# 高级字符串算法：字符串的后缀结构

Ebola

Institute of Mathematics,
Zhejiang University.

July, 2023

# 模板题

给定一个只包含小写字母的字符串 $S$，求 $S$ 的所有出现次数不为 $1$ 的子串的出现次数乘上该子串长度的最大值。$|S| \leq 10^6$

# 什么是 SAM

后缀自动机（SAM）是一种特殊的有限状态自动机（DFA），它符合以下性质：

- 转移图是有向无环图，且每个转移接受且只接受一个字符
- 接受且只接受 $S$ 的所有后缀
- 在符合以上性质的基础上，节点数最少

如果只考虑前两条，其实只要把 $S$ 的所有后缀插入字典树即可，节点数有 $O(n^2)$ 个。

# 代码

```
void insert(int c)
{
    int p=lst,np=++tot;len[np]=len[p]+1;
    while(p&&!ch[p][c]) ch[p][c]=np,p=prt[p];
    if(!p) prt[np]=1;
    else
    {
        int q=ch[p][c];
        if(len[p]+1==len[q]) prt[np]=q;
        else
        {
            int nq=++tot;len[nq]=len[p]+1;
            memcpy(ch[nq],ch[q],sizeof(ch[nq]));
            prt[nq]=prt[q];prt[q]=prt[np]=nq;
            while(ch[p][c]==q) ch[p][c]=nq,p=prt[p];
        }
    }
    sz[np]=1;lst=np;
}
```

这是 SAM 的核心代码，很短。

## endpos 等价类

我们首先提出 endpos 等价类这个概念。$endpos(P)$ 表示模式串 $P$ 在 $S$ 中所有出现的结束位置的集合，那么 $endpos$ 相同的模式串就可以共用一个节点。例如串"aababc" 中，"b" 和"ab" 的 endpos 都是 $\{3,5\}$，说明他们总是一起出现，所以可以共用一个节点。我们把 $endpos$ 相同的模式串组成的集合称为一个 $endpos$ **等价类**。

# endpos 等价类

我们首先提出 endpos 等价类这个概念。$endpos(P)$ 表示模式串 $P$ 在 $S$ 中所有出现的结束位置的集合，那么 $endpos$ 相同的模式串就可以共用一个节点。例如串"aababc" 中，"b" 和"ab" 的 endpos 都是 $\{3,5\}$，说明他们总是一起出现，所以可以共用一个节点。我们把 $endpos$ 相同的模式串组成的集合称为一个 $endpos$ **等价类**。

显然，对于一个等价类内的两个模式串 $P_1$ 和 $P_2$，如果 $|P_1| < |P_2|$，那么 $P_1$ 一定是 $P_2$ 的后缀，因此，在一个等价类中，一定存在一个**最长**的字符串 $P$，等价类中的所有字符串都是 $P$ 的后缀。

# endpos 等价类

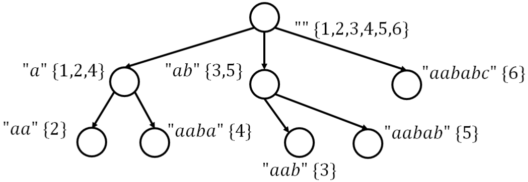
我们首先提出 endpos 等价类这个概念。$endpos(P)$ 表示模式串 $P$ 在 $S$ 中所有出现的结束位置的集合，那么 $endpos$ 相同的模式串就可以共用一个节点。例如串"aababc" 中，"b" 和"ab" 的 endpos 都是 $\{3,5\}$，说明他们总是一起出现，所以可以共用一个节点。我们把 $endpos$ 相同的模式串组成的集合称为一个 $endpos$ **等价类**。

显然，对于一个等价类内的两个模式串 $P_1$ 和 $P_2$，如果 $|P_1| < |P_2|$，那么 $P_1$ 一定是 $P_2$ 的后缀，因此，在一个等价类中，一定存在一个**最长**的字符串 $P$，等价类中的所有字符串都是 $P$ 的后缀。

根据位于 $P$ **前面的那一个字符**是什么，可以把原等价类划分为若干个等价类。例如在"aababc" 中，我们已经知道"ab" 出现了两次，但首次出现时前面的那一个字符是"a"，再次出现时前面那个字符是"b"，而"aab" 与"bab" 属于两个不同的等价类，因此我们可以把等价类 $\{3,5\}$ 划分成 $\{3\}$ 和 $\{5\}$

# endpos 等价类

我们可以认为，空串的 $endpos$ 等价类是 $\{1, ..., n\}$，而所有等价类都是由此一步一步划分来的，形成一个树的结构，总节点数不会超过 $2n-1$




这棵树就是 parent 树，他的节点和 SAM 的状态一一对应。注意，划分过程中可能会丢失元素，例如图中"a" 第一个出现的位置前面没有字符，所以划分后会丢失一个元素，这一点在做 dp 的时候很关键。

# 构造 SAM

采取动态构造的方法，一个一个地把字符加进去。考虑向一个已知的字符串的后面添加一个字符，它的 SAM 会如何变化。

# 构造 SAM

采取动态构造的方法，一个一个地把字符加进去。考虑向一个已知的字符串的后面添加一个字符，它的 SAM 会如何变化。

设 go[st][ch] 表示状态 st 接受字符 ch 后转移到的状态，fa[st] 为该状态在 parent 树上的父节点，len[st] 为该状态对应的 $endpos$ 等价类中最长串的长度，last 为加入新字符前整个字符串所在的等价类对应的状态。

# 构造 SAM

采取动态构造的方法，一个一个地把字符加进去。考虑向一个已知的字符串的后面添加一个字符，它的 SAM 会如何变化。

设 go[st][ch] 表示状态 st 接受字符 ch 后转移到的状态，fa[st] 为该状态在 parent 树上的父节点，len[st] 为该状态对应的 $endpos$ 等价类中最长串的长度，last 为加入新字符前整个字符串所在的等价类对应的状态。

一个基本的观察是：从 last 开始在 parent 树上往上爬，一定能遍历加入新字符前所有后缀的对应节点。加入一个新的字符，其实就是给之前部分后缀新增了转移。

# 构造 SAM

采取动态构造的方法，一个一个地把字符加进去。考虑向一个已知的字符串的后面添加一个字符，它的 SAM 会如何变化。

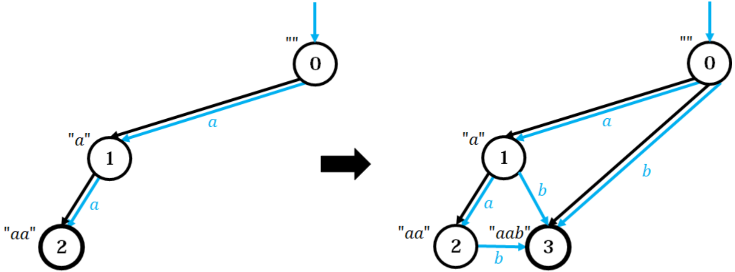
设 go[st][ch] 表示状态 st 接受字符 ch 后转移到的状态，fa[st] 为该状态在 parent 树上的父节点，len[st] 为该状态对应的 $endpos$ 等价类中最长串的长度，last 为加入新字符前整个字符串所在的等价类对应的状态。

一个基本的观察是：从 last 开始在 parent 树上往上爬，一定能遍历加入新字符前所有后缀的对应节点。加入一个新的字符，其实就是给之前部分后缀新增了转移。

所以当新增字符 ch 时，我们创建一个新状态 cur（其中 len[cur]=len[last]+1），然后从 last 开始往上爬，对于遇到的每个状态 p，如果 p 还不能通过 ch 转移，那我们就新增一个转移 go[p][ch]=cur，然后继续往上爬，直到某个 p 可以通过 ch 转移到状态 q ，或者处理完根节点为止。这分为三种情况

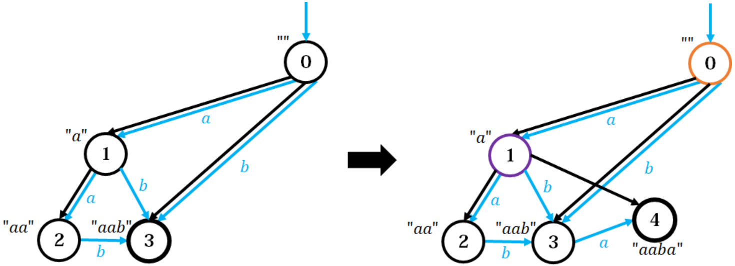
# 第一种情况

**没有找到要找的 q**。这只可能出现在加入了从未加入过的字符的时候，此时直接令 fa[cur] 为根节点然后退出即可。（当然退出后还需要把 last 设为 cur，这对三种情况都是一样的）



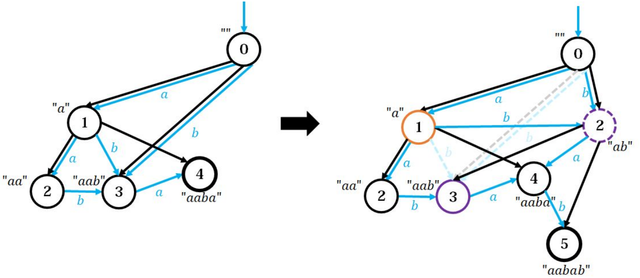
# 第二种情况

找到了 $q$，且 len[p]+1==len[q]。这种情况下我们直接令 fa[cur]=q 然后退出即可。这是因为 $p$ 所对应集合中每个字符串在后面加上一个 $ch$ 都能构成一个 $q$ 对应集合的字符串，而 $p$ 对应集合都是原字符串的后缀，所以 $q$ 对应集合都是新字符串的后缀，应作为 $cur$ 的父亲节点。



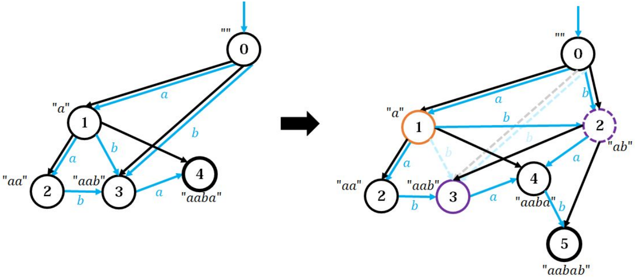
# 第三种情况

找到了 $q$，但 len[p]+1≠len[q]。我们新建一个 $r$ 节点，它拥有 $q$ 节点的所有出边，且 fa 也与 $q$ 节点相同，但是 len[r]=len[p]+1。我们从 $p$ 节点继续往上爬，把所有接受 $ch$ 而到达 $q$ 的转移的目标改为 $r$（注意只要有一个节点不能接受 $ch$ 那它的祖先都不能接受 $ch$，要及时退出循环）。最后令 fa[cur]=fa[q]=r。



# 第三种情况

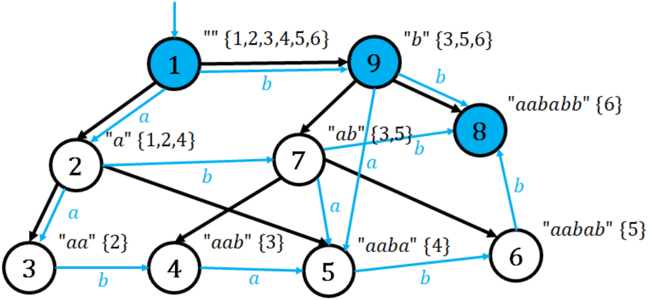
找到了 $q$，但 len[p]+1≠len[q]。我们新建一个 $r$ 节点，它拥有 $q$ 节点的所有出边，且 fa 也与 $q$ 节点相同，但是 len[r]=len[p]+1。我们从 $p$ 节点继续往上爬，把所有接受 $ch$ 而到达 $q$ 的转移的目标改为 $r$（注意只要有一个节点不能接受 $ch$ 那它的祖先都不能接受 $ch$，要及时退出循环）。最后令 fa[cur]=fa[q]=r。




这里和第二种情况有本质区别，因为 $q$ 不仅仅包含新字符串的后缀，比如下图中 3 号点除了"ab" 还包含了"aab"，我们不得不将它拆分开。

# 一个 SAM 的例子

下图是字符串"aababb" 构成的 SAM




复杂度：总状态数不超过 $2n-1$，总转移数不超过 $3n-4$，构建 SAM 的复杂度为 $O(mn)$，其中 $m$ 为字符集大小。证明见 OIwiki

## 例题选讲

求模式串 $P$ 是不是字符串 $S$ 的子串。

# 例题选讲

求模式串 $P$ 是不是字符串 $S$ 的子串。
【解】建 S 的 SAM，把 P 放进去跑即可。

# 例题选讲

求模式串 $P$ 在字符串 $S$ 中的出现次数。

# 例题选讲

求模式串 $P$ 在字符串 $S$ 中的出现次数。

【解】建 S 的 SAM，其实就是求 $p$ 对应节点的 $endpos$ 集合的大小，在 parent 树上 dp。

# 例题选讲

求模式串 $P$ 在字符串 $S$ 中的出现次数。

【解】建 S 的 SAM，其实就是求 $p$ 对应节点的 $endpos$ 集合的大小，在 parent 树上 dp。

对于划分后丢失元素的节点（他所代表的串是 $S$ 的前缀），dp 值为子节点 dp 值之和再加一，其余点则无需加一。其实只要在建 SAM 的时候让 dp[cur]=1 即可。

# 例题选讲

求模式串 $P$ 在字符串 $S$ 中的出现次数。

【解】建 S 的 SAM，其实就是求 $p$ 对应节点的 $endpos$ 集合的大小，在 parent 树上 dp。

对于划分后丢失元素的节点（他所代表的串是 $S$ 的前缀），dp 值为子节点 dp 值之和再加一，其余点则无需加一。其实只要在建 SAM 的时候让 dp[cur]=1 即可。

小技巧：在 parent 树上 dp 的时候不需要 dfs，只要把节点按 len 做一个桶排，然后从大到小枚举，就等价于在 parent 树上自底向上 dp。

# 例题选讲

求字符串 $S$ 本质不同的子串个数。

# 例题选讲

求字符串 $S$ 本质不同的子串个数。

【解】建 S 的 SAM，从 parent 树的角度考虑，每个节点代表了 len[p]-len[fa[p]] 个子串（因为长度不同，自然互不相同）。另外由 parent 树的划分意义，不同节点代表的子串一定都不同，且任何一个子串必然被 parent 树上某一点代表。累加该值即可。

# 例题选讲：SPOJ 1811

求字符串 $S$ 与 $T$ 的最长公共子串。

## 例题选讲：SPOJ 1811

求字符串 $S$ 与 $T$ 的最长公共子串。

【解】建 S 的 SAM，对 $T$ 的每个前缀，求他在 $S$ 中出现过的最长后缀。其实就是把 T 放进去跑，一直到跑不动了就跳到 parent 树上的父节点继续跑，跳 parent 的时候要维护当前最长后缀的长度。

# 例题选讲：SPOJ 1811

求字符串 $S$ 与 $T$ 的最长公共子串。

【解】建 S 的 SAM，对 $T$ 的每个前缀，求他在 $S$ 中出现过的最长后缀。其实就是把 T 放进去跑，一直到跑不动了就跳到 parent 树上的父节点继续跑，跳 parent 的时候要维护当前最长后缀的长度。

```
int lcs(char *s)
{
    int m=strlen(s), l=0, p=1, ans=0;
    for(int i=0;i<m;i++)
    {
        int c=s[i]-'a';
        while(p!=1 && go[p][c]==0)
            p=fa[p], l=len[p]; //维护当前最长后缀长度
        if(go[p][c]) p=go[p][c], l++;
        ans=max(ans,l);
    }
    return ans;
}
```

## 例题选讲：(UVA 719) (P1368) 最小表示法

有 N 组数据，每组给你一串字符串，但是这串字符串是环形的，让你找个位置切开，使得它的字典序最小，输出切开的位置（如果答案不唯一，输出最小位置）

## 例题选讲：(UVA 719) (P1368) 最小表示法

有 N 组数据，每组给你一串字符串，但是这串字符串是环形的，让你找个位置切开，使得它的字典序最小，输出切开的位置（如果答案不唯一，输出最小位置）

【解】遇到循环串的问题一般都先把串复制一遍得到 SS，建 SS 的 SAM。

# 例题选讲：(UVA 719) (P1368) 最小表示法

有 N 组数据，每组给你一串字符串，但是这串字符串是环形的，让你找个位置切开，使得它的字典序最小，输出切开的位置（如果答案不唯一，输出最小位置）

【解】遇到循环串的问题一般都先把串复制一遍得到 SS，建 SS 的 SAM。

SS 的 SAM 能且仅能接受 SS 的所有子串，所以从根节点出发跑 $|S|$ 步得到的就是 $S$ 的某个循环排列，一直沿最小字典序的转移边跑即可。

## 例题选讲：UVA 719

给出一个字符串 $S$，长度不超过 $90000$。询问 $q$ 次，每次给一个 $k$，求所有本质不同的子串中，字典序第 $k$ 小的。

# 例题选讲：UVA 719

给出一个字符串 $S$，长度不超过 $90000$。询问 $q$ 次，每次给一个 $k$，求所有本质不同的子串中，字典序第 $k$ 小的。

【解】先建 $S$ 的 SAM，求出 $size[p]$ 表示从 $p$ 出发能跑出几个子串，逆拓扑序 dp 即可。

## 例题选讲：UVA 719

给出一个字符串 $S$，长度不超过 $90000$。询问 $q$ 次，每次给一个 $k$，求所有本质不同的子串中，字典序第 $k$ 小的。

【解】先建 $S$ 的 SAM，求出 $size[p]$ 表示从 $p$ 出发能跑出几个子串，逆拓扑序 dp 即可。

对于一个询问，从根节点出发，每次从小到大枚举字母 $ch$，如果 $size[go[cur][ch]] \geq k$，就往 $ch$ 走；否则 $k = k - size[go[cur][ch]]$，继续枚举 $ch$

# 例题选讲：LNOI2022 串

多组数据，每次给定一个英文小写字母构成的字符串 $S$，你需要找到一个尽可能长的字符串序列 $(T_0, T_1, \ldots, T_l)$，满足：

- $T_0$ 是 $S$ 的子串；
- $\forall 1 \le i \le l$，$|T_i| - |T_{i-1}| = 1$；
- $\forall 1 \le i \le l$，存在 $S$ 的一个长度为 $|T_i| + 1$ 的子串 $S'_i$，使得 $S'_i$ 的长度为 $|T_{i-1}|$ 的前缀为 $T_{i-1}$，长度为 $|T_i|$ 的后缀为 $T_i$。

输出这样的字符串序列的长度的最大值（即 $l$ 的最大值）。

设 $\sum |S|$ 表示测试点中所有测试数据的字符串长度和。对于 $100\%$ 的测试数据，$1 \le |S| \le 5 \times 10^5$，$1 \le \sum |S| \le 1.5 \times 10^6$。

## 例题选讲：LNOI2022 串

【题解】观察条件：

- $T_0$ 是 $S$ 的子串；
- $\forall 1 \le i \le l$，$|T_i| - |T_{i-1}| = 1$；
- $\forall 1 \le i \le l$，存在 $S$ 的一个长度为 $|T_i| + 1$ 的子串 $S_i'$，使得 $S_i'$ 的长度为 $|T_{i-1}|$ 的前缀为 $T_{i-1}$，长度为 $|T_i|$ 的后缀为 $T_i$。

用 $[i, j]$ 表示子串 $S[i...j]$，我们构造一个序列 $[i, j] \to [i-1, j-2] \to [i-2, j-4]...$，一直这样下去直到长度为 $0$ 或到头了，得到一列子串，把它倒过来，就符合上面的条件。所以答案显然至少为 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。

## 例题选讲：LNOI2022 串

【题解】观察条件：

- $T_0$ 是 $S$ 的子串；
- $\forall 1 \le i \le l$，$|T_i| - |T_{i-1}| = 1$；
- $\forall 1 \le i \le l$，存在 $S$ 的一个长度为 $|T_i|+1$ 的子串 $S_i'$，使得 $S_i'$ 的长度为 $|T_{i-1}|$ 的前缀为 $T_{i-1}$，长度为 $|T_i|$ 的后缀为 $T_i$。

用 $[i,j]$ 表示子串 $S[i...j]$，我们构造一个序列 $[i,j] \to [i-1,j-2] \to [i-2,j-4]...$，一直这样下去直到长度为 0 或到头了，得到一列子串，把它倒过来，就符合上面的条件。所以答案显然至少为 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。

现在考虑正向过程。我们从 $T_0 = \varnothing$ 开始，每次左端点往右移一个，同时长度加一。如果想要答案更大，一定要有一个左端点回跳的过程。如果现在位于 $[l_2, r_2]$，前面恰好有一个 $[l_1, r_1]$ 和 $[l_2, r_2]$ 是一样的，就可以跳回前面。

# 例题选讲：LNOI2022 串

枚举最后一次回跳。那么我们现在的过程就是，挑选某一个出现至少两次的子串，设位置分别为 $[l_1, r_1]$ 和 $[l_2, r_2]$，从空集开始构造到 $[l_2, r_2]$，然后回跳到 $[l_1, r_1]$，接下来一直向右构造到底。答案就是

$$r_1 - l_1 + 1 + \left\lfloor \frac{n - r_1}{2} \right\rfloor$$

# 例题选讲：LNOI2022 串

枚举最后一次回跳。那么我们现在的过程就是，挑选某一个出现至少两次的子串，设位置分别为 $[l_1, r_1]$ 和 $[l_2, r_2]$，从空集开始构造到 $[l_2, r_2]$，然后回跳到 $[l_1, r_1]$，接下来一直向右构造到底。答案就是

$$r_1 - l_1 + 1 + \left\lfloor \frac{n - r_1}{2} \right\rfloor$$

还有一个问题：怎么确保能从空串一直构造到 $[l_2, r_2]$？

## 例题选讲：LNOI2022 串

枚举最后一次回跳。那么我们现在的过程就是，挑选某一个出现至少两次的子串，设位置分别为 $[l_1, r_1]$ 和 $[l_2, r_2]$，从空集开始构造到 $[l_2, r_2]$，然后回跳到 $[l_1, r_1]$，接下来一直向右构造到底。答案就是

$$r_1 - l_1 + 1 + \left\lfloor \frac{n - r_1}{2} \right\rfloor$$

还有一个问题：怎么确保能从空串一直构造到 $[l_2, r_2]$？

可以从 $[l_2, r_2]$ 开始，向左反向构造，到了 $[l_1, r_1]$ 内就跳回到 $[l_2, r_2]$ 中，再继续向左反向构造。

## 例题选讲：LNOI2022 串

枚举最后一次回跳。那么我们现在的过程就是，挑选某一个出现至少两次的子串，设位置分别为 $[l_1, r_1]$ 和 $[l_2, r_2]$，从空集开始构造到 $[l_2, r_2]$，然后回跳到 $[l_1, r_1]$，接下来一直向右构造到底。答案就是

$$r_1 - l_1 + 1 + \left\lfloor \frac{n - r_1}{2} \right\rfloor$$

还有一个问题：怎么确保能从空串一直构造到 $[l_2, r_2]$？

可以从 $[l_2, r_2]$ 开始，向左反向构造，到了 $[l_1, r_1]$ 内就跳回到 $[l_2, r_2]$ 中，再继续向左反向构造。

需要 SAM。对于一个节点（一个 $endpos$ 等价类），你需要知道他表示的最长串出现了多少次（这需要自底向上 dp 累加）、第一个 $endpos$（这需要自底向上 dp 取 min）、这个等价类中最长的串长（也就是 len），然后按上式算答案取最大值即可。

1. 后缀自动机
2. 后缀数组
3. 参考文献

1. 后缀自动机
2. 后缀数组
3. **参考文献**

[1] O. Wiki, “**后缀自动机**.”

[2] Pecco, “**算法学习笔记** (85): **后缀自动机**.”

[3] cyendra, “**后缀自动机**（SAM）.”

*Thank You*