# 高级计数技巧：生成函数与多项式运算

Ebola

Institute of Mathematics,
Zhejiang University.

July, 2023

1. 生成函数
2. 快速数论变换（NTT）
3. 多项式运算
4. 多项式的其它应用
5. 参考文献

1 生成函数
普通生成函数
指数生成函数

2 快速数论变换（NTT）

3 多项式运算

4 多项式的其它应用

5 参考文献

1 生成函数
普通生成函数
指数生成函数

2 快速数论变换（NTT）

3 多项式运算

4 多项式的其它应用

5 参考文献

## 定义与例子

对于一个数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$，它的普通生成函数为：

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

# 定义与例子

对于一个数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$，它的普通生成函数为：

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

- $\{1, 2, 3\}$ 的普通生成函数为：$1 + 2x + 3x^2$
- $\{1, 1, 1, \ldots\}$ 的普通生成函数为：$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

## 封闭形式

考虑 $\{1, 1, 1, ...\}$ 的普通生成函数：

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

# 封闭形式

考虑 $\{1, 1, 1, ...\}$ 的普通生成函数：

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

注意到

$$xF(x) + 1 = F(x)$$

因此

$$F(x) = \frac{1}{1-x}$$

我们称这种没有求和符号的表达式为封闭形式

# 封闭形式

求数列 $\{1, 0, 1, 0, ...\}$ 的普通生成函数，并化为封闭形式

# 封闭形式

求数列 $\{1, 0, 1, 0, ...\}$ 的普通生成函数，并化为封闭形式

【解】

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

# 封闭形式

求数列 $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ 的普通生成函数，并化为封闭形式

## 封闭形式

求数列 $\{1,2,3,4,...\}$ 的普通生成函数，并化为封闭形式

【解】

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})' \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)' \\
&= \left(\frac{1}{1-x}\right)' \\
&= \frac{1}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

# 组合计数例子

假设你去买水果，一共要买 $n$ 个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

# 组合计数例子

假设你去买水果，一共要买 $n$ 个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

【解】设买 $i$ 个苹果的方案数为 $a_i$，事实上 $a_i$ 仅在 $i$ 为偶数时为 $1$，否则为 $0$，因此苹果的生成函数为：

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1 - x^2}$$

# 组合计数例子

假设你去买水果，一共要买 $n$ 个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

【解】设买 $i$ 个苹果的方案数为 $a_i$，事实上 $a_i$ 仅在 $i$ 为偶数时为 $1$，否则为 $0$，因此苹果的生成函数为:

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + ... = \frac{1}{1 - x^2}$$

同理，西瓜和梨的生成函数为

$$G(x) = 1 + x, \quad H(x) = 1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1 - x}$$

# 组合计数例子

假设你去买水果，一共要买 $n$ 个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

【解】设买 $i$ 个苹果的方案数为 $a_i$，事实上 $a_i$ 仅在 $i$ 为偶数时为 1，否则为 0，因此苹果的生成函数为：

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1 - x^2}$$

同理，西瓜和梨的生成函数为

$$G(x) = 1 + x, \quad H(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1 - x}$$

相乘得到

$$F(x)G(x)H(x) = \frac{1}{(1 - x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)x^n$$

所以一共有 $n + 1$ 种购买方案。

1 生成函数
   普通生成函数
   指数生成函数

2 快速数论变换（NTT）

3 多项式运算

4 多项式的其它应用

5 参考文献

# 定义与例子

对于一个数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ 它的指数生成函数为:

$$F(x) = \sum_n a_n \frac{x^n}{n!}$$

# 定义与例子

对于一个数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$，它的指数生成函数为：

$$F(x) = \sum_n a_n \frac{x^n}{n!}$$

- $\{1, 2, 3\}$ 的指数生成函数为：$1 + x + \frac{1}{2}x^2$
- $\{1, 1, 1, \ldots\}$ 的指数生成函数为：$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

## 封闭形式

考虑 $\{1, 1, 1, \dots\}$ 的指数生成函数：

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

# 封闭形式

求数列 $\{1, 0, 1, 0, \ldots\}$ 的指数生成函数，并化为封闭形式

# 封闭形式

求数列 $\{1,0,1,0,\ldots\}$ 的指数生成函数，并化为封闭形式

【解】

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)
\end{aligned}$$

# 例题选讲：森林计数

求 $n$ 个点带标号、深度不超过 $k$ 的森林一共有多少种。

1 生成函数

2 快速数论变换（NTT）

3 多项式运算

4 多项式的其它应用

5 参考文献

## 问题引入

给定多项式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$$

求 $h(x) = f(x)g(x)$ 的各项系数，对 $998244353$ 取模。

# 原根

**注意**：$998244353 = 119 \times 2^{23} + 1$

**我们说** $3$ **是** $998244353$ **的原根，因为** $3^1, 3^2, \ldots, 3^{998244352}$ **对** $998244353$ **取模的结果两两不同。下面为了方便我们记** $p = 998244353$

# 原根

**注意**：$998244353 = 119 \times 2^{23} + 1$

我们说 3 是 998244353 的原根，因为 $3^1, 3^2, ..., 3^{998244352}$ 对 998244353 取模的结果两两不同。下面为了方便我们记 $p = 998244353$

根据费马小定理，$3^{p-1} \equiv 1 \pmod p$，那么令 $\omega_n = 3^{119 \times 2^{24-l}}$（其中 $n = 2^l$），我们会发现 $\omega_n^n = 1$，所以 $\omega_n$ 可以作为 $n$ 次单位根！

# 原根

注意：$998244353 = 119 \times 2^{23} + 1$

我们说 3 是 998244353 的原根，因为 $3^1, 3^2, ..., 3^{998244352}$ 对 998244353 取模的结果两两不同。下面为了方便我们记 $p = 998244353$

根据费马小定理，$3^{p-1} \equiv 1 \pmod p$，那么令 $\omega_n = 3^{119 \times 2^{24-l}}$（其中 $n = 2^l$），我们会发现 $\omega_n^n = 1$，所以 $\omega_n$ 可以作为 $n$ 次单位根！

把 FFT 中的运算全部换成取模意义下的运算，再把 $n$ 次单位复根替换成这里的 $\omega_n$，就得到了 NTT，它的性质就是取模意义下的 FFT。

# 代码

```
void NTT(int *a,bool INTT)
{
    for(int i=0;i<len;i++) r[i]=(r[i/2]/2)|((i&1)<<(l-1));
    for(int i=0;i<len;i++) if(i<r[i]) swap(a[i],a[r[i]]);
    for(int i=1;i<len;i<<=1)
    {
        int p=(i<<1);
        int wn=Pow(3,(Mod-1)/p);
        if(INTT) wn=Pow(wn,Mod-2);
        for(int j=0;j<len;j+=p)
        {
            int w=1;
            for(int k=0;k<i;k++)
            {
                int x=a[j+k],y=1ll*w*a[i+j+k]%Mod;
                a[j+k]=(x+y)%Mod;
                a[i+j+k]=(x-y+Mod)%Mod;
                w=1ll*w*wn%Mod;
            }
        }
    }
    //为了方便，我们通常把INTT的最后一步除以n也写进NTT函数里
    if(INTT) for(int i=0;i<len;i++) a[i]=1ll*a[i]*inv%Mod;
}
```

1. 生成函数
2. 快速数论变换（NTT）
3. **多项式运算**
4. 多项式的其它应用
5. 参考文献

# 多项式牛顿迭代

给定多项式 $g(x)$，求一个多项式 $f(x)$，满足

$$g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n} \tag{1}$$

注意：$\pmod{x^n}$ 的意思是只保留最低的 $n$ 项。

# 多项式牛顿迭代

给定多项式 $g(x)$，求一个多项式 $f(x)$，满足

$$g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n} \tag{1}$$

注意：$(\mathrm{mod}\ x^n)$ 的意思是只保留最低的 $n$ 项。

考虑倍增。设 $f_0(x)$ 是方程 (1) 在 $(\mathrm{mod}\ x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ 意义下的解，那么 $f(x) - f_0(x)$ 的最低次项就是 $x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 项。考虑泰勒展开：

$$\begin{aligned} g(f(x)) &\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(f_0(x))}{i!}(f(x) - f_0(x))^i \pmod{x^n} \\ &\equiv g(f_0(x)) + g'(f_0(x))(f(x) - f_0(x)) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

# 多项式牛顿迭代

给定多项式 $g(x)$，求一个多项式 $f(x)$，满足

$$g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n} \tag{1}$$

注意：$(\bmod\ x^n)$ 的意思是只保留最低的 $n$ 项。

考虑倍增。设 $f_0(x)$ 是方程 (1) 在 $(\bmod\ x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ 意义下的解，那么 $f(x) - f_0(x)$ 的最低次项就是 $x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 项。考虑泰勒展开：

$$\begin{aligned} g(f(x)) &\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(f_0(x))}{i!}(f(x) - f_0(x))^i \pmod{x^n} \\ &\equiv g(f_0(x)) + g'(f_0(x))(f(x) - f_0(x)) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

由方程 (1) 得：

$$f(x) \equiv f_0(x) - \frac{g(f_0(x))}{g'(f_0(x))} \pmod{x^n}$$

# 多项式求逆

给定一个多项式 $f(x)$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$f(x)g(x) \equiv 1 \pmod{x^n} \tag{2}$$

# 多项式求逆

给定一个多项式 $f(x)$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$f(x)g(x) \equiv 1 \pmod{x^n} \tag{2}$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = \frac{1}{g(x)} - f(x)$$

# 多项式求逆

给定一个多项式 $f(x)$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$f(x)g(x) \equiv 1 \pmod{x^n} \tag{2}$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = \frac{1}{g(x)} - f(x)$$

设 $g_0(x)$ 是方程 (2) 在 $\pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$ 意义下的解，由牛顿迭代有：

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv g_0(x) - \frac{h(g_0(x))}{h'(g_0(x))} \pmod{x^n} \\ &\equiv g_0(x) + \frac{\frac{1}{g_0(x)} - f(x)}{\frac{1}{g_0^2(x)}} \pmod{x^n} \\ &\equiv 2g_0(x) - g_0^2(x)f(x) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

FFT 优化即可，复杂度 $T(n) = T(n/2) + O(n\log n) = O(n\log n)$

# 多项式开方

给定一个多项式 $f(x)$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g^2(x) \equiv f(x) \pmod{x^n} \tag{3}$$

# 多项式开方

给定一个多项式 $f(x)$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g^2(x) \equiv f(x) \pmod{x^n} \tag{3}$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = g^2(x) - f(x)$$

# 多项式开方

给定一个多项式 $f(x)$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g^2(x) \equiv f(x) \pmod{x^n} \tag{3}$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = g^2(x) - f(x)$$

设 $g_0(x)$ 是方程 (3) 在 $(\bmod\ x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ 意义下的解，由牛顿迭代有：

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv g_0(x) - \frac{h(g_0(x))}{h'(g_0(x))} \pmod{x^n} \\ &\equiv g_0(x) - \frac{g_0^2(x) - f(x)}{2g_0(x)} \pmod{x^n} \\ &\equiv \frac{1}{2} g_0(x) + \frac{1}{2} g_0^{-1}(x) f(x) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

需要做一次多项式求逆和一次多项式乘法，复杂度 $T(n) = T(n/2) + O(n \log n) = O(n \log n)$

## 多项式除法（取模）

给定一个 $n$ 次多项式 $f(x)$ 和一个 $m(\leq n)$ 次多项式 $g(x)$，求多项式 $Q(x), R(x)$，使得

$$f(x) \equiv Q(x)g(x) + R(x) \pmod{x^n} \tag{4}$$

且 $\deg R < m$（类似整数的带余除法）

# 多项式除法（取模）

给定一个 $n$ 次多项式 $f(x)$ 和一个 $m(\leq n)$ 次多项式 $g(x)$，求多项式 $Q(x), R(x)$，使得

$$f(x) \equiv Q(x)g(x) + R(x) \pmod{x^n} \tag{4}$$

且 $\deg R < m$（类似整数的带余除法）

考虑构造变换：

$$f^R(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

# 多项式除法（取模）

给定一个 $n$ 次多项式 $f(x)$ 和一个 $m(\le n)$ 次多项式 $g(x)$，求多项式 $Q(x), R(x)$，使得

$$f(x) \equiv Q(x)g(x) + R(x) \pmod{x^n} \tag{4}$$

且 $\deg R < m$（类似整数的带余除法）

考虑构造变换：

$$f^R(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

将方程 (4) 中的 $x$ 替换成 $x^{-1}$，并且在两边乘上 $x^n$，得到：

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n-m} Q\left(\frac{1}{x}\right) x^m g\left(\frac{1}{x}\right) + x^{n-m+1} x^{m-1} R\left(\frac{1}{x}\right)$$

# 多项式除法（取模）

给定一个 $n$ 次多项式 $f(x)$ 和一个 $m(\leq n)$ 次多项式 $g(x)$，求多项式 $Q(x), R(x)$，使得

$$f(x) \equiv Q(x)g(x) + R(x) \pmod{x^n} \tag{4}$$

且 $\deg R < m$（类似整数的带余除法）

考虑构造变换：

$$f^R(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

将方程 (4) 中的 $x$ 替换成 $x^{-1}$，并且在两边乘上 $x^n$，得到：

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n-m} Q\left(\frac{1}{x}\right) x^m g\left(\frac{1}{x}\right) + x^{n-m+1} x^{m-1} R\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\implies f^R(x) = Q^R(x) g^R(x) + x^{n-m+1} R^R(x)$$

# 多项式除法（取模）

$$f^R(x) = Q^R(x)g^R(x) + x^{n-m+1}R^R(x)$$

如果两边模掉 $x^{n-m-1}$，就可以消除 $R^R(x)$ 项的影响，而 $Q^R(x)$ 的次数为 $(n-m) < (n-m+1)$，所以 $Q^R(x)$ 不受影响

# 多项式除法（取模）

$$f^R(x) = Q^R(x)g^R(x) + x^{n-m+1}R^R(x)$$

如果两边模掉 $x^{n-m-1}$，就可以消除 $R^R(x)$ 项的影响，而 $Q^R(x)$ 的次数为 $(n-m) < (n-m+1)$，所以 $Q^R(x)$ 不受影响，可见

$$f^R(x) \equiv Q^R(x)g^R(x) \pmod{x^{n-m+1}}$$

多项式求逆得到 $Q^R(x)$，反转得到 $Q(x)$，回代方程 (4) 求出 $R(x)$

# 多项式 ln

给定一个多项式 $f(x)$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g(x) \equiv \ln f(x) \pmod{x^n} \tag{5}$$

# 多项式 ln

给定一个多项式 $f(x)$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g(x) \equiv \ln f(x) \pmod{x^n} \tag{5}$$

求导得

$$g'(x) \equiv f'(x) f^{-1}(x) \pmod{x^n}$$

依次进行求导、多项式求逆、多项式乘法、积分即可，复杂度 $O(n \log n)$

# 多项式 exp

给定一个多项式 $f(x)$，保证 $[x^0]f(x)=0$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g(x) \equiv e^{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x)}{k!} \pmod{x^n} \tag{6}$$

# 多项式 exp

给定一个多项式 $f(x)$，保证 $[x^0]f(x)=0$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g(x)\equiv e^{f(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^k(x)}{k!}\pmod{x^n} \tag{6}$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x))=\ln g(x)-f(x)$$

# 多项式 exp

给定一个多项式 $f(x)$，保证 $[x^0]f(x)=0$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g(x) \equiv e^{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x)}{k!} \pmod{x^n} \tag{6}$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = \ln g(x) - f(x)$$

设 $g_0(x)$ 是方程 (3) 在 $(\bmod\ x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ 意义下的解，由牛顿迭代有：

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv g_0(x) - \frac{h(g_0(x))}{h'(g_0(x))} \pmod{x^n} \\ &\equiv g_0(x) - \frac{\ln g_0(x) - f(x)}{g_0^{-1}(x)} \pmod{x^n} \\ &\equiv g_0(x)\left(1 - \ln g_0(x) + f(x)\right) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

需要做一次多项式 ln 和一次多项式乘法，复杂度 $T(n) = T(n/2) + O(n\log n) = O(n\log n)$

# 多项式的幂

给定正整数 $k$ 和一个多项式 $f(x)$，保证 $[x^0]f(x)=1$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g(x) \equiv (f(x))^k \pmod{x^n} \tag{7}$$

# 多项式的幂

给定正整数 $k$ 和一个多项式 $f(x)$，保证 $[x^0]f(x)=1$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g(x)\equiv(f(x))^k \pmod{x^n} \tag{7}$$

注意到

$$g(x)=e^{k\ln f(x)}$$

# 例题选讲

求 $n$ 个点带标号的无向简单连通图个数，$n \leq 10^5$，对 $998244353$ 取模

# 例题选讲

**求 $n$ 个点带标号的无向简单连通图个数，$n \leq 10^5$，对 $998244353$ 取模**

**【题解】设 $f_n$ 为答案，$g_n$ 为 $n$ 个点带标号简单图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$**

# 例题选讲

求 $n$ 个点带标号的无向简单连通图个数，$n \le 10^5$，对 998244353 取模

【题解】设 $f_n$ 为答案，$g_n$ 为 $n$ 个点带标号简单图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$
枚举 1 号点所在的连通块大小，得到：

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} f_k g_{n-k}$$

# 例题选讲

求 $n$ 个点带标号的无向简单连通图个数，$n \le 10^5$，对 998244353 取模

【题解】设 $f_n$ 为答案，$g_n$ 为 $n$ 个点带标号简单图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$

枚举 1 号点所在的连通块大小，得到：

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} f_k g_{n-k}$$

展开组合数，得到

$$\frac{g_n}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{(k-1)!} \frac{g_{n-k}}{(n-k)!}$$

## 例题选讲

求 $n$ 个点带标号的无向简单连通图个数，$n \le 10^5$，对 998244353 取模

【题解】设 $f_n$ 为答案，$g_n$ 为 $n$ 个点带标号简单图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$
枚举 1 号点所在的连通块大小，得到：

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} f_k g_{n-k}$$

展开组合数，得到

$$\frac{g_n}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{(k-1)!} \frac{g_{n-k}}{(n-k)!}$$

设

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_n x^n}{(n-1)!}, \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_n x^n}{(k-1)!}, \quad H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_n x^n}{n!}$$

显然有 $G(x) = F(x)H(x)$，$G(x)$ 与 $H(x)$ 的各项系数直接求出，最后多项式求逆即可。

# 例题选讲：P5748 集合划分计数

一个 $n$ 个元素的集合，将其分为任意多个子集，求方案数。
$T$ 组数据，$T \leq 1000$，$n \leq 10^5$

# 例题选讲：P5748 集合划分计数

一个 $n$ 个元素的集合，将其分为任意多个子集，求方案数。
$T$ 组数据，$T \le 1000$，$n \le 10^5$

【题解】设 $B_n$ 表示 $n$ 个元素集合的划分方案数，考虑最后一个元素所在的集合，枚举该集合的大小、选取该集合中的元素，得到：

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

# 例题选讲：P5748 集合划分计数

一个 $n$ 个元素的集合，将其分为任意多个子集，求方案数。
$T$ 组数据，$T \leq 1000$，$n \leq 10^5$

【题解】设 $B_n$ 表示 $n$ 个元素集合的划分方案数，考虑最后一个元素所在的集合，枚举该集合的大小、选取该集合中的元素，得到：

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

设 $F(x)$ 是 $B_n$ 的指数型生成函数，即：

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

# 例题选讲：P5748 集合划分计数

乘上 $e^x$ 得到：

$$
\begin{aligned}
e^x F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{x^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} B_{n-m} \frac{x^n}{m!(n-m)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} B_{n-m} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} = F'(x)
\end{aligned}
$$

# 例题选讲：P5748 集合划分计数

乘上 $e^x$ 得到：

$$\begin{aligned} e^x F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{x^m}{m!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} B_{n-m} \frac{x^n}{m!(n-m)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} B_{n-m} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} = F'(x) \end{aligned}$$

由于 $F(0) = B_0 = 1$，可以得到 $F(x) = e^{e^x - 1}$，多项式 exp 求出 $F(x)$ 各项系数即可。

1. 生成函数
2. 快速数论变换（NTT）
3. 多项式运算
4. 多项式的其它应用
   - 多点求值与快速插值
   - 常系数齐次线性递推
5. 参考文献

1 生成函数

2 快速数论变换（NTT）

3 多项式运算

4 多项式的其它应用
  - 多点求值与快速插值
  - 常系数齐次线性递推

5 参考文献

1 生成函数

2 快速数论变换（NTT）

3 多项式运算

4 多项式的其它应用
  多点求值与快速插值
  常系数齐次线性递推

5 参考文献

1. 生成函数
2. 快速数论变换（NTT）
3. 多项式运算
4. 多项式的其它应用
5. 参考文献

[1] T. Sauer, *Numerical Analysis*.
USA: Addison-Wesley Publishing Company, 2nd ed., 2011.

[2] O. Wiki, "快速傅里叶变换 - OI Wiki."
(2023, May 18).

[3] pengyule, "FFT（1） - pengyule."
(2021, Dec 30).

*Thank You*