OI 中的数值分析

Ebola

Institute of Mathematics,
Zhejiang University.

July, 2023

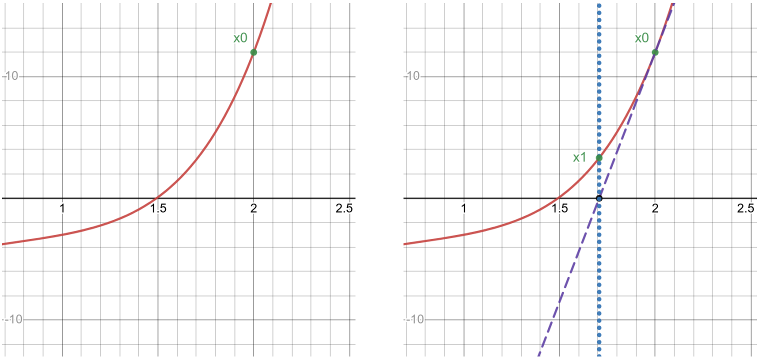
问题引入

给定一个连续可微的函数 $f(x)$，例如

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$

如何求方程 $f(x) = 0$ 的解？
提示：$f(0) = -6$, $f(2) = 12$

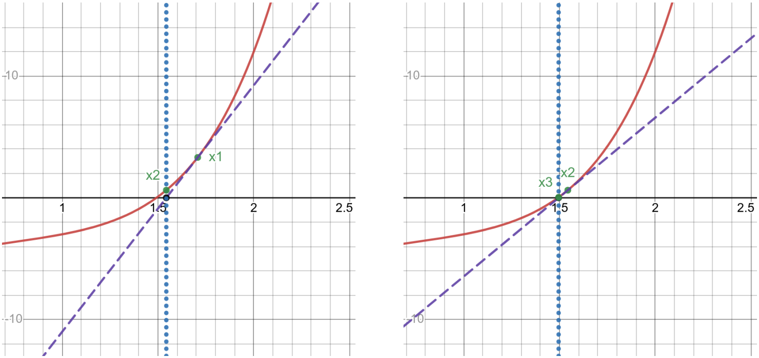
牛顿迭代法



$$x_0 = 2$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.7073$$

牛顿迭代法



$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.5433$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.4953$$

效率比较

$f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ 的零点为 $x^* = 1.491797988139901$，用不同的方法求解。

```
1 0.49179798814
1.5 0.0082020118601
1.25 0.24179798814
1.375 0.11679798814
1.4375 0.0542979881399
1.46875 0.0230479881399
1.484375 0.0074229881399
1.4921875 0.000389511860099
1.48828125 0.0035167381399
1.490234375 0.0015636131399
1.4912109375 0.000587050639901
1.49169921875 9.87693899011e-05
1.49194335938 0.000145371235099
1.49182128906 2.33009225989e-05
1.49176025391 3.77342336511e-05
1.49179077148 7.21665552605e-06
1.49180603027 8.04213353645e-06
1.49179840088 4.12739005196e-07
1.49179458618 3.40195826043e-06
1.49179649353 1.49460962762e-06
```

图 1: 二分法

```
1.70731707317 0.215519085031
1.54333037221 0.0515323840685
1.49532631616 0.00352832802023
1.4918154585 1.74703575533e-05
1.49179798857 4.30043112232e-10
1.49179798814 2.22044604925e-16
1.49179798814 2.22044604925e-16
```

图 2: 牛顿迭代法

线性方程组

我们现在有一个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

我们可以用二维数组来存这个方程组:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & b_3 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_4 \end{bmatrix}$$

例子

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

第一行乘 $\frac{1}{3}$:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{1}{3} \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

第二行减两倍的第一行、第三行减第一行:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{1}{3} \\ -\frac{13}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 = \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3 = \frac{5}{3} \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

例子

第二行乘 $-\frac{3}{13}$:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{1}{3} \\ x_2 - \frac{4}{13}x_3 = -\frac{4}{13} \\ \frac{1}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3 = \frac{5}{3} \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{13} & -\frac{4}{13} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

第三行减 $\frac{1}{3}$ 倍的第二行:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{1}{3} \\ x_2 - \frac{4}{13}x_3 = -\frac{4}{13} \\ -\frac{16}{13}x_3 = \frac{23}{13} \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{13} & -\frac{4}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{13} & \frac{23}{13} \end{bmatrix}$$

第三行乘 $-\frac{13}{16}$:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{1}{3} \\ x_2 - \frac{4}{13}x_3 = -\frac{4}{13} \\ x_3 = -\frac{23}{16} \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{13} & -\frac{4}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{23}{16} \end{bmatrix}$$

代码

```
for(int i=1;i<=n;i++)
{
    int pos=i;
    while(G[pos][i]==0&&pos<n) pos++;
    if(fabs(G[pos][i])<1e-12) return false;
    if(pos!=i)
        for(int j=1;j<=n+1;j++) swap(G[i][j],G[pos][j]);
    for(int j=i+1;j<=n;j++)
    {
        double t=G[j][i]/G[i][i];
        if(fabs(G[j][i])<1e-12) continue;
        for(int k=i;k<=n+1;k++)
            G[j][k]-=G[i][k]*t;
    }
}
for(int i=n;i>=1;i--)
{
    for(int j=i+1;j<=n;j++)
        G[i][n+1]-=G[i][j]*ans[j];
    ans[i]=G[i][n+1]/G[i][i];
}
for(int i=1;i<=n;i++) printf("%.2lf\n",ans[i]);
```

例题选讲：[CF24D] Broken Robot

n 行 m 列的矩阵，现在在 (x, y)，每次等概率向左，右，下走或原地不动，但不能走出去，问走到最后一行期望的步数。
注意，$(1,1)$ 是木板的左上角，(n, m) 是木板的右下角。
$1 \le n, m \le 10^3$，$1 \le x \le n$，$1 \le y \le m$。

例题选讲：[CF24D] Broken Robot

n 行 m 列的矩阵，现在在 (x, y)，每次等概率向左，右，下走或原地不动，但不能走出去，问走到最后一行期望的步数。
注意，$(1, 1)$ 是木板的左上角，(n, m) 是木板的右下角。
$1 \leq n, m \leq 10^3$，$1 \leq x \leq n$，$1 \leq y \leq m$。

【题解】设 $f_{i,j}$ 表示从 (i, j) 出发，走到最后一行的期望步数

例题选讲：[CF24D] Broken Robot

n 行 m 列的矩阵，现在在 (x,y)，每次等概率向左，右，下走或原地不动，但不能走出去，问走到最后一行期望的步数。
注意，$(1,1)$ 是木板的左上角，(n,m) 是木板的右下角。
$1 \le n,m \le 10^3$，$1 \le x \le n$，$1 \le y \le m$。

【题解】设 $f_{i,j}$ 表示从 (i,j) 出发，走到最后一行的期望步数

设 $j \neq 1$ 且 $j \neq m$，那么

$$f_{i,j} = \frac{1}{4}f_{i,j} + \frac{1}{4}f_{i,j-1} + \frac{1}{4}f_{i,j+1} + \frac{1}{4}f_{i+1,j} + 1$$

此外

$$f_{i,1} = \frac{1}{3}f_{i,1} + \frac{1}{3}f_{i,2} + \frac{1}{3}f_{i+1,1} + 1$$
$$f_{i,m} = \frac{1}{3}f_{i,m} + \frac{1}{3}f_{i,m-1} + \frac{1}{3}f_{i+1,m} + 1$$

例题选讲：[CF24D] Broken Robot

n 行 m 列的矩阵，现在在 (x, y)，每次等概率向左，右，下走或原地不动，但不能走出去，问走到最后一行期望的步数。
注意，$(1, 1)$ 是木板的左上角，(n, m) 是木板的右下角。
$1 \le n, m \le 10^3$，$1 \le x \le n$，$1 \le y \le m$。

【题解】设 $f_{i,j}$ 表示从 (i, j) 出发，走到最后一行的期望步数

设 $j \neq 1$ 且 $j \neq m$，那么

$$f_{i,j} = \frac{1}{4} f_{i,j} + \frac{1}{4} f_{i,j-1} + \frac{1}{4} f_{i,j+1} + \frac{1}{4} f_{i+1,j} + 1$$

此外

$$f_{i,1} = \frac{1}{3} f_{i,1} + \frac{1}{3} f_{i,2} + \frac{1}{3} f_{i+1,1} + 1$$
$$f_{i,m} = \frac{1}{3} f_{i,m} + \frac{1}{3} f_{i,m-1} + \frac{1}{3} f_{i+1,m} + 1$$

可以从下往上倒推，每一行的 DP 式子都是一个 m 元方程组，高斯消元求解即可。

例题选讲：[HNOI2013] 游走

给定一个 n 个点 m 条边的无向连通图，顶点从 1 编号到 n，边从 1 编号到 m。
小 Z 在该图上进行随机游走，初始时小 Z 在 1 号顶点，每一步小 Z 以相等的概率随机选择当前顶点的某条边，沿着这条边走到下一个顶点，获得等于这条边的编号的分数。当小 Z 到达 n 号顶点时游走结束，总分为所有获得的分数之和。现在，请你对这 m 条边进行编号，使得小 Z 获得的总分的期望值最小。

例题选讲：[HNOI2013] 游走

【题解】记 d_i 表示点 i 的度数，若点 i 经过次数的期望是 f_i，那么对于一条连接 (i,j) 的边 e，经过 e 的次数期望为：

$$g_e = \frac{g_i}{d_i} + \frac{g_j}{d_j}$$

现在来计算 f_i

例题选讲：[HNOI2013] 游走

【题解】记 d_i 表示点 i 的度数，若点 i 经过次数的期望是 f_i，那么对于一条连接 (i,j) 的边 e，经过 e 的次数期望为：

$$g_e = \frac{g_i}{d_i} + \frac{g_j}{d_j}$$

现在来计算 f_i ，不难列出转移：

$$f_i = \sum_{\text{边}(i,j), j \neq n} \frac{f_j}{d_j}, \qquad i \neq 1$$

$$f_1 = 1 + \sum_{\text{边}(1,j), j \neq n} \frac{f_j}{d_j}$$

这是一个线性方程组，高斯消元求解即可，复杂度 $O(n^3)$.

例题选讲：[HDU4870] Rating

有两个账号，每次选取一个分数最低的账号进行游戏（如果两个账号分数一样，就用第一个帐号），有 p 的概率得 1 分,$1-p$ 的概率倒扣 2 分，最低 0 分，求有 1 个号到达 20 所需的游戏次数的期望。

例题选讲：[HDU4870] Rating

有两个账号，每次选取一个分数最低的账号进行游戏（如果两个账号分数一样，就用第一个帐号），有 p 的概率得 1 分,$1-p$ 的概率倒扣 2 分，最低 0 分，求有 1 个号到达 20 所需的游戏次数的期望。

【题解】设 $E_{i,j}$ 表示当前第一个帐号得分为 i，第二个帐号得分为 j，距离游戏结束期望还要多少步。

例题选讲：[HDU4870] Rating

有两个账号，每次选取一个分数最低的账号进行游戏（如果两个账号分数一样，就用第一个帐号），有 p 的概率得 1 分,$1-p$ 的概率倒扣 2 分，最低 0 分，求有 1 个号到达 20 所需的游戏次数的期望。

【题解】设 $E_{i,j}$ 表示当前第一个帐号得分为 i，第二个帐号得分为 j，距离游戏结束期望还要多少步。
如果 $i \le j$：

$$E_{i,j} = pE_{i+1,j} + (1-p)E_{\min(i-2,0),j} + 1$$

如果 $i > j$：

$$E_{i,j} = pE_{i,j+1} + (1-p)E_{i,\min(j-2,0)} + 1$$

例题选讲：[HDU4870] Rating

有两个账号，每次选取一个分数最低的账号进行游戏（如果两个账号分数一样，就用第一个帐号），有 p 的概率得 1 分,$1-p$ 的概率倒扣 2 分，最低 0 分，求有 1 个号到达 20 所需的游戏次数的期望。

【题解】设 $E_{i,j}$ 表示当前第一个帐号得分为 i，第二个帐号得分为 j，距离游戏结束期望还要多少步。
如果 $i \le j$:

$$E_{i,j} = pE_{i+1,j} + (1-p)E_{\min(i-2,0),j} + 1$$

如果 $i > j$:

$$E_{i,j} = pE_{i,j+1} + (1-p)E_{i,\min(j-2,0)} + 1$$

列出方程，高斯消元求解即可。

问题引入

给定一个函数 $f(x)$ 和区间 $[a,b]$，求

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

的近似值。

我们给出一个公式:

$$I(a,b) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

假设 $f(x)$ 是一个二次函数，那么恰好满足:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I(a,b)$$

如果 $f(x)$ 不是二次函数呢？

我们给出一个公式：

$$I(a,b)=\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

假设 $f(x)$ 是一个二次函数，那么恰好满足：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I(a,b)$$

如果 $f(x)$ 不是二次函数呢？我们可以计算 $I(a,b)$，$I\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$，$I\left(\frac{a+b}{2},b\right)$，如果

$$\left|I(a,b)-\left(I\left(a,\frac{a+b}{2}\right)+I\left(\frac{a+b}{2},b\right)\right)\right|<\varepsilon$$

我们就认为我们的计算已经足够精确，将 $I(a,b)$ 作为结果返回即可。否则，递归处理两个子区间。

代码

```
double I(double l,double r)
{
    double mid=(l+r)/2;
    return (F(l)+4*F(mid)+F(r))*(r-l)/6;
}
double simpson(double l,double r,double A)
{
    double mid=(l+r)/2;
    double L=I(l,mid),R=I(mid,r);
    if(fabs(L+R-A)<eps) return L+R;
    return simpson(l,mid,L)+simpson(mid,r,R);
}
double simpson(double l,double r){return simpson(l,r,I(l,r));}
```

例题选讲：圆的面积并

给定 n，还有 n 个圆 $(O_1, R_1), \ldots, (O_n, R_n)$，求圆覆盖部分的面积之和。

例题选讲：圆的面积并

给定 n，还有 n 个圆 $(O_1, R_1), \ldots, (O_n, R_n)$，求圆覆盖部分的面积之和。

【题解】辛普森积分，转化为求直线 $x = x_0$ 与所有圆的相交部分长度，$O(n)$ 求即可。

例题选讲：洛谷 P4526

给定 a，求

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{a}{x}-x} \mathrm{d}x$$

例题选讲：洛谷 P4526

给定 a，求

$$\int_0^\infty x^{\frac{a}{x}-x}\mathrm{d}x$$

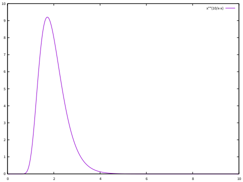


图 3: $a=1$

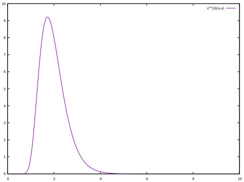


图 4: $a=10$

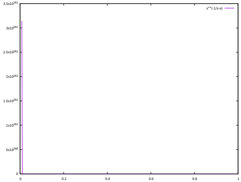


图 5: $a=-1$

例题选讲：洛谷 P4526

给定 a，求

$$\int_0^\infty x^{\frac{a}{x}-x}\mathrm{d}x$$

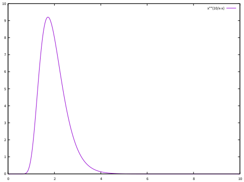


图 3: $a=1$

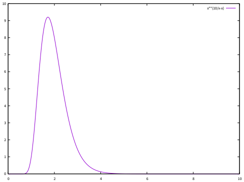


图 4: $a=10$

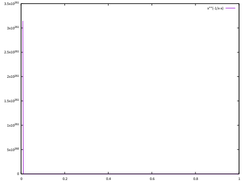


图 5: $a=-1$

【题解】$x>10$ 时函数值几乎为 0，在 $[\varepsilon,20]$ 区间上做辛普森积分即可。注意：$a<0$ 时积分发散。

例题选讲：最短路期望

设 t 是一个在 $[0,1]$ 中均匀分布的随机变量。给定一个有向图，n 个点 m 条边，每条边的边长是 $a_i + td_i$，求 1 到 n 的最短路径期望长度。

$n \le 1000$，$m \le 2000$

例题选讲：最短路期望

设 t 是一个在 $[0,1]$ 中均匀分布的随机变量。给定一个有向图，n 个点 m 条边，每条边的边长是 $a_i + td_i$，求 1 到 n 的最短路径期望长度。
$n \le 1000$，$m \le 2000$

【题解】假如 t 是已知数，可以直接求最短路，记最短路长为 $E(t)$。

例题选讲：最短路期望

设 t 是一个在 $[0,1]$ 中均匀分布的随机变量。给定一个有向图，n 个点 m 条边，每条边的边长是 $a_i + td_i$，求 1 到 n 的最短路径期望长度。
$n \leq 1000$，$m \leq 2000$

【题解】假如 t 是已知数，可以直接求最短路，记最短路长为 $E(t)$。

用辛普森自适应积分计算

$$\int_0^1 E(t)\mathrm{d}t$$

即可

1 牛顿迭代

2 高斯消元

3 辛普森积分

4 **拉格朗日插值**

5 快速傅里叶变换

6 参考文献

问题引入

给定一些点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$，其中 $x_0, x_1, ..., x_n$ 两两不同，能否找到一个 n 次多项式 $f(x)$，使 $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, ..., f(x_n) = y_n$ ？

注意：我们并不需要计算 $f(x)$ 的各项系数，只需求出 $f(x^*)$ 的值，其中 x^* 是给定的。

问题引入

给定一些点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$，其中 $x_0, x_1, ..., x_n$ 两两不同，能否找到一个 n 次多项式 $f(x)$，使 $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, ..., f(x_n) = y_n$？

注意：我们并不需要计算 $f(x)$ 的各项系数，只需求出 $f(x^*)$ 的值，其中 x^* 是给定的。

高斯消元：复杂度 $O(n^3)$

拉格朗日插值公式

对于给定的 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$，我们给出插值公式：

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=1,\, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

不难验证 $f(x_k) = y_k$，且 $f(x)$ 是 n 次多项式。

拉格朗日插值公式

对于给定的 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$，我们给出插值公式：

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

不难验证 $f(x_k) = y_k$，且 $f(x)$ 是 n 次多项式。
求一个点值的复杂度：$O(n^2)$

针对连续整数的特殊优化

假设给定的点是 $(0, y_0), (1, y_1), ..., (n, y_n)$，我们有：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{x-j}{i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(-1)^{n-i} A}{i!(n-i)!(x-j)}
\end{aligned}
$$

其中 $A = \prod_{j=0}^{n}(x-j)$，可以 $O(n)$ 预处理。总复杂度：$O(n)$

例题选讲：自然数幂求和

求 $1^k + 2^k + \ldots + n^k \mod 998244353$

$k \le 10^6,\ n \le 10^9$

例题选讲：自然数幂求和

求 $1^k + 2^k + \ldots + n^k \mod 998244353$
$k \leq 10^6,\ n \leq 10^9$

【题解】设 $f(m) = 1^k + 2^k + \ldots + m^k$，$f(m)$ 是一个 $k+1$ 次多项式。

例题选讲：自然数幂求和

求 $1^k + 2^k + ... + n^k \mod 998244353$
$k \le 10^6$，$n \le 10^9$

【题解】设 $f(m) = 1^k + 2^k + ... + m^k$，$f(m)$ 是一个 $k+1$ 次多项式。

求出 $f(0), f(1), ..., f(k+1)$，然后用拉格朗日插值求 $f(n)$ 即可。
复杂度 $O(k \log k)$，其中 $\log$ 来自快速幂。

例题选讲：CF995F

给定一个 n 个点的树，以 1 为根，你要给每个节点分配权值 $[1, d]$，使得子节点不超过父亲节点的权值，问有多少种分配方案。

$n \leq 3000$，$d \leq 10^9$

例题选讲：CF995F

给定一个 n 个点的树，以 1 为根，你要给每个节点分配权值 $[1, d]$，使得子节点不超过父亲节点的权值，问有多少种分配方案。

$n \le 3000$，$d \le 10^9$

【题解】设 $f_u(i)$ 表示 u 子树内权值大于等于 i 的方案数

例题选讲：CF995F

给定一个 n 个点的树，以 1 为根，你要给每个节点分配权值 $[1,d]$，使得子节点不超过父亲节点的权值，问有多少种分配方案。
$n \le 3000$，$d \le 10^9$

【题解】设 $f_u(i)$ 表示 u 子树内权值大于等于 i 的方案数

$$f_u(i) = f_u(i+1) + \prod_{u\text{的子结点}v} f_v(i)$$

d 太大了，怎么办？

例题选讲：CF995F

给定一个 n 个点的树，以 1 为根，你要给每个节点分配权值 $[1, d]$，使得子节点不超过父亲节点的权值，问有多少种分配方案。
$n \leq 3000$，$d \leq 10^9$

【题解】设 $f_u(i)$ 表示 u 子树内权值大于等于 i 的方案数

$$f_u(i) = f_u(i+1) + \prod_{u\text{的子结点}v} f_v(i)$$

d 太大了，怎么办？

$f_1(i)$ 是关于 i 的 n 次多项式。求出 $f_1(1), f_1(2), ..., f_1(n+1)$，然后用拉格朗日插值求 $f_1(d)$ 即可。

[集训队互测 2012] calc

一个序列 $a_1, a_2, ..., a_n$ 是合法的，当且仅当:

- $a_1, a_2, ..., a_n$ 都是 $[1, k]$ 中的整数
- $a_1, a_2, ..., a_n$ 互不相等

一个序列的值定义为它里面所有数的乘积，即 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$
求不同合法序列的值的和对 p 取模后的结果。两个序列不同当且仅当它们任意一位不同。
$n \leq 500,\ k \leq 10^9$

[集训队互测 2012] calc

一个序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是合法的，当且仅当：

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 都是 $[1, k]$ 中的整数
- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 互不相等

一个序列的值定义为它里面所有数的乘积，即 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$
求不同合法序列的值的和对 p 取模后的结果。两个序列不同当且仅当它们任意一位不同。
$n \leq 500,\ k \leq 10^9$

【题解】首先可以假设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，答案最后乘上 $n!$ 即可

[集训队互测 2012] calc

一个序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是合法的，当且仅当：

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 都是 $[1, k]$ 中的整数
- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 互不相等

一个序列的值定义为它里面所有数的乘积，即 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$
求不同合法序列的值的和对 p 取模后的结果。两个序列不同当且仅当它们任意一位不同。
$n \leq 500, \ k \leq 10^9$

【题解】首先可以假设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，答案最后乘上 $n!$ 即可
设 $f_{i,j}$ 表示考虑完前 i 个数，且 $a_i \leq j$ 时的答案

[集训队互测 2012] calc

一个序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是合法的，当且仅当：

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 都是 $[1, k]$ 中的整数
- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 互不相等

一个序列的值定义为它里面所有数的乘积，即 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$
求不同合法序列的值的和对 p 取模后的结果。两个序列不同当且仅当它们任意一位不同。
$n \leq 500, \ k \leq 10^9$

【题解】首先可以假设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，答案最后乘上 $n!$ 即可
设 $f_{i,j}$ 表示考虑完前 i 个数，且 $a_i \leq j$ 时的答案

$$f_{i,j} = jf_{i-1,j-1} + f_{i,j-1}$$

最终答案是 $n!f_{n,k}$，k 太大了怎么办？

[集训队互测 2012] calc

一个序列 $a_1, a_2, ..., a_n$ 是合法的，当且仅当：

- $a_1, a_2, ..., a_n$ 都是 $[1, k]$ 中的整数
- $a_1, a_2, ..., a_n$ 互不相等

一个序列的值定义为它里面所有数的乘积，即 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$
求不同合法序列的值的和对 p 取模后的结果。两个序列不同当且仅当它们任意一位不同。
$n \leq 500, \ k \leq 10^9$

【题解】首先可以假设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，答案最后乘上 $n!$ 即可
设 $f_{i,j}$ 表示考虑完前 i 个数，且 $a_i \leq j$ 时的答案

$$f_{i,j} = jf_{i-1,j-1} + f_{i,j-1}$$

最终答案是 $n!f_{n,k}$，k 太大了怎么办？
考虑令 $f_{n,k} = f_n(k)$，可以验证 $f_n(k)$ 是关于 k 的 $2n$ 次多项式。求出前 $2n+1$ 个值，拉格朗日插值即可。

给定多项式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$$

求 $h(x) = f(x)g(x)$ 的各项系数，记

$$h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n+m} x^{n+m}$$

最简单的做法？

给定多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

求 $h(x) = f(x)g(x)$ 的各项系数，记

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}$$

最简单的做法？

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0.$$

算一个 c_k 的复杂度是 $O(k)$，算出所有 $c_0, \ldots, c_{n+m}$ 的复杂度为 $O(n^2)$.

傅里叶的思路

在拉格朗日插值中，我们知道了 $n+1$ 个点可以唯一确定一个 n 阶多项式，加入我们取 N 个点，这里 $N > n+m$，那么第一步(多点求值)：我们计算

$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_N)$$
$$g(x_1), g(x_2), ..., g(x_N)$$

第二步（各点乘积）：我们计算出

$$h(x_1) = f(x_1)g(x_1),\ h(x_2) = f(x_2)g(x_2), ...,\ h(x_N) = f(x_N)g(x_N)$$

第三步（多点插值）：通过这些值，用类似插值的方法求出 $h(x)$ 的各项系数！

如果每一步都用我们学过的方法，复杂度是？

傅里叶的思路

在拉格朗日插值中，我们知道了 $n+1$ 个点可以唯一确定一个 n 阶多项式，加入我们取 N 个点，这里 $N > n+m$，那么第一步（多点求值）：我们计算

$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_N)$$
$$g(x_1), g(x_2), ..., g(x_N)$$

第二步（各点乘积）：我们计算出

$$h(x_1) = f(x_1)g(x_1),\ h(x_2) = f(x_2)g(x_2), ...,\ h(x_N) = f(x_N)g(x_N)$$

第三步（多点插值）：通过这些值，用类似插值的方法求出 $h(x)$ 的各项系数！

如果每一步都用我们学过的方法，复杂度是？

第一步：$O(N^2)$；第二步：$O(N)$；第三步：$O(N^2)$.

单位复根

记 $\omega_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = e^{\frac{2\pi i}{n}}$，则 $\omega_n^n = e^{2\pi i} = 1$.

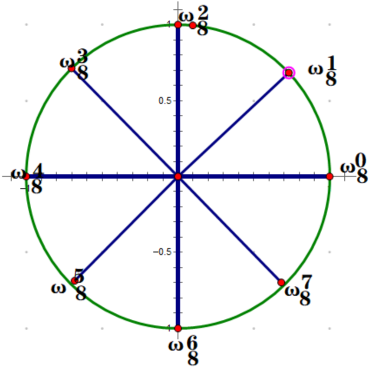


图 6: $n = 8$ 时的单位复根

快速傅里叶变换

现在，傅里叶让 N 是 2 的幂次，他想快速求出

$$f(\omega_N^0), f(\omega_N^1), ..., f(\omega_N^{N-1})$$

快速傅里叶变换

现在，傅里叶让 N 是 2 的幂次，他想快速求出

$$f(\omega_N^0), f(\omega_N^1), ..., f(\omega_N^{N-1})$$

首先填充数组，对于下标 $k > n$，我们让 $a_k = 0$，现在来把 $f(x)$ 做一点小小的拆分：

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-1} \\ &= (a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-2} x^{N-2}) + x(a_1 + a_3 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-2}) \end{aligned}$$

快速傅里叶变换

现在，傅里叶让 N 是 2 的幂次，他想快速求出

$$f(\omega_N^0), f(\omega_N^1), ..., f(\omega_N^{N-1})$$

首先填充数组，对于下标 $k > n$，我们让 $a_k = 0$，现在来把 $f(x)$ 做一点小小的拆分：

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-1} \\ &= (a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-2} x^{N-2}) + x(a_1 + a_3 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-2}) \end{aligned}$$

如果我们令

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \cdots + a_{N-2} x^{N/2-1} \\ Q(x) &= a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N/2-1} \end{aligned}$$

快速傅里叶变换

现在，傅里叶让 N 是 2 的幂次，他想快速求出

$$f(\omega_N^0), f(\omega_N^1), ..., f(\omega_N^{N-1})$$

首先填充数组，对于下标 $k > n$，我们让 $a_k = 0$，现在来把 $f(x)$ 做一点小小的拆分：

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-1} \\ &= (a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-2} x^{N-2}) + x(a_1 + a_3 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-2}) \end{aligned}$$

如果我们令

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \cdots + a_{N-2} x^{N/2-1} \\ Q(x) &= a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N/2-1} \end{aligned}$$

那么，$f(x) = P(x^2) + xQ(x^2)$

对于 $0 \leq k < \frac{N}{2}$，我们可以算出：

$$f(\omega_N^k) = P(\omega_N^{2k}) + \omega_N^k Q(\omega_N^{2k}) = P(\omega_{N/2}^k) + \omega_N^k Q(\omega_{N/2}^k)$$

同理

$$f(\omega_N^{N/2+k}) = P(\omega_N^{N+2k}) + \omega_N^{N/2+k} Q(\omega_N^{N+2k}) = P(\omega_{N/2}^k) - \omega_N^k Q(\omega_{N/2}^k)$$

对于 $0 \le k < \frac{N}{2}$，我们可以算出：

$$f(\omega_N^k) = P(\omega_N^{2k}) + \omega_N^k Q(\omega_N^{2k}) = P(\omega_{N/2}^k) + \omega_N^k Q(\omega_{N/2}^k)$$

同理

$$f(\omega_N^{N/2+k}) = P(\omega_N^{N+2k}) + \omega_N^{N/2+k} Q(\omega_N^{N+2k}) = P(\omega_{N/2}^k) - \omega_N^k Q(\omega_{N/2}^k)$$

所以说，我们只要计算出

$$P(\omega_{N/2}^0), P(\omega_{N/2}^1), \cdots, P(\omega_{N/2}^{N/2-1})$$
$$Q(\omega_{N/2}^0), Q(\omega_{N/2}^1), \cdots, Q(\omega_{N/2}^{N/2-1})$$

就可以 $O(N)$ 地算出全部的

$$f(\omega_N^0), f(\omega_N^1), ..., f(\omega_N^{N-1})$$

对于 $0 \le k < \frac{N}{2}$，我们可以算出：

$$f(\omega_N^k) = P(\omega_N^{2k}) + \omega_N^k Q(\omega_N^{2k}) = P(\omega_{N/2}^k) + \omega_N^k Q(\omega_{N/2}^k)$$

同理

$$f(\omega_N^{N/2+k}) = P(\omega_N^{N+2k}) + \omega_N^{N/2+k} Q(\omega_N^{N+2k}) = P(\omega_{N/2}^k) - \omega_N^k Q(\omega_{N/2}^k)$$

所以说，我们只要计算出

$$P(\omega_{N/2}^0), P(\omega_{N/2}^1), \cdots, P(\omega_{N/2}^{N/2-1})$$

$$Q(\omega_{N/2}^0), Q(\omega_{N/2}^1), \cdots, Q(\omega_{N/2}^{N/2-1})$$

就可以 $O(N)$ 地算出全部的

$$f(\omega_N^0), f(\omega_N^1), \ldots, f(\omega_N^{N-1})$$

分治！复杂度？

对于 $0 \le k < \frac{N}{2}$，我们可以算出：

$$f(\omega_N^k) = P(\omega_N^{2k}) + \omega_N^k Q(\omega_N^{2k}) = P(\omega_{N/2}^k) + \omega_N^k Q(\omega_{N/2}^k)$$

同理

$$f(\omega_N^{N/2+k}) = P(\omega_N^{N+2k}) + \omega_N^{N/2+k} Q(\omega_N^{N+2k}) = P(\omega_{N/2}^k) - \omega_N^k Q(\omega_{N/2}^k)$$

所以说，我们只要计算出

$$P(\omega_{N/2}^0), P(\omega_{N/2}^1), \cdots, P(\omega_{N/2}^{N/2-1})$$
$$Q(\omega_{N/2}^0), Q(\omega_{N/2}^1), \cdots, Q(\omega_{N/2}^{N/2-1})$$

就可以 $O(N)$ 地算出全部的

$$f(\omega_N^0), f(\omega_N^1), ..., f(\omega_N^{N-1})$$

分治！复杂度？$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) = O(n \log n)$

FFT（递归版）

```
void FFT(vector<Comp> &a)
{
    int n=a.size();
    if(n==1) return a;  //多项式只剩1项时，点值等于常数项
    vector<Comp> a1,a2;
    for(int i=0;i<n;i++)  //将f按奇偶项拆分成两个多项式
        if(i&1) a2.pb(a[i]);
        else a1.pb(a[i]);
    FFT(a1); FFT(a2);  //递归处理子问题
    Comp wn=Comp(cos(2*pi/n), sin(2*pi/n)); //单位复根
    Comp w=Comp(1,0);
    for(int i=0;i<n/2;i++)
    {
        Comp x=a1[i],y=a2[i];
        a[i]=x+w*y;
        a[n/2+i]=x-w*y;
        w=w*wn;  //注意：w(n,k+1)=w(n,k)*w(n,1)
    }
}
```

蝶形变换

好心的出题人并不会让你的递归 FFT 顺利通过，因为递归版 FFT 的空间复杂度同样达到了 $O(n\log n)$，我们需要一个非递归版本的 FFT。
考虑模拟分治过程中的多项式拆分：

$$
\begin{array}{cccccccc}
\{a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7\} \\
\{a_0 & a_2 & a_4 & a_6\} & \{a_1 & a_3 & a_5 & a_7\} \\
\{a_0 & a_4\} & \{a_2 & a_6\} & \{a_1 & a_5\} & \{a_3 & a_7\} \\
\{a_0\} & \{a_4\} & \{a_2\} & \{a_6\} & \{a_1\} & \{a_5\} & \{a_3\} & \{a_7\}
\end{array}
$$

蝶形变换

好心的出题人并不会让你的递归 FFT 顺利通过，因为递归版 FFT 的空间复杂度同样达到了 $O(n\log n)$，我们需要一个非递归版本的 FFT。
考虑模拟分治过程中的多项式拆分：

$$\begin{array}{cccccccc}
\{a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7\} \\
\{a_0 & a_2 & a_4 & a_6\} & \{a_1 & a_3 & a_5 & a_7\} \\
\{a_0 & a_4\} & \{a_2 & a_6\} & \{a_1 & a_5\} & \{a_3 & a_7\} \\
\{a_0\} & \{a_4\} & \{a_2\} & \{a_6\} & \{a_1\} & \{a_5\} & \{a_3\} & \{a_7\}
\end{array}$$

可以看到，最终 a_i 与 $a_{R[i]}$ 发生了位置互换，并且我们可以证明 $R[i]$ 就是 i 的二进制反转！例如：

$$i = 6 = (110)_2, \quad R[i] = (011)_2 = 3$$

蝶形变换

直接对每个 i 算出 $R[i]$ 是可行的。当然我们有更快的方法计算 $R[0], R[1], ..., R[N-1]$

蝶形变换

直接对每个 i 算出 $R[i]$ 是可行的。当然我们有更快的方法计算 $R[0], R[1], ..., R[N-1]$

考虑从小到达枚举 i，这样我们在计算 $R[i]$ 的时候，$R[i/2]$ 就已经计算好了，我们记

$$i = (B_1 B_2 B_3 ... B_l)_2, \quad i/2 = (0 B_1 B_2 ... B_{l-1})_2$$

于是

$$R[i/2] = (B_{l-1} ... B_2 B_1 0)_2$$

蝶形变换

直接对每个 i 算出 $R[i]$ 是可行的。当然我们有更快的方法计算 $R[0], R[1], ..., R[N-1]$

考虑从小到达枚举 i，这样我们在计算 $R[i]$ 的时候，$R[i/2]$ 就已经计算好了，我们记

$$i = (B_1 B_2 B_3 ... B_l)_2, \quad i/2 = (0 B_1 B_2 ... B_{l-1})_2$$

于是

$$R[i/2] = (B_{l-1} ... B_2 B_1 0)_2$$

除掉末位：

$$R[i/2]/2 = (0 B_{l-1} ... B_2 B_1)_2$$

蝶形变换

直接对每个 i 算出 $R[i]$ 是可行的。当然我们有更快的方法计算 $R[0], R[1], ..., R[N-1]$

考虑从小到达枚举 i，这样我们在计算 $R[i]$ 的时候，$R[i/2]$ 就已经计算好了，我们记

$$i = (B_1 B_2 B_3 ... B_l)_2, \quad i/2 = (0 B_1 B_2 ... B_{l-1})_2$$

于是

$$R[i/2] = (B_{l-1} ... B_2 B_1 0)_2$$

除掉末位：

$$R[i/2]/2 = (0 B_{l-1} ... B_2 B_1)_2$$

如果再把首位改成 B_l，就得到了 $R[i]$。只需让上式对 $B_l << (l-1)$ 按位或即可，因此

$$R[i] = (R[i/2]/2) | ((i \& 1) << (l-1))$$

这样就可以 $O(n)$ 求出全部 $R[0], ..., R[N-1]$

FFT（非递归版）

```
void FFT(Comp *a)
{
    for(int i=0;i<n;i++) r[i]=(r[i/2]/2)|((i&1)<<(l-1));
    for(int i=0;i<n;i++) if(i<r[i]) swap(a[i],a[r[i]]);
    for(int i=1;i<n;i*=2)
    {
        Comp wn=Comp(cos(pi/i),sin(pi/i));
        int p=i*2;
        for(int j=0;j<n;j+=p)
        {
            Comp w=Comp(1,0);
            for(int k=0;k<i;k++)
            {
                Comp x=a[j+k],y=w*a[i+j+k];
                a[j+k]=x+y;a[i+j+k]=x-y;
                w=w*wn;
            }
        }
    }
}
```

FFT 的逆变换

现在我们已经用 $O(n\log n)$ 的时间求出了

$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_N)$$
$$g(x_1), g(x_2), ..., g(x_N)$$

接下来我们用 $O(n)$ 的时间计算出

$$h(x_1) = f(x_1)g(x_1),\ h(x_2) = f(x_2)g(x_2), ...,\ h(x_N) = f(x_N)g(x_N)$$

最后，我们需要用这些值求出 h 的各项系数。这一步正好和 FFT 相反，我们称之为 IFFT。

FFT 的逆变换

为简单起见，我们记 $\omega = \omega_N$，从形式上，我们有：

$$\begin{bmatrix} f(\omega^0) \\ f(\omega^1) \\ f(\omega^2) \\ \vdots \\ f(\omega^{N-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2N-2} & \cdots & \omega^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix}$$

我们记上面的矩阵为 M，也就是说 $v = \mathrm{fft}(a) = Ma$，那么如果已知左边的向量 v，要计算 a，我们有 $a = M^{-1}v$

FFT 的逆变换

事实上，我们有

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2N-2} & \cdots & \omega^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \bar{\omega} & \bar{\omega}^2 & \cdots & \bar{\omega}^{N-1} \\ 1 & \bar{\omega}^2 & \bar{\omega}^4 & \cdots & \bar{\omega}^{2N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \bar{\omega}^{N-1} & \bar{\omega}^{2N-2} & \cdots & \bar{\omega}^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

只需要验证 $MM^{-1} = I$，也就是说验证 M 的第 i 行与 M^{-1} 的第 j 列向乘，在 $i = j$ 时结果为 1，在 $i \neq j$ 时结果为 0
所以只需把 FFT 中用到的 ω 换成 $\bar{\omega}$，最后再把结果乘 $\frac{1}{N}$，就得到了 IFFT

FFT（非递归版）

我们可以把代码改成这样，$v=1$ 时就是 FFT，$v=-1$ 时就是 IFFT

```
void FFT(Comp *a, int v)
{
    for(int i=0;i<n;i++) r[i]=(r[i/2]/2)|((i&1)<<(l-1));
    for(int i=0;i<n;i++) if(i<r[i]) swap(a[i],a[r[i]]);
    for(int i=1;i<n;i*=2)
    {
        Comp wn=Comp(cos(pi/i), v*sin(pi/i)); //这里乘上v就达到了目的
        int p=i*2;
        for(int j=0;j<n;j+=p)
        {
            Comp w=Comp(1,0);
            for(int k=0;k<i;k++)
            {
                Comp x=a[j+k],y=w*a[i+j+k];
                a[j+k]=x+y;a[i+j+k]=x-y;
                w=w*wn;
            }
        }
    }
}
```

多项式乘法

借助上面的代码，我们可以很轻松地计算多项式乘法

```
FFT(a,1);FFT(b,1); //第一步：多点求值（FFT）
for(int i=0;i<=n;i++) a[i]=a[i]*b[i]; //第二步：各点乘积
FFT(a,-1); //第三步：多点插值（IFFT）
for(int i=0;i<=m;i++) printf("%d ",(int)round(a[i].real()/n)); //这里记得要除n
```

例题选讲：高精度乘法

FFT 的一个重要应用就是高精度乘法。对于两个数

$$a = a_n \ldots a_3\, a_2\, a_1\, ,\, b = b_m \ldots b_3\, b_2\, b_1$$

例题选讲：高精度乘法

FFT 的一个重要应用就是高精度乘法。对于两个数

$$a = a_n \ldots a_3 a_2 a_1, b = b_m \ldots b_3 b_2 b_1$$

如果用模拟的方法，需要两重循环，复杂度为 $O(n^2)$。但假如我们写成

$$a = a_1 + a_2 \times 10 + a_3 \times 10^2 + \cdots + a_n \times 10^{n-1}$$
$$b = b_1 + b_2 \times 10 + b_3 \times 10^2 + \cdots + b_m \times 10^{m-1}$$

例题选讲：高精度乘法

FFT 的一个重要应用就是高精度乘法。对于两个数

$$a = a_n \ldots a_3 a_2 a_1, b = b_m \ldots b_3 b_2 b_1$$

如果用模拟的方法，需要两重循环，复杂度为 $O(n^2)$。但假如我们写成

$$a = a_1 + a_2 \times 10 + a_3 \times 10^2 + \cdots + a_n \times 10^{n-1}$$
$$b = b_1 + b_2 \times 10 + b_3 \times 10^2 + \cdots + b_m \times 10^{m-1}$$

我们现在可以使用多项式乘法，令

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$$
$$g(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots + b_m x^{m-1}$$

用 FFT 算出 $h(x) = f(x)g(x)$，得到：

$$h(x) = c_1 + c_2 \times x + c_3 \times x^2 + \cdots + c_{n+m-2} \times x^{n+m-2}$$

例题选讲：高精度乘法

FFT 的一个重要应用就是高精度乘法。对于两个数

$$a = a_n \dots a_3 a_2 a_1, b = b_m \dots b_3 b_2 b_1$$

如果用模拟的方法，需要两重循环，复杂度为 $O(n^2)$。但假如我们写成

$$a = a_1 + a_2 \times 10 + a_3 \times 10^2 + \cdots + a_n \times 10^{n-1}$$
$$b = b_1 + b_2 \times 10 + b_3 \times 10^2 + \cdots + b_m \times 10^{m-1}$$

我们现在可以使用多项式乘法，令

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$$
$$g(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots + b_m x^{m-1}$$

用 FFT 算出 $h(x) = f(x)g(x)$，得到：

$$h(x) = c_1 + c_2 \times x + c_3 \times x^2 + \cdots + c_{n+m-2} \times x^{n+m-2}$$

有一些 c_k 可能 ≥ 10，因此直接不能直接输出 $c_{n+m-2} \dots c_2 c_1$，要再做一次进位，复杂度 $O(n+m)$。

例题选讲：高精度连乘

给 n 个数 $c_1, c_2, ..., c_n$，求 $c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_n$
$n \leq 10^5$，$1 \leq c_i \leq 9$

例题选讲：高精度连乘

给 n 个数 $c_1, c_2, ..., c_n$，求 $c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_n$
$n \le 10^5$，$1 \le c_i \le 9$

能不能用高精度乘法的方法，计算 $c_1 \times c_2$，然后乘 c_3，再乘 c_4，再乘 $c_5 \cdots \cdots$ ？

例题选讲：高精度连乘

给 n 个数 $c_1, c_2, ..., c_n$，求 $c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_n$
$n \leq 10^5$，$1 \leq c_i \leq 9$

能不能用高精度乘法的方法，计算 $c_1 \times c_2$，然后乘 c_3，再乘 c_4，再乘 $c_5 \cdots \cdots$？

不能！复杂度 $O(n^2)$

例题选讲：高精度连乘

给 n 个数 $c_1, c_2, ..., c_n$，求 $c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_n$
$n \le 10^5$，$1 \le c_i \le 9$

能不能用高精度乘法的方法，计算 $c_1 \times c_2$，然后乘 c_3，再乘 c_4，再乘 $c_5 \cdots\cdots$？

不能！复杂度 $O(n^2)$

【题解】令 $M(l, r) = c_l \times c_{l+1} \times \cdots \times c_r$，显然我们要求的就是 $M(1, n)$，考虑分治。

例题选讲：高精度连乘

给 n 个数 $c_1, c_2, ..., c_n$，求 $c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_n$
$n \leq 10^5$，$1 \leq c_i \leq 9$

能不能用高精度乘法的方法，计算 $c_1 \times c_2$，然后乘 c_3，再乘 c_4，再乘 $c_5 \cdots \cdots$？

不能！复杂度 $O(n^2)$

【题解】令 $M(l, r) = c_l \times c_{l+1} \times \cdots \times c_r$，显然我们要求的就是 $M(1, n)$，考虑分治。
递归计算 $M(1, n/2)$，$M(n/2 + 1, n)$，然后

$$M(1, n) = M(1, n/2) \times M(n/2 + 1, n)$$

这一步用 FFT 优化，复杂度是 $O(n \log n)$，分治总复杂度为 $T(n) = 2T(n/2) + O(n \log n) = O(n \log^2 n)$

例题选讲：带通配符的字符串匹配

请移步洛谷 P4173
第一篇获赞 100+ 的题解是我五年前写的。

[1] T. Sauer, *Numerical Analysis*.
USA: Addison-Wesley Publishing Company, 2nd ed., 2011.

[2] O. Wiki, “快速傅里叶变换 - OI Wiki.”
(2023, May 18).

[3] pengyule, “FFT（1）- pengyule.”
(2021, Dec 30).

Thank You