

计算几何 2：旋转卡壳、圆

Ebola

Institute of Mathematics,
Zhejiang University.

Jan, 2024

① 基础回顾

② 旋转卡壳

③ 圆

① 基础回顾

② 旋转卡壳

③ 圆

向量的旋转

如果一个向量 $\vec{v} = (x, y)$, 现在将它逆时针旋转 90° , 得到什么?

向量的旋转

如果一个向量 $\vec{v} = (x, y)$, 现在将它逆时针旋转 90° , 得到什么?

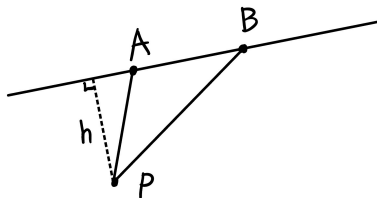
$$\vec{v}^\perp = (-y, x). \quad (1)$$

点到直线的距离

给定 P, A, B 三点坐标, 求点 P 到直线 AB 的距离。(别用解析几何)

点到直线的距离

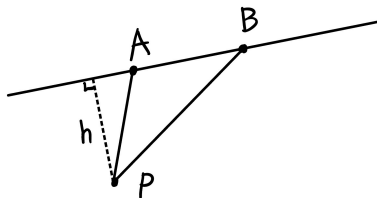
给定 P, A, B 三点坐标, 求点 P 到直线 AB 的距离。(别用解析几何)



$$h = \frac{S_{\triangle PAB}}{|AB|} = \frac{|\vec{PA} \times \vec{PB}|}{|AB|}. \quad (2)$$

点到直线的距离

给定 P, A, B 三点坐标, 求点 P 到直线 AB 的距离。(别用解析几何)



$$h = \frac{S_{\triangle PAB}}{|AB|} = \frac{|\vec{PA} \times \vec{PB}|}{|AB|}. \quad (2)$$

```
1 double DistanceToLine(Point P, Point A, Point B){  
2     return fabs(Cross(A-P, B-P)) / Length(A-B);  
3 }
```


① 基础回顾

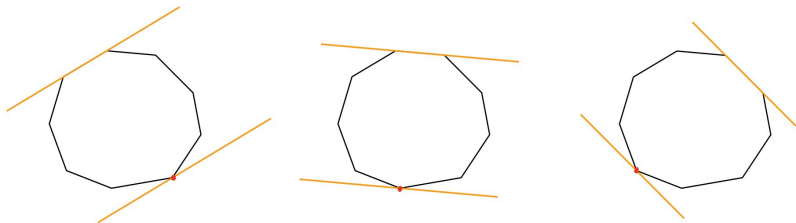
② 旋转卡壳

③ 圆

【模板】旋转卡壳

给定平面上 n 个点，求凸包直径（直径是指最远的两个顶点的距离）。

旋转卡壳



如图所示，枚举上凸壳的边 P_iP_{i+1} ，找到距离它最远的点。显然，当我们顺时针枚举边时，对面的点也只会顺时针方向前进，所以复杂度是 $O(n)$ 的。

旋转卡壳

```
1 double RotatingCalipers(Point *ch, int n){
2     if(n==2) return Length(ch[2] - ch[1]);
3     int cur=0;
4     double ans=0;
5     ch[n+1] = ch[1];
6     for(int i = 1; i <= n; i++){
7         while(DistanceToLine(ch[cur], ch[i], ch[i+1])
8             <= DistanceToLine(ch[cur%n+1], ch[i], ch[i+1])){
9             cur = cur % n + 1;
10        }
11        ans=max(ans, max(Length(ch[i] - ch[cur]),
12                        Length(ch[i+1] - poly[cur])));
13    }
14    return ans;
15 }
```

① 基础回顾

② 旋转卡壳

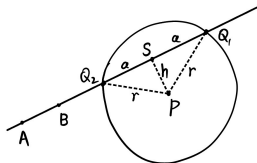
③ 圆

圆与直线的交点

给定直线上两个点 A, B 的坐标、圆心 P 的坐标、圆的半径 r ，求直线 l_{AB} 与圆的交点。

圆与直线的交点

给定直线上两个点 A, B 的坐标、圆心 P 的坐标、圆的半径 r ，求直线 l_{AB} 与圆的交点。



先求出 P 到 l_{AB} 的距离 h ，然后计算 $a = \sqrt{r^2 - h^2}$ ，然后求出：

$$S = P + h \frac{\overrightarrow{AB}^\perp}{|\overrightarrow{AB}|} \quad (3)$$

$$Q_1 = S + a \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \quad (4)$$

$$Q_2 = S - a \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \quad (5)$$

[BZOJ2178] 圆的面积并

给定 n ($n \leq 1000$) 个圆，求它们覆盖区域的面积。

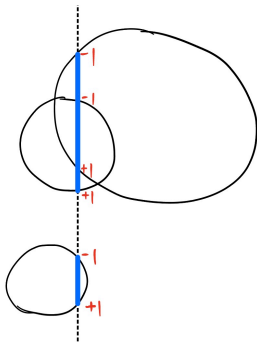
[BZOJ2178] 圆的面积并

基本思路是辛普森积分求 $\int_L^R f(t) dt$, 其中 $f(t)$ 表示直线 $x = t$ 与覆盖区域相交部分的长度。

[BZOJ2178] 圆的面积并

基本思路是辛普森积分求 $\int_L^R f(t) dt$, 其中 $f(t)$ 表示直线 $x = t$ 与覆盖区域相交部分的长度。

对于一条直线 $x = t$, 我们可以枚举所有圆, 求出与该直线的所有交点, 并从小到大排序, 然后依次枚举; 每碰到一个下交点, 就加 1, 碰到上交点就减 1; 非零部分的总长度就是相交部分的长度。



圆与圆的交点

Thank You