计算几何 1：点、向量、直线、凸包、闵可夫斯基和

Ebola

Institute of Mathematics,
Zhejiang University.

Jan, 2024

点与向量

二维平面上的任何一个点，可以用坐标 (x, y) 表示。

点与向量

二维平面上的任何一个点，可以用坐标 (x, y) 表示。

向量是一个“具有方向和长度的箭头”，它不规定起点和终点。
二维平面上的任何一个向量，也可以用坐标 (x, y) 表示。

点与向量

二维平面上的任何一个点，可以用坐标 (x, y) 表示。

向量是一个"具有方向和长度的箭头"，它不规定起点和终点。
二维平面上的任何一个向量，也可以用坐标 (x, y) 表示。

计算机存储点与向量没有区别，所以我们都可以用下面的结构体来存储。

```
struct Point{
    double x,y;
    Point(double x=0, double y=0): x(x), y(y) {}
};
#define Vector Point
// 在计算机里，Vector 就是 Point，但为了从逻辑上区分，我们赋予它们不同的名字
```

浮点数比大小

浮点数是有限精度的，在运算过程中，难免会产生误差，相信大家深有被卡精度的体会。但是在计算几何中，我们经常需要判断浮点数的大小。

浮点数比大小

浮点数是有限精度的，在运算过程中，难免会产生误差，相信大家深有被卡精度的体会。但是在计算几何中，我们经常需要判断浮点数的大小。这里我们引入如下的比较函数：

```
#define eps 1e-12
int dcmp(double x)
{
    if(fabs(x)<=eps) return 0;
    else if(x<0) return -1;
    else return 1;
}
```

向量的基本运算

我们重载一些运算符来实现向量基本运算。

```
Vector operator + (Vector a, Vector b){return Vector(a.x+b.x, a.y+b.y);}
Vector operator - (Vector a, Vector b){return Vector(a.x-b.x, a.y-b.y);}
Vector operator - (Vector b){return Vector(-b.x, -b.y);}
Vector operator * (Vector a, double x){return Vector(a.x*x, a.y*x);}
Vector operator * (double x, Vector a){return Vector(a.x*x, a.y*x);}
double Angle(Vector a){return atan2(a.y, a.x);}

bool operator < (Point a, Point b){
    return a.x < b.x || (a.x == b.x && a.y < b.y);
}
bool operator == (Point a, Point b){
    return dcmp(a.x-b.x) == 0 && dcmp(a.y-b.y) == 0;
}

double Dot(Vector a, Vector b){return a.x*b.x + a.y*b.y;}
double Length(Vector a){return sqrt(a.x*a.x + a.y*a.y);}
```

向量的叉乘

二维向量叉乘写作 $a \times b$，定义如下：

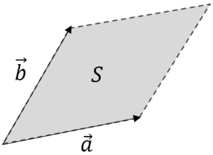
```
double Cross(Vector a,Vector b){return a.x*b.y - a.y*b.x;}
```

向量的叉乘

二维向量叉乘写作 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$，定义如下：

```
double Cross(Vector a,Vector b){return a.x*b.y - a.y*b.x;}
```

在几何中，叉乘是向量 **a** 与 **b** 构成的平行四边形的有向面积。如果 **b** 在 **a** 的**逆时针**方向，结果就是**正**的；逆时针方向就是负的；平行就是零。



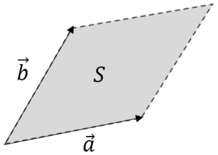
$\vec{a} \times \vec{b} = S$ $\qquad$ $\vec{b} \times \vec{a} = -S$

向量的叉乘

二维向量叉乘写作 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$，定义如下：

```
double Cross(Vector a,Vector b){return a.x*b.y - a.y*b.x;}
```

在几何中，叉乘是向量 a 与 b 构成的平行四边形的有向面积。如果 b 在 a 的**逆时针**方向，结果就是**正**的；逆时针方向就是负的；平行就是零。



$\vec{a} \times \vec{b} = S$ $\qquad$ $\vec{b} \times \vec{a} = -S$

当向量坐标都是整数时，用叉乘判断向量相对位置没有精度误差!

叉乘的应用：将凸多边形的顶点按逆时针排序

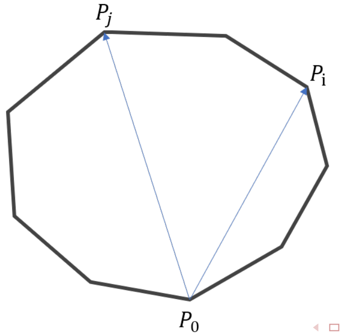
给定凸 n 边形的所有顶点，请将它们按逆时针排序，起点随意。
（提示：使用 `sort` 函数，考虑如何定义 `cmp`）

叉乘的应用：将凸多边形的顶点按逆时针排序

给定凸 n 边形的所有顶点，请将它们按逆时针排序，起点随意。
（提示：使用 sort 函数，考虑如何定义 cmp）

先随意固定一个起点 P_0，P_i 排在 P_j 前面，当且仅当

$$\overrightarrow{P_0P_i} \times \overrightarrow{P_0P_j} > 0.$$

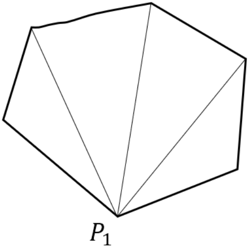


叉乘的应用：求凸多边形的面积

给定凸 n 边形的所有顶点，它们已经按逆时针排好了序，求图形的面积。

叉乘的应用：求凸多边形的面积

给定凸 n 边形的所有顶点，它们已经按逆时针排好了序，求图形的面积。



依次叉乘并累加即可。

```
double area = 0;
for(int i = 2; i <= n-1; i++)
    area += 0.5 * cross(p[i]-p[1], p[i+1]-p[1]);
```

1. 二维几何基础
2. **二维凸包**
3. 点与直线
4. 闵可夫斯基和

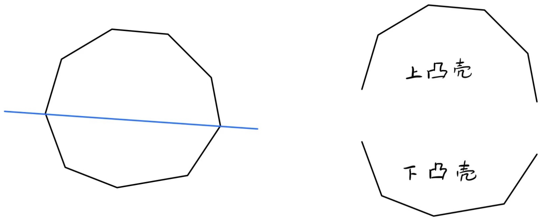
凸包

给定 n 个点，你需要从中选取若干个点构成一个凸多边形，并且这个凸多边形包住了所有的点。

模板题：P2742 [USACO5.1] 圈奶牛

凸包的拆分

我们通常将凸多边形拆分成两个部分：上凸壳和下凸壳。上下凸壳的分界点是凸多边形最左与最右的顶点。

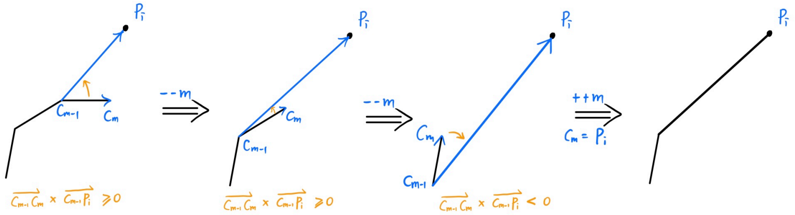


上凸壳的维护

维护上凸壳的一个基本想法是：用一个栈来存储当前上凸壳，然后考虑添加一个新的点。为了维护凸性，我们先弹出栈顶的一些元素，然后再将这个点加入。栈顶元素是否需要弹出可以根据叉乘的符号来判断。

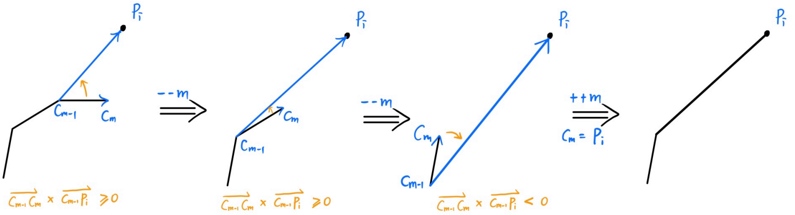
上凸壳的维护

维护上凸壳的一个基本想法是：用一个栈来存储当前上凸壳，然后考虑添加一个新的点。为了维护凸性，我们先弹出栈顶的一些元素，然后再将这个点加入。栈顶元素是否需要弹出可以根据叉乘的符号来判断。



上凸壳的维护

维护上凸壳的一个基本想法是：用一个栈来存储当前上凸壳，然后考虑添加一个新的点。为了维护凸性，我们先弹出栈顶的一些元素，然后再将这个点加入。栈顶元素是否需要弹出可以根据叉乘的符号来判断。



现在问题是：按什么样的顺序考虑新的点，才能保证正确地求出上凸壳？

点的加入顺序

答案是**从左到右**、**从下到上**。即将所有点按 x 为第一关键字、y 为第二关键字进行排序。这样为什么是对的？

点的加入顺序

答案是**从左到右**、**从下到上**。即将所有点按 x 为第一关键字、y 为第二关键字进行排序。这样为什么是对的？

其实我们只需要保证上凸壳上的点的访问顺序是从左到右，并且上凸壳最右边的点排在最后一个即可。对于不在上凸壳上的点，它们的顺序不重要，因为都会被弹出。显然，“从左到右、从下到上”符合上述要求。

下凸壳的维护

维护下凸壳也很简单，只要把点的访问顺序倒过来即可，其余部分完全一样。

完整代码

```
bool operator < (const Point &a,const Point &b){
    return a.x < b.x || (a.x == b.x && a.y < b.y);
}
int ConvexHull(Point a[],int n,Point b[]){
    sort(a+1, a+n+1);
    int m = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        while(m > 1 && cross(b[m]-b[m-1], a[i]-b[m-1]) >= 0) --m;
        b[++m] = a[i];
    }
    int k = m;
    for(int i = n-1; i >= 1; i--){
        while(m > k && cross(b[m]-b[m-1], a[i]-b[m-1]) >= 0) --m;
        b[++m] = a[i];
    }
    return m-1;
}
```

完整代码

```
bool operator < (const Point &a,const Point &b){
    return a.x < b.x || (a.x == b.x && a.y < b.y);
}
int ConvexHull(Point a[],int n,Point b[]){
    sort(a+1, a+n+1);
    int m = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        while(m > 1 && cross(b[m]-b[m-1], a[i]-b[m-1]) >= 0) --m;
        b[++m] = a[i];
    }
    int k = m;
    for(int i = n-1; i >= 1; i--){
        while(m > k && cross(b[m]-b[m-1], a[i]-b[m-1]) >= 0) --m;
        b[++m] = a[i];
    }
    return m-1;
}
```

这样得到的凸包顶点是按顺时针方向排序的，如果要按逆时针方向排序，可以 reverse 一下，或者直接把上面代码里的 >= 改成 <=。

[SDOI2013] 保护出题人

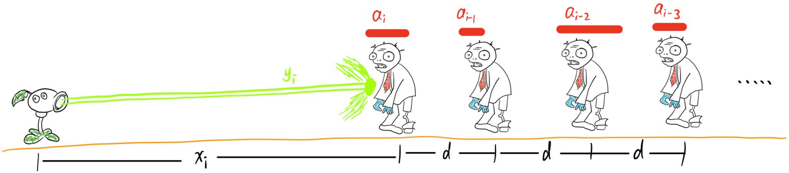
僵尸从唯一一条笔直道路接近，你们需要在铭铭的房门前放置植物攻击僵尸，避免僵尸碰到房子。

第一关，一只血量为 a_1 点的僵尸从距离房子 x_1 米处速接近，你们放置了攻击力为 y_1 点/秒的植物进行防御；第二关，在上一关基础上，僵尸队列排头增加一只血量为 a_2 点的僵尸，与后一只僵尸距离 d 米，从距离房 x_2 米处匀速接近，你们重新放置攻击力为 y_2 点/秒的植物；……；第 n 关，僵尸队列共有 n 只僵尸，相邻两只僵尸距离 d 米，排头僵尸血量为 a_n 点，排第二的僵尸血量 a_{n-1}，以此类推，排头僵尸从距离房子 x_n 米处匀速接近，其余僵尸跟随排头同时接近，你们重新放置攻击力为 y_n 点/秒的植物。

每只僵尸直线移动速度均为 1 米/秒，由于植物射击速度远大于僵尸移动速度，可忽略植物子弹在空中的时间。所有僵尸同时出现并接近，因此当一只僵尸死亡后，下一只僵尸立刻开始受到植物子弹的伤害。

游戏得分取决于你们放置的植物攻击力的总和 $\sum_{i=1}^{n} y_i$，和越小分数越高，为了追求分数上界，你们每关都要放置攻击力尽量小的植物。

[SDOI2013] 保护出题人



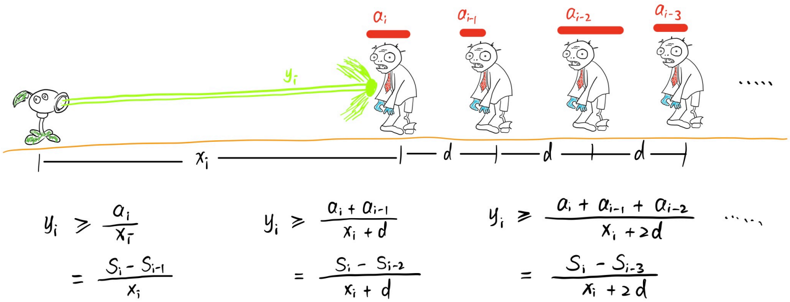
$$y_i \geqslant \frac{a_i}{x_i} = \frac{S_i - S_{i-1}}{x_i}$$

$$y_i \geqslant \frac{a_i + a_{i-1}}{x_i + d} = \frac{S_i - S_{i-2}}{x_i + d}$$

$$y_i \geqslant \frac{a_i + a_{i-1} + a_{i-2}}{x_i + 2d} = \frac{S_i - S_{i-3}}{x_i + 2d} \quad \ldots\ldots$$

图中 S_i 表示 a_i 的前缀和。试着写出 y_i 的表达式：

[SDOI2013] 保护出题人



图中 S_i 表示 a_i 的前缀和。试着写出 y_i 的表达式：

$$y_i = \max_{1 \le j \le i} \frac{S_i - S_{j-1}}{(x_i + i * d) - j * d}. \tag{1}$$

也就是点 $(x_i + i * d, S_i)$ 与 $(j * d, S_{j-1})$ 的连线的斜率。

[SDOI2013] 保护出题人

现在我们可以写出算法的大致框架:

1. 将 $(i*d, S_{i-1})$ 加入点集 P;
2. 在点集 P 中寻找与 (x_i+i*d, S_i) 连线的最大斜率 k;
3. $ans+=k$;
4. $i++$,然后重复第一步。

关键在于第二步如何优化。

[SDOI2013] 保护出题人

现在我们可以写出算法的大致框架：

1. 将 $(i*d, S_{i-1})$ 加入点集 P；
2. 在点集 P 中寻找与 $(x_i + i*d, S_i)$ 连线的最大斜率 k；
3. $ans+=k$；
4. $i++$，然后重复第一步。

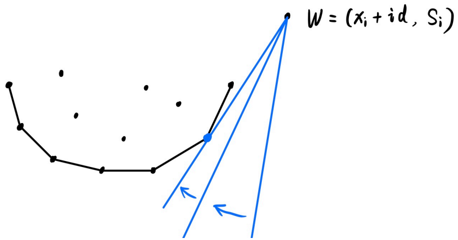
关键在于第二步如何优化。斜率最大的点一定在 P 的**下凸壳**中！为什么？

[SDOI2013] 保护出题人

现在我们可以写出算法的大致框架：

1. 将 $(i*d, S_{i-1})$ 加入点集 P；
2. 在点集 P 中寻找与 (x_i+i*d, S_i) 连线的最大斜率 k；
3. $ans+=k$；
4. $i++$，然后重复第一步。

关键在于第二步如何优化。斜率最大的点一定在 P 的**下凸壳**中！为什么？



如图所示，从 W 向下引一条射线，并逆时针旋转，碰到的第一个点一定是下凸壳的某个顶点。

[SDOI2013] 保护出题人

那么我们只需要维护 P 的下凸壳就行了，因为加入新点的顺序自然地就是从左到右，所以每次加入一个新点，用凸包算法里的 `while` 循环维护一下就好了。

怎么快速求下凸壳里的最大斜率？

[SDOI2013] 保护出题人

那么我们只需要维护 P 的下凸壳就行了，因为加入新点的顺序自然地就是从左到右，所以每次加入一个新点，用凸包算法里的 `while` 循环维护一下就好了。
怎么快速求下凸壳里的最大斜率？

我们记下凸壳顶点为 $P_1, ..., P_m$，容易发现 $k_{WP_1}, ..., k_{WP_m}$ 是先增后减的，所以三分即可。

[SDOI2014] 向量集

维护一个向量集合，在线支持以下操作：

- `A x y` $(|x|, |y| \le 10^8)$：加入向量 (x, y)；
- `Q x y l r` $(|x|, |y| \le 10^8$，$1 \le l \le r \le t$，其中 t 为已经加入的向量个数)：询问第 l 个到第 r 个加入的向量与向量 (x, y) 的点积的最大值。

集合初始时为空。

[SDOI2014] 向量集

我们记 P_i 是第 i 个加入的向量的坐标，并且我们把 P_i 视为一个点。我们记 Q 是询问时输入的向量坐标，同样的我们把 Q 视为一个点。那么我们需要最大化：

$$\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{OQ}, \quad i \in [l, r]. \tag{2}$$

[SDOI2014] 向量集

我们记 P_i 是第 i 个加入的向量的坐标，并且我们把 P_i 视为一个点。我们记 Q 是询问时输入的向量坐标，同样的我们把 Q 视为一个点。那么我们需要最大化：

$$\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{OQ}, \quad i \in [l, r]. \tag{2}$$

这等价于最大化：

$$\frac{\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|}, \quad i \in [l, r]. \tag{3}$$

而这就是线段 OP_i 在直线 l_{OQ} 上的投影长度。投影长度最大的点一定位于⋯⋯？

[SDOI2014] 向量集

我们记 P_i 是第 i 个加入的向量的坐标，并且我们把 P_i 视为一个点。我们记 Q 是询问时输入的向量坐标，同样的我们把 Q 视为一个点。那么我们需要最大化：

$$\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{OQ}, \quad i \in [l, r]. \tag{2}$$

这等价于最大化：

$$\frac{\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|}, \quad i \in [l, r]. \tag{3}$$

而这就是线段 OP_i 在直线 l_{OQ} 上的投影长度。投影长度最大的点一定位于⋯⋯？

$P_l, ..., P_r$ 的 **凸包**！（包括上凸壳和下凸壳，因为坐标可能有负的）

[SDOI2014] 向量集

维护一个线段树即可，每个节点存储对应区间的上凸壳、下凸壳。询问时直接在线段树节点对应的区间上分别查询，然后取最大值即可。
现在问题是如何合并左右儿子的上（下）凸壳？

[SDOI2014] 向量集

维护一个线段树即可，每个节点存储对应区间的上凸壳、下凸壳。询问时直接在线段树节点对应的区间上分别查询，然后取最大值即可。现在问题是如何合并左右儿子的上（下）凸壳？

拿出来 sort 一遍显然是不好的，会变成两个 log。但是左右儿子的上（下）凸壳各自是排好序的，所以我们可以**二路归并**。

[SDOI2014] 向量集

维护一个线段树即可，每个节点存储对应区间的上凸壳、下凸壳。询问时直接在线段树节点对应的区间上分别查询，然后取最大值即可。现在问题是如何合并左右儿子的上（下）凸壳？

拿出来 sort 一遍显然是不好的，会变成两个 log。但是左右儿子的上（下）凸壳各自是排好序的，所以我们可以**二路归并**。

注意，合并过程在 insert 过程中发生，且只有当 $r == i$ 时才合并该节点的左右儿子的上（下）凸壳（这是因为当 $i < r$ 时，询问操作并不会访问到这个节点的凸包），这样可以保证复杂度是正确的。

[CERC2014] Mountainous landscape

给定平面内一个由点依次连接起来形成的折线 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，保证 x 坐标递增。
对于折线上的所有线段，找到最小的 $j > i$，使得存在一个在 P_jP_{j+1} 上的点可以被 P_iP_{i+1} 上的任何一个点看到，也就是**严格**在射线 P_iP_{i+1} 上方。若没有，输出 0.
多组数据。
$2 \le n \le 10^5$，坐标均在 10^9 以内。

[CERC2014] Mountainous landscape

仍然考虑用线段树维护上凸壳，这里我们可以提前建树。然后在线段树上二分：

[CERC2014] Mountainous landscape

仍然考虑用线段树维护上凸壳，这里我们可以提前建树。然后在线段树上二分：

- 若左儿子与 $[i+1, n]$ 有交，且左儿子的凸包与射线 P_iP_{i+1} 有交，那么往左走；

[CERC2014] Mountainous landscape

仍然考虑用线段树维护上凸壳，这里我们可以提前建树。然后在线段树上二分：

- 若左儿子与 $[i+1, n]$ 有交，且左儿子的凸包与射线 P_iP_{i+1} 有交，那么往左走；
- 若右儿子的凸包与射线 P_iP_{i+1} 有交，那么往右走；

[CERC2014] Mountainous landscape

仍然考虑用线段树维护上凸壳，这里我们可以提前建树。然后在线段树上二分：

- 若左儿子与 $[i+1,n]$ 有交，且左儿子的凸包与射线 P_iP_{i+1} 有交，那么往左走；
- 若右儿子的凸包与射线 P_iP_{i+1} 有交，那么往右走；
- 否则，说明答案不存在。

现在的问题是如何快速判断一个凸包与射线是否相交？

[CERC2014] Mountainous landscape

仍然考虑用线段树维护上凸壳，这里我们可以提前建树。然后在线段树上二分：

- 若左儿子与 $[i+1,n]$ 有交，且左儿子的凸包与射线 P_iP_{i+1} 有交，那么往左走；
- 若右儿子的凸包与射线 P_iP_{i+1} 有交，那么往右走；
- 否则，说明答案不存在。

现在的问题是如何快速判断一个凸包与射线是否相交？
凸包上边的斜率是递减的，可以二分找到第一个斜率 $\le k_{P_iP_{i+1}}$ 的边，这条边的左端点是最有可能位于射线 P_iP_{i+1} 上方的点，判断即可。

[HAOI2011] 防线修建（动态凸包）

给定平面内 m 个点，你需要支持如下操作：

- 询问上凸壳所有边的长度之和；
- 删除一个点。

$m \leq 10^5$，坐标都是 $[0, 10^4]$ 中的整数。

[HAOI2011] 防线修建（动态凸包）

先把所有操作离线，然后倒过来处理操作，即：先把没被删掉的点的凸包求好，然后按删除的顺序反过来把点依次加回去。

[HAOI2011] 防线修建（动态凸包）

先把所有操作离线，然后倒过来处理操作，即：先把没被删掉的点的凸包求好，然后按删除的顺序反过来把点依次加回去。

问题是新加的点并不在已有凸壳的右侧，怎么办？

[HAOI2011] 防线修建（动态凸包）

先把所有操作离线，然后倒过来处理操作，即：先把没被删掉的点的凸包求好，然后按删除的顺序反过来把点依次加回去。

问题是新加的点并不在已有凸壳的右侧，怎么办？

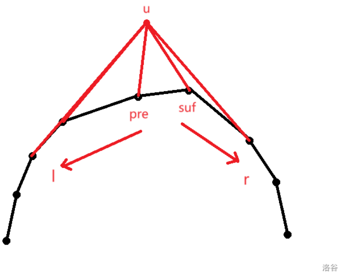
把凸壳视为两部分，一部分在新加点左侧，一部分在新加点右侧，我们需要二分找到分界点。

[HAOI2011] 防线修建（动态凸包）

先把所有操作离线，然后倒过来处理操作，即：先把没被删掉的点的凸包求好，然后按删除的顺序反过来把点依次加回去。

问题是新加的点并不在已有凸壳的右侧，怎么办？

把凸壳视为两部分，一部分在新加点左侧，一部分在新加点右侧，我们需要二分找到分界点。对于左侧，按照维护上凸壳的方式弹出一些点；对于右侧，也按照类似的方式弹出一些点；最后加入新点。

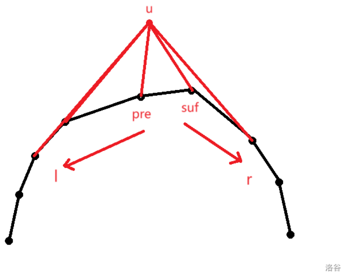


[HAOI2011] 防线修建（动态凸包）

先把所有操作离线，然后倒过来处理操作，即：先把没被删掉的点的凸包求好，然后按删除的顺序反过来把点依次加回去。

问题是新加的点并不在已有凸壳的右侧，怎么办？

把凸壳视为两部分，一部分在新加点左侧，一部分在新加点右侧，我们需要二分找到分界点。对于左侧，按照维护上凸壳的方式弹出一些点；对于右侧，也按照类似的方式弹出一些点；最后加入新点。



需要一个可以插入点、删除任意点、保序的结构，用 set 即可。

判断点与线段的位置关系

考虑如何判断点 P 是否在线段 AB 上。(不要去想斜率，因为算斜率会引入精度误差，而且斜率无穷大时还要特判)

判断点与线段的位置关系

考虑如何判断点 P 是否在线段 AB 上。(不要去想斜率，因为算斜率会引入精度误差，而且斜率无穷大时还要特判)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = 0 \tag{4}$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} < 0 \tag{5}$$

判断点与线段的位置关系

考虑如何判断点 P 是否在线段 AB 上。(不要去想斜率，因为算斜率会引入精度误差，而且斜率无穷大时还要特判)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = 0 \tag{4}$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} < 0 \tag{5}$$

```
bool PointInSegment(Point p, Point a, Point b){
    return Cross(b-p, a-p) == 0 && Dot(b-p, a-p) < 0;
}
```

判断点与线段的位置关系

考虑如何判断点 P 是否在线段 AB 上。(不要去想斜率，因为算斜率会引入精度误差，而且斜率无穷大时还要特判)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = 0 \tag{4}$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} < 0 \tag{5}$$

```
bool PointInSegment(Point p, Point a, Point b){
    return Cross(b-p, a-p) == 0 && Dot(b-p, a-p) < 0;
}
```

其实通过 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}$ 的符号，我们还可以判断 P 的方位：大于零时，在 $\overrightarrow{AB}$ 左侧；小于零时，在 $\overrightarrow{AB}$ 右侧。

判断两条线段是否相交

考虑如何判断线段 AB 与线段 CD 是否相交。

判断两条线段是否相交

考虑如何判断线段 AB 与线段 CD 是否相交。

两条线段相交当且仅当下面两个条件同时满足:

- A, B 在 l_{CD} 的两侧;
- C, D 在 l_{AB} 的两侧。

判断两条线段是否相交

考虑如何判断线段 AB 与线段 CD 是否相交。

两条线段相交当且仅当下面两个条件同时满足：

- A, B 在 l_{CD} 的两侧；
- C, D 在 l_{AB} 的两侧。

```
bool SegmentProperIntersection(Point a1, Point a2, Point b1, Point b2)
{
    long long c1 = Cross(b1-a1, a2-a1);
    long long c2 = Cross(b2-a1, a2-a1);
    long long c3 = Cross(a1-b1, b2-b1);
    long long c4 = Cross(a2-b1, b2-b1);
    return c1*c2 < 0 && c3 * c4 < 0;
}
```

判断点是否在凸多边形内部

考虑如何判断点 P 是否在凸多边形的内部（或者边界上）。其中凸多边形的顶点 $A_1, \dots, A_n$ 按照逆时针顺序给出。

判断点是否在凸多边形内部

考虑如何判断点 P 是否在凸多边形的内部（或者边界上）。其中凸多边形的顶点 $A_1, \ldots, A_n$ 按照逆时针顺序给出。

判断是否在边界上很简单，用刚刚的 `PointInSegment` 即可。

判断点是否在凸多边形内部

考虑如何判断点 P 是否在凸多边形的内部（或者边界上）。其中凸多边形的顶点 $A_1, \dots, A_n$ 按照逆时针顺序给出。

判断是否在边界上很简单，用刚刚的 `PointInSegment` 即可。

判断是否在内部只需检查以下条件：

$$\overrightarrow{A_i A_{i+1}} \times \overrightarrow{A_i P} > 0 \tag{6}$$

对所有的 i 都成立（当 $i = n$ 时，$i + 1$ 用 1 代替）。

判断点是否在任意多边形内部

考虑如何判断点 P 是否在任意多边形的内部（或者边界上）。其中多边形的顶点 $A_1, ..., A_n$ 按照逆时针顺序给出。

判断点是否在任意多边形内部

考虑如何判断点 P 是否在任意多边形的内部（或者边界上）。其中多边形的顶点 $A_1, \dots, A_n$ 按照逆时针顺序给出。

射线法：从 P 向任意方向引出一条射线，如果射线与多边形边界有奇数个交点，说明在内部，否则就在外部。（写程序时，一般取水平向右的射线）

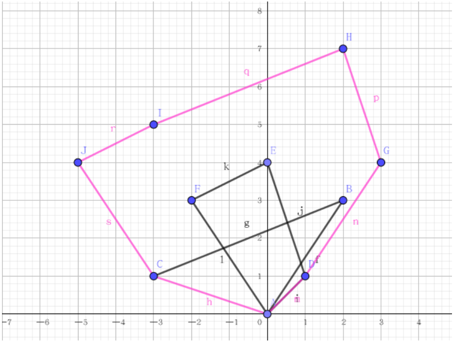
判断点是否在任意多边形内部

```
bool PointInPolygon(Point p,Point* res,int cnt)
{
    int wn=0;
    for (int i=0;i<cnt;i++)
    {
        if(res[i]==p||res[(i+1)%cnt]==p||PointInSegment(p,res[i],res[(i+1)%cnt]))
            return 1;
        // 射线法
        int k=Cross(res[(i+1)%cnt]-res[i],p-res[i]);
        int d1=res[i].y-p.y;
        int d2=res[(i+1)%cnt].y-p.y;
        if(k>0&&d1<=0&&d2>0) wn++;
        if(k<0&&d2<=0&&d1>0) wn--;
    }
    if(wn) return 1;
    return 0;
}
```

闵可夫斯基和

给定凸多边形区域 A 和 B，求：

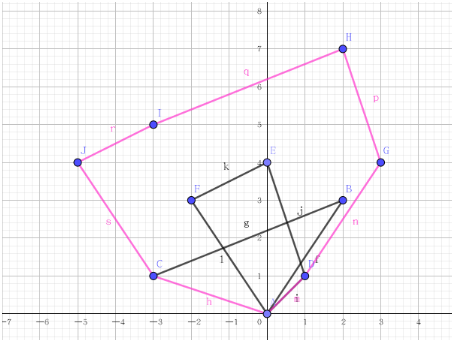
$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$



闵可夫斯基和

给定凸多边形区域 A 和 B，求：

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$



【解】可以看出，$A + B$ 的边全都由 A 和 B 的边平移得到。所以只要把所有的边放到一起，按极角排序即可。事实上，因为 A 和 B 的边分别已经按极角排好了序，直接二路归并即可，复杂度 $O(n + m)$。最后要把边向量恢复成顶点，然后去除共线顶点。

闵可夫斯基和

```
bool cmp(const Vector &a, const Vector &b){
    return cross(a, b) > 0;
}
int Minkovski(Point A[], Point ch1[], Point ch2[], int n, int m){
    for(int i = 0; i < n; i++)
        A[i+1] = ch1[(i+1)%n] - ch1[i];
    for(int i = 0; i < m; i++)
        A[n+i+1] = ch2[(i+1)%m] - ch2[i];
    A[0] = ch1[0] + ch2[0];
    inplace_merge(A+1, A+n+1, A+n+m+1, &cmpPolar);
    for(int i = 1; i <= n+m; i++)
        A[i] = A[i-1] + A[i]; // 把向量恢复成顶点

    // 去除共线顶点
    int tot = 2;
    for(int i = 2; i <= n+m; i++){
        if(cross(A[tot-1]-A[tot-2], A[i]-A[tot-1]) == 0) tot--;
        A[tot++] = A[i];
    }
    return tot - 1;
}
```

[JSOI2018] 战争

给定两个点集，分别求凸包（记作 A 和 B）。接下来多组询问，每次询问给出一个向量 w，问凸包 B 沿 w 平移后，和 A 是否相交。

数据范围：点数、询问数均 $\leq 10^5$.

[JSOI2018] 战争

设移动向量为 w，如果移动后两个凸包还存在交，即：

$$\exists a \in A,\ b \in B, \text{ s.t. } a = b + w.$$

也就是 $w = a - b$.

[JSOI2018] 战争

设移动向量为 w，如果移动后两个凸包还存在交，即：

$$\exists a \in A,\ b \in B,\ \text{s.t. } a = b + w.$$

也就是 $w = a - b$.

我们可以令 $B' = -B$，从而上面的条件等价于 $w \in A + B'$，求闵可夫斯基和即可。判断点是否在凸包内可以用二分做到单次 $O(\log n)$.

判断点是否在凸包内部的单 $\log$ 方法

现在，给定一个点 P，以及逆时针排序的凸包顶点 $B_1, ..., B_n$，我们想要快速判断 P 是否在凸包内部。

我们不妨假设 B_1 是原点（否则，可以将凸包和 p 同时沿 $-\overrightarrow{OB_1}$ 平移）。

判断点是否在凸包内部的单 log 方法

现在，给定一个点 P，以及逆时针排序的凸包顶点 $B_1, \ldots, B_n$，我们想要快速判断 P 是否在凸包内部。

我们不妨假设 B_1 是原点（否则，可以将凸包和 p 同时沿 $-\overrightarrow{OB_1}$ 平移）。

我们会发现 $\overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OB_3}, \ldots, \overrightarrow{OB_n}$ 此时是按极角序排列的。因此我们可以：

1. 首先判断 $\overrightarrow{OP}$ 是否在 $\overrightarrow{OB_2}$ 和 $\overrightarrow{OB_n}$ 之间；
2. 如果是，再二分找到第一个极角大于等于 $\overrightarrow{OP}$ 的向量 $\overrightarrow{OB_i}$，用叉乘判断 P 是否在 $\overrightarrow{B_{i-1}B_i}$ 左侧。

这就是 $O(\log n)$ 的判断方法。

判断点是否在凸包内部的单 log 方法

```
// 判断 p 是否在凸包 ch 内，要求 ch 的第一个顶点是原点
bool inconvex(Point ch[], const int &n, const Point &p){
    assert(ch[0].x == 0 && ch[0].y == 0);
    if(cross(ch[1], p) < 0 || cross(ch[n-1], p) > 0) return false;

    int i = lower_bound(ch+1, ch+n, p, cmpPolar) - ch;
    assert(i >= 1 && i < n);
    if(cross(ch[i], p) == 0) return p.len2() <= ch[i].len2();
    else return cross(ch[i] - ch[i-1], p - ch[i-1]) >= 0;
}
```

[CF1195F] Geometers Anonymous Club

给定 n 个凸多边形，总顶点数不超过 300000.

多次询问，每次给定区间 $[l, r]$，问第 l 个到第 r 个凸包的闵可夫斯基和有多少个顶点。

[CF1195F] Geometers Anonymous Club

根据闵可夫斯基和的性质，$A+B$ 的顶点数，就是 A 和 B 的所有边向量的不同极角数。

所以这个问题等价于：给定一个序列，每次询问一个区间，问区间中有多少个不同的数。（应该都会做吧）

Thank You