facilmente calculado pelo *Princípio da Projeção do prof. Renato Brito* (relação eq5, página 41):

$$T_{FAT} = -Fat.(d + x) = \boxed{-\mu.(m.g).(d + x)}$$

Uma semelhança de triângulos permite escrever:

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{x = y.\frac{b}{a}} \quad \textbf{(eq1)}$$

Assim, temos:

$T_{FAT} + T_{Normal} = (Epot_F + Ecin_F) - (Epot_i + Ecin_i)$

$$-\mu.(m.g).(d + x) + 0 = (m.g.y + 0) - \left(0 + \frac{m.V_o^2}{2}\right)$$

Usando a relação **eq1** e reduzindo os termos semelhantes, temos:

$$-\mu.g.\left(d + y.\frac{b}{a}\right) = g.y - \frac{V_o^2}{2} \Rightarrow \left(d + y.\frac{b}{a}\right) = \frac{V_o^2}{2\mu g} - \frac{y}{\mu}$$

$$y.\left(\frac{b}{a} + \frac{1}{\mu}\right) = \frac{V_o^2}{2\mu g} - d \Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{V_o^2}{2\mu g} - d\right).\frac{\mu.a}{(a + \mu.b)}} \quad ☺$$

Assim, a altura máxima **y** atingida pela caixa ao longo da rampa é dada pela expressão acima.

Questão 47 – Resposta: $\frac{V_0^2}{2.g} - \mu.d$

Questão 48

Solução: Durante a subida da caixa, agem sobre ela as forças peso, normal N e a força de atrito. Dentre elas, são não-conservativas a normal N e a força de atrito. Pelo Princípio do Trabalho da Forças Não-conservativas, durante a subida (Figura s14) temos:

$\Sigma T_{FNC} = Emec_{Final} - Emec_{inicial}$

$T_{FAT\text{-}subida} + T_{Normal} = (Epot_F + Ecin_F) - (Epot_i + Ecin_i)$

$$\boxed{T_{FAT\text{-}subida} + 0 = (m.g.H + 0) - \left(0 + \frac{m.V_0^2}{2}\right)} \quad \textbf{(eq1)}$$

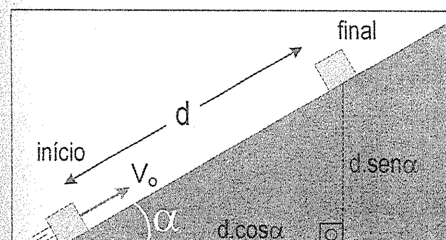


Figura s14 – durante a subida

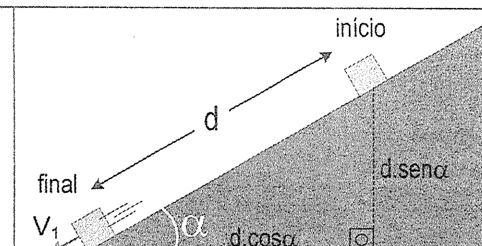


Figura s15 – durante a descida

Durante a descida (Figura s15), temos:

ΣT_{FNC} = Emec $_{Final}$ – Emec $_{inicial}$

$T_{FAT\text{-}descida} + T_{Normal} = (\,Epot_F + Ecin_F) - (Epot_i + Ecin_i\,)$

$$T_{FAT\text{-}descida} + 0 = \left(0 + \frac{m.V_1^2}{2}\right) - (m.g.H + 0) \qquad \textbf{(eq2)}$$

Como os trabalhos realizados pela força de atrito, na subida e na descida, são iguais ($T_{FAT\text{-}subida} = T_{FAT\text{-}descida}$) e H = d.sen$\alpha$, a partir das relações eq1 e eq2, temos:

$$m.g.H - \frac{m.V_0^2}{2} = \frac{m.V_1^2}{2} - m.g.H \quad \Rightarrow \quad 2.m.g.H = \frac{m.(V_0^2 + V_1^2)}{2}$$

$$2.m.g.d.sen\alpha = \frac{m.(V_0^2 + V_1^2)}{2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{(V_0^2 + V_1^2)}{4.g.sen\alpha} = \frac{(4^2 + 3^2)}{4.(10).(0{,}5)} = 1{,}25\ m$$

Questão 49

Solução: Durante a subida da caixa, agem sobre ela as forças peso, normal N e a força de atrito. Dentre elas, são não-conservativas a normal N e a força de atrito. Pelo Princípio do Trabalho da Forças Não-conservativas, durante a subida (Figura s14) temos:

ΣT_{FNC} = Emec $_{Final}$ – Emec $_{inicial}$

$T_{FAT} + T_{Normal} = (\,Epot_F + Ecin_F) - (Epot_i + Ecin_i\,)$

O trabalho realizado pela força de atrito T_{FAT}, desde a posição inicial até a posição final, pode ser facilmente calculado pelo *Princípio da Projeção do prof. Renato Brito* (relação eq25, página 41):

$$T_{FAT} = -\mu.m.g.(d.cos\alpha)$$

Assim, durante a subida, temos:

$T_{FAT} + T_{Normal} = (\,Epot_F + Ecin_F) - (Epot\ i + Ecin\ i\,)$

$$-\mu.m.g.(d.cos\alpha) + 0 = (m.g.H + 0) - \left(0 + \frac{m.V_0^2}{2}\right), \text{ com } H = d.sen\alpha$$

$$\frac{m.V_0^2}{2} = m.g.(d.sen\alpha) + \mu.m.g.(d.cos\alpha)$$

$$\frac{m.V_0^2}{2} = m.g.d.(\,\mu.cos\alpha + sen\alpha) \qquad \textbf{(eq1)}$$

Durante a descida (Figura s15), temos:

ΣT_{FNC} = Emec $_{Final}$ – Emec $_{inicial}$

$T_{FAT} + T_{Normal} = (\,Epot_F + Ecin_F) - (Epot_i + Ecin_i\,)$

$$-\mu.m.g.(d.cos\alpha) + 0 = \left(0 + \frac{m.V_1^2}{2}\right) - (m.g.H + 0) \quad \text{com } H = d.sen\alpha$$

$$\frac{m.V_1^2}{2} = m.g.(d.sen\alpha) - \mu.m.g.(d.cos\alpha)$$

$$\frac{m.V_1^2}{2} = m.g.d.(sen\alpha - \mu cos\alpha) \qquad \textbf{(eq2)}$$

Dividindo as relações eq1 e eq2, membro a membro, e isolando V_1, obtemos:

$$V_1 = V_0.\sqrt{\frac{sen\alpha - \mu.cos\alpha}{sen\alpha + \mu.cos\alpha}}$$

Questão 50

Solução: Durante o movimento de vaivém da caixa, entre as rampas esquerda e direita, agem sobre ela as forças peso, normal N e a força de atrito, sendo que este último só atua no trecho horizontal ABCDE. Pelo Princípio do Trabalho da Forças Não-Conservativas, desde a situação inicial (a caixa partindo do repouso a uma altura h) até a situação final (a caixa em repouso em algum ponto no trecho ABCDE), temos:

ΣT_{FNC} = Emec $_{Final}$ – Emec $_{inicial}$

$T_{FAT} + T_{Normal} = (\,Epot_F + Ecin_F) - (Epot_i + Ecin_i\,)$

$-Fat.d + 0 = (\,0 + 0) - (\,m.g.h + 0)$

$-\mu.mg.d + 0 = -m.g.h \ \Rightarrow \ d = h / \mu = 5 / 0{,}2 = 25\ m.$

O termo d, na expressão acima, representa a distância total percorrida pela caixa exclusivamente na presença da força de atrito, isto é, exclusivamente no trecho horizontal. De acordo com o cálculo acima, vimos que a caixa percorreu, ao todo, 25 m nesse trecho com atrito, o que significa que a caixa percorreu 10 m no 1o trecho A→E, mais 10 m de volta no trecho E→A e, finalmente, mais 5 m no trecho A→C, parando no ponto C.

Note que, nesses 25 m, não contabilizamos a distância percorrida pela caixa ao longo das rampas visto que elas são lisas. Em suma, a caixa pára no ponto C.

Questão 51 – Resposta: N = H / (μ.d), onde N é par.

Questão 52

Solução: Durante o movimento da esfera do pêndulo, de A para B, agem sobre ela a tração T, o peso P e a força F aplicada pelo operador. A tração T não realiza trabalho ($T_{Tração} = 0$), durante esse deslocamento, por ser perpendicular à trajetória circular em cada ponto (Figura 10, página 9). O trabalho da força peso pode ser calculado pela relação eq32 (visto que se trata de uma força conservativa). Entretanto, a força F tem orientação e intensidade variáveis durante o processo.

Como se calcular o trabalho realizado por uma força da qual não conhecemos sequer a sua intensidade ? Integrar ? rsrsr, não, não, integrar desnecessariamente é brega, sabia ☺ ? O desafio é resolver tudo sem integrar e nossa missão é mais fácil do que você imagina. Esse trabalho pode ser simplesmente calculado de forma indireta, pelo velho e bom Princípio do Trabalho Total. Veja:

$$T_{Total} = \sum_{todos} T = T_{Tração} + T_{Peso} + T_F = Ecin_F - Ecin_i$$

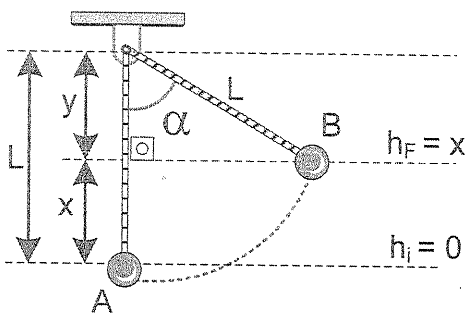
$$0 + (M.g.h_i - M.g.h_F) + T_F = M.(V_F)^2/2 - M.(V_i)^2/2$$

Note que temos $V_F = V_i = 0$ visto que a bola parte do repouso no início e também repousa no final. Adicionalmente, a geometria da figura nos permite escrever:

$h_i = 0$, $h_F = x = L - y = L - L.\cos\alpha \Rightarrow h_F = L.(1-\cos\alpha)$. Substituindo, temos:

$$0 + (M.g.h_i - M.g.h_F) + T_F = M.(V_F)^2/2 - M.(V_i)^2/2$$

$$0 - M.g.L.(1-\cos\alpha) + T_F = 0 - 0 \Rightarrow \boxed{T_F = +M.g.L.(1-\cos\alpha)}$$



Já fizemos cálculos indiretos de trabalho realizado por forças variáveis anteriormente, por exemplo, quando determinamos o trabalho realizado por uma bomba d'água (Exemplo Resolvido 16, página 76). Esse tipo de estratégia é muito interessante e útil.

Questão 53 – Resposta: $+M.g.L.(1-\cos\alpha) + M.V^2/2$

Questão 54

Solução:

a) A velocidade da bola ao passar pelo ponto B pode ser determinada pela conservação da Energia Mecânica no percurso AB:

$$(Epot + Ecin)_A = (Epot + Ecin)_B$$

$$m.g.h_A + m.(v_A)^2/2 = m.g.h_B + m.(v_B)^2/2$$

Note que ($v_A = 0$, $h_B = 0$ Figura 1) e $h_A = x = L - y = L - L.\cos\alpha \Rightarrow h_A = L.(1-\cos\alpha)$

$$m.g.h_A + m.(v_A)^2/2 = m.g.h_B + m.(v_B)^2/2$$

$$m.g.L.(1-\cos\alpha) + 0 = 0 + m.(v_B)^2/2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2.g.L.(1-\cos\alpha)} = \sqrt{2.g.L.(1-0,5)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{g.L}}$$

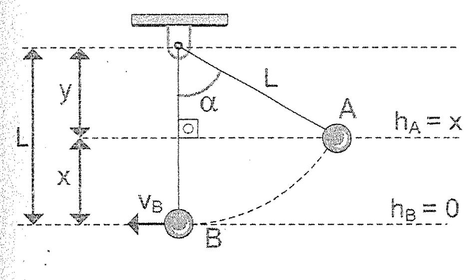


Figura s15

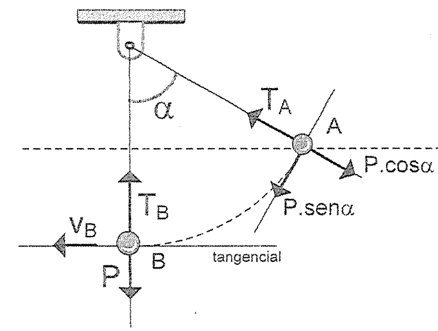


Figura s16

b) Ao passar pelo ponto mais baixo, a segunda lei de Newton na direção centrípeta nos permite escrever:

$$F_{R\,ctp} = m.a_{ctp} \Rightarrow (F_{in} - F_{out}) = T_B\uparrow - P\downarrow = m.(v_B)^2/R$$

Usando $R = L$ e $v_B = \sqrt{g.L}$, temos:

$$(F_{in} - F_{out}) = T_B - m.g = m.(g.L)/L \Rightarrow \boxed{T_B = 2.m.g}$$

c) observando o diagrama de forças no ponto B, vemos que ambas as forças agem na direção radial (centrípeta) naquele instante, de forma que a aceleração resultante momentaneamente tem componente tangencial nula naquele instante, restando a ela apenas a componente centrípeta $\uparrow a_{ctp}$ de módulo dado por:

$$a_{ctp} = (v_B)^2/R, \text{ com } R = L \text{ e } v_B = \sqrt{g.L} \Rightarrow a_{ctp} = g.L/L \Rightarrow a_{ctp} = g\uparrow$$

Assim, no instante em que a bola passa pelo ponto B, sua aceleração resultante é exclusivamente centrípeta (aponta radialmente para dentro da curva, isto é, para cima) e tem módulo g ($a_R = a_{ctp} = g\uparrow$).

d) Ao partir do ponto A, a bola possui velocidade nula $v_A = 0$ e, consequentemente, aceleração centrípeta nula (actp = 0). Assim, na direção centrípeta, a 2ª lei de Newton, na posição A (figura 2), nos permite escrever:

$$F_{R\,ctp} = m.a_{ctp} \Rightarrow (F_{in} - F_{out}) = T_A - P.\cos\alpha = m.(v_A)^2/R = 0 \Rightarrow \boxed{T_A = P.\cos\alpha}$$

Portanto, como a componente P.cosα equilibra a tração, no ponto A, resta apenas a componente P.senα, que exercerá o papel de força resultante agindo na bolinha, naquela posição. Essa força resultante $F_R = m.g.sen\alpha$ produzirá uma aceleração resultante a_R na mesma direção e sentido ↙ da componente $P.sen\alpha$ (veja figura 2), portanto, tangente à trajetória, no ponto A, cujo módulo é dado pela 2ª lei de Newton:

$$F_R = m.a_R \quad \Rightarrow \quad m.g.sen\alpha = m.\,a_R \quad \Rightarrow \quad a_R = g.sen\alpha$$

Questão 55

Solução:

a) A velocidade da bola ao passar pelo ponto B pode ser determinada pela conservação da Energia Mecânica no percurso AB:

$(Epot + Ecin)_A = (Epot + Ecin)_B$

$m.g.h_A + m.(v_A)^2/2 = m.g.h_B + m.(v_B)^2/2$

Note que $v_A = 0$, $h_A = L$ e $h_B = 0$ (veja Figura 1 adiante)

$m.g.h_A + m.(v_A)^2/2 = m.g.h_B + m.(v_B)^2/2$

$m.g.L + 0 = 0 + m.(v_B)^2/2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2g.L}$,

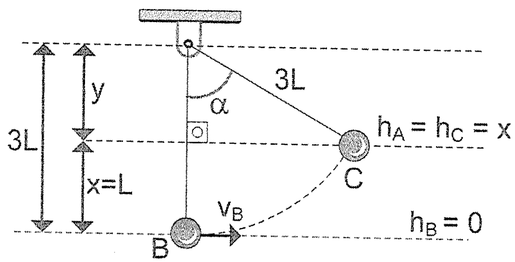


Figura 1

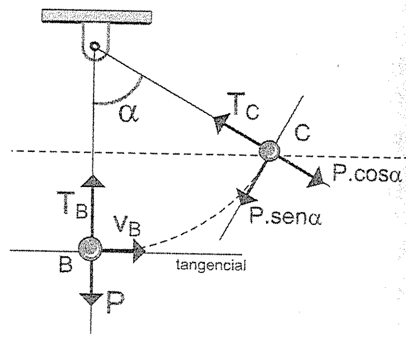


Figura 2

Ao passar pelo ponto mais baixo da trajetória (Figura 1), a segunda lei de Newton na direção centrípeta nos permite escrever:

$F_{R\,ctp} = m\,.\,a_{ctp} \Rightarrow (F_{in} - F_{out}) = T_B\uparrow - P\downarrow = m.(v_B)^2/R$

Usando $R = 3L$ e $v_B = \sqrt{2g.L}$, temos:

$(F_{in} - F_{out}) = T_B - m.g = m.(2g.L)/3L \quad \Rightarrow \quad T_B = 5.m.g/3$

b) Ao atingir o extremo C da oscilação (Figura 2), a esfera do pêndulo momentaneamente pára ($v_C = 0$). Nessa posição, a 2ª lei de Newton na direção radial (centrípeta) nos permite escrever:

$F_{R\,ctp} = m\,.\,a_{ctp} \Rightarrow (F_{in} - F_{out}) = T_C - P.cos\alpha = m.(v_C)^2/R$, com $v_C = 0$

$T_C - P.cos\alpha = 0$ com $cos\alpha = y/3L = 2L/3L = 2/3$ (Figura 1)

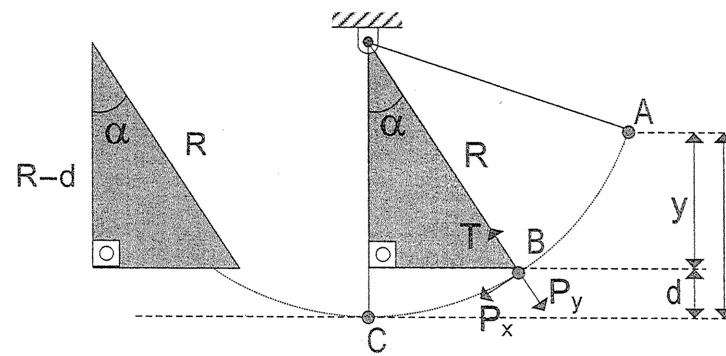
$T_C = mg.cos\alpha \Rightarrow T_C = 2mg/3$

Questão 56

Solução: Conforme o enunciado, quando a bola está parada em repouso permanente (equilíbrio) na posição C ($v_C = 0$), o fio encontra-se no seu limite de ruptura, o que nos permite concluir que a tração máxima que esse fio suporta vale $T_{max} = T_C = P = m.g$.

Se o pêndulo for levado até a posição A, de onde é abandonado do repouso ($v_A = 0$), descerá aceleradamente e passará por um ponto B (ponto de ruptura) onde a tração atingirá o valor crítico $T_B = m.g$ (tração máxima determinada inicialmente com o pêndulo em repouso em C).

Admitindo $h_A = y$ e $h_B = 0$ (veja Figura), a conservação de energia mecânica entre as posições A e B nos permite determinar a velocidade v_B do pêndulo ao passar pelo ponto de ruptura B:



$(Epot + Ecin)_A = (Epot + Ecin)_B$

$m.g.h_A + m.(v_A)^2/2 = m.g.h_B + m.(v_B)^2/2$, com $v_A = 0$, $h_A = y$ e $h_B = 0$.

$m.g.y + 0 = 0 + m.(v_B)^2/2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2g.y}$

A segunda lei de Newton na direção radial (centrípeta), ao passar pelo ponto B, nos permite escrever :

$F_{R\,ctp} = m\,.\,a_{ctp} \Rightarrow (F_{in} - F_{out}) = T_B - Py = m.(v_B)^2/R$

$T_B - Py = m.(v_B)^2/R$ com $T_B = m.g$, $Py = P.cos\alpha$, $v_B = \sqrt{2g.y}$

$m.g - m.g\,cos\alpha = m.(2.g.y)/R \quad \Rightarrow \quad 1 - cos\alpha = 2.y/R$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\cos\alpha = \frac{R-2y}{R}} \quad \textbf{(eq1)}$$

Entretanto, a geometria do triangulo retângulo em destaque na figura nos permite escrever:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{R-d}{R}} \quad \textbf{(eq2)} \; , \; \text{com} \;\; d = h - y \quad \text{(veja Figura)}$$

Igualando eq1 e eq2, vem:

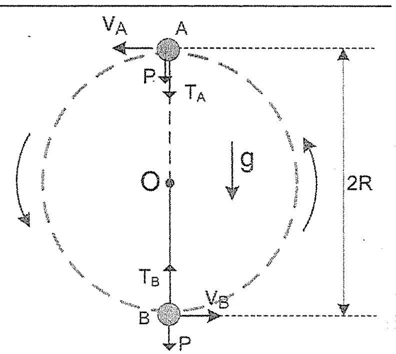
$$\frac{R-d}{R} = \frac{R-2y}{R} \Rightarrow d = 2y, \;\text{com}\; d = h - y, \text{assim, vem: } 2y = h - y \Rightarrow \boxed{y = h/3}$$

Assim, determinamos o desnível y entre os pontos A e B.

Questão 57 – Resposta: $\alpha = 60^\circ$. **Dica:** A tração máxima na corda (ao passar pelo ponto mais baixo da trajetória) deve ser capaz de fazer o bloco perder o contato com o solo, isto é, $T_{max} = P = m.g$, $N = 0$.

Questão 58

Solução: Admitindo $h_A = 2R$ e $h_B = 0$ (veja Figura), a conservação de energia mecânica entre as posições A e B nos permite relacionar as velocidades v_A e v_B :



$$(\text{Epot} + \text{Ecin})_A = (\text{Epot} + \text{Ecin})_B$$

$$m.g.h_A + m.(v_A)^2/2 = m.g.h_B + m.(v_B)^2/2$$

Sendo $h_A = 2R$ e $h_B = 0$, temos:

$$m.g.h_A + m.(v_A)^2/2 = m.g.h_B + m.(v_B)^2/2$$

$$m.g.(2R) + m.(v_A)^2/2 = 0 + m.(v_B)^2/2$$

$$\boxed{(v_A)^2 = (v_B)^2 - 4R.g} \quad \textbf{(eq1)}$$

a) Para que a esfera do pêndulo consiga atingir o ponto A (mais alto da trajetória circular) estando conectada a um fio flexível, a esfera deve possuir velocidade suficiente para manter o fio esticado até o pêndulo passar por aquela posição. Do contrario, caso o fio fique frouxo (T = 0) e sofre encolhimento durante a subida do pêndulo, a bola acabará passando por baixo do ponto A e não completará o looping circular conforme pedido no problema.

Em suma, o fio deve se manter permanentemente tracionado até chegar lá.

A tração T_A, no ponto mais alto da trajetória aponta para baixo e é pode ser determinada pela 2ª lei de Newton, na posição A (veja Figura):

$$F_{R\,ctp} = m \,.\, a_{ctp} \Rightarrow (F_{in} - F_{out}) = (T_A + m.g) - (0) = m.(v_A)^2/R$$

$T_A = m.(v_A)^2/R - m.g$, usando eq1, vem:

$$T_A = \frac{m.(v_B^2 - 4R.g)}{R} - m.g \Rightarrow \boxed{T_A = \frac{m.(v_B^2 - 5R.g)}{R}} \quad \textbf{(eq2)}$$

Como essa tração T_A não pode ser negativa (apontar para baixo), devemos ter $T_A \geq 0$. Assim, usando eq2, vem:

$$T_A = \frac{m.(v_B^2 - 5R.g)}{R} \geq 0 \Rightarrow v_B \geq \sqrt{5R.g} \Rightarrow \boxed{v_{B\,min} = \sqrt{5R.g}}$$

Alguns estudantes sentem desconforto ao ver o sinal de igual na expressão para v_B acima, pois $v_B = \sqrt{5R.g}$ levaria a tração T_A no fio a momentaneamente se anular, no lapso instante em que o pêndulo passasse pelo ponto A. Mas qual problema haveria se a tração fosse momentaneamente nula ($T_A = 0$) quando a bola passasse pelo ponto mais alto da trajetória ? Por acaso, naquele exato instante, a bola também teria velocidade nula ($v_A = 0$) e, logo após atingir o ponto A, passaria a cair verticalmente em queda livre, como nos desenhos animados aristotélicos que ignoram a Lei da Inércia? ☺

Ora, certamente não ! Mesmo nessa situação crítica, a bola não pára ao atingir o ponto A, mas sim, passa pelo ponto A com velocidade $v_A = \sqrt{R.g} \leftarrow$. Logo em seguida, a tração T no fio deixa de ser nula e assume valores crescentes durante a descida acelerada do pêndulo em sua trajetória circular.

b) Para que a esfera do pêndulo consiga atingir o ponto A (mais alto da trajetória circular) estando conectada a uma haste rígida, não há necessidade de se impor nenhuma condição a fim de manter a haste esticada. Afinal, de contas, trata-se de uma haste rígida. Seu formato mantém-se inalterado qualquer que seja a velocidade da bolinha.

Assim, para que o pêndulo consiga efetuar o looping completo, passando pelo ponto A, basta que sua esfera atinja o ponto mais alto da trajetória circular com velocidade não-nula. Assim, a condição matemática a ser imposta é meramente $v_A > 0$. Usando eq1, temos:

$$(v_A)^2 = (v_B)^2 - 4R.g > 0 \Rightarrow v_B > 2\sqrt{R.g} \Rightarrow \boxed{v_{B\,min} = 2\sqrt{R.g}}$$

Vemos que, a velocidade mínima com que se deve impulsionar o pêndulo no ponto mais baixo da trajetória, a fim de que ele complete o looping circular, é um pouco maior no caso do fio flexível, do que no caso da haste rígida. Afinal, no caso do fio, a sua flexibilidade impõe a necessidade extra de manter o fio esticado durante todo o percurso, o que significa velocidade extra.

Questão 59 – Resposta: alternativa d

Questão 60 – Resposta: $a_{min} = 3L/5$

Questão 61

Solução:

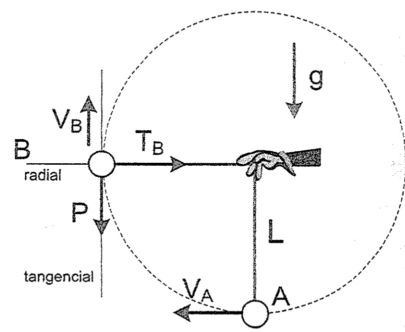
a) No referencial inercial da Terra, no instante inicial, a mão do operador possui velocidade $\rightarrow V$ e a bolinha possui velocidade nula. Entretanto, no referencial inercial da própria mão, no referido instante, esta se encontra parada, ao passo que a bolinha possui velocidade $\leftarrow V$.

Como ambos referenciais são inerciais, a escolha de um ou outro é absolutamente arbitrária para o equacionamento do problema. Entretanto, o estudo do movimento da bolinha no referencial da mão será mais simples, visto que, nesse referencial, a bolinha parte com velocidade inicial $\leftarrow V$ e descreverá claramente uma simples trajetória circular de raio L.

No referencial da Terra, a trajetória seria curvilínea, porém, de raio de curvatura variável, será uma trajetória mais complexa que foge aos nossos objetivos. Assim, resolveremos o problema no referencial inercial da mão do operador, recaindo exatamente no mesmo problema proposto na questão 58 página 98, item a: qual a velocidade horizontal mínima se deve fornecer ao pêndulo em sua posição vertical inferior, a fim de que o mesmo consiga descrever uma trajetória circular completa em torno do seu ponto de suspensão ? A resposta, conforme discutido com detalhes na solução da questão 58 página 352 item a, vale:

$$V_{min} = \sqrt{5.R.g} = \sqrt{5.L.g}$$

b) No referencial inercial da mão, a bola descreverá um movimento circular não uniforme (retardado na subida, acelerado na descida). Se, ao passar pelo ponto A, a bola possui velocidade $v_A = \sqrt{5.L.g}$, qual velocidade ela possuirá ao passar pelo ponto B ? Pela conservação de energia, temos:



$$(\text{Epot} + \text{Ecin})_A = (\text{Epot} + \text{Ecin})_B$$

$$m.g.H_A + \frac{m.(v_A)^2}{2} = m.g.H_B + \frac{m.(v_B)^2}{2}$$

com $v_A = \sqrt{5Lg}$, $H_A = 0$, $H_B = L$

$$0 + \frac{m.(5Lg)}{2} = m.g.L + \frac{m.(v_B)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{3.g.L}$$

A 2ª lei de Newton, na direção radial, no ponto B, nos permite escrever:

$$F_R\,ctp = \text{Fin} - \text{Fout} = (T_B - 0) = \frac{m.(v_B)^2}{R}, \text{ com } R = L \text{ e } v_B = \sqrt{3.g.L}$$

$$T_B = \frac{m.(3.g.L)}{L} \quad \Rightarrow \quad T_B = 3.mg$$

Questão 62 – Resposta: alternativa a

Solução: Partindo do repouso da posição A ($v_A = 0$), qual a velocidade do pêndulo após percorrer um arco genérico α e passar pelo ponto B da Figura 1 ?

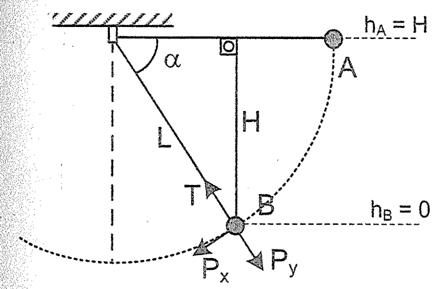


Figura s17

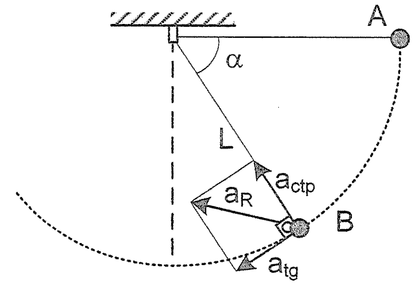


Figura s18

A conservação da energia mecânica entre as posições A e B, na Figura 1, nos permite escrever:

$(\text{Epot} + \text{Ecin})_A = (\text{Epot} + \text{Ecin})_B$

$m.g.h_A + m.(v_A)^2/2 = m.g.h_B + m.(v_B)^2/2$

Sendo $h_A = H = L.\text{sen}\alpha$, $v_A = 0$ e $h_B = 0$, temos:

$m.g.h_A + m.(v_A)^2/2 = m.g.h_B + m.(v_B)^2/2$

$m.g.(L.\text{sen}\alpha) + 0 = 0 + m.(v_B)^2/2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2.g.L.\text{sen}\alpha}$

Assim, a componente centrípeta actp da aceleração resultante da esfera do pêndulo, após percorrer o ângulo genérico α, vale:

$actp = v_B^2 / R$, com $R = L$ e $v_B = \sqrt{2.g.L.\text{sen}\alpha}$

$actp = 2.g.L.\text{sen}\alpha / L \quad \Rightarrow \quad actp = 2.g.\text{sen}\alpha$

A componente tangencial atg da aceleração resultante pode ser determinada pela 2ª lei de Newton na direção tangencial (Figura 1):

$Ftg = m.\,atg \;\Rightarrow\; P_x = m.atg \;\Rightarrow\; m.g.\cos\alpha = m.\,atg \;\Rightarrow\; atg = g.\cos\alpha$

Assim, a aceleração resultante da bolinha do pêndulo, após percorrer um ângulo genérico α a partir do repouso horizontal, é dada por (Figura 2):

$$a_R = \sqrt{a_{ctp}^2 + a_{tg}^2} = \sqrt{(2g.sen\alpha)^2 + (g.cos\alpha)^2} = \sqrt{3.g^2.sen^2\alpha + g^2.(sen^2\alpha + cos^2\alpha)}$$

$$a_R = \sqrt{3.g^2.sen^2\alpha + g^2.(1)} = \sqrt{g^2(3.sen^2\alpha + 1)} \quad \therefore \quad \boxed{a_R = g\sqrt{3.sen^2\alpha + 1}}$$

A expressão acima fornece a aceleração resultante do pêndulo, em função de α. Note que, partindo do repouso na posição horizontal ($v = 0$, para $\alpha = 0^o$), a aceleração resultante máxima ocorre para $\alpha = 90^o$:

$$a_{Rmax} = g\sqrt{3.sen^2\alpha + 1} = g\sqrt{3.sen^2(90^o) + 1} = g\sqrt{3.(1)^2 + 1} = 2.g$$

Questão 63

Solução:

a) Partindo do repouso da posição A ($v_A = 0$), qual a velocidade do pêndulo após descer uma altura genérica H e passar pelo ponto B da Figura 1 ? A conservação da energia mecânica entre as posições A e B (veja Figura), nos permite escrever :

$(Epot + Ecin)_A = (Epot + Ecin)_B$

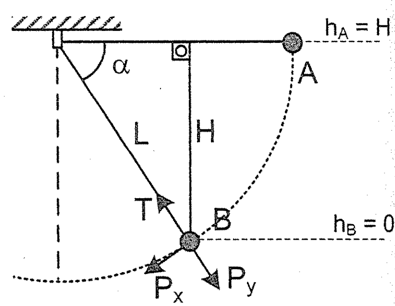
$m.g.h_A + m.(v_A)^2/2 = m.g.h_B + m.(v_B)^2/2$

Sendo $h_A = H$, $v_A = 0$ e $h_B = 0$, temos:

$m.g.h_A + m.(v_A)^2/2 = m.g.h_B + m.(v_B)^2/2$

$m.g.(H) + 0 = 0 + m.(v_B)^2/2 \Rightarrow$

$\boxed{v_B = \sqrt{2.g.H}}$



Assim, a tração no fio, ao passar descer a altura genérica H, é dada pela 2ª lei de Newton na direção radial (centrípeta, veja Figura):

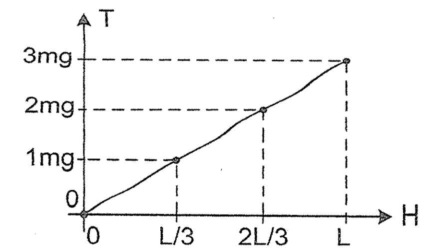
$F_{R\,ctp} = m \,.\, a_{ctp} \Rightarrow (F_{in} - F_{out}) = T - Py = m.(v_B)^2/R$, com $R = L$

$T - Py = m.(v_B)^2/L$ com $T_B = m.g$, $Py = P.sen\alpha$, $v_B = \sqrt{2g.H}$

$T - m.g\,sen\alpha = m.(2.g.H)/L$ com $sen\alpha = H/L$

$T - m.g.(H/L) = m.(2.g.H)/L \Rightarrow \boxed{T = \left(\frac{3mg}{L}\right).H^1}$

b) A expressão acima mostra uma dependência linear entre a tração T no fio e a altura H descida, no caso particular em que o pêndulo parte do repouso da posição horizontal.



É curiosa e interessante essa dependência linear entre a tração no fio do pêndulo e a altura H descida por ele, a partir do repouso horizontal. O conhecimento desse fato facilita enormemente a resolução de problemas mais elaborados, como o problema 64.

Questão 64

Solução: De acordo com o resultado obtido no problema 63, a tração no fio varia linearmente desde $T = 0$ (na posição horizontal) até o valor máximo $T = 3mg$ (na posição mais baixa). Assim, podemos escrever:

$$T_B = 3mg.\left(\frac{L}{4L}\right) = \frac{3mg}{4} \quad , \quad T_C = 3mg.\left(\frac{3L}{4L}\right) = \frac{9mg}{4}$$

Do enunciado, temos:

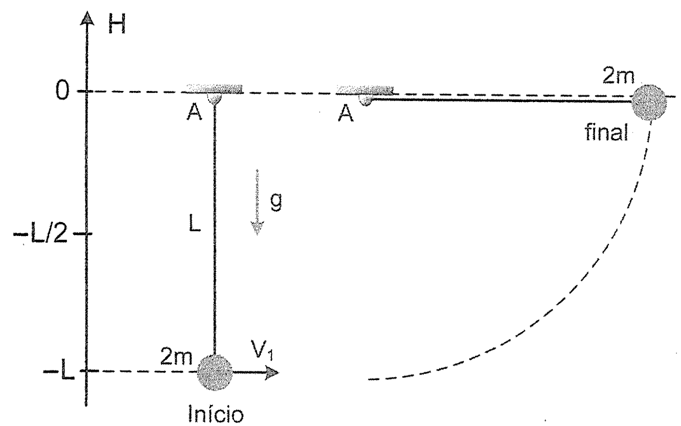
$$T_C - T_B = 30 \Rightarrow \frac{9mg}{4} - \frac{3mg}{4} = 30 \Rightarrow \frac{6mg}{4} = \frac{6.m.10}{4} = 30 \therefore \boxed{m = 2\text{ kg}}$$

Questão 65 – Resposta: $T_B = 45$ N

Questão 66 – Resposta: a) $\sqrt{2g.R.sen\theta}$, b) $3M.g.sen\theta$

Questão 67

Solução: Em movimentos espontâneos, a energia potencial do sistema sempre diminui, e vice-versa. Por esse motivo, a orientação do eixo de referência para a energia potencial gravitacional não é arbitrária. Ele deve sempre apontar para cima $\uparrow$, ratificando que a energia potencial gravitacional de um corpo sempre aumenta durante um movimento ascendente.



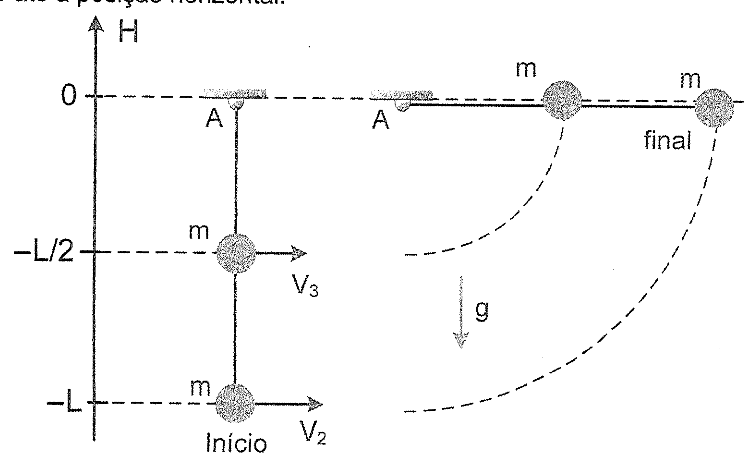
A figura acima mostra o eixo de referencia da altura H a ser usado para o cálculo da energia potencial gravitacional. Pela conservação de energia mecânica no movimento ascendente do pêndulo, podemos escrever:

$(Epot + Ecin)_{inicial} = (Epot + Ecin)_{final}$

$$(2m).g.(-L) + (2m).(v_1)^2/2 = 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2.g.L}$$

Assim, determinamos a velocidade v_1 necessária para que o pêndulo de massa 2m atinja a posição horizontal.

A seguir, determinaremos a velocidade v_2 mínima capaz de levar o sistema abaixo até a posição horizontal.



As duas massas giram com mesma velocidade angular ω em trajetórias circulares de raios L/2 e L, com velocidades v_3 e v_2, tais que:

$$\omega = \frac{v_2}{R_2} = \frac{v_3}{R_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_2}{L} = \frac{v_3}{L/2} \quad \Rightarrow \quad v_3 = \frac{v_2}{2}$$

Pela conservação de energia mecânica do sistema no movimento ascendente do pêndulo, podemos escrever:

$(Epot + Ecin)_{inicial} = (Epot + Ecin)_{final}$

$$(m).g.(-L) + (m).g.(-L/2) + \frac{m.(v_2)^2}{2} + \frac{m.(v_3)^2}{2} = 0 + 0 + 0 + 0, \quad \text{com} \quad v_3 = \frac{v_2}{2}$$

$$\frac{m.(v_2)^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\frac{v_2}{2}\right)^2 = \frac{3m.g.L}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{5m.(v_2)^2}{8} = \frac{3m.g.L}{2}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{12.g.L}{5}}$$

Questão 68 – Resposta: alternativa e

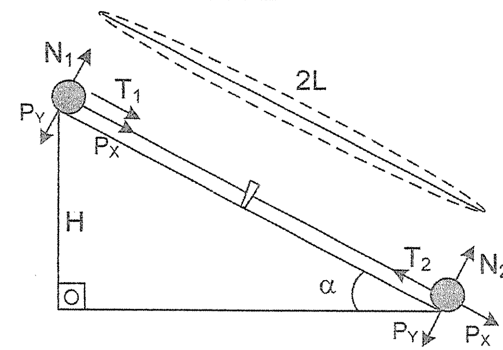
Solução: No ponto mais alto da trajetória circular (veja figura), a 2ª lei de Newton da direção centrípeta permite escrever:

$$FRctp = Fin - Fout = m.(v_1)^2 / R, \quad \text{com } R = L$$

$$T_1 + m.g.sen\alpha - 0 = m.(v_1)^2 / L$$

Multiplicando, membro a membro, por L/2, encontramos:

$$\frac{T_1.L}{2} + \frac{m.g.L.sen\alpha}{2} = \frac{m.(v_1)^2}{2} \quad \textbf{(eq1)}$$



No ponto mais baixo da trajetória circular, a 2ª lei de Newton da direção centrípeta permite escrever:

$$FRctp = Fin - Fout = m.(v_2)^2 / R, \quad \text{com } R = L$$

$$T_2 - m.g.sen\alpha = m.(v_2)^2 / L$$

Multiplicando, membro a membro, por L/2, encontramos:

$$\frac{T_2.L}{2} - \frac{m.g.L.sen\alpha}{2} = \frac{m.(v_2)^2}{2} \quad \textbf{(eq2)}$$

Durante o movimento do pêndulo, a única força que realiza trabalho sobre ele é a força peso (conservativa) de forma que o sistema é claramente conservativo. Adotando como $H_2 = 0$ a altura vertical do ponto mais baixo da trajetória, a altura vertical do ponto mais alto da trajetória será $H_1 = H = +2L.sen\alpha$. Pela conservação da energia mecânica entre as posições extremo superior e extremo inferior, podemos escrever:

$$(Epot + Ecin)_1 = (Epot + Ecin)_2$$

$$m.g.H_1 + m.(v_1)^2/2 = m.g.H_2 + m.(v_2)^2/2 \;, \quad \text{com } H_2 = 0 \text{ e } H_1 = +2L.sen\alpha$$

$$m.g.(2L.sen\alpha) + m.(v_1)^2/2 = 0 + m.(v_2)^2/2 \quad \textbf{(eq3)}$$

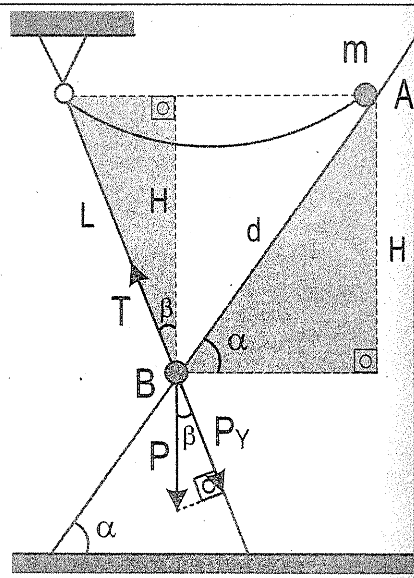
Isolando as energias cinéticas do pêndulo das relações eq1 e eq2 e substituindo em eq3, vem:

$$\frac{T_2.L}{2} - \frac{m.g.L.sen\alpha}{2} = \frac{T_1.L}{2} + \frac{m.g.L.sen\alpha}{2} + m.g.(2L.sen\alpha)$$

$$(T_2 - T_1).\frac{L}{2} = 3m.g.(L.sen\alpha) \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = 6.m.g.sen\alpha$$

Questão 69 - Resposta: alternativa c

Solução: Durante a descida da bolinha ao longo da rampa, agem sobre ela apenas a normal N e o seu peso P. A tração no fio é nula
(T = 0) visto que ele ainda não está esticado. Ao atingir o ponto B, a trajetória da bolinha passa a ser circular (movimento pendular de raio R = L), a normal N deixa de agir, dando lugar à tração T aplicada pelo fio.
A decomposição das forças agindo na bolinha, na posição B, segue a decomposição tradicional para o movimento do pêndulo simples (conforme estudado no volume 1 desta obra) usando o par de eixos padrão para a trajetória circular.
Assim, a 2ª lei de Newton na direção centrípeta, na posição B, nos permite escrever:



$$FRctp = Fin - Fout = m.(v_B)^2 / R$$

$$T - P_Y = m.(v_B)^2 / R, \quad \text{com } R = L$$

$$T - m.g.cos\beta = m.(v_B)^2 / L \quad \textbf{(eq1)}$$

Para determinar a velocidade v_B da bolinha ao atingir o ponto B, fazemos uso da conservação da energia mecânica no trecho AB:

$$(Epot + Ecin)_A = (Epot + Ecin)_B$$

$$m.g.H_A + m.(v_A)^2/2 = m.g.H_B + m.(v_B)^2/2$$

Tomando $H_A = H = d.sen\alpha$, $H_B = 0$ e $v_A = 0$, vem:

$$m.g.\,d.sen\alpha + 0 = 0 + m.(v_B)^2/2 \quad \Rightarrow \quad (v_B)^2 = 2.g.d.sen\alpha \quad \textbf{(eq2)}$$

Da geometria do problema, temos:

$$cos\beta = \frac{H}{L} = \frac{d.sen\alpha}{L} \quad \Rightarrow \quad cos\beta = \frac{d.sen\alpha}{L} \quad \textbf{(eq3)}$$

Substituindo eq2 e eq3 em eq1, vem: $T - mg.cos\beta = \frac{m}{L}.v_B{}^2$

$$T - mg.\frac{d.sen\alpha}{L} = \frac{m}{L}.2.g.d.sen\alpha \quad \Rightarrow \quad T = 3mg\left(\frac{d}{L}\right).sen\alpha$$

Questão 70

Solução: A 2ª lei de Newton, na direção centrípeta (veja figura), nos permite escrever:

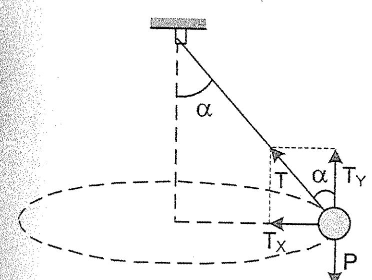
$$FR\,ctp = Fin - Fout = (T_X - 0) = T.sen\alpha = m.(\omega^2.R) \quad \textbf{(eq1)}$$

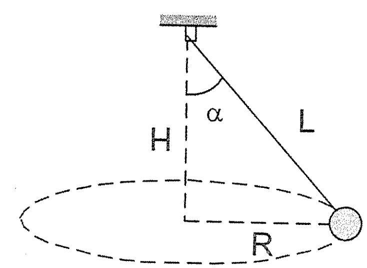
Equilíbrio vertical: $T_Y = T.cos\alpha = m.g$ **(eq2)**

Dividindo as relações eq1 e eq2, membro a membro, vem:

$$\frac{T.sen\alpha}{T.cos\alpha} = \frac{m.\omega^2 R}{m.g} \quad \Rightarrow \quad tg\alpha = \frac{\omega^2 R}{g} \quad \textbf{(eq3)}$$

Da geometria no triângulo retângulo, podemos escrever: $tg\alpha = \frac{R}{H}$ **(eq4)**





Das relações eq3 e eq4, temos: $tg\alpha = \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{R}{H} \quad \Rightarrow \quad \omega^2.H = g$ **(eq5)**

Podemos deduzir, a partir da relação eq5, que o produto $\omega^2.H$ é sempre constante, igual à intensidade do campo gravitacional local g, para qualquer combinação de valores da velocidade angular ω do pêndulo e da altura H da sua órbita estacionária (medida do ponto de suspensão para baixo).

Assim, podemos escrever: $(\omega i)^2 . Hi = (\omega_F)^2 . H_F$ **(eq6)**

Na órbita estacionária inicial, temos L = 5m, Ri = 3m, o que nos fornece Hi = 4m (Pitágoras). Em seguida, o sistema evolui gradativamente para outra órbita estacionária com velocidade angular $\omega_F = 2.\omega i$ (conforme o enunciado da questão), para a qual, a relação eq6 nos permite escrever :

$$(\omega i)^2 . Hi = (\omega_F)^2 . H_F \;\Rightarrow\; (\omega i)^2 . 4 = (2.\omega i)^2 . H_F \;\Rightarrow\; H_F = 1m$$

Assim, na órbita estacionária final, temos L = 5m, H_F = 1m, o que nos fornece $R_F = \sqrt{24}$ m (Pitágoras). Observe os detalhes geométricos na próxima figura.

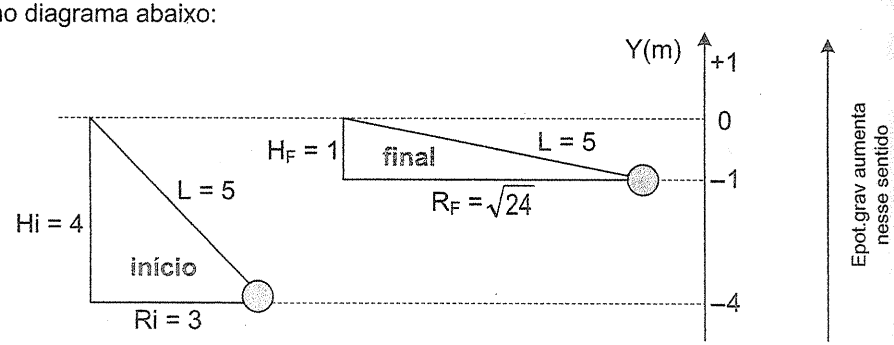
Fazendo uso de eq5, nas situações inicial e final, temos:

$$(\omega i)^2 . Hi = g \;\Rightarrow\; (\omega i)^2 . 4 = 10 \;\Rightarrow\; (\omega i)^2 = 2{,}5\ (rad/s)^2$$

$$(\omega_F)^2 . H_F = g \;\Rightarrow\; (\omega_F)^2 . 1 = 10 \;\Rightarrow\; (\omega_F)^2 = 10\ (rad/s)^2$$

Eu, Renato Brito, aproveito para lembrar ao leitor que, ao fazermos uso dos princípios de Trabalho e Energia, a orientação do eixo de referência para a energia potencial gravitacional não é arbitrária conforme expliquei na questão 63. Esse eixo deve sempre apontar para cima ↑, tendo em vista que a energia potencial gravitacional de um corpo sempre aumenta quando o corpo sobe, isto é, quando ele sofre um deslocamento no sentido oposto ao da gravidade local (movimento forçado); e vice-versa.

A figura abaixo mostra as configurações inicial e final do pêndulo cônico, bem como o eixo de referencia da altura Y a ser usado para o cálculo da energia potencial gravitacional. De forma arbitrária, tomamos como Y = 0 o nível horizontal que passa pelo ponto de suspensão do pêndulo, conforme mostrado no diagrama abaixo:



De forma geral, a energia mecânica do sistema é dada por :

$$Emec = \frac{m.v^2}{2} + m.g.Y = \frac{m.(\omega.R)^2}{2} + m.g.Y = \frac{m.\omega^2.R^2}{2} + m.g.Y$$

Assim, a energia mecânica do sistema, na configuração inicial, vale:

$$Emec\ i = \frac{m.(\omega i)^2.(Ri)^2}{2} + m.g.Yi = \frac{4.(2{,}5).(3)^2}{2} + 4\times 10.(-4) = -115J$$

Na configuração final, a energia mecânica do sistema vale:

$$Emec_F = \frac{m.(\omega_F)^2.(R_F)^2}{2} + m.g.Y_F = \frac{4.(10).(\sqrt{24})^2}{2} + 4\times 10.(-1) = +440J$$

Percebemos que a energia mecânica Emec do sistema aumentou durante esse processo. A ação do motor sobre o sistema injetou energia mecânica no mesmo, fazendo o sistema evoluir de uma configuração inicial de menor energia mecânica ($Emec_i$ = −115 J) para uma configuração final de maior energia mecânica ($Emec_F$ = +440 J).

Esse acréscimo de energia mecânica do sistema provém do trabalho realizado pelo motor sobre o sistema, dado por:

$$T_{motor} = T_{FNC} = Emec_F - Emec\ i = (+440J) - (-115J) = 555J$$

Essa é a resposta desse problema.

Se o nível de referência para altura zero (energia potencial gravitacional nula) tivesse sido arbitrado no nível horizontal correspondente à órbita inicial do pêndulo (Y_i = 0m), teríamos Y_F = +3m na configuração final. Nesse novo referencial para a energia potencial gravitacional, encontraríamos Emeci = +45J e $Emec_F$ = +600J para esse sistema. Ainda assim, a resposta do problema permaneceria inalterada:

$$T_{motor} = T_{FNC} = Emec_F - Emec\ i = (+600J) - (45J) = 555J$$ ☺ Legal, né? ☺

Questão 71 – Resposta: 2H/3

Questão 72

Solução: Na figura, no ponto B, as forças normal N e peso P foram decompostas nos eixos centrípeto (eixo 1) e tangencial (eixo 2). A 2ª lei de Newton, na direção centrípeta, nos permite escrever:

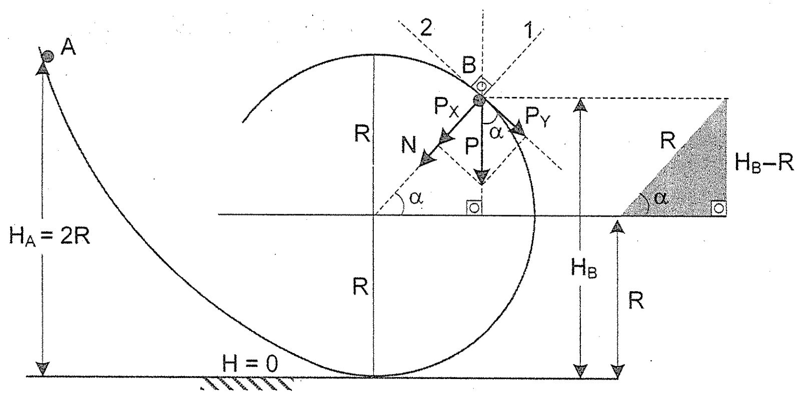
$$F_R\,ctp = Fin - Fout = (N + P_X) - (0) = m.(v_B)^2 / R$$

$$F_R\,ctp = N + m.g.sen\alpha = m.(v_B)^2 / R \quad \textbf{(eq1)}$$

Admita que, ao atingir o ponto B (veja figura), o corpo perca o contato a pista, isto é, a reação normal do contato entre o corpo e a pista se anule (N = 0). A relação eq1, portanto, fornecerá a velocidade v_B do corpo no momento em que ele descolar da pista (N = 0) :

$$0 + m.g.sen\alpha = m.(v_B)^2 / R \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B = \sqrt{g.R.sen\alpha}} \quad \textbf{(eq2)}$$

Seja A o ponto inicial (não representado na figura) de onde o corpo parte do repouso ($v_A = 0$), a uma altura $H_A = 2R$. Como, durante todo esse movimento do corpo, a única força que realiza trabalho sobre ele é o seu peso (força conservativa), a conservação da energia mecânica entre os pontos A e B nos permite escrever:



$$(Epot + Ecin)_A = (Epot + Ecin)_B$$

$$m.g.H_A + \frac{m.(v_A)^2}{2} = m.g.H_B + \frac{m.(v_B)^2}{2}, \text{ com } v_A = 0,\ H_A = 2R,\ v_B = \sqrt{g.R.sen\alpha}$$

$$m.g.2R + 0 = m.g.H_B + \frac{m.g.R.sen\alpha}{2}, \text{ com } sen\alpha = \frac{H_B - R}{R}, \text{ (veja figura)}$$

$$m.g.2R + 0 = m.g.H_B + \frac{m.g.R}{2}.\left(\frac{H_B - R}{R}\right)$$

$$4R = 2H_B + (H_B - R) \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_B = 5R/3}$$

Assim, a altura H em que o corpo perde o contato com a pista vale 5R/3.

Questão 73

Solução: A bolinha do pêndulo parte do repouso do ponto A (veja figura) e, inicialmente, segue uma trajetória circular de raio 3d. Em seguida, o fio do pêndulo toca os prego p_2 e p_3 (veja figura) e, a partir desse ponto, a bolinha do pêndulo descreve um arco de circunferência de centro em p_3 e raio d (veja

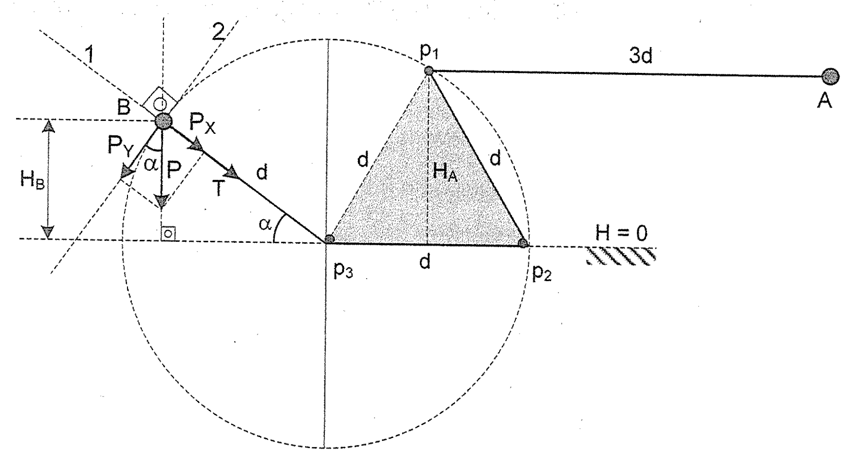
figura). Na figura, no ponto B, as forças tração T e peso P foram decompostas nos eixos centrípeto (eixo 1) e tangencial (eixo 2).

A 2ª lei de Newton, na direção centrípeta, nos permite escrever:

$$F_R\ ctp = Fin - Fout = (T + P_X) - (0) = m.(v_B)^2 / R, \text{ com } R = d$$

$$\boxed{F_R\ ctp = T + m.g.sen\alpha = m.(v_B)^2 / d} \quad \textbf{(eq1)}$$

Admita que, ao atingir o ponto B (veja figura), o fio fique frouxo, isto é, a tração se anule (T = 0). Assim, substituindo T = 0 na relação eq1, determinaremos a velocidade v_B da esfera no momento em que o fio se afrouxar (T = 0):



$$0 + m.g.sen\alpha = m.(v_B)^2 / d \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B = \sqrt{g.d.sen\alpha}} \quad \textbf{(eq2)}$$

Entretanto, ainda precisamos do valor do senα na figura. A conservação da energia mecânica entre as posições A e B nos permite escrever :

$$(Epot + Ecin)_A = (Epot + Ecin)_B$$

$$m.g.H_A + \frac{m.(v_A)^2}{2} = m.g.H_B + \frac{m.(v_B)^2}{2}, \text{ com } v_A = 0,\ H_A = \frac{d\sqrt{3}}{2},\ H_B = d.sen\alpha$$

$$\frac{m.g.d\sqrt{3}}{2} + 0 = m.g.d.sen\alpha + \frac{m.(v_B)^2}{2}, \text{ com } v_B = \sqrt{g.d.sen\alpha} \quad \textbf{(eq2)}$$

$$\frac{m.g.d\sqrt{3}}{2} + 0 = m.g.d.sen\alpha + \frac{m.g.d.sen\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{sen\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Substituindo em eq2, vem:

$$v_B = \sqrt{g.d.sen\alpha} = \sqrt{\frac{g.d.\sqrt{3}}{3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B = \sqrt{\frac{g.d.\sqrt{3}}{3}}}$$

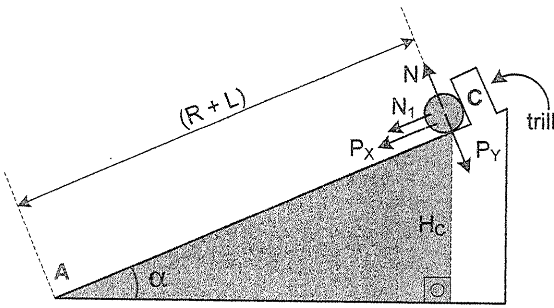
Questão 74 – Resposta: alternativa a

Questão 75

Solução: A figura abaixo mostra o exato momento em que a bolinha atinge o ponto C, o ponto crítico de todo o seu percurso. Naquele ponto, o trilho exerce sobre a bolinha uma força de reação normal N_1 apontando ladeira abaixo (veja a figura). A resultante centrípeta que age na bolinha, ao passar pelo ponto C, aponta para o centro de curvatura O e vale:

$$F_R\,ctp = Fin - Fout = (N_1 + P_X) - 0 = m.(v_C)^2/R$$

$$(N_1 + m.g.sen\alpha) - 0 = m.(v_C)^2/R \quad \textbf{(eq1)}$$



Da geometria, vemos que : $H_C = (R+L).sen\alpha$

A velocidade mínima v_C para que a bola consiga percorrer toda a semicircunferência é aquela que fará com que a bolinha passe pelo ponto C exercendo contato desprezível sobre o trilho ($N_1 \cong 0$). Para determinamos esse valor crítico de v_C, faremos $N_1 \cong 0$ em eq1:

$$(0 + m.g.sen\alpha) - 0 = m.(v_C)^2/R \Rightarrow v_C = \sqrt{g.R.sen\alpha} \quad \textbf{(eq2)}$$

Com que velocidade v_A se deve impulsionar a bolinha, a partir do ponto A, para que ela atinja o ponto C com a velocidade crítica dada pela relação eq2 ? A conservação da energia mecânica entre as posições A e C nos permite escrever :

$$(Epot + Ecin)_A = (Epot + Ecin)_C$$

$$m.g.H_A + \frac{m.(v_A)^2}{2} = m.g.H_C + \frac{m.(v_C)^2}{2}, \text{ com } H_A = 0,\ H_C = (R+L).sen\alpha$$

$$0 + \frac{m.(v_A)^2}{2} = m.g.(R+L).sen\alpha + \frac{m.(v_C)^2}{2}, \text{ com } v_C = \sqrt{R.g.sen\alpha} \quad \textbf{(eq2)}$$

$$0 + \frac{m.(v_A)^2}{2} = m.g.(R+L).sen\alpha + \frac{m.R.g.sen\alpha}{2}$$

$$V_A = \sqrt{(3R+2L).g.sen\alpha}$$

Questão 76

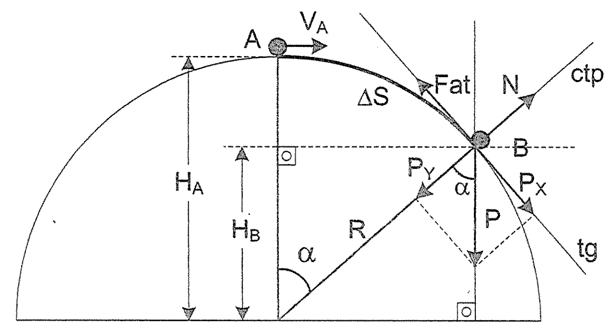
Solução: Ao se mover do ponto A ao ponto B, ao longo da superfície esférica, o corpo sofrerá um deslocamento escalar ΔS dado pelo comprimento do arco AB:

$$\Delta S = \alpha \,.\, R = \left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right).R \Rightarrow \Delta S = \frac{\pi}{3}.R \quad \textbf{(eq1)}$$

Ao passar pelo ponto B genérico, a 2ª lei de Newton, na direção centrípeta, permite escrever:

$$F_R\,ctp = Fin - Fout = P_Y - N = m.(v_B)^2/R$$

$$m.g.cos\alpha - N = m.(v_B)^2/R \quad \textbf{(eq2)}$$



Admitindo que o corpo perca o contato com a superfície esférica no ponto B (N=0), determinemos a velocidade v_B do corpo nesse momento, fazendo N = 0 em eq2:

$$m.g.cos\alpha - 0 = m.(v_B)^2/R \Rightarrow v_B = \sqrt{g.R.cos\alpha} \quad \textbf{(eq3)}$$

A seguir, queremos determinar com que velocidade v_A se deve impulsionar o corpo, a partir do ponto A, para que ele atinja o ponto B com a velocidade v_B dada pela relação eq2. Segundo o enunciado da questão, uma força de atrito suposta constante age sobre o corpo em todo o percurso AB. O princípio do trabalho realizado pelas forças não-conservativas (N e Fat), no percurso AB, nos permite escrever:

$$\Sigma T_{FNC\ AB} = T_N + T_{Fat} = Emec_B - Emec\,A$$

A força normal N que age no corpo é perpendicular à trajetória circular, em cada ponto do percurso AB, portanto, não realiza trabalho sobre o corpo. A força de atrito, admitida constante no enunciado, se mantém paralela ao deslocamento do corpo em cada ponto, realizando um trabalho resistente $T_{Fat} = -Fat.\Delta s$. Assim, temos:

$$\Sigma T_{FNC\ AB} = T_N + T_{Fat} = (Epot + Ecin)_B - (Epot + Ecin)_A$$

$$0 \;+\; (-Fat.\Delta s) \;=\; \left[m.g.H_B + \frac{m.(v_B)^2}{2}\right] - \left[m.g.H_A + \frac{m.(v_A)^2}{2}\right]$$

$$-\frac{7mg}{4\pi}.\left(\frac{\pi.R}{3}\right) = \left[m.g.R.\cos\alpha + \frac{m.(g.R.\cos\alpha)}{2}\right] - \left[m.g.R + \frac{m.(v_A)^2}{2}\right]$$

Sendo $\alpha = 60^o$, temos $\cos\alpha = 1/2$. Substituindo, vem:

$$-\frac{7mgR}{12} = m.g.R.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) - m.g.R - \frac{m.(v_A)^2}{2}$$

$$\frac{m.(v_A)^2}{2} = \frac{m.g.R}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_A = \sqrt{\frac{2gR}{3}}}$$

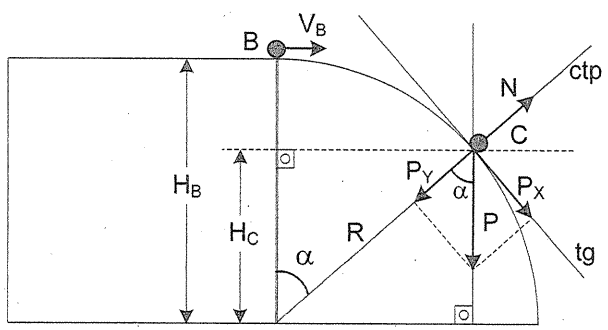
uestão 77

olução:

Ao passar pelo ponto C genérico, a 2ª lei de Newton, na direção centrípeta, rmite escrever:

$F_R\, ctp \;=\; Fin - Fout \;=\; P_Y \;-\; N \;=\; m.(v_C)^2 / R$

$m.g.\cos\alpha \;-\; N \;=\; m.(v_C)^2 / R$ **(eq1)**



dmitindo que o corpo perca o contato com a superfície esférica no ponto C =0), determinemos a velocidade v_C do corpo nesse momento, fazendo N = 0 n eq1:

$m.g.\cos\alpha \;-\; 0 \;=\; m.(v_C)^2 / R \;\Rightarrow\;$ $\boxed{v_C = \sqrt{g.R.\cos\alpha}}$ **(eq2)**

ecisamos determinar a altura H_C do ponto C. A conservação da energia ecânica entre as posições B e C nos permite escrever :

pot + Ecin) $_B$ = (Epot + Ecin) $_C$

$$m.g.H_B + \frac{m.(v_B)^2}{2} = m.g.H_C + \frac{m.(v_C)^2}{2}, \text{ com } v_B = \frac{\sqrt{R.g}}{2},\; H_B = R,\; v_C = \sqrt{R.g.\cos\alpha}$$

$$m.g.R \;+\; \frac{m}{2}.\frac{R.g}{4} \;=\; m.g.H_C \;+\; \frac{m.R.g.\cos\alpha}{2}, \quad \text{com} \quad \cos\alpha = \frac{H_C}{R}$$

$$m.g.R \;+\; \frac{m}{2}.\frac{R.g}{4} \;=\; m.g.H_C + \frac{m.R.g}{2}.\frac{H_C}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{8} + R \;=\; \frac{H_C}{2} + H_C$$

$$\boxed{H_C = \frac{3R}{4}} \;,\quad \cos\alpha = \frac{H_C}{R} \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \cong 0{,}661$$

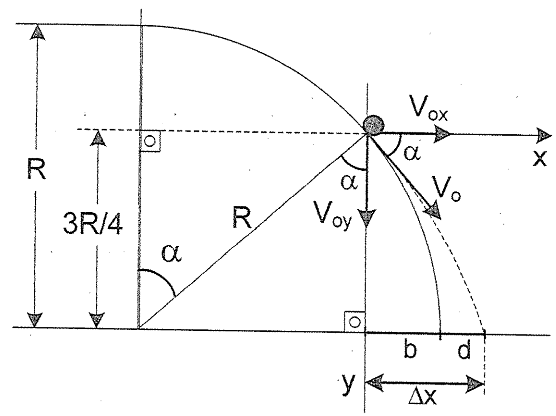
b) Para determinar o tempo t que decorre entre o instante em que o corpo descola da superfície no ponto C e o instante em que ele colide com o solo em E, escrevemos a equação do MRUV na vertical ao longo do eixo y :

$Y = Y_o \;+ V_oy.t \;+\; a.t^2/2$

com $a = g = 10\ m/s^2$, $Y_o = 0$, $Y = 3R/4$, $V_oy = v_C.\text{sen}\alpha = \sqrt{R.g.\cos\alpha}\,.\text{sen}\alpha$

$$\frac{3R}{4} = 0 + \sqrt{\frac{R.(10).3}{4}}.\frac{\sqrt{7}}{4}.t \;+\; \frac{10}{2}.t^2 \quad \Rightarrow \quad 5.t^2 \;+\; 1{,}81\sqrt{R}.t \;-\; 0{,}75.R \;=\; 0$$

$$t = \frac{-1{,}81\sqrt{R} + \sqrt{3{,}28R + 15R}}{10} \quad \Rightarrow \quad t \cong 0{,}246.\sqrt{R}$$



O deslocamento horizontal Δx, na figura acima, é dado por:

$$\Delta x = v_{oX}.t \;=\; v_C.\cos\alpha.t \;=\; \sqrt{R.g.\cos\alpha}\,.\cos\alpha.t \;=\; \sqrt{\frac{3.R.10}{4}}.\frac{3}{4}.(0{,}246).\sqrt{R}$$

$\Delta x \cong 0{,}506.R$

Da figura, temos: $d = \Delta x - b$, com $b = R - R.\text{sen}\alpha \Rightarrow b = R.(1-\text{sen}\alpha)$

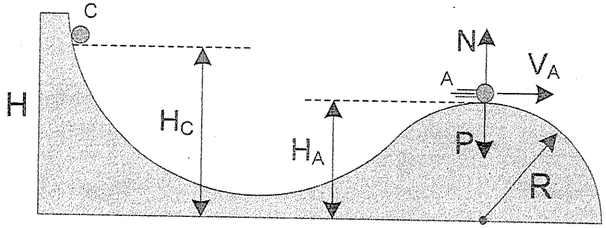
$d = \Delta x - R.(1-\text{sen}\alpha) = 0{,}506.R - R.(1-0{,}661) \Rightarrow d \cong 0{,}168.R$

Questão 78 – Respostas

a) $\cos\alpha = 2/3$, b) $v_B = \sqrt{\dfrac{2gR}{3}}$, c) 1,461.R

Questão 79 - Resposta: alternativa a

Solução: Ao passar pelo ponto A mais alto da rampa, a 2ª lei de Newton, na direção radial (centrípeta), permite escrever:



$$F_R\,ctp = Fin - Fout = P - N = m.(v_A)^2/R$$

$$m.g - N = m.(v_A)^2/R \qquad \textbf{(eq1)}$$

Admitindo que o corpo perca o contato com a superfície esférica no ponto A (N=0), determinemos a velocidade v_A do corpo nesse momento, fazendo N = 0 em eq1:

$$m.g - 0 = m.(v_A)^2/R \Rightarrow v_A = \sqrt{g.R} \qquad \textbf{(eq2)}$$

Precisamos determinar a altura H_C do ponto C de onde a bolinha partiu do repouso. A conservação da energia mecânica entre as posições C e A nos permite escrever :

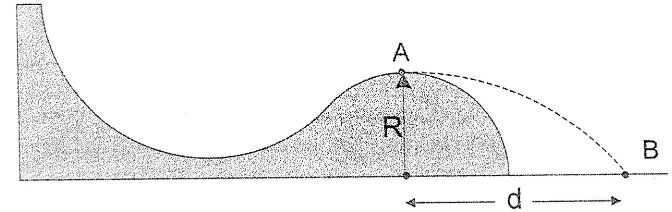
$$(Epot + Ecin)_C = (Epot + Ecin)_A$$

$$m.g.H_C + \frac{m.(v_C)^2}{2} = m.g.H_A + \frac{m.(v_A)^2}{2}, \text{ com } v_C = 0,\ H_A = R,\ V_A = \sqrt{R.g}$$

$$m.g.H_C + 0 = m.g.R + \frac{m.R.g}{2} \Rightarrow H_C = \frac{3R}{2}$$

Questão 80 - Resposta: alternativa a

Solução: O movimento que a bolinha descreverá, entre os pontos A e B, é o chamado lançamento horizontal, em que a bolinha parte de uma altura inicial H = R e permanece no ar em trajetória parabólica durante um tempo t dado por:



$$H = \frac{g.t^2}{2} = R \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

O alcance horizontal $\Delta x = d$ da bolinha, nesse movimento, é dado por:

$$\Delta x = d = v_X.\,t, \quad \text{com } v_X = v_A = \sqrt{g.R} \text{ e } t = \sqrt{\frac{2R}{g}}, \text{ portanto:}$$

$$d = \sqrt{g.R}.\sqrt{\frac{2R}{g}} \Rightarrow d = R.\sqrt{2}$$

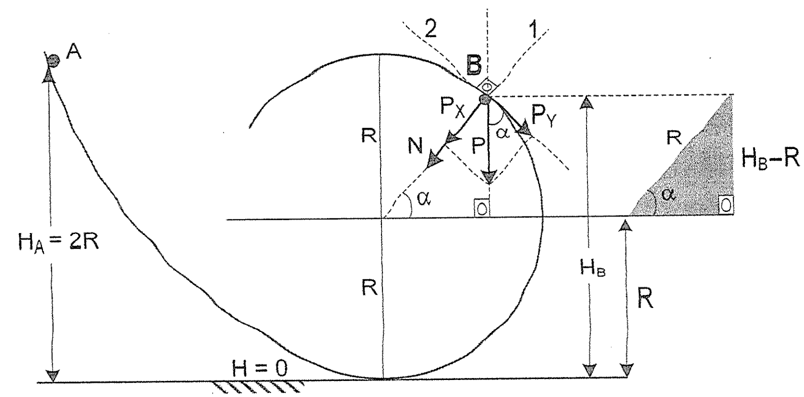
Questão 81

Solução:

a) Na figura, no ponto B, as forças normal N e peso P foram decompostas nos eixos centrípeto (eixo 1) e tangencial (eixo 2). A 2ª lei de Newton, na direção centrípeta, nos permite escrever:

$$F_R\,ctp = Fin - Fout = (N + P_X) - (0) = m.(v_B)^2/R$$

$$F_R\,ctp = N + m.g.\text{sen}\alpha = m.(v_B)^2/R \qquad \textbf{(eq1)}$$



Admita que, ao atingir o ponto B (veja figura), o corpo perca o contato a pista, isto é, a reação normal do contato entre o corpo e a pista se anule (N = 0). A relação eq1, portanto, fornecerá a velocidade v_B do corpo no momento em que ele descolar da pista (N = 0) :

$$0 + m.g.sen\alpha = m.(v_B)^2/R \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B = \sqrt{g.R.sen\alpha}} \quad \textbf{(eq2)}$$

Seja A o ponto inicial (não representado na figura) de onde o corpo parte do repouso ($v_A = 0$), a uma altura $H_A = 2R$. Como, durante todo esse movimento do corpo, a única força que realiza trabalho sobre ele é o seu peso (força conservativa), a conservação da energia mecânica entre os pontos A e B nos permite escrever:

$$(Epot + Ecin)_A = (Epot + Ecin)_B$$

$$m.g.H_A + \frac{m.(v_A)^2}{2} = m.g.H_B + \frac{m.(v_B)^2}{2}, \text{ com } v_A = 0,\ H_A = 2R,\ v_B = \sqrt{g.R.sen\alpha}$$

$$m.g.2R + 0 = m.g.H_B + \frac{m.g.R.sen\alpha}{2}, \text{ com } sen\alpha = \frac{H_B - R}{R}, \text{ (veja figura)}$$

$$m.g.2R + 0 = m.g.H_B + \frac{m.g.R}{2}.\left(\frac{H_B - R}{R}\right)$$

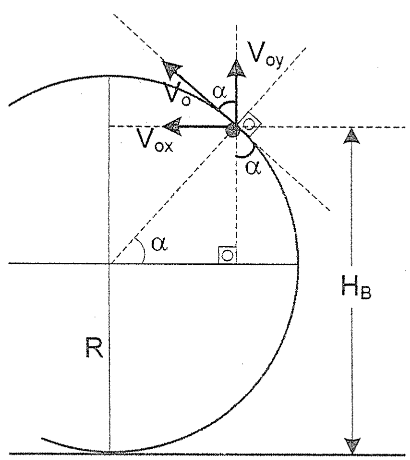
$$4R = 2H_B + (H_B - R) \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_B = 5R/3} \quad \Rightarrow \quad sen\alpha = \frac{H_B - R}{R} = \frac{2}{3}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{5}/3$$

Após atingir a altura H_B, a bolinha perderá o contato com o trilho circular e entrará numa trajetória parabólica. Ao passar pelo vértice dessa trajetória parabólica, a bola possuirá uma velocidade exclusivamente horizontal dada por:

$$Vx = V_B.sen\alpha = \sqrt{g.R.sen\alpha}\ .sen\alpha$$

$$\boxed{Vx = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2.R.g}{3}}}$$



b) Após atingir a altura H_B, perderá o contato com o trilho circular e entrará numa trajetória parabólica, ao longo da qual a bolinha sofrerá um deslocamento vertical adicional Δy até atingir o ponto de altura máxima. Esse deslocamento vertical Δy é determinado aplicando-se a relação de Torricelli na direção vertical, a partir do ponto B:

$$(Vy)^2 = (Voy)^2 + 2.a.\Delta y$$

$$0^2 = (V_o.\cos\alpha)^2 + 2.(-g).\Delta y \qquad \text{com } V_o = V_B = \sqrt{g.R.sen\alpha}$$

$$2.g.\Delta y = (V_o.\cos\alpha)^2 = g.R.sen\alpha.\cos^2\alpha$$

$$2\Delta y = R.\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{10R}{27} \Rightarrow \Delta y = \frac{5R}{27}.$$ Assim, a altura máxima atingida vale:

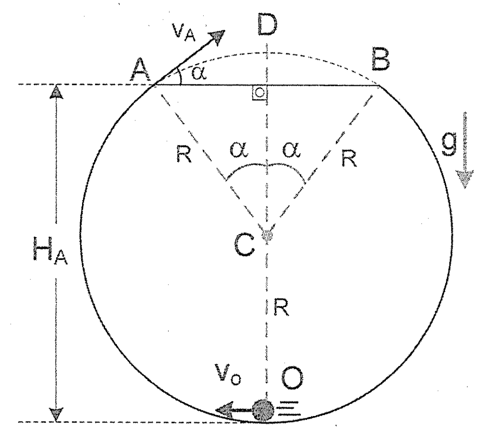
$$H_{max} = H_B + \Delta y = \frac{5R}{3} + \frac{5R}{27} \quad \therefore \quad \boxed{H_{max} = \frac{50R}{27}}$$

Questão 82 – Solução

No trecho ADB, o corpo descreverá uma trajetória parabólica de alcance horizontal dado pelo segmento de reta AB = 2R.senα. Assim, pela expressão do alcance horizontal do lançamento de projéteis, temos que:

$$A = \frac{(v_A)^2}{g}.2.sen\alpha.\cos\alpha = 2R.sen\alpha$$

$$\boxed{(v_A)^2 = \frac{g.R}{\cos\alpha}} \quad \textbf{(eq1)}$$



Entretanto, qual velocidade horizontal V_o se deve fornecer ao corpo no ponto O mais baixo do trilho circular, a fim de que ele alcance o ponto A com a velocidade v_A dada por eq1 ? A conservação da energia mecânica entre os pontos O e A nos permite escrever:

$$(Epot + Ecin)_O = (Epot + Ecin)_A$$

$$m.g.H_o + \frac{m.(v_o)^2}{2} = m.g.H_A + \frac{m.(v_A)^2}{2}, \text{ com } H_o = 0,\ H_A = R.(1+\cos\alpha),\ v_A = \sqrt{\frac{g.R}{\cos\alpha}}$$

$$0 + \frac{m.(v_o)^2}{2} = m.g.R(1+\cos\alpha) + \frac{m}{2}.\left(\frac{g.R}{\cos\alpha}\right)$$

$$V_o = \sqrt{g.R.\left(2+2\cos\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)}$$

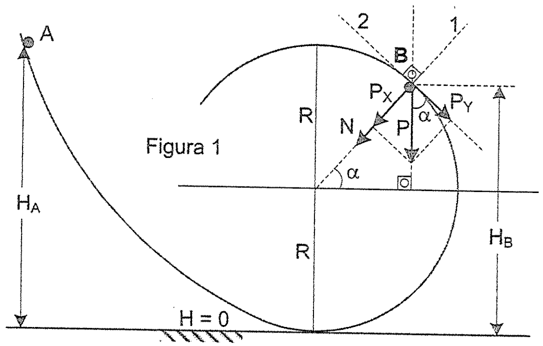
Questão 83 – Resposta: $R.\left(\cos\alpha + \frac{1}{2\cos\alpha} + 1\right)$

Questão 84

Solução: No ponto B da Figura 1, as forças normal N e peso P foram decompostas nos eixos centrípeto (eixo 1) e tangencial (eixo 2). A 2ª lei de Newton, na direção centrípeta, nos permite escrever:

$$F_R\,ctp = Fin - Fout = (N + P_X) - (0) = m.(v_B)^2/R$$

$$F_R\,ctp = N + m.g.sen\alpha = m.(v_B)^2/R \qquad \textbf{(eq1)}$$



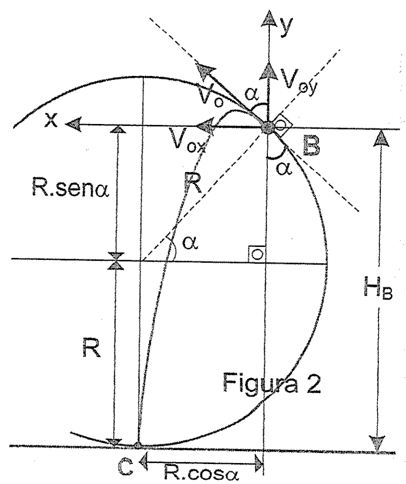
Admita que, ao atingir o ponto B, o corpo perca o contato a pista, isto é, a reação normal do contato entre o corpo e a pista se anule (N = 0). A relação eq1, portanto, fornecerá a velocidade v_B do corpo no momento em que ele descolar da pista (N = 0) :

$$0 + m.g.sen\alpha = m.(v_B)^2/R$$

$$\Rightarrow \quad v_B = \sqrt{g.R.sen\alpha} \qquad \textbf{(eq2)}$$

Após perder o contato, o corpo segue uma trajetória parabólica do ponto B ao ponto C. A cinemática do movimento nos permite escrever, na horizontal:

$$X = V_{ox}.\,t = V_o.sen\alpha.t, \text{ com } V_o = V_B$$



$$R.\cos\alpha = V_B.sen\alpha.\,t \Rightarrow t = \frac{R.\cos\alpha}{V_B.sen\alpha} \qquad \textbf{(eq3)}$$

Para a componente vertical do movimento, podemos escrever:

$$y = y_o + V_{oy}.t + a.t^2/2$$

$$y = 0 + V_o.\cos\alpha.t - g.t^2/2, \quad \text{com } V_o = V_B \qquad \textbf{(eq4)}$$

No instante t dado por eq3, o corpo deverá atingir o ponto C de ordenada:

$$y = -(R + R.sen\alpha) \qquad \textbf{(eq5)}$$

Substituindo eq2, eq3 e eq5 em eq4, temos:

$$-(R + R.sen\alpha) = 0 + V_B.\cos\alpha.\left(\frac{R.\cos\alpha}{V_B.sen\alpha}\right) - \frac{g}{2}.\left(\frac{R.\cos\alpha}{V_B.sen\alpha}\right)^2, \text{ usando eq2:}$$

$$R.(1 + sen\alpha) + \frac{R.\cos^2\alpha}{sen\alpha} - \frac{g}{2}.\left(\frac{R^2.\cos^2\alpha}{R.g.sen\alpha.sen^2\alpha}\right) = 0$$

$$1 + sen\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{sen\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{2.sen^3\alpha} = 0, \text{ usando } \cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha, \text{ temos:}$$

$$(1+sen\alpha) + \frac{(1+sen\alpha).(1-sen\alpha)}{sen\alpha}.\left(1-\frac{1}{2.sen^2\alpha}\right) = 0, \text{ dividindo por } (1+sen\alpha)\text{:}$$

$$1 + \frac{(1-sen\alpha)}{sen\alpha}.\left(\frac{2.sen^2\alpha - 1}{2.sen^2\alpha}\right) = 0 \text{ , multiplicando por } 2.sen^3\alpha, \text{ vem:}$$

$$\cancel{2.sen^3\alpha} + 2.sen^2\alpha - 1 - \cancel{2.sen^3\alpha} + sen\alpha = 0 \quad \text{(ufa ☺)}$$

$$2.sen^2\alpha + sen\alpha - 1 = 0 \Rightarrow sen\alpha = \frac{-1+\sqrt{1+8}}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^o \text{ ☺}$$

Pela conservação de energia mecânica entre as posições A e B da Figura 1, temos:

$$(Epot + Ecin)_A = (Epot + Ecin)_B \Rightarrow m.g.H_A + \frac{m.(v_A)^2}{2} = m.g.H_B + \frac{m.(v_B)^2}{2}$$

Sendo $v_A = 0$, $H_B = R.(1+sen\alpha)$, $v_B = \sqrt{g.R.sen\alpha}$, $sen\alpha = 1/2$, vem:

$$m.g.H_A + 0 = m.g.R.(1+sen\alpha) + \frac{m.R.g.sen\alpha}{2} = m.g.R.\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{m.R.g}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$H_A = \frac{7R}{4} \text{ ☺}$$

Questão 85

Solução: Na Figura 1, no ponto B, a força peso P foi decomposta nos eixos centrípeto e tangencial. Se a força resultante F_R agindo no corpo aponta na direção horizontal (Figura 2), o triangulo retângulo nos permite escrever:

$$tg\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{N-P_y}{P_x} \Rightarrow \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{N-P.\cos\alpha}{P.sen\alpha}$$

$$N-P.\cos\alpha = \frac{P.sen^2\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow N = \frac{P.\cos^2\alpha}{\cos\alpha} + \frac{P.sen^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{P.1}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{N = \frac{P}{\cos\alpha}} \quad \textbf{(eq1)}$$

A 2ª lei de Newton, na direção centrípeta, nos permite escrever:

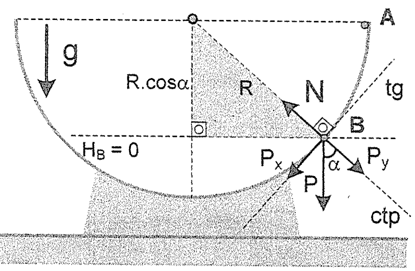


Figura s19

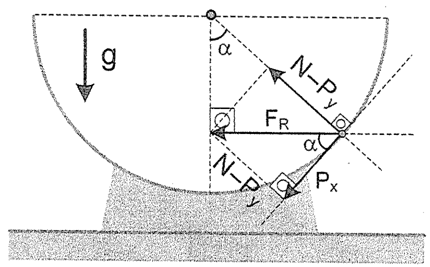


Figura s20

F_R ctp = Fin – Fout = (N – Py) = $m.(v_B)^2/R$

Sendo N = m.g /cosα e Py = m.g.cosα, temos:

$$\frac{m.g}{\cos\alpha} - mg.\cos\alpha = \frac{m.(v_B)^2}{R} \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{\frac{g.R.sen^2\alpha}{\cos\alpha}}} \quad \textbf{(eq2)}$$

Pela conservação de energia mecânica entre as posições A e B, temos:

$$(Epot + Ecin)_A = (Epot + Ecin)_B \Rightarrow m.g.H_A + \frac{m.(v_A)^2}{2} = m.g.H_B + \frac{m.(v_B)^2}{2}$$

Sendo $H_A = R.\cos\alpha$, $H_B = 0$, $v_A = 0$, V_B dado por eq2, temos:

$$m.g.R.\cos\alpha + 0 = 0 + \frac{m}{2}.\left(\frac{g.R.sen^2\alpha}{\cos\alpha}\right) \Rightarrow \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 2 \Rightarrow \boxed{tg\alpha = \sqrt{2}}$$

$$\alpha = arctg\sqrt{2} \cong 54{,}73°$$

Questão 86

Solução: Pelo princípio do Trabalho Total (teorema da energia cinética), temos:

$$T_{Total} = \sum_{todos} T = T_{operador} + T_{Peso} + T_N + T_{F\,elástica} = Ecin_F - Ecin_i$$

$$T_{operador} + (m.g.Hi - m.g.H_F) + 0 + \left(\frac{K.x_i^2}{2} - \frac{K.x_F^2}{2}\right) = m.(v_F)^2/2 - m.(v_i)^2/2$$

As deformações inicial e final da mola valem, respectivamente:

x_i = 0,6m – 0,5 m = 0,1 m, x_F = 0,7m – 0,5 m = 0,2 m

Como não ocorre variação da altura do corpo, temos: $H_i = H_F$

Substituindo, vem:

$$T_{operador} + (0) + 0 + \left(\frac{100.(0{,}1)^2}{2} - \frac{100.(0{,}2)^2}{2}\right) = 2.(4)^2/2 - 0$$

$$T_{operador} + (0{,}5 - 2) = 16 \Rightarrow \boxed{T_{operador} = 17{,}5\ J}$$

Questão 87 – Resposta: 2 m/s

Questão 88

Pela conservação de energia mecânica entre as posições P e Q, temos:

$$(Epot + Ecin)_P = (Epot + Ecin)_Q$$

$$m.g.H_p + \frac{k.(x_p)^2}{2} + \frac{m.(v_p)^2}{2} = m.g.H_Q + \frac{k.(x_Q)^2}{2} + \frac{m.(v_Q)^2}{2}$$

Do enunciado, temos H_p = 10 cm + 10 cm = 20 cm = 0,2m, $H_Q = 0$, $v_P = v_Q$.

Adicionalmente, como a mola está relaxada na posição P ($x_P = 0$), deduzimos que seu comprimento natural vale L_o = 10 – 2 = 8 cm. Assim, sua deformação no ponto Q vale x_Q = 12 – 8 = 4 cm = 0,04 m. Substituindo, vem:

$$(m.g).H_p + 0 + \frac{m.(\cancel{v}_p)^2}{2} = 0 + \frac{k.(x_Q)^2}{2} + \frac{m.(\cancel{v}_Q)^2}{2} \Rightarrow P.\,H_p = \frac{k.(x_Q)^2}{2}$$

$$30 \times 0{,}2 = \frac{k.(0{,}04)^2}{2} \Rightarrow \boxed{k = 7{,}5 \times 10^3\ N/m}$$

Questão 89 – Resposta: letra C, $v_T = \sqrt{10.(8-4\sqrt{2})} = \sqrt{23{,}4}$ m/s

Questão 90 – solução

a) Quando o bloco é abandonado do repouso, ele passa a cair acelerado (v↓, a↓) sob ação exclusiva do seu peso (↓P) até encontrar a mola. A partir desse instante, passa a agir sobre ele a força elástica Fel$\uparrow$ cuja intensidade aumenta à medida que a deformação da mola aumenta.

Durante a descida do bloco, seu movimento continua acelerado enquanto a força resultante agindo sobre ele ainda aponta a favor da velocidade ($F_R\downarrow$, $v\downarrow$), isto é, enquanto $\downarrow$P > Fel$\uparrow$. Entretanto, a crescente deformação da mola faz a força elástica crescer a ponto de se igualar ao valor do peso ($\uparrow$Fel = P$\downarrow$) e, em seguida superá-lo ($\uparrow$Fel > P$\downarrow$).

A partir desse ponto em que a força elástica supera o valor do peso, a força resultante sobre o bloco passa a apontar contra a velocidade ($\uparrow F_R, \downarrow v$) e o movimento passa a ser retardado $\downarrow v, \uparrow a$, $\uparrow F_R$, isto é, a velocidade do bloco passa a diminuir gradativamente até que o bloco pára (v = 0) a fim de voltar a subir.

Assim, vimos que a velocidade do corpo aumenta enquanto Fel < P, atingindo o valor máximo quando:

$$Fel = P \Rightarrow k.x = m.g \Rightarrow x = \frac{m.g}{k} = \frac{8\times 10}{200} \Rightarrow \boxed{x = 0{,}4\ m}$$

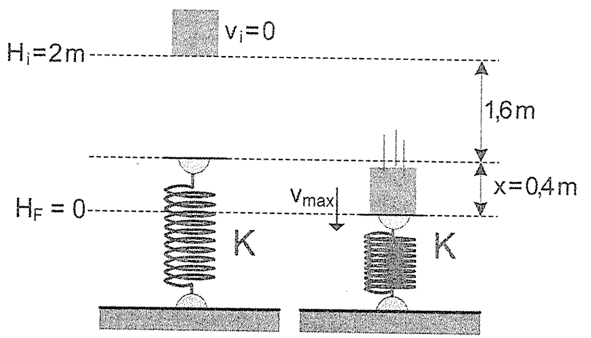


Figura s21

Pela conservação de energia mecânica entre as posições inicial e final (Figura 1), temos:

$$(Epot + Ecin)_i = (Epot + Ecin)_F$$

$$m.g.H_i + \frac{K.x_i^2}{2} + \frac{m.(v_i)^2}{2} = m.g.H_F + \frac{K.x_F^2}{2} + \frac{m.(v_{max})^2}{2}$$

Sendo $x_i = 0$, $v_i = 0$, e adotando o nível de referencia (Figura 1) para Epot gravitacional na posição em que a velocidade é máxima ($H_F = 0$, $H_i = 1{,}6 + 0{,}4 = 2m$), vem:

$$m.g.H_i + 0 + 0 = 0 + \frac{K.x_F^2}{2} + \frac{m.(v_{max})^2}{2}$$

$$8\times 10\times 2 = \frac{200\times(0{,}4)^2}{2} + \frac{8.(v_{max})^2}{2} \Rightarrow \boxed{v_{max} = 6\ m/s}$$

b) Como a deformação da mola cresce enquanto o bloco estiver descendo,ela será a máxima no instante em que o bloco parar de descer ($v_F = 0$) a fim de inverter o sentido do seu movimento.

Pela conservação de energia mecânica entre as posições inicial e final (Figura 2), temos:

$$(Epot + Ecin)_i = (Epot + Ecin)_F$$

$$m.g.H_i + \frac{K.x_i^2}{2} + \frac{m.(v_i)^2}{2} = m.g.H_F + \frac{K.x_F^2}{2} + \frac{m.(v_F)^2}{2}$$

Sendo $x_i = 0$, $v_i = v_F = 0$, e adotando o nível de referencia para Epot gravitacional na posição (Figura 2) em que a caixa pára ($H_F = 0$, $H_i = 1{,}6 + x$), vem:

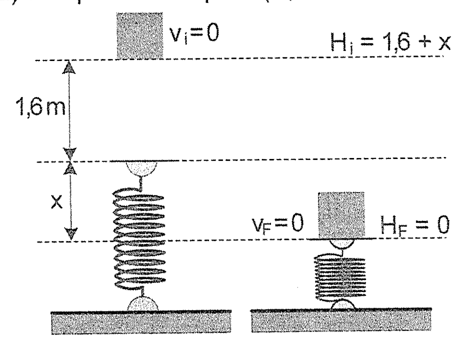


Figura s22

$$m.g.H_i + 0 + 0 = 0 + \frac{K.x_F^2}{2} + 0 \Rightarrow m.g.H_i + 0 + 0 = 0 + \frac{K.x_F^2}{2} + 0$$

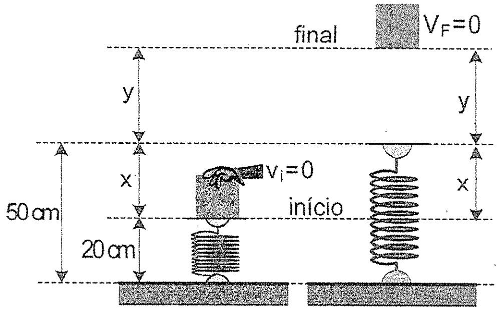
$$8.10.(1{,}6 + x) = \frac{200.(x)^2}{2} \Rightarrow 100x^2 - 80x - 128 = 0$$

$$x = \frac{80 \pm \sqrt{6400 + 4.100.128}}{200} = \frac{80 \pm \sqrt{6400 + 4.100.128}}{200} = \frac{80 + 240}{200}$$

$$\boxed{x = 1{,}6\ m}$$

Questão 91

Solução: Observe a figura. A caixa encontra-se inicialmente em repouso ($v_i = 0$) na posição inicial de onde será abandonada. Nesse ponto inicial, adotamos o nível de referência para a Epot gravitacional, isto é, nesse ponto final tomamos $H_i = 0$.



Portanto, na posição final, a altura da bola, em relação ao nível de referência, valerá $H_F = x + y$. A caixa percorrerá uma altura $x + y$ subindo até parar novamente ($v_F = 0$) na posição final.

Assim, pela conservação de Energia, podemos escrever:

$$(E_{pot} + E_{cin})_i = (E_{pot} + E_{cin})_F$$

$$m.g.H_i + \frac{K.x_i^2}{2} + \frac{m.(v_i)^2}{2} = m.g.H_F + \frac{K.x_F^2}{2} + \frac{m.(v_F)^2}{2}$$

Sendo $x_i = 50 - 20 = 30\text{cm} = 0{,}3$ m, $x_F = 0$, $v_i = v_F = 0$, ($H_i = 0$, $H_f = x + y$), vem:

$$m.g.H_i + \frac{K.x_i^2}{2} + \frac{m.(v_i)^2}{2} = m.g.H_F + \frac{K.x_F^2}{2} + \frac{m.(v_F)^2}{2}$$

$$0 + \frac{1200.(0{,}3)^2}{2} + 0 = 0 + 0{,}6.(10).(0{,}3 + y) + 0 \quad \Rightarrow \quad y = 8{,}7 \text{ m}$$

Mas, afinal, qual a altura final H atingida pela caixa, em relação ao solo? Veja a figura:

$$H = y + 50 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad H = 8{,}7\text{m} + 0{,}5 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad H = 9{,}2 \text{ m}$$ ☺

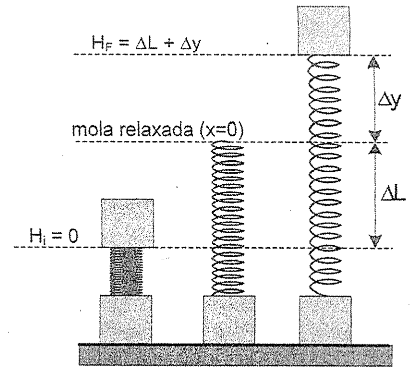
Questão 92

Solução: Note, pela figura, que a mola encontra-se inicialmente comprimida, em seguida passa pela sua posição relaxada e atinge a posição final elongada.

A deformação ΔL inicial da mola, no instante em que a caixa for liberada do repouso, deve ser tal que produza, no ponto de altura máxima ($v_F = 0$) da caixa, uma força elástica que, pelo menos, se iguale ao peso (Fel = P) da caixa debaixo☺. Assim, se Δy for a elongação da mola na posição final, devemos ter:

$$Fel = P \quad \Rightarrow \quad k.\Delta y = m.g \quad \textbf{(eq1)}$$

Agora apliquemos a conservação da energia mecânica entre a posição mais baixa (onde arbitraremos Hi = 0) e a posição mais alta (onde teremos $H_F = \Delta L + \Delta y$). Logicamente, a caixa encontra-se momentaneamente em repouso nessas posições extremas ($v_i = v_F = 0$).



$$(E_{pot} + E_{cin})_i = (E_{pot} + E_{cin})_F$$

$$m.g.H_i + \frac{K.x_i^2}{2} + \frac{m.(v_i)^2}{2} = m.g.H_F + \frac{K.x_F^2}{2} + \frac{m.(v_F)^2}{2}$$

Sendo $x_i = \Delta L$, $x_F = \Delta y$, $v_i = v_F = 0$, $H_i = 0$, $H_F = \Delta L + \Delta y$, vem:

$$0 + \frac{K.(\Delta L)^2}{2} + 0 = m.g.(\Delta L + \Delta y) + \frac{K.(\Delta y)^2}{2} + 0$$

Usando $\Delta y = m.g / k$ (da relação eq1) na expressão acima, vem:

$$\Delta L^2 - \left(\frac{2.mg}{k}\right).\Delta L - \frac{3m^2g^2}{k^2} = 0$$

Resolvendo a equação do 2o grau acima na variável ΔL, encontramos uma solução negativa (que não convém) e uma solução positiva:

$$\Delta L = \frac{3mg}{k} \quad \textbf{(eq2)}$$

Entretanto, segundo o enunciado, o bloco encontra-se inicialmente na posição de equilíbrio (posição em que o peso da caixa é equilibrado pela força elástica P = Fel) e recebe uma compressão extra Δx a ser determinada.

Ora, na posição inicial de equilíbrio inicial (não mostrada na figura), antes de receber a compressão extra, a mola já apresentava uma deformação x_o tal que:

$$Fel = P \quad \Rightarrow \quad k.x_o = m.g \quad \Rightarrow \quad x_o = \frac{mg}{k} \quad \textbf{(eq3)}$$

Em seguida, recebe uma compressão Δx extra, de forma a acumular uma compressão total ΔL (dada por eq2) suficiente para que a caixa debaixo perca o contato com o solo. Assim, vem:

$$\Delta L = x_o + \Delta x \quad \Rightarrow \quad \frac{3mg}{k} = x_o + \frac{mg}{k} \quad \Rightarrow \quad x_o = \frac{2mg}{k}$$

À rigor, essa compressão extra determinada acima torna apenas iminente o descolamento da caixa em relação ao solo. Para que a caixa efetivamente salte, devemos ter uma compressão extra superior a esta.

Questão 93 – Resposta: h = 11,1 m

Questão 94

Solução: Nessa classe de problemas, considera-se que a mola seja todo o conjunto do fio juntamente com o trecho helicoidal. A energia cinética do cursor será máxima onde a energia potencial elástica do sistema for mínima (deformação mínima da mola), o que ocorrerá quando o cursor passar pela posição central D (Figura 2).

Determinando z na Figura 1:

Pitágoras : $z^2 = 125^2 + 300^2 \Rightarrow z = 325$ mm

Na figura 1, a mola apresenta uma deformação inicial x_i dada por:

$$x_i = L - L_o = (300 + 125 + 325) - 500 \Rightarrow x_i = 250 \text{ mm}$$

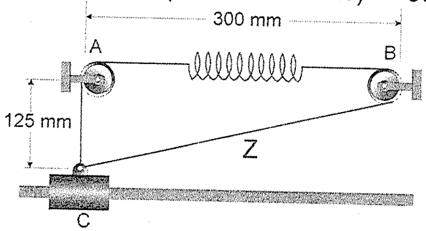


Figura s23

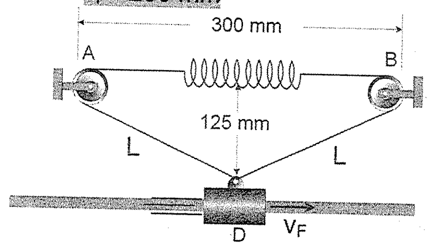


Figura s24

Determinando L na Figura 2:

Pitágoras : $L^2 = 125^2 + 150^2 \Rightarrow L \cong 195{,}25$ mm

Na figura 2, a mola apresenta uma deformação final x_F dada por:

$$x_F = L - L_o = (300 + 195{,}25 + 195{,}25) - 500 \Rightarrow x_F \cong 190{,}5 \text{ mm}$$

Pela conservação da energia mecânica entre as posições inicial e final, temos:

$$(E_{pot} + E_{cin})_i = (E_{pot} + E_{cin})_F$$

$$m.g.H_i + \frac{K.x_i^2}{2} + \frac{m.(v_i)^2}{2} = m.g.H_F + \frac{K.x_F^2}{2} + \frac{m.(v_F)^2}{2}$$

Sendo $H_i = H_F = 0$, $v_i = 0$, $k = 300$ N/m e $m = 0{,}8$ kg, temos:

$$0 + \frac{300.(0{,}25)^2}{2} + 0 = 0 + \frac{300(0{,}1905)^2}{2} + \frac{0{,}8.(v_F)^2}{2} \Rightarrow v_F = 3{,}13 \text{ m/s}$$

Questão 95 – Resposta: $v_o = 67{,}3$ cm/s

Questão 96

Solução: A caixa é abandonada da posição inicial e desce até comprimir a mola 25 cm e novamente parar na posição final. Tomaremos essa posição final como a referência para a energia potencial gravitacional ($H_F = 0$). Durante a descida da caixa, as forças não conservativas que agem nela são a normal N e a força de atrito cinético.

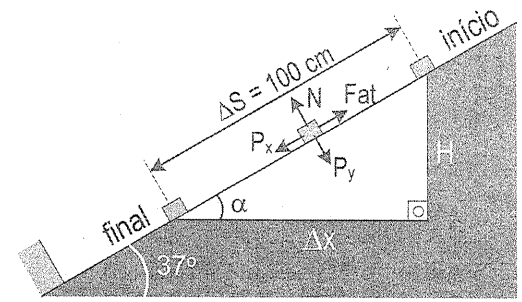
Aplicando o Principio do Trabalho das forças não-conservativas entre as posições inicial e final, temos:

$$\Sigma T_{FNC} = Emec_{\,Final} - Emec_{\,inicial}$$

$$T_{FAT} + T_{Normal} = (E_{pot} + E_{cin})_F - (E_{pot} + E_{cin})$$

O trabalho realizado pela força de atrito T_{FAT}, desde a posição inicial até a posição final, pode ser facilmente calculado pelo *Princípio da Projeção do prof. Renato Brito* (relação eq5, página 41):

$$T_{FAT} = -\mu.m.g.(\Delta x) = -\mu.m.g.(\Delta s.\cos\alpha)$$



Assim, durante a descida, temos:

$$T_{FAT} + T_{Normal} = (E_{pot} + E_{cin})_F - (E_{pot} + E_{cin})_i$$

$$T_{FAT} + T_{Normal} = \left[m.g.H_F + \frac{K.x_F^2}{2} + \frac{m.(v_F)^2}{2}\right] - \left[m.g.H_i + \frac{K.x_i^2}{2} + \frac{m.(v_i)^2}{2}\right]$$

Sendo $H_F = 0$, $H_i = H = \Delta s.\text{sen}\alpha = 100.(0{,}6) = 60$ cm $= 0{,}6$ m, $v_i = v_F = 0$, $x_i = 0$ e $x_F = 25$ cm $= 0{,}25$ m, temos:

$$-\mu.m.g.(d.\cos\alpha) + 0 = \left[0 + \frac{K.(x_F)^2}{2} + 0\right] - \left[m.g.H + 0 + 0\right]$$

$$-(0{,}5).m.10.(1).(0{,}8) = \frac{160.(0{,}25)^2}{2} - m.(10)(0{,}6)$$

$$2m = 5 \Rightarrow m = 2{,}5 \text{ kg}$$

Questão 97

Solução: Na posição inicial, a mola encontra-se comprimida e apresenta uma deformação inicial $x_i = d$. Já na posição final, a mola encontra-se elongada e apresenta uma deformação final $x_F = x = (D - d)$. Tomaremos essa posição final como a referência para a energia potencial gravitacional ($H_{Final} = 0$).

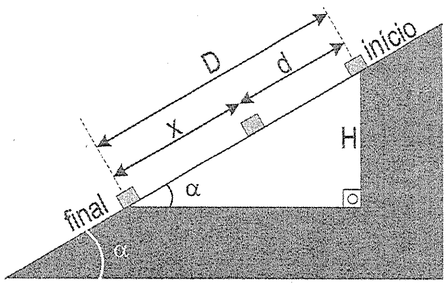
A caixa parte do repouso ($v_i = 0$) na posição inicial e pára ao atingir a posição final ($v_F = 0$). Pela conservação da energia mecânica, temos:

$$(Epot + Ecin)_i = (Epot + Ecin)_F$$

$$M.g.H_i + \frac{K.x_i^2}{2} + \frac{M.(v_i)^2}{2} = M.g.H_F + \frac{K.x_F^2}{2} + \frac{M.(v_F)^2}{2}$$

Sendo $x_i = d$, $x_F = D - d$, $v_i = v_F = 0$, $H = D.sen\alpha$, $H_F = 0$, vem:

$$M.g.D.sen\alpha + \frac{K.d^2}{2} + 0 = 0 + \frac{K.(D-d)^2}{2} + 0$$



$$\frac{K}{2}.(D^2 - 2.D.d + d^2) - \frac{K.d^2}{2} - M.g.D.sen\alpha = 0$$

Reduzindo os termos semelhantes e isolando o valor da distância D pedida, encontramos:

$$D = 2d + \frac{2M.g.sen\alpha}{K}$$

Questão 98 – Resposta: d = 40 cm

Questão 99 – Resposta: 6 m/s

Questão 100

Solução: Quando a mola externa sofrer uma deformação δ, a mola interna estará sofrendo uma correspondente deformação $x = \delta - d$.

Aplicando a conservação da energia mecânica desde a posição inicial (na qual nenhuma mola estava comprimida) até a posição final (na qual a caixa já se encontra momentaneamente em repouso), temos:

$$(Epot + Ecin)_i = (Epot + Ecin)_F$$

$$\frac{m.(v_i)^2}{2} = \frac{K_1.x^2}{2} + \frac{K_2.\delta^2}{2}$$

Sendo m = 1,2 kg e $\delta = 0{,}5$ m, temos:

$$\frac{1{,}2.(5)^2}{2} = \frac{50.x^2}{2} + \frac{88.(0{,}5)^2}{2} \Rightarrow x = 0{,}4 \text{ m} = 400\text{mm}$$

Entretanto, $x = \delta - d \Rightarrow d = \delta - x = 500\text{mm} - 400\text{ mm} \Rightarrow d = 100\text{ mm}$

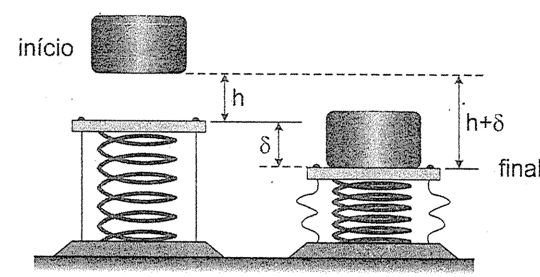
Questão 101

Solução: Pela conservação de energia mecânica entre as posições inicial e final, temos:

$$(Epot + Ecin)_i = (Epot + Ecin)_F$$

$$m.g.H_i + \frac{K.x_i^2}{2} + \frac{m.(v_i)^2}{2} = m.g.H_F + \frac{K.x_F^2}{2} + \frac{m.(v_F)^2}{2}$$

Note que, na posição inicial da caixa, a mesma encontra-se em repouso ($v_i = 0$) e a mola apresenta uma pré-deformação inicial $x_i = x_o = 50$ mm $= 0{,}05$ m. Na posição final, a mola acumulará uma deformação total $x_F = x_o + \delta = (0{,}05 + \delta)$ e a caixa estará novamente em repouso $v_F = 0$.



Adotando o nível de referencia para Epot gravitacional na posição final, teremos $H_F = 0$ e $H_i = 100\text{mm} + \delta = (0{,}1 + \delta)$. Substituindo na conservação de energia, vem:

$$m.g.H_i + \frac{K.x_i^2}{2} + 0 = 0 + \frac{K.x_F^2}{2} + 0$$

$$6.(10).(0,1+\delta) + \frac{4000.(0,05m)^2}{2} + 0 = 0 + \frac{4000.(0,05+\delta)^2}{2} + 0$$

Reduzindo os termos semelhantes, encontramos a equação:

$$2000.\delta^2 + 140.\delta - 6 = 0$$

$$\delta = \frac{-140 \pm \sqrt{67600}}{4000} \Rightarrow \boxed{\delta = 0,03\ m = 30\ mm}$$

Uma solução negativa ($\delta = -0,1$ m) sem significado físico também é encontrada.

Questão 102 – Resposta: 75 mm

Questão 103

Solução: Quando a polia descer 5 cm, a mola sofrerá um "aumento de deformação" de 10 cm. Assim, a deformação da mola passará de $x_i = 10$ cm para $x_f = 10 + 2{\cdot}5 = 20$ cm. Assim, teremos:

$K.(x_i)^2/2 + M.g.h = K.(x_f)^2/2 + M.v^2/2$, com $x_i = 10$ cm e $x_f = 20$ cm.

A altura h logicamente vale 5 cm. Resolvendo essa equação da conservação da energia mecânica, você encontrará $v = 0,5$ m/s.

Questão 104 – Resposta: 2 m/s

Sugestão de solução:

$$\Sigma T_{FNC} = Emec_{\,Final} - Emec_{\,inicial}$$

$$T_F = (Epot + Ecin)_F - (Epot + Ecin)$$

$$F.\cos\alpha.H = \left(m.g.H + \frac{K.x_F^2}{2} + \frac{m.v^2}{2}\right) - \left(\frac{K.x_i^2}{2}\right)$$

Questão 105

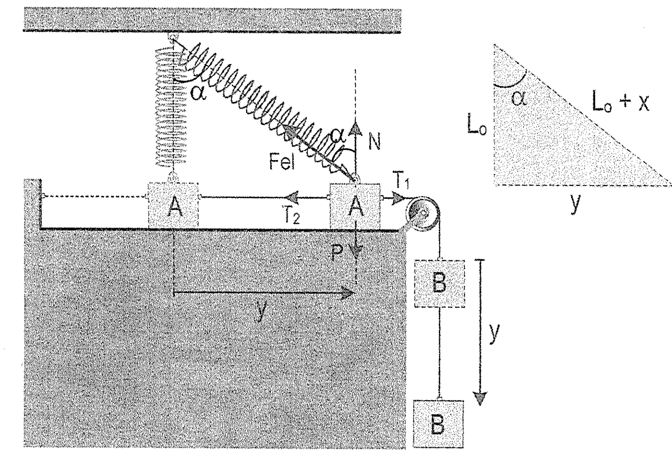
Solução: Seja y a distância que a caixa A percorre na horizontal até perder o contato (N = 0) com o plano. O equilíbrio vertical da caixa A na posição final nos permite escrever:

$Fel.\cos\alpha + N = P$, com $N = 0$, $Fel = k.x$ com $k = 5m.g/L_o$

$$k.x.\cos\alpha + 0 = m.g \Rightarrow \left(\frac{5.mg}{L_o}\right).x.\cos\alpha = m.g \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{L_o}{5x}} \quad \textbf{(eq1)}$$

Entretanto, do triângulo retângulo em destaque, temos:

$$\cos\alpha = \frac{L_o}{L_o + x} \overset{(eq1)}{=} \frac{L_o}{5x} \Rightarrow L_o = 4x \Rightarrow \boxed{x = \frac{L_o}{4}} \quad \textbf{(eq2)}$$



Usando Pitágoras, encontramos $\boxed{y = \frac{3L_o}{4}}$ **(eq3)**

Logicamente, o deslocamento $y = 3L_o/4 \rightarrow$ da caixa A na horizontal proporciona um deslocamento idêntico $y = 3L_o/4 \downarrow$ à caixa B na vertical, visto que os fios são inextensíveis.

Pela conservação de energia mecânica do sistema, entre as posições inicial e final, temos:

$$(Epot + Ecin)_{\,inicial} = (Epot + Ecin)_{\,final}$$

Como a caixa A não sofre variação de energia potencial gravitacional, computaremos apenas a Epot gravitacional da caixa B. Note que, conforme o enunciado, a mola apresenta deformação inicial $x_i = 0$. Sua deformação final vale $x_F = x = L_o/4$ conforme eq2. Além disso, as caixas partem do repouso $v_i = 0$.

$$(Epot + Ecin)_{\,inicial} = (Epot + Ecin)_{\,final}$$

$$m_B.g.H_i + \frac{K.x_i^2}{2} + \frac{m_A.(v_i)^2}{2} + \frac{m_B.(v_i)^2}{2} = m_B.g.H_F + \frac{k.x_F^2}{2} + \frac{m_A.(v_F)^2}{2} + \frac{m_B.(v_F)^2}{2}$$

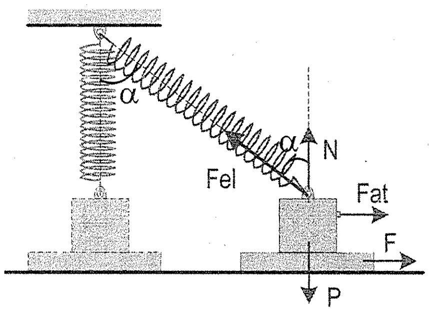
$$m.g.\left(\frac{3L_o}{4}\right) + 0 + 0 + 0 = m.g.(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{5m.g}{L_o}\right)\left(\frac{L_o}{4}\right)^2 + \frac{m.(v)^2}{2} + \frac{m.(v)^2}{2}$$

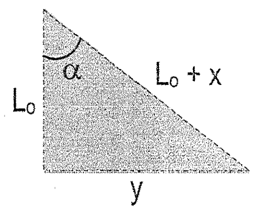
$$\frac{3.mg.L_o}{4} = \frac{5m.g.L_o}{32} + m.v^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{19.g.L_o}{32}}}$$

Questão 106

Solução: Da geometria no triângulo retângulo, vem:

$$\cos\alpha = 0{,}8 = \frac{L_o}{L_o + x} = \frac{2}{2+x} \Rightarrow \boxed{x = 0{,}5\ m} \qquad \textbf{(eq1)}$$





Equilíbrio vertical: $N + Fel.\cos\alpha = P \Rightarrow \boxed{N = P - Fel.\cos\alpha}$ **(eq2)**

Equilíbrio horizontal + iminência de escorregar : $Fel.\text{sen}\alpha = Fat_{Max} = \mu.N$.

Usando eq2, vem: $k.x.\text{sen}\alpha = \mu.(m.g - k.x.\cos\alpha)$

$$k = \frac{\mu.mg}{x.(\text{sen}\alpha + \mu.\cos\alpha)} = \frac{(0{,}5).8.10}{0{,}5.(0{,}6 + 0{,}5.0{,}8)} = 80\ N/m$$

Usando o Principio do Trabalho Total (teorema da energia cinética) para o bloco, temos:

$$T_{Total} = \sum_{todos} T = T_N + T_{Peso} + T_{Fat} + T_{Fel} = Ecin_F - Ecin_i$$

$$T_N + T_{Peso} + T_{Fat} + T_{Fel} = Ecin_F - Ecin_i$$

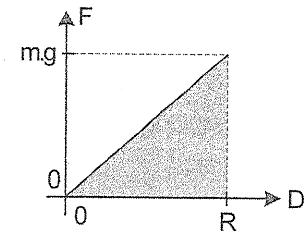
$$0 + 0 + T_{Fat} + \left(\frac{k.x_i^2}{2} - \frac{k.x_F^2}{2}\right) = Ecin_F - Ecin_i$$

O bloco encontra-se em repouso tanto na posição inicial quanto na posição final ($Ecin_F = Ecin_i = 0$). A mola apresenta deformação inicial nula $x_i = 0$ e deformação final $x_F = 0{,}5$ m conforme eq2. Substituindo, vem:

$$0 + 0 + T_{Fat} + \left(0 - \frac{80.(0{,}5)^2}{2}\right) = 0 - 0 \Rightarrow \boxed{T_{Fat} = +\ 10J}$$

Questão 107

Solução: De acordo com o enunciado, o corpo abandonado na entrada desse poço estará submetido a uma força gravitacional F cuja intensidade varia linearmente em função da distância D ao centro da Terra de acordo com o gráfico abaixo.



Assim, o trabalho realizado pela força gravitacional, no deslocamento da pedra desde a superfície (D = R) até o centro da Terra (D = 0) é dado pela área hachurada sob o gráfico:

$$T_{Fgrav} \overset{n}{=} \text{área} = \frac{b \times h}{2} = \frac{R \times m.g}{2} = \frac{mgR}{2}$$

Usando o Principio do Trabalho Total (teorema da energia cinética) para essa pedra nesse deslocamento, temos:

$$T_{Total} = \sum_{todos} T = T_{Fgrav} = Ecin_F - Ecin_i \Rightarrow$$

$$\frac{mgR}{2} = \frac{m.v^2}{2} - 0 \Rightarrow v = \sqrt{R.g} = \sqrt{(6{,}4 \times 10^6 m).(10\ m/s^2)}$$

$$v = 8 \times 10^3\ m/s = 8\ km/s$$

A pedra atingirá o centro da Terra com uma velocidade v = 8 km/s.

Questão 108 – 1ª solução - Usando a equação de Torricelli generalizada

Para resolver esse problema, encontremos rapidamente as acelerações inicial e final dessa corrente nesse episódio. Para uma rápida analogia, considere o cálculo abaixo da aceleração do sistema mostrado na Figura s25 semelhante ao proposto na questão 108 página 115:

$F_{RB} = (m_B.g.\text{sen}\alpha - T) = m_B.a$

$F_{RC} = T = m_C.a$

Somando, membro a membro, vem:

$$m_B.g.\text{sen}\alpha = (m_B + m_C).a \Rightarrow a = g.\text{sen}\alpha.\left(\frac{m_B}{m_B + m_C}\right)$$

Na expressão obtida acima, o termo entre parênteses é a razão entre a massa $\mathbf{m_B}$ da caixa sobre a rampa e a massa total $\mathbf{m_B + m_C}$ do sistema. *Sendo a massa da corrente diretamente proporcional ao seu comprimento*, esse termo equivale à razão entre o comprimento da corrente (x) sobre a rampa (Figura s26) e o seu comprimento total (L).

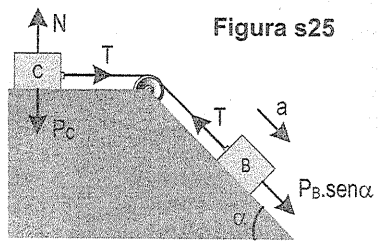


Figura s25

Dessa forma, a aceleração dessa corrente da questão 108 (Figura s26) é dada por:

$$a = g.\text{sen}\alpha.\left(\frac{x}{L}\right) \qquad \textbf{(eq3)}$$

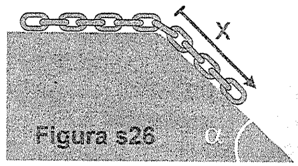


Figura s26

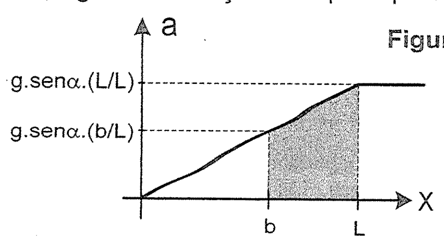
sendo, portanto, uma função linear de x.

A relação eq3 é válida apenas no intervalo $0 \le x \le L$. Para $x > L$, a corda já se encontrará integralmente sobre a rampa inclinada e sua aceleração se manterá constante valendo $a = g.\text{sen}\alpha$. Dessa forma, uma expressão mais completa para descrever matematicamente a aceleração da corda é:

$$a = \begin{cases} g.\text{sen}\alpha.\left(\frac{x}{L}\right), & \text{para } 0 \le x \le L \\ g.\text{sen}\alpha, & \text{para } x > L \end{cases} \qquad \textbf{(eq4)}$$

Durante o episódio dessa questão 108 página 115, o comprimento x da parte pendente sobre a rampa varia desde o comprimento inicial $x_i = b$ até o comprimento final $x_F = L$. Assim, o gráfico da função dada por eq3 será:

Figura s27



A área sombreada sob o gráfico (Figura s27) pode ser calculada pela diferença entre as áreas dos dois triângulos:

$$\text{área sombreada} = \frac{b \times g.\text{sen}\alpha.\frac{b}{L}}{2} - \frac{L \times g.\text{sen}\alpha.\frac{L}{L}}{2} = \frac{(L^2 - b^2).g.\text{sen}\alpha}{2L}$$

Usando a equação de Torricelli generalizada (eq2), vem:

$V^2 = V_o^2 + 2.(\text{área})$

$$V^2 = 0 + 2 \times \frac{(L^2 - b^2).g.\text{sen}\alpha}{2L} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{(L^2 - b^2).g.\text{sen}\alpha}{L}} \qquad \textbf{(eq5)}$$

A expressão acima fornece a velocidade da corda no instante em que o comprimento pendente x sobre a rampa (Figura s26) atingir o seu comprimento total L.

Questão 108 – 2ª solução – Pela conservação da energia mecânica.

Esse problema também pode ser resolvido pela conservação da energia mecânica do sistema, dividindo a corrente em duas partes **a** e **b** e considerando o centro de massa de cada uma dessas partes como na Figura s28.

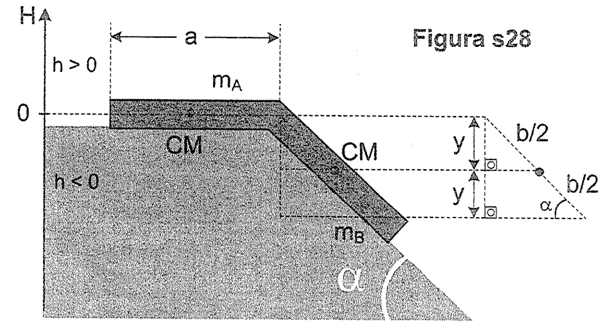


Figura s28

A parte sobre o plano horizontal tem massa $\mathbf{m_A}$ e comprimento **a**, enquanto a parte sobre a rampa inclinada tem massa $\mathbf{m_B}$ e comprimento **b**. Logicamente que a massa total da corda (corrente) vale $\mathbf{m = m_A + m_B}$, assim como seu comprimento total vale $\mathbf{L = a + b}$. A proporcionalidade entre a massa da corda e seu comprimento nos permite escrever:

$$\frac{m_A}{a} = \frac{m_B}{b} = \frac{m_A + m_B}{a+b} = \frac{m}{L} \Rightarrow m_B = m.\frac{b}{L} \qquad \textbf{(eq6)}$$

Na situação inicial (Figura s28), toda a corda encontra-se em repouso $Ecin_A = Ecin_B = 0$. Adotando-se o nível de referencia para Epot. gravitacional no plano horizontal (Figura s28), a parte **a** da corda (corrente) tem Epot. gravitacional nula ($m.g.H_A = 0$) ao passo que o trecho **b** da corda tem seu centro de massa CM a uma altura $y = (b/2).\text{sen}\alpha$ abaixo do nível de referência, portanto, o trecho b terá energia potencial gravitacional $Epot_B = -m_B.g.y = -m_B.g.(b/2).\text{sen}\alpha$.

Assim, a energia mecânica da corda, na situação inicial, vale:

$Emec_i = (Epot_A + Ecin_A + Epot_B + Ecin_B)_i$

$Emec_i = 0 + 0 - m_B.g.(b/2).\text{sen}\alpha + 0$ **(eq7)**

A seguir a corda escorregará gradativamente até que, na situação final, a extremidade esquerda da corda terá atingido a rampa, como mostra a Figura s29. Nesse instante, toda a corda se move com a mesma velocidade v ao longo da rampa e seu centro de massa encontra-se a uma altura y = (L/2).senα abaixo do nível de referencia, portanto, a Epot. gravitacional da corda vale:

$$Epot = -m.g.y = -m.g.(L/2).\text{sen}\alpha.$$

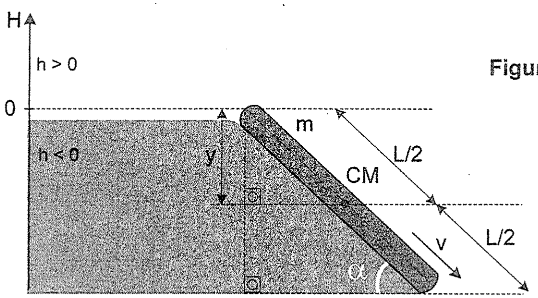


Figura s29

A energia mecânica da corda na situação final, portanto, vale:

$$Emec_F = (Epot + Ecin)_F = \boxed{-m.g.(L/2).\text{sen}\alpha + \frac{m.v^2}{2}} \quad \textbf{(eq8)}$$

Pela conservação da Energia mecânica da corda, entre as posições inicial e final, usando eq6, eq7 e eq8, temos:

$$-m_B.g.\frac{b}{2}\text{sen}\alpha = -m.g.\frac{L}{2}\text{sen}\alpha + \frac{m.v^2}{2}, \text{ usando eq6, vem:}$$

$$-\left(m.\frac{b}{L}\right)g.\frac{b}{2}\text{sen}\alpha = -m.g.\frac{L}{2}\text{sen}\alpha + \frac{m.v^2}{2}$$

$$v^2 = \frac{L^2}{L}.g.\text{sen}\alpha - \frac{b^2}{L}.g.\text{sen}\alpha \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{\frac{(L^2-b^2).g.\text{sen}\alpha}{L}}}$$

que é o mesmo resultado encontrado eq5 anteriormente. Dependendo do tipo de problema a ser resolvido, a 1ª solução apresentada fazendo uso da equação de Torricelli generalizada pode ser mais concisa do que a solução usando conservação de energia mecânica.

Questão 109) $V = \sqrt{\dfrac{g.(L^2-b^2)}{L}}$

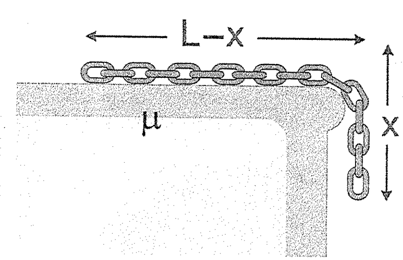
Questão 110) B

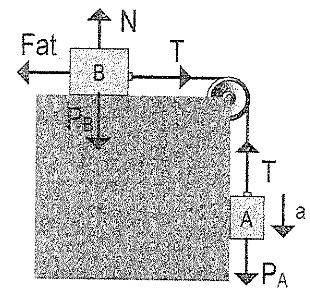
Questão 111) $v = 2\sqrt{\dfrac{gL}{3}}$

Dica: A corda tem aceleração inicial $a_i = g/3$ e aceleração final $a_F = g$. Nesse meio tempo, a corda sofre um deslocamento $\Delta x = L$. Faça o gráfico linear da aceleração escalar em função do deslocamento escalar x e use a equação de Torricelli generalizada. Se preferir, use conservação de energia mecânica, atentando para o centro de massa CM dos trechos da corda.

Questão 112 –solução - Usando a equação de Torricelli generalizada

A fim de determinar a aceleração a do sistema em função do comprimento x pendente da corrente, desenhamos um sistema análogo, onde o trecho vertical de comprimento **x** foi substituído por uma caixa de peso igual $\mathbf{P_A = m_A.g}$ e o trecho de comprimento **L–x** foi substituído por uma caixa de mesmo peso $\mathbf{P_B = m_B.g}$.





Aplicando a 2ª lei de Newton a cada bloco, temos:

$F_{RA} = P_A - T = m_A.a$ **(eq1)**

$F_{RB} = T - Fat = m_B.a$, com $Fat = \mu.N = \mu.P_B = \mu.m_B.g$

$F_{RB} = T - \mu.m_B.g = m_B.a$ **(eq2)**

Somando eq1 e eq2, membro a membro, vem:

$$m_A.g - \mu.m_B.g = (ma+m_B).a \Rightarrow \boxed{a = \frac{m_A.g}{(m_A+m_B)} - \frac{\mu.m_B.g}{(m_A+m_B)}} \quad \textbf{(eq3)}$$

Entretanto, a massa de cada trecho da corrente é proporcional ao seu comprimento, o que nos permite escrever:

$$\boxed{\frac{m_A}{x} = \frac{m_B}{L-x} = \frac{m_A+m_B}{L}} \quad \textbf{(eq4)}$$

Substituindo eq4 em eq3, determinamos a aceleração da corrente em função de x:

$$a = \frac{m_A.g}{(m_A+m_B)} - \frac{\mu.m_B.g}{(m_A+m_B)} = \frac{x.g}{L} - \frac{\mu.(L-x).g}{L} \Rightarrow \boxed{a = \frac{g.[x.(1+\mu)-\mu L]}{L}} \quad \textbf{(eq5)}$$

A expressão obtida em eq5 mostra claramente que a aceleração da corrente é uma função linear do comprimento x pendente, portanto, seu gráfico será uma reta.

Fazendo x = b, na relação eq5, determinamos a aceleração inicial da corrente:

$$\boxed{a_i = \frac{g.[b.(1+\mu)-\mu L]}{L}} \quad \textbf{(eq6)}$$

Logicamente, quando o último elo da corda estiver perdendo o contato com a mesa, toda a corrente estará na vertical e sua aceleração final valerá $a_F = g$. Podemos confirmar isso fazendo x = L na relação eq5:

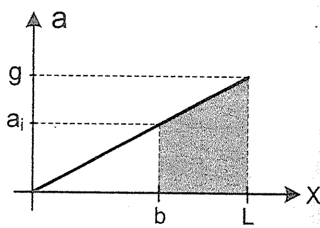
$$a_F = \frac{g.\left[L.(1+\mu)-\mu L\right]}{L} = \frac{g.\left[L + \mu L - \mu L\right]}{L} \Rightarrow a_F = g \quad \textbf{(eq7)}$$

Assim, desde a posição inicial até a posição final, a corrente sofrerá um deslocamento escalar L–b e o gráfico da sua aceleração em função do comprimento pendente x (relação eq5) é mostrado abaixo:

A área sombreada no gráfico é dada por:

$$\text{área} = \frac{(a_i+g)(L-b)}{2} \quad \textbf{(eq8)}$$

com a_i dado pela relação **eq6.**



A equação de Torricelli generalizada nos permite escrever:

$$v^2 = v_o^2 + 2.(\text{área})$$

$$v^2 = 0^2 + 2.\frac{(a_i+g)(L-b)}{2}, \qquad \text{com } a_i = \frac{g.\left[b.(1+\mu)-\mu L\right]}{L}$$

Substituindo a expressão de a_i e reduzindo os termos semelhantes, encontraremos:

$$v = \sqrt{\frac{g}{L}.(L-b).\left[b.(1+\mu) + L.(1-\mu)\right]} \quad ☺$$

Note que, para $\mu = 0$, o resultado obtido acima coincide com o resultado da questão 109 ☺.

Questão 113) Resposta: $v = \sqrt{\dfrac{g.L}{1+\mu}}$

Dica: Mostre que a aceleração da corda aumenta linearmente desde **0** até **g**, ao escorregar uma distância $L/(1+\mu)$. Em seguida, use a equação de Torricelli generalizada.

Questão 114) $v = \sqrt{\dfrac{2F}{\lambda} - \mu g L}$

Dica: Mostre que a força resultante agindo sobre a corrente, em função de x, vale $F_R = F - \mu(L-x).\lambda.g$. Faça o gráfico da força resultante F_R em função de x e calcule a área sob o gráfico para determinar o trabalho realizado pela força resultante F_R. Use o Princípio do Trabalho total para determinar a velocidade final da corrente. Outra solução alternativa é fazer uso da equação de Torricelli generalizada.

Questão 115 – Respostas: a) 7 b) 50N c) 1,4 m/s d) 70 J/s = 70W

Dica: veja exemplo resolvido 14 na página 71.

Questão 116 Respostas: a) 5 b) 60N c) 1 m d) 60 J/s = 60W

Questão 117 - Respostas

a) $H_{max} = \dfrac{v_o^2}{2.g.\left(1+\dfrac{f}{p}\right)}$

Dica: Note que a força dissipativa f, a exemplo de uma força de atrito, sempre aponta contrária ao movimento do corpo, isto é, mesma direção e sentido contrário da velocidade do corpo. Assim, na subida a força f aponta para baixo v↑, f↓, p↓, e na descida f aponta para cima v↓, f↑, p↓. Ela realiza trabalho negativo durante todo o percurso da bolinha. A altura pode ser facilmente encontrada pelo princípio do trabalho das forças não conservativas $T_{FNC} = T_f = Emec_F - Emec_i$. Tome a posição inicial como sendo a bola no solo no início da subida e, a posição final novamente no solo quando a bola está chegando de volta. o final da descida. O trabalho da força f no percurso total será –f.H na subida e –f.H na descida, ou seja, $T_f = -2.f.H$ no percurso todo ida e volta.

b) $v = v_o.\left(\dfrac{p-f}{p+f}\right)^{\frac{1}{2}}$

Dica: Aplique mais uma vez o princípio do trabalho das forças não conservativas no percurso todo ida e volta. Lembre-se que a altura máxima atingida pela bola será aproveitada do resultado do item a. ☺

Questão 118

Solução:

a) Do gráfico da altura H em função do tempo, podemos extrair a altura da pedrinha nos últimos segundos da queda:

H(m)	40	30	20	10	0
t(s)	7	8	9	10	11

Observando a tabela acima, vemos que a pedra percorre 10 m na vertical a cada 1 s, durante os instantes que antecedem seu impacto com o solo, o que nos permite concluir que a pedrinha atinge uma velocidade terminal (velocidade limite) v = 10 m/s durante essa queda.

b) Quando a velocidade limite do corpo é atingida durante a queda, o seu peso é equilibrado pela força de resistência do ar, isto é, ↓ P = K.v ↑ e, a partir desse ponto o corpo prossegue caindo em movimento uniforme. Assim, do equilíbrio das forças, vem:

$P = K.v \Rightarrow m.g = K.v$

$50.10^{-3}\text{ kg} . 10\text{ m/s}^2 = K.10\text{ m/s}$

$K = 5 \times 10^{-2}\text{ kg/s}$

c) Embora a força de resistência do ar $F_{resis} = K.v$ tenha intensidade variável durante a cada da pedrinha, podemos calcular o trabalho realizado por ela indiretamente, fazendo uso de qualquer um dos princípios de energia, tal como o Principio do Trabalho realizado pelas forças não-conservativas:

$$\Sigma T_{FNC} = Emec_{\,Final} - Emec_{\,inicial}$$

$_{F\ resistência} = (Epot + Ecin)_F - (Epot + Ecin)$

$$_{F\ resistência} = \left[m.g.H_F + \frac{m.(v_F)^2}{2} \right] - \left[m.g.H_i + \frac{m.(v_i)^2}{2} \right]$$

$$_{F\ resistência} = \left[0 + \frac{(50.10^{-3}).(10)^2}{2} \right] - \left[(50.10^{-3}).(10).(100) + 0 \right]$$

$T_{F\ resistência} = -47{,}5\ J$

---

uestão 119) a) –2000 J b) 0 J (o trabalho total é nulo pois a variação da nergia cinética é nula nesse trecho)

---

uestão 120) a) $\sqrt{8\pi\mu Rg}$, b) $2\sqrt{\dfrac{\pi R}{\mu g}}$, c) $-\mu mg(2\pi R)$

---

uestão 121) B

cas:

$\frac{.(10V)^2}{2} = m.g.(9d)$ **(eq1),** $\frac{m.(10V)^2}{2} = m.g.(4d) + (fat\ .\ x)$ **(eq2)**

$\frac{.(10.V')^2}{2} = m.g.(9d) + (fat\ .\ y)$ **(eq3) ,** semelhança de triângulos: $\frac{x}{4} = \frac{y}{9}$ **(eq4)**

olando o fat em eq2, substituindo em eq3, misturando com eq1, vem **V' = 15V**

---

uestão 122) a) F = 25 – 0,8.h no SI, b) 210 J, c) 10,5 W, d) 10,1 W

ca: veja exemplo resolvido 20 na página 82

---

uestão 123) a) 300W b) 500W c) 2,5 A d) 200W

ca: veja exemplo resolvido 18 na página 79

---

uestão 124) a) 1200 W, b) 60%

uestão 125) D

uestão 126) 52 s

uestão 127) 50 litros

uestão 128) 300w

uestão 129) 2A

---

uestão 130) Respostas: T = 2600 N, Potência = 5200 W

olução:

Na figura, o contrapeso desce com velocidade constante, portanto temos:

$T_C = P_C = m_C.g = 900_x10 = 9000$ N

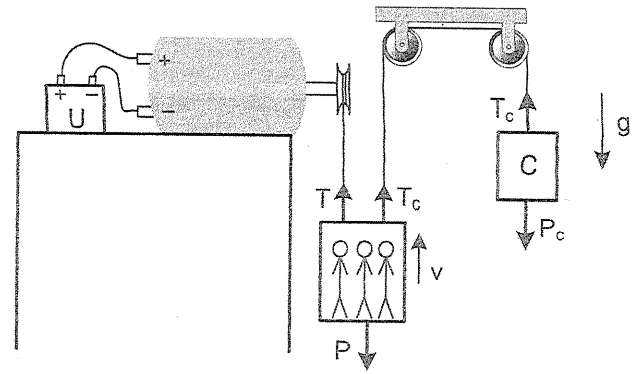
$T_C = 9000$ N

Na figura, P é o peso dos 3 passageiros, somado ao peso do elevador, ou seja:

$P = (m_a + m_b + m_c + m_{elev}).\ g = (1000 + 40 + 50 + 70).\ 10 = 11600N$

Como o elevador sobe com velocidade constante, podemos escrever:

$T + T_C = P \Rightarrow T + 9000 = 11600 \Rightarrow T = 2600\ N$



- A potência desenvolvida por uma força é dada por Pot = F. v. Assim, a potência desenvolvida pelo motor será a potência da força que ele aplica ao elevador, isto é, a potência desenvolvida pela tração T:

Potência da tração T = T_x v = 2600 N_x 2 m/s = 5200 w

Questão 131) a) 40.000W, b) 48.000W

Questão 132) Resposta: letra A

Solução:

$F_R = T - P = m.a$, com a = g

$T - mg = m.g \Rightarrow T = 2.m.g$ **(eq1)**

$V = V_o + a.t = 0 + g.t \Rightarrow V = g.t$ **(eq2)**

$Pot = T.\ V = (2.mg).(g.t) \Rightarrow Pot = 2.m^2.g^2.t$

Questão 133) Resposta: 4 m/s

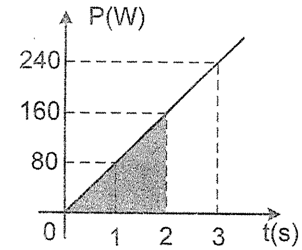
Solução:

$\Sigma T_{FNC} = Emec_{\ Final} - Emec_{\ inicial}$

$T_F + T_{Fat} = (Epot + Ecin)_F - (Epot + Ecin)$

$$T_F + T_{Fat} = \left[m.g.H_F + \frac{m.(v_F)^2}{2} \right] - \left[m.g.H_i + \frac{m.(v_i)^2}{2} \right]$$

O trabalho T_F realizado pela força F no intervalo [0s, 2s] é calculado pela área sob o gráfico da potência.



O trabalho realizado pela força de atrito pode ser calculado pelo Princípio da projeção (página 41):

$$T_{Fat} = -\mu.m.g.\Delta x = -\mu.m.g.(H.cotg\alpha)$$

Substituindo, vem:

$$\frac{b \times h}{2} + (-\mu.m.g.H.cotg\alpha) = \left[m.g.H_F + \frac{m.(v_F)^2}{2} \right] - [\,0 + 0\,]$$

$$\frac{2 \times 160}{2} - 0{,}25.(4).(10).(2{,}4).(4/3) = 4.(10).(2{,}4) + \frac{4.(v_F)^2}{2}$$

$v_F = 4$ m/s

Questão 134) Respostas: a) 8750W, b) 2100 J, c) sim, 262,5 W

Solução:

a) $pot = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{m.g.H}{\Delta t} = \frac{(100 \times 70kg).10.(7{,}5)}{60} \Rightarrow$ Pot = 8750 W

b) O homem percorre 12 m de escada em 8s, desenvolvendo, portanto, uma velocidade 12/8 = 1,5 m/s em relação à Terra (na direção inclinada da escada), dos quais, 0,9 m/s é a velocidade dele em relação à escada e 0,6 m/s é a velocidade da escada em relação a Terra.

Assim, vemos que, de cada 1,5 m que ele se desloca por segundo em relação à Terra, 0,6 m dos 1,5 m é propiciado pelos motores da escada rolante enquanto 0,9 m dos 1,5 m é proporcionado pelas próprias pernas do homem.

Assim, vemos que os motores da escada fornecem 0,6 de 1,5, ou seja, 2/5 da energia requerida para a realização desse trabalho total.

$$\tau_{escada} = \frac{2}{5}.m.g.H = \frac{2}{5}.(70).10.(7{,}5) \Rightarrow \tau_{escada} = 2100J$$

c) A escada por si só se move com velocidade v = 0,6 m/s ↗ na direção inclinada da rampa, percorrendo, portanto, os 12 m ↗ inclinados em 20 s. Em outras palavras, essa escada eleva uma pessoa verticalmente Δy = 7,5 m ↑ em 20 s, o que significa 0,375 m ↑ a cada 1 s. Portanto, se um homem toma essa escada rolante e permanece imóvel em relação a ela, a escada realiza sobre ele, a cada 1 segundo, um trabalho igual a:

$$\tau_{escada} = m.g.\Delta y = 70.(10).(0{,}375m) = 262{,}5 \text{ J}$$

Se o homem sobre a escada se puser a caminhar escada abaixo visando a permanecer sempre numa mesma altura, em relação à Terra, ele terá que produzir um deslocamento vertical para baixo ↓ também de 0,375m em relação à escada a cada 1 segundo, de forma a equilibrar o deslocamento idêntico produzido pela escada em sentido contrário, em relação a Terra. Dessa forma, ele permanecerá sempre numa mesma altura em relação à Terra.

Portanto, nessas circunstâncias em que o homem caminha escada a baixo de forma a se manter numa altura constante em relação à Terra, o motor da escada rolante está realizando trabalho ? **Sim**, o motor da escada está realizando um trabalho de 262,5 J/s que é contrabalanceado por um trabalho contrário de 262,5 J/s realizado pelo homem com o intuito de permanecer sempre numa mesma altura em relação à Terra. Se a escada rolante, por exemplo, fosse subitamente desligada, o homem continuando sua caminhada ao longo da escada passaria a sofrer um deslocamento vertical Δy = 0,375m↓ em relação à Terra a cada 1 s. Portanto, para mantê-lo numa altura constante em relação à Terra, a escada deve estar ligada e desenvolver uma potência de 262,5 W.

Questão 135

Solução:

Seja P a potência constante desenvolvida pela máquina "ciclista+bicicleta" e F a força que a estrada exerce sobre a máquina quando a velocidade vale v. Podemos escrever:

$$P = F.v \Rightarrow F = \frac{P}{v} \quad \textbf{(eq1)}$$

A força total que age na máquina "ciclista+bicicleta", no **trecho horizontal**, vale:

$$F_R = F - k.v^2 \quad \textbf{(eq2)}$$

Entretanto, quando a velocidade limite v = v_1 é atingida, a força resultante sobre a máquina deve ser nula $F_R = 0$ visto que ela desenvolverá um MRU. Usando eq1 e eq2, vem:

$$F_R = F - k.v^2 = 0, \quad \text{com } v = v_1 \text{ e } F = \frac{P}{v}$$

$$\frac{P}{v_1} - k.(v_1)^2 = 0 \Rightarrow k = \frac{P}{(v_1)^3} \quad \textbf{(eq3)}$$

A força total que age na máquina, no **trecho inclinado**, vale:

$$F_R = F - m.g.sen\alpha - k.v^2 \quad \textbf{(eq4)}$$

Entretanto, quando a velocidade limite v = v_2 é atingida, a força resultante sobre a máquina deve ser nula $F_R = 0$ visto que ela desenvolverá um MRU. Usando eq4 e eq1, vem:

$F_R = F - m.g.sen\alpha - k.v^2 = 0$, com $v = v_2$ e $F = \frac{P}{v}$

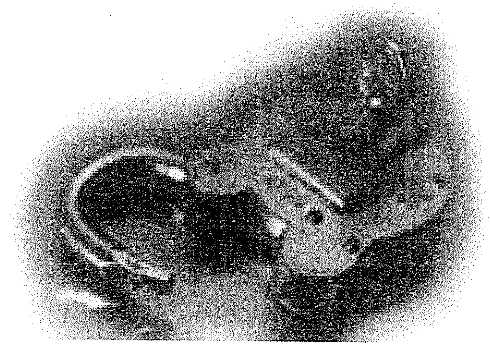
$$\frac{P}{v_2} - mg.sen\alpha - k.(v_2)^2 = 0 \quad \text{com} \quad k = \frac{P}{(v_1)^3} \quad \textbf{(eq3)}$$

$$\frac{P}{v_2} - mg.sen\alpha = \frac{P}{(v_1)^3}.(v_2)^2 \quad \therefore \quad \boxed{P = \frac{mg.sen\alpha}{\left(\frac{1}{v_2} - \frac{v_2^{\,2}}{v_1^{\,3}}\right)}}$$

Questão 136) $v_o = \sqrt{v_1.v_2} = 5$ km/h

Questão 137) 80 kW

Respostas e Soluções



Sistemas de Partículas

Questão 01) Resposta: $\frac{M.V}{M+m}$

Dica: para se certificar de que você realmente visualizou a transferência interna de qdm horizontal no sistema, tente resolver o problema usando também a mesma técnica usada pelo prof. Renato Brito no exemplo resolvido 4, página 143. Isso o ajudará a compreender melhor situações mais complicadas adiante.

Questão 02) Resposta: alternativa e

Comentário: não ocorre nenhuma transferência interna de qdm horizontal entre o carrinho e o bloco, seguindo o mesmo raciocínio do exemplo resolvido 5, página 147.

Questão 03) Resposta: alternativa e

Comentário: parte da qdm horizontal do carrinho é transferida para o bloco, devido ao atrito interno trocado entre eles durante a fase de acoplamento. Para mais detalhes, veja exemplo resolvido 4, página 143.

Questão 04) Resposta: alternativa b

Comentário: não ocorre nenhuma transferência interna de qdm horizontal entre o carrinho e o pêndulo, seguindo o mesmo raciocínio da questão 2. Quando o fio se rompe, apenas as trações deixam de agir, só isso. A velocidades horizontais permanecem inalteradas pela lei da Inércia.

Questão 05 – Resposta: alternativa e

Comentário:

Segundo a lei da Inércia, proposta por Galileu e refinada por Newton, a velocidade horizontal $v\rightarrow$ do carrinho só aumentará ou diminuirá de valor em resposta a uma força horizontal respectivamente a favor $F\rightarrow$ $V\rightarrow$ dessa velocidade ou contra $F\leftarrow$ $V\rightarrow$ ela. Nesse episódio, alguma força horizontal atuou nesse carrinho ☺ ?

No carro A, a água nele contida no carrinho exerce uma força F← na água está fora do carrinho empurrando-a. Pela lei da ação-reação, esta água que está fora do carrinho, por sua vez, aplica a reação F→ no carrinho, que age a favor da velocidade V→ dele, aumentando seu módulo.

No carro B, o caso é semelhante ao pêndulo da questão 4. Nenhuma força interna horizontal é trocada internamente quando o fio do pêndulo se rompe, portanto nenhuma qdm horizontal é transferida internamente entre a bolinha do pêndulo e o carrinho. O mesmo ocorre a essa água do aquário, ela simplesmente cai verticalmente, sem trocar forças horizontais com o carrinho. Dessa forma, pela lei da Inércia, a velocidade do carrinho B deve permanecer constante. A resposta correta é a letra E.

Dependendo de como essa massa for ejetada do carrinho, ela poderá provocar tanto o aumento da velocidade do carrinho, quanto a sua diminuição, podendo até mesmo ser expelida sem alterar a velocidade dele.

Essa massa apenas *caiu* do carrinho ou ela foi empurrada para fora dele ? Ela foi empurrada para cima, para baixo, a favor da velocidade horizontal do carrinho ou contra ela ?

A idéia mais simples e eficaz ainda é pensar pela lei da inércia, aliada à lei da ação e reação:

1) se a massa ejetada pelo carrinho exercer nele uma força de reação a favor da velocidade dele (F→,V→), esta velocidade sofrerá um incremento;
2) se a massa ejetada pelo carrinho exercer neste uma força de reação que aponte no sentido contrário ao da velocidade dele (F←,V→), esta velocidade sofrerá um decréscimo de valor;
3) se a massa deixar o carrinho sem trocar com ele forças na direção da sua velocidade (F↑, F↓ ou F = 0, V→), esta velocidade deverá permanecer inalterada, pela lei da Inércia.

Para uma análise detalhada desses sistemas, incluindo o cálculo da força propulsora, estude a seção "*Sistemas Com Massa Variável – Força Propulsora*" na página 251.

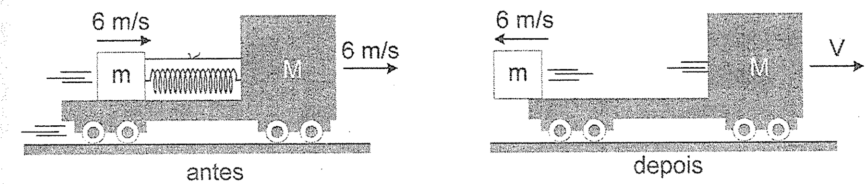
Questão 06 – Resposta: B

Solução: Nesse problema, nosso sistema é composto pelo carrinho, pelo bloco e pela mola de massa nula. Após a mola ser liberada, ela claramente aplica um par de impulsos ←k.x.Δt e k.x.Δt→ aos dois corpos, impulsos estes que meramente transferem uma quantidade de movimento k.x.Δt do bloquinho para o carrinho e, conforme vimos, transferências internas de qdm não alteram a soma das qdm do sistema, o que nos permite escrever $\Sigma Q_{\text{antes}} = \Sigma Q_{\text{depois}}$.

Adicionalmente, o leitor deve ficar atento à questão do referencial na resolução desses problemas. Quando escrevemos a conservação da qdm do sistema, estamos escrevendo em relação à Terra (ou em relação a qualquer outro referencia inercial). Em outras palavras, as velocidades dos blocos devem ser tomadas todas em relação à Terra:

$$\Sigma Q_{\text{antes (terra)}} = \Sigma Q_{\text{depois (terra)}}$$

Adotaremos um eixo positivo para a direita → e atribuiremos sinal algébrico positivo para grandezas vetoriais a favor do eixo e, negativo para grandezas vetoriais que apontem contrário ao eixo.



$$(Q_{\text{bloco}} + Q_{\text{carrinho}})_{\text{antes}} = (Q_{\text{bloco}} + Q_{\text{carrinho}})_{\text{depois}}$$

$$(0{,}5).(+6) + 3.(+6) = (0{,}5).(-6) + 3.V$$

$$V = 8 \text{ m/s}$$

Questão 07) Resposta: alternativa c

Comentário: O conjunto AB (Renato segurando a bola), movendo-se para trás, terá a mesma qdm (em módulo) do corpo C (Renato) indo para frente. Como o conjunto AB tem massa maior do que C, terá, portanto, menor velocidade do que C.

Questão 08

Solução: A caixa inicialmente oscila com amplitude A_o. Isso significa que a caixa passa pela posição central $x_i = 0$ com certa velocidade v (Figura 1) e se desloca em movimento retardado até parar ($v_F = 0$) na posição final $x_F = A_o$. Pela conservação da energia mecânica na Figura 1, vem:

$$(\text{Epot} + \text{Ecin})_i = (\text{Epot} + \text{Ecin})_F \Rightarrow \frac{K.x_i^2}{2} + \frac{M.(v_i)^2}{2} = \frac{K.x_F^2}{2} + \frac{M.(v_F)^2}{2}$$

$$\frac{K.(0)^2}{2} + \frac{M.(v)^2}{2} = \frac{K.(A_o)^2}{2} + \frac{M.(0)^2}{2} \Rightarrow \boxed{v = A_o\sqrt{\frac{K}{M}}} \quad \textbf{(eq1)}$$

relação eq1 fornece a velocidade da caixa ao passar pela posição centra na igura 1.

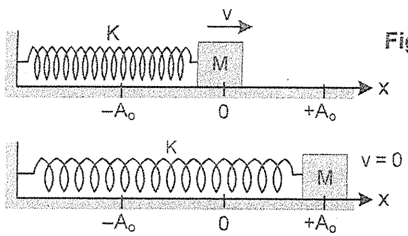


Figura 1

gora considere que a massa de modelar de massa m caia verticalmente ↓ sobre caixa, ao passar pela posição central, e fique colada nela. A massa de modelar, ue inicialmente não possui velocidade horizontal, adquire velocidade à custa de ma transferência de qdm interna. Parte da qdm da caixa é transferida para a assa de modelar, devido a forças internas adesivas, de forma que a qdm orizontal do sistema caixa+massa de modelar não é alterada quando a massa e modelar adere à caixa.

ssim, podemos escrever:

$$Qx_{\text{antes}} = \Sigma Qx_{\text{depois}} \Rightarrow (Q_{x\ \text{caixa}} + Q_{x\ \text{massa}})_{\text{antes}} = (Q_{x\ \text{caixa}} + Q_{x\ \text{massa}})_{\text{depois}}$$

$$.v + 0 = M.v' + m.v' \Rightarrow \boxed{V' = \frac{M.v}{M+m}} \quad \textbf{(eq2)}$$

relação eq2 fornece a velocidade v' adquirida pelo conjunto caixa+massa de odelar, logo após o impacto (Figura 2). O conjunto agora prossegue em ovimento retardado até parar na abscissa final x_F = A (Figura 2), onde A é a ova amplitude de oscilação do sistema.

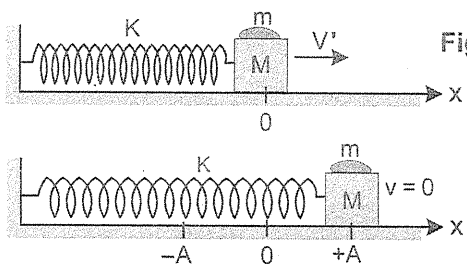


Figura 2

ela conservação da energia mecânica, durante esse movimento retardado ostrado na Figura 2, vem:

$$Epot + Ecin)_i = (Epot + Ecin)_F \Rightarrow$$

$$\frac{.(0)^2}{2} + \frac{(m+M).(v')^2}{2} = \frac{K.(A)^2}{2} + \frac{(m+M).(0)^2}{2} \Rightarrow A^2 = \frac{(m+M)}{K}.(v')^2$$

$$A^2 = \frac{(m+M)}{K}.(v')^2 \overset{eq2}{=} \frac{(m+M)}{K}.\left(\frac{M.v}{M+m}\right)^2 = \frac{M^2v^2}{K.(M+m)} \overset{eq1}{=} \frac{M^2}{K.(M+m)}.(A_o)^2.\frac{K}{M}$$

$$A^2 = \frac{M}{(M+m)}.(A_o)^2 \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{M}{(M+m)}}.A_o}$$

Caso a massa de modelar caísse sobre a caixa em uma das extremidades x = ±A da oscilação, não ocorreria mudança na amplitude do movimento posterior.

Questão 09 – Resposta: alternativa c

Solução: Conforme o raciocínio das questões 1, 2 e 3, quando os grãos caem no interior do vagão, ocorre conservação da qdm horizontal do sistema grãos + vagão. Assim, podemos escrever:

$$\Sigma Qx_{\text{antes}} = \Sigma Qx_{\text{depois}} \Rightarrow (Q_{\text{graos}} + Q_{\text{vagão}})_{\text{antes}} = (Q_{\text{graos}} + Q_{\text{vagão}})_{\text{depois}}$$

$$0 + M.v = 4M.v' + M.v' \Rightarrow v' = V/5 \quad \textbf{(eq1)}$$

Na situação inicial, antes da queda, a energia mecânica dos sistema consiste na energia potencial gravitacional dos grãos e na energia cinética do vagão, sendo dada por:

$$E_{\text{mec i}} = (4M).g.H + (M).v^2/2 \quad \textbf{(eq2)}$$

Após o impacto, a energia mecânica o sistema se resume à energia cinética do conjunto grãos + vagão:

$$E_{\text{mec F}} = (5M).(v')^2/2 \quad \textbf{(eq3)}$$

Como parte da energia mecânica é dissipada em calor, temos Emecf < Emeci, e portanto o calor gerado pelo processo tem módulo:

$$Q = E_{\text{mec i}} - E_{\text{mec F}} = (4M).g.H + \frac{(M)v^2}{2} - \frac{(5M).(v')^2}{2}, \text{ usando eq1, vem:}$$

$$Q = (4M).g.H + \frac{(M)v^2}{2} - \frac{(5M)}{2}\left(\frac{v}{5}\right)^2 = 4M.g.H + \frac{4}{5}\frac{Mv^2}{2}$$

Assim, a quantidade de calor gerado por unidade de massa dos grãos vale:

$$\frac{Q}{m_{\text{grãos}}} = \frac{Q}{4M} = gH + \frac{v^2}{10} = 10\times 6 + \frac{(20\ m/s)^2}{10} = 100\ J/kg$$

Questão 10 – Resposta: alternativa c

Solução: Ao meramente derramar a areia por baixo, nenhuma força propulsora é trocada entre o vagão e a areia que cai. A areia simplesmente *cai verticalmente* sob ação da gravidade, sem perturbar a velocidade horizontal do vagão, que prosseguirá em MRU.

Assim, quanto tempo o vagão vai demorar até parar ? $\Delta t = \frac{4000g}{25g/s} = 160\ s$

Nesse intervalo de tempo de 160s, o vagão percorrerá uma distância:

$$D = 2\ m/s \times 160\ s = 320\ m$$

Questão 11 – Resposta: alternativa e

Dica: Leia a teoria da página 136 à página 142.

Questão 12 – Resposta: alternativa a

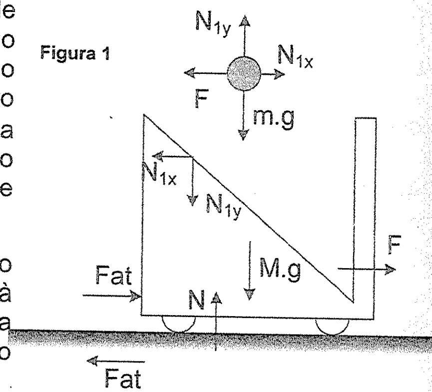
Dica: Leia a teoria da página 136 à página 142.

Questão 13 – Resposta: alternativa b

Solução: Observando o início do movimento de um sistema semelhante mostrado na Figura 13C página 138, vemos que, durante a descida da bola, o prisma (carrinho) se desloca para a esquerda ← em relação ao solo, recebendo deste uma força de atrito externa Fat→ para a direita, como mostra a Figura 1 abaixo.

Dessa forma, o impulso externo da força de atrito transfere do chão (que está fora do sistema) para o prisma (que está dentro do sistema) uma quantidade de movimento $Fat.\Delta t\rightarrow$. Assim é fácil ver que, logo após a colisão inelástica entre a bola e o prisma, o conjunto agora apresentará quantidade de movimento para a direita de módulo $Fat.\Delta t$.

Figura 1



Para melhor compreender, apliquemos o teorema do impulso ao carro (prisma) e à bola, na direção horizontal, conforme feito na página 142, agora incluindo a força de atrito externa $Fat.\Delta t\rightarrow$ agindo no carro:

$$\vec{Q}_{carro\ final} = \vec{Q}_{carro\ inicial} + \vec{I}_{carro}$$

$$\rightarrow M.v = \vec{0} + (\leftarrow N_{1x}.\Delta t + \rightarrow F.\Delta tp + \rightarrow Fat.\Delta t) \quad \textbf{(eq1)}$$

$$\vec{Q}_{bola\ final} = \vec{Q}_{bola\ inicial} + \vec{I}_{bola}$$

$$\rightarrow m.v = \vec{0} + (\rightarrow N_{1x}.\Delta t + \leftarrow F.\Delta tp) \quad \textbf{(eq2)}$$

Somando, membro a membro, as relações eq1 e eq2, vem:

$$\rightarrow M.v = \vec{0} + (\leftarrow N_{1x}.\Delta t + \rightarrow F.\Delta tp) \quad \textbf{(eq1)}$$

$$\rightarrow m.v = \vec{0} + (\rightarrow N_{1x}.\Delta t + \leftarrow F.\Delta tp) \quad \textbf{(eq2)}$$

$$\rightarrow M.v + \rightarrow m.v = \leftarrow N_{1x}.\Delta t + \rightarrow F.\Delta tp + \rightarrow N_{1x}.\Delta t + \leftarrow F.\Delta tp + \rightarrow Fat.\Delta t$$

Desenvolvendo e essa expressão vetorial, vem:

$$\rightarrow (M+m).v = (\leftarrow N_{1x}.\Delta t + \rightarrow N_{1x}.\Delta t) + (\rightarrow F.\Delta tp + \leftarrow F.\Delta tp) + \rightarrow Fat.\Delta t$$

$$\rightarrow (M+m).v = \vec{0} + \vec{0} + \rightarrow Fat.\Delta t \quad \Rightarrow \quad v = \frac{Fat.\Delta t}{M+m} \quad \textbf{(eq3)}$$

Assim, vemos que, logo após a colisão inelástica (instante t_2 na figura 2), todo o conjunto carro+bola apresentará uma mesma velocidade $v_2\rightarrow$ em relação à Terra para a direita (dada pela relação eq3), decorrente da quantidade de movimento transferida pela força de atrito →Fat externa ao sistema durante todo o intervalo $\Delta t = t_2 - 0$ em que o carro se moveu para trás.

Após a colisão (instante t_2 na figura 2), o sistema carro+bola prossegue em movimento retardado até o instante final t_3 quando o conjunto atinge o repouso.

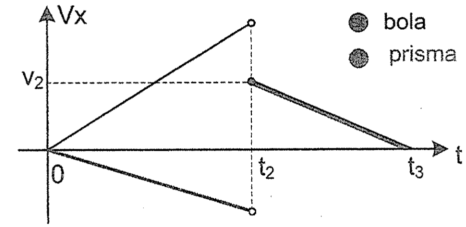
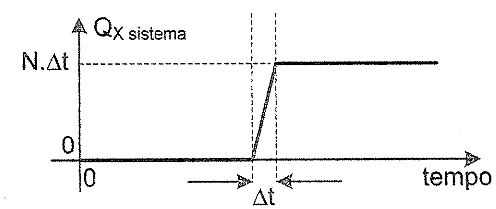


Figura 2 - velocidade horizontal em função do tempo

A figura 2 mostra que, no intervalo $[0, t_2]$ o prisma se move para trás ← aceleradamente, inverte o sentido do movimento no instante t_2 da colisão, prosseguindo para frente → em movimento retardado até parar no instante t_3.

Questão 14 – Resposta: alternativa d

Comentário: A qdm horizontal $Qx_{sistema}$ do sistema permanece inicialmente constante enquanto o sistema esfera+prisma encontra-se isolado de forças externas horizontais, isto é, enquanto o prisma não encosta na parede.



Logo após encostar inelasticamente na parede, a qdm horizontal $Qx_{sistema}$ do sistema sofre um acréscimo $N.\Delta t\rightarrow$ durante o breve intervalo de tempo Δt em que que a caixa fica encostada na parede. Em seguida, uma interação interna entre a esfera e o prisma (quando a bola é encaçapada) transfere parte da qdm horizontal da esfera para o prisma, fazendo com que ele perca o contato com a parede. Essa transferência interna, no entanto, não altera a qdm horizontal Qx

$_{ema}$ do sistema, que volta a permanecer constante, agora valendo N.Δt, isto é, $\text{/I+m}).V_{final}$ = N.Δt. Essa é exatamente a idéia da próxima questão.

uestão 15 – Resposta: alternativa b

olução: Inicialmente, a rampa permanece imóvel, presa a um batente através o fio. Durante a descida da bolinha ao longo da rampa (veja a Figura 2), odemos escrever:

$$N = P.\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad N = m.g.\cos\alpha \quad \textbf{(eq1)}$$

$$F_R = m.a \quad \Rightarrow \quad m.g.\text{sen}\alpha = m.a \quad \Rightarrow \quad a = g.\text{sen}\alpha \quad \textbf{(eq2)}$$

ara descer a altura h (Figura 1), a bolinha sofrerá um deslocamento Δs ao longo a rampa dado por:

$$\text{sen}\alpha = \frac{H}{\Delta s} \quad \Rightarrow \quad \Delta s = \frac{H}{\text{sen}\alpha} \quad \textbf{(eq3)}$$

ara percorrer essa distância Δs, a partir do repouso (V_o = 0), com aceleração scalar constante a = g.senα (MUV), a bolinha levará um tempo Δt dado por:

$$\Delta s = \frac{a.\Delta t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{H}{\text{sen}\alpha} = \frac{g.\text{sen}\alpha.\Delta t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2H}{g.\text{sen}^2\alpha}} \quad \textbf{(eq4)}$$

urante a descida da bola, o prisma fica em equilíbrio estático na horizontal sujeito a uas forças horizontais tração T→ e N_x← (Figura 1) que devem se equilibrar:

$$T = N_x \quad \Rightarrow \quad T = N.\text{sen}\alpha \overset{eq1}{=} (m.g.\cos\alpha).\text{sen}\alpha \quad \Rightarrow \quad T = m.g.\text{sen}\alpha.\cos\alpha \quad \textbf{(eq5)}$$

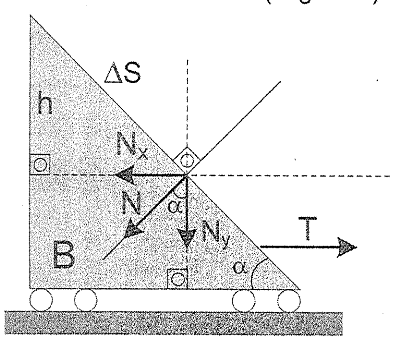


Figura 1

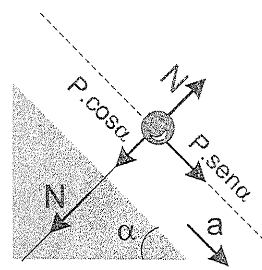


Figura 2

fio se mantém tracionado desde o instante inicial até o instante t em que a olinha cai na caçapa (Figura 3a). A partir desse instante, a cunha adquire uma elocidade v_x constante e o fio se torna frouxo (T = 0).

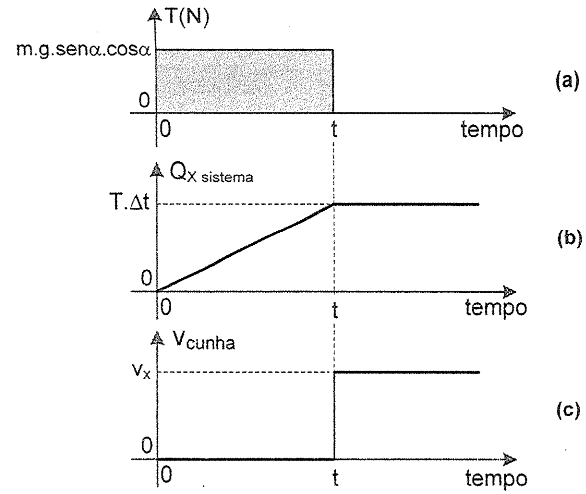


Figura 3

A ação dessa tração externa T→ sobre o sistema cunha+bolinha fará a sua qdm horizontal $Q_{x\ sistema} = Q_{x\ cunha} + Q_{x\ bolinha}$ aumentar conforme o gráfico da Figura 3b, injetando nele uma qdm horizontal T.Δt→ durante o intervalo de tempo Δt = t – 0 que a bolinha leva para descer a altura h até cair no buraco na rampa.

Assim, pelo teorema do impulso, podemos escrever:

$$T.\Delta t = Q_{x\ sistema\ final} - Q_{x\ sistema\ inicial} \qquad \textbf{(eq6)}$$

Substituindo eq4 e eq5 em eq6, vem:

$$T.\Delta t = Q_{x\ sistema\ final} - Q_{x\ sistema\ inicial}$$

$$m.g.\text{sen}\alpha.\cos\alpha \,.\, \sqrt{\frac{2H}{g.\text{sen}^2\alpha}} = (M+m).v_x - 0$$

$$v_x = \frac{mg.\cos\alpha}{M+m}\sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad \textbf{(eq7)}$$

Quando a bolinha é encaçapada, parte da sua qdm horizontal é transferida para a cunha, sem alterar a qdm horizontal $Qx_{\ sistema}$ do sistema, visto que se trata de uma mera transferência interna.

Com isso, a cunha passa a se mover, afrouxando o fio (a tração no fio passará a ser nula T = 0, Figura 3a) e o sistema bolinha+cunha passa a estar livre de forças externas na horizontal (visto que agora T = 0), mantendo constante a sua qdm $Q_{x\ sistema}$ a partir desse instante t, como mostra a Figura 3b.

A Bolinha e a cunha compartilharão de uma mesma velocidade v_x constante (dada por eq7) em movimento uniforme a partir do instante t em que a bola cai na caçapa.

O gráfico da Figura 3c mostra o comportamento da velocidade V_{cunha} da cunha em função do tempo.

Questão 16

Resposta:

Na questão 11 → gráfico b

Na questão 12 → gráfico b

Na questão 13 → gráfico d

Na questão 14 → gráfico a

Questão 17 – Resposta: alternativa d

Comentário: Enquanto a mola está comprimida (Figura 1a), ela empurra a caixa A contra a parede que, por sua vez, aplica sobre a caixa A uma força externa F_{ext}→ (Figura 1a) ao sistema formado pelas duas caixas junto com a mola ideal.

Enquanto a caixa A permanecer em repouso encostada à parede (Figuras 1a e 1b), essa força externa F_{ext}→ tem módulo igual ao da força elástica interna ao sistema (Fext = Felást = k.x), sendo essa força externa a responsável pela aceleração inicial do centro de massa CM desse sistema.

À medida que a caixa B vai ganhando velocidade e a mola vai relaxando (Figura 1b), essa força externa F_{ext}→vai diminuindo de intensidade até que a caixa A perde o contato com a parede (Figura 1c). A partir desse instante, a força externa deixa de agir sobre o sistema, que prossegue livre da ação de forças externas. Desse ponto em diante, seu centro de massa executará um MRU enquanto que as caixas A e B executarão um MHS em relação ao centro de massa desse sistema.

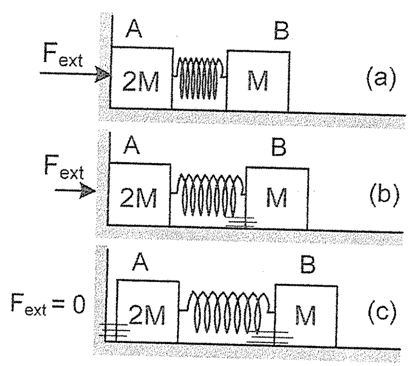


Figura 1

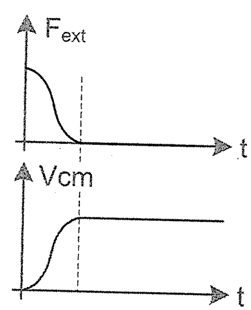


Figura 2

Questão 18 – Resposta: alternativa d

Solução: Na vertical, as forças externas que agem sobre o sistema (pesos P ↓ e normais N↑) se equilibram. As forças elásticas são internas ao sistema e, portanto, não agem sobre o seu centro de massa. Na horizontal, a única força externa agindo sobre o sistema é a força F→ horizontal, sendo, portanto, a resultante das forças externas agindo sobre o sistema. Aplicando-se a segunda lei de Newton para sistemas (relação eq29 página 176), vem:

$$F_{R-ext} = M_{total} \cdot a_{cm}$$

$$F = (M+m).\, a_{cm} \quad \Rightarrow \quad a_{cm} = \frac{F}{M+m}$$

Questão 19 – Resposta: alternativa d

Dica: Veja exemplo resolvido 14 – página 185

Questão 20 – Resposta: alternativa e

Dica: Veja exemplo resolvido 14 – página 185

Questão 21 – Resposta: alternativa c

Solução: O sistema apresenta qdm inicial nula. Estando o sistema isolado de forças externas, sua qdm permanece nula mesmo quando Raul (A) se põe a caminhar ao longo da plataforma (B). Assim, pela conservação da qdm do sistema, vem:

$$\Sigma Q_{antes} = \Sigma Q_{durante} = \Sigma Q_{depois}$$

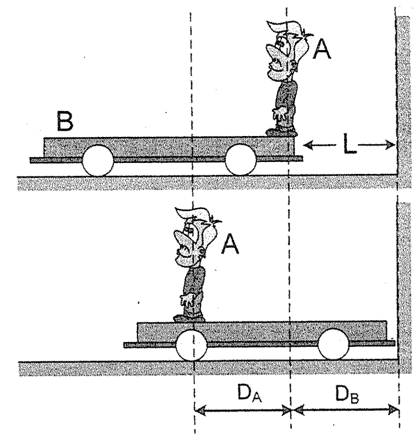
$$0 + 0 = (-M_A.V_A) + (+M_B.V_B)$$

$$+M_A.V_A = M_B.V_B \quad \Rightarrow$$

$$M_A.\frac{D_A}{\cancel{\Delta}t} = m_B.\frac{D_B}{\cancel{\Delta}t}$$

$$M_A.D_A = M_B.D_B \qquad \textbf{(eq1)}$$

(em relação à Terra)



A figura acima mostra os deslocamentos sofridos por A (Raul) e B (plataforma) em relação à Terra, desde o instante inicial até a plataforma tocar a parede.

Até tocar a parede, a plataforma sofreu um deslocamento D_B = L em relação à Terra. Assim, sendo $M_A = 2M$, $M_B = 4M$, substituindo em eq1, vem:

$$M_A.D_A = M_B.D_B$$

$$2M.D_A = 4M.L$$

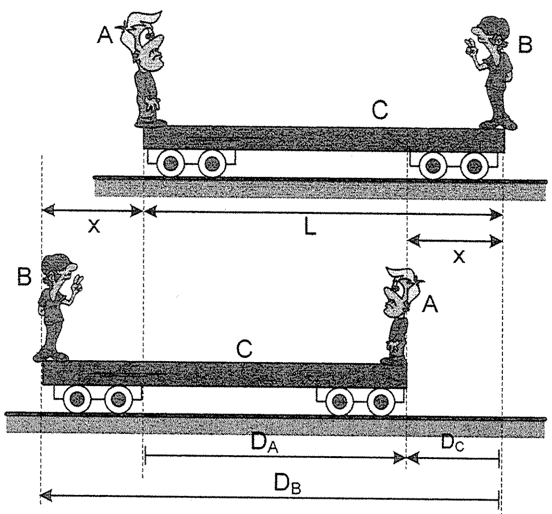
$$D_A = 2L$$

Segundo o enunciado, a cada passo, o garoto sofre um deslocamento L/2 mas, em relação a quem ? Ora, como ele caminha sobre a plataforma, cada passo dele corresponde a um deslocamento L/2 do garoto em relação à plataforma.

Ora, mas qual o deslocamento sofrido pelo garoto em relação à plataforma durante esse episódio ? Observando a figura, vemos que ele sofreu um deslocamento $D_A + D_B = 2L + L = 3L$ em relação à plataforma, o que corresponde a 6 passos, de comprimento L/2 cada, em relação a ela.

Questão 22 – Resposta: alternativa b

Solução: Como o sistema encontra-se isolado de forças externas, suas partes se movem de forma que o centro de massa tenha deslocamento nulo em relação à Terra.



Durante essa troca de posições entre A e B, a fim de compensar o fato de M_A ser maior do que M_B, concluímos que a plataforma C só pode ter se deslocado para a esquerda ←a fim de que seja nulo o deslocamento do centro de massa do sistema ABC em relação à Terra.

Seja $x \leftarrow$ o deslocamento sofrido pela plataforma C para esquerda em relação à Terra. Se o comprimento da plataforma vale L, os deslocamentos D_A, D_B e D_C em relação à Terra (acompanhe pela figura) têm módulos dados por:

$$D_A = L - x \qquad \textbf{(eq1)}$$
$$D_B = L + x \qquad \textbf{(eq2)}$$
$$D_C = x \qquad \textbf{(eq3)}$$

A condição para que o centro de massa tenha deslocamento nulo é dado pela relação eq20a (ou eq20b) página 170:

$$M_A . D_A \rightarrow \;=\; M_B . D_B \leftarrow \;+\; M_C . D_C \leftarrow$$

$$M_A .(L - x) \;=\; M_B .(L + x) \;+\; M_C . x \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{x = \frac{(M_A - M_B).L}{M_A + M_B + M_C}}$$

Note que, pelo resultado acima, caso A e B tivessem massas iguais, o deslocamento x da prancha seria nulo, durante essa inversão de posição, o que faz sentido, não é verdade ☺ ?

Substituindo as massas fornecidas no enunciado, vem:

$$x = \frac{(M_A - M_B).L}{M_A + M_B + M_C} = \frac{(2M - M).L}{2M + M + M} = \frac{L}{4}$$

Questão 23 – Resposta: 104 kg ou 60 kg.

Dica: Veja a resolução da questão 22.

Questão 24 – Resposta: alternativa e

Solução: Trata-se de um mero problema de compensação. As partes se movem de forma que o centro de massa do sistema permaneça em repouso em relação à Terra. Assim, pela relação eq20a (ou eq20b) página 170, vem:

$$M_{\text{Lâmina}} \times D_{\text{Lâmina-Terra}} = M_{\text{formiga}} \times D_{\text{formiga-terra}}$$

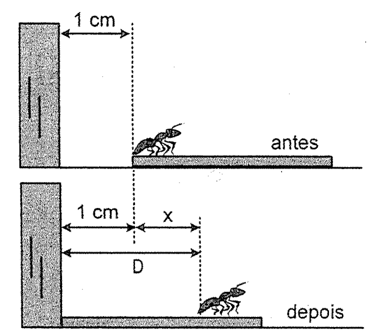
Observando o antes e o depois, percebemos que:

1) a distância que a lâmina se move, em relação à Terra, vale:

$$\text{a) } D_{\text{Lâmina-Terra}} = 1 \text{ cm}$$

2) a distância que a formiga se move, em relação à Terra, vale:

$$D_{\text{formiga-terra}} = x = (D - 1)$$



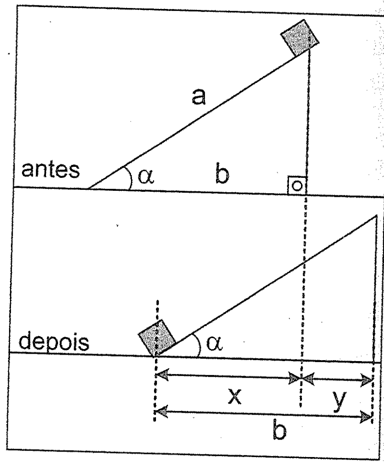
Substituindo, vem:

$$M_{\text{Lâmina}} \times D_{\text{Lâmina-Terra}} = M_{\text{formiga}} \times D_{\text{formiga-terra}}$$
$$(5m) \times 1 = m \times (D - 1)$$
$$5 = D - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = 6 \text{ cm}}$$

Questão 25 – Resposta: alternativa E

Solução: Trata-se de um mero problema de compensação. As partes se movem de forma que o centro de massa do sistema permanece em repouso em relação à Terra na direção horizontal, movendo-se apenas na vertical↓. Assim, pela relação eq20a (ou eq20b) página 170, vem:

$$M_{rampa} \times D_{rampa\text{-}Terra} = M_{caixa} \times D_{caixa\text{-}terra}$$



Observando o *antes* e o *depois* na figura, percebemos que:

1) a distância que a rampa se move, em relação à Terra, na horizontal, vale:

$$D_{rampa\text{-}Terra} = y$$

2) a distância que a caixa se move, em relação à Terra, na horizontal, vale:

$$D_{caixa\text{-}terra} = x$$

Substituindo, vem:

$$M_{rampa} \times D_{rampa\text{-}Terra} = M_{caixa} \times D_{caixa\text{-}terra}$$

$$12.y = 8.x \Rightarrow 2.x = 3y \quad \textbf{(eq1)}$$

A figura mostra que :

$x + y = b = a.\cos\alpha = 15 \times 0{,}8 = 12$

$x + y = 12$ **(eq2)**

Resolvendo o sistema das equações eq1 e eq2, encontramos:

$y = 4{,}8$ m , $x = 7{,}2$ m

Questão 26 – Resposta: m.L / (M+m)

Questão 27 – Resposta: $\left(1+\dfrac{m}{M}\right).a.tg\alpha$

Dicas: $m.a = M.x$, com $tg\alpha = h / (a + x)$. Veja também a resolução da questão 25.

Questão 28

Solução: Trata-se de um mero problema de compensação. O sistema encontra-se isolado de forças externas na horizontal. Não há atrito entre a cunha e o solo. Os blocos A e B e a cunha C se movem de forma que a abscissa Xcm do centro de massa do sistema ABC permaneça constante. Os deslocamentos horizontais sofridos por cada corpo, em relação à Terra, estão relacionados entre si equação eq20a (ou eq20b) página 170.

$$m_A.d_A\leftarrow + m_B.d_B\leftarrow = m_C.d_C\rightarrow \quad \textbf{(eq20)}$$

Supondo $m_A.sen\alpha > m_B.sen\beta$, quando o sistema é abandonado a partir do repouso, A desce uma distância L, B sobe a mesma distância L ao longo da superfície da cunha C, enquanto a própria rampa se desloca $d_C\rightarrow$ em relação à Terra.

Assim, qual o deslocamento horizontal sofrido pela caixa A em relação à Terra ?

Ora, será: $d_A\leftarrow = L.\cos\alpha\leftarrow + d_C\rightarrow \Rightarrow d_A\leftarrow = \leftarrow(L.\cos\alpha - d_C)$ **(eq1)**

Da mesma forma, o deslocamento horizontal da caixa B em relação à Terra será:

$d_B\leftarrow = L.\cos\beta\leftarrow + d_C\rightarrow \Rightarrow d_B\leftarrow = \leftarrow(L.\cos\beta - d_C)$ (eq2)

Assim, substituindo eq1 e eq2 em eq20, temos:

$$m_A.d_A\leftarrow + m_B.d_B\leftarrow = m_C.d_C\rightarrow$$

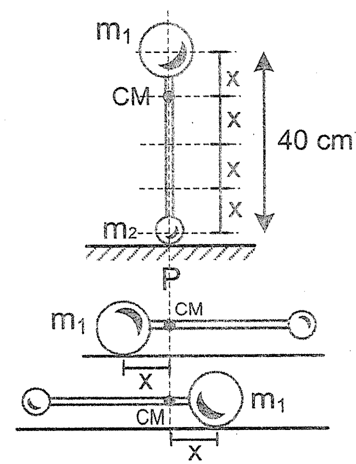
$$m_A.(L.\cos\alpha - d_C) + m_B.(L.\cos\beta - d_C) = m_C.d_C$$

$$L.(m_A.\cos\alpha + m_B.\cos\beta) = d_C.(m_A + m_B + m_C)$$

$$d_C = \frac{(m_A.\cos\alpha + m_B.\cos\beta).L}{m_A + m_B + m_C}$$

Questão 29 – Resposta: alternativa b

Solução: Usando a tática mostrada na página 164 Figura 16, facilmente localizamos o centro de massa do sistema formado pelas duas massas m_1 e m_2. Na figura, teremos 4x = 40 cm, portanto, x = 10 cm.



Estando o sistema isolado de forças externas na horizontal (o chão é liso), quando o sistema é abandonado em repouso, seu centro de massa deve permanecer em repouso na horizontal (lei da inércia para sistemas), podendo se deslocar apenas na vertical.

Assim, embora não haja como prever se o halteres vai cair girando no sentido horário ou anti-horário, independentemente disso, seu centro de massa se moverá sobre a trajetória vertical pontilhada. Dessa forma, a esfera maior de massa m_1 sempre cairá no solo a uma distância x = 10 cm da linha pontilhada que contém o centro de massa do sistema, ou seja, a 10 cm do ponto P.

Questão 30 – Resposta: $\Delta y = m.L / (M + m)$

Dica: o garoto se desloca para cima, o balão se desloca para baixo (em relação à Terra, mas o centro de massa do sistema permanece em repouso em relação à Terra.

uestão 31

olução: Trata-se de um mero problema de compensação. O sistema encontra-e isolado de forças externas na horizontal. São desprezados quais atritos ou esistências entre a água e barco. O barco e a caixa se movem de forma que o entro de massa do sistema barco + caixa permaneça em repouso em relação à erra.

onsidere os seguintes parâmetros:

V_{CT} = velocidade da caixa em relação à Terra;

V_{CB} = velocidade da caixa em relação ao barco;

V_{BT} = velocidade do barco em relação à Terra.

ara que o centro de massa do sistema permaneça em repouso, o barco se ove para a direita em relação à Terra ($V_{BT} \rightarrow$) para compensar o fato que de a aixa se mover para a esquerda em relação à Terra ($V_{CT} \leftarrow$).

cinemática vetorial nos permite escrever:

$$\vec{V}_{CT} = \vec{V}_{CB} + \vec{V}_{BT} \qquad \textbf{(eq1)}$$

$$V_{CT}\leftarrow \; = \; V_{CB}\leftarrow \; + \; V_{BT}\rightarrow$$

m termos escalares, podemos escrever: $V_{CT}\leftarrow \; = \; (V_{CB} - V_{BT})\leftarrow$ **(eq2)**

conservação da qdm do sistema em relação à Terra nos permite escrever:

$$\Sigma Q_{antes} = \Sigma Q_{durante} = \Sigma Q_{depois}$$

$$0 + 0 = (-M_C.V_{CT}) + (+M_B.V_{BT})$$

$$M_C.V_{CT} = M_B.V_{BT} \qquad \textbf{(eq3)}$$

ubstituindo eq2 em eq3, vem:

$$M_C.\,(V_{CB} - V_{BT}) = M_B.V_{BT} \qquad \textbf{(eq4)}$$

Segundo o item a, o guincho puxa a caixa com velocidade V_{CB} = 1,5 m/s em lação ao barco. Sendo M_C = 600 kg e M_B = 3000 kg, da relação eq4, vem:

$$600.\,(1{,}5 - V_{BT}) = 3000.V_{BT} \quad \Rightarrow \quad V_{BT} = 0{,}25 \text{ m/s}$$

) Multiplicando eq4 por Δt, membro a membro, vem:

$$M_C.\,(V_{CB}.\Delta t - V_{BT}.\,\Delta t) = M_B.V_{BT}.\Delta t$$

$$M_C.\,(D_{CB} - D_{BT}) = M_B.D_{BT} \qquad \textbf{(eq5)}$$

egundo o item b, o guincho puxará 12 m de corda, fazendo a caixa sofrer um eslocamento D_{CB} = 12 m em relação ao barco. Substituindo em eq5, vem:

$$600.(12 - D_{BT}) = 3000.D_{BT} \quad \Rightarrow \quad D_{BT} = 2 \text{ m}$$

Como o atrito é interno ao sistema, as respostas dos itens a e b permanecem s mesmas.

Questão 32 – Resposta: a) 600 m/s, b) x_{cm} = 6L

Questão 33 – Resposta: alternativa d

Dica: Ma.da = Mb.db, com da + d_B = 12R – 3R = 9R

Questão 34 – Resposta: alternativa d

Solução: Trata-se de um mero problema de compensação. O sistema encontra-se isolado de forças externas na horizontal. Não há atrito entre o anel e o solo. Joaninha e anel se movem de forma que o centro de massa c.m. do sistema joaninha + anel permaneça em repouso em relação à Terra, garantindo tanto a conservação da quantidade de movimento linear quanto a angular do sistema.

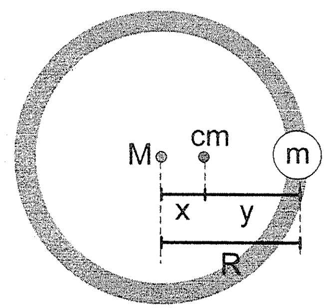


Figura 1

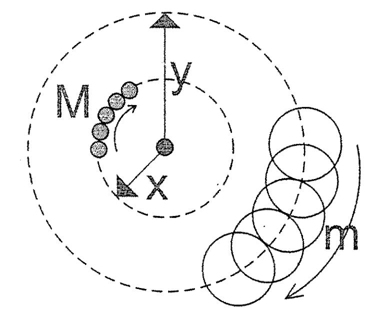


Figura 2

Na Figura 1, pelas propriedades do centro de massa, podemos escrever:

$$M.x = m.y, \quad \text{com} \quad x + y = R$$

Resolvendo o sistema, vem: $x = \dfrac{m.R}{M+m}$ e $y = \dfrac{M.R}{M+m}$

Assim, enquanto a joaninha (m) se move ao longo do anel, ela descrerá uma trajetória circular de raio y em torno do centro de massa c.m. do sistema como mostra a Figura 2. Simultaneamente, o centro do anel descrerá uma trajetória circular de raio x em torno do centro de massa c.m. do sistema. Apenas o próprio centro de massa c.m. do sistema permanecerá imóvel em relação à Terra.

Questão 35 – Resposta: alternativa a

Solução: Admitindo $M_A > M_B$, é fácil ver que os blocos A e B se movem com acelerações $\vec{a}_A = a\downarrow$ e $\vec{a}_B = a\uparrow$ de mesmo módulo **a** dado pela segunda lei de Newton:

$$M_A.g - M_B.g = (M_A + M_B).a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(M_A - M_B).g}{M_A + M_B} \qquad \textbf{(eq1)}$$

Assim, a aceleração do centro de massa a_{cm} do sistema pode ser calculada adotando-se um eixo para baixo ↓, tomando como positivas as acelerações que apontam a favor do eixo e vice-versa:

$$a_{cm} = \frac{M_A.a_A + M_B.a_B}{M_A + M_B} = \frac{M_A.(+a) + M_B(-a)}{M_A + M_B} \Rightarrow a_{cm} = \frac{(M_A - M_B).a}{M_A + M_B} \quad \textbf{(eq2)}$$

Substituindo eq1 em eq2, vem:

$$a_{cm} = \frac{(M_A - M_B).a}{M_A + M_B} = \frac{(M_A - M_B)}{M_A + M_B}.\frac{(M_A - M_B).g}{M_A + M_B} \Rightarrow a_{cm} = \left(\frac{M_A - M_B}{M_A + M_B}\right)^2.g$$

Questão 36 – Resposta: $v_A = 3$ m/s ←, $v_B = 7$ m/s →

Questão 37 – Resposta: $v_A = 6$ m/s →, $v_B = 8$ m/s →

Questão 38 – Resposta: a) 20 kg, b) 0,6

Questão 39 – Resposta:
a) 2 m/s →, b) 1 m/s ←, c) 5 J, d) 0,75 parcialmente elástica

Questão 40

Respostas: a) ← 2 m/s, → 3 m/s, b) → 2 m/s, → 3 m/s
c) ← 2 m/s, ← 1 m/s, d) 0 m/s , → 4 m/s

Dica: Leia páginas 212 e 213.

Questão 41 – Resposta: alternativa b

Solução: Como as caixas são iguais e todas as colisões são elásticas, elas meramente trocam de velocidades durante cada colisão (veja página 212). Assim, toda vez que uma das caixas se aproxima com velocidade v e colide com a outra caixa que se encontra imóvel no ponto C, esta última adquire a velocidade v da primeira caixa, que passa a repousar no ponto C central.

Assim, o que se pode deduzir ? Ora, sempre haverá uma caixa em repouso na posição central C, concorda ? Afinal, sempre que elas colidem, elas meramente trocam de papel, isto é, a que estava em repouso adquire a velocidade da primeira enquanto esta passa a repousar na posição central, sem que ocorra qualquer perda de energia mecânica do sistema já que são colisões elásticas.

Dessa forma, a fim de resolver o problema facilmente, podemos simplesmente remover a segunda caixa da posição central C e resolver o problema como se ela não existisse. Após determinarmos onde a primeira caixa irá parar, após seu movimento de vaivém com atrito, colocamos de volta a segunda caixa na posição central C.

Durante o movimento de vaivém da primeira caixa, entre as rampas esquerda e direita, agem sobre ela as forças peso, normal N e a força de atrito, sendo que este último só atua no trecho horizontal ABCDE. Pelo Princípio do Trabalho da Forças Não-Conservativas, desde a situação inicial (a caixa partindo do repouso a uma altura h) até a situação final (a caixa em repouso em algum ponto no trecho ABCDE), temos:

$$\Sigma T_{FNC} = Emec_{\,Final} - Emec_{\,inicial}$$
$$T_{FAT} + T_{Normal} = (\,Epot_F + Ecin_F) - (Epot_i + Ecin_i\,)$$
$$-Fat.d + 0 = (\,0 + 0) - (\,m.g.h + 0)$$
$$-\mu.mg.d + 0 = -m.g.h \Rightarrow d = h/\mu = 5/0{,}2 = 20\text{ m.}$$

O termo d, na expressão acima, representa a distância total percorrida pela primeira caixa exclusivamente na presença da força de atrito, isto é, exclusivamente no trecho horizontal. De acordo com o cálculo acima, vimos que a primeira caixa percorreu, ao todo, 20 m nesse trecho com atrito, o que significa que a caixa percorreu 10 m no 1o trecho A→E e, finalmente, mais 10 m de volta no trecho E→A parando no ponto A.

Note que, nesses 20 m, não contabilizamos a distância percorrida pela caixa ao longo das rampas visto que elas são lisas. Em suma, a primeira caixa pára no ponto A. Agora, repondo de volta a segunda caixa para a sua posição original C, podemos dizer que as caixas vão parar nas posições A e C após as sucessivas colisões entre elas, embora, com nosso artifício, tenhamos resolvido o problema sem nos preocupar com as colisões ☺.

Questão 42 – Resposta: alternativa b

Solução: No primeiro episódio, ocorre uma colisão inelástica (bate e gruda) e o conjunto adquire uma velocidade v', após a colisão, dada por:

$$\Sigma Q_{antes} = \Sigma Q_{depois}$$
$$m.v + 0 = (m+m).v' \Rightarrow v' = v/2 \quad \textbf{(eq1)}$$

Em seguida, o conjunto entra em trajetória parabólica com velocidade horizontal v' = v/2, atingindo um alcance horizontal D.

No segundo episódio, ocorre uma colisão elástica entre massas iguais. A caixa A troca de velocidade com B (veja página 212). Após a colisão, A permanece em repouso e B adquire velocidade v" = v, entrando em trajetória parabólica com velocidade horizontal:

$$v'' = v \quad \textbf{(eq2)}$$

Em qual dos episódio será atingido maior alcance horizontal ? Ora, o alcance horizontal é dado por:

$$A = v_x . t_{queda} \quad \textbf{(eq3)}$$

onde v_x é a velocidade horizontal da caixa e t_{queda} é o tempo que a caixa permanece no ar, no lançamento horizontal, dado por:

$$h=\frac{g.t^2}{2} \quad\Rightarrow\quad t_{queda}=\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad \textbf{(eq4)}$$

A partir de eq4, vemos que t_{queda} é exatamente o mesmo em ambos os episódios visto que só depende da altura h e da gravidade g. Entretanto, v_x no segundo episódio (dado por eq2) é duas vezes maior do que v_x no primeiro episódio (dado por eq1). Assim, o alcance horizontal no segundo caso será o dobro do alcance horizontal do primeiro caso, valendo, portanto, 2D.

Questão 43 – Resposta: alternativa e

Dica: Leia páginas 212 e 213 – Troca de velocidades.

Questão 44 – Resposta: 20 cm

Solução: A partir da conservação da energia mecânica, determinamos a velocidade da bola A logo antes da colisão:

$$(Epot + Ecin)_i = (Epot + Ecin)_F$$

$$m_A.g.H_A=\frac{m_A.v_A^2}{2} \quad\Rightarrow\quad v_A=\sqrt{2.g.H_A}=\sqrt{2\times10\times0{,}45}=3\text{ m/s}$$

Pela conservação da quantidade de movimento na colisão, temos:

$$(P_A.V_A + P_B.V_B)_{antes} = (P_A.V_A' + P_B.V_B')_{depois}$$

$$10 \times 3 + 0 = 10.(-V_A') + 17.V_B' \quad\Rightarrow\quad 17.V_B' - 10.V_A' = 30 \qquad \textbf{(eq1)}$$

Pela definição de coeficiente de restituição, vem:

$$e=\frac{V_{rel\ após}}{V_{rel\ antes}}=\frac{V_A' + V_B'}{3+0}=0{,}8 \quad\Rightarrow\quad V_A' + V_B' = 2{,}4 \qquad \textbf{(eq2)}$$

Resolvendo o sistema, encontramos a velocidade da bola B logo após a colisão:

$$V_B' = 2\text{ m/s}$$

Que altura a bola B subirá após a colisão ? Pela conservação da energia mecânica no movimento do pêndulo, após a colisão, vem:

$$(Epot + Ecin)_i = (Epot + Ecin)_F$$

$$\frac{m_B.(v_B')^2}{2}=m_B.g.H_B \quad\Rightarrow\quad H_B=\frac{(v_B')^2}{2g}=\frac{(2)^2}{2\times10}=0{,}2\text{ m}=20\text{ cm}$$

Questão 45

Resposta:

a) bola mais leve terá velocidade $\frac{\sqrt{50gL}}{3}$ para a esquerda e a bola mais pesada terá velocidade $\frac{\sqrt{2gL}}{3}$ para a direita;

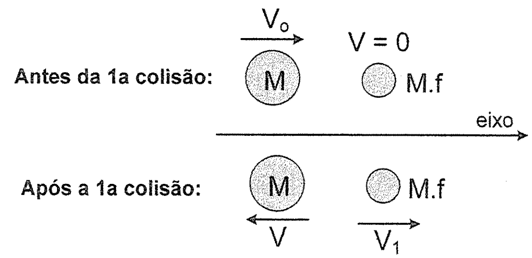
b) bola mais leve sobe 2L completando a volta completa, enquanto a bola mais pesada sobe apenas L/9.

Questão 46

Solução:

Primeiro, note que as bolas não estão em contato entre si, como de costume.

A seguir, estudaremos as colisões sucessivas ocorridas entre cada par de bolas, ou seja, entre a bola 0 e a bola 1, depois entre a bola 1 e a bola 2, e assim por diante. Comecemos estudando a colisão a entre a bola 0 e a bola 1:



Sendo a colisão elástica, seu coeficiente de restituição vale e = 1. Assim temos:

$$e=\frac{V_{rel\ após}}{V_{rel\ antes}}=\frac{V_1 + V}{V_o}=1 \quad\Rightarrow\quad V_1 + V = V_o \quad\Rightarrow\quad V = V_o - V_1 \qquad \textbf{(eq1)}$$

Da conservação da qdm na colisão, temos:

$$\Sigma Q_{antes} = \Sigma Q_{depois}$$

$$+M.V_o + 0 = M.(-V) + M.f.V_1$$

$$+V_o = -V + f.V_1 \qquad \textbf{(eq2)}$$

Substituindo eq1 em eq2, vem: $V_o = -(V_o - V_1) + f.V_1$

$$2.V_o = V_1 + f.V_1 \quad\Rightarrow\quad V_1=\left(\frac{2}{1+f}\right).V_o \qquad \textbf{(eq3)}$$

Assim, quando a bola 0 colide com a bola 1, esta última sai com a velocidade v_1 dada por eq3.

Analisando o problema de uma maneira mais geral, percebemos que todas as colisões têm as mesmas características em comum:

- A bola sucessora sempre se encontra em repouso e possui massa f vezes maior que a massa da bola anterior;
- Após essa colisão, a velocidade adquirida pela bola sucessora será sempre a velocidade da bola anterior multiplicada pelo fator $\left(\dfrac{2}{1+f}\right)$.

Assim, quando a bola 1 colidir com a bola 2, esta sairá com uma velocidade:

$$V_2 = \left(\frac{2}{1+f}\right).V_1 \overset{eq3}{=} \left(\frac{2}{1+f}\right).\left(\frac{2}{1+f}\right).V_o \quad \Rightarrow \quad V_2 = \left(\frac{2}{1+f}\right)^2.V_o \qquad \textbf{(eq4)}$$

Quando a bola 2 colidir com a bola 3, esta sairá com uma velocidade:

$$V_3 = \left(\frac{2}{1+f}\right).V_2 \overset{eq4}{=} \left(\frac{2}{1+f}\right).\left(\frac{2}{1+f}\right)^2.V_o \quad \Rightarrow \quad V_3 = \left(\frac{2}{1+f}\right)^3.V_o$$

Finalmente, quando a bola n–1 colidir com a n-ésima bola, esta sairá com velocidade:

$$V_n = \left(\frac{2}{1+f}\right)^n.V_o$$

Questão 47

Solução: Admita que um grupo de N bolas de massa M se aproxime com velocidade v do grupo restante de bolas paradas. Após a colisão, admita que apenas um grupo de n bolas de massa m se mova com velocidade u, enquanto o restante das bolas permanece em repouso.

Pela conservação da qdm do sistema, podemos escrever:

$$Q_{sist\ antes} = Q_{sist\ depois} \quad \Rightarrow \quad N.M.v = n.m.u \qquad \textbf{(eq1)}$$

Pela conservação da energia mecânica (cinética) do sistema podemos escrever:

$$\Sigma Ecin_{antes} = \Sigma Ecin_{depois} \quad \Rightarrow \quad \frac{N.M.v^2}{2} = \frac{n.m.u^2}{2} \qquad \textbf{(eq2)}$$

Dividindo eq2 por eq1, membro a membro, vem:

$$\frac{N.M.v^2}{2N.M.v} = \frac{n.m.u^2}{2n.m.u} \quad \Rightarrow \quad v = u \qquad \textbf{(eq3)}$$

Substituindo eq3 em eq1, vem:

$$N.M.v = n.m.u \quad \Rightarrow \quad N.M.v = n.m.v \quad \Rightarrow \quad N.M = n.m \quad \text{ou} \quad n = \frac{N.M}{m}$$

Questão 48 – Resposta: alternativa c

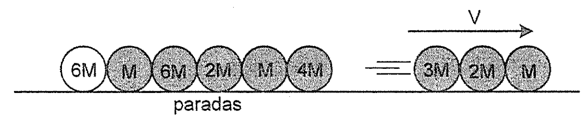
Dica: leia páginas 212 a 216 para uma discussão detalhada desse tipo de problema.

Questão 49 – Resposta: alternativa c

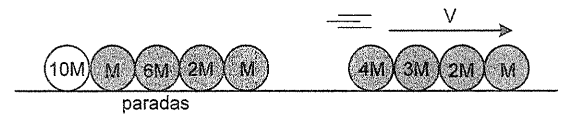
Dica: leia páginas 212 a 216 para uma discussão detalhada desse tipo de problema.

Questão 50 – Resposta:

a)



b)



c) Nesse caso, todas as bolas se espalham após a colisão. Algumas vão para frente, outras vão para trás, todas com velocidades variadas. Nesse caso teremos muito mais incógnitas do que equações e o problema de determinar as velocidades finais se torna indeterminado.

Dica: leia páginas 212 a 216 para uma discussão detalhada desse tipo de problema.

É importante que toda a teoria do livro seja previamente lida antes de passar para o estudo dos exercícios resolvidos. As discussões feitas ao longo da teoria são muito ricas e esclarecedoras e seria um grande desperdício sair meramente lendo as soluções de todos os problemas sem ter lido a teoria do capítulo e sem tentar resolvê-lo previamente.

Questão 51

Solução: Antes de resolver essa questão, considere inicialmente o caso genérico em que uma bola 1 de massa m_1, movendo-se com velocidade v_1, colide frontal e elasticamente com uma bola 2 de massa m_2, inicialmente em repouso ($v_2 = 0$). É fácil demonstrar que, após essa colisão, as bolas terão velocidades finais dadas por:

$$v_1' = \frac{v_1.(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \quad \textbf{(eq1)} \qquad \text{e} \qquad v_2' = \frac{2.m_1.v_1}{m_1 + m_2} \quad \textbf{(eq2)}$$

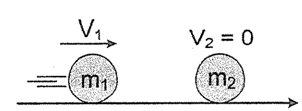


Figura 1 – antes da colisão

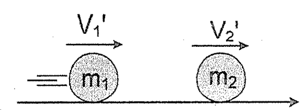
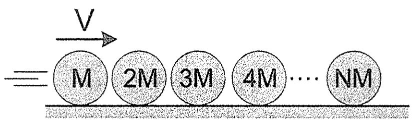


Figura 2 – depois da colisão

Veja a demonstração na página 432, relações eq4 e eq4.

ara resolver a presente questão 51, estudaremos as colisões sucessivas entre ada bola e a bola seguinte. Em cada caso, faremos uso da relação eq2 presentada anteriormente para determinar a velocidade final da bola seguinte, pós a colisão elástica.

onsidere a figura abaixo, na qual a bola 1, de massa $M_1 = M$, se aproxima com elocidade $V_1 = V$ da bola 2, de massa $M_2 = 2M$.



om base na relação eq2, após essa colisão elástica, a bola 2 irá adquirir uma elocidade V_2 dada por:

$$_2 = \frac{2.M_1.v_1}{M_1+M_2} = \frac{2.M.V}{M+2M} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{2.(M).V}{3M} \quad \textbf{(eq1)}$$

m seguida, com base na relação eq2, após a bola de massa $M_2 = 2M$ colidir om a bola de massa $M_3 = 3M$, esta última sairá com velocidade V_3 dada por:

$$_3 = \frac{2.M_2.v_2}{M_2+M_3} \overset{eq1}{=} \frac{2.(2M)}{2M+3M}.\frac{2.(M).V}{3M} \quad \Rightarrow \quad V_3 = \frac{(M).(2M).2^2.V}{(3M).(5M)} \quad \textbf{(eq2)}$$

inda com base na relação eq2, após a bola de massa $M_3 = 3M$ colidir com a ola de massa $M_4 = 4M$, esta última sairá com velocidade V_4 dada por:

$$_4 = \frac{2.M_3.v_3}{M_3+M_4} \overset{eq2}{=} \frac{2.(3M)}{3M+4M}.\frac{(M).(2M).2^2.V}{(3M).(5M)} \quad \Rightarrow \quad V_4 = \frac{(M).(2M).(3M)2^3.V}{(3M).(5M).(7M)} \quad \textbf{(eq3)}$$

pós a bola de massa $M_4 = 4M$ colidir com a bola de massa $M_5 = 5M$, esta última airá com velocidade V_5 dada por:

$$_5 = \frac{2.M_4.v_4}{M_4+M_5} \overset{eq3}{=} \frac{2.(4M)}{4M+5M}.\frac{(M).(2M).(3M).2^3.V}{(3M).(5M)(7M)} \quad \Rightarrow \quad V_5 = \frac{(M).(2M).(3M).(4M)2^4.V}{(3M).(5M).(7M).(9M)}$$

inalmente, após a bola de massa $M_{n-1} = (n-1)M$ colidir com a bola de massa $I_n = nM$, esta última sairá com velocidade V_n dada por:

$$V_n = \frac{(M).(2M).(3M).(4M).....[(n-1).M].2^{n-1}.V}{(3M).(5M).(7M).(9M).....(n-1\ +n).M} = \frac{1.2.3.4.5...(n-1).\ 2^{n-1}.V}{3.5.7.9....(2n-1)}$$

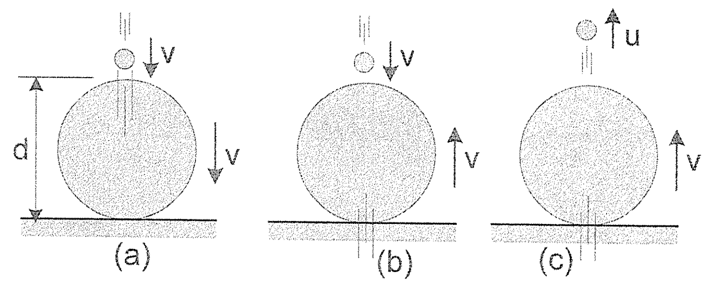
$$V_n = \frac{2^{n-1}.(n-1)!}{1.3.5.7.9...(2n-1)}.V$$

Questão 52

Solução: Após terem caído uma mesma altura h (Figura a), ambas as bolas possuem uma mesma velocidade $v = \sqrt{2gh}$. Em seguida, a bola de basquete colide elasticamente com o solo e inverte o sentido da sua velocidade, que agora aponta para cima $\uparrow v$ e colide frontalmente com a bola de tênis. Esta última, por sua vez, possui a mesma velocidade em módulo mas sentido contrário $\downarrow v$ como mostra a Figura **b** abaixo.

Sendo a massa da bola de basquete muito maior do que a massa da bola de tênis, sua velocidade permanece constante $\uparrow v$ antes e após a colisão com a bola de tênis. Sendo essa colisão elástica, o coeficiente de restituição e = 1 nas Figuras **b** e **c** nos permite escrever:

$$e = 1 = \frac{V_{\text{rel após}}}{V_{\text{rel antes}}} = \frac{u-v}{v+v} \quad \Rightarrow \quad u = 3v \quad \Rightarrow \quad u = 3\sqrt{2gh}$$



Assim, após o impacto, a bola de tênis (na Figura **c**) ainda subirá uma altura dada pela conservação de energia:

$$\frac{m.u^2}{2} = m.g.\Delta h \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{u^2}{2g} = \frac{9.(2gh)}{2g} = 9h$$

Assim, em relação ao solo, a bola de tênis subirá uma altura total:

$$H = d + \Delta h = d + 9h.$$

Questão 53

Solução:

a) Após terem caído uma mesma altura h (Figura a), todas as bolas possuem uma mesma velocidade $\downarrow v = \sqrt{2gh}$. Em seguida, a bola B_1 colide com o solo elasticamente, inverte o sentido do movimento e colide frontal e elasticamente com a bola B_2.

Sendo a massa da bola B_1 muito maior do que a massa da bola B_2, sua velocidade permanece constante $v_1 = \uparrow v$ antes e após a colisão com a bola B_2. Sendo essa colisão elástica, o coeficiente de restituição e = 1 nos permite determinar a velocidade $v_2\uparrow$ após colidir com B_1:

$$e = 1 = \frac{V_{rel\ após}}{V_{rel\ antes}} = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v} \quad \Rightarrow \quad v_2 = 2.v_1 + v = 3v \quad \Rightarrow \quad V_2 = (2^2 - 1).v$$

Para a colisão entre as bolas B_2 e B_3, vem:

$$e = 1 = \frac{V_{rel\ após}}{V_{rel\ antes}} = \frac{v_3 - v_2}{v_2 + v} \quad \Rightarrow \quad v_3 = 2.v_2 + v = 7v \quad \Rightarrow \quad V_3 = (2^3 - 1).v$$

Para a colisão entre as bolas B_3 e B_4, vem:

$$e = 1 = \frac{V_{rel\ após}}{V_{rel\ antes}} = \frac{v_4 - v_3}{v_3 + v} \quad \Rightarrow \quad v_4 = 2.v_3 + v = 15v \quad \Rightarrow \quad V_4 = (2^4 - 1).v$$

Assim, em linhas gerais, vemos que: $V_n = (2^n - 1).v$, com $v = \sqrt{2gh}$.

Desta forma, após a colisão entre a bola B_{n-1} e a bola B_n, esta última ainda subirá uma altura dada pela conservação de energia mecânica:

$$\frac{m_n.(v_n)^2}{2} = m_n.g.\Delta h \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{(v_n)^2}{2g} = \frac{(2^n - 1)^2.2gh}{2g} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = (2^n - 1)^2 h$$

Assim, em relação ao solo, a bola B_n subirá uma altura total:

$$H = d + \Delta h = d + (2^n - 1)^2.h$$

b) $H = d + (2^n - 1)^2.h$, para h = 1 m, H = 4000 m, desprezando d, vem:

$$4000 = (2^n - 1)^2.1 \quad \Rightarrow \quad n \cong 6.$$

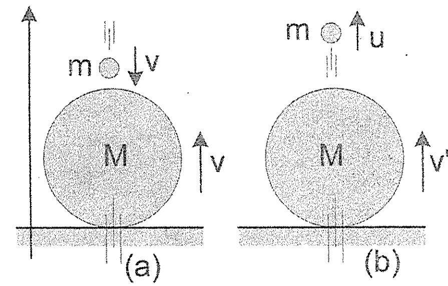
c) $v_n = (2^n - 1).v$ com $v = \sqrt{2gh}$, com g = 10 m/s², h = 1, $v_n \geq 11$ km/s, vem:

$$11 \times 10^3 \geq (2^n - 1)\sqrt{2 \times 10 \times 1}$$

Encontramos n ≥ 11,3 mas como n deve ser inteiro, o menor n inteiro que satisfaz será n = 12. Logicamente, a elasticidade requerida para esse caso seria um exagero, assim como a hipótese da existência de 12 bolas que satisfazem a condição $m_1 >> m_2 >> m_3 >>> ..... >> m_{12}$.

Questão 54 – Resposta: alternativa e

Solução: Após terem caído uma mesma altura h = 5 m, ambas as bolas possuem uma mesma velocidade $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2.10.5} = 10$ m/s. Em seguida, a bola de basquete colide elasticamente com o solo e inverte o sentido da sua velocidade, que agora aponta para cima ↑v = 10 m/s e colide frontalmente com a bola de tênis. Esta, por sua vez, possui a mesma velocidade em módulo mas sentido contrário ↓v = 10 m/s como na Figura a seguir.



Sendo essa colisão elástica, o coeficiente de restituição e = 1 nas Figura **a** e **b** nos permite escrever:

$$e = 1 = \frac{V_{rel\ após}}{V_{rel\ antes}} = \frac{u - v'}{v + v} \quad \Rightarrow \quad u - v' = 2v \quad \Rightarrow \quad v' = u - 2v \qquad \textbf{(eq1)}$$

A conservação da qdm do sistema formado pelas duas bolas, durante essa colisão, permite escrever:

$$\Sigma Q_{antes} = \Sigma Q_{depois}$$

$$M.v + m.(-v) = M.v' + m.u \qquad \textbf{(eq2)}$$

Substituindo eq1 em eq2, vem:

$$M.v + m.(-v) = M.(u-2v) + m.u$$

$$u = \left(\frac{3M - m}{M + m}\right).v = \left(\frac{3.600 - 60}{600 + 60}\right).10 \cong 26,3 \text{ m/s}$$

Assim, após a colisão, a bola de tênis ainda subirá uma altura vertical dada por:

$$\frac{m.u^2}{2} = m.g.\Delta h \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{(26,3)^2}{2 \times 10} \cong 34,75 \text{ m}$$

Questão 55

Solução:

a) O Diagrama 1 mostra os três estágios **a**, **b** e **c** da evolução do sistema formado pelas bolas 1, 2 e 3 durante a seqüência de colisões. Entre os estágios **a** e **b**, a bola 1 colide com a bola 2, ao passo que, entre os estágios **b** e **c**, a bola 2 colide com a bola 3.

Como as bolas 2 e 3 possuem qdm's iguais a Q e Q no estágio **c**, pela conservação da qdm, estas bolas certamente possuíam qdm's respectivamente iguais a 2Q e 0 no estágio anterior (estágio **b**) antes de colidirem entre si.

Da mesma forma, como as bolas 1 e 2 possuem qdm's respectivamente iguais a Q e 2Q no estágio **b**, pela conservação da qdm, estas mesmas bolas certamente possuíam qdm's respectivamente iguais a 3Q e 0 no estágio anterior (estágio a) antes de colidirem entre si.

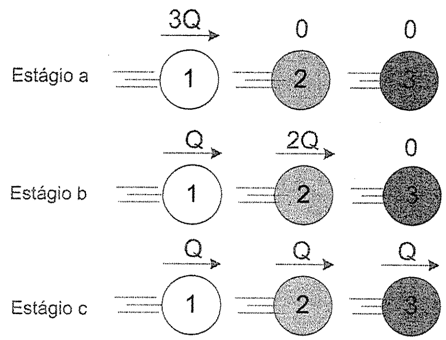


Diagrama 1

Uma relação muito útil consiste em escrever a energia cinética Ecin de uma partícula em função da sua qdm Q, conforme faremos abaixo:

$$Q = m.v \;\Rightarrow\; v = \frac{Q}{m}, \quad Ecin = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{Q}{m}\right)^2 \;\Rightarrow\; \boxed{Ecin = \frac{Q^2}{2m}} \quad \textbf{(eq1)}$$

Pela conservação da energia cinética na colisão elástica entre as bolas 2 e 3, do estágio **b** para o estágio **c** (acompanhe pela Diagrama 1), temos:

$$(Ecin_2 + Ecin_3)_{\text{estágio B}} = (Ecin_2 + Ecin_3)_{\text{estágio C}}$$

$$\frac{(2Q)^2}{2.m_2} + \frac{(0)^2}{2.m_3} = \frac{(Q)^2}{2.m_2} + \frac{(Q)^2}{2.m_3} \;\Rightarrow\; \boxed{m_3 = \frac{m_2}{3}} \quad \textbf{(eq2)}$$

Pela conservação da energia cinética na colisão elástica entre as bolas 1 e 2, do estágio **a** para o estágio **b** (acompanhe pela Diagrama 1), temos:

$$(Ecin_1 + Ecin_2)_{\text{estágio A}} = (Ecin_1 + Ecin_2)_{\text{estágio B}}$$

$$\frac{(3Q)^2}{2.m_1} + \frac{(0)^2}{2.m_2} = \frac{(Q)^2}{2.m_1} + \frac{(2Q)^2}{2.m_2} \;\Rightarrow\; \boxed{m_2 = \frac{m_1}{2}} \quad \textbf{(eq3)}$$

Substituindo eq3 em eq2, vem: $m_3 = \frac{m_2}{3} = \frac{1}{3}\frac{m_1}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{m_3 = \frac{m_1}{6}}$ **(eq4)**

Vemos que as massas das bolas 1, 2 e 3 estão na razão **6m, 3m, m**. Como as bolas possuem qdm's iguais (Q, Q, Q) no estágio **c**, suas velocidades naquele estágio só podem estar na razão **v, 2v, 6v**.

b) No início, a bola 1 parte do repouso de uma altura H e desce executando o movimento pendular. No estágio **a**, logo antes de colidir com bola 2, a bola 1 possui uma qdm igual a 3Q (veja Diagrama 1). Pela conservação da energia, podemos escrever:

$$m_1.g.H = \frac{(3Q)^2}{2m_1} \quad \textbf{(eq5)}$$

Após todas as colisões (ou seja, no estágio **c**), a bola 1 possui quantidade de movimento igual a Q (veja o Diagrama 1) e agora subirá até que toda sua energia cinética se converta em Epot gravitacional, atingindo uma altura máxima h_1. Pela conservação da Emec, temos:

$$\frac{(Q)^2}{2m_1} = m_1.g.h_1 \quad \textbf{(eq6)}$$

Dividindo eq5 e eq6, membro a membro, vem: $\boxed{h_1 = H/9}$.

Da mesma forma, após todas as colisões (ou seja, no estágio **c**), a bola 2 possui quantidade de movimento igual a Q (veja o Diagrama 1) e agora subirá até que toda sua energia cinética se converta em Epot gravitacional, atingindo uma altura máxima h_2. Pela conservação da Emec, temos:

$$\frac{(Q)^2}{2m_2} = m_2.g.h_2 \quad \textbf{(eq7)}$$

Dividindo eq7 por eq5, membro a membro, e considerando eq3, vem:

$$\boxed{h_2 = 4H/9}$$

Finalmente, após todas as colisões (ou seja, no estágio **c**), a bola 3 possui quantidade de movimento igual a Q (veja o Diagrama 1) e agora subirá até que toda sua energia cinética se converta em Epot gravitacional, atingindo uma altura máxima h_3. Pela conservação da Emec, temos:

$$\frac{(Q)^2}{2m_3} = m_3.g.h_3 \quad \textbf{(eq8)}$$

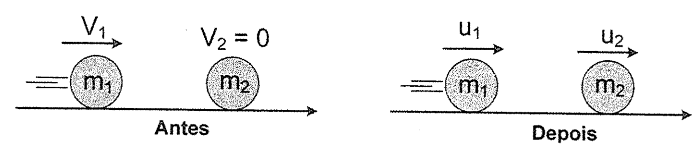
Dividindo eq8 por eq5, membro a membro, e considerando eq4, vem: $\boxed{h_3 = 4H}$.

Questão 56

Solução:

a) Pela conservação da quantidade de movimento na colisão, vem:

$$\boxed{m_1.u_1 + m_2.u_2 = m_1.V_1} \quad \textbf{(eq1)}$$



Pela definição de coeficiente de restituição, vem:

$$e = \frac{u_2 - u_1}{V_1} \;\Rightarrow\; \boxed{-u_1 + u_2 = e.V_1} \quad \textbf{(eq2)}$$

Resolvendo o sistema linear das equações eq1 e eq2, encontramos:

$$u_1 = \frac{m_1.v_1.(1+e)}{m_1+m_2} \quad \textbf{(eq3)} \qquad e \qquad u_2 = \frac{v_1.(m_1 - m_2.e)}{m_1+m_2} \quad \textbf{(eq4)}$$

Sendo $Q = \Delta Emec = Ecin_F - Ecin_i$, vem:

$$Q = \frac{m_1.u_1^2}{2} + \frac{m_2.u_2^2}{2} - \frac{m_1.v_1^2}{2} \quad \textbf{(eq5)}$$

Substituindo eq3 e eq4 em eq5, vem:

$$Q = \frac{m_1.u_1^2}{2} + \frac{m_2.u_2^2}{2} - \frac{m_1.v_1^2}{2}$$

$$Q = \frac{m_1}{2}\frac{m_1^2.v_1^2.(1+e)^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_2}{2}\frac{v_1^2.(m_1-m_2.e)^2}{(m_1+m_2)^2} - \frac{m_1.v_1^2}{2}$$

$$Q = \frac{m_1}{2}\frac{m_1^2.v_1^2.(1+e)^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_2}{2}\frac{v_1^2.(m_1-m_2.e)^2}{(m_1+m_2)^2} - \frac{m_1.v_1^2(m_1+m_2)^2}{2(m_1+m_2)^2}$$

Reduzindo os termos semelhantes, vem: $Q = -\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}.v_1^2$ **(eq6)**

Note que nas colisões não elásticas teremos $Emec_F < Emec_i$ e, consequentemente o parâmetro $Q = Emec_F - Emec_i$ será negativo nessas colisões.

b) a fração f pedida vale:

$$f = \frac{|\Delta E_{mec}|}{E_{mec\ i}} = \frac{|Q|}{\frac{m_1.v_1^2}{2}} \overset{eq6}{=} \frac{\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}.v_1^2}{\frac{m_1.v_1^2}{2}} \Rightarrow f = \frac{1-e^2}{1+\frac{m_1}{m_2}} \quad \textbf{(eq7)}$$

c) A perda de energia mecânica tem módulo dado por pela relação eq6:

$$|Q| = \frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}.v_1^2 \quad \textbf{(eq8)}$$

Assim, para que a perda |Q| de energia mecânica seja máxima, o coeficiente de restituição **e** na relação eq8 deve assumir o seu valor mínimo e = 0, ou seja, deve ser uma colisão inelástica (bate-gruda) ☺.

d) Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior, para que a perda |Q| de energia mecânica seja mínima, o coeficiente de restituição **e** na relação eq8 deve assumir o seu valor máximo e = 1 (colisão elástica). Nesse caso, teremos

|Q| = 0, confirmando que não há perda de energia mecânica nas colisões elásticas.

Questão 57

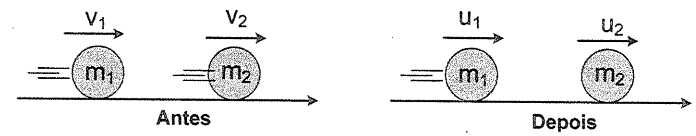
Solução:

a) Pela conservação da quantidade de movimento na colisão, vem:

$$m_1.u_1 + m_2.u_2 = m_1.v_1 + m_2.v_2 \quad \textbf{(eq1)}$$

Pela definição de coeficiente de restituição, vem:

$$e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} \Rightarrow -u_1 + u_2 = e.v_1 - e.v_2 \quad \textbf{(eq2)}$$



Nesse caso, escrever o sistema linear na forma matricial para determinar a solução literal pela regra de Cramer agiliza bastante o processamento algébrico numa prova:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e.(v_1 - v_2) \\ m_1.v_1 + m_2.v_2 \end{bmatrix}$$

Assim, pela Regra de Cramer, temos:

$$u_1 = \frac{\begin{vmatrix} e.(v_1-v_2) & 1 \\ m_1.v_1+m_2.v_2 & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}} = \frac{m_2.e.(v_1-v_2) + m_1.v_1 + m_2.v_2}{m_1+m_2}$$

Assim, encontramos uma expressão literal para u_1:

$$u_1 = \frac{(m_1 - e.m_2).v_1 + m_2.v_2.(1+e)}{m_1+m_2} \quad \textbf{(eq3)}$$

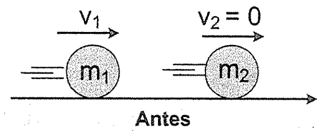
Pela Regra de Cramer, temos:

$$u_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & e.(v_1-v_2) \\ m_1 & m_1.v_1+m_2.v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}} = \frac{m_1.e.(v_1-v_2) + m_1.v_1 + m_2.v_2}{m_1+m_2}$$

Assim, encontramos uma expressão literal para u_2:

$$u_2 = \frac{m_1.v_1.(1+e) + (m_2 - e.m_1).v_2}{m_1 + m_2} \qquad \textbf{(eq4)}$$

b) Na resolução do item a da questão 56, encontramos uma expressão literal para o parâmetro Q para o caso em que a bola 1 colidia com uma bola 2 parada, como mostra a figura abaixo:

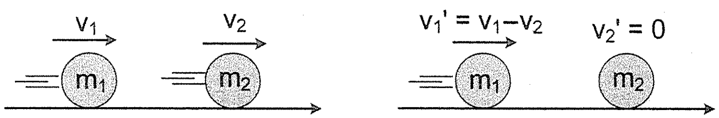


Naquela ocasião, o resultado obtido para o parâmetro Q era função da velocidade v_1 da bola 1 antes da colisão, sendo dado por:

$$Q = -\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}.v_1^2$$

Entretanto, será que esse resultado pode ser aproveitado na resolução do item b da presente questão 57 ? Bom, a princípio não. Afinal, em nosso problema atual, a bola 2 não se encontra em repouso antes da colisão, certo ?

Ora, mas isso é apenas uma questão de referencial. A bola 2 não se encontra em repouso quando se considera o referencial da Terra, entretanto, se analisarmos o problema no referencial da própria bola 2, ela estará em repouso, correto ?



Antes da colisão no referencial da Terra — **Antes da colisão no referencial da bola 2**

A Figura acima mostra a situação que antecede a colisão, tanto no referencial da Terra como no referencial da própria bola 2, sendo que nesse ultimo referencial, a bola 1 se aproxima da bola 2 com velocidade $v_1' = v_1 - v_2$, enquanto a própria bola 2 encontra-se parada ($v_2' = 0$). Nesse caso, o resultado obtido no item b da questão 56 se aplica, afinal, nesse referencial, a bola 2 agora se encontra em repouso antes da colisão ($v_2' = 0$). Assim, a variação da energia mecânica Q' sofrida pelo sistema durante a colisão, nesse referencial, é dada por:

$$Q' = -\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}.(v_1')^2 = -\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}.(v_1-v_2)^2$$

Entretanto, embora saibamos que a energia mecânica dependa do referencial inercial considerado, variações de energia mecânica $Q = \Delta Emec$ independem do referencial inercial adotado. Assim, o resultado acima também se aplica ao referencial da Terra:

$$Q = -\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}.(v_1-v_2)^2$$

O aluno pode tentar determinar a expressão acima para o parâmetro Q sem efetuar esse artifício da mudança de referencial. Para isso, basta seguir o mesmo raciocínio desenvolvido na questão 56. O processamento algébrico, entretanto, se torna tão denso e volumoso que se torna quase impraticável. Tente fazer ☺.

c) Conforme já era esperado, o valor do coeficiente de restituição das colisões elásticas (Q = 0), de acordo com o resultado obtido no item b, vale e = 1.

Questão 58 – Resposta: $e = \sqrt{2}/2$

Questão 59

Solução:

De acordo com a relação eq8 página 423, a máxima dissipação de energia mecânica $|Q|_{Max}$ ocorre para e = 0 (colisão inelástica – bate-gruda), ao passo que a mínima dissipação de energia mecânica $|Q|_{min} = 0$ ocorre na colisão elástica.

Note que, nas colisões em geral, sempre ocorre: $Emec_F \le Emec_i$.

Assim, em qualquer colisão, o módulo da energia mecânica dissipada Q vale:

$$|Q| = Emec_i - Emec_F$$

Assim, podemos escrever $Emec_i = Emec_F + |Q|$ **(eq1)**

Perceba que, em nosso problema, foi fixado o valor de $Emec_F = 0{,}2$ J. De eq1, vem:

$$Emec_i = 0{,}2 + |Q| \qquad \textbf{(eq2)}$$

Assim, de acordo com eq2, tendo sido fixado $Emec_F = 0{,}2$ J, qual a condição para que a energia mecânica inicial $Emec_i$ seja máxima ? Ora, $Emec\text{-}i_{\,max}$ ocorrerá para $|Q|_{max}$, o que, de acordo com a relação eq8 página 423, requer **e** = 0, ou seja, que a colisão seja inelástica (bate-gruda).

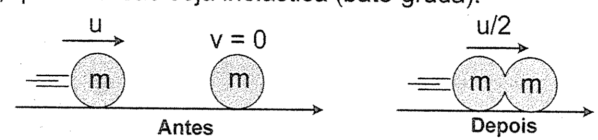


Figura 1 – colisão inelástica

A Figura 1 mostra o sistema antes e após a colisão inelástica, já satisfazendo a conservação da qdm do sistema.

Entretanto, segundo o enunciado, temos: $Emec_F = \dfrac{(2m).(u/2)^2}{2} = 0{,}2$ J

Sendo m = 0,1 kg, vem: $\dfrac{(0{,}2).(u/2)^2}{2} = 0{,}2 \Rightarrow \boxed{u = 2\sqrt{2}\ \text{m/s}}$ **(máx)**

Assim acabemos de determinar o valor máximo da velocidade inicial u para qual a energia mecânica final do sistema vale 0,2 J.

Ainda de acordo com eq2, tendo sido fixado $Emec_F = 0{,}2$ J, qual a condição para que a energia mecânica inicial Emec-i seja mínima ? Ora, Emec-i_{min} ocorrerá para $|Q|_{min}$, o que, de acordo com relação eq8 página 423, requer **e** = 1, ou seja, que a colisão seja elástica.

Nesse caso, teremos $Emec_i = Emec_F = 0{,}2$ J, assim:

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{(0{,}1).u^2}{2} = 0{,}2 \Rightarrow \boxed{u = 2\ \text{m/s}}\ \textbf{(mín)}$$

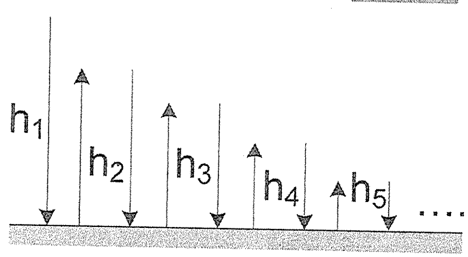
Assim acabemos de determinar o valor mínimo da velocidade inicial u para qual a energia mecânica final do sistema vale 0,2 J.

Questão 60

Solução:

a) O tempo que a bola leva para cair a primeira altura $h_1 = h$ é dado por:

$$h_1 = h = \frac{g.t_1^2}{2} \Rightarrow \boxed{t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}}\ \textbf{(eq1)}$$



O tempo total gasto nesse percurso é dado por:

$$T = t_1 + t_2 + t_2 + t_3 + t_3 + t_4 + t_4 + t_5 + t_5 + \ldots\ldots\ldots\ldots t_n + t_n$$

$$T + t_1 = t_1 + t_1 + t_2 + t_2 + t_3 + t_3 + t_4 + t_4 + t_5 + t_5 + \ldots\ldots\ldots\ldots t_n + t_n$$

$$T + t_1 = 2.(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \ldots\ldots\ldots + t_n)$$

$$T = 2.(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \ldots\ldots\ldots + t_n) - t_1$$

De acordo com a *propriedade dos tempos* apresentada na página 217, os sucessivos tempos de queda estão em progressão geométrica de razão **e**. Assim, podemos escrever:

$$T = 2.(t_1 + t_1.e + t_1.e^2 + t_1.e^3 + t_1.e^4 + \ldots\ldots\ldots + t_1.e^{n-1}) - t_1$$

Usando a fórmula do limite da soma dos tempos de uma P.G. convergente, podemos escrever:

$$T = 2.(t_1 + t_1.e + t_1.e^2 + t_1.e^3 + t_1.e^4 + \ldots\ldots\ldots + t_1.e^{n-1}) - t_1$$

$$T = 2.\left(\frac{t_1}{1-e}\right) - t_1 = 2.\left(\frac{t_1}{1-e}\right) - \frac{t_1.(1-e)}{(1-e)} = t_1\left(\frac{1+e}{1-e}\right)$$

Assim, usando eq1, vem: $\boxed{T = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}.\left(\dfrac{1+e}{1-e}\right)}$

É importante que toda a teoria do livro seja previamente lida antes de passar para o estudo dos exercícios resolvidos. As discussões feitas ao longo da teoria são muito ricas e esclarecedoras e seria um grande desperdício sair meramente lendo as soluções de todos os problemas sem ter lido a teoria do capítulo e sem tentar resolvê-los previamente.

b) A distância total percorrida pela bola é dada por:

$$D = h_1 + h_2 + h_2 + h_3 + h_3 + h_4 + h_4 + h_5 + h_5 + \ldots\ldots\ldots\ldots h_n + h_n$$

$$D + h_1 = h_1 + h_1 + h_2 + h_2 + h_3 + h_3 + h_4 + h_4 + h_5 + h_5 + \ldots\ldots\ldots\ldots h_n + h_n$$

$$D + h_1 = 2.(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + \ldots\ldots\ldots + h_n)$$

$$D = 2.(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + \ldots\ldots\ldots + h_n) - h_1$$

De acordo com a *propriedade das alturas* apresentada na página 217, as sucessivas alturas percorrida pela bola estão em progressão geométrica de razão $\mathbf{e^2}$. Assim, podemos escrever:

$$D = 2.(h_1 + h_1.e^2 + h_1.e^4 + h_1.e^6 + h_1.e^8 + \ldots\ldots\ldots + h_1.e^{2(n-1)}) - h_1$$

Usando a fórmula do limite da soma dos tempos de uma P.G. convergente, podemos escrever:

$$D = 2.(h_1 + h_1.e^2 + h_1.e^4 + h_1.e^6 + h_1.e^8 + \ldots\ldots\ldots + h_1.e^{2(n-1)}) - h_1$$

$$D = 2.\left(\frac{h_1}{1-e^2}\right) - h_1 = 2.\left(\frac{h_1}{1-e^2}\right) - \frac{h_1.(1-e^2)}{(1-e^2)} = h_1\left(\frac{1+e^2}{1-e^2}\right)$$

Sendo $h_1 = h$, vem: $\boxed{D = h\left(\dfrac{1+e^2}{1-e^2}\right)}$

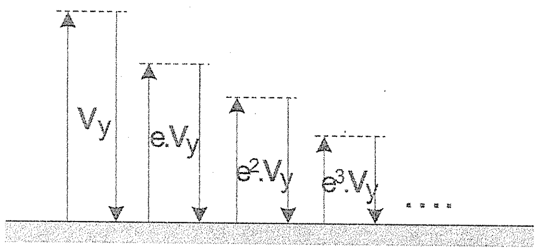
) Logicamente, toda a energia mecânica inicial mgh do sistema foi dissipada esse processo.

uestão 61 – Respostas: a) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, b) X = 6m, c) 45 m

ica: veja a resolução da questão 60

uestão 62

olução: Em cada colisão vertical entre a bola e o chão, a componente vertical y da sua velocidade é multiplicada por **e** (coeficiente de restituição). Dessa rma, no 1º impacto com o solo, a velocidade Vy da bolinha passa de u.sen$\alpha\downarrow$ para senα.e$\uparrow$. Na 2ª colisão com o solo, a velocidade Vy da bolinha passa de u.senα.e$\downarrow$ ara u.senα.e$^2\uparrow$. Na 3ª colisão com o solo, a velocidade Vy da bolinha passa de senα.e$^2\downarrow$ para u.senα.e$^3\uparrow$; e assim por diante.



cada colisão, entretanto, sua componente horizontal V_x = u.cosα permanece alterada por não haver forças nessa direção.

tempo de permanência da bola no ar, entre cada duas colisões (tempo de vôo) é ado por:

$$t_{vôo} = \frac{2.Vy}{g}$$

omo as componentes verticais Vy da velocidade formam uma seqüência u.senα, senα.e, u.senα.e^2, u.senα.e^3, u.senα.e^4 ....., os tempos de vôo t_1, t_2, t_3, ... formam a

equência $\dfrac{2.u.sen\alpha}{g}, \dfrac{2.u.sen\alpha.e}{g}, \dfrac{2.u.sen\alpha.e^2}{g}, \dfrac{2.u.sen\alpha.e^3}{g}, ...$.

á o alcance horizontal A, em cada trecho parabólico, é dado por:

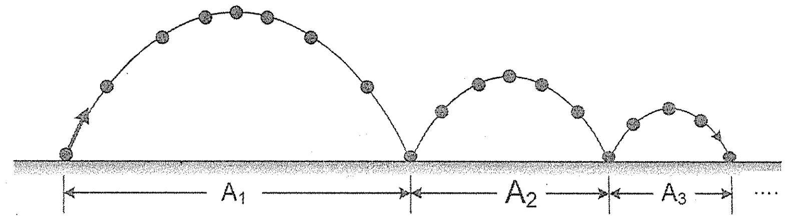
$$A = V_x \,.\, t_{vôo} = u.cos\alpha.\, t_{vôo}$$

essa forma, os alcances horizontais A_1, A_2, A_3, A_4,........., por sua vez, formam a equência:

$$\frac{2.u.sen\alpha.u.\cos\alpha}{g}, \frac{2.u.sen\alpha.u.\cos\alpha.e}{g}, \frac{2.u.sen\alpha.u.\cos\alpha.e^2}{g}, \frac{2.u.sen\alpha.u.\cos\alpha.e^3}{g}, ...$$

Ou, simplificando, vem:

$$\frac{u^2.sen2\alpha}{g}, \frac{u^2.sen2\alpha.e}{g}, \frac{u^2.sen2\alpha.e^2}{g}, \frac{u^2.sen2\alpha.e^3}{g}, ...$$



Assim, vamos para as respostas dessa questão:

a) $A_1 + A_2 = \dfrac{u^2.sen2\alpha}{g} + \dfrac{u^2.sen2\alpha.e}{g} = \boxed{\dfrac{u^2.sen2\alpha.(e+1)}{g}}$

b) D = A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n

$$D = \frac{u^2.sen2\alpha}{g} + \frac{u^2.sen2\alpha.e}{g} + \frac{u^2.sen2\alpha.e^2}{g} + \frac{u^2.sen2\alpha.e^3}{g} + ... + \frac{u^2.sen2\alpha.e^{n-1}}{g}$$

$$D = \frac{u^2.sen2\alpha}{g}.(1+e+e^2+e^3+.....+e^{n-1})$$

Usando a fórmula da soma dos termos da P.G., vem:

$$\boxed{D = \frac{u^2.sen2\alpha}{g}.\left(\frac{e^n-1}{e-1}\right)}$$

c) O limite da soma 1 + e + e^2 + e^3 + ... + e^{n-1} (0 < e < 1), quando n tende a infinito, vale:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-e}$$

Assim, a distância total percorrida na horizontal, até a bolinha parar de saltar, vale:

$$\boxed{D_{total} = \frac{u^2.sen2\alpha}{g}.\left(\frac{1}{1-e}\right)}$$

Questão 63

Respostas: Como os alcances horizontais formam uma P.G. de razão **e**, e alturas formam uma P.G. de razão **e**^{2}, conforme largamente demonstrado (página 217), temos x = 18 m, h_1 = 81 m e h_2 = 16 m. Em caso de dúvida, consulte a teoria da página 216.

Questão 64

Solução: De acordo com a *propriedade das alturas* apresentada na página 217, as sucessivas alturas caída pela bola estão em progressão geométrica de razão e^2. Assim, pela relação eq58 página 217, podemos escrever:

$$H_n = H_{n-1} \cdot e^2 \qquad \textbf{(eq58)}$$

$$(h-d) = h.e^2$$

Isolando d, vem: $d = h.(1-e^2)$

Questão 65

Solução:

a) Seja u↓ a componente vertical da velocidade da bola logo **antes** de colidir com um degrau e v↑ a componente vertical da velocidade da bola logo **após** aquela colisão. Como o movimento da bola é repetitivo, essas mesmas velocidades se repetem a cada degrau.

Pela definição de coeficiente de restituição, vem:

$$v = u.e \qquad \textbf{(eq1)}$$

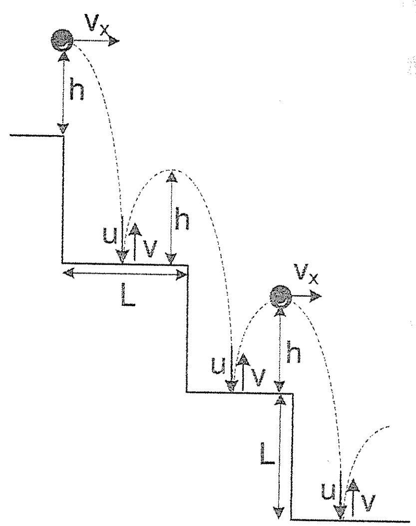
Pela cinemática do movimento vertical, podemos escrever:

$$u = (-v) + g.t \qquad \textbf{(eq2)}$$

onde t é o tempo decorrido entre duas colisões consecutivas.

Para que a bola desça a escada tocando em todos os degraus igualmente, o deslocamento horizontal da bola entre duas colisões consecutivas (alcance horizontal) deve coincidir com a largura L de cada degrau, ou seja:

$$L = v_x.t \qquad \textbf{(eq3)}$$



A conservação da energia mecânica entre dois degraus consecutivos nos permite escrever:

$$\frac{\cancel{m}.v_x^2}{2} + \frac{m.v^2}{2} + m.g.L = \frac{\cancel{m}.v_x^2}{2} + \frac{m.u^2}{2}$$, dividindo por m/2 e usando eq1, vem:

$$u^2 = v^2 + 2gL = (u.e)^2 + 2gL \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{\frac{2gL}{1-e^2}} \qquad \textbf{(eq4)}$$

De eq1, eq2 e eq3, vem: $t = \frac{u+v}{g} = \frac{u+u.e}{g} = \frac{L}{v_x} \Rightarrow v_x = \frac{gL}{u.(1+e)}$ **(eq5)**

Substituindo eq4 em eq5, encontramos a velocidade horizontal v_x necessária para que a bola desça a escada tocando em cada degrau:

$$v_x = \sqrt{\frac{gL}{2}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}$$

b) a altura h atingida pela bola acima de cada degrau é determinada pela conservação da energia mecânica:

$$\frac{m.v_x^2}{2} + m.g.h = \frac{m.v_x^2}{2} + \frac{m.v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad m.g.h = \frac{m.v^2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$h = \frac{(u.e)^2}{2g} \overset{eq4}{=} \frac{e^2}{2g}.\left(\frac{2gL}{1-e^2}\right) \quad \Rightarrow \quad h = \frac{L.e^2}{1-e^2}$$

O mesmo resultado acima poderia ter sido obtido mais facilmente, lembrando que, de acordo com a *propriedade das alturas* apresentada na página 217, as sucessivas alturas caída pela bola estão em progressão geométrica de razão e^2. Assim, pela relação eq58 página 217, podemos escrever:

$$H_n = H_{n-1} \cdot e^2 \qquad \textbf{(eq58)}$$

$$h = (h+L).e^2 \quad \Rightarrow \quad h = h.e^2 + L.e^2$$

$$h = \frac{L.e^2}{1-e^2}$$

Questão 66 – Resposta: $h = \frac{L}{2}.tg\alpha.(1-e)$

Dica: segue um raciocínio muito semelhante ao da resolução da questão 65, com $u = v_o.sen\alpha$ e $v = e.u = e.v_o.sen\alpha$.

Questão 67 – Resposta: 80 m/s

Questão 68 – Resposta: 9 km/s

Questão 69

a) Pela conservação da qdm na direção tangencial (t), vem:

$$m.V_o.sen\alpha = m.V_1.cos\alpha$$

$$V_o.sen\alpha = V_1.cos\alpha \qquad \textbf{(eq1)}$$

Em colisões bidimensionais, o coeficiente de restituição **e** relaciona a velocidade relativa entre o corpo e o anteparo, antes e após a colisão, tomando-se apenas as componentes na direção normal n. Assim, pela definição de coeficiente de restituição (leia página 222), vem:

$$e = \frac{|V_{rel-após}|_n}{|V_{rel-antes}|_n} = \frac{(V_1)_n}{(V_o)_n} \Rightarrow e = \frac{V_1.sen\alpha}{V_o.\cos\alpha}$$

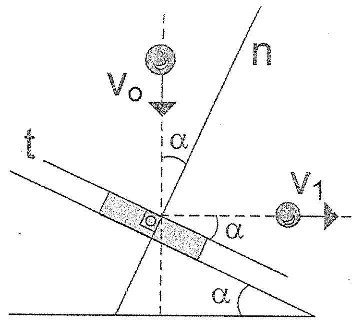
$\boxed{V_1.sen\alpha = e.V_o.cos\alpha}$ **(eq2)**

Multiplicando eq1 por eq2, membro a membro, vem:

$$V_1.V_o.sen\alpha.sen\alpha = e.V_1.V_o.cos\alpha.cos\alpha$$

$$tg^2\alpha = e \Rightarrow tg\alpha = \sqrt{e}$$

$$\boxed{\alpha = arctg\sqrt{e}}$$



b) De eq1, vem: $V_1 = V_o.tg\alpha \Rightarrow \boxed{V_1 = V_o.\sqrt{e}}$

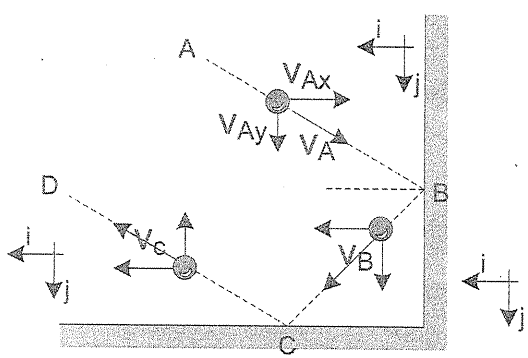
Questão 70

Solução: Ao incidir no ponto B, a bola possui uma velocidade:

$$\vec{V}_A = (-V_{Ax}).i + V_{Ay}.j\,.$$

Ao colidir no ponto B, a componente tangencial (vertical) da velocidade da bola se conserva, enquanto sua componente normal (horizontal) inverte o sentido e fica multiplicada pelo coeficiente de restituição e (veja a figura). Assim, após a colisão em B, a velocidade da bola é dada por:

$$\vec{V}_B = (+e.V_{Ax}).i + V_{Ay}.j$$



Ao colidir no ponto C, a componente tangencial (horizontal) da qdm da bola se conserva, enquanto sua componente normal (vertical) inverte o sentido e fica multiplicada pelo coeficiente de restituição e. Assim, após a colisão em C, a velocidade da bola é dada por:

$$\vec{V}_C = (+e.V_{Ax}).i + (-e.V_{Ay}).j = (-e).(-V_{Ax}.i + V_{Ay}.j) = -e.\vec{V}_A$$

$\boxed{\vec{V}c = -e.\vec{V}_A}$ **(eq1)**

Da relação vetorial eq1 encontrada acima, concluímos que a velocidade final $\vec{V}c$ e a velocidade inicial $\vec{V}_a$ tem mesma direção (são paralelas) e tem sentidos opostos. Adicionalmente, aplicando-se o módulo em ambos os membros da relação eq1, vem:

$$\vec{V}c = -e.\vec{V}_A \Rightarrow |\vec{V}_C| = |-e.\vec{V}_A| = |-e|.|\vec{V}_A| \Rightarrow \boxed{V_c = e.V_A}$$

Sendo muito breve a duração dessa sequência de colisões, a ação da gravidade foi desprezada na resolução do problema.

Questão 71 – Resposta: $v_F = v/2$, $\alpha = 75^\circ$

Questão 72 – Resposta: a) 45° b) $v = v_o.sen45^\circ$

Questão 73

Solução:

a) Pela conservação da qdm da bola na direção tangencial (t), vem:

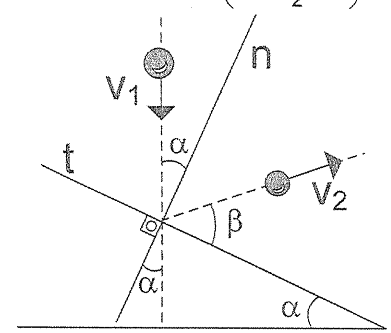
$\boxed{v_1.sen\alpha = v_2.cos\beta}$ **(eq1)**

Pela definição de coeficiente de restituição, tomando as velocidades relativas na direção normal (n), vem:

$$e = \frac{|V_{rel-após}|_n}{|V_{rel-antes}|_n} = \frac{(V_2)_n}{(V_1)_n} \Rightarrow e = \frac{v_2.sen\beta}{v_1.\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{V_2.sen\beta = e.V_1.cos\alpha} \quad \textbf{(eq2)}$$

Isolando senβ em eq2, cosβ em eq1, da relação fundamental da trigonometria, vem:

$$sen^2\beta + cos^2\beta = 1 \Rightarrow \left(\frac{e.v_1.\cos\alpha}{v_2}\right)^2 + \left(\frac{v_1.sen\alpha}{v_2}\right)^2 = 1$$



$(v_2)^2 = (v_1)^2.(\text{sen}^2\alpha + e^2.\cos^2\alpha) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_2 = v_1\sqrt{\text{sen}^2\alpha + e^2.\cos^2\alpha}}$ **(eq3)**

b) Substituindo eq3 em eq1, vem: $v_1.\text{sen}\alpha = v_1\sqrt{\text{sen}^2\alpha + e^2.\cos^2\alpha}\,.\cos\beta$

$$\cos\beta = \frac{\text{sen}\alpha}{\sqrt{\text{sen}^2\alpha + e^2.\cos^2\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = \arccos\left(\frac{\text{sen}\alpha}{\sqrt{\text{sen}^2\alpha + e^2.\cos^2\alpha}}\right)}$$

Questão 74

Solução: Quando abandonado do repouso, o conjunto, formado pelas duas bolas de aço conectadas por uma haste, cai uma altura h = 0,2 m, adquirindo uma velocidade $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2.(10).0,2} = 2$ m/s↓ como mostra a Figura 1. Quando a bolas de aço se chocam com as bases de latão e aço, elas retornam com velocidades respectivamente iguais a (Figura 2):

$v_1 = e_1.v = (0,3).2 = 0,6$ m/s↑ $\qquad v_2 = e_2.v = (0,9).2 = 1,8$ m/s↑

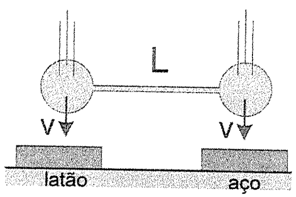


Figura 1

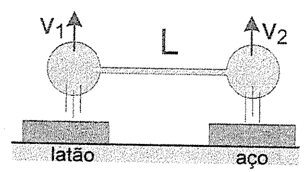


Figura 2

O movimento de subida das bolas (Figura 3a), após a colisão (assim como o movimento de todo corpo rígido), pode ser interpretado como sendo a superposição do movimento do seu centro de massa (CM) mais o movimento das partes que compõem o sistema em torno do seu centro de massa. Observe as Figuras 3a, 3b e 3c:

Figura 3a

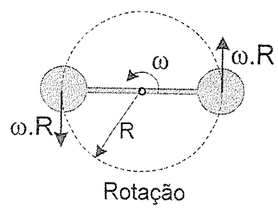


Figura 3b

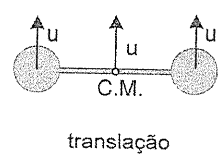


Figura 3c

- **Translação do centro de massa:** bolas e centro de massa transladam com uma velocidade comum de translação ↑u (Figura 3c) que é a própria velocidade do centro de massa.
- **rotação:** as duas bolas giram em torno do centro de massa do sistema com velocidade de rotação ω.R (Figura 3b).

Assim, observando atentamente as Figuras 3a, 3b e 3c, podemos escrever:

$v_1 = u - \omega.R = 0,6$ m/s **(eq1)**

$v_2 = u + \omega.R = 1,8$ m/s **(eq2)**

Resolvendo o sistema, encontramos u = 1,2 m/s e ω.R = 0,6 m/s.

Da Figura 3b, sendo L = 2R = 0,6 m, temos: R = 0,3 m

Assim, sendo ω.R = 0,6 m/s, vem: **ω = 2 rad/s**.

Questão 75 – Resposta: alternativa d

Dica: Veja a propriedade do espelhamento – página 224 – Figuras 66 e 67.

Questão 76

Solução:

a) O movimento de queda dessa bola no interior desse poço vai durar:

$$H = \frac{g.t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 80 = \frac{10.t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_{queda} = 4s$$

Se o poço não existisse, a bola lançada horizontalmente atingiria um alcance horizontal:

$$A = v_x.t_{queda} = v.\,t_{queda} = 10 \,.\, 4 = \text{veja } 40 \text{ m}$$

Para determinar quantas vezes a bola colidirá com as paredes verticais do poço antes de atingir o seu fundo, usaremos a propriedade do espelhamento discutida na página 224, Figuras 66 e 67.

Como a distância entre as paredes do poço (largura do poço) vale 6 m, a componente horizontal v_x→ da velocidade da bolinha inverte de sentido a cada 6 m percorridos na horizontal, isto é, a cada colisão. A componente vertical vy↓ da velocidade, assim como o tempo de queda, não é afetada pelas colisões.

Assim, ao percorrer a distância horizontal de 40 m, invertendo o sentido do movimento a cada 6m (a cada colisão), quantas colisões haverá ?

Se o alcance horizontal estivesse no intervalo $0\,\text{m} < A < 6\,\text{m}$, a bola atingiria o fundo do poço sem tocar nas paredes.

Se o alcance horizontal estivesse no intervalo $6\,\text{m} < A < 12\,\text{m}$, a bola atingiria o fundo do poço colidindo com as paredes uma vez (N = 1).

Se o alcance horizontal estivesse no intervalo 12 m < A < 18 m , a bola atingiria o fundo do poço colidindo com as paredes 2 vezes (N = 2).

Se o alcance horizontal estivesse no intervalo $18\,\text{m} < A < 24\,\text{m}$, a bola atingiria o fundo do poço colidindo com as paredes 3 vezes (N = 3).

Genericamente, podemos dizer que:

Se o alcance horizontal estiver no intervalo 6K < A < 6(K+1), a bola atingirá o fundo do poço colidindo com as paredes K vezes (N = K).

Em nosso caso, como o alcance A = 40 m está no intervalo entre $6\times6 < A < 6\times7$, a bola atingirá o fundo do poço colidindo com as paredes **6 vezes**.

b) Para que tenhamos N = 40, deve ocorrer:

$$6K < A < 6(K+1) \quad \Rightarrow \quad N = K$$

$$6\times40 < A < 6\times(40+1) \quad \Rightarrow \quad N = 40$$

$$240 < v_x.t_{queda} < 246$$

$$240 < v.4 < 246$$

$$\mathbf{60\ m/s < v < 61{,}5\ m/s}$$

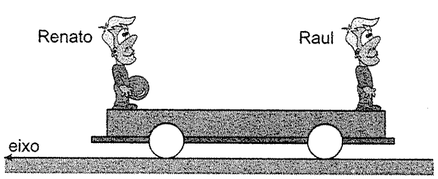
Questão 77

Solução:

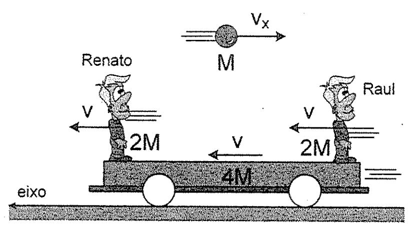
a) Inicialmente, todos os corpos que compõem o sistema – Renato, Raul, bola e plataforma – estavam em repouso em relação à Terra (estágio A). Em seguida, Renato lança a bola para frente com uma velocidade horizontal $v_x = v_o.\cos\alpha$ (estágio B). Estando o sistema isolado de forças externas horizontais (não há atrito entre o chão e a plataforma), o arremesso da bola consiste em uma mera transferência de qdm interna ao sistema e transferências internas não alteram a soma das qdm do sistema. Pela conservação da qdm horizontal do sistema (em relação à Terra), entre os estágios A e B, podemos escrever:

$$\Sigma Q_{\text{estágio A}} = \Sigma Q_{\text{estágio B}}$$

$$0 + 0 + 0 + 0 = +2M.v + 2M.v + 4M.v - M.v_o.\cos\alpha$$



Estágio A – todos em repouso em relação à Terra



Estágio B – logo após Renato arremessar a bola

Assim, no estágio B, a plataforma, juntamente junto com os garotos, está recuando em movimento uniforme com velocidade:

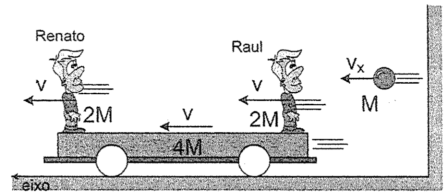
$$\boxed{v = \frac{v_o.\cos\alpha}{8}} \qquad \textbf{(eq1)}$$

A bola arremessada para frente $\rightarrow$ colide com a parede, meramente invertendo o sentido da componente horizontal v_x da sua velocidade, visto que se trata de uma colisão elástica com um anteparo fixo.

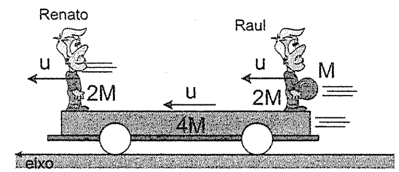
Nessa colisão, o sistema recebe uma força externa (impulso externo) que a parede aplica sobre a bola, injetando qdm horizontal no sistema. Assim, a qdm

horizontal do sistema sofre um incremento (veja Figura 1), durante a colisão com a parede.

Em seguida, no estágio C, a bola se aproxima do Raul com uma velocidade $v_x = v_o.\cos\alpha$ (em relação à Terra) sendo agarrada por ele no estágio D.



Estágio C – logo antes de o Raul segurar a bola



Estágio D – logo após o Raul segurar a bola

Do estágio C para o D, ocorre uma mera transferência interna de qdm horizontal entre a bola e o Raul e transferências internas não alteram a soma das qdm do sistema. Pela conservação da qdm horizontal do sistema (em relação à Terra), entre os estágios C e D, podemos escrever:

$$\Sigma Q_{\text{estágio C}} = \Sigma Q_{\text{estágio D}}$$

$$(2M + 2M + 4M).v + M.v_o.\cos\alpha = (2M + 2M + 4M + M).u$$

$$8M.\frac{v_o.\cos\alpha}{8} + M.v_o.\cos\alpha = 9M.u \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = \frac{2v_o.\cos\alpha}{9}} \quad \textbf{(eq2)}$$

Adotando como positivo o sentido para a esquerda (veja o eixo nas figuras), a quantidade de movimento total do sistema $Q_{x\text{-sist}}$ na direção horizontal, durante esse episódio, se comporta de acordo com o gráfico da Figura 1:

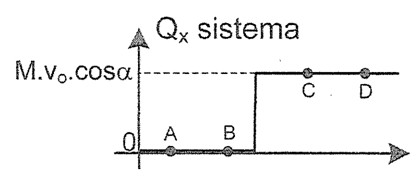


Figura 1

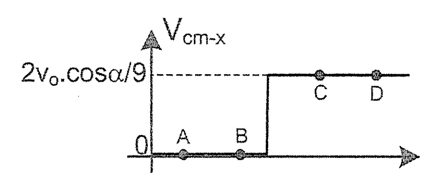


Figura 2

De acordo com a relação eq25, página 173 ($Qsist_x = M_{total}.V_{cm\text{-}x}$), a velocidade horizontal $V_{cm\text{-}x}$ do centro de massa desse sistema é diretamente proporcional à sua qdm $Qsist_x$. Assim, o centro de massa do sistema tem velocidade horizontal nula ($V_{cm\text{-}x} = 0$, centro de massa em repouso na horizontal) nos estágios A e B, adquirindo velocidade constante $V_{cm\text{-}x} = u\leftarrow$ dada por eq2 após a colisão da bola com a parede. A Figura 2 mostra o gráfico da $V_{cm\text{-}x}$ em função do tempo.

Questão 78

Respostas

a) $e = \left(1+\frac{m}{M}\right).tg^2\alpha$, b) $V_{prisma} = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2M.g.H.e}{M+m}}$, $V_{bola} = \sqrt{\frac{2M.g.H.e}{M+m}}$

Sugestão: Estude em detalhes o exemplo resolvido 21 – página 225. Após isso, resolva essa questão 78 sem consultar mais o exemplo resolvido 21. Isso lhe dará bastante base para resolver as próximas questões.

Questão 79 – Resposta: alternativa a

Sugestão: Resolva de duas maneiras: (1) usando conservação da energia mecânica e conservação da qdm; (2) usando conservação da qdm e coeficiente de restituição $e = 1$. Cuidado pois o ângulo α nessa questão é desconhecido e não vale 45°, conforme discutimos no exemplo resolvido 1, página 225.

Questão 80

Respostas

a) $V_{rel} = 0,5 + 1 = 1,5$ m/s

b) $\alpha = 30°$

Comentário: Dessa vez não teve jeito, você foi obrigado a resolver usando apenas conservação da qdm e coeficiente de restituição ☺. Em caso de dificuldade, volte a estudar o exemplo resolvido 21 da página 225.

Questão 81

Solução:

A bola incide no prisma com velocidade inicial $V_o\downarrow$ e ricocheteia com uma velocidade V_2 cujas componentes normal V_{2N} e tangencial V_{2T} estão representadas na Figura 1. Com o impacto, o prisma, inicialmente em repouso, recua com velocidade $V_1\leftarrow$.

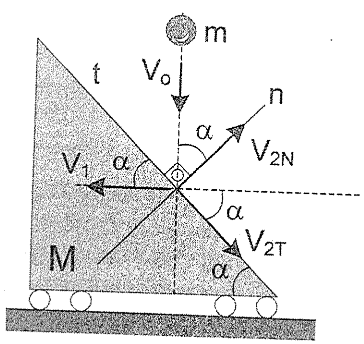


Figura 1

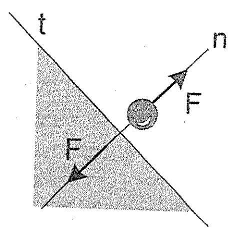


Figura 2

Como a bola não sofre forças impulsivas na direção tangencial (eixo t, Figura 2), a sua qdm se conserva naquela direção durante a colisão:

$$m.V_o.sen\alpha = m.V_{2T} \quad \text{(eq1)}$$

Como o sistema bola+prisma está livre de forças externas horizontais, sua qdm horizontal se conserva durante essa colisão:

$$\Sigma Qx_{\,antes} = \Sigma Qx_{\,depois}$$

$$0 + 0 = -M.V_1 + m.V_{2N}.sen\alpha + m.V_{2T}.cos\alpha \quad \text{(eq2)}$$

Em seguida, aplicamos o conceito de coeficiente de restituição, determinando as velocidades relativas entre a bola e o prisma, antes e após a colisão, tomando apenas as componentes das velocidades na direção normal n:

$$e = \frac{|V_{rel-após}|_n}{|V_{rel-antes}|_n} = \frac{(V_2)_n + (V_1)_n}{(V_o)_n} = \frac{V_{2N} + V_1.sen\alpha}{V_o.cos\alpha}$$

$$V_{2N} = e.V_o.cos\alpha - V_1.sen\alpha \quad \text{(eq3)}$$

Isolando V_{2T} em eq1, V_{2N} em eq3 e substituindo em eq2, vem:

$$M.V_1 = m.sen\alpha.e.V_o.cos\alpha - m.V_1.sen^2\alpha + m.V_o.sen\alpha.cos\alpha$$

$$V_1.(M + m.sen^2\alpha) = \frac{m}{2}.V_o.sen(2\alpha).(e+1)$$

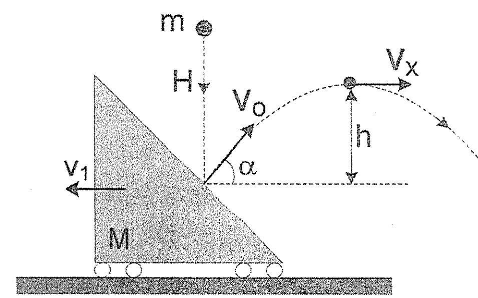
Substituindo os valores numéricos, vem: $V_1 = 3$ m/s.

Questão 82

Solução:

A bola cai de uma altura H, a partir do repouso e colide elasticamente com o prisma. Após a colisão, o prisma recua com velocidade $v_1\leftarrow$ e a bola ricocheteia com velocidade v_o formando ângulo α com a horizontal (veja figura). Pela conservação da energia mecânica nessa colisão elástica, vem:

$$m.g.H = \frac{M.v_1^2}{2} + \frac{m.v_o^2}{2} \quad \text{(eq1)}$$



Como o sistema bola + prisma está isolado de forças externas horizontais, sua qdm *horizontal se conserva durante essa colisão:*

$$\Sigma Qx_{\,antes} = \Sigma Qx_{\,depois}$$

$$\boxed{0 + 0 = -M.V_1 + m.v_o.\cos\alpha} \qquad \textbf{(eq2)}$$

Isolando v_1 em eq2 e substituindo em eq1, vem:

$$m.gH = \frac{M}{2}.\frac{m^2.v_o^2.\cos^2\alpha}{M^2} + \frac{m.v_o^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = \frac{v_o^2}{2g}\left(\frac{m}{M}.\cos^2\alpha + 1\right)} \qquad \textbf{(eq3)}$$

Após colidir com o prisma, a bola adquire uma velocidade v_o formando ângulo α com a horizontal e sobe em trajetória parabólica até uma altura h como na figura. A conservação da energia mecânica durante a subida dessa bolinha nos permite escrever:

$$\frac{m.v_o^2}{2} = \frac{m.v_x^2}{2} + m.g.h, \quad \text{com} \quad v_x = v_o.\cos\alpha$$

$$\frac{m.v_o^2}{2} = \frac{m.v_o^2.\cos^2\alpha}{2} + m.g.h \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{v_o^2}{2g}\left(1 - \cos^2\alpha\right)} \qquad \textbf{(eq4)}$$

Eliminando $\dfrac{V_o^2}{2g}$ de eq3 e eq4, vem: $\boxed{h = \dfrac{H.\text{sen}^2\alpha}{\left(\dfrac{m}{M}.\cos^2\alpha + 1\right)}}$

Questão 83

Solução:

a) Como a bola não sofre forças impulsivas na direção tangencial (eixo t, Figura 2), a sua qdm se conserva naquela direção durante a colisão:

$$\boxed{m.V_o.\cos\alpha = m.V_1.\text{sen}\alpha} \qquad \textbf{(eq1)}$$

Como o sistema bola+prisma está livre de forças externas horizontais, sua qdm horizontal se conserva durante essa colisão:

$$\Sigma Qx_{\,antes} = \Sigma Qx_{\,depois}$$

$$\boxed{m.V_o = M.V_2} \qquad \textbf{(eq2)}$$

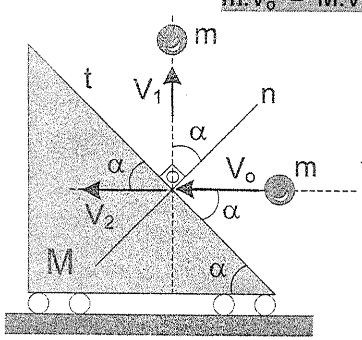


Figura 1

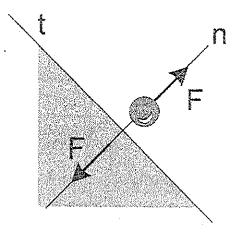


Figura 2

Em seguida, aplicamos o conceito de coeficiente de restituição, determinando as velocidades relativas entre a bola e o prisma, antes e após a colisão, tomando apenas as componentes das velocidades na direção normal n:

$$e = \frac{|V_{rel-após}|_n}{|V_{rel-antes}|_n} = \frac{(V_2)_n + (V_1)_n}{(V_o)_n} = \boxed{\frac{V_2.\text{sen}\alpha + V_1.\cos\alpha}{V_o.\text{sen}\alpha}} \qquad \textbf{(eq3)}$$

Isolando V_1 em eq1, V_2 em eq2 e substituindo em eq3, vem:

$$e = \frac{V_2.\text{sen}\alpha + V_1.\cos\alpha}{V_o.\text{sen}\alpha} = \frac{\dfrac{m.V_o}{M}.\text{sen}\alpha + \dfrac{V_o.\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}.\cos\alpha}{V_o.\text{sen}\alpha}$$

$$\boxed{e = \text{cotg}^2\alpha + \frac{m}{M}} \qquad \textbf{(eq4)}$$

b) Pela conservação da energia mecânica (cinética) na colisão admitida elástica, vem:

$$\boxed{\frac{m.V_o^2}{2} = \frac{m.V_1^2}{2} + \frac{M.V_2^2}{2}} \qquad \textbf{(eq5)}$$

Isolando V_1 em eq1, V_2 em eq2 e substituindo em eq5, vem:

$$m.V_o^2 = m\frac{V_o^2.\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + M.\frac{m^2.V_o^2}{M^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{1 = \text{cotg}^2\alpha + \frac{m}{M}}$$

(eq6)

c) Os resultados obtidos nos itens a e b (eq4 e eq6), embora tenham sido obtidos por caminhos absolutamente diferentes, coincidem no caso e = 1 (colisão elástica) ☺.

d) Da relação eq1, vem: $\boxed{V_1 = V_o.\,\text{cotg}\alpha}$ **(eq7)**

Isolando cotgα em eq6 e substituindo em eq7, vem: $\boxed{V_1 = V_o.\sqrt{e - \dfrac{m}{M}}}$ **(eq8)**

e) Após colidir com a cunha, a altura máxima H_{max} atingida pela bola pode ser determinada pela conservação da energia mecânica da bola durante a subida:

$$m.g.H_{max} = \frac{m.V_1^2}{2} \overset{eq8}{=} \frac{m}{2}.V_o^2.\left(e - \frac{m}{M}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_{max} = \frac{V_o^2}{2g}.\left(e - \frac{m}{M}\right)}$$

Questão 84

Respostas: (**Dica**: veja exemplo resolvido 21 página 225)

a) $e = \cotg^2\alpha + \dfrac{m}{M}$

b) Substituindo e = 1 e $\alpha = 45^o$ no resultado do item a, encontramos:

$$e = \cotg^2\alpha + \frac{m}{M} \Rightarrow 1 = \cotg(45^o)^2 + \frac{m}{M} \Rightarrow 1 = 1 + \frac{m}{M}$$

$$\therefore \quad \frac{m}{M} = 0$$

Vemos que, para a bola lançada horizontalmente ricochetear verticalmente, no caso da colisão elástica (e = 1) e $\alpha = 45^o$, devemos ter m/M = 0, condição essa que só seria satisfeita no limite quando a massa M tende a infinito ($M \to \infty$), o que na prática seria dizer que M é muito maior do que m.
Assim, como essa condição só é satisfeita no limite quando M tende a infinito, podemos dizer que, no caso da colisão elástica (e = 1) e $\alpha = 45^o$, a bola lançada horizontalmente **não** ricocheteia verticalmente.

c) O limite quando a massa M tende a infinito ($M \to \infty$) , o que na prática significa dizer "*quando M é muito maior do que m*".

Questão 85

Solução:

A bola cai de uma altura h, a partir do repouso e incide no plano inclinado com velocidade inicial $V_o = \sqrt{2gh} \downarrow$ e ricocheteia com uma velocidade V_1 cujas componentes normal e tangencial valem respectivamente V_{1N} e V_{1T} como mostrado na Figura 1.

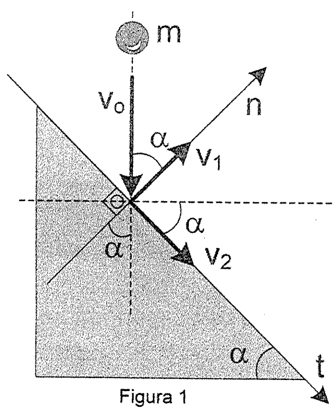


Figura 1

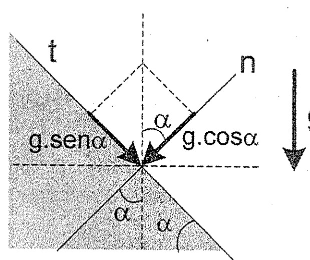


Figura 2

Aplicando o conceito de coeficiente de restituição e, determinando as velocidades relativas entre a bola e o plano inclinado, antes e após a colisão, tomando apenas as componentes das velocidades na direção normal n, temos:

$$e = \frac{|V_{rel-após}|_n}{|V_{rel-antes}|_n} = \frac{(V_1)_n}{(V_o)_n} = \frac{V_{1N}}{V_o.\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{V_{1N} = e.V_o.\cos\alpha} \quad \textbf{(eq1)}$$

A bola não sofre ação de forças impulsivas ao longo do eixo tangencial, portanto, a sua qdm se conserva nessa direção durante a colisão:

$$m.V_o.\text{sen}\alpha = m.V_{1T} \Rightarrow \boxed{V_{1T} = V_o.\text{sen}\alpha} \quad \textbf{(eq2)}$$

Após a colisão, a bola executará um movimento parabólico. Estudaremos as componentes desse movimento ao longo das direções normal (n) e tangencial (t), decompondo a gravidade $\downarrow g$ em duas componentes (veja Figura 2):

$$g_N = g.\cos\alpha \quad e \quad g_T = g.\text{sen}\alpha \quad \textbf{(eq3)}$$

A componente do movimento da bola ao longo do eixo normal (n) será um MUV com velocidade inicial V_{1N} inicialmente retardado pela aceleração contrária de módulo g_N.
A componente do movimento da bola ao longo do eixo tangencial (t) será um MUV ladeira abaixo com velocidade inicial V_{1T} acelerado pela aceleração de módulo g_T.
Analisando inicialmente a componente do movimento da bola ao longo do eixo normal (n), determinemos quanto tempo a bola lançada naquele eixo com velocidade inicial $V_{1N} = e.V_o.\cos\alpha$ leva para atingir a altura máxima e retornar à sua ordenada inicial ? Na direção normal, a aceleração da gravidade vale $a_N = g_N = g.\cos\alpha$

O tempo que a componente normal da sua velocidade demora a se anular vale:

$$V_N = Vo_N + a.t \Rightarrow 0 = e.V_o.\cos\alpha - g.\cos\alpha.t \Rightarrow t = \frac{e.V_o}{g}$$

Dessa forma, o tempo de ida e volta, ao longo do eixo normal (n), será o dobro, valendo:

$$\boxed{t_{vôo} = \frac{2e.V_o}{g}} \quad \textbf{(eq4)}$$

A distância **d** pedida na questão trata-se da distância que a bola percorre ao longo da direção tangencial (t) no tempo dado pela relação eq4.

Na direção tangencial (t), a bola parte com velocidade inicial $V_{1T} = V_o.\text{sen}\alpha$ com aceleração escalar constante (MUV) dada por $a_T = g_T = g.\text{sen}\alpha$. Assim, a distância **d** pedida é dada por:

$$d = V_{1T} \cdot t_{vôo} + \frac{a_T . t_{vôo}^{\ 2}}{2}$$

$$d = V_o.\text{sen}\alpha . \left(\frac{2e.V_o}{g}\right) + \frac{(g.\text{sen}\alpha)}{2} . \left(\frac{2e.V_o}{g}\right)^2 \text{, com } \quad V_o = \sqrt{2gh}$$

$$d = \frac{2e.\text{sen}\alpha}{g}.(2gh) + \frac{2.e^2.\text{sen}\alpha}{g}.(2gh)$$

$$d = 4h.\text{sen}\alpha.(e+1).e$$

Questão 86

Solução:

A bola cai de uma altura H e colide com a primeira cunha, que recua com velocidade V←. Após essa primeira colisão elástica, a bola possui velocidade U→. Como o sistema bola+cunha está livre de forças externas horizontais, sua qdm horizontal se conserva durante essa colisão:

$$\Sigma Qx_{\ antes} = \Sigma Qx_{\ depois}$$

$$0 + 0 = -M.V + m.U$$

$$M.V = m.U \qquad \textbf{(eq1)}$$

A conservação da energia mecânica do sistema bola + cunha, nessa colisão elástica, nos permite escrever:

$$mgH = \frac{MV^2}{2} + \frac{m.U^2}{2} \qquad \textbf{(eq2)}$$

Isolando V em eq1 e substituindo em eq2, vem:

$$2mgH = M\frac{m^2U^2}{M^2} + m.U^2 \quad \Rightarrow \quad U^2 = \frac{2gH.M}{M+m} \qquad \textbf{(eq3)}$$

Em seguida, a bola com velocidade U→ colide com o segundo prisma imóvel e ricocheteia para cima ↑ atingindo uma altura máxima h. Após essa colisão, o segundo prisma adquire velocidade W para a direita →.

Como o sistema bola+cunha está livre de forças externas horizontais, sua qdm horizontal se conserva durante essa colisão:

$$\Sigma Qx_{\ antes} = \Sigma Qx_{\ depois}$$

$$+m.U = +M.W \qquad \textbf{(eq4)}$$

A conservação da energia mecânica do sistema bola + cunha, nessa segunda colisão elástica, nos permite escrever:

$$\frac{m.U^2}{2} = mgh + \frac{MW^2}{2} \qquad \textbf{(eq5)}$$

Isolando W em eq4 e substituindo em eq5, vem:

$$\frac{m.U^2}{2} = mgh + \frac{M}{2}\frac{m^2U^2}{M^2} \quad \Rightarrow \quad 2gh = U^2\frac{(M-m)}{M} \qquad \textbf{(eq6)}$$

Substituindo eq3 em eq6, vem:

$$2gh = \frac{2gHM}{M+m}.\frac{(M-m)}{M} \quad \Rightarrow \quad h = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)H \qquad ☺$$

Questão 87

Solução:

a) A bola incide no bloco com velocidade ←V_o e repica com velocidade V_2 ↖ cujas componentes tangencial e normal são, respectivamente V_{2T} e V_{2N} como mostra a Figura 1.

Como a bola não sofre forças impulsivas na direção tangencial (eixo t, Figura 2), a sua qdm se conserva naquela direção durante a colisão:

$$m.V_o.\cos\alpha = m.V_{2T} \quad \Rightarrow \quad V_o.\cos\alpha = V_{2T} \qquad \textbf{(eq1)}$$

Como o sistema bola+prisma está livre de forças externas horizontais, sua qdm horizontal se conserva durante essa colisão:

$$\Sigma Qx_{\ antes} = \Sigma Qx_{\ depois}$$

$$m.V_o = M.V_1 + m.V_{2T}.\cos\alpha - m.V_{2N}.\text{sen}\alpha \qquad \textbf{(eq2)}$$

Em seguida, aplicamos o conceito de coeficiente de restituição, determinando as velocidades relativas entre a bola e o prisma, antes e após a colisão, tomando apenas as componentes das velocidades na direção normal n:

$$e = \frac{|\,V_{rel-após}\,|_n}{|\,V_{rel-antes}\,|_n} = \frac{(V_2)_n + (V_1)_n}{(V_o)_n} = \frac{V_{2N} + V_1.\text{sen}\alpha}{V_o.\text{sen}\alpha}$$

$$V_{2N} = e.V_o.\text{sen}\alpha - V_1.\text{sen}\alpha \qquad \textbf{(eq3)}$$

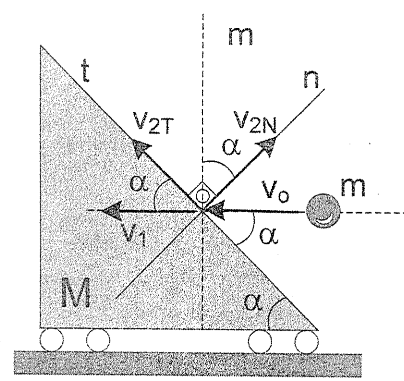


Figura 1

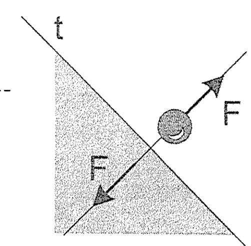


Figura 2

Isolando V_{2T} em eq1, V_{2N} em eq3 e substituindo em eq2, vem:

$$m.V_o = M.V_1 + m.V_o.\cos\alpha.\cos\alpha - m.(e.V_o.\text{sen}\alpha - V_1.\text{sen}\alpha).\text{sen}\alpha$$

$$m.V_o.(1 - \cos^2\alpha + e.\text{sen}^2\alpha) = V_1.(M + m.\text{sen}^2\alpha)$$

Substituindo os valores numéricos fornecidos na expressão acima, encontramos que a velocidade adquirida pelo bloco, após a colisão, vale:

$$V_1 = 4 \text{ m/s}$$

Após o impacto, o bloco adquire velocidade $V_1 = 4$ m/s e se move causando uma máxima deformação x na mola. Essa deformação pode ser determinada pela conservação da energia mecânica:

$$\frac{M.V_1^2}{2} = \frac{K.x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 18.(4)^2 = 20.10^3.x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}12\text{m} = 12 \text{ cm}$$

Questão 88

Respostas

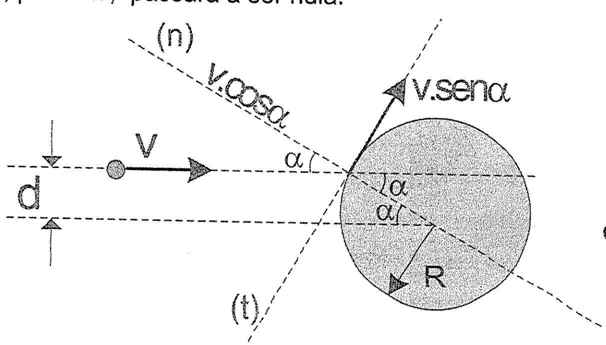
a) $\alpha + \beta = 90^o$ (veja o caso 4, página 227)
b) $V_A = 12$ m/s, $V_B = 16$ m/s

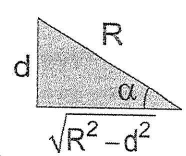
Questão 89

Solução:

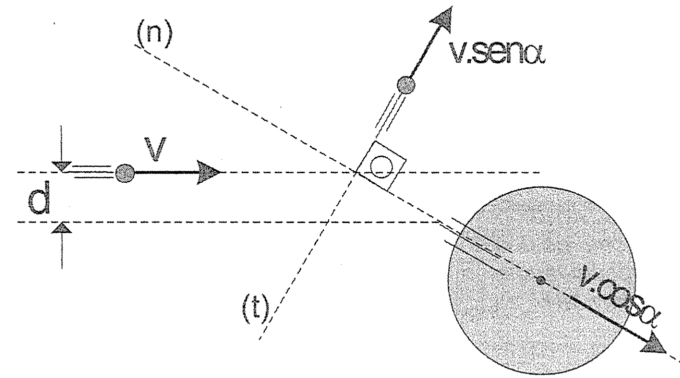
A partícula de massa m se aproxima da esfera em repouso, de mesma massa m, com uma velocidade V, cujas componente tangencial (t) e normal (n) à esfera valem respectivamente V.senα e V.cosα.

Como as massas são iguais e a colisão é elástica (e = 1), os corpos trocarão de velocidades na direção normal (n) (leia página 212 – Troca de velocidades). Isso quer dizer que, após a colisão, a componente normal V.cosα da partícula passa a ser velocidade da esfera na direção normal. A velocidade da partícula na direção normal, portanto, passará a ser nula.





Como a partícula não sofre forças impulsivas na direção tangencial, durante a colisão, sua velocidade V.senα na direção tangencial deve se conservar durante a colisão.



Assim, após a colisão, a partícula possuirá uma velocidade resultante V.senα na direção tangencial (t) e a esfera terá uma velocidade resultante V.cosα na direção normal (n). Ou seja, elas terão velocidades perpendiculares entre si após a colisão, como já era esperado pela leitura da página 228 – Figura 71).

Entretanto, do triângulo retângulo, podemos escrever:

$$\text{sen}\alpha = \frac{d}{R} \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{R^2 - d^2}}{R}$$

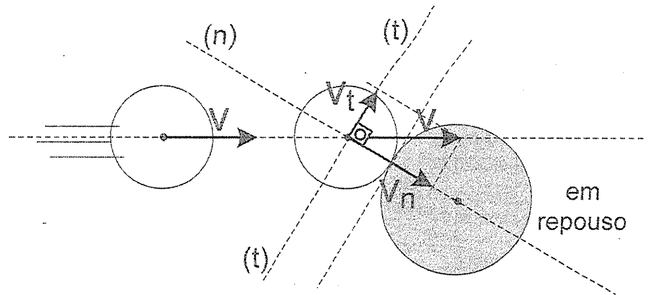
Finalmente, as velocidades da partícula e da esfera, após a colisão, valem:

$$\boxed{V_{\text{partícula}} = \frac{V.d}{R}}$$

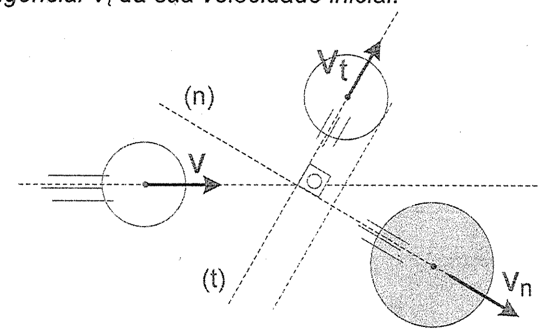
$$\boxed{V_{\text{esfera}} = \frac{V.\sqrt{R^2 - d^2}}{R}}$$

Ao resolvermos essa questão, adquirimos uma nova visão sobre o que, de fato, ocorre no Caso 4 mostrado nas páginas 227 e 228, em que uma bola colide elasticamente com outra bola em repouso, de mesma massa da primeira:

Interpretação interessante: *Ao colidirem, as bolas trocam de velocidades apenas na direção normal (n), isto é, na direção que une os centros das bolas. A componente normal V_n da velocidade da bola incidente passa a ser a velocidade da bola que estava em repouso. Dessa forma, resta à bola que se aproxima apenas a componente tangencial V_t da sua velocidade.*



\ bola que estava em repouso adquire velocidade na direção normal (direção ue passa pelos centros das bolas) enquanto a bola incidente sempre termina se novendo na direção tangencial com a componente que lhe restou, isto é, a omponente tangencial V_t da sua velocidade inicial.

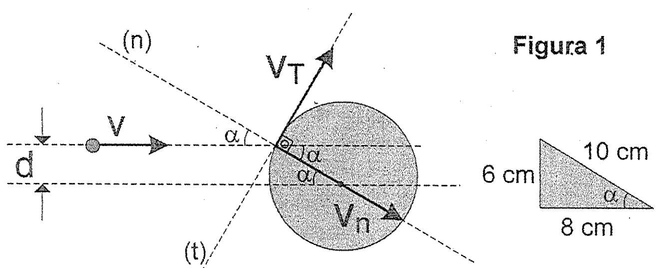


: por esse motivo que as bolas acabam se movendo em duas direções erpendiculares *entre si, após a colisão: a direção tangencial e a direção normal,* omo já era esperado pela leitura da página 228 – Figura 71) ☺.

)uestão 90

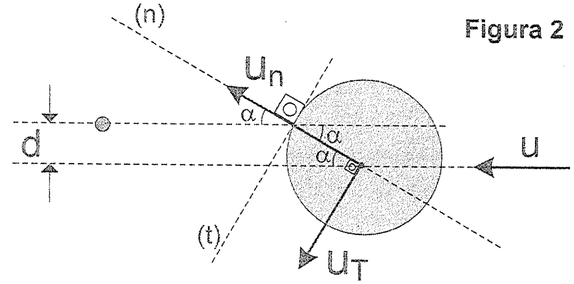
Solução: A partícula de massa m toca a esfera de mesma massa com elocidade V→ cujas componentes normal e tangencial valem, respectivamente, V_n = V.cosα = 20.(0,8) = 16 m/s e V_T = V.senα = 20.(0,6) = 12 m/s mostradas a Figura 1.

Figura 1



A esfera se move com velocidade u ← cujas componentes normal e tangencial valem, respectivamente, u_n = u.cosα = 6,25.(0,8) = 5 m/s e u_T = u.senα = 6,25.(0,6) = 3,5 m/s mostradas na Figura 2.

Figura 2



Conforme explicado na resolução da questão 89, como as massas são iguais e a colisão é elástica, os corpos apenas trocam de velocidades na direção normal.

Assim, a velocidade normal da partícula passa a valer V_n = 5m/s ↖ enquanto a sua componente tangencial permanece inalterada V_T = 12 m/s↗.

A velocidade resultante da partícula após a colisão vale:

$$V = \sqrt{(V_n)^2 + (V_T)^2} = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = 13 \text{ m/s} \quad ☺$$

Questão 91

Solução: A conservação da qdm do sistema nos permite escrever a seguinte equação vetorial:

$$M_A.\vec{V}_A + M_B.\vec{V}_B = M_A.\vec{U}_A + M_B.\vec{U}_B$$

$$6.V\rightarrow + \vec{0} = 6.\left(\frac{V}{2}\right)\uparrow + M_B.\vec{U}_B$$

$6.V\rightarrow + 3V\downarrow = M_B.\vec{U}_B$. Aplicando o módulo nos dois membros, vem:

$$\sqrt{(6V)^2 + (3V)^2} = M_B.U_B \Rightarrow M_B.U_B = \sqrt{45}.V \Rightarrow \boxed{U_B = \frac{\sqrt{45}.V}{M_B}} \quad \textbf{(eq1)}$$

Pela conservação da energia mecânica (cinética) do sistema, vem:

$$\frac{M_A.V_A^2}{2} + \frac{M_A.V_B^2}{2} = \frac{M_A.U_A^2}{2} + \frac{M_B.U_B^2}{2}$$

$$\frac{6.V^2}{2} + 0 = \frac{6.(V/2)^2}{2} + \frac{M_B.U_B^2}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{9.V^2}{4} = \frac{M_B.U_B^2}{2}} \quad \textbf{(eq2)}$$

Substituindo eq1 em eq2, vem: $\dfrac{9.V^2}{4} = \dfrac{M_B}{2}\dfrac{45V^2}{M_B^2} \Rightarrow M_B = 10$ kg

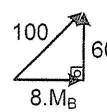
Questão 92 – Resposta: alternativa a

A qdm total do sistema antes do impacto deverá ser igual à sua qdm após o impacto, visto que o sistema encontra-se isolado durante a colisão bidimensional. Assim, podemos escrever a equação vetorial:

$$\nearrow M_A.V_A \;+\; \vec{0} \;=\; \uparrow M_A.U_A \;+\; \xrightarrow{M_B.U_B}$$

$$\nearrow 20\times 5 \;+\; \vec{0} \;=\; \uparrow 20\times 3 \;+\; \xrightarrow{M_B.8}$$

$$\nearrow 100 \;=\; \uparrow 60 \;+\; \xrightarrow{M_B.8}$$



O teorema de pitágoras permite escrever:

$8.M_B = 80 \Rightarrow M_B = 10$ kg

Questão 93 – Resposta: a) 120° b) $3m.v^2/4$

Dica: Conservação da qdm vetorial do sistema. Decomponhoa os vetores na direção da bissetriz do ângulo α:

$$2.(m.v).\cos(\alpha/2) = (2.m).(v/2)$$

Questão 94 – Resposta: a) $2V.tg30^\circ$ b) $\beta = 30^\circ$

Dica: Use conservação da qdm na direção horizontal, conservação da qdm na direção vertical e conservação da energia mecânica (cinética). Resolva o sistema dessas 3 equações.

Questão 95

Solução: Seja $M\alpha = 4M$ a massa da partícula α e $M_H = 2M$ a massa do dêuteron (um isótopo do hidrogênio). Segundo o enunciado, inicialmente temos:

$$Ecin_H = 2\,.\,Ecin\alpha \;\Rightarrow\; \frac{2M.V_\alpha^2}{2} = 2\times\frac{4M.V_H^2}{2} \;\Rightarrow\; V_H = 2.V\alpha$$

Assim, por simplicidade, tomemos as seguintes velocidades iniciais para as partículas:

$$V\alpha = V \quad e \quad V_H = 2V$$

Segundo o enunciado, após a interação elétrica entre as partículas, a energia cinética $Ecin_H$ do dêuteron passa de 20 eV para 80 eV, ou seja, ela quadruplica. Isso indica que a velocidade do dêuteron duplica durante essa interação, passando de $V_H = 2V$ para $U_H = 4V$.

Como o sistema formado pelas partículas encontra-se isolado de forças externas, a qdm desse sistema se mantém inalterada, o que nos permite escrever a seguinte equação vetorial:

$$M_\alpha.\vec{V}_\alpha + M_H.\vec{V}_H = M_\alpha.\vec{U}_\alpha + M_H.\vec{U}_H$$

$$4M.(V)\downarrow + (2M).(2V)\rightarrow = (4M).\vec{U}_\alpha + (2M).(4V)\downarrow$$

$$4MV\downarrow + 4MV\rightarrow + 8MV\uparrow = (4M).\vec{U}_\alpha$$

$$4MV\rightarrow + 4MV\uparrow = (4M).\vec{U}_\alpha$$

$$V\rightarrow + V\uparrow = \vec{U}_\alpha$$

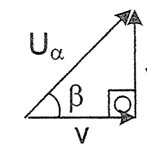


Figura 1

Pelo teorema de Pitágoras na Figura 1, encontramos:

$U\alpha = \sqrt{V^2+V^2} = V\sqrt{2} \Rightarrow U\alpha = V\sqrt{2}$ apontando numa direção que forma um ângulo $\beta = 45^\circ$ com a horizontal como mostra a Figura 1.

A velocidade da partícula α passou de $V\alpha = V$ para $U\alpha = V\sqrt{2}$ durante essa interação, o que significa que sua energia cinética duplicou, passando do valor inicial $Ecin\alpha = 10$ eV para o valor final duas vezes maior:

$$Ecin\alpha_{\,final} = 2\times 10 = 20 \text{ eV}$$

Questão 96

Primeira Solução:

A primeira bola incide com velocidade V e colide com as demais bolas. Após a colisão, arbitramos que a bola incidente retorna com velocidade V' a ser determinada, enquanto as demais bolas saem com velocidade U formando um ângulo $\alpha = 30^\circ$ com a horizontal, visto que as forças impulsivas trocadas entre as bolas, durante o impacto, agem na direção normal ao ponto de contato entre as bolas, isto é, na direção que passa pelos seus centros.

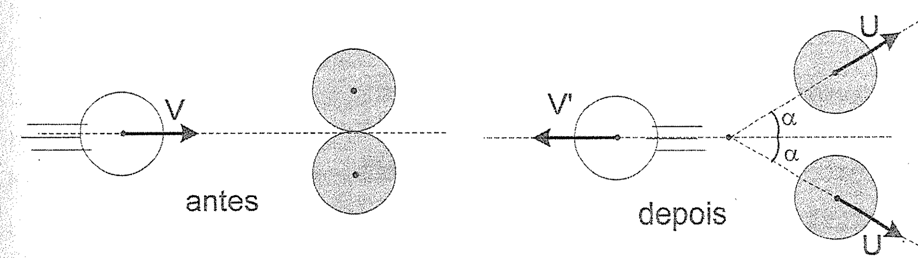


Figura 1 **Figura 2**

- Pela conservação da qdm do sistema na direção horizontal, podemos escrever

$$\Sigma Qx_{\,antes} = \Sigma Qx_{\,depois}$$

$$M.V = M.U.\cos30^\circ + M.U.\cos30^\circ - M.U'$$

$$V = U\sqrt{3} - V' \;\Rightarrow\; \boxed{U = \frac{(V+V')}{\sqrt{3}}} \qquad \textbf{(eq1)}$$

- Pela conservação da energia mecânica (cinética), temos:

$\Sigma Ecin_{\,antes} = \Sigma Ecin_{\,depois}$

$$\frac{M.V^2}{2} = \frac{M.U^2}{2} + \frac{M.U^2}{2} + \frac{M.(V')^2}{2} \Rightarrow \boxed{2U^2 + (V')^2 = V^2} \quad \textbf{(eq2)}$$

- Substituindo eq1 em eq2, vem:

$$\frac{2(V+V')^2}{3} + (V')^2 = V^2 \Rightarrow 5.(V')^2 + 4V.(V') - V^2 = 0$$

$$V' = \frac{-(4V)+\sqrt{(4V)^2 + 4.5.(V^2)}}{10} = \frac{-(4V)+\sqrt{36V^2}}{10} \Rightarrow \boxed{V' = \frac{V}{5}}$$

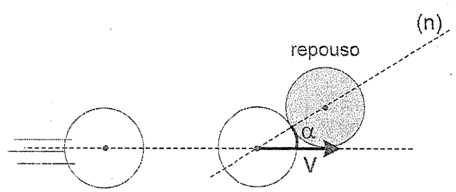
Segunda Solução:

Em vez de fazermos uso da conservação da energia mecânica, usaremos o coeficiente de restituição (e = 1) da colisão elástica.

Para isso, determinamos as velocidades relativas entre as bolas, antes e após a colisão, tomando apenas as componentes das velocidades na direção normal n.

Antes da colisão, a velocidade relativa de aproximação entre as bolas, na direção normal (n), vale:

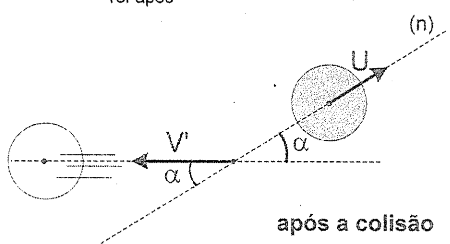
$$V_{rel\text{-}antes} = V.\cos\alpha$$



antes da colisão

Após a colisão, a velocidade relativa de afastamento entre as bolas, na direção normal (n), vale:

$$V_{rel\text{-}após} = U + V'.\cos\alpha$$



após a colisão

Assim, pela definição de coeficiente de restituição, vem:

$$e = \frac{|V_{rel\text{-}após}|_n}{|V_{rel\text{-}antes}|_n} = \frac{U + V'.\cos\alpha}{V.\cos\alpha} = 1 \quad , \quad \text{com } \alpha = 30^\circ$$

$$U + \frac{V'.\sqrt{3}}{2} = \frac{V.\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{U = \frac{\sqrt{3}}{2}.(V - V')} \quad \textbf{(eq3)}$$

Igualando eq1 e eq3, vem:

$$\frac{(V+V')}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.(V-V') \Rightarrow 2.(V+V') = 3.(V-V') \Rightarrow \boxed{V' = \frac{V}{5}} ☺$$

Questão 97– Resposta: $3\rho.g.x$

Dica: Leia a teoria e os exemplos resolvidos, páginas 251 a 268

Questão 98– Resposta: a) $\rho.v^2 + \rho.g.x$; b) $\rho.g.(L-x)$

Dica: Leia a teoria e os exemplos resolvidos, páginas 251 a 268

Questão 99– Resposta: $\frac{M.g}{2}.\left(1+\frac{3x}{L}\right)$

Dica: Leia a teoria e os exemplos resolvidos, páginas 251 a 268

Questão 100– Resposta: 7,5 m/s

Dica: Leia a teoria página 260, conclua que: $\frac{\Delta M}{\Delta t}.U.\cos\alpha = k.v$

Questão 101

Solução:

a) Como o ramo direito da corrente desce com velocidade constante, podemos escrever:

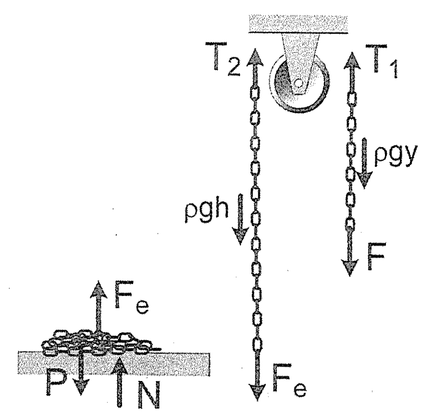
$$\boxed{F + \rho gy = T_1} \quad \textbf{(eq1)}$$

Como o ramo esquerdo sobe com velocidade constante, temos:

$$\boxed{T_2 = \rho gh + F_e} \quad \textbf{(eq2)}$$

onde F_e é a força empuxo, dada por:

$$\boxed{F_e = \rho v^2} \quad \textbf{(eq3)}$$



conforme eq94, página 262.

Como a polia tem dimensões desprezíveis, podemos aproximar dizendo que:

$$\boxed{T_1 = T_2} \quad \textbf{(eq4)}$$

Somando eq1 e eq2, membro a membro, e considerando eq3 e eq4, vem:

$$F = \rho.(h-y)g + \rho.v^2$$

b) O comprimento da corda que resta na pilha sobre o chão vale $L - h - y$. Sobre essa pilha de corrente agem as forças peso P, empuxo F_e e a normal N que o solo aplica sobre ela. Como a pilha encontra-se em repouso permanente (equilíbrio), podemos escrever:

$$N + F_e = P$$
$$N + \rho.v^2 = (L - h - y)\rho g$$
$$N = (L - h - y)\rho g - \rho.v^2$$

Questão 102

Solução:

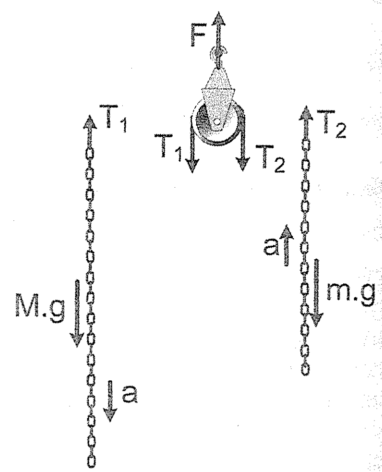
a) Seja **M** a massa do ramo esquerdo da corda e **m** a massa do ramo direito da corda. Essas massas valem:

$$M = (H + h).\rho \quad \textbf{(eq1)} \qquad \text{e} \qquad m = (H - h).\rho \quad \textbf{(eq2)}$$

Seja também Δm a massa desprezível do pequeno trecho de corda que envolve a roldana.

Da segunda lei de Newton, podemos escrever:

$$M.g - T_1 = M.a \quad \textbf{(eq3)}$$
$$T_2 - T_1 = \Delta m.a \quad \textbf{(eq4)}$$
$$T_2 - m.g = m.a \quad \textbf{(eq5)}$$



Somando as equações eq3, eq4 e eq5, membro a membro e desprezando Δm, temos:

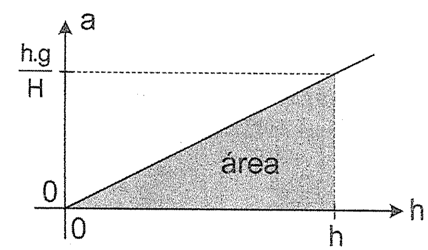
$$M.g - m.g = (M+m).a$$

$$a = \frac{(M-m).g}{M+m} \quad \textbf{(eq6)}$$

Substituindo eq1 e eq2 em eq6, vem: $a = \dfrac{(M-m).g}{M+m} \Rightarrow a = \dfrac{h}{H}.g$ **(eq7)**

b) A expressão eq7 nos mostra que a aceleração do sistema varia linearmente em função de h. O gráfico da aceleração em função de h é mostrado abaixo:

Se a corrente parte do repouso na posição inicial (h=0), qual a velocidade atingida pela corrente quando o desnível aumentar de 0 até h ? Aplicando a *equação de Torricelli generalizada* (página 84), vem:



$$V^2 = V_o^2 + 2.\text{área} = 0 + 2.\left(\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}\right) = 2.\frac{h.(hg/H)}{2}$$

$$V = h.\sqrt{\frac{g}{H}}$$

c) Conforme o diagrama de forças, a força F que sustenta o gancho deverá equilibrar as forças $T_1\downarrow$, $T_2\downarrow$ e o peso $\Delta m.g\downarrow$ desprezível do trecho de corda que envolve a roldana. Do equilíbrio das forças, vem:

$$F = T_1 + T_2 .$$

Usando eq3 e eq5, vem: $F = M.g - M.a + m.g + m.a$

$$F = (M+m).g + (M-m).a$$

Usando eq1, eq2 e eq7, vem: $F = 2H\rho g + 2h\rho.\left(\dfrac{hg}{H}\right)$

$$F = 2\rho g.\left(H - \frac{h^2}{H}\right)$$

Questão 103

Solução:

a) No intervalo de tempo Δt em que a extremidade da corda sobe uma altura x, o comprimento do ramo direito da corrente aumenta x/2.

Isso indica que, nesse intervalo de tempo Δt, uma massa $\Delta m = \lambda(x/2)$ é incorporada ao ramo direito da corda, sendo levada bruscamente do repouso até a velocidade v, ao interagir com o último elo do ramo direito da corrente, exercendo sobre ele um empuxo F_e dado por:

$$F_e = \frac{\Delta m}{\Delta t}.V_{rel} = \frac{\rho.\Delta x/2}{\Delta t}.v = \frac{\rho}{2}.\frac{\Delta x}{\Delta t}.v = \frac{\rho}{2}.v.v = \frac{\rho}{2}.v^2$$

$$F_e = \frac{\rho}{2}.v^2$$

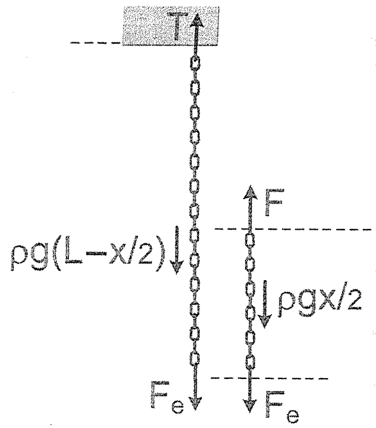
O peso do ramo direito da corrente vale:

$$P = m.g = \rho.(x/2).g \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{\rho x g}{2}}$$

Assim, como o ramo direito da corda sobe com velocidade constante ($F_R = 0$), vem:

$$F = P + F_e = \frac{\rho x g}{2} + \frac{\rho}{2}.v^2$$

$$\boxed{F = \frac{\rho}{2}.(v^2 + g.x)}$$



b) Analogamente, o equilíbrio das forças no ramo esquerdo da corrente nos permite escrever:

$$T = \rho g(L - x/2) + F_e$$

$$\boxed{T = \rho g(L - x/2) + \frac{\rho}{2}.v^2}$$

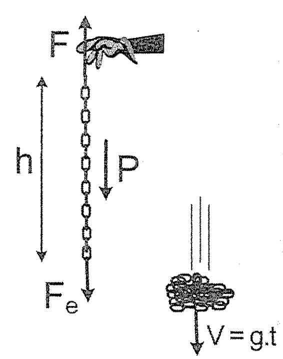
Questão 104

Solução:

Após um tempo t, o monte de corda já caiu uma altura $h = g.t^2/2$ e já adquiriu uma velocidade $v = g.t$. A cada instante, um elemento de corda de massa Δm é bruscamente levado da velocidade $v = g.t$ ao repouso, ao interagir com o último elo do ramo vertical da corrente, exercendo sobre ele um empuxo F_e dado por:

$$F_e = \frac{\Delta m}{\Delta t}.V_{rel} = \frac{\rho.\Delta x}{\Delta t}.v = \rho.\frac{\Delta x}{\Delta t}.v = \rho.v.v = \rho.v^2 = \rho.(g.t)^2$$

$$\boxed{F_e = \rho.g^2.t^2}$$



Nesse instante t, o peso do trecho da corrente que já se encontra na vertical, de comprimento $h = g.t^2/2$, vale:

$$P = m.g = (\rho.h).g = (\rho.g.t^2/2).g \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{\rho g^2 t^2}{2}}$$

Assim, do equilíbrio das forças que agem no trecho vertical mantido em repouso, vem:

$$F = P + F_e = \frac{\rho g^2 t^2}{2} + \rho.g^2.t^2$$

$$\boxed{F = \frac{3}{2}\rho g^2 t^2}$$

Logicamente, a força F só é dada por essa expressão acima até o instante final t_{final} em que toda a corda já estiver disposta verticalmente, dado por:

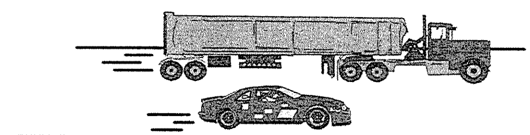
$$L = \frac{g.t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_{final} = \sqrt{\frac{2L}{g}}$$

Após esse instante, a força F cai bruscamente de $3\rho.gL$ para $\rho.gL$, permanecendo constante nesse valor.

Questão 105 – Resposta: alternativa a

Comentário:

Sobre a afirmação I, o enunciado afirmou que o caminhão e o carro estão se movendo com qdm iguais. Entretanto, a massa do caminhão, com certeza, é maior que a massa do carro.



Assim, facilmente concluímos que a velocidade do carro é maior que a velocidade do caminhão, para compensar:

$$\mathrm{M}.v = \mathrm{m}.V$$

Afirmativa I é verdadeira.

Sobre a afirmação II, veja as perguntas chave:

- Quem tem maior qdm no início ? resposta: ambos têm a mesma qdm, conforme enunciado.
- Quem tem maior qdm ao final, quando eles pararem ? resposta: ambas serão nulas.
- Quem sofreu maior variação de QDM, ou seja, maior impulso $I = Q_F - Q_i$? Ora, ambos sofreram variações de qdm iguais, ou seja, impulsos iguais.

Afirmativa II é falsa.

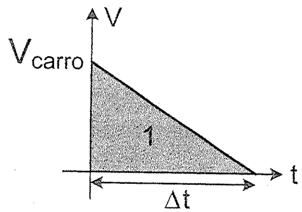
Sobre a afirmativa III, os Impulsos aplicados serão os mesmos em cada caso:

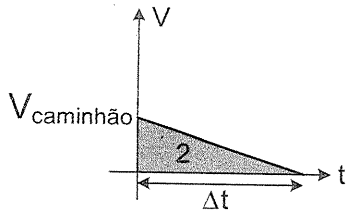
$$I_A = F_A . \Delta t_A = I_B = F_B . \Delta t_B$$

Se eles forem aplicados por meio de forças de intensidades iguais ($F_A = F_B$), eles certamente irão requerer intervalos de tempo iguais ($\Delta t_A = \Delta t_B$).

Afirmativa III é falsa

Sobre a afirmação IV, as áreas sob os gráficos $V_x t$ abaixo fornecem as distâncias percorridas pelos móveis até pararem.





Note que $V_{carro} > V_{caminhão}$ (conforme afirmação I) mas o tempo Δt gasto até parar será o mesmo (conforme concluímos na afirmação III), portanto, a área 1 sob o gráfico V x t do carro será claramente maior que a área 2 sob o gráfico do caminhão. Isso significa que o carro percorre uma distância maior que o caminhão até parar.

Afirmativa IV é falsa

Questão 106 – Resposta – Alternativa a

Dica: calcule a variação da energia cinética da bola.

Questão 107

Solução: O sistema encontra-se isolado de forças externas na horizontal (o chão é liso), o que nos permite escrever a conservação da qdm do sistema em relação à Terra:

$$(Q_{homem} + Q_{plataforma})_{antes} = (Q_{homem} + Q_{plataforma})_{depois}$$

Inicialmente, Raul e plataforma compartilham de uma mesma velocidade 20 cm/s em relação à Terra. Em seguida, o Raul começa a caminhar sobre a plataforma, causando uma transferência de qdm interna da plataforma para ele suficiente para que a plataforma passe a ter velocidade nula em relação à Terra. Assim, vem:

$$(Q_{homem} + Q_{plataforma})_{antes} = (Q_{homem} + Q_{plataforma})_{depois}$$

$$(2M).20 + (4M).20 = (2M).V + 0$$

$$V = 60 \text{ cm/s}$$

Como todo o cálculo é sempre feito em relação à Terra, essa é a velocidade final que o Raul deve ter em relação à Terra. Entretanto, como a plataforma está em repouso em relação à Terra no final, essa também é a velocidade final do Raul em relação à plataforma.

Questão 108 – Resposta – Alternativa c

Dica: conservação da qdm do sistema – atenção para o referencial – veja resolução da questão 31 – página 198, que se encontra na página 418.

Questão 109

Solução: Qual a velocidade v adquirida pela plataforma (em relação à Terra) quando o atleta da esquerda saltar ? Pela conservação da qdm do sistema, vem:

$$\Sigma Q_{antes} = \Sigma Q_{depois}$$

$$0 + 0 + 0 = m.(-u) + (M+m).v$$

$$v = \frac{m.u}{m+M} \quad \textbf{(eq1)}$$

Assim, após o atleta da esquerda saltar, a plataforma juntamente com o outro atleta, estará se movendo para a direita → com a velocidade v→ determinada em eq1, em relação à Terra.

Em seguida, o outro atleta saltará (para a direita) com velocidade u→ em relação à plataforma, portanto, com velocidade (u+v) em relação à Terra. Seja v' a velocidade da plataforma após esse salto. A conservação da qdm do sistema, em relação à Terra, durante esse segundo salto, nos permite escrever:

$$\Sigma Q_{antes} = \Sigma Q_{depois}$$

$$M.v + m.v = M.v' + m.(u+v) \quad \Rightarrow \quad M.v' = M.v - m.u$$

$$v' = v - \frac{m}{M}u \overset{eq1}{=} \frac{m.u}{M+m} - \frac{m.u}{M}$$

$$v' = \frac{-m^2.u}{M.(M+m)}$$

O sinal negativo indica que a plataforma se move para a esquerda ← após o segundo salto.

Questão 110

Solução: Inicialmente, o homem e o vagão compartilham de uma mesma velocidade v→ em relação à Terra.

Seja v'→ a velocidade do vagão em relação à Terra após o salto.

Se, logo após o salto, o homem apresenta velocidade ←u em relação ao vagão, ele apresenta velocidade (v' – u)→ em relação à Terra.

A conservação da qdm do sistema, em relação à Terra, nesse episódio nos permite escrever:

$$(Q_{homem} + Q_{vagão})_{antes} = (Q_{homem} + Q_{vagão})_{depois}$$

$$m.v + M.v = m.(v' - u) + M.v'$$

$$v' = v + \frac{m.u}{m+M}$$

Questão 111

Solução:

a) Inicialmente, os homens e a prancha encontram-se em repouso em relação à Terra.

Seja v← a velocidade da prancha em relação à Terra logo após o salto. Se, logo após o salto, o homem apresenta velocidade u→ em relação à prancha, ele apresenta velocidade (u–v)→ em relação à Terra.

A conservação da qdm do sistema, em relação à Terra, nesse episódio nos permite escrever:

$$(Q_{homens} + Q_{vagão})_{antes} = (Q_{homens} + Q_{vagão})_{depois}$$

$$0 + 0 = N.m.(u-v) + M.(-v)$$

$$V = \frac{N.m.u}{M + N.m} \qquad \textbf{(eq1)}$$

b) Considere a transição do sistema durante a qual o número de homens sobre a prancha passa de n para (n–1). Seja V_n a velocidade da prancha quando restam n homens sobre ela. A qdm Q_n do sistema nessa etapa vale:

$$Q_n = M.(-V_n) + n.m.(-V_n) \qquad \textbf{(eq2)}$$

Estamos arbitrando como positivo o sentido horizontal para a direita → e, negativo, o sentido oposto.

Quando o n-ésimo homem salta da prancha com velocidade u→ em relação à prancha, a qdm do sistema formado pela prancha e os n homens passa a valer:

$$Q_{n-1} = M.(-V_{n-1}) + (n-1).m.(-V_{n-1}) + m.(u - V_{n-1}) \qquad \textbf{(eq3)}$$

A conservação da qdm do sistema nos permite escrever:

$$Q_n = Q_{n-1}$$

$$M.(-V_n) + n.m.(-V_n) = M.(-V_{n-1}) + (n-1).m.(-V_{n-1}) + m.(u - V_{n-1})$$

$$(M + n.m).V_n = (M + n.m).V_n - m.u$$

$$V_{n-1} = V_n + \frac{m.u}{M + n.m} \qquad \textbf{(eq4)}$$

Assim, de acordo com eq4, quando restarem, por exemplo, 3 homens sobre a prancha, sua velocidade valerá:

$$V_3 = V_4 + \frac{m.u}{M + 4.m}$$

Quando restarem 2 homens sobre a prancha, sua velocidade valerá:

$$V_2 = V_3 + \frac{m.u}{M + 3.m}$$

Quando restar 1 homem sobre a prancha, sua velocidade valerá:

$$V_1 = V_2 + \frac{m.u}{M + 2.m}$$

Quando restar 0 homem sobre a prancha (ou seja, todos os homens já tiverem saltado da prancha), sua velocidade final será:

$$V_0 = V_1 + \frac{m.u}{M + 1.m}$$

Assim, chegamos a uma expressão para a velocidade final V_0 da prancha, após todos os N homens terem sucessivamente saltado da prancha:

$$V_0 = \frac{m.u}{M + 1.m} + \frac{m.u}{M + 2.m} + \frac{m.u}{M + 3.m} + \ldots + \frac{m.u}{M + N.m} \qquad \textbf{(eq5)}$$

c) É fácil perceber que:

$$\frac{1}{M + 1.m} + \frac{1}{M + 2.m} + \frac{1}{M + 3.m} + \ldots + \frac{1}{M + N.m} > \frac{N}{M + N.m}$$

Dessa forma, concluímos que a velocidade adquirida pela prancha é maior no segundo episódio.

Questão 113

Solução: Pela conservação da qdm na horizontal, vem:

$$\Sigma Qx_{antes} = \Sigma Qx_{depois}$$

$$0 + m.v.\cos\alpha = (M + m).u$$

$$10 \times 4 \times \frac{1}{2} = (10+30).u \quad \Rightarrow \quad u = 0{,}5 \text{ m/s}$$

Questão 114

Solução: Pela conservação da qdm na horizontal, na queda da 1ª caixa, vem:

$$\Sigma Qx_{antes} = \Sigma Qx_{depois}$$

$$0 + m.v.\cos\alpha = (M + m).u$$

$$5 \times 4 \times \frac{1}{2} = (5+30).u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{2}{7} \text{ m/s}$$

Pela conservação da qdm na horizontal, na queda da 2ª caixa, vem:

$$\Sigma Qx_{antes} = \Sigma Qx_{depois}$$

$$(M+m).u + m.v.\cos\alpha = (M + 2m).u'$$

$$(30+5).\frac{2}{7} \;+\; 5\times4\times\frac{1}{2} \;=\; (30+10).u' \quad\Rightarrow\quad \boxed{u' = 0{,}5\ \text{m/s}}$$

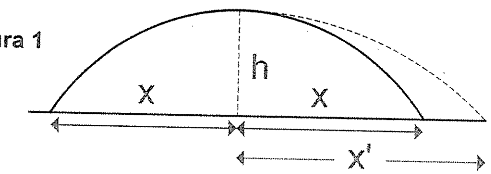
Questão 115 – Resposta: alternativa c

Solução: O alcance horizontal A que o atleta atingiria (Figura 1) num salto convencional, sem arremessar a caixa, é dado por:

$$A = x + x = \frac{V_o^2}{g}\text{sen}(2\alpha) = \frac{10^2}{10}.\text{sen}(120^o) = 10\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{A = 2x = 5\sqrt{3}\text{m}}$$

Donde deduzimos que: $\boxed{x = 2{,}5\sqrt{3}\ \text{m}}$ **(eq1)**

Figura 1



No ponto de altura máxima, o conjunto atleta+caixa compartilha de uma velocidade em relação à Terra dada por:

$$V_x = V_o.\cos\alpha = 10.(0{,}5) = 5\ \text{m/s}$$

Se, ao atingir o ponto de altura máxima, a caixa foi lançada com velocidade u = 2m/s← em relação ao próprio atleta, então ela foi lançada com velocidade $(V_x - u) = 3$ m/s→ em relação à Terra. Para determinar a velocidade V_x'→ do atleta, logo após o arremesso da caixa, aplicamos a conservação da qdm horizontal do sistema durante o arremesso da caixa, em relação à Terra:

$$\Sigma Qx_{\text{ antes}} = \Sigma Qx_{\text{ depois}}$$

$$(M + m).V_x = m.(V_x - u) + M.V_x'$$

$$75.(5) = 15.(5-2) + 60.V_x' \quad\Rightarrow\quad \boxed{V_x' = 5{,}5\ \text{m/s}}$$

O deslocamento horizontal x sofrido pelo atleta, no trecho descendente da trajetória parabólica, é dado por:

$$\boxed{x = V_x.t_{queda}} \qquad \textbf{(eq2)}$$

onde t_{queda} é o tempo é o tempo de descida, dado por:

$$h = \frac{g.t^2}{2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{t_{queda} = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \qquad \textbf{(eq3)}$$

De acordo com eq3, vemos que o *tempo de descida* t_{queda} só depende de **h** e **g**, não sendo alterado pelo arremesso da caixa. Entretanto, a velocidade horizontal

do atleta aumenta de $V_x = 5$ m/s para $V_x' = 5{,}5$ m/s quando ele arremessa a caixa. Dessa forma, o seu deslocamento horizontal, durante o trecho descendente da trajetória parabólica, aumenta de x para x' (veja Figura 1) dado por:

$$\boxed{x' = V_x'.t_{queda}} \qquad \textbf{(eq4)}$$

De eq2 e eq4, vem:

$$t_{queda} = \frac{x}{V_x} = \frac{x'}{V_x'} \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{5} = \frac{x'}{5{,}5} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x' = 1{,}1.x} \qquad \textbf{(eq5)}$$

Dessa forma, vemos que o alcance horizontal do homem sofre um aumento, devido ao arremesso da caixa, dado por:

$$\Delta x = x' - x = 1{,}1.x - x = 0{,}1.x \overset{\text{eq1}}{=} 0{,}1.(2{,}5.\sqrt{3}\,)$$

$$\boxed{\Delta x = 0{,}25.\sqrt{3}\ \text{m}}$$

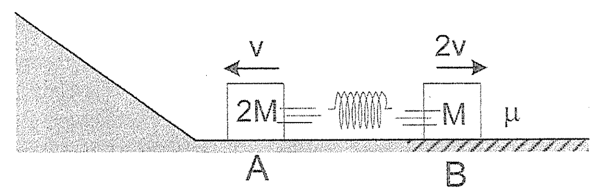
Questão 116 – Resposta: alternativa a

Solução: Quando a mola é liberada, ocorre uma mera transferência interna de qdm entre as caixas A e B durante a ação das forças elásticas. Pela conservação da qdm do sistema, vem:

$$\Sigma Q_{\text{ antes}} = \Sigma Q_{\text{ depois}}$$

$$0 + 0 = (2M).(-V_A) + M.(+V_B)$$

Donde concluímos que: $V_B = 2.V_A$. Tomaremos $V_A = v$ e $V_B = 2v$.



Após ser empurrada pela mola, a caixa A adquire uma velocidade $V_A = v$ e sobe até uma altura H que pode ser determinada pela conservação da energia mecânica da caixa A:

$$(\text{Epot}_A + \text{Ecin}_A)_{\text{antes}} = (\text{Epot}_A + \text{Ecin}_A)_{\text{depois}}$$

$$0 + \frac{(2\cancel{M}).v^2}{2} = (2\cancel{M}).g.H + 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{v^2 = 2gH} \qquad \textbf{(eq1)}$$

Após ser empurrada pela mola, a caixa B adquire uma velocidade $V_B = 2v$ e, em seu movimento posterior, percorre uma distância D até parar devido ao atrito. Durante esse movimento retardado, a energia cinética da caixa B será convertida em calor durante o trabalho realizado pela força de atrito.

Pelo teorema da energia cinética, aplicado ao movimento da caixa B, vem:

$$T_{Total} = \Sigma T_{Todos} = Ecin_{final} - Ecin_{inicial}$$
$$T_N + T_{Fat} + T_{peso} = Ecin_F - Ecin_i$$
$$0 + (-\mu.M.g.d) + 0 = 0 - \frac{M.(2v)^2}{2}$$
$$2v^2 = \mu.g.D \qquad \textbf{(eq2)}$$

De eq1 e eq2, vem: $\mu.D = 4H$

Observação: Logicamente que, embora não tenhamos feito uso da relação abaixo, ela é válida:

$$\frac{k.x^2}{2} = \frac{M_A V_A^2}{2} + \frac{M_B V_B^2}{2}$$

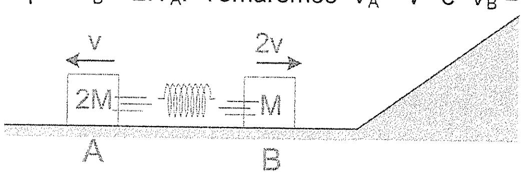
Questão 117 – Resposta: $V_A = 4$ m/s, $V_B = 1$ m/s

Questão 118 – Resposta: alternativa a

Solução: No primeiro episódio, quando a mola é liberada, ocorre uma mera transferência interna de qdm entre as caixas A e B durante a ação das forças elásticas internas ao sistema. Pela conservação da qdm do sistema, vem:

$$\Sigma Q_{antes} = \Sigma Q_{depois}$$
$$0 + 0 = (2M).(-V_A) + M.(+V_B)$$

Donde concluímos que: $V_B = 2.V_A$. Tomaremos $V_A = v$ e $V_B = 2v$.



No início, as caixas ainda estavam em repouso e toda a Emec do sistema estava armazenada na forma de Epot Elástica na mola. Em seguida, toda essa energia potencial elástica é convertida na Ecin das caixas A e B, quando a mola é liberada:

$$Emec = \frac{K.x^2}{2} = \frac{(2M)v^2}{2} + \frac{M.(2v)^2}{2} \qquad \textbf{(eq1)}$$

Após ser empurrada pela mola, a caixa B adquire uma velocidade $V_B = 2v$ e sobe até uma altura H que pode ser determinada pela conservação da energia mecânica da caixa B:

$$(Epot_B + Ecin_B)_{antes} = (Epot_B + Ecin_B)_{depois}$$

$$0 + \frac{(\cancel{M}).(2v)^2}{2} = (\cancel{M}).g.H + 0 \Rightarrow 2v^2 = 2gH \qquad \textbf{(eq2)}$$

No segundo episódio, a caixa A encontra-se encostada numa parede, impossibilitada de se mover. Assim, toda a energia Epot elástica inicial da mola é convertida na Ecin adquirida apenas pela caixa B que, por sua vez, será integralmente convertida na Epot gravitacional ($Epot_{grav} = M.g.h = M.g.x$) da caixa B quando ela subir a rampa até atingir a altura máxima x a ser determinada.

Pela conservação da Emec, no seguindo episódio, podemos escrever:

$$\frac{K.x^2}{2} = M.g.x \qquad \textbf{(eq3)}$$

Entretanto, essa mesma Epot elástica $K.x^2/2$ que aparece na relação eq3 pode ser extraída da relação eq1, visto que a mola apresenta a mesma deformação inicial x em ambos os episódios. Assim, substituindo-se eq1 em eq3, vem:

$$\frac{K.x^2}{2} = \frac{(2M)v^2}{2} + \frac{M.(2v)^2}{2} = M.g.x$$
$$M.v^2 + 2M.v^2 = M.g.x \Rightarrow 3.v^2 = g.x \qquad \textbf{(eq4)}$$

Substituindo-se eq4 em eq2, vem: $x = \frac{3H}{2}$

Questão 119

Solução: Pela conservação da qdm do sistema, vem:

$$\Sigma Q_{antes} = \Sigma Q_{depois}$$
$$0 + 0 = (4M).(-V_A) + M.(+V_B)$$

Donde concluímos que: $V_B = 4.V_A$ **(eq1)**

A conservação da Emec do sistema nos permite escrever:

$$(Epot + EcinA + EcinB)_{antes} = (Epot + EcinA + EcinB)_{depois}$$
$$M.g.H + 0 + 0 = 0 + \frac{(4M).V_A^2}{2} + \frac{(M).V_B^2}{2} \qquad \textbf{(eq2)}, \text{ com } H = R$$

Substituindo eq1 em eq2, vem:

$$M.g.R = \frac{(4M).V_A^2}{2} + \frac{M.16V_A^2}{2} \Rightarrow g.R = 10.V_A^2$$

Substituindo os valores numéricos, vem: $V_A = 1$ m/s, $V_B = 4$ m/s.

Questão 120

Respostas:

a) $\sqrt{\dfrac{2m^2gH}{M.(M+m)}}$, b) $\sqrt{\dfrac{2MgH}{M+m}}$ (**Dica:** Veja a resolução da questão 119)

Questão 121 – 1ª Resolução equacionando no Referencial Inercial da Terra.

Solução:

a) Quando o sistema é abandonado do repouso, o carrinho se move descendo a rampa que, por sua vez, se move para trás ← em relação à Terra. Para estudar esse movimento relativo, considere os seguintes parâmetros:

$\vec{V}_T$ = velocidade do carrinho em relação à Terra;

$\vec{V}$ = velocidade do carrinho em relação à rampa;

$\vec{U}$ = velocidade da rampa em relação à Terra.

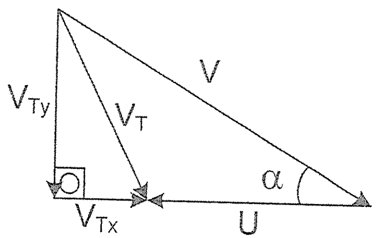


Figura 1

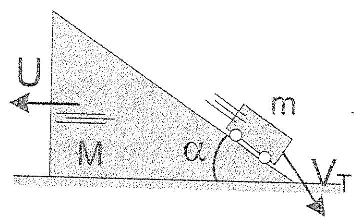


Figura 2

Pelo Princípio da Relatividade de Galileu, podemos escrever:

$$\vec{V}_{carrinho/Terra} = \vec{V}_{carrinho/rampa} + \vec{V}_{rampa/Terra}$$

$$\vec{V}_T = \vec{V} + \vec{U} \qquad \textbf{(eq1)}$$

O *diagrama de velocidades* ilustrado na Figura 1 traz tanto a relação vetorial eq1, quanto as componentes V_{TX} e V_{TY} da velocidade V_T do carrinho em relação à Terra.

Como o sistema encontra-se isolado de forças externas na horizontal (o chão é liso), a qdm do sistema se conserva nessa direção, no referencial inercial da Terra:

$$\Sigma Qx_{\,antes} = \Sigma Qx_{\,depois}$$

$$0 + 0 = M.(-U) + m.(+V_{TX})$$

$$M.U = m.V_{TX} \qquad \textbf{(eq2)}$$

Note que, ao escrever a expressão acima da conservação da qdm do sistema na horizontal, em relação à Terra, tomamos apenas as componentes horizontais das velocidades do carrinho e da rampa em relação à Terra.

A conservação da energia mecânica do sistema, em relação à Terra, nos permite escrever:

$$m.g.H = \frac{M.U^2}{2} + \frac{m.V_T^2}{2} \qquad \textbf{(eq3)}$$

Antes de prosseguir, o prof. Renato Brito chama a atenção do leitor para alguns detalhes importantes:

- *A relação eq3 trata da conservação da Emec do sistema no referencial inercial da Terra, portanto todas as velocidades que figuram em eq3 são velocidades em relação à Terra. Confira agora mesmo esse fato;*
- *Note que, ao contrário da qdm, a energia mecânica não é uma grandeza* vetorial, portanto não tem orientação nem é somada pela regra do paralelogramo;
- *Assim, não faz sentido, por exemplo, escrever expressão da conservação da Emec do sistema apenas na direção horizontal ou apenas na direção vertical, visto que energia nem sequer tem direção;*
- *Esse procedimento de analisar o problema numa direção, ignorando a outra direção perpendicular, é possível com a qdm do sistema por se tratar de uma grandeza vetorial;*
- *Sempre que formos calcular a energia cinética de cada corpo, não podemos tomar apenas essa ou aquela componente da velocidade, mas sim, a velocidade resultante do corpo no referencial considerado.*

Da geometria da Figura 1, podemos escrever:

$$V_{TX} = V.\cos\alpha - U \qquad \textbf{(eq4)}$$

Nossa meta inicial, nesse problema, é determinar a velocidade **U** final da rampa em função das massas **M** e **m**, da altura **h** e da gravidade **g** local. Observando eq3, percebemos que devemos previamente obter uma expressão para V_T em função de U a fim de substituí-la em eq3 e determinar U.

Substituindo eq4 em eq2, vem:

$$M.U = m.V_{TX} = m.(V.\cos\alpha - U) = m.V.\cos\alpha - m.U$$

$$V = \frac{(M+m).U}{m.\cos\alpha} \qquad \textbf{(eq5)}$$

A fim de determinar uma expressão para V_T em função de U, faremos uso da lei dos cossenos no triângulo da Figura 1:

$$V_T^2 = V^2 + U^2 - 2.V.U.\cos\alpha \qquad \textbf{(eq6)}$$

Substituindo eq5 em eq6, vem:

$$V_T^2 = \frac{(M+m)^2.U^2}{m^2.(\cos\alpha)^2} + U^2 - \frac{2.U^2(M+m)}{m.\cos\alpha}.\cos\alpha$$

Desenvolvendo e reduzindo os termos semelhantes, encontramos:

$$V_T^2 = \frac{U^2.(m^2.\text{sen}^2\alpha + 2M.m.\text{sen}^2\alpha + M^2)}{m^2.(\cos\alpha)^2} \qquad \textbf{(eq7)}$$

Finalmente encontramos uma expressão para V_T em função de **U** ☺. Agora, substituindo essa relação encontrada (eq7) na conservação da Emec do sistema (eq3), vem:

$$m.g.H = \frac{M.U^2}{2} + \frac{m}{2}.\frac{U^2.(m^2.\text{sen}^2\alpha + 2M.m.\text{sen}^2\alpha + M^2)}{m^2.(\cos\alpha)^2}$$

Desenvolvendo e reduzindo os termos semelhantes, vem:

$$U = \sqrt{\frac{2m^2g.H.\cos^2\alpha}{(M+m).(M+m.\text{sen}^2\alpha)}} \qquad \textbf{(eq8)}$$

A expressão acima fornece a velocidade final da rampa em relação à Terra, no instante em que o carrinho perde o contato com a rampa. A relação eq8 é a resposta do item **a** dessa questão.

b) Para determinar a velocidade final V_T (Figura 2) do carrinho em relação à Terra, ao perder o contato com a rampa, substituímos eq8 em eq7 **:**

$$V_T^2 = \frac{U^2.(m^2.\text{sen}^2\alpha + 2M.m.\text{sen}^2\alpha + M^2)}{m^2.(\cos\alpha)^2}$$

$$V_T^2 = \frac{2m^2g.H.\cos^2\alpha}{(M+m).(M+m.\text{sen}^2\alpha)}.\frac{(m^2.\text{sen}^2\alpha + 2M.m.\text{sen}^2\alpha + M^2)}{m^2.(\cos\alpha)^2}$$

$$V_T = \sqrt{\frac{2g.H.(m^2.\text{sen}^2\alpha + 2M.m.\text{sen}^2\alpha + M^2)}{(M+m).(M+m.\text{sen}^2\alpha)}} \qquad \textbf{(eq9)}$$

Veja, a seguir, a 2ª resolução para esse problema, desta vez no referencial não-inercial da própria rampa.

Questão 121 – 2ª Resolução – No Referencial Não-Inercial da rampa.

Solução:

a) No referencial não-inercial da rampa, a própria rampa encontra-se em repouso permanente, não apresentando nem velocidade nem aceleração (obviamente, ninguém possui velocidade em relação a si mesmo .....rsrsr ☺). Nesse referencial, apenas o carrinho se move, descendo a rampa.

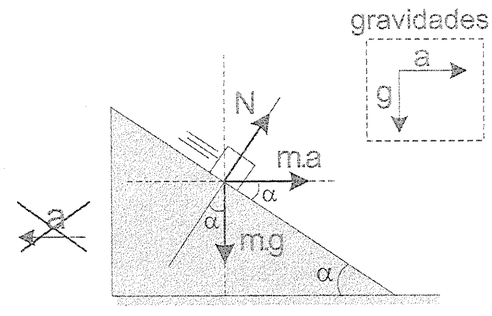


Figura 3

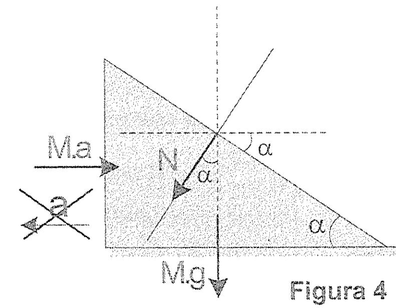
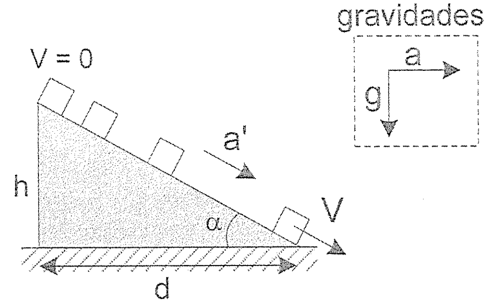


Figura 4

Ao mudar do referencial inercial da Terra para o referencial não-inercial da rampa, segundo o Princípio da Equivalência (largamente estudado nos capítulos 4 e 6 do volume 1 dessa obra), a aceleração ←**a** que a rampa possui no referencial da Terra é substituída por um campo gravitacional de mesmo módulo **a**→ no referencial da rampa (Figura 3). Esse campo gravitacional **a**→, por sua vez, produz, na rampa e no carrinho, forças gravitacionais respectivamente iguais a m.a→ e M.a→, conforme o diagrama de forças nas Figuras 3 e 4.

Figura 5



Durante o seu movimento de descida ao longo da rampa, o carrinho encontra-se em equilíbrio na direção normal (Figura 3), o que nos permite escrever:

$$N = m.g.\cos\alpha - m.a.\text{sen}\alpha \qquad \textbf{(eq10)}$$

O equilíbrio das forças que agem na rampa, na direção horizontal (Figura 4) nos permite escrever:

$$M.a \;=\; N.sen\alpha \;\overset{eq10}{=}\; (m.g.cos\alpha - m.a.sen\alpha).sen\alpha$$

$$M.a \;=\; m.g.sen\alpha.cos\alpha - m.a.sen^2\alpha \quad\Rightarrow\quad \boxed{a = \frac{m.g.sen\alpha.\cos\alpha}{M + m.sen^2\alpha}} \quad \textbf{(eq11)}$$

A expressão eq11 acima nos fornece o valor do campo gravitacional fictício **a→** que age em conjunto com o campo gravitacional terrestre ↓**g** no referencial não-inercial da rampa.

Para determinar a velocidade final V atingida pelo carrinho (no referencial não-inercial da rampa), após descer toda a rampa a partir do repouso (veja Figura 5), faremos uso do *Teorema da Energia Cinética*.

Durante o movimento de descida ↘ do carrinho ao longo da rampa (Figura 3), agem nele a força normal N↗, a força gravitacional m.g↓ e a força gravitacional fictícia m.a→ (veja a Figura 3). Segundo o Teorema da Energia cinética, a soma dos trabalhos realizados por todas essas forças que agem sobre o carrinho, ao longo do seu percurso desde o topo da rampa até a sua base, será igual à variação da Ecin do carrinho no referencial não-inercial da rampa:

$$T_{Total} \;=\; \Sigma T_{Todos} \;=\; Ecin_{\,final} - Ecin_{\,inicial}$$

$$T_N \;+\; T_{m.g} \;+\; T_{m.a} \;=\; Ecin_F \;-\; Ecin_i$$

Pelo *Princípio da Trajetória Alternativa* (veja página 33), o trabalho $T_{m.a}$ realizado pela força **m.a→**, desde o topo da rampa até a sua base, pode ser calculado com sendo a soma do trabalho que ela realiza no trecho vertical (que será nulo) mais o trabalho que ela realiza no trecho horizontal (que vale +m.a.d). Assim, vem:

$$T_N \;+\; T_{m.g} \;+\; T_{m.a} \;=\; Ecin_F \;-\; Ecin_i$$

$$0 \;+\; m.g.h \;+\; m.a.d \;=\; \frac{m.V^2}{2} - 0$$

Sendo $d = h.cos\alpha/sen\alpha$ e **a** dada pela relação eq11, vem:

$$m.g.h \;+\; m.\left(\frac{m.g.sen\alpha.\cos\alpha}{M + m.sen^2\alpha}\right).\left(h\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}\right) \;=\; \frac{m.V^2}{2} - 0$$

Isolando V na expressão acima, encontramos: $\boxed{V = \sqrt{\dfrac{2gh.(M+m)}{M + m.sen^2\alpha}}}$ **(eq12)**

A expressão acima fornece a velocidade V atingida pelo carrinho em relação à rampa, ao atingir a sua base.

Substituindo eq12 em eq5, vem:

$$\boxed{U = \sqrt{\frac{2m^2 g.H.\cos^2\alpha}{(M+m).(M+m.sen^2\alpha)}}} \qquad \textbf{(eq13)}$$

A expressão eq13 fornece a velocidade final U← atingida pela rampa, em relação à Terra, e coincide com o resultado já encontrado em eq8.

Note que, para se trabalhar com sucesso no referencial não-inercial, o primeiro passo a ser realizado sempre é fazer uso do Princípio da Equivalência e computar logo todas as forças fictícias que agem no sistema. Somente após esse passo, todos os princípios da Mecânica tais como as leis de Newton e os princípios de Trabalho e Energia, podem ser usados com sucesso, mesmo que se trate de um referencial não-inercial. Aprenda mais sobre Referenciais Não-Inerciais nos capítulos 4 e 6 do volume 1 desta obra.

b) A velocidade V_T pode ser prontamente determinada substituindo eq12 e eq13 em eq6. Chegaremos ao mesmo resultado obtido em eq9.

Questão 122

Solução:

a) Quando o sistema é abandonado do repouso, a bolinha se move descendo a rampa hemisférica que, por sua vez, recua para trás ← em relação à Terra. Para estudar esse movimento relativo, considere os seguintes parâmetros:

$\vec{V}_T$ = velocidade da bolinha em relação à Terra;

$\vec{U}$ = velocidade da bolinha em relação à rampa;

$\vec{V}$ = velocidade da rampa em relação à Terra.

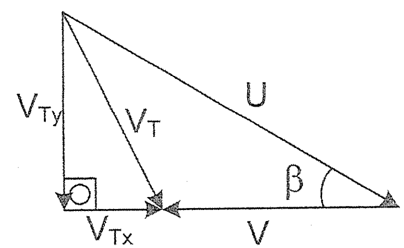


Figura 1

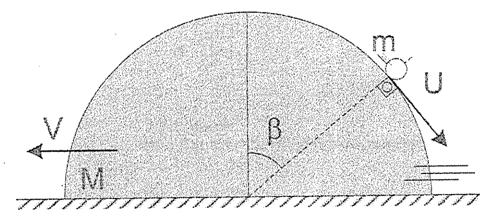


Figura 2

Pelo Princípio da Relatividade de Galileu, podemos escrever:

$$\vec{V}_{bolinha/Terra} \;=\; \vec{V}_{bolinha/rampa} \;+\; \vec{V}_{rampa/Terra}$$

$$\boxed{\vec{V}_T \;=\; \vec{U} \;+\; \vec{V}} \qquad \textbf{(eq1)}$$

O *diagrama de velocidades* ilustrado na Figura 1 traz tanto a relação vetorial eq1, quanto as componentes V_{TX} e V_{TY} da velocidade V_T da bolinha em relação à Terra.

Como o sistema encontra-se isolado de forças externas na horizontal (o chão é liso), a qdm do sistema se conserva nessa direção, no referencial inercial da Terra:

$$\Sigma Qx_{\,antes} = \Sigma Qx_{\,depois}$$

$$0 + 0 = M.(-V) + m.(+V_{TX})$$

$$M.V = m.V_{TX} = m.(U.\cos\beta - V)$$

$$\boxed{V = \frac{m.U.\cos\beta}{(M+m)}} \qquad \textbf{(eq2)}$$

Note que, ao escrever a expressão acima da conservação da qdm do sistema na horizontal, em relação à Terra, tomamos apenas as componentes horizontais das velocidades da bolinha e da rampa em relação à Terra.

A conservação da energia mecânica do sistema, em relação à Terra, nos permite escrever:

$$m.g.\Delta h = \frac{M.V^2}{2} + \frac{m.V_T^2}{2} \qquad \text{com} \qquad \Delta h = R.(\cos\alpha - \cos\beta)$$

$$\boxed{m.g.R.(\cos\alpha - \cos\beta) = \frac{M.V^2}{2} + \frac{m.V_T^2}{2}} \qquad \textbf{(eq3)}$$

A lei dos cossenos no triângulo da Figura 1 nos permite escrever:

$$\boxed{V_T^2 = V^2 + U^2 - 2.V.U.\cos\beta} \qquad \textbf{(eq4)}$$

Substituindo eq4 em eq3, vem:

$$m.g.R.(\cos\alpha - \cos\beta) = \frac{M.V^2}{2} + \frac{m}{2}.(U^2 + V^2 - 2.U.V.\cos\beta)$$

$$m.g.R.(\cos\alpha - \cos\beta) = \frac{(M+m).V^2}{2} + \frac{m.U^2}{2} - m.U.V.\cos\beta, \quad \text{usando eq2, vem:}$$

$$m.g.R.(\cos\alpha - \cos\beta) = \frac{(M+m)}{2}.\frac{m^2.U^2.\cos^2\beta}{(M+m)^2} + \frac{m.U^2}{2} - m.U.\left(\frac{m.U.\cos\beta}{(M+m)}\right)\cos\beta$$

Desenvolvendo, reduzindo os termos semelhantes, encontramos:

$$m.g.R.(\cos\alpha - \cos\beta) = \frac{m.U^2(m.\text{sen}^2\beta + M)}{2.(M+m)} \Rightarrow \boxed{U = \sqrt{\frac{2.(M+m).g.R.(\cos\alpha - \cos\beta)}{(m.\text{sen}^2\beta + M)}}}$$

(eq5)

A velocidade angular ω da bolinha, nessa posição, vale:

$$\omega = \frac{U}{r} \overset{eq5}{=} \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2.(M+m).g.R.(\cos\alpha - \cos\beta)}{(m.\text{sen}^2\beta + M)}} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2.(M+m).g.R.(\cos\alpha - \cos\beta)}{(m.\text{sen}^2\beta + M).r^2}}}$$

b) Substituindo eq5 em eq2, vem:

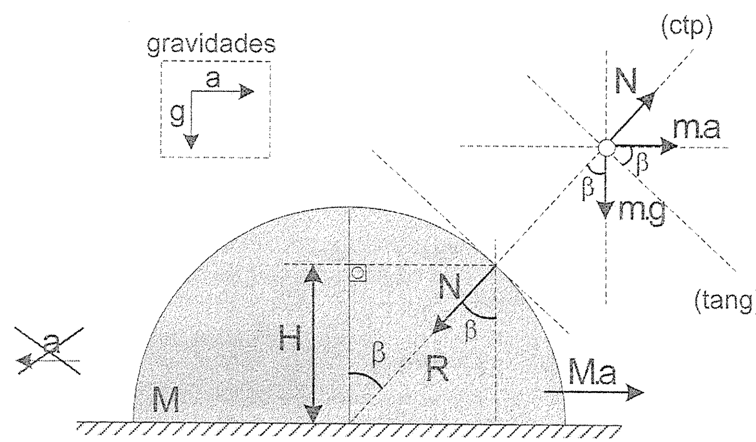
$$V = \frac{m.U.\cos\beta}{(M+m)} = \frac{m.\cos\beta}{(M+m)}\sqrt{\frac{2.(M+m).g.R.(\cos\alpha - \cos\beta)}{(m.\text{sen}^2\beta + M)}}$$

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{2.m^2 g.R.(\cos\alpha - \cos\beta).\cos^2\beta}{(M+m).(m.\text{sen}^2\beta + M)}}}$$

A expressão acima fornece a velocidade de recuo do hemisfério nas condições do item a.

c) Resolverei esse ítem no referencial da própria rampa hemisférica, visto que a trajetória seguida pela bolinha, nesse referencial, é exatamente um arco de circunferência de raio R, ao passo que essa mesma trajetória, no referencial da Terra, seria um arco de raio de curvatura variável ponto a ponto, devido ao fato de a rampa recuar durante o movimento da bolinha.

Ao mudar do referencial inercial da Terra para o referencial não-inercial da rampa, segundo o Princípio da Equivalência (largamente estudado nos capítulos 4 e 5 do volume 1 dessa obra), a aceleração ←**a** que a rampa possui no referencial da Terra é substituída por um campo gravitacional de mesmo módulo **a**→. Esse campo gravitacional **a**→, por sua vez, produz, na rampa e no carrinho, forças gravitacionais respectivamente iguais a m.a→ e M.a→, conforme o diagrama de forças mostrado na figura a seguir.



Durante a descida da bolinha, a segunda lei de Newton na direção centrípeta (ctp) nos permite escrever:

$$FRctp = Fin - Fout = \frac{m.U^2}{R}$$

$$(m.g.\cos\beta) - (N + m.a.\text{sen}\beta) = \frac{m.U^2}{R} \qquad \textbf{(eq6)}$$

Note que, na relação eq6, fizemos uso da velocidade U da bolinha em relação à rampa e do raio de curvatura R da trajetória circular da bolinha no referencial da rampa. Isso é coerente com o fato de estarmos trabalhando no referencial da rampa.

O equilíbrio das forças que agem na rampa, na direção horizontal, nos permite escrever:

$$M.a = N_x = N.\text{sen}\beta \quad \Rightarrow \quad a = \frac{N.\text{sen}\beta}{M} \qquad \textbf{(eq7)}$$

Substituindo eq7 em eq6, vem:

$$m.g.\cos\beta - N - M\left(\frac{N.\text{sen}\beta}{M}\right).\text{sen}\beta = \frac{m.U^2}{R}$$

$$m.g.\cos\beta - N - N.\text{sen}^2\beta = \frac{m.U^2}{R} \qquad \textbf{(eq8)}$$

Entretanto, da condição de a bolinha perder o contato com a rampa (N = 0), usando eq8, vem:

$$m.g.\cos\beta - 0 - 0.\text{sen}^2\beta = \frac{m.U^2}{R}$$

$$m.g.\cos\beta = \frac{m.U^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{U^2}{R.g} \overset{eq5}{=} \frac{1}{R.g}.\frac{2.(M+m).g.R.(\cos\alpha - \cos\beta)}{(m.\text{sen}^2\beta + M)}$$

$$\cos\beta = \frac{2.(M+m)(\cos\alpha - \cos\beta)}{(m.\text{sen}^2\beta + M)} \qquad \textbf{(eq9)}$$

O ângulo β acima define a posição em que a bolinha perde o contato com a rampa, posição esta que fica a uma altura, em relação ao solo horizontal, dada por:

$$H = R.\cos\beta \quad \Rightarrow \quad H = \frac{2R.(M+m)(\cos\alpha - \cos\beta)}{(m.\text{sen}^2\beta + M)}$$

Questão 123 – Resposta: $\dfrac{\sqrt{2gH}}{3}$ (**Dica:** veja a resolução da questão 121)

Questão 124

Solução: Quando o pêndulo oscila preso ao teto do vagão, as componentes da tração $\leftarrow T_X$ e $T_X \rightarrow$ que agem no teto do vagão e na esfera do pêndulo puxam esses corpos em sentidos opostos o tempo todo. Basicamente, o que ocorre, num intervalo de tempo Δt qualquer, é uma mera transferência interna de quantidade de movimento $T_X.\Delta t$ horizontal de um para o outro, de forma que a qdm horizontal do sistema vagão+pêndulo permanece inalterada durante as oscilações do pêndulo. Esse sistema encontra-se isolado de forças externas na horizontal (não há atrito entre o chão e o vagão).

Para estudar o movimento desse sistema, considere os seguintes parâmetros:

$\vec{V}_T$ = velocidade do pêndulo em relação à Terra;

$\vec{V}$ = velocidade do pêndulo em relação ao vagão;

$\vec{U}$ = velocidade do vagão em relação à Terra.

Seja $\vec{V}$ a velocidade final da bolinha do pêndulo em relação ao vagão, quando o seu fio já forma um ângulo β com a vertical (Figura 1). Pelo Princípio da Relatividade de Galileu, podemos escrever:

$$\vec{V}_{pêndulo/Terra} = \vec{V}_{pêndulo/vagão} + \vec{V}_{vagão/Terra}$$

$$\vec{V}_T = \vec{V} + \vec{U} \qquad \textbf{(eq1)}$$

O *diagrama de velocidades* ilustrado na Figura 1 mostra tanto a relação vetorial eq1, quanto as componentes V_{TX} e V_{TY} da velocidade V_T do pêndulo em relação à Terra.

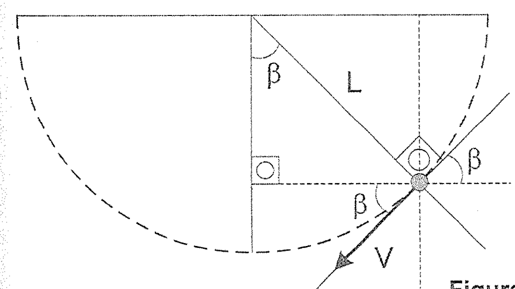


Figura 1

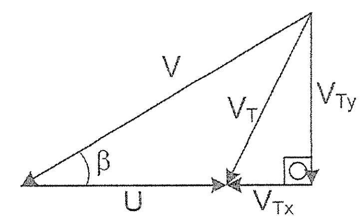


Figura 2

Como o sistema vagão+pêndulo encontra-se isolado de forças externas na horizontal (o chão é liso), a conservação da qdm do sistema nessa direção, no referencial inercial da Terra, permite escrever :

$$\Sigma Qx_{antes} = \Sigma Qx_{depois}$$

$$0 + 0 = M.(+U) + m.(-V_{TX})$$

$$M.U = m.V_{TX}, \quad \text{com } V_{TX} = V.\cos\beta - U \quad \text{(veja Figura 2)}$$

$$M.U = m.(V.\cos\beta - U) \quad \Rightarrow \quad V = \frac{U.(M+m)}{m.\cos\beta} \quad \textbf{(eq2)}$$

Note que, ao escrever a expressão da conservação da qdm do sistema na horizontal, em relação à Terra, tomamos apenas as componentes horizontais das velocidades do pêndulo e do vagão em relação à Terra. Confira agora mesmo esse fato.

A conservação da energia mecânica do sistema, em relação à Terra, nos permite escrever:

$$m.g.\Delta h = \frac{M.U^2}{2} + \frac{m.V_T^2}{2} \quad \textbf{(eq3)}$$

com $\Delta h = L.\cos\beta - L.\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \Delta h = L.(\cos\beta - \cos\alpha)$ **(eq4)**

Note que a relação eq3 trata da conservação da Emec do sistema no referencial inercial da Terra, portanto todas as velocidades que figuram em eq3 são velocidades em relação à Terra. Confira agora mesmo esse fato.

Da geometria da Figura 2, temos:

$$(V_T)^2 = (V_{TX})^2 + (V_{TY})^2 = (V.\cos\beta - U)^2 + (V.\text{sen}\beta)^2$$

$$(V_T)^2 = (V.\cos\beta - U)^2 + (V.\text{sen}\beta)^2 \quad \textbf{(eq5)}$$

Substituindo eq4 e eq5 em eq3, vem:

$$m.g.L.(\cos\beta - \cos\alpha) = \frac{M.U^2}{2} + \frac{m}{2}.\left[(V.\cos\beta - U)^2 + (V.\text{sen}\beta)^2\right] \quad \textbf{(eq6)}$$

Substituindo a relação eq2 na relação eq6, vem:

$$m.g.L.(\cos\beta - \cos\alpha) = \frac{M.U^2}{2} + \frac{m}{2}.\left[(V.\cos\beta - U)^2 + (V.\text{sen}\beta)^2\right]$$

$$m.g.L.(\cos\beta - \cos\alpha) = \frac{M.U^2}{2} + \frac{m}{2}.\left[\left(\frac{U.(M+m)}{m} - U\right)^2 + \left(\frac{U.(M+m)}{m.\cos\beta}.\text{sen}\beta\right)^2\right]$$

$$m.g.L.(\cos\beta - \cos\alpha) = \frac{M.U^2}{2} + \frac{m}{2}.\left[\frac{U^2M^2}{m^2} + \frac{U^2.(M+m)^2}{m^2.\cos^2\beta}.\text{sen}^2\beta\right]$$

$$m.g.L.(\cos\beta - \cos\alpha) = U^2.\left(\frac{M.m^2.\cos^2\beta + m.M^2.\cos^2\beta + m.(M+m)^2.\text{sen}^2\beta}{2.m^2.\cos^2\beta}\right)$$

$$m.g.L.(\cos\beta - \cos\alpha) = U^2.\left(\frac{M.m.\cos^2\beta.(M+m) + m.(M+m).(M+m).\text{sen}^2\beta}{2.m^2.\cos^2\beta}\right)$$

$$m.g.L.(\cos\beta - \cos\alpha) = U^2.\left(\frac{(M+m).m}{2.m^2.\cos^2\beta}\right).\left[M.\cos^2\beta + (M+m).\text{sen}^2\beta\right]$$

$$m.g.L.(\cos\beta - \cos\alpha) = U^2.\left(\frac{(M+m).m}{2.m^2.\cos^2\beta}\right).\left[M.(1-\text{sen}^2\beta) + M.\text{sen}^2\beta + m.\text{sen}^2\beta\right]$$

$$m.g.L.(\cos\beta - \cos\alpha) = U^2.\left(\frac{M+m}{2.m.\cos^2\beta}\right).\left(M + m.\text{sen}^2\beta\right)$$

Donde: $U = \sqrt{\dfrac{2.m^2gL}{(M+m)}.\dfrac{(\cos\beta - \cos\alpha).\cos^2\beta}{(M + m.\text{sen}^2\beta)}}$

Questão 125

Respostas:

a) $\sqrt{\dfrac{3gL}{2}}$, b) $\sqrt{\dfrac{gL}{6}}$, c) $\dfrac{L\sqrt{3}}{6}$

Dica: Veja a resolução da questão 124.

Questão 126

Solução: Se a joaninha se move com velocidade horizontal $U.\cos\alpha\rightarrow$ em relação à cunha, enquanto a cunha recua com velocidade $V\leftarrow$ em relação à Terra, então a joaninha se move com velocidade $(U.\cos - V)\rightarrow$ em relação à Terra. Estando o sistema isolado de forças externas na direção horizontal (chão liso), a conservação da qdm na horizontal nos permite escrever:

$$\Sigma Qx_{\text{antes}} = \Sigma Qx_{\text{depois}}$$

$$0 + 0 = M.(-V) + m.(U.\cos - V)$$

Note que, ao escrever a expressão da conservação da qdm do sistema na horizontal, em relação à Terra, tomamos apenas as componentes horizontais das velocidades da joaninha e da cunha em relação à Terra. Confira agora mesmo esse fato.

$$m.U.\cos\alpha = (M + m).V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m.U.\cos\alpha}{M+m}$$

Questão 127 – Resposta – Alternativa e – **Dica:** Veja a resolução da questão 126.

Questão 128

Solução: A rã de massa m salta com velocidade horizontal $V_o.\cos\alpha \rightarrow$ em relação à Terra. Com isso, a tábua de massa M recua com velocidade $U \leftarrow$. Pela conservação da qdm horizontal do sistema rã + tábua, em relação à Terra, vem:

$$\Sigma Qx_{\,antes} = \Sigma Qx_{\,depois}$$

$$0 + 0 = M.(-U) + m.(V_o.\cos)$$

$$\boxed{U = \frac{m.V_o.\cos\alpha}{M}} \qquad \textbf{(eq1)}$$

O tempo que a rã permanece no ar, em sua trajetória parabólica, é dado por:

$$\boxed{t_{vôo} = \frac{2.V_o.\text{sen}\alpha}{g}} \qquad \textbf{(eq2)}$$

Durante esse intervalo de tempo que dura o vôo da rã, o que ocorre no referencial da tábua ?

Ora, no referencial da tábua, a própria tábua encontra-se em repouso enquanto, na direção horizontal, a rã se move com velocidade relativa $V_{rel} = U + V_o.\cos\alpha$, dispondo de um tempo $t_{vôo}$ (dado por eq2) para percorrer a distância horizontal **L**, de uma extremidade da tábua até a outra extremidade, em movimento uniforme. Assim, podemos escrever:

$$L = V_{rel}.\,t_{vôo}$$

$$L = (U + V_o.\cos\alpha).\frac{2.V_o.\text{sen}\alpha}{g}, \qquad \text{usando eq1, vem:}$$

$$L = \left(\frac{m.V_o.\cos\alpha}{M} + V_o.\cos\alpha\right).\frac{2.V_o.\text{sen}\alpha}{g}$$

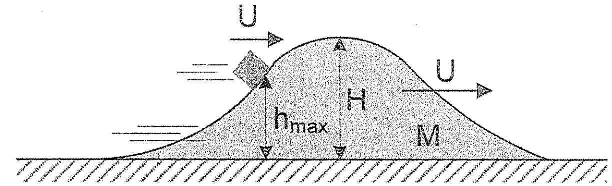
$$\boxed{V_o = \sqrt{\frac{M.g.L}{(M+m).\text{sen}2\alpha}}}$$

Questão 129 – Resposta – Alternativa d – **Dica:** Veja a resolução da questão 128.

Questão 130

Solução:

a) Quando a caixa atinge a altura máxima h_{max} ao longo da plataforma, ela pára em relação à plataforma. Nesse momento, caixa e plataforma compartilham de uma mesma velocidade U em relação à Terra.



Pela conservação da qdm do sistema caixa+plataforma, podemos escrever:

$$\Sigma Q_{\,antes} = \Sigma Q_{\,depois}$$

$$m.V + 0 = M.(U) + m.(U)$$

$$\boxed{U = \frac{m.V}{M+m}} \qquad \textbf{(eq1)}$$

Pela conservação da Emec do sistema, podemos escrever:

$$\boxed{\frac{m.V^2}{2} = \frac{(M+m).U^2}{2} + m.g.h_{max}} \qquad \textbf{(eq2)}$$

Substituindo eq1 em eq2, vem:

$$\frac{m.V^2}{2} = \frac{(M+m)}{2}\frac{(m.V)^2}{(M+m)^2} + m.g.h_{max} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_{max} = \frac{M.V^2}{2(M+m).g}} \ \textbf{(eq3)}$$

Seja H a altura da parte mais elevada da plataforma, ou seja, a altura do pico da plataforma em relação ao solo. A condição para que a caixa **não** consiga transpor o pico da plataforma é $h_{max} \le H$. Para que a caixa consiga transpor o pico da plataforma, devemos ter:

$$h_{max} > H \ \overset{eq3}{\Rightarrow} \ \frac{M.V^2}{2(M+m).g} > H \ \Rightarrow \ V > \sqrt{\frac{2.(M+m).g.H}{M}}$$

Assim, a velocidade mínima com que a caixa deve ser empurrada para conseguir transpor o pico da rampa vale:

$$\boxed{V_{min} = \sqrt{\frac{2.(M+m).g.H}{M}}}$$

b) Sejam U_F e V_F as velocidades finais da plataforma e da caixa respectivamente. Escrevendo novamente a conservação da qdm e da Emec do sistema, temos:

$$m.V + 0 = m.V_F + M.U_F \qquad \textbf{(eq4)}$$

$$\frac{m.V^2}{2} = \frac{m.V_F^2}{2} + \frac{M.U_F^2}{2} \qquad \textbf{(eq5)}$$

Resolvendo o sistema do 2º grau, nas variáveis V_F e U_F, composto pelas equações eq4 e eq5, encontramos duas soluções:

1ª solução: $U_F = 0$ e $V_F = +V$

2ª solução: $U_F = V_o \dfrac{2m}{m+M}$ e $V_F = -V_o . \left(\dfrac{M-m}{M+m}\right)$

A 1ª solução se aplica no caso do item b em que a caixa tem velocidade suficiente para transpor o pico da plataforma, subindo por um lado e descendo pelo outro lado da mesma. Pela simetria, a plataforma permanece em repouso ($U_F = 0$) ao final.

A 2ª solução se aplica no caso do item c em que a caixa não tem velocidade suficiente para transpor o pico da plataforma. Ela acaba descendo a plataforma voltando para trás enquanto a plataforma adquire velocidade para frente.

Questão 131 – Resposta: $\sqrt{\dfrac{2Rg.m^2}{M.(M+m)}}$ **Dica:** Veja a resolução da questão 125.

Questão 132

Solução: Do estagio A para o estágio B (veja Figura), o bloco permanece em repouso encostado à parede, enquanto a caixa adquire uma velocidade $V_o = \sqrt{2Rg}$ ao passar pela posição mais baixa da rampa hemisférica (estágio B), pela conservação da Emec do sistema.

Após o estágio B, o bloco finalmente perde o contato com a parede e passa a oscilar juntamente com a caixa. Esta, após atingir a altura máxima no estágio C, desce novamente passando pelo ponto mais baixa da rampa hemisférica (estágio D), configuração em que os corpos atingem velocidade máxima em relação à Terra.

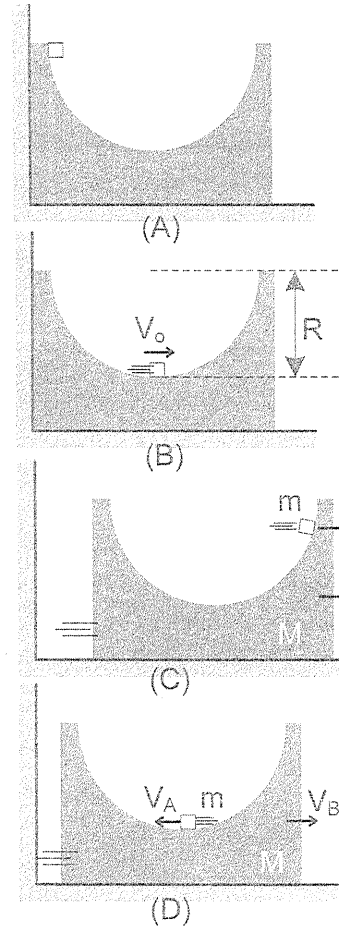
Do estágio B para D, a conservação da qdm horizontal do sistema nos permite escrever:

$$\Sigma Qx_{\text{estágio B}} = \Sigma Qx_{\text{estágio D}}$$

$$m.V_o + 0 = m.(-V_A) + M.(+V_B)$$

$$m.V_o = M.V_B - m.V_A$$

(eq1)



Do estágio B para D, a conservação da Emec do sistema nos permite escrever:

$$\frac{m.V_o^2}{2} = \frac{M.V_B^2}{2} + \frac{m.V_A^2}{2} \quad \textbf{(eq2)}$$

Isolando V_A e $m.V_A$ em eq1 e substituindo em eq2, vem:

$$\frac{m.V_o^2}{2} = \frac{M.V_B^2}{2} + \frac{m.V_A^2}{2}$$

$$\frac{m.V_o^2}{2} = \frac{M.V_B^2}{2} + \frac{m.V_A}{2}.V_A$$

$$\frac{m.V_o^2}{2} = \frac{M.V_B^2}{2} + \left(\frac{M.V_B - m.V_o}{2}\right).\left(\frac{M.V_B - m.V_o}{m}\right)$$

Desenvolvendo, vem:

$V_B.(M.m + M^2) = 2.M.m.V_o$, com $V_o = \sqrt{2Rg}$

$$V_B = \frac{2m.\sqrt{2.R.g}}{(M+m)}$$

Questão 133 – Resposta – Alternativa e

Questão 134 – Resposta – Alternativa c – **Dica:** Veja a questão 130.

Questão 135

Respostas:

a) $\dfrac{m.v}{M+m}$ b) $\sqrt{\dfrac{(M^2+M.m+m^2)}{(M+m)^2}v^2-2gh}$ c) $\dfrac{M.v^2}{2g.(M+m)}$

d) $\dfrac{2mv\sqrt{M.v^2-2(M+m)gh}}{g.(M+m)^{3/2}}$

Questão 136

Solução: Durante o disparo, a qdm horizontal do sistema bala+canhão se conserva, visto que o sistema não recebe forças impulsivas externas na horizontal durante o disparo. A força elástica ainda não age, durante o disparo. Assim, podemos dizer que $Qx_{sistema}$, logo antes e logo depois do disparo, é exatamente a mesma:

$$\Sigma Qx_{\text{logo antes}} = \Sigma Qx_{\text{logo depois}}$$

$$0 + 0 = M.(-V) + m.(+V_o.\cos\alpha)$$

$$M.V = m.V_o.\cos\alpha$$

$$4000.V = 200.(160).(0,5) \Rightarrow \boxed{V = 4\ m/s}$$

Após o disparo, o canhão recua com velocidade V = 4 m/s e passa a deformar a mola. Durante a elongação da mola, a energia cinética de recuo do canhão vai sendo convertida em Epot elástica. A conservação da Emec do sistema canhão+bola, durante essa etapa, permite escrever:

$$(\text{Epot} + \text{Ecin})_{antes} = (\text{Epot} + \text{Ecin})_{depois}$$

$$0 + \frac{M.V^2}{2} = \frac{K.x^2}{2} + 0$$

$$\frac{4000.(4)^2}{2} = \frac{4\cdot 10^5.x^2}{2} \Rightarrow x = 0,4\ m$$

Questão 137 – Resposta – Alternativa c

Questão 138 – Respostas: a) 2,6 m/s b) 0,5 m

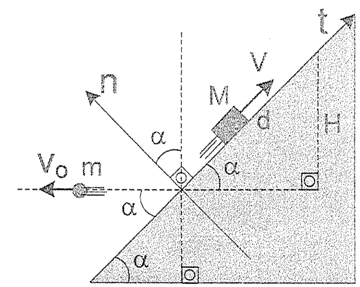
Questão 139

Solução: A bola é disparada pelo canhão com velocidade $\leftarrow V_o$. Com o disparo, o canhão recua ladeira acima, adquirindo velocidade $V\nearrow$ logo após o disparo.

Como o sistema bala+canhão não sofre forças impulsivas na direção tangencial (eixo t na figura), a sua qdm se conserva naquela direção durante o disparo:

$$\Sigma Qt_{antes} = \Sigma Qt_{depois}$$

$$0 + 0 = -m.V_o.\cos\alpha + M.V \Rightarrow \boxed{V = \frac{m}{M}.V_o.\cos\alpha} \quad \textbf{(eq1)}$$



Durante a subida do canhão ladeira acima, o trabalho realizado pela força de atrito Fat é o culpado pela dissipação da Emec do canhão. Pelo princípio do *Trabalho Realizado Pelas Forças Não Conservativas*, podemos escrever:

$$\Sigma T_{FNC} = \text{Emec}_F - \text{Emec}_i$$

$$T_N + T_{Fat} = (\text{Epot}_F + \text{Ecin}_F) - (\text{Epot}_i + \text{Ecin}_i)$$

$$0 + (-\mu.M.gd.\cos\alpha) = (M.g.H + 0) - \left(0 + \frac{M.V^2}{2}\right), \text{ com } H = d.\text{sen}\alpha$$

$$\boxed{-\mu.M.gd.\cos\alpha = M.g.\,d.\text{sen}\alpha - \frac{M.V^2}{2}} \quad \textbf{(eq2)}$$

Substituindo eq2 em eq1, vem:

$$-\mu.M.gd.\cos\alpha = M.g.\,d.\text{sen}\alpha - \frac{M}{2}.\frac{m^2}{M^2}.V_o^2.\cos^2\alpha$$

$$M.g.d.(\text{sen}\alpha + \mu.\cos\alpha) = \frac{M}{2}.\frac{m^2}{M^2}.V_o^2.\cos^2\alpha$$

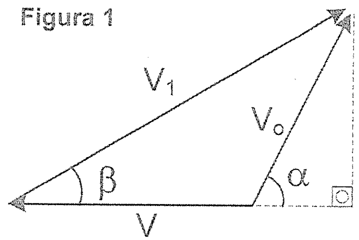
$$\boxed{d = \frac{m^2.V_o^2.\cos^2\alpha}{2.M^2.g.(\text{sen}\alpha + \mu.\cos\alpha)}}$$

Questão 140

Solução: Para estudar o movimento desse sistema, considere os seguintes parâmetros:

V_1 = velocidade do projétil em relação ao canhão;
V_o = velocidade do projétil em relação à Terra;
V = velocidade de recuo do canhão em relação à Terra;
β = inclinação do cano do canhão em relação a horizontal;
α = inclinação da velocidade V_2 em relação a horizontal.

Figura 1



elo Princípio da Relatividade de Galileu, podemos escrever:

$$\vec{V}_{\text{projétil}/\text{Terra}} = \vec{V}_{\text{projétil}/\text{canhão}} + \vec{V}_{\text{canhão}/\text{Terra}}$$

$$\vec{V}_o = \vec{V}_1 + \vec{V} \qquad \textbf{(eq1)}$$

Figura 1 mostra o diagrama vetorial que representa a relação eq1, bem como s ângulos envolvidos no problema.

) Como o sistema canhão + projétil encontra-se isolado de forças externas na orizontal (o chão é liso), a conservação da qdm do sistema nessa direção, no eferencial inercial da Terra, permite escrever :

$$\Sigma Qx_{\text{antes}} = \Sigma Qx_{\text{depois}}$$

$$0 + 0 = M.(-V) + m.(+V_o.\cos\alpha)$$

$$M.V = m.V_o.\cos\alpha \qquad \textbf{(eq2)}$$

$$V = \frac{m}{M}.V_o.\cos\alpha$$

Note que, ao escrever a expressão da conservação da qdm do sistema na horizontal, em relação à Terra, tomamos apenas as componentes horizontais das velocidades do projétil e do canhão em relação à Terra. Confira agora mesmo esse fato.

) Da geometria da Figura 1, podemos escrever:

$$V_1.\cos\beta = V + V_o.\cos\alpha \qquad \textbf{(eq3)}$$

$$V_1.\text{sen}\beta = V_o.\text{sen}\alpha \qquad \textbf{(eq4)}$$

Extraindo $V_o.\cos\alpha$ de eq2 e substituindo em eq3, vem:

$$V_1.\cos\beta = V + V_o.\cos\alpha$$

$$V_1.\cos\beta = V + \frac{M.V}{m} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{M.V_1.\cos\beta}{(M+m)}$$

c) Isolando V_1 em eq4, $V_o.\cos\alpha$ de eq2 e substituindo em eq3, vem:

$$V_1.\cos\beta = V + V_o.\cos\alpha$$

$$\frac{V_o.\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta}.\cos\beta = V + \frac{M.V}{m}$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{(M+m).V.\text{sen}\beta}{m.V_o.\cos\beta} \qquad \textbf{(eq5)}$$

Isolando $\cos\alpha$ em eq2, vem:

$$\cos\alpha = \frac{M.V}{m.V_o} \qquad \textbf{(eq6)}$$

Da relação fundamental da trigonometria, a partir de eq5 e eq6, vem:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{(M+m).V.\text{sen}\beta}{m.V_o.\cos\beta}\right]^2 + \left[\frac{M.V}{m.V_o}\right]^2 = 1$$

$$(M+m)^2.V^2.\text{sen}^2\beta + M^2.V^2.\cos^2\beta = m^2.V_o^2.\cos^2\beta$$

$$V = \frac{m}{\sqrt{(M+m)^2.\text{sen}^2\beta + M^2.\cos^2\beta}}.V_o.\cos\beta$$

d) De eq3, vem: $(V_1.\cos\beta)^2 = (V + V_o.\cos\alpha)^2$ **(eq7)**

De eq4, vem: $(V_1.\text{sen}\beta)^2 = (V_o.\text{sen}\alpha)^2$ **(eq8)**

Somando eq7 e eq8, membro a membro, vem:

$$(V_1.\text{sen}\beta)^2 + (V_1.\cos\beta)^2 = (V + V_o.\cos\alpha)^2 + (V_o.\text{sen}\alpha)^2$$

$$V_1^2 = (V + V_o.\cos\alpha)^2 + (V_o.\text{sen}\alpha)^2 \qquad \textbf{(eq9)}$$

Extraindo V_o de eq2, $V_o.\cos\alpha$ de eq2 e substituindo em eq9, vem:

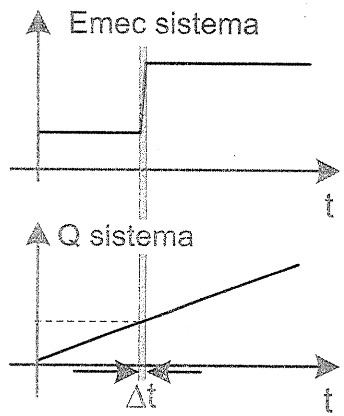
$$V_1^2 = \left(\frac{m.V}{m} + \frac{M.V}{m}\right)^2 + \frac{M^2.V^2}{m^2.\cos^2\alpha}.\text{sen}^2\alpha$$

$$\boxed{V = \frac{m}{\sqrt{M^2.\text{sen}^2\alpha + (M+m)^2.\cos^2\alpha}}.V_1.\cos\alpha}$$

Questão 141

Solução: Durante a queda da granada, a única força externa agindo nela é a força gravitacional (conservativa). Assim, durante a queda, a energia mecânica do sistema granada permanece constante, exceto durante o breve intervalo de tempo em que ocorre a explosão.

A energia química liberada na explosão impulsiona os fragmentos da granada em todas as direções, incrementando a energia cinética do sistema granada. Podemos dizer, portanto, que ocorre conversão de energia química (energia interna) da granada em energia mecânica apenas durante o breve intervalo de tempo que dura a explosão, justificando o aumento da energia mecânica dos sistema mostrado no gráfico abaixo. Logo após esse evento, a energia mecânica do sistema volta a permanecer constante.



Agora, o que dizer da qdm Qsist do sistema durante a queda da granada ? Ora, devido à ação da força peso (que acelera o sistema para baixo), a qdm do sistema aumenta linearmente com o tempo durante a queda da granada.

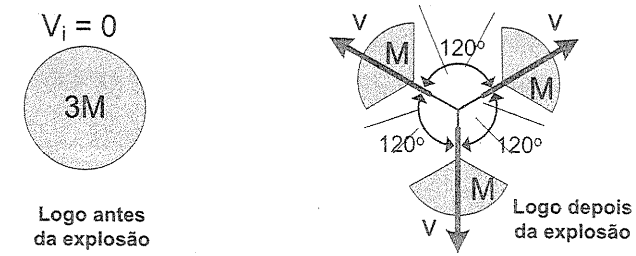
A explosão trata-se apenas de um evento *interno* ao sistema granada e, portanto, não provoca nenhuma perturbação no comportamento linear da qdm Qsist do sistema em função do tempo, como mostrado no gráfico.

O crescimento linear da qdm Qsist do sistema, em função do tempo, se deve apenas à ação da gravidade (força externa) sobre o sistema granada (e seus

fragmentos), não tendo nenhuma relação com o evento explosão (forças internas).

Se observarmos a Emec do sistema logo antes da explosão e logo depois da explosão, veremos que ela bruscamente aumenta de valor devido à energia química liberada na explosão. A explosão produz incremento de Emec no sistema, mas não produz variação na qdm Qsist do sistema. Assim, se observarmos a qdm Qsist do sistema logo antes e logo depois da explosão ($\Delta t \cong 0$), ela é exatamente a mesma.

Pode parecer estranho, à primeira vista, que um evento possa produzir grande variação da Emec de um sistema sem alterar a sua qdm. Considere, entretanto, um exemplo em que uma granada de massa 3M estava inicialmente em repouso ($V_i = 0$) e, de repente, exploda simetricamente, como na figura abaixo:



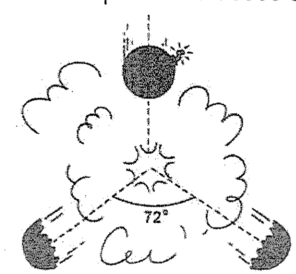
A energia cinética (mecânica) do sistema, logo antes da explosão era nula. Entretanto, logo após a explosão, a Emec (cinética) do sistema salta, bruscamente, para o valor:

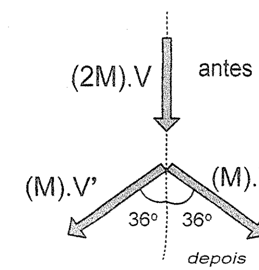
$$\text{Emec}_{\text{FINAL}} = \frac{M.v^2}{2} + \frac{M.v^2}{2} + \frac{M.v^2}{2} = \frac{3M.v^2}{2}$$

Já a qdm Qsist do sistema é nula logo antes da explosão e permanece ainda nula após a explosão, visto que qdm é uma grandeza vetorial.

$$\vec{Q}\text{sist}_{\text{ logo antes}} = \vec{Q}\text{sist}_{\text{ logo depois}} = \vec{0}$$

O leitor não pode perder de vista o caráter vetorial da qdm, pois ele tem um papel central na compreensão desse assunto.





oltando à resolução da questão 141, como o evento explosão não altera a qdm sist do sistema, podemos escrever a seguinte equação vetorial:

$$\vec{Q}sist_{\text{ logo antes}} = \vec{Q}sist_{\text{ logo depois}}$$

$$\downarrow 2M.V = \downarrow M.V'.\cos 36^{o} + \downarrow M.V'.\cos 36^{o}$$

$$\downarrow 2M.V = \downarrow M.V'.(0{,}8) + \downarrow M.V'.(0{,}8)$$

$$\downarrow 2M.V = \downarrow 1{,}6.M.V'$$

plicando-se o módulo, de ambos os lados, vem:

$$|\downarrow 2M.V| = |\downarrow 1{,}6.M.V'| \Rightarrow 2M.V = 1{,}6.M.V'$$

$$V = 0{,}8.V' \Rightarrow 40 = 0{,}8.V' \Rightarrow V' = 50 \text{ m/s}$$

ssim, concluímos que a velocidade de cada um dos dois fragmentos, logo após explosão, vale $V' = 50$ m/s.

penas a título de curiosidade, calculemos a variação da energia mecânica Emec desse sistema durante essa explosão:

$$\Delta Emec = Ecin_{Final} - Ecin_{\text{ inicial}} = \left[\frac{M.(V')^2}{2} + \frac{M.(V')^2}{2}\right] - \left[\frac{2M.(V)^2}{2}\right]$$

$$\Delta Emec = \left(\frac{M.50^2}{2} + \frac{M.50^2}{2}\right) - \left(\frac{2M.40^2}{2}\right)$$

$$\Delta Emec = 900M$$

uestão 142 – Resposta – Alternativa e – **Dica:** Veja a questão 141.

uestão 143 – Resposta – Alternativa d

olução: A granada (de massa 2M) atinge o vértice de sua trajetória parabólica penas com velocidade horizontal:

$$Vx = V_o.\cos\alpha = 100.(0{,}8) = 80 \text{ m/s}$$

o passar pelo vértice da sua trajetória parabólica, a granada explode, se vidindo em 2 pedaços de mesma massa M. Um deles possui velocidade $V_1\downarrow$ para aixo e o outro possui velocidade $\vec{V}_2$ de direção ainda desconhecida.

omo o evento explosão não altera a qdm Qsist do sistema, podemos escrever a eguinte equação vetorial:

$$\vec{Q}sist_{\text{ logo antes}} = \vec{Q}sist_{\text{ logo depois}}$$

$$2M.\vec{V}_x = M.\vec{V}_1 + M.\vec{V}_2$$

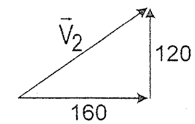
$$(2M).80\rightarrow = M.120\downarrow + M.\vec{V}_2$$

Graficamente, temos:

$$\underrightarrow{160M} = \downarrow 120M + M.\vec{V}_2$$

$$\underrightarrow{160M} + \uparrow 120M = M.\vec{V}_2$$

$$\underrightarrow{160} + \uparrow 120 = \vec{V}_2$$



Pitágoras
$V_2 = 200$m/s

Questão 144 – Resposta – Alternativa a – **Dica:** Veja a questão 141.

Questão 145 – Resposta – Alternativa d – **Dica:** Veja a questão 141.

Questão 146 – Resposta – Alternativa b

Solução: A granada lançada verticalmente explodiu ao atingir a altura máxima, isto é, explodiu no instante em que sua velocidade era nula (V = 0). Sejam $\vec{Q}_A$, $\vec{Q}_B$ e $\vec{Q}_C$ as qdm's dos três fragmentos logo após a explosão, cujos módulos valem:

$$Q_A = (3M).60 = 180.M$$
$$Q_B = (2M).40 = 80.M$$
$$Q_C = (2M).V = 2M.V$$

A conservação da qdm do sistema granada nos permite escrever:

$$\vec{Q}_{\text{sist logo antes}} = \vec{Q}_{\text{sist logo depois}} \Rightarrow \vec{0} = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B + \vec{Q}_C$$

Das propriedades dos vetores, sabemos que se três vetores tem resultante nula, tais vetores formam necessariamente um polígono fechado de três lados, isto é, um triângulo.

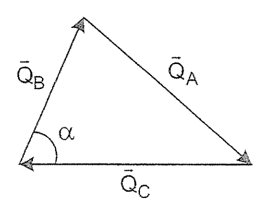


Figura 1

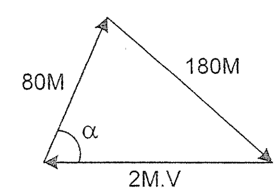


Figura 2

Para o nosso problema em questão, o maior valor para a velocidade V do terceiro fragmento ocorrerá para $\alpha = 0^\circ$ na Figura 2, o que nos permite escrever:

$$180M + 80M = 2M.V_{max} \Rightarrow V_{max} = 130 \text{ m/s}$$

Já o menor valor para a velocidade V do terceiro fragmento ocorrerá para $\alpha = 180^\circ$ na Figura 2, o que nos permite escrever:

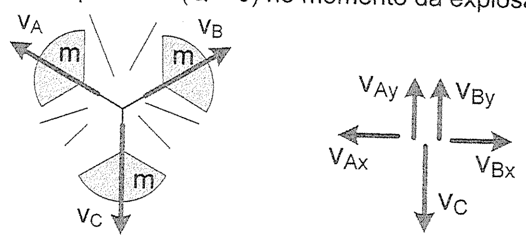
$$80M + 2M.V_{min} = 180M \Rightarrow V_{min} = 50 \text{ m/s}$$

Assim, para α variando arbitrariamente no intervalo $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$, a velocidade V do terceiro fragmento assumirá valores necessariamente no intervalo:

$$50 \text{ m/s} \le V \le 130 \text{ m/s}$$

Questão 147

Solução: A granada lançada verticalmente explodiu ao atingir a altura máxima, isto é, explodiu no instante em que sua velocidade era nula (V = 0). Isto indica que a granada possuía qdm nula (Q = 0) no momento da explosão.



Como os fragmentos A e B chegam ao solo juntos, concluímos que as componentes verticais das suas velocidades, logo após a explosão, são iguais ($V_{Ay} = V_{By}$).

A conservação da qdm do sistema granada, na vertical, nos permite escrever:

$$\Sigma Qy_{\text{antes}} = \Sigma Qy_{\text{depois}}$$

$$0 = m.(-V_{Ay}) + m.(-V_{By}) + m.(+V_C), \quad \text{com } V_{Ay} = V_{By}$$

$$V_C = V_{Ay} + V_{Ay}$$

$$V_{Ay} = V_{By} = V_C / 2 \qquad \textbf{(eq1)}$$

O fragmento C é impulsionado verticalmente para baixo com velocidade inicial $V_C\downarrow$, a partir da altura inicial h, gastando um tempo t_1 para atingir o solo. A cinemática escalar para esse MUV nos permite escrever:

$$h = V_C.t_1 + \frac{g.t_1^2}{2} \qquad \textbf{(eq2)}$$

O fragmento A (ou o B) é impulsionado verticalmente para cima com velocidade inicial $\uparrow V_{Ay} = V_C / 2$, a partir da altura inicial h, gastando um tempo t_2 para atingir o solo. A cinemática escalar para esse MUV nos permite escrever:

$$h = -\frac{V_C}{2}.t_2 + \frac{g.t_2^2}{2} \qquad \textbf{(eq3)}$$

Isolando V_C em eq2 e substituindo em eq3, vem:

$$h = \frac{g.t_1.t_2}{2}.\left(\frac{t_1 + 2.t_2}{2.t_1 + t_2}\right)$$

Questão 148

Solução: Seja **u** a unidade de distância na horizontal e na vertical nesse quadriculado. Como A e B atingem o ponto P simultaneamente, eles percorrem as distâncias $D_A = 2u$ e $D_B = 4u$ num mesmo intervalo de tempo, donde concluímos que suas velocidade se relacionam por $V_B = 2.V_A$. Tomemos $V_A = v$ e $V_B = 2v$.

Assim, as qdms de A e B, antes da colisão, valem:

$$\vec{Q}_A = m_A.\vec{V}_A = (3m).v\rightarrow = 3mv\rightarrow$$

$$\vec{Q}_B = m_B.\vec{V}_B = (2m).(2v\uparrow) = 4mv\uparrow$$

Após colidirem, A e B permanecem colados um no outro. O conjunto formado por A e B será denominado *corpo C*, de massa $m_C = m_A + m_B = 3m + 2m = 5m$.

Pela conservação da qdm do sistema durante a colisão, podemos escrever a seguinte equação vetorial:

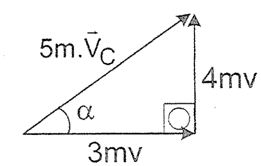
$$\vec{Q}_{\text{sist antes}} = \vec{Q}_{\text{sist depois}}$$

$$\vec{Q}_A + \vec{Q}_B = \vec{Q}_C$$

$$m_A.\vec{V}_A + m_B.\vec{V}_B = m_C.\vec{V}_C$$

$$3mv\rightarrow + 4mv\uparrow = 5m.\vec{V}_C$$

Graficamente, temos:



Pelo Teorema de Pitágoras, vem:

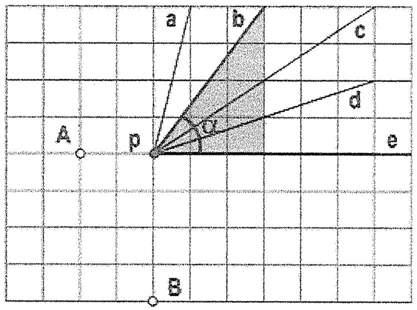
$$(3mv)^2 + (4mv)^2 = (5m.V_C)^2$$

$$9m^2.v^2 + 16m^2.v^2 = 25m^2.V_C^2$$

$$25.m^2.v^2 = 25m^2.V_C^2 \Rightarrow V_C = v$$

Após a colisão, o conjunto AB se move com velocidade $V_C = v$ numa direção que forma um ângulo α com a horizontal tal que:

$$tg\alpha = \frac{4mv}{3mv} = \frac{4}{3}$$



Com base na tangente de α, deduzimos que, após a colisão, o conjunto AB prosseguirá na direção dada pela reta b, como mostra a Figura. A energia mecânica dissipada na colisão é dada por:

$|\Delta Emec| = |\,Emec_F - Emec_i\,|$, com:

$$Emec_i = \frac{m_A.V_A^2}{2} + \frac{m_B.V_B^2}{2} = \frac{3m.v^2}{2} + \frac{2m.(2v)^2}{2} = \frac{11.m.v^2}{2}$$

$$Emec_F = \frac{m_C.V_C^2}{2} = \frac{5m.v^2}{2}$$

Assim, e energia mecânica dissipada na colisão vale:

$$|\Delta Emec| = \frac{11.m.v^2}{2} - \frac{5m.v^2}{2} = 3.m.v^2$$

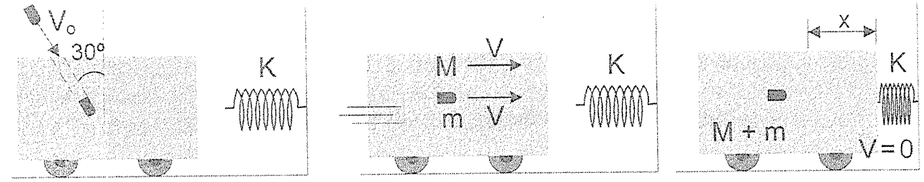
Questão 149 – Resposta – Alternativa a – **Dica:** Veja a questão 146 página 282.

Questão 150 – Resposta – Alternativa e – **Dica:** Veja a questão 11 página 161.

Questão 151 – Resposta – Alternativa d – **Dica:** Veja Exemplo Resolvido 14 página 185.

Questão 152

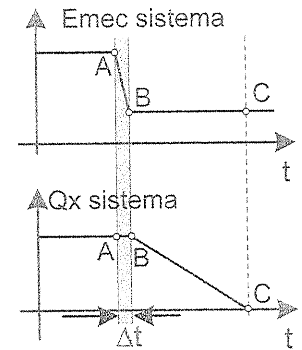
Solução: Do estágio A para B, ocorre a penetração do projétil. Fisicamente, trata-se de uma mera transferência interna de qdm na horizontal entre o projétil entre o bloco, e transferências internas na horizontal não alteram a soma das qdm's do sistema na horizontal. O sistema está livre de forças externas na horizontal.



Estágio A Estágio B Estágio C

Assim, de A para B, podemos escrever:

$$\Sigma Qx_{\text{ estágio A}} = \Sigma Qx_{\text{ estágio B}}$$
$$0 + m.Vx = m.V + M.V$$
$$0 + m.V_o.sen\alpha = (m + M).V$$
$$5.(200g).(0,5) = (500g).V$$
$$V = 1 \text{ m/s}$$



De B para C, ocorre a fase de compressão da mola. O trabalho realizado pela força elástica (conservativa) converte toda a Ecin do sistema em potencial elástica, de forma que a Emec dos sistema se conserva de B para C.

$$(Epot + Ecin)_{\text{ estágio B}} = (Epot + Ecin)_{\text{ estágio C}}$$

$$0 + \frac{(M+m).V^2}{2} = \frac{K.x^2}{2} + 0$$

$$\frac{(0,5\text{ kg}).1^2}{2} = \frac{5000.x^2}{2} \Rightarrow x = 1.10^{-2}\text{ m} \Rightarrow x = 1\text{ cm}$$

Em geral, em todas as questões em que ocorrem impactos verticais entre corpos, estando pelo menos um deles apoiado sobre o solo, a qdm no sistema não se conserva na direção vertical. O chão (a Terra) amortece e absorve a qdm vertical do sistema na vertical, portanto, não devemos nos preocupar com a qdm vertical dos sistemas nesse tipo de problema.

Adicionalmente, parte da Emec do sistema é convertida em calor durante a evolução do sistema de A para B, quando o projétil sofre ação da força de resistência à sua penetração ao bloco de madeira. Por esse motivo, o sistema tem um decréscimo de Emec durante essa fase, que pode ser interpretada como uma colisão inelástica.

Questão 153

Solução: Durante o impacto do projétil com o bloco (estágio AB), ocorre uma mera transferência interna de parte da qdm do projétil para o bloco, sem alterar a qdm do sistema projétil + bloco. Assim, da conservação da qdm durante essa colisão, podemos escrever:

$$\Sigma Q_{\text{estágio A}} = \Sigma Q_{\text{estágio B}}$$

$$m.v_o = (M+m).v$$

$$(0{,}02\ \text{kg}).(750\ \text{m/s}) = (10{,}002\ \text{kg}).v$$

$$(0{,}02\ \text{kg}).(750\ \text{m/s}) \cong (10\ \text{kg}).v \quad \Rightarrow \quad v \cong 1{,}5\ \text{m/s}$$

No estágio BC, o bloco (com o projétil alojado nele) comprime a mola até atingir o repouso momentâneo. Durante esse estágio, o trabalho realizado pela força elástica converte parte da Ecin do sistema em energia potencial elástica, enquanto o trabalho realizado pela força de atrito converte parte da Ecin do sistema em calor.

Aplicando o Princípio do Trabalho realizado pelas forças não-conservativas no estágio BC, vem:

$$\Sigma T_{FNC} = \text{Emec}_{\text{estágio C}} - \text{Emec}_{\text{estágio B}}$$

$$T_N + T_{Fat} = (\text{Epot} + \text{Ecin})_{\text{estágio C}} - (\text{Epot} + \text{Ecin})_{\text{estágio B}}$$

$$0 + (-\text{Fat}.d) = \left(\frac{k.x^2}{2} + 0\right) - \left(0 + \frac{M.V^2}{2}\right).$$

Sendo $\text{Fat} = \mu.N = \mu.M.g$ e $d = x$, vem:

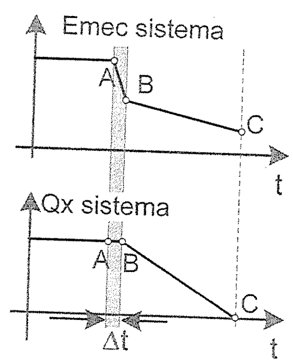
$$0 + (-\mu.M.g.\,x) = \left(\frac{k.x^2}{2} + 0\right) - \left(0 + \frac{M.V^2}{2}\right).$$

$$-\mu.M.g.x = \frac{k.x^2}{2} - \frac{M.V^2}{2}$$

$$-(0{,}2).(10).(10).x = \frac{10.x^2}{2} - \frac{10.(1{,}5)^2}{2}$$

$$5x^2 + 20x - 11{,}25 = 0$$

$$x = \frac{-20 + \sqrt{400 + 225}}{10} \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}5\ \text{m}$$



Assim, quando o bloco atinge o repouso momentâneo no estágio C, a mola apresenta uma deformação x = 0,5 m. Nos cálculos acima, a massa do bloco, juntamente com o projétil, foi aproximado de 10,02 kg para 10 kg, dentro do bom senso esperado para um futuro engenheiro do IME.

Questão 154

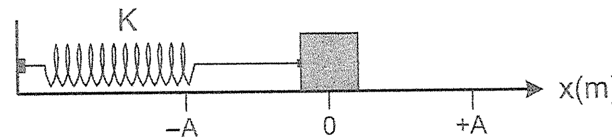
Solução:

a) Durante as oscilações de um sistema massa-mola horizontal, a deformação x da mola coincide com a abscissa x do bloco em cada instante. Com isso, a Epot elástica armazenada na mola vale zero na abscissa central x = 0 e atinge seu valor máximo $\text{Epot}_{max} = KA^2/2$ nos extremos da oscilação $x = \pm A$, quando a energia cinética do bloco é nula (v = 0).

Como esse sistema é conservativo, sua Emec permanece constante. Seu valor pode ser facilmente calculado na abscissa x = +A em que a velocidade da caixa é nula v = 0, sendo dada por:

$$\text{Emec} = \text{Epot} + \text{Ecin} = \frac{K.x^2}{2} + \frac{M.v^2}{2} = \frac{K.(A)^2}{2} + \frac{M.(0)^2}{2}$$

$$\text{Emec} = \frac{K.A^2}{2} \qquad \textbf{(eq1)}$$



Segundo o enunciado, quando o bloco atinge a extremidade x = –A, sofre o impacto da bala. Seja **v** = 0 a velocidade do bloco de massa M no momento em que a bala penetra nele. Após essa colisão inelástica, a energia mecânica do sistema passa a valer:

$$\text{Emec} = \text{Epot} + \text{Ecin} = \frac{K.A^2}{2} + \frac{(M+m).u^2}{2} \qquad \textbf{(eq2)}$$

onde **u** é a velocidade do bloco logo após o impacto da bala (de massa m) com ele. Entretanto, segundo o enunciado, após esse choque a amplitude do sistema passa a valer 2A, o que indica que, desse ponto em diante,é nas abscissas x = +2A e x = –2A que o bloco pára (v = 0) a fim de inverter o sentido do seu movimento. Após esse impacto, portanto, a energia mecânica do sistema também é dada por:

$$\text{Emec} = \text{Epot} + \text{Ecin} = \frac{K.(2A)^2}{2} + \frac{(M+m).(0)^2}{2}$$

$$\text{Emec} = \frac{K.(2A)^2}{2} \qquad \textbf{(eq3)}$$

Igualando eq2 e eq3, vem: $\dfrac{K.A^2}{2} + \dfrac{(M+m).u^2}{2} = \dfrac{K.(2A)^2}{2}$

Donde concluímos que: $u = \sqrt{\dfrac{3K}{M+m}}.A$ **(eq4)**

Da conservação da qdm do sistema bloco+bala durante o impacto, podemos escrever:

$$m.v = (M+m).u,$$

Usando eq4, vem:

$$m.v = (M+m).\sqrt{\frac{3K}{M+m}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{A}{m}\sqrt{3K.(M+m)}} \quad \textbf{(eq5)}$$

b) Após o impacto com a bala, a velocidade do bloco será máxima quando toda a energia mecânica do sistema (dada por eq3) estiver na forma de energia cinética, ou seja:

$$Emec = \frac{K.x^2}{2} + \frac{(M+m).v^2}{2} = \frac{K.(2A)^2}{2}$$

Para $x = 0$, teremos $v = v_{max}$:

$$\frac{K.(0)^2}{2} + \frac{(M+m).v_{max}^2}{2} = \frac{K.(2A)^2}{2}$$

$$(M+m).(v_{max})^2 = 4.K.A^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{max} = 2A\sqrt{\frac{K}{M+m}}}$$

c) Antes do impacto, a energia mecânica do sistema bala+bloco+mola é dada pela energia cinética da bala mais a energia mecânica do sistema massa-mola (dado por eq1):

$$Emec_{antes} = \frac{m.v^2}{2} + \frac{K.A^2}{2}, \text{ com } v \text{ dado por eq5}$$

$$Emec_{antes} = \frac{m}{2}.\frac{A^2}{m^2}.3K.(M+m) + \frac{K.A^2}{2} = \boxed{\frac{3K.(M+m)}{m}\frac{A^2}{2} + \frac{K.A^2}{2}} \quad \textbf{(eq6)}$$

A energia mecânica do sistema bala+bloco+mola, após o impacto, é dada por:

$$Emec_{depois} = \boxed{\frac{K.(2A)^2}{2}} \quad \textbf{(eq7)}$$

Assim, a partir de eq6 e eq7, a energia mecânica dissipada em calor, durante a colisão inelástica, vale:

$$|\Delta Emec| = |\, Emec_{depois} - Emec_{antes}\,|$$

$$|\Delta Emec| = \frac{3K.(M+m)}{m}\frac{A^2}{2} + \frac{K.A^2}{2} - 4\frac{K.A^2}{2}$$

$$|\Delta Emec| = \frac{K.A^2}{2}.\left(\frac{3M}{m} + 3 + 1 - 4\right) = \boxed{\frac{3K.A^2}{2}.\frac{M}{m}}$$

Questão 155 – Resposta: – Alternativa c

Questão 156 – Resposta: – Alternativa a

Solução: Conforme aprendido na resolução da questão 154, a energia mecânica de um sistema massa-mola que oscila com amplitude A, isto é, que oscila simetricamente entre as abscissas $x = -A$ e $x = +A$, vale:

$$\boxed{Emec = \frac{K.A^2}{2}} \quad \textbf{(eq1)}$$

Ao atingir uma das extremidades da oscilação ($V = 0$, $x = -A$), a caixa recebe um impulso I e sua velocidade passa a valer **U** dada por:

$$M.U = M.V + I, \quad \text{com } V = 0$$

$$M.U = M.(0) + I \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{I}{M}} \quad \textbf{(eq2)}$$

Logo após o impulso, a Emec do sistema passa a valer:

$$Emec' = Epot + Ecin = \frac{M.U^2}{2} + \frac{K.x^2}{2}, \quad \text{com U dado por eq2 e } x = A.$$

$$\boxed{Emec' = \frac{M}{2}\left(\frac{I}{M}\right)^2 + \frac{K.A^2}{2}} \quad \textbf{(eq3)}$$

Entretanto, essa nova energia mecânica Emec' está associada à nova amplitude A' de oscilação do sistema segundo a expressão:

$$\boxed{Emec' = \frac{K.(A')^2}{2}} \quad \textbf{(eq4)}$$

De eq3 e eq4, vem:

$$\frac{K.(A')^2}{2} = \frac{M}{2}\left(\frac{I}{M}\right)^2 + \frac{K.A^2}{2}$$

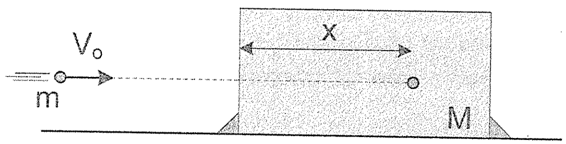
$$\frac{K.(A')^2}{2} = \frac{I^2}{2M} + \frac{K.A^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A' = \sqrt{\frac{I^2}{KM} + A^2}}$$

Questão 157 – Resposta: – Alternativa d

Solução: Seja F o módulo da força de resistência à penetração da bala no bloco. Durante o 1º episódio, o bloco encontra-se travado e o trabalho realizado pela força F que age na bala, se opondo ao seu movimento, é o responsável pela variação da Ecin da bala no interior do bloco:

$$\tau_F = Ecin_F - Ecin_i$$

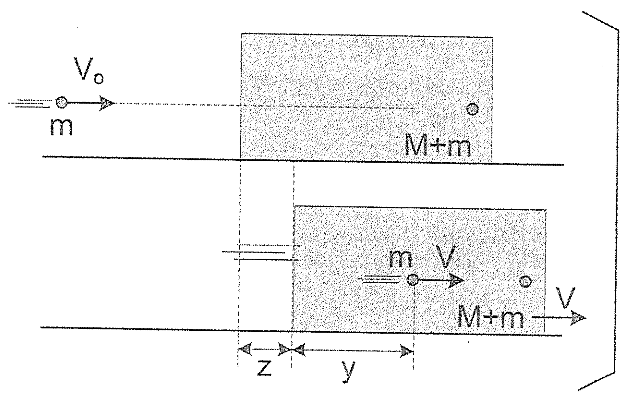
$$-F.x = 0 - \frac{m.V_o^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{m.V_o^2}{2.x}} \quad \textbf{(eq1)}$$



1º episódio

Figura 1 – primeiro episódio

Durante o 2º episódio, a caixa agora se encontra livre para se mover. Durante a penetração da bala através do bloco, enquanto a força F← age na bala, a reação dela F→ age no bloco, empurrando o mesmo.



2º episódio

Figura 2 – segundo episódio

A bala percorre uma distância (z + y) em relação à Terra (Figura 2) sob ação da força de resistência F← que o bloco exerce sobre ela, reduzindo sua velocidade de V_o para a velocidade final V no 2º episódio. Pelo Teorema da Ecin aplicado à bala, vem:

$$\tau_F = Ecin_F - Ecin_i$$

$$-F.(y+z) = \frac{m.V}{2} - \frac{m.V_o^2}{2}$$

$$\boxed{F.(y+z) = \frac{m.V_o^2}{2} - \frac{m.V}{2}} \quad \textbf{(eq2)}$$

Ainda nesse 2º episódio, enquanto a bala penetra o bloco, este sofre um deslocamento **z** em relação à Terra (veja a Figura 2), sob ação da reação F→, que faz a velocidade do bloco variar de zero ao valor final V nesse 2º episódio. Note que, nesse 2º episódio, o bloco contém uma bala alojada em seu interior, por isso, sua massa agora vale M+m. Pelo Teorema da Ecin aplicado ao bloco, vem:

$$\tau_F = Ecin_F - Ecin_i$$

$$F.z = \frac{(M+m).V^2}{2} - 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F.z = \frac{(M+m).V^2}{2}} \quad \textbf{(eq3)}$$

Adicionalmente, a conservação da qdm durante esse 2º episódio permite escrever:

$$\Sigma Q_{\text{antes}} = \Sigma Q_{\text{depois}}$$

$$m.V_o + 0 = (M+2m).V$$

$$\boxed{m.V_o = (M+2m).V} \quad \textbf{(eq4)}$$

Substituindo eq3 em eq2, vem:

$$F.y + F.z = \frac{m.V_o^2}{2} - \frac{m.V}{2}$$

$$F.y + \frac{(M+m).V^2}{2} = \frac{m.V_o^2}{2} - \frac{m.V}{2}$$

$$F.y = \frac{m.V_o^2}{2} - \frac{m.V}{2} - \frac{(M+m).V^2}{2} \quad \textbf{(eq5)}$$

Isolando V em eq4, F em eq1 e substituindo em eq5, vem:

$$F.y = \frac{m.V_o^2}{2} - \frac{m.V}{2} - \frac{(M+m).V^2}{2} \quad \textbf{(eq5)}$$

$$\frac{m.V_o^2}{2.x}.y = \frac{m.V_o^2}{2} - \frac{(M+2m)}{2}.\frac{m^2.V_o^2}{(M+2m)^2}$$

$$\frac{y}{x} = 1 - \frac{m}{M+2m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = x.\left(\frac{M+m}{M+2m}\right)}$$

Sendo M = 100g, m = 10g e x = 10 cm, vem: $y = 10.\left(\frac{100+10}{100+20}\right) \cong 9{,}16$ cm

Questão 158 – Resposta: $\mu = 0{,}16$

Questão 159 – Resposta – Alternativa a

Questão 160 – Resposta: – Alternativa a

Solução: A conservação da qdm na colisão nos permite escrever:

$$\Sigma Q_{\text{antes}} = \Sigma Q_{\text{depois}}$$

$$m.V_o + 0 = (M+m).V_x$$

$$m.V_o = (M+m).V_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_x = \frac{m.V_o}{M+m}} \quad \textbf{(eq1)}$$

O alcance horizontal, num lançamento horizontal de projéteis, é dado por:

$$A = V_x.T_{queda} \quad \textbf{(eq2)}$$

onde o tempo de queda T_{queda} é dado por:

$$H = \frac{g.T^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_{queda} = \sqrt{\frac{2H}{g}}} \quad \textbf{(eq3)}$$

Substituindo-se eq3 e eq1 em eq2, e lembrando que o alcance horizontal vale A = D, vem:

$$D = \frac{m.V_o}{M+m}.\sqrt{\frac{2H}{g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_o = \frac{D.(M+m)}{m}\sqrt{\frac{g}{2H}}}$$

Questão 161 – Resposta: – Alternativa a

Solução: A conservação da qdm na colisão nos permite escrever:

$$\Sigma Q_{\text{antes}} = \Sigma Q_{\text{depois}}$$

$$m.V_o = M.V_x + m.U$$

Assim, a velocidade do projétil, após atravessar a caixa, vale:

$$\boxed{U = V_o - \frac{M}{m}.V_x} \quad \textbf{(eq1)}$$

O alcance horizontal, num lançamento horizontal de projéteis, é dado por:

$$A = V_x.T_{queda} \quad \textbf{(eq2)}$$

onde o tempo de queda T_{queda} é dado por:

$$h = \frac{g.T^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_{queda} = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad \textbf{(eq3)}$$

Lembrando que, nesse problema, o alcance horizontal vale A = d, substituindo eq3 em eq2, vem:

$$d = V_x.\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_x = d.\sqrt{\frac{g}{2h}}} \quad \textbf{(eq4)}$$

Substituindo eq4 em eq1, vem:

$$U = V_o - \frac{M}{m}.V_x = V_o - \frac{M}{m}.d.\sqrt{\frac{g}{2h}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = V_o - \sqrt{\frac{M^2d^2g}{2m^2h}}}$$

Questão 162 – Resposta – Alternativa a – **Dica:** veja as questões 160 e 161.

Questão 163 – Resposta: 250 m/s – **Dica:** veja a questão 167.

Questão 164 – Resposta – Alternativa e – **Dica:** veja a questão 165.

Questão 165 – Resposta: $\beta = 60^\circ$

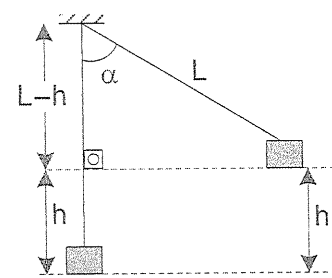
Solução: A conservação da qdm na direção horizontal na colisão nos permite escrever:

$$\Sigma Qx_{\text{antes}} = \Sigma Qx_{\text{depois}}$$

$$m.V.\cos\alpha = (M+m).U$$

$$10.(400).\frac{\sqrt{3}}{2} = 1500.U \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{4\sqrt{3}}{3}\,\text{m/s}}$$

Logo após a colisão, o pêndulo adquire a velocidade U→ determinada acima e executa o movimento pendular até atingir a altura máxima h, a ser determinada pela conservação de energia mecânica :



$$\frac{(M+m).U^2}{2} = (M+m).g.h$$

$$h = \frac{U^2}{2g} = \frac{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2.(10)} = \frac{4}{15}\,\text{m} = 0{,}266\text{ m} = 26{,}6\text{ cm}$$

$$\cos\alpha = \frac{L-h}{L} = \frac{55-26{,}6}{55} \cong 0{,}51 \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 60^\circ$$

Questão 166

Solução:

a) Para α muito pequeno, o deslocamento **d** do bloco, após o impacto, pode ser aproximado por:

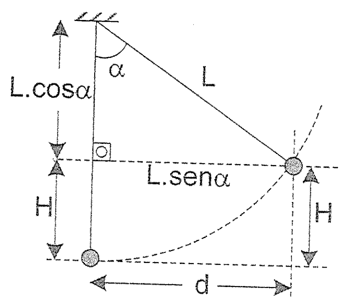
$$d \cong L.\text{sen}\alpha \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\alpha \cong \frac{d}{L}$$

Da trigonometria: $\cos\alpha = (1-\text{sen}^2\alpha)^{1/2} = \left(1-\frac{d^2}{L^2}\right)^{1/2}$ **(eq1)**

Usando a aproximação do binômio de Newton: $(1-x)^n \cong 1-n.x.$

Tomando $n = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{d^2}{L^2} <<< 1$ na aproximação do binômio, vem:

$$\left(1-\frac{d^2}{L^2}\right)^{1/2} \cong 1 - \frac{1}{2}\frac{d^2}{L^2} \quad \textbf{(eq2)}$$



De eq1 e eq2, vem: $\cos\alpha \cong 1 - \frac{1}{2}\frac{d^2}{L^2}$ **(eq3)**

Da geometria, temos: $H = L.(1-\cos\alpha)$ **(eq4)**

Substituindo eq3 em eq4, vem: $\boxed{H \cong \frac{d^2}{2L}}$ **(eq5)**

b) A conservação da qdm do sistema bala + bloco, durante a colisão, nos permite escrever:

$$\Sigma Q_{\text{antes}} = \Sigma Q_{\text{depois}}$$

$$m.V_o = (M+m).U \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{m.V_o}{M+m}} \quad \textbf{(eq6)}$$

Logo após a colisão, o pêndulo adquire a velocidade $\vec{U}$ determinada em eq6 e executa o movimento pendular até atingir a altura máxima H, a ser determinada pela conservação de energia mecânica :

$$\frac{(M+m).U^2}{2} = (M+m).g.H \quad \Rightarrow \quad U = \sqrt{2gH} \quad \Rightarrow \quad \frac{m.V_o}{M+m} = \sqrt{2gH}$$

$$V_o = \frac{(M+m)}{m}.\sqrt{2gH} \overset{eq5}{\cong} \frac{(M+m)}{m}.\sqrt{2g\frac{d^2}{2L}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_o \cong \frac{(M+m).d}{m}\sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Fazendo a aplicação numérica com os valores fornecidos no enunciado, vem:

$$V_o \cong \frac{(M+m).d}{m}\sqrt{\frac{g}{L}} \cong \frac{(30).(0,24)}{0,04}.\sqrt{\frac{10}{3,6}} \cong 300 \text{ m/s}$$

Questão 167

Solução:

a) A conservação da qdm do sistema bala + bloco, durante a colisão, nos permite escrever:

$$\Sigma Q_{\text{antes}} = \Sigma Q_{\text{depois}}$$

$$m.V = \frac{m.V}{2} + M.U \quad \Rightarrow \quad \frac{m.V}{2} = M.U \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{2M}{m}.U} \quad \textbf{(eq1)}$$

onde U é a velocidade do bloco no ponto mais baixo da trajetória circular, logo após ser atravessado pela bala.

Para que o pêndulo (constituído por uma haste rígida presa ao bloco) consiga dar um looping completo, a velocidade U do bloco no ponto mais baixo da trajetória circular deve ser suficiente para que o pêndulo ao menos atinja o ponto mais alto do trecho circular com velocidade nula.

Assim, pela conservação da Emec no movimento do pêndulo, desde o ponto mais baixo da trajetória circular até o ponto mais alto, vem:

$$(\text{Epot} + \text{Ecin})_{\text{lá embaixo}} = (\text{Epot} + \text{Ecin})_{\text{lá em cima}}$$

$$0 + \frac{M.U^2}{2} = M.g.(2L) + 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = 2\sqrt{gL}} \quad \textbf{(eq2)}$$

Substituindo eq2 em eq1, em: $V = \frac{2M}{m}.2\sqrt{gL} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{4M}{m}.\sqrt{gL}}$

b) De acordo com a resolução da questão 58, página 354, se o pêndulo for constituído um fio flexível em vez de um haste rígida, a velocidade mínima U que ele deve ter no ponto mais baixo da trajetória para que ele consiga dar o looping completo, mantendo o fio tracionado, é dada por:

$$\boxed{U = \sqrt{5gL}} \quad \textbf{(eq3)}$$

Substituindo eq3 em eq1, em: $\boxed{V = \frac{2M}{m}.\sqrt{5gL}}$

Questão 168 – Resposta – Alternativa b

Questão 169 – Resposta: $\frac{V.(1+e)}{3}\sqrt{\frac{2m}{K}}$

Questão 170

Solução:

Inicialmente, a caixa A se move com velocidade V em movimento uniforme se aproximando da caixa B inicialmente em repouso.

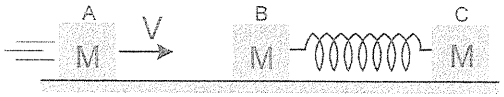


Figura 1

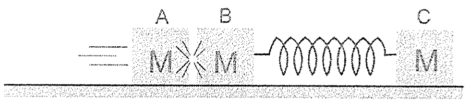


Figura 2

Como as caixas A e B têm massas iguais e colidem entre si elasticamente, elas meramente trocam de velocidades durante a colisão, ou seja, logo após a colisão, a caixa A estará em repouso enquanto B terá velocidade V (Figura 3).

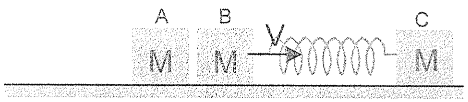


Figura 3

Assim, logo após a colisão, o sistema BC formado pelas caixas B e C possui quantidade de movimento dada por:

$$Q_{sist} = Q_B + Q_C = M.V + 0 = M.V \qquad \textbf{(eq1)}$$

Como, após a colisão, o sistema BC permanece isolado de forças externas, sua qdm, assim como a velocidade do seu centro de massa, permanece constante desse ponto em diante.

O centro de massa do sistema BC, após a colisão, se moverá em movimento uniforme com velocidade V_{cm} constante dada pela relação eq25, página 173:

$$Qsist = M_{total}.V_{cm}$$

$$M.V = (M + M).V_{cm} \quad \Rightarrow \quad V_{cm} = V/2$$

Após a colisão, as caixas B e C oscilarão em MHS em torno do centro de massa do sistema BC, enquanto este centro de massa se deslocará em MRU em relação à Terra com velocidade $V_{cm} = V/2$. Tanto a energia mecânica do sistema BC quanto a sua qdm permanecerão constantes após a colisão.

A máxima deformação da mola ($x = \pm A$) durante o movimento de oscilação das caixas B e C em torno do centro de massa, acontece quando elas momentaneamente param de se mover em relação ao centro de massa, o que ocorre nos extremos da oscilação. Nessa ocasião, as caixas encontram-se momentaneamente em repouso em relação ao centro de massa do sistema BC e todo o conjunto compartilhará de uma mesma velocidade $U = V_{cm} = V/2$ em relação à Terra.

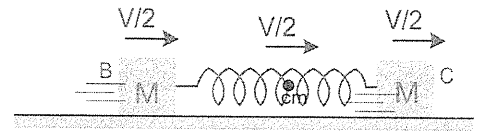


Figura 4 – máxima elongação da mola (x = +A)

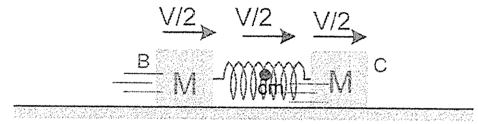


Figura 5 – mínima elongação da mola (x = –A)

Note que a qdm de movimento do sistema BC possui o mesmo valor nas Figuras 3, 4 e 5, conforme esperado:

$$M.V + 0 = M(V/2) + M.(V/2)$$

A conservação da energia mecânica do sistema formado pelas caixas B e C e pela mola, da Figura 3 (logo após a colisão) para as Figuras 4 ou 5 (máxima deformação da mola), em relação à Terra, permite escrever:

$$(Epot + Ecin_B + Ecin_C)_{\text{Figura 3}} = (Epot + Ecin_B + Ecin_C)_{\text{Figura 4}}$$

$$\left(\frac{K.x^2}{2} + \frac{M.V_B^2}{2} + \frac{M.V_C^2}{2}\right)_{\text{Figura 3}} = \left(\frac{K.x^2}{2} + \frac{M.V_B^2}{2} + \frac{M.V_C^2}{2}\right)_{\text{Figura 4}}$$

$$\left(0 + \frac{M.V^2}{2} + 0\right) = \left(\frac{K.A^2}{2} + \frac{M.(V/2)^2}{2} + \frac{M.(V/2)^2}{2}\right)$$

Resolvendo para a amplitude A, encontramos: $\boxed{A = V\sqrt{\frac{M}{2K}}}$

Assim, se o comprimento não-deformado da mola vale $L = L_o$ (na Figura 3), os comprimentos máximo e mínimo atingidos pela mola, durante as oscilações desse sistema, valem:

$$L_{min} = L_o - A = L_o - V\sqrt{\frac{M}{2K}}$$

$$L_{máx} = L_o + A = L_o + V\sqrt{\frac{M}{2K}}$$

Questão 171 – Resposta – Alternativa a

Dica: veja a resolução da questão anterior.

Questão 172 – Resposta: x = 10 cm – **Dica:** Veja a resolução da questão 170.

Questão 173 – Resposta: 60 cm – **Dica:** Veja a resolução da questão 170.

Questão 174 – Resposta: 80% – **Dica:** Veja a resolução da questão 170.

Questão 175

Solução: O foguete parte do repouso (em relação à estação) com aceleração escalar constante **a** e percorre uma distância $\Delta s = d - L$ até tocar a mola, quando tem início a fase de acoplamento. A velocidade V do foguete, ao tocar a mola, vale

$$V^2 = V_o^2 + 2.a.\Delta s$$
$$V^2 = 0^2 + 2.a.(d-L)$$
$$\boxed{V = \sqrt{2.a.(d-L)}} \quad \textbf{(eq1)}$$

Após o foguete tocar a mola, admitiremos que cesse a força propulsora responsável pela aceleração **a** que o foguete possuía durante a fase de aproximação.

Após o foguete tocar a mola, tem início a fase de acoplamento durante a qual, toda a energia cinética do foguete (no referencial inercial da estação espacial) será convertida em energia potencial elástica pois, ao final do acoplamento, o foguete estará em repouso no referencial inercial da estação. A deformação x final da mola é dada pela conservação da Emec no referencial da estação:

$$\frac{m.V^2}{2} = \frac{k.x^2}{2} \quad \textbf{(eq2)}$$

Substituindo eq1 em eq2, vem:

$$\frac{m.V^2}{2} = \frac{k.x^2}{2} \Rightarrow m.2.a.(d-L) = k.x^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{2m.a.(d-L)}{k}}}$$

Como o ITA não forneceu a massa da estação espacial no enunciado, ela foi admitida muito maior do que a massa m do foguete. Assim, a velocidade U da estação espacial em relação às estrelas distantes permaneceu inalterada durante esse acoplamento.

Questão 176 – Resposta: 5 cm

Questão 177

Solução: Durante a deformação da mola, a força elástica Fel = k.x deve crescer até atingir o valor da força de atrito de destaque Fat = μ.N. Assim, a deformação final da mola valerá:

$$Fel_{max} = Fat_{max} \Rightarrow k.x = \mu.N = \mu.M.g \Rightarrow \boxed{x = \frac{\mu M.g}{k}} \quad \textbf{(eq1)}$$

A caixa B vai partir do repouso de uma altura h e toda a sua Epot gravitacional inicial será convertida em Epot elástica, quando a mola atingir sua deformação máxima x dada por eq1. Assim, pela conservação da Emec, vem:

$$M.g.h = \frac{k.x^2}{2} \Rightarrow M.g.h = \frac{K}{2}.\left(\frac{\mu M.g}{k}\right)^2 = \frac{k}{2}.\frac{\mu^2.M^2.g^2}{k^2}$$

$$\boxed{h = \frac{\mu^2.M.g}{2.k}}$$

Abandonando a caixa B de uma altura dada pela expressão acima, a caixa A ficará na iminência de escorregar quando a mola atingir a máxima compressão. Se a caixa B for abandonada de qualquer altura superior a esta, a caixa A será retirada do repouso quando a mola for comprimida.

Questão 178

Solução: Após cair a altura h, a partir do repouso, a bolinha de massa m_3 atinge uma velocidade $V_o = \sqrt{2gh}$ e colide com o bloco de m_2. Durante essa colisão, parte da qdm de movimento da bolinha é transferida para os blocos de massa m_1 e m_2.

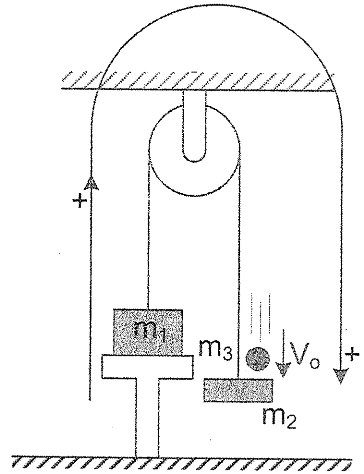


Figura 1 – logo antes da colisão

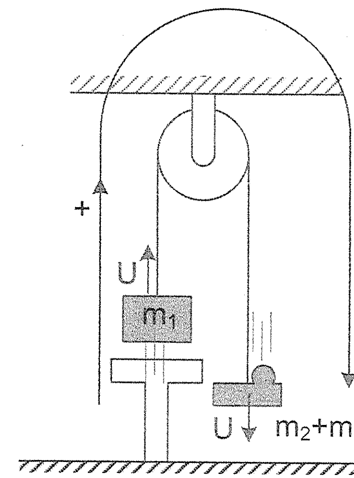


Figura 2 – logo após a colisão

A transferência de qdm entre os corpos 2 e 3 ocorre diretamente, ao passo que a transferência interna de qdm entre 2 e 1 se dá através de uma entidade abstrata chamada *fio ideal* que sofre um impulso T.Δt em uma extremidade e a transmite integralmente para sua outra extremidade ☺.

Durante essa colisão, a qdm da bolinha 3 sofre um decréscimo de valor, ao passo que as qdm´s dos corpos 1 e 2 sofrem um acréscimo. Parte da qdm da bolinha 3 é transferida para as bolinhas 1 e 2, de forma que a qdm escalar do *sistema formado pelas bolinhas 1, 2 e 3 permanece constante.*

Seguindo a abstração do fio ideal, orientaremos o sentido positivo da trajetória conforme mostrado nas Figuras 1 e 2. Dessa forma, serão arbitradas como positivas as qdms que estiverem a favor do movimento do fio ideal envolvendo a polia, e negativas as qdm´s que estiverem contra o movimento do fio ideal.

Seja U a velocidade escalar de todos os corpos logo após a colisão (veja Figura 2). A conservação da qdm durante a colisão, da Figura 1 para a Figura 2, nos permite escrever:

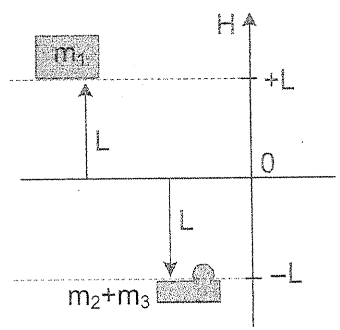
$$\Sigma Q_{\text{antes}} = \Sigma Q_{\text{depois}}$$

$$m_3.V_o = (m_1 + m_2).U + (m_3).U$$

$$m_3.\sqrt{2gh} = (m_1 + m_2 + m_3).U \qquad \textbf{(eq1)}$$

Seja L a distância percorrida por cada corpo do sistema, após a colisão, até atingir o repouso. Adotaremos o nível de referência para energia potencial gravitacional nula (Epot = 0, H = 0) na horizontal onde ocorre a colisão. Com isso, todos os corpos terão Epot gravitacional nula logo após a colisão.

Figura 3



Em seguida, o corpo 1 subirá até atingir uma altura H = +L, enquanto simultaneamente o conjunto dos corpos 2 e 3 descerá até atingir uma altura H = –L como mostra a Figura 3. Ao final, todos os corpos atingirão o repouso momentâneo e, logicamente, terão Ecin nula.

A conservação da Emec do sistema, durante esse movimento retardado, nos permite escrever:

$$\frac{m_1.U^2}{2} + \frac{(m_2+m_3).U^2}{2} + 0 + 0 = m_1.g.(+L) + (m_2+m_3).g.(-L)$$

$$\frac{(m_1+m_2+m_3).U^2}{2} = (m_1-m_2-m_3).g.L$$

$$L = \frac{(m_1+m_2+m_3)}{2.(m_1-m_2-m_3).g}.U^2 \qquad \textbf{(eq2)}$$

Isolando U em eq1 e substituindo em eq2, vem:

$$L = \frac{(m_1+m_2+m_3)}{2.(m_1-m_2-m_3).g}.\frac{m_3^2.(2gh)}{(m_1+m_2+m_3)^2} = \frac{m_3^2.h}{(m_1+m_2+m_3).(m_1-m_2-m_3)}$$

Questão 179 – Resposta – Alternativa c

Dica: veja a resolução da questão 178.

Questão 180

Solução: A mola possui inicialmente uma deformação inicial $x = +x_o$ (elongada) quando os blocos são abandonados do repouso (Ecin = 0). Nessa situação inicial, a energia mecânica do sistema vale:

$$\text{Emec}_{\text{inicial}} = \text{Epot} + \text{Ecin} = \frac{k(+x_o)^2}{2} + 0 + 0$$

Pela conservação da energia mecânica, os blocos atingirão velocidade máxima quando a mola apresentar deformação nula x = 0 (Epot nula), e prosseguirão em movimento retardado até atingirem novamente a posição de repouso, quando a mola apresentar uma deformação $x = -x_o$ (mola comprimida).

$$\text{Emec}_{\text{final}} = \text{Epot} + \text{Ecin} = \frac{k(-x_o)^2}{2} + 0 + 0$$

Assim, de um extremo ao outro da oscilação, a mola sofre uma variação de comprimento $\Delta x = +x_o - (-x_o) = 2.x_o$, que é exatamente a soma das distâncias percorridas por cada bloco:

$$d_1 + d_2 = 2.x_o \qquad \textbf{(eq1)}$$

Entretanto, estando o sistema isolado, os blocos 1 e 2 se movem de um extremo ao outro da oscilação mas o centro de massa do sistema permanece em repouso. Trata-se de um mero *problema de compensação* e, de acordo com a relação eq20, página 170, podemos escrever:

$$m_1.d_1 = m_2.d_2 \qquad \textbf{(eq2)}$$

Resolvendo o sistema das equações eq1 e eq2, encontramos:

$$d_1 = \frac{2.x_o.m_2}{m_1+m_2} \qquad \text{e} \qquad d_2 = \frac{2.x_o.m_1}{m_1+m_2}$$

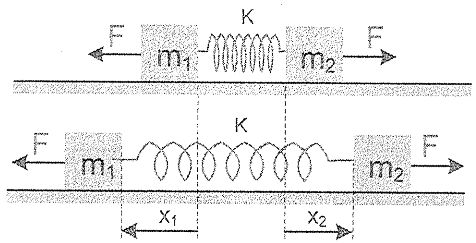
Questão 181 – Respostas: a) $\frac{m_2.v_o}{m_1+m_2}$, b) $v_o\sqrt{\frac{m_1.m_2}{(m_1+m_2).k}}$

Dica: veja a resolução da questão 170.

Questão 182

Solução:

a) Quando o sistema parte inicialmente do repouso (Ecin = 0), a mola encontra-se relaxada. Ao final do processo, quando os blocos voltam novamente a entrar em repouso (Ecin = 0) no extremo da oscilação, a mola apresenta uma deformação total máxima $x_1 + x_2$, onde x_1 e x_2 são as distancias percorridas por cada bloco durante esse episódio.



Aplicando o Princípio do Trabalho das Forças Não-Conservativas, vem:

$$\Sigma T_{FNC} = Emec_{\,Final} - Emec_{\,Inicial}$$

$$T_F + T_F = (Epot + Ecin)_{Final} - (Epot + Ecin)_{inicial}$$

$$F.x_1 + F.x_2 = \left(\frac{k.(x_1+x_2)^2}{2} + 0\right) - 0$$

$$F.(x_1+x_2) = \frac{k.(x_1+x_2)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(x_1+x_2) = \frac{2F}{k}} \qquad \textbf{(eq1)}$$

b) Durante o movimento desse sistema, a resultante das forças externas agindo nele é nula (F − F = 0), de forma que os blocos 1 e 2 sofrem deslocamentos respectivamente x_1 e x_2, mas o centro de massa desse sistema permanece em repouso. Trata-se de um mero *problema de compensação* e, de acordo com a relação eq20, página 170, podemos escrever:

$$m_1.x_1 = m_2.x_2 \qquad \textbf{(eq2)}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações eq1 e eq2, encontramos:

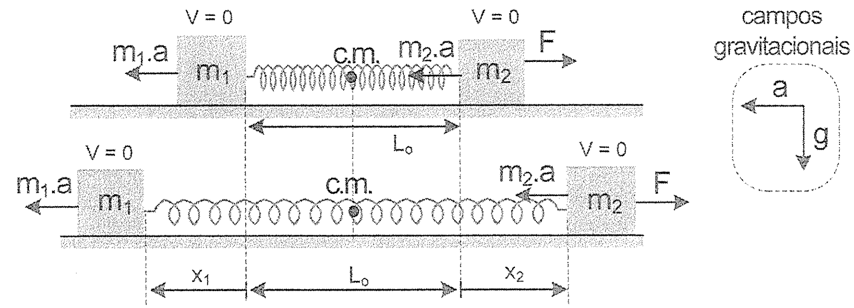
$$x_1 = \frac{2F}{k}\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{2F}{k}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)$$

Questão 183

Solução: Esse problema é mais facilmente solucionável no referencial do centro de massa do sistema. De acordo com a relação eq29, página 176, a aceleração **a** do centro de massa desse sistema é dada por :

$$\mathbf{a} = \frac{F_{R\ externas}}{\text{massa total}} = \frac{F}{m_1+m_2} \qquad \textbf{(eq1)}$$

Assim, conforme aprendemos nos capítulos 4 e 5 do volume 1 dessa obra, ao efetuarmos a mudança do referencial da Terra (inercial) para um referencial não-inercial (acelerado), essa aceleração a→ é sentida, no referencial do centro de massa, como um campo gravitacional extra de valor **a**← que produz forças gravitacionais (fictícias) $F_1 = m_1.a\leftarrow$ e $F_2 = m_2.a\leftarrow$ nas massas m_1 e m_2 do sistema, respectivamente, como mostra a figura a seguir.



No referencial do centro de massa, portanto, os blocos 1 e 2 partem do repouso com a mola relaxada, sob ação das forças externas F, F_1 e F_2 e percorrem distâncias respectivamente iguais a x_1 e x_2, em sentidos opostos, se afastando do centro de massa do sistema, até que a mola atinja uma deformação máxima $x_1 + x_2$ e os blocos entrem novamente o repouso momentâneo naquele referencial.

Logicamente, como estamos no referencial do próprio centro de massa, ele permanece imóvel durante todo esse episódio.

Assim, aplicando o Princípio do Trabalho das Forças Não-Conservativas, vem:

$$\Sigma T_{FNC} = Emec_{\,Final} - Emec_{\,Inicial}$$

$$T_F + T_{F1} + T_{F2} = (Epot + Ecin)_{Final} - (Epot + Ecin)_{inicial}$$

$$+F.x_2 + F_1.x_1 - F_2.x_2 = \frac{k.(x_1+x_2)^2}{2} - 0$$

$$+F.x_2 + m_1.a.x_1 - m_2.a.x_2 = \frac{k.(x_1+x_2)^2}{2}$$

$$+F.x_2 + \frac{m_1.F.x_1}{m_1+m_2} - \frac{m_2.F.x_2}{m_1+m_2} = \frac{k.(x_1+x_2)^2}{2}$$

$$\frac{F.m_1.(x_1+x_2)}{m_1+m_2} = \frac{k.(x_1+x_2)^2}{2}$$

Da equação acima, temos duas opções:

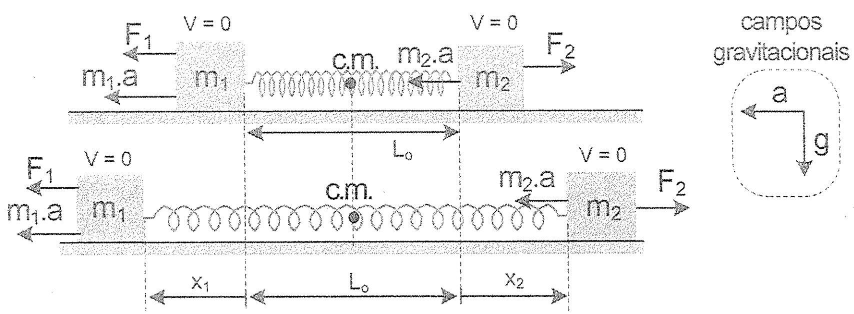
$$x_1 + x_2 = 0 \quad \text{(não convém)} \qquad \text{ou} \qquad x_1 + x_2 = \boxed{\frac{2.F.m_1}{(m_1+m_2).k}} \quad ☺$$

Questão 184

Solução: Esse problema é mais facilmente solucionável no referencial do centro de massa do sistema. De acordo com a relação eq29, página 176, a aceleração **a** do centro de massa desse sistema é dada por :

$$\mathbf{a} = \frac{F_{R\ \text{externas}}}{\text{massa total}} = \frac{F_2 - F_1}{m_1+m_2} \qquad \textbf{(eq1)}$$

Assim, conforme aprendemos nos capítulos 4 e 5 do volume 1 dessa obra, ao efetuarmos a mudança do referencial da Terra (inercial) para o referencial não-inercial (acelerado) do centro de massa, essa aceleração $a\rightarrow$ é sentida, no referencial do centro de massa, como um campo gravitacional extra de valor $\mathbf{a}\leftarrow$ que produz forças gravitacionais (fictícias) $f_1 = m_1.a\leftarrow$ e $f_2 = m_2.a\leftarrow$ nas massas m_1 e m_2 do sistema, respectivamente, como mostra a figura a seguir.



No referencial do centro de massa, portanto, os blocos 1 e 2 partem do repouso com a mola relaxada, sob ação das forças externas F_1, F_2, f_1 e f_2 e percorrem distâncias respectivamente iguais a x_1 e x_2, em sentidos opostos, se afastando do centro de massa do sistema, até que a mola atinja uma deformação máxima $x_1 + x_2$ e os blocos atinjam novamente o repouso momentâneo.

Logicamente, como estamos no referencial do centro de massa, ele próprio permanece imóvel durante todo esse episódio.

Assim, aplicando o Princípio do Trabalho das Forças Não-Conservativas, vem:

$$\Sigma T_{FNC} = \text{Emec}_{\,\text{Final}} - \text{Emec}_{\,\text{Inicial}}$$

$$T_{F1} + T_{f1} + T_{F2} + T_{f2} = (\text{Epot} + \text{Ecin})_{\text{Final}} - (\text{Epot} + \text{Ecin})_{\text{inicial}}$$

$$(F_1 + m_1.a).x_1 + (F_2 - m_2.a).x_2 = \frac{k.(x_1+x_2)^2}{2} - 0$$

$$F_1.x_1 + \frac{m_1.(F_2-F_1).x_1}{m_1+m_2} + F_2.x_2 - \frac{m_2.(F_2-F_1).x_2}{m_1+m_2} = \frac{k.(x_1+x_2)^2}{2}$$

$$\left(\frac{F_1.m_2 + F_2.m_1}{m_1+m_2}\right).(x_1+x_2) = \frac{k.(x_1+x_2)^2}{2}$$

Da equação acima, temos duas opções:

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \text{(não convém)} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{x_1 + x_2 = \frac{2.(F_1.m_2 + F_2.m_1)}{k.(m_1+m_2)}} \quad ☺$$

Questão 185

Solução: Para que a lâmina inferior perca o contato com o solo, ela precisa receber da mola uma força elástica Fel↑ que equilibre o seu próprio peso $P = m.g$. Assim, a mola precisa estar elongada e com deformação x_F tal que:

$$k.x_F = m.g \;\Rightarrow\; 500.x_F = 1.(10) \;\Rightarrow\; x_F = 0{,}02\text{ m} \;\Rightarrow\; x_F = +2\text{ cm}$$

Segundo o enunciado, a lâmina superior foi comprimida para baixo até que a mola apresente uma deformação inicial $x_i = -8$ cm ($x_i < 0$ indica mola comprimida). Abandonando o sistema do repouso dessa posição, a elongação da mola varia de $x_i = -8$ cm (mola comprimida) até $x_F = +2$ cm (mola elongada), fazendo com que a caixa sofra um deslocamento vertical $\Delta x = x_F - x_i = 10$ cm para cima.

Nesse ponto, enquanto a lâmina inferior ainda está em repouso mas perdendo o contato com o solo, a lâmina superior atinge uma velocidade v_F a ser determinada pela conservação da energia mecânica do sistema:

$$\frac{m.v_i^2}{2} + m.g.h_i + \frac{k.x_i^2}{2} = \frac{m.v_F^2}{2} + m.g.h_F + \frac{k.x_F^2}{2}$$

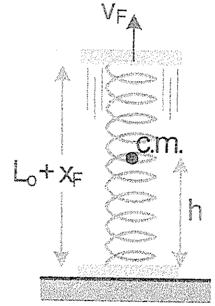
$$\frac{m.(0)^2}{2} + m.g.(0) + \frac{500.(0{,}08)^2}{2} = \frac{1.v_F^2}{2} + (1).10.(0{,}1) + \frac{500.(0{,}02)^2}{2}$$

$$1{,}6 = \frac{1.v_F^2}{2} + 1 + 0{,}1 \qquad \Rightarrow \qquad v_F = 1\text{ m/s}$$

Assim, no instante em que a lâmina inferior está perdendo o contato com o solo, a lâmina superior encontra-se a uma altura $L_o + x_F = 10 + 2 = 12$ cm. Como as lâminas têm a mesma massa, o centro de massa do sistema encontra-se no ponto médio, a uma altura $h = 12/2 = 6$ cm do solo, subindo com velocidade v_{cm}↑ a ser determinada pela relação eq21 página 171:

$$v_{cm} = \frac{m_1.v_1 + m_2.v_2}{m_1+m_2} = \frac{m.(0) + m.v_F}{m+m} = \frac{v_F}{2} = 0{,}5\text{ m/s}$$

Entretanto, nesse ponto, a lâmina inferior perde o contato com o solo e a resultante das forças externas agindo sobre o sistema passa a ser apenas a força gravitacional. Dessa forma, com base na relação eq29 página 176, o centro de massa do sistema, que se encontra a uma altura h = 6 cm e velocidade v_{cm} =0,5 m/s↑, passa a ser retardado pela ação exclusiva da gravidade a_{cm} = g↓, subindo uma altura adicional (além desses 6 cm) dada por:



$$(v_{cmF})^2 = (v_{cmi})^2 + 2.a.\Delta h$$
$$(0)^2 = (0{,}5)^2 + 2.(-10).\Delta h$$
$$\Delta h = 0{,}0125 m = 1{,}25 \text{ cm}$$

Assim, concluímos que o centro de massa do sistema atingirá uma altura máxima em relação ao solo dada por:

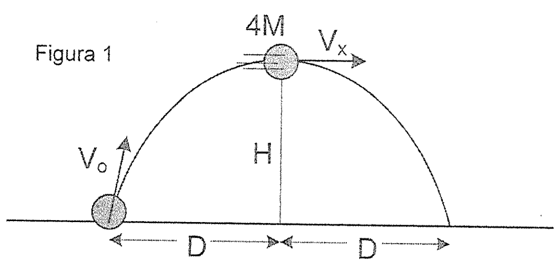
$$h_{max} = h + \Delta h = 6 \text{ cm} + 1{,}25 \text{ cm} = 7{,}25 \text{ cm}$$

Questão 186 – Resposta: alternativa c

Solução: O projétil de massa 4M atinge o ponto de altura máxima com velocidade V_x e, a partir desse ponto, teria um alcance horizontal:

$$A = D = V_x . t_{queda} , \quad \text{com} \quad t_{queda} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

como mostra a Figura 1, caso não explodisse.



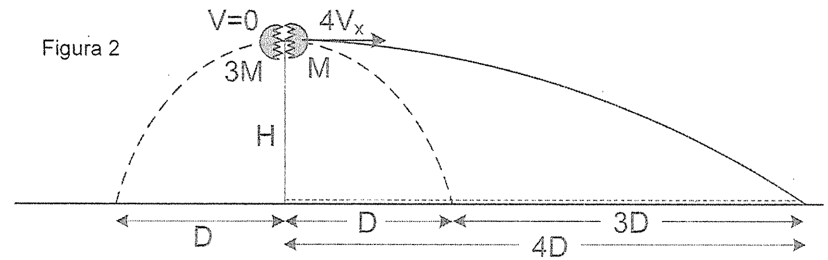
Entretanto, a granada explode em dois fragmentos de massas 3M e M. Logo após a explosão, o fragmento de massa 3M tem velocidade nula (v = 0, conforme o enunciado) e, pela conservação da qdm na explosão, o segundo fragmento tem velocidade U dada por:

$$\Sigma Q_{\text{logo antes}} = \Sigma Q_{\text{logo depois}}$$
$$4M.V_x = 3M.(0) + M.U$$
$$U = 4.V_x$$

Assim, como a velocidade horizontal do segundo fragmento aumenta de V_x para $4.V_x$ e o tempo de queda permanece inalterado, o alcance horizontal atingido por ele

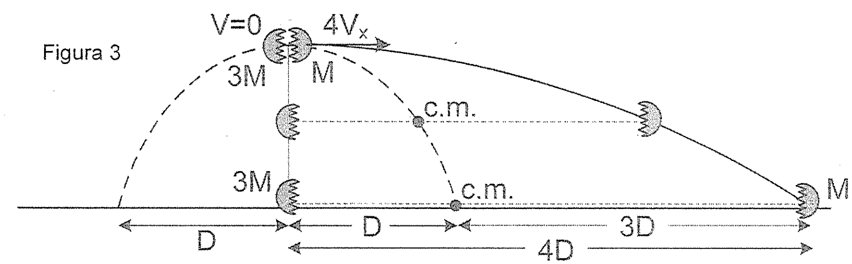
passa de D = $V_x.t_{queda}$ para 4D = $(4V_x).t_{queda}$, isto é, quadriplica, como podemos ver na Figura 2.

Adicionalmente, note que, como os dois fragmentos atingem o solo simultaneamente, o centro de massa c.m. do sistema toca o solo junto com os dois fragmentos. Além disso, durante toda a queda dos fragmentos, o centro de massa prossegue sobre a trajetória parabólica original (Figura 3) até tocar o solo.



O centro de massa do sistema atinge o solo exatamente no ponto onde a granada cairia, caso não tivesse explodido.

Como dizia o meu professor *Elder* M. Hemerly da divisão de Eletrônica do ITA, para o centro de massa, *"....senhores, tudo se passa como se nada se passasse* ☺.....". Em suma, o centro de massa não percebe eventos internos ao sistema tais como explosões ou colisões internas entre duas partículas do sistema.



Caso, por exemplo, um dos fragmentos chegasse ao solo antes do outro, o sistema passaria a receber a ação de outra força externa além do peso (a normal N↑ que o solo exerceria no fragmento que tocou o solo). O centro de massa do sistema deixaria de se mover sob ação exclusiva da gravidade e sairia da trajetória parabólica original, seguindo outra trajetória a partir do instante em que o primeiro fragmento tocasse o solo. É exatamente o que ocorre no problema *seguinte, que caiu no ITA.*

Questão 187 – Resposta: alternativa d

Dica: leia a resolução completa da questão 186 até o final.

Questão 188

Solução:. Qual seria o alcance horizontal atingido pela bola, caso o paredão não existisse ?

$$A = \frac{V_o^2}{g}\text{sen}(2\alpha) = \frac{20^2}{2.(10)}\text{sen}90^o = 40\text{ m}$$

Segundo o enunciado, após a bola sofrer uma colisão elástica com a parede fixa, ela se parte em dois fragmentos que chegam ao solo juntos, o que nos permite concluir que o centro de massa do sistema toca o solo juntamente com os fragmentos.

Conforme aprendemos na página 223 (colisão com espelhamento), a colisão elástica com o anteparo fixo levará ao espelhamento do trecho da trajetória posterior à colisão, como mostra a Figura 1:

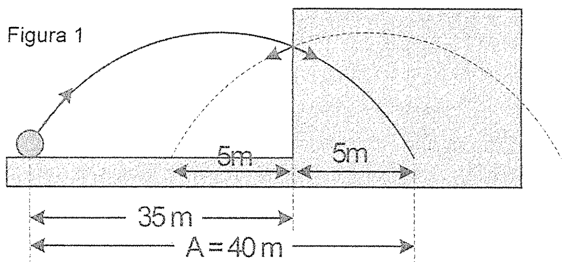


Figura 1

O fato de a bola ter se partido (evento interno ao sistema) é ignorado pelo centro de massa do sistema, que segue exatamente a mesma trajetória que a bola teria seguido, caso não tivesse se partido, até tocar o solo. Assim, o centro de massa dos dois fragmentos atinge o solo num ponto situado a 5m do paredão (Figura 2).

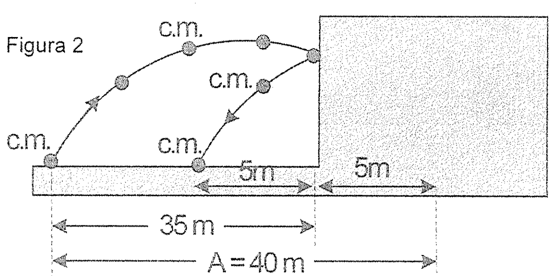


Figura 2

Segundo o enunciado, o fragmento de massa 2 kg atinge o solo num ponto a 8 m de distância do paredão (veja Figura 3) e, portanto, a uma distância $x = 8 - 5 = 3$ m do centro de massa do sistema (Figura 3). Assim, o fragmento de massa 3 kg cairá no solo a uma distância y do centro de massa, tal que:

$$(2\text{ kg}) . x = (3\text{ kg}) . y$$

$$2.3 = 3. y \quad \Rightarrow \quad y = 2\text{ m}$$

Assim, o fragmento de 3 kg tocará o solo a uma distância do paredão (Figura 3) dada por:

$$z = 5 - y = 5 - 2 = 3\text{ m}$$

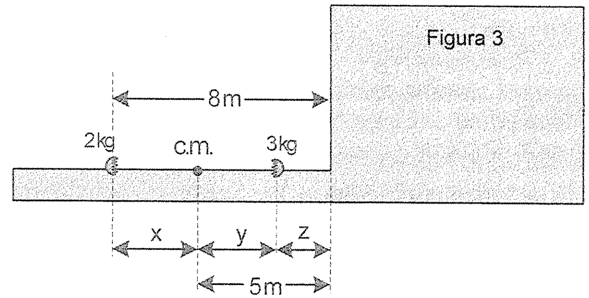


Figura 3

Questão 189

Solução:

a) A altura máxima atingida pelo rojão no lançamento oblíquo vale 20m, o que nos permite escrever:

$$H_{max} = \frac{V_o^2}{g}.\frac{\text{sen}^2\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad 20 = \frac{V_o^2}{10}.\frac{(\sqrt{2}/2)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad V_o^2 = 800\text{ m}^2/\text{s}^2$$

O alcance horizontal que o rojão teria atingido, caso não tivesse explodido no ponto mais alto da sua trajetória, é dado por:

$$A = \frac{V_o^2}{g}.\text{sen}2\alpha = \frac{800}{10}.\text{sen}90^o = 80\text{ m}$$

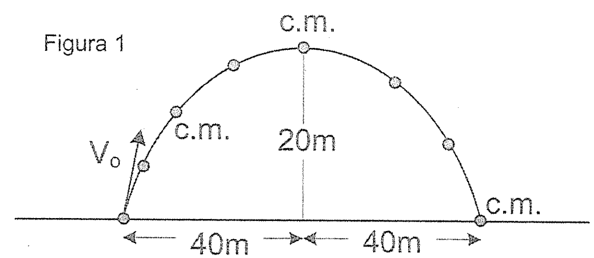


Figura 1

Como a explosão do rojão é ignorada pelo centro de massa do sistema, este centro de massa segue exatamente a trajetória parabólica original que o rojão seguiria caso não tivesse explodido, como mostra a Figura 1.

No entando, o rojão explodiu no ponto de altura máxima da parábola (posição em que os fragmentos não possuem velocidade vertical $v_y = 0$) e, após a explosão, os fragmentos são lançados horizontalmente, o que indica que, novamente, são lançados sem componente de velocidade na vertical $v_y = 0$, o que nos garante que os dois fragmentos chegarão ao solo simultaneamente, junto com o centro de massa do sistema, após um tempo de queda t_{queda} (contado a partir do instante da explosão) dado por:

$$H_{max} = \frac{g.(t_{queda})^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 20 = \frac{10.(t_{queda})^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_{queda} = 2\ s$$

O centro de massa do sistema formado pelos dois fragmentos atingirá o solo a 80 m de distância do ponto de lançamento (veja Figuras 1 e 2).

Segundo o enunciado, o fragmento de massa 100g atinge o solo a 90 m de distância do ponto de lançamento (Figura 2), o que nos permite escrever:

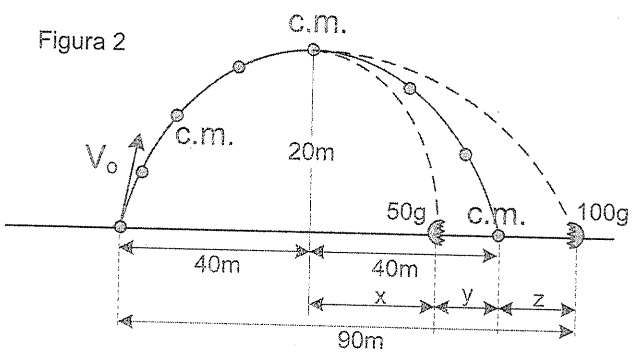
$$40 + 40 + z = 90 \quad \Rightarrow \quad z = 10\ m$$

Se o fragmento caiu a 10 m do centro de massa do sistema, o fragmento de 50g cairá a uma distância y do centro de massa tal que:

$$(50g).y = (100g).z$$

$$(50g).y = (100g).10 \quad \Rightarrow \quad y = 20\ m$$

Figura 2



Assim, o segundo fragmento cairá no solo a uma distância 60 m do ponto de lançamento, visto que (Figura 2):

$$40 + 40 - y = 40 + 40 - 20 = 60\ m$$

Adicionalmente, no que: $x = 40 - 20 \quad \Rightarrow \quad x = 20\ m$

b) Em relação ao ponto de altura máxima, após a explosão, o primeiro fragmento atingiu um alcance horizontal dado por:

$$A_1 = 40 + z = 50\ m$$

Assim, a velocidade V_{1x} comunicada ao 1° fragmento, logo após a explosão, é dada por:

$$A_1 = V_{1x}.T_{queda} \quad \Rightarrow \quad 50\ m = V_{1x}.(2s) \quad \Rightarrow \quad V_{1x} = 25\ m/s$$

Em relação ao ponto de altura máxima, após a explosão, o segundo fragment atingiu um alcance horizontal dado por:

$$A_2 = x = 20\ m$$

Assim, a velocidade V_{2x} comunicada ao 2° fragmento, logo após a explosão, dada por:

$$A_2 = V_{2x}.T_{queda} \quad \Rightarrow \quad 20\ m = V_{2x}.(2s) \quad \Rightarrow \quad V_{2x} = 10\ m/s$$

Note que os resultados obtidos estão de acordo com a conservação da qdm d sistema durante a explosão. Veja:

$$\Sigma Q_{\text{logo antes}} = \Sigma Q_{\text{logo depois}}$$

$$(m_1 + m_2).V_x = m_1.V_{1x} + m_2.V_{2x}$$

onde V_x é a velocidade da granada logo antes da explosão, dada por:

$$V_x = V_o.\cos 45^o = \sqrt{800}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 20\ m/s$$

Assim, vem:

$$(m_1 + m_2).V_x = m_1.V_{1x} + m_2.V_{2x}$$

$$(100 + 50).20 = 100.(25) + 50.(10)$$

$$3000 = 3000 \quad ☺$$

c) Durante a explosão do rojão, a variação da Emec do sistema é dada por:

$$\Delta Emec = Emec_F - Emec_i = \frac{m_1.V_{1x}^2}{2} + \frac{m_2.V_{2x}^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2).V_x^2}{2}$$

$$\Delta Emec = \frac{(0,1).25^2}{2} + \frac{(0,05).10^2}{2} - \frac{(0,15).20^2}{2} = 3,75\ J$$

Podemos dizer que 3,75 J de energia interna do rojão (energia química liberada é convertida em Emec, durante a explosão.

Questão 190 – Respostas: a) 25 m, b) 10 m, c) 6,66 J

Dica: veja a resolução da questão 189.

Questão 191 – Resposta: a) 910 m

Dica: Verifique que, dez segundos após a explosão, nenhum dos dois fragmentos tocou o solo ainda. Assim, 10 s após a explosão, o centro de massa do sistema estará na mesma posição onde o corpo estaria em sua queda livre, caso ele não tivesse explodido. Esse comportamento deve-se ao fato de a explosão da granada ser um evento interno ao sistema e não perturbar o movimento do seu centro de massa.

Questão 192

Solução:. No instante t = 0 s, a velocidade vertical do centro de massa do sistema é dada pela relação eq21 página 171:

$$v_{o-cm} = \frac{m_1.v_1 + m_2.v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m.(15) + 2m.(0)}{m + 2m} = +5 \text{ m/s}\uparrow$$

Como ambos os corpos estão se movendo sujeitos apenas à ação da gravidade, suas acelerações escalares (adotando o referencial para cima) valem $a_1 = a_2 = -g$. Assim, a aceleração do centro de massa do sistema é dada pela relação eq22 página 171:

$$a_{cm} = \frac{m_1.a_1 + m_2.a_2}{m_1 + m_2} = \frac{m.(-g) + 2m.(-g)}{m + 2m} = -g = -10 \text{ m/s}^2$$

Portanto, a velocidade do centro de massa desse sistema, em cada instante é dada pela relação:

$$V_{cm} = V_{0cm} + a_{cm}.t$$

$$V_{cm} = +5 + (-10).t \qquad \textbf{(eq1)}$$

A expressão acima é válida em todo o intervalo de tempo em que ambos os fragmentos estiverem sob ação exclusiva da gravidade, isto é, em todo intervalo de tempo no qual a resultante das forças externas agindo no sistema for apenas o peso total do sistema. A partir do instante em que o primeiro corpo tocar o solo, mais uma força externa (a normal N↑ que o solo exerce no corpo) agirá sobre o sistema, alterando a aceleração do seu centro de massa e tirando a validade da relação eq1.

É fácil verificar que nenhum dos corpos atinge o solo antes do instante t = 2s. Assim, a velocidade do centro de massa desse sistema, em t = 2s, é dada pela relação eq1:

$$V_{cm} = +5 + (-10).t, \quad \text{para } t = 2s, \text{ vem:}$$

$$V_{cm} = +5 + (-10).2$$

$$V_{cm} = -15 \text{ m/s}$$

Como foi adotado o referencial para cima, o sinal algébrico negativo encontrado indica que essa velocidade do centro de massa aponta para baixo.

Apesar de ter havido uma colisão entre as duas bolas durante esse episódio, trata-se de um evento interno ao sistema, não perturbando o movimento do seu centro de massa.

Questão 193 – Resposta: alternativa c

Questão 194

Respostas:

a) $\dfrac{M.d.\sqrt{g}}{m.\left(\sqrt{2H} - \sqrt{2(H-h)}\right)}$ b) $\dfrac{(M+m).d}{m}$

Questão 195

Solução: Pela conservação da energia mecânica, a velocidade de cada bola, logo antes da colisão, vale:

$$V_{oA} = V_{oB} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gR}$$

Pela conservação da Emec, as velocidades da bola A e da bola B, logo após a colisão, valem:

$$V_A = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\frac{R}{2}} = \sqrt{gR}$$

$$V_A = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\frac{R}{3}} = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$$

Pela definição de coeficiente de restituição, vem:

$$e = \frac{V_{rel\ após}}{V_{rel\ antes}} = \frac{V_A + V_B}{V_{oA} + V_{oB}} = \frac{\sqrt{gR} + \sqrt{\frac{2gR}{3}}}{\sqrt{2gR} + \sqrt{2gR}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{12} \cong 0{,}64$$

Questão 196 – Resposta: $\sqrt{2}/2$ – **Dica:** veja a resolução da questão 195.

Questão 197

Solução: Admitindo que a massa u da bola seja muito menor que as massas M e m dos carros, a conservação da qdm do sistema nos permite escrever:

$$M.V = (M+m).V_F \qquad \textbf{(eq1)}$$

Conforme aprendemos na resolução da questão 58, página 355, para que a bolinha consiga dar uma volta completa (looping) em seu movimento pendular, ela precisa ter, em relação ao carro, uma velocidade mínima:

$$V_{rel} = \sqrt{5Rg} \qquad \textbf{(eq2)}$$

Ora, logo antes da colisão, a bolinha e o carro compartilham de uma mesma velocidade V em relação à Terra. Logo após a colisão, a velocidade do carro em relação à Terra muda subitamente para V_F enquanto a da bolinha permanece igual a V. Assim, a velocidade relativa entre a bolinha e o carrinho, logo após a colisão, vale:

$$V_{rel} = V - V_F \qquad \textbf{(eq3)}$$

De eq1, eq2 e eq3, vem:

$$V_{rel} = V - V_F = \sqrt{5Rg}$$

$$V - \frac{M.V}{M+m} = \sqrt{5Rg}\,, \qquad \text{assim:} \qquad \boxed{V = \frac{M+m}{m}\sqrt{5Rg}}$$

Questão 198 – Resposta: alternativa d

Solução: Pela conservação da energia mecânica, determinamos a velocidade do garoto ao atingir a posição mais baixa do movimento pendular, imediatamente antes de resgatar o gato:

$$M.g.H = \frac{M.V^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \sqrt{2gH}} \qquad \textbf{(eq1)}$$

Pela conservação da qdm do sistema menino +gato, durante a colisão entre eles, determinamos a velocidade U do conjunto menino+gato logo após o resgate:

$$M.V = (M+m).U \quad \Rightarrow \quad U = \frac{M.V}{M+m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{M.\sqrt{2gH}}{M+m}} \qquad \textbf{(eq2)}$$

Para determinar a tração no fio T no fio, logo após o resgate, aplicamos a segunda lei de Newton na direção radial (centrípeta):

$$F_{R\,ctp} = F_{in} - F_{out} = \text{massa}.\ a_{ctp}$$

$$T - (M+m).g = \frac{(M+m).U^2}{R}\,, \quad \text{com} \quad R = L$$

Usando eq2, vem: $T = (M+m).g + \dfrac{(M+m)}{L}\dfrac{M^2.2gH}{(M+m)^2}$

$$\boxed{T = (M+m).g.\left[1 + \left(\frac{M}{M+m}\right)^2 \frac{2H}{L}\right]}$$

Questão 199 – Resposta: alternativa c

Solução: Qual a velocidade que o pêndulo deve ter, ao passar pelo ponto mais baixo da oscilação, para ele consiga subir até que o fio pare na posição horizontal ? Pela conservação de energia mecânica, vem:

$$m.g.H = \frac{m.V^2}{2} \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2gH}\,, \quad \text{com} \quad H = L$$

$$\boxed{V = \sqrt{2gL}} \qquad \textbf{(eq1)}$$

Isso indica que, para atingir o seu objetivo, a bolinha do pêndulo precisa adquirir uma quantidade de movimento, na posição mais baixa da sua oscilação, dada por:

$$Q_F = m.V = m\sqrt{2gL}$$

Nas **n** vezes que a bola passou pela posição mais baixa da oscilação, ela recebeu **n** impulsos de módulo F.Δt. Aplicando o teorema do Impulso, vem:

$$Q_F = Q_i + n.F.\Delta t$$

$$m\sqrt{2gL} = 0 + n.F.\Delta t$$

Assim, concluímos que a bola precisará passar pela posição mais baixa da oscilação um número **n** de vezes dado por:

$$n = \frac{m.\sqrt{2gL}}{F.\Delta t}$$

Assim, o número N de <u>oscilações completas</u> que o pêndulo precisará executar vale:

$$\boxed{N = \frac{n}{2} = \frac{m\sqrt{2gL}}{2.F.\Delta t}}$$

Questão 200 – Resposta – Alternativa d

Questão 201

Solução: Durante o impacto de cada bala com o bloco de madeira, eles trocam entre si um par de forças impulsivas ←F →F de módulo dado pelo teorema do impulso:

$$Q_F = Q_i + I$$

$$0 = m.V - F.\Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{m.v}{\Delta t}} \qquad \textbf{(eq1)}$$

Na posição de equilíbrio do bloco de madeira, ele fica sujeito a duas forças horizontais – a força F→ devido aos impactos das balas e a força elástica Fel ←devido à mola comprimida. Estas duas forças devem se equilibrar, portanto:

$$F = Fel \quad \Rightarrow \quad \frac{m.v}{\Delta t} = k.x \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{m.v}{k.x} = \frac{(0{,}1\ \text{kg}).400}{1600.(0{,}25)} = = 0{,}1\ \text{s}$$

A rigor, o intervalo de tempo Δt = 0,1 s determinado acima se trata da duração média do impacto de cada bala com o bloco de madeira. Entretanto, usualmente, se faz a aproximação de dizer que esse também corresponde ao tempo decorrido entre dois impactos de duas balas sucessivas.

Dessa forma, se ocorre um impacto a cada 0,1 s, então essa metralhadora dispara 10 projéteis a cada 1 segundo.

Questão 202 – **Resposta**: alternativa d

Solução: Pelo teorema do impulso em sua forma vetorial, durante cada colisão, podemos escrever:

$$\vec{Q}_F = \vec{Q}_i + \vec{F}_R.\Delta t \quad \Rightarrow \quad m.\vec{V}_F = m.\vec{V}_i + \vec{F}_R.\Delta t \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{F}_R = \frac{m.(\vec{V}_F - \vec{V}_i)}{\Delta t} = \frac{m.\Delta\vec{V}}{\Delta t}} \ \textbf{(eq1)} \quad \text{com} \quad \Delta\vec{V} = \vec{V}_F - \vec{V}_i$$

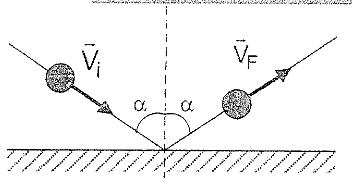


Figura 1

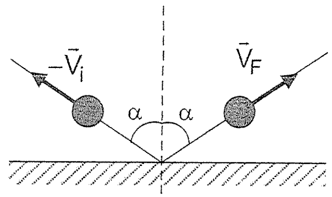


Figura 2

A subtração $\Delta\vec{V} = \vec{V}_F - \vec{V}_i$ pode ser interpretada por uma resultante (soma) entre os vetores $\vec{V}_F$ e $-\vec{V}_i$, ou seja, $\Delta\vec{V} = \vec{V}_F + (-\vec{V}_i)$, como mostrado na Figura 2. Como a colisão é elástica, a velocidade da bola não sofre alteração em seu módulo, antes e depois da colisão, o que nos permite escrever:

$$|\vec{V}_F| = |-\vec{V}_i| = V$$

A resultante entre os vetores $\vec{V}_F$ e $-\vec{V}_i$ de mesmo módulo V da Figura 2 é feita por decomposição, como mostrado nas Figuras 3 e 4, levando ao resultado:

$$\Delta\vec{V} = V.\cos\alpha\uparrow + V.\cos\alpha\uparrow = 2V.\cos\alpha\uparrow \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\Delta\vec{V}| = 2V.\cos\alpha} \ \textbf{(eq2)}$$

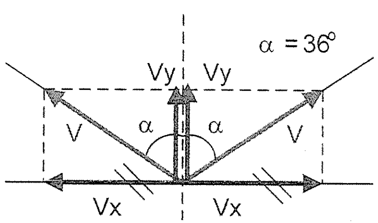


Figura 3

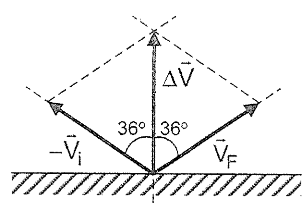


Figura 4

Aplicando o módulo em cada membro da relação eq1, lembrando que o "*módulo do produto é o produto dos módulos*" e que o "*módulo do quociente é o quociente dos módulos*", vem:

$$|\vec{F}_R| = \left|\frac{m.\Delta\vec{V}}{\Delta t}\right| = \frac{m.|\Delta\vec{V}|}{\Delta t} \overset{eq2}{=} \frac{m.(2V.\cos\alpha)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_R = \frac{2mV\cos\alpha}{\Delta t}} \ \textbf{(eq3)}$$

Durante o impacto, a bola aplica uma normal N↓ ao prato da balança, que devolve a reação N↑ à bola. Na bola, também age o seu peso P↓ (Figura 5). Assim, a força resultante F_R agindo na bola, durante o impacto, vale:

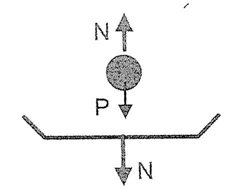


Figura 5

$$F_R = N - P \qquad \textbf{(eq4)}$$

De eq3 e eq4, vem:

$$N - m.g = \frac{2mV\cos\alpha}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = m.g + \frac{2mV\cos\alpha}{\Delta t}} \ \textbf{(eq5)}$$

A normal N, dada pela relação eq5 é exatamente a marcação da balança. Note que, segundo o enunciado, a metralhadora dispara 4 projéteis por segundo, ou seja, 1 projétil a cada 0,25 s. Esse tempo decorrido entre dois disparos sucessivos é aproximado como sendo a duração média de cada impacto, ou seja, Δt = 0,25 s.

Substituindo os valores numéricos na relação eq5, vem:

$$\boxed{N = m.g + \frac{2mV\cos\alpha}{\Delta t}} = (0{,}02).10 + \boxed{\frac{2.(0{,}02).1000.(0{,}8)}{0{,}25}}$$

$$N = 0{,}2 + 128 = 128{,}2 \text{ newtons}$$

Na maioria dos problemas desse tipo, o termo impulsivo $\frac{2mV\cos\alpha}{\Delta t}$ na relação eq5 é muito maior do que o termo "m.g", de forma que, frequentemente (mas nem sempre), o peso m.g é desprezado na relação eq5. Cabe ao estudante, com bom senso, comparar os valores do termo impulsivo e do peso para ver se convém ou não desprezar o peso. A marcação exata dessa balança vale 128,2 N, mas, observando as alternativas, vimos que o peso foi desprezado nesse problema e a resposta foi aproximada para 128 N.

Questão 203 – **Resposta**: 80 g – **Dica:** veja a resolução da questão 202.

Questão 204

Solução: Segundo o enunciado, as bolas caem numa taxa de n bolas por segundo, de forma que ocorrem n colisões entre bolas e o prato da balança a cada segundo. Assim, admitimos que a duração média de cada impacto seja:

$$\Delta t = \frac{1}{n}\text{segundo} \qquad \textbf{(eq1)}$$

Cada bola cai de uma altura h, a partir do repouso, atingindo o prato da balança com velocidade:

$$v = \sqrt{2gh} \qquad \textbf{(eq2)}$$

A velocidade de cada bola, após o impacto, é nula. Assim, o Teorema do Impulso aplicado à bola, durante, cada colisão, permite determinar a força resultante média $F_R = N - P$ agindo na bola, durante cada impacto.

$$Q_F = Q_i + I$$

$$0 = m.v - F_R.\Delta t \quad \Rightarrow \quad F_R = \frac{m.v}{\Delta t} \quad \textbf{(eq3)}$$

Substituindo eq1 e eq2 em eq3, vem:

$$F_R = \frac{m.v}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad N - m.g = \frac{m.\sqrt{2gh}}{\frac{1}{n}} \quad \Rightarrow \quad N = m.g + n.m\sqrt{2gh}$$

A expressão acima daria a marcação média da balança se houvesse apenas uma bola em jogo. Entretanto, como as bolas caem num ritmo de n bolas por segundo, após t segundos, já existem n.t bolas sobre a balança (incluindo a última que está colidindo naquele instante t), totalizando um peso n.t.mg sobre a balança. A marcação da balança, no instante t, será o peso total n.t.m.g das bolas sobre o prato da balança somado à força impulsiva do impacto produzido pela última bola, ou seja:

$$W = n.t.m.g + n.m\sqrt{2gh}$$

Questão 205 – **Resposta**: 4,8 N – **Dica:** veja a resolução da questão 204.

Questão 206 – **Resposta**: alternativa d – **Dica:** veja a resolução da questão 204.

Questão 207 **Resposta:** 320 + 20 = 340 N

Dica: A bola tem massa 2 kg, ou seja, peso 20 N. Será que faz sentido desprezar o peso da bola nesse problema ? Não, não faz sentido, portanto, não foi desprezado.

Questão 208

Solução: O bloco A de massa m cai de uma altura h, a partir do repouso, e atinge uma velocidade $v = \sqrt{2gh}$ logo antes de colidir com B, que tem a mesma massa de A e encontra-se em repouso. A conservação da qdm do sistema AB durante a colisão permite escrever:

$$m.v = (m+m).U \quad \Rightarrow \quad U = \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{2gh}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \sqrt{\frac{gh}{2}}} \quad \textbf{(eq1)}$$

Antes da colisão, o cilindro B já se encontrava em equilíbrio sobre a mola, que apresentava uma deformação inicial x_o dada por:

$$k.x_o = m.g \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_o = \frac{m.g}{k}} \quad \textbf{(eq2)}$$

Após essa colisão, a mola sofrerá uma compressão adicional x, de forma que su deformação aumentará de x_o para $x_o + x$, devido ao deslocamento vertical x sofrido pelo cilindro B, desde o instante posterior ao impacto até o instante er que o cilindro B atingir novamente o repouso.

A conservação da Emec do sistema, durante essa deformação adicional da mola permite escrever:

$$\frac{(2m).v_i^2}{2} + (2m).g.h_i + \frac{k.x_i^2}{2} = \frac{(2m).v_F^2}{2} + (2m).g.h_F + \frac{k.x_F^2}{2}$$

$$\frac{(2m).U^2}{2} + (2m).g.x + \frac{k.x_o^2}{2} = \frac{(2m).0^2}{2} + (2m).g.(0) + \frac{k.(x_o + x)^2}{2}$$

$$m.\frac{gh}{2} + (2m).g.x + \frac{k}{2}.\left(\frac{m.g}{k}\right)^2 = \frac{k}{2}\left(\frac{m.g}{k} + x\right)^2$$

Desenvolvendo, encontramos a equação: $k.x^2 - 2.m.g.x - m.g.h = 0$

$$x = \frac{2m.g + \sqrt{4m^2g^2 + 4k.m.g.h}}{2k} = \frac{mg}{k} + \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{m^2g^2}{k^2}\frac{h.k}{m.g}}$$

$$\boxed{x = \frac{m.g}{k}.\left[1 + \sqrt{1 + \frac{k.h}{m.g}}\right]}$$

Questão 209

Solução:

a) Inicialmente, o cilindro B, de massa M, encontra-se em repouso (equilíbri estático) sobre a mola que, portanto, apresenta uma deformação inicial dada por

$$k.x_o = M.g \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_o = M.g / k} \quad \textbf{(eq1)}$$

Em seguida, o cilindro A (de massa m) cai de uma altura h a partir do repouso e logo antes de colidir com B, atinge uma velocidade $v_o = \sqrt{2gh}$. Durante a colisão, conservação da QDM nos permite escrever:

$$m.v_o = (m+M).v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m.v_o}{m+M} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{m.\sqrt{2gh}}{m+M}} \quad \textbf{(eq2)}$$

Após essa colisão, a mola sofrerá uma compressão adicional x, de forma que su deformação aumentará de x_o para $x_o + x$, devido ao deslocamento vertical x sofrido pelo cilindro B, desde o instante posterior ao impacto até o instante er que o cilindro B atingir novamente o repouso.

A conservação da Emec do sistema, durante essa deformação adicional da mola, permite escrever:

$$\frac{(M+m).v_i^2}{2} + (M+m).g.h_i + \frac{k.x_i^2}{2} = \frac{(M+m).v_F^2}{2} + (M+m).g.h_F + \frac{k.x_F^2}{2}$$

$$\text{onde } v_i = v = \frac{m.\sqrt{2gh}}{m+M},\ v_F = 0,\ h_i = x,\ h_F = 0,\ x_i = x_o = M.g/k,\ x_F = x + x_o$$

$$\frac{(M+m)}{2}\left(\frac{m.\sqrt{2gh}}{m+M}\right)^2 + (M+m).g.x + \frac{k}{2}\left(\frac{M.g}{k}\right)^2 = \frac{k}{2}\left(\frac{M.g}{k}+x\right)^2$$

Reduzindo os termos semelhantes, chegamos à equação:

$$\left(\frac{k}{2}\right).x^2 - m.g.x - \frac{m^2g.h}{M+m} = 0$$

$$\text{Donde: } x = \frac{m.g + \sqrt{m^2g^2 + 4.\frac{k}{2}\frac{m^2gh}{(M+m)}}}{k} = \frac{m.g + \sqrt{m^2g^2\left(1 + \frac{2kh}{g.(M+m)}\right)}}{k}$$

$$x = \frac{m.g}{k}.\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2.k.h}{g.(M+m)}}\right)$$

Substituindo os valores M = 6 kg, m = 2 kg, $g = 10\ m/s^2$, k = 100 N/m, h = 0,5 m, encontramos exatamente x = 0,5 m.

b) Logo antes e logo após a colisão, a Epot do sistema tem o mesmo valor. A variação da Emec do sistema durante a colisão é dada pela variação da Ecin do sistema, logo antes e logo após o impacto.:

$$\Delta Emec = EcinF - Ecini = \frac{(M+m)}{2}.v^2 - \frac{m}{2}.v_o^2$$

$$\text{Com } v = \frac{m.\sqrt{2gh}}{m+M} = \frac{2.\sqrt{2\times10\times0,5}}{8} = \frac{\sqrt{10}}{4} m/s$$

$$v_o = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times10\times0,5} = \sqrt{10}\ m/s, \quad \text{assim, vem:}$$

$$\Delta Emec = EcinF - Ecini = \frac{(6+2)}{2}.\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 - \frac{2}{2}.(\sqrt{10})^2 = -7,5\ J$$

Assim, vemos que 7,5 J de energia mecânica foi dissipada em calor durante a colisão inelástica.

Questão 210

Resposta: Com o impacto, o bloco (inicialmente em repouso) sofrerá um deslocamento para baixo extra de 6 cm. Assim, a máxima deformação atingida pela mola nesse episódio valerá $x_o + x$ = 1 cm + 6 cm = 7 cm.

Dica: veja a resolução da questão 209. Basicamente, você cairá na mesma equação do 2º grau cujo descriminante será um quadrado perfeito, quando fazemos uso dos valores numéricos fornecidos no enunciado ☺.

Questão 211

Solução: O martelo cai de uma altura h, a partir do repouso, e atinge uma velocidade $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2.(10).(1{,}25)} = 5$ m/s logo antes de colidir com a estaca em repouso. A conservação da qdm do sistema martelo+estaca durante a colisão permite escrever:

$$M.v = (m + m).U \Rightarrow 8000.(5) = 10.000.U \Rightarrow U = 4\ m/s$$

Assim, logo após o impacto, o conjunto martelo+estaca possui velocidade U = 4 m/s e, a partir desse ponto, penetrará o solo, sofrendo um deslocamento vertical x↓ sob ação da força de resistência F↑ e do peso (M+m).g↓ do conjunto, até atingir o repouso.
Aplicando o Principio do Trabalho das Forças Não-Conservativas, durante esse deslocamento vertical ↓x, vem:

$$\Sigma T_{FNC} = Emec_{\ Final} - Emec_{\ Inicial}$$

$$T_F = (Epot + Ecin)_{Final} - (Epot + Ecin)_{inicial}$$

$$-F.x = \left(\frac{(M+m).0^2}{2} + (M+m).g.(0)\right) - \left(\frac{(M+m).U^2}{2} + (M+m).g.x\right)$$

$$-F.x = (0) - \left(\frac{(M+m).U^2}{2} + (M+m).g.x\right)$$

$$[F - (M+m).g].x = \frac{(M+m).U^2}{2}$$

$$(500.000 - 100.000).x = \frac{(10.000).4^2}{2} \Rightarrow x = 0,2\ m = 20\ cm$$

Questão 212 – Resposta – Alternativa b – **Dica:** veja a resolução da questão 211.

Questão 213

Solução:

a) O gráfico mostra que a força está a favor do movimento (seu valor é positivo) no intervalo $0 \le t \le 4$ s, intervalo de tempo em que o movimento é acelerado (módulo da velocidade aumentando até atingir o valor máximo em t = 4s). A força passa a apontar contra o movimento no intervalo de tempo $4s \le t \le 6s$, quando o movimento passa retardado (o módulo da velocidade passa a diminuir. Portanto, a velocidade máxima é atingida no instante t = 4s.

b) calcular a velocidade máxima é calcular a velocidade da caixa no instante |t = 4s. Assim, aplicaremos o teorema do Impulso no intervalo $0 \le t \le 4$ s:

$$Q_F = Q_i + I\ , \quad \text{com } I = \frac{b \times h}{2} = \frac{4 \times 20}{2} = 40 \text{ N.s}$$

$$2.V_F = 2.(0) + 40 \Rightarrow V_F = 20 \text{ m/s}$$

c) Aplicando o teorema do Impulso no intervalo $4s \le t \le 6s$, vem:

$$Q_F = Q_i + I\ , \quad \text{com } I = \frac{-b \times h}{2} = \frac{-2 \times 10}{2} = -10 \text{ N.s}$$

Note que, no intervalo $4s \le t \le 6s$, a velocidade inicial no instante t = 4s vale $V_i = +20$ m/s. Assim, pelo teorema do Impulso, vem:

$$2.V_F = 2.(20) - 10 \Rightarrow V_F = 15 \text{ m/s}$$

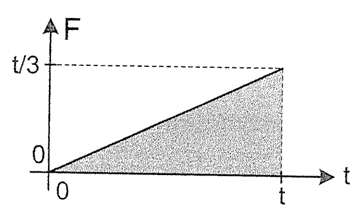
Questão 214

Respostas: a) 25/9 m/s, b) 2,5 m/s c) 3,125 m/s no instante 1,5 s d) 3 s

Questão 215

Solução: Do instante 0 ao instante t, o impulso da força F agindo sobre o corpo tem módulo numericamente igual à área hachurada no gráfico da força F em função do tempo t abaixo:

$$|I| \overset{n}{=} \frac{b \times h}{2} = \frac{t \times t/3}{2} = \frac{t^2}{6}$$



Entretanto, esse impulso age contrário ao movimento do corpo. Admitindo que o corpo pare no instante t, o teorema do Impulso, no intervalo [0,t] permite escrever:

$$Q_F = Q_i + I$$

$$0 = 0{,}6.(10) - \frac{t^2}{6} \Rightarrow t = 6 \text{ s}$$

O corpo pára no instante t = 6 s.

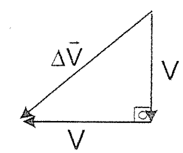
Questão 216 – Resposta: alternativa c

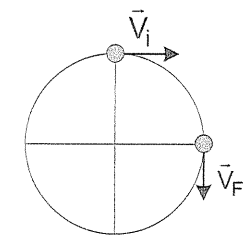
Solução: Se a força gravitacional faz o papel de resultante centrípeta no movimento do satélite, podemos escrever:

$$F = \frac{M.V^2}{R} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{F.R}{M}} \qquad \textbf{(eq1)}$$

O satélite se move com velocidade de módulo constante $|\vec{V}_i| = |\vec{V}_F| = V$ e a variação da velocidade vetorial, num quarto de volta, é dado por:

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_F - \vec{V}_i = \vec{V}_F + (-\vec{V}_i) = \downarrow V + \leftarrow V$$





Graficamente, pelo teorema de Pitágoras, vemos que o módulo do vetor $\Delta\vec{V}$ vale:

$$|\Delta\vec{V}| = V.\sqrt{2} \qquad \textbf{(eq2)}$$

Assim, o impulso médio aplicado pela força F, durante um percurso de ¼ da circunferência, tem módulo dado por:

$$\vec{I} = \vec{Q}_F - \vec{Q}_i = M.\vec{V}_F - M.\vec{V}_i = M.(\vec{V}_F - \vec{V}_i) = M.\Delta\vec{V}$$

$$|\vec{I}| = M.|\Delta\vec{V}| \qquad \textbf{(eq3)}$$

Substituindo eq1 e eq2 em eq3, vem:

$$|\vec{I}| = M.|\Delta\vec{V}| = M.V.\sqrt{2} = M.\sqrt{\frac{F.R}{M}}.\sqrt{2} = \sqrt{2FRM}$$

Questão 217 – Resposta: alternativa d – **Dica:** veja a resolução da questão 216.

Questão 218

Solução:

a) Se a bola cai de uma altura H a partir do repouso, com que velocidade ela se choca com o solo? Conservação de energia:

$$M.g.H = M.V^2/2 \Rightarrow V = \sqrt{2.g.H} = \sqrt{2 \times 10 \times 1{,}8} = 6 \text{ m/s}$$

Essa é a velocidade antes do impacto com o solo $V_i = 6$ m/s ↓ vertical para baixo.

b) Seja V_F↑ a velocidade da bola logo após o impacto. Para o cálculo do coeficiente de restituição, a velocidade relativa V_{rel} entre a bola e o chão antes do impacto vale

V_i = 6 m/s (já que o solo não se move), ao passo que a velocidade relativa entre a bola e o chão, logo após o impacto, vale V_F. Assim:

$$e = \frac{|V_{relativa-após}|}{|V_{relativa-antes}|} = \frac{V_F}{V_i} = \frac{V_F}{6} = 0{,}8 \Rightarrow \boxed{V_F = 4{,}8 \text{ m/s} \uparrow}$$

c) Pelo teorema do impulso, temos a seguinte relação vetorial:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial} + \vec{I} \Rightarrow m.V_F\uparrow = m.V_i\downarrow + \vec{I}$$

$$m.V_F\uparrow + m.V_i\uparrow = \vec{I} \Rightarrow m.(V_F + V_i)\uparrow = \vec{I}$$

Se dois vetores são iguais, elem precisam ter módulos iguais, assim:

$$m.|V_F + V_i| = |\vec{I}| \Rightarrow m.(V_F + V_i) = F_{média}.\Delta t$$

$$(0{,}5).(4{,}8 + 6) = F_{média}(0{,}02) \Rightarrow \boxed{F_{média} = 270 \text{ N}}$$

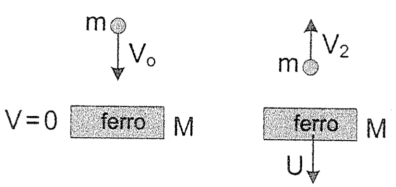
Questão 219

Solução:

a) No primeiro caso, a bola cai de uma altura h_o, colide com um anteparo fixo (a chapa de ferro) e repica até uma altura h_1. Pela relação eq57, página 217, o coeficiente de restituição é dado por:

$$e = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = \sqrt{\frac{3{,}2}{5}} = 0{,}8$$

b) No segundo caso, a bola cai de uma altura h_o e atinge uma velocidade V_o dada por $V_o = \sqrt{2gh_o} = \sqrt{2.(10).5} = 10$ m/s $\downarrow$ logo antes de colidir com a chapa de ferro que se encontra apoiada sobre a espuma de borracha. Após a colisão, a bola volta a subir até uma altura h_2, assim, conclui-se que a velocidade da bola, logo após a colisão com a chapa de ferro, vale $V_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2.(10).(1{,}8)} = 6$ m/s $\uparrow$.



Assim, usando o coeficiente de restituição determinado no item a para essa segunda colisão entre a bola e a chapa de ferro apoiada sobre espuma de borracha, vem:

$$e = \frac{|V_{relativa-após}|}{|V_{relativa-antes}|} = \frac{V_2 + U}{V_o} \Rightarrow 0{,}8 = \frac{6+U}{10} \Rightarrow \boxed{U = 2 \text{ m/s}}$$

Assim, logo após o impacto, a chapa de ferro (de massa M) possui velocidade U=2m/s$\downarrow$. Pela conservação da qdm do sistema bola+chapa de ferro, na segunda colisão, podemos escrever:

$$\Sigma Qy_{antes} = \Sigma Qy_{depois}$$

$$m.V_o + 0 = -m.V_2 + M.U$$

$$2.(10) = -2.(6) + M.2$$

$$M = 16 \text{ kg}$$

Questão 220 – Resposta – Alternativa b

Dica: veja exemplo resolvido 22, página 253.

Questão 221 – Resposta – Alternativa b

Dica: veja exemplo resolvido 22, página 253.

Questão 222

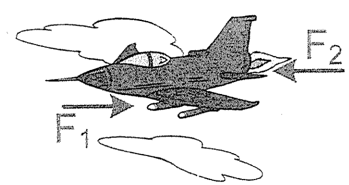
Solução:

a) Uma massa de ar igual a 1,3 kg/m^3 x 150 m^3 = 195 kg é captada pelo avião com velocidade relativa 250 m/s (900 km/h). Essa entrada de massa produz no avião um empuxo contrário ao seu movimento de módulo:

$$F_1 = \frac{\Delta m}{\Delta t}.V_{rel} = \frac{195 \text{ kg}}{1\text{s}}.(250 \text{ m/s}) = 4{,}9 .10^4 \text{ N}$$

Entretanto, o sistema ejetada essa mesma massa de ar 195 kg/s com velocidade relativa 600 m/s, o que produz um empuxo a favor do movimento do avião, de módulo:

$$F_2 = \frac{\Delta m}{\Delta t}.V_{rel} = \frac{195 \text{ kg}}{1\text{s}}.(600 \text{ m/s}) = 1{,}2.10^5 \text{ N}$$



O empuxo resultante sobre o avião vale, portanto:

$$F_R = F_2 - F_2 = 1{,}2.10^5 - 4{,}9.10^4 = 6{,}9.10^4 \text{ N}$$

b) A potencia resultante do sistema a jato é dada por:

$$Pot = F_R.V = 6{,}9.10^4 \times 250 = 1{,}7 \times 10^7 \text{ W}$$

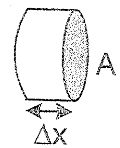
Questão 223 – Resposta – Alternativa a

Dica: veja a resolução da questão 100, página 270.

Questão 224

Solução: Como a massa líquida se move através da mangueira com velocidade v, esse conteúdo líquido percorre uma distância $\Delta x = v.\Delta t$ num intervalo de tempo Δt, assim, um volume $\Delta V = \Delta x.A = v.\Delta t.A = v.\Delta t.\pi r^2$ de líquido é expelido na extremidade da mangueira em cada intervalo de tempo Δt, o que corresponde a uma massa $\Delta m = \rho.\Delta V = \rho.v.\Delta t.\pi r^2$.

Dessa forma, a força propulsora (empuxo) que age no conjunto mangueira+extintor é dada por:



$$F_e = \frac{\Delta m}{\Delta t}.V_{rel} = \frac{\rho.v.\Delta t.\pi r^2}{\Delta t}.v = \rho.v^2.\pi r^2$$

Para manter o extintor em repouso sobre o solo liso, é preciso aplicar sobre ele uma força de mesma intensidade da força propulsora, mesma direção e sentido contrário.

Questão 225

Solução: No exemplo resolvido 23 página 257, mostramos que uma força F = 12N é requerida para manter essa esteira se movendo com velocidade constante v = 4 m/s. Assim, a potência requerida será:

$$Pot = F.v = 12.(4) = 48W$$

Questão 226 – Resposta: a) $F = 1/8 + 4{,}9.x$ (SI) b) $T = 5{,}7$ J

Dica: veja o Exemplo Resolvido 24 - página 260.

Questão 227

Solução: Conforme o resultado obtido na resolução da questão 224, ao empurrar essa massa de ar para baixo, o helicóptero recebe para cima um empuxo $F_e\uparrow$ máximo dado por:

$$F_{e\,max} = \frac{\Delta m}{\Delta t}.V_{rel} = \frac{\rho.v.\Delta t.\pi r^2}{\Delta t}.v = \rho.v^2.\pi r^2 = (1{,}2).25^2.(3{,}14).8^2 = 1{,}51\,.10^5\ N\uparrow$$

Assim, além do próprio peso M.g do helicóptero, qual a massa extra que esse empuxo consegue suportar, naquela altitude (a densidade do ar diminui com o aumento da altitude) ? Do equilíbrio das forças que agem no helicóptero, vem:

$$F_e = M.g + m.g$$

$$1{,}51\,.10^5 = 10.000.(10) + m.(10)$$

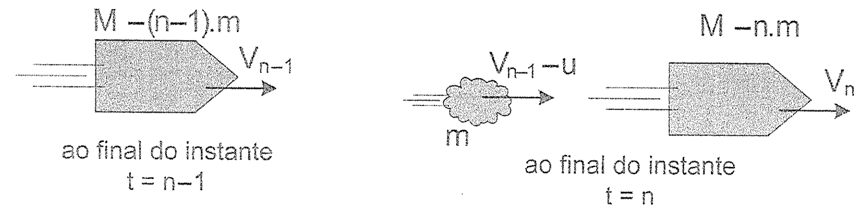
$$m = 5100\ kg$$

Questão 228 – Resposta – Alternativa b

Questão 229

Solução: O foguete, de massa inicial M, ejeta uma porção de massa m a cada segundo. Assim, passados n–1 segundos, restará ao foguete uma massa M – (n–1).m. Passados n segundos, restará ao foguete uma massa M – n.m.

A seguir, equacionaremos a transição entre os instantes t = n–1 e t = n.



Ao término do instante t = n–1, o foguete tem massa M – (n–1).m e se move com velocidade V_{n-1} (em relação à Terra). No instante seguinte, ele ejeta uma porção de massa m com velocidade u em relação a si mesmo, portanto, com velocidade $V_{n-1} - u$ em relação à Terra.

A conservação da qdm do sistema, no referencial da Terra, nos permite escrever:

$$Q_{n-1} = Q_n$$

$$[M - (n-1).m].V_{n-1} = (M - n.m).V_n + m.(V_{n-1} - u)$$

$$M.V_{n-1} - (n-1).m.V_{n-1} = M.V_n - n.m.V_n + m.V_{n-1} - m.u$$

$$V_{n-1}.(M - m.n + m - m) = V_n.(M - m.n) - m.u$$

$$\boxed{V_n = V_{n-1} + \frac{m.u}{M - n.m}} \qquad \textbf{(eq1)}$$

Assim, a partir da relação eq1, podemos escrever:

$$V_1 = V_0 + \frac{m.u}{M - 1.m}$$

$$V_2 = V_1 + \frac{m.u}{M - 2.m}$$

$$V_3 = V_2 + \frac{m.u}{M - 3.m}$$

$$V_4 = V_3 + \frac{m.u}{M - 4.m}$$

Das expressões acima, concluímos que, após o n-ésimo segundo, a velocidade do foguete valerá:

$$V_n = V_0 + \frac{m.u}{M-1.m} + \frac{m.u}{M-2.m} + \frac{m.u}{M-3.m} + ... + \frac{m.u}{M-n.m}$$

☺ Ufa !

Demonstração 1

Em uma colisão elástica, o coeficiente de restituição vale e = 1

Pela conservação da quantidade de movimento do sistema, temos:

$$\Sigma Qx_{\,antes} = \Sigma Qx_{\,depois} \quad \Rightarrow \quad m_A.v_A + m_B.v_B = m_A.u_A + m_B.u_B \qquad \textbf{(eq1)}$$

Nessa demonstração, as velocidades v_A, v_B, u_A e u_B podem ser positivas ou negativas, conforme estejam a favor ou contra o eixo, respectivamente.

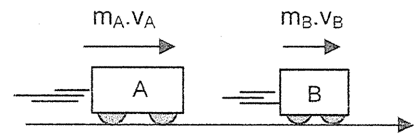


figura 1: antes da colisão
($v_A > v_B$) aproximação

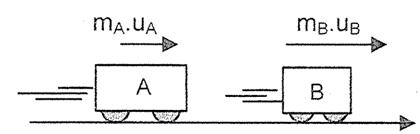


figura 2: depois da colisão
($u_A < u_B$) afastamento

Pela definição de coeficiente de restituição, temos:

$$e = \frac{|\,V_{relativa-após}\,|}{|\,V_{relativa-antes}\,|} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{u_B - u_A}{v_A - v_B} \qquad \textbf{(eq2)}$$

Como se trata de uma colisão elástica, a energia cinética total do sistema deve ser conservada. Assim, temos:

$$\Sigma Ecin_{\,antes} = \Sigma Ecin_{\,depois} \quad \Rightarrow \quad m_A.v_A^2 + m_B.v_B^2 = m_A.u_A^2 + m_B.u_B^2 \qquad \textbf{(eq3)}$$

Entretanto, a relação eq1 pode ser reescrita como:

$$m_A.(u_A - v_A) = m_B.(v_B - u_B) \qquad \textbf{(eq4)}$$

Ao passo que a relação eq3 também pode ser reescrita como:

$$m_B.v_B^2 - m_B.u_B^2 = m_A.u_A^2 - m_A.v_A^2$$

$$m_B.(v_B - u_B).(v_B + u_B) = m_A.(u_A - v_A).(u_A + v_A) \qquad \textbf{(eq5)}$$

Dividindo, membro a membro, eq5 por eq4, vem:

$$(v_B + u_B) = (u_A + v_A) \quad \Rightarrow \quad u_B - u_A = v_A - v_B \qquad \textbf{(eq6)}$$

Substituindo eq6 em eq2, vem: $e = 1$ ☺

6 - Referências Bibliográficas

* Alonso e Finn
Alonso, M.S & Finn, E.J. *Física – Um Curso Universitário.* São Paulo, Edgard Blucher, 1972.

* Beer & Johnston
Beer, Ferdinand P. & Jonhston, E. Russel. *Mecânica vetorial para engenheiros.* São Paulo, McGraw-Hill / Makron books, 1991.

* Classical Mechanics
Morin, David. *Introduction to Classical Mechanics with Problems and Solutions.* EUA – Cambridge Press - 2007

* Challenging Problems
Korsunsky, Boris. *Challenging problems for Physics.* Florida – EUA, Saundes *College, 1995. (Pode ser facilmente adquirido em www.amazon.com)*

* Curso de Física de Berkeley
Kittel, Charles; Knight, Walter. D.; Ruderman, Malvin A. *Curso de Física de Berkeley. São Paulo, Edgard Blücher, 1970.*

* Física Clássica - Calçada
Calçada, Caio Sérgio; Sampaio, Jorge Luiz. *Física clássica.* São Paulo, Atual, 1985. v.2 (disponível para venda em www.vestseller.com.br com as resoluções das questões)

* Irodov
Irodov, Igor Egvenevich. *Problems in General Physics.* Moscou, Mir, 1977. (disponível para venda em www.vestseller.com.br)

* Kósel
Kósel, Stanislaw. *Problemas de Física Dirigidos por S. Kósel.* Moscou, Mir, 1977. (disponível para venda em www.vestseller.com.br)

* Merian
Merian, J. L.; Kraige, L. G. *Mecânica – Dinâmica* – Livros Técnicos e Científicos, 1999.

* Nussenzveig
Nussenzveig, H. Moysés. *Curso de física básica – 1 mecânica – 2ª edição.* São Paulo, Edgard Blücher, 1981. v.1 e 2

* Pierre Lucie
Lucie, Pierre. *Física básica – mecânica 1.* Rio de janeiro, Campus, 197 (geralmente disponível para venda na Livraria Arte e Ciência - 0xx85 3231 0404

* Resnick & Halliday
Resnick, Robert & Halliday, D. *Física.* São Paulo, Livros Técnicos e Científico 1974. v.1 (geralmente disponível para venda na Livraria Arte e Ciência - 0xx 3231 0404)

* Saraeva
Bukhovtsev, B. B; Krivtchenkov, V.D.; Miakishev, G.Y.; Saraeva, I.M. *Problem selecionados de física elementar.* Moscou, Mir, 1977. (disponível para venda e www.vestseller.com.br)

* Shames
Shames, Irving H. *Dinâmica: mecânica para engenharia.* São Paulo, Prenti Hall, 2003. v.2

* Tópicos da Física
Doca, Ricardo Helou; Biscuola, Gualter José; Boas, Newton Vilas. *Tópicos Física.* São Paulo, Saraiva, 2001. (disponível para venda e www.vestseller.com.br com as resoluções das questões)

IMPORTANTE:

Para fazer referência a este próprio livro, ao fazer uso de questões dele, use seguinte linha:

Brito, Renato. *Fundamentos de Mecânica – Trabalho e energia, Impulso quantidade de movimento, Dinâmica do centro de massa e Sistemas com Mas variável.* Fortaleza, VestSeller, 2010, 2ª edição. v.2.

07 - Referências na internet

Professores e estudantes podem encontrar bons materiais e dicas de estudo para a preparação para os vestibulandos IME ITA nos seguintes sítios na internet:

- **www.VestSeller.com.br** – Livraria e editora brasileira especialista em publicações para vestibulandos IME ITA, tais como os livros da renomada Editora MIR, Olimpíadas Colombianas de Física, Olimpíadas peruanas, livros da Índia, além dos melhores livros dos melhores autores nacionais para o segmento de preparação IME ITA e olimpíadas. ***A mina de ouro está aqui !*** Visite o site agora mesmo.
- **www.rumoaoita.com.br** - sítio mantido por alunos Júlio Sousa e seus amigos que estão no ITA, tais como o Caio Guimarães. Contém muito material de apoio para vestibulandos IME ITA;
- **www.sassabetudo.cjb.net** - sítio mantido pelo sassá (Alex), meu ex aluno do Colégio Militar de Fortaleza, atuamente no ITA. Contém um vasto acervo de provas do IME, ITA, AFA, Escola Naval, dos últimos 20 anos;
- **www.etapa.com.br** – sítio do Curso Etapa de São Paulo, com vasto acervo de provas comentadas do IME, ITA, Fuvest, Unicamp, Unesp, Mackenzie, UFSCAR, FEI dentre outros. Acesse e clique em <o etapa resolve>.
- **www.fisicaju.com.br** - sítio pessoal do prof Renato Brito com listas de exercícios para download;
- **www.fisicaju.com.br/forum** - Fórum brasileiro de discussão sobre assuntos IME ITA, tais como livros para estudos, técnicas de estudo, dicas sobre horário de estudo, dúvidas sobre questões etc. Vale a pena acessar. O prof Renato Brito participa ativamente dessa lista;
- **Orkut – Comunidades Fundamentos de Mecânica** – Comunidade no orkut onde os usuários do livro debatem questões, tiram dúvidas e se mantém atualizados sobre os próximos lançamentos do autor. Todos os clientes que adquirem esse livro participam da comunidade.