高级计数技巧：生成函数与多项式运算

Ebola

Institute of Mathematics,
Zhejiang University.

July, 2023

1. 生成函数
   - 普通生成函数
   - 指数生成函数
2. 快速数论变换（NTT）
3. 多项式运算
4. 多项式的其它应用
5. 参考文献

定义与例子

对于一个数列 $a_0, a_1, a_2, \dots,$ 它的普通生成函数为：

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

定义与例子

对于一个数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ 它的普通生成函数为：

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

- $\{1, 2, 3\}$ 的普通生成函数为：$1 + 2x + 3x^2$
- $\{1, 1, 1, \ldots\}$ 的普通生成函数为：$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

封闭形式

考虑 $\{1,1,1,\dots\}$ 的普通生成函数：

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

封闭形式

考虑 $\{1, 1, 1, ...\}$ 的普通生成函数：

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

注意到

$$xF(x) + 1 = F(x)$$

因此

$$F(x) = \frac{1}{1-x}$$

我们称这种没有求和符号的表达式为封闭形式

封闭形式

求数列 $\{1, 0, 1, 0, ...\}$ 的普通生成函数，并化为封闭形式

封闭形式

求数列 $\{1, 0, 1, 0, ...\}$ 的普通生成函数，并化为封闭形式

【解】

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1 - x^2}$$

封闭形式

求数列 $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ 的普通生成函数，并化为封闭形式

封闭形式

求数列 $\{1,2,3,4,...\}$ 的普通生成函数，并化为封闭形式

【解】

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})' \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)' \\
&= \left(\frac{1}{1-x}\right)' \\
&= \frac{1}{(1-x)^2}
\end{aligned}
$$

组合计数例子

假设你去买水果，一共要买 n 个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

组合计数例子

假设你去买水果，一共要买 n 个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

【解】设买 i 个苹果的方案数为 a_i，事实上 a_i 仅在 i 为偶数时为 1，否则为 0，因此苹果的生成函数为：

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x^2}$$

组合计数例子

假设你去买水果，一共要买 n 个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

【解】设买 i 个苹果的方案数为 a_i，事实上 a_i 仅在 i 为偶数时为 1，否则为 0，因此苹果的生成函数为：

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + ... = \frac{1}{1 - x^2}$$

同理，西瓜和梨的生成函数为

$$G(x) = 1 + x, \quad H(x) = 1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1 - x}$$

组合计数例子

假设你去买水果，一共要买 n 个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

【解】设买 i 个苹果的方案数为 a_i，事实上 a_i 仅在 i 为偶数时为 1，否则为 0，因此苹果的生成函数为:

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}$$

同理，西瓜和梨的生成函数为

$$G(x) = 1 + x, \quad H(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

相乘得到

$$F(x)G(x)H(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

所以一共有 $n+1$ 种购买方案。

定义与例子

对于一个数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$，它的指数生成函数为：

$$F(x) = \sum_n a_n \frac{x^n}{n!}$$

定义与例子

对于一个数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$，它的指数生成函数为：

$$F(x) = \sum_n a_n \frac{x^n}{n!}$$

- $\{1, 2, 3\}$ 的指数生成函数为：$1 + x + \frac{1}{2}x^2$
- $\{1, 1, 1, \dots\}$ 的指数生成函数为：$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

封闭形式

考虑 $\{1, 1, 1, ...\}$ 的指数生成函数：

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

封闭形式

求数列 $\{1,0,1,0,...\}$ 的指数生成函数，并化为封闭形式

封闭形式

求数列 $\{1,0,1,0,\dots\}$ 的指数生成函数，并化为封闭形式

【解】

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)
\end{aligned}
$$

例题选讲：森林计数

求 n 个点带标号、深度不超过 k 的森林一共有多少种。

问题引入

给定多项式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$$

求 $h(x) = f(x)g(x)$ 的各项系数，对 998244353 取模。

原根

注意：$998244353 = 119 \times 2^{23} + 1$

我们说 3 是 998244353 的原根，因为 $3^1, 3^2, \ldots, 3^{998244352}$ 对 998244353 取模的结果两两不同。下面为了方便我们记 $p = 998244353$

原根

注意：$998244353 = 119 \times 2^{23} + 1$

我们说 3 是 998244353 的原根，因为 $3^1, 3^2, ..., 3^{998244352}$ 对 998244353 取模的结果两两不同。下面为了方便我们记 $p = 998244353$

根据费马小定理，$3^{p-1} \equiv 1 \pmod p$，那么令 $\omega_n = 3^{119 \times 2^{24-l}}$（其中 $n = 2^l$），我们会发现 $\omega_n^n = 1$，所以 ω_n 可以作为 n 次单位根！

原根

注意： $998244353 = 119 \times 2^{23} + 1$

我们说 3 是 998244353 的原根，因为 $3^1, 3^2, ..., 3^{998244352}$ 对 998244353 取模的结果两两不同。下面为了方便我们记 $p = 998244353$

根据费马小定理，$3^{p-1} \equiv 1 \pmod p$，那么令 $\omega_n = 3^{119 \times 2^{24-l}}$（其中 $n = 2^l$），我们会发现 $\omega_n^n = 1$，所以 ω_n 可以作为 n 次单位根！

把 FFT 中的运算全部换成取模意义下的运算，再把 n 次单位复根替换成这里的 ω_n，就得到了 NTT，它的性质就是取模意义下的 FFT。

代码

```
void NTT(int *a,bool INTT)
{
    for(int i=0;i<len;i++) r[i]=(r[i/2]/2)|((i&1)<<(l-1));
    for(int i=0;i<len;i++) if(i<r[i]) swap(a[i],a[r[i]]);
    for(int i=1;i<len;i<<=1)
    {
        int p=(i<<1);
        int wn=Pow(3,(Mod-1)/p);
        if(INTT) wn=Pow(wn,Mod-2);
        for(int j=0;j<len;j+=p)
        {
            int w=1;
            for(int k=0;k<i;k++)
            {
                int x=a[j+k],y=1ll*w*a[i+j+k]%Mod;
                a[j+k]=(x+y)%Mod;
                a[i+j+k]=(x-y+Mod)%Mod;
                w=1ll*w*wn%Mod;
            }
        }
    }
    //为了方便，我们通常把INTT的最后一步除以n也写进NTT函数里
    if(INTT) for(int i=0;i<len;i++) a[i]=1ll*a[i]*inv%Mod;
}
```

多项式牛顿迭代

给定多项式 $g(x)$，求一个多项式 $f(x)$，满足

$$g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n} \tag{1}$$

注意：$\pmod{x^n}$ 的意思是只保留最低的 n 项。

多项式牛顿迭代

给定多项式 $g(x)$，求一个多项式 $f(x)$，满足

$$g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n} \tag{1}$$

注意：$\pmod{x^n}$ 的意思是只保留最低的 n 项。

考虑倍增。设 $f_0(x)$ 是方程 (1) 在 $\pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$ 意义下的解，那么 $f(x) - f_0(x)$ 的最低次项就是 $x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 项。考虑泰勒展开：

$$\begin{aligned} g(f(x)) &\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(f_0(x))}{i!}(f(x) - f_0(x))^i \pmod{x^n} \\ &\equiv g(f_0(x)) + g'(f_0(x))(f(x) - f_0(x)) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

多项式牛顿迭代

给定多项式 $g(x)$，求一个多项式 $f(x)$，满足

$$g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n} \tag{1}$$

注意：$\pmod{x^n}$ 的意思是只保留最低的 n 项。

考虑倍增。设 $f_0(x)$ 是方程 (1) 在 $\pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$ 意义下的解，那么 $f(x) - f_0(x)$ 的最低次项就是 $x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 项。考虑泰勒展开：

$$\begin{aligned} g(f(x)) &\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(f_0(x))}{i!}(f(x) - f_0(x))^i \pmod{x^n} \\ &\equiv g(f_0(x)) + g'(f_0(x))(f(x) - f_0(x)) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

由方程 (1) 得：

$$f(x) \equiv f_0(x) - \frac{g(f_0(x))}{g'(f_0(x))} \pmod{x^n}$$

例题选讲：P5748 集合划分计数

一个 n 个元素的集合，将其分为任意多个子集，求方案数。
T 组数据，$T \leq 1000$，$n \leq 10^5$

例题选讲：P5748 集合划分计数

一个 n 个元素的集合，将其分为任意多个子集，求方案数。
T 组数据，$T \le 1000$，$n \le 10^5$

【题解】设 B_n 表示 n 个元素集合的划分方案数，考虑最后一个元素所在的集合，枚举该集合的大小、选取该集合中的元素，得到：

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

例题选讲：P5748 集合划分计数

一个 n 个元素的集合，将其分为任意多个子集，求方案数。
T 组数据，$T \leq 1000$，$n \leq 10^5$

【题解】设 B_n 表示 n 个元素集合的划分方案数，考虑最后一个元素所在的集合，枚举该集合的大小、选取该集合中的元素，得到：

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

设 $F(x)$ 是 B_n 的指数型生成函数，即：

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

例题选讲：P5748 集合划分计数

乘上 e^x 得到：

$$
\begin{aligned}
e^x F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{x^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} B_{n-m} \frac{x^n}{m!(n-m)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} B_{n-m} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} = F'(x)
\end{aligned}
$$

例题选讲：P5748 集合划分计数

乘上 e^x 得到：

$$
\begin{aligned}
e^x F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{x^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} B_{n-m} \frac{x^n}{m!(n-m)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} B_{n-m} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} = F'(x)
\end{aligned}
$$

由于 $F(0) = B_0 = 1$，可以得到 $F(x) = e^{e^x - 1}$，多项式 exp 求出 $F(x)$ 各项系数即可。

1. 生成函数
2. 快速数论变换（NTT）
3. 多项式运算
4. 多项式的其它应用
   - 多点求值与快速插值
   - 常系数齐次线性递推
5. 参考文献

1. 生成函数
2. 快速数论变换（NTT）
3. 多项式运算
4. 多项式的其它应用
5. **参考文献**

[1] T. Sauer, *Numerical Analysis*.
USA: Addison-Wesley Publishing Company, 2nd ed., 2011.

[2] O. Wiki, "快速傅里叶变换 - OI Wiki."
(2023, May 18).

[3] pengyule, "FFT（1）- pengyule."
(2021, Dec 30).

Thank You