字符串进阶：扩展 kmp

Ebola

Institute of Mathematics,
Zhejiang University.

Jan, 2024

kmp 算法

kmp 算法解决的是单文本串、单模式串匹配问题，即：给定文本串 S 和模式串 T，求 T 在 S 中完整出现的所有位置。

复杂度是 $O(n)$.

kmp 算法

我们来回顾一下 kmp 算法的流程。首先有一个 next 数组，我这里把它写成 π，定义如下：

$$\pi(i) = \max\{k \mid T[1, ..., k] = T[i-k+1, ..., i],\ k = 0, ..., i-1\}$$

kmp 算法

我们来回顾一下 kmp 算法的流程。首先有一个 next 数组，我这里把它写成 π，定义如下：

$$\pi(i) = \max\{k \mid T[1,...,k] = T[i-k+1,...,i],\ k = 0,...,i-1\}$$

我们把 T（长 m）和 S（长 n，$n > m$）放到一起：`A = T#S`

对于一个位置 i，如果 $\pi(i) = m$，说明 T 从 $i-m+1$ 位置开始出现；反过来，如果 T 从 $i-m+1$ 位置开始出现，那么一定 $\pi(i) = m$。

我们只要找到 $\pi(i) = m$ 的位置，然后就知道答案了。

kmp 算法

现在考虑如何求 π 数组。
最暴力的求法， $O(n^3)$：

```
for(int i = 1; i <= n; i++){
    int k;
    for(k = i-1; k >= 0; k--)
        if(子串(1,...,k) == 子串(i-k+1,...,i))
            break;
    pi[i] = k;
}
```

kmp 算法

我们观察到：$\pi(i+1) \leq \pi(i)+1$，为什么？(举例说明)

kmp 算法

我们观察到：$\pi(i+1) \leq \pi(i)+1$，为什么？(举例说明)

借助这个观察，我们可以优化代码：

```
for(int i = 1; i <= n; i++){
    int k;
    for(k = pi[i-1]+1; k >= 0; k--)
        if(子串(1,...,k) == 子串(i-k+1,...,i))
            break;
    pi[i] = k;
}
```

这个复杂度是 $O(n^2)$

kmp 算法

现在我们看这个集合：

$$\mathcal{P}(i) = \{k \mid T[1, ..., k] = T[i-k+1, ..., i],\ k = 0, ..., i-1\}.$$

注意到 $\pi(i) = \max \mathcal{P}(i)$.

kmp 算法

现在我们看这个集合：

$$\mathcal{P}(i) = \{k \mid T[1, ..., k] = T[i-k+1, ..., i],\ k = 0, ..., i-1\}.$$

注意到 $\pi(i) = \max \mathcal{P}(i)$.

又注意到 $\pi(i) - 1 \in \mathcal{P}(i-1)$（为什么？）。

kmp 算法

现在我们看这个集合：

$$\mathcal{P}(i) = \{k \mid T[1,...,k] = T[i-k+1,...,i],\ k = 0,...,i-1\}.$$

注意到 $\pi(i) = \max \mathcal{P}(i)$.

又注意到 $\pi(i) - 1 \in \mathcal{P}(i-1)$（为什么？）。那么 k 循环可以只遍历 $\mathcal{P}(i-1)$ 里的数，像这样：

```
pi[1] = 0;
for(int i = 2; i <= n; i++){
    int k;
    for(k = max(P(i-1)); k >= 0; k=P(i-1)里面比k小的那个数)
        if(A[k+1] == A[i])
            break;
    pi[i] = k + 1;
}
```

kmp 算法

现在我们看这个集合：

$$\mathcal{P}(i) = \{k \mid T[1, ..., k] = T[i-k+1, ..., i],\ k = 0, ..., i-1\}.$$

注意到 $\pi(i) = \max \mathcal{P}(i)$.

又注意到 $\pi(i) - 1 \in \mathcal{P}(i-1)$（为什么？）。那么 k 循环可以只遍历 $\mathcal{P}(i-1)$ 里的数，像这样：

```
pi[1] = 0;
for(int i = 2; i <= n; i++){
    int k;
    for(k = max(P(i-1)); k >= 0; k=P(i-1)里面比k小的那个数)
        if(A[k+1] == A[i])
            break;
    pi[i] = k + 1;
}
```

注意到 $\mathcal{P}(i)$ 里面第二大的数是 $\pi(\pi(i))$，第三大的数是 $\pi(\pi(\pi(i)))$，⋯⋯（为什么？）所以上面的 k 循环很好实现。总复杂度 $O(n)$.

[HNOI2008] GT 考试

阿申准备报名参加 GT 考试，准考证号为 N 位数 $X_1, X_2 ... X_n$ $(0 \le X_i \le 9)$，他不希望准考证号上出现不吉利的数字。

他的不吉利数字 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ $(0 \le A_i \le 9)$ 有 M 位，不出现是指 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 中没有恰好一段等于 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，A_1 和 X_1 可以为 0。

阿申想知道不出现不吉利数字的号码有多少种，输出模 K 取余的结果。

$N \le 10^9$，$M \le 20$，$K \le 1000$。

[HNOI2008] GT 考试

设 $f_{i,j}$ 表示当前考虑到第 i 位，其中末尾和 $A_1 \ldots A_m$ 匹配了 j 位。
设 $g_{j,k}$ 表示当前末尾匹配了 j 位，如果添加一个数字后能够匹配 k 位，有多少种添加数字的方案。这是一个可以预处理的数组。

[HNOI2008] GT 考试

设 $f_{i,j}$ 表示当前考虑到第 i 位，其中末尾和 $A_1 \ldots A_m$ 匹配了 j 位。
设 $g_{j,k}$ 表示当前末尾匹配了 j 位，如果添加一个数字后能够匹配 k 位，有多少种添加数字的方案。这是一个可以预处理的数组。

我们得到转移方程：

$$f_{i,j} = \sum_{k=0}^{m-1} f_{i-1,k} g_{k,j}.$$

显然可以用矩阵快速幂优化（应该都会吧 ?）。

[HNOI2008] GT 考试

设 $f_{i,j}$ 表示当前考虑到第 i 位，其中末尾和 $A_1 \dots A_m$ 匹配了 j 位。
设 $g_{j,k}$ 表示当前末尾匹配了 j 位，如果添加一个数字后能够匹配 k 位，有多少种添加数字的方案。这是一个可以预处理的数组。

我们得到转移方程：

$$f_{i,j} = \sum_{k=0}^{m-1} f_{i-1,k} g_{k,j}.$$

显然可以用矩阵快速幂优化（应该都会吧 ?)。

g 数组可以用 kmp 来算。枚举当前匹配长度 j，再枚举下一个数字 c，用 next 数组算一下添加 c 之后末尾匹配长度是多少（记为 k），然后令 $g_{j,k}++$.

1. 基础回顾
2. 扩展 kmp （Z 函数）

扩展 kmp （Z 函数）

对于一个长度为 n 的字符串，定义 z_i 表示 s 与 $s[i \dots n]$ 的最长公共前缀长度。这就是 **Z 函数**。

扩展 kmp （Z 函数）

朴素求法是 $O(n^2)$ 的，像这样：

```
void get_z(char s[], int n, int z[]) {
    z[1] = n;
    for(int i = 2; i <= n; i++){
        z[i] = 0;
        while(i + z[i] - 1 < n && s[1 + z[i]] == s[i + z[i]]) z[i]++;
    }
}
```

在学习线性算法之前，我们先来看几个简单的应用。

字符串匹配

给定文本串 S 和模式串 T，求 T 在 S 中完整出现的所有位置。

字符串匹配

给定文本串 S 和模式串 T，求 T 在 S 中完整出现的所有位置。

【解】令 A=T#S，求出 A 的 Z 函数，然后找到所有 $z_i = |T|$ 的位置即可。

本质不同的子串

给定文本串 S，现在往 S 的开头添加一个字母 c，问增加了几个本质不同的子串。

本质不同的子串

给定文本串 S，现在往 S 的开头添加一个字母 c，问增加了几个本质不同的子串。

【解】求 cS 的 Z 函数，取最大值 $z_{\max}$，显然，长度超过 $z_{\max}$ 的前缀都是新增的本质不同子串（反之，长度不超过 $z_{\max}$ 的前缀都不是新增的本质不同子串）。

字符串的最小周期（UVA455 加强版）

给定一个长度为 $n\ (\leq 10^7)$ 的字符串 S，找到其最短的整周期，即寻找一个最短的字符串 T，使得 S 可以被若干个 T 拼接而成的字符串表示。

字符串的最小周期（UVA455 加强版）

给定一个长度为 $n\,(\leq 10^7)$ 的字符串 S，找到其最短的整周期，即寻找一个最短的字符串 T，使得 S 可以被若干个 T 拼接而成的字符串表示。

【解】求 S 的 Z 函数，找到最小的 n 的因数 i，满足 $i + z_{i+1} = n$.

最长回文前缀

给定一个长度为 $n\ (\leq 10^7)$ 的字符串 S，求一个最长的字符串 T，使 T 既是回文又是 S 的前缀。

最长回文前缀

给定一个长度为 $n\ (\le 10^7)$ 的字符串 S，求一个最长的字符串 T，使 T 既是回文又是 S 的前缀。

【解】把 S 翻转过来得到 S'，然后令 `A=S#S’`。找到第一个位置 $i > n$，满足 $i + z_i - 1 = 2n + 1$.

Z 函数的线性算法

我们称区间 $[i, i+z_i-1]$ 为 i 的 Z-box.

Z 函数的线性算法

我们称区间 $[i, i+z_i-1]$ 为 i 的 Z-box.

我们维护右端点最靠右的 Z-box，记作 $[l, r]$。根据定义，$S[l, r]$ 是 S 的前缀。在计算 z_i 时我们保证 $l \le i$，初始时 $l = r = 1$.

现在来计算 z_i。

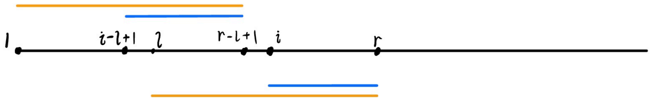
Z 函数的线性算法

我们称区间 $[i, i+z_i-1]$ 为 i 的 Z-box.

我们维护右端点最靠右的 Z-box，记作 $[l, r]$。根据定义，$S[l, r]$ 是 S 的前缀。在计算 z_i 时我们保证 $l \le i$，初始时 $l = r = 1$.

现在来计算 z_i。

Case 1$(i \le r)$：此时有 $S[i, r] = S[i-l+1, r-l+1]$.



显然，$z_i \ge \min(z_{i-l+1}, r-i+1)$. 此时：

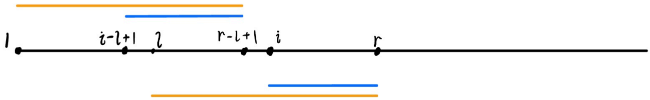
Z 函数的线性算法

我们称区间 $[i, i+z_i-1]$ 为 i 的 Z-box.

我们维护右端点最靠右的 Z-box，记作 $[l, r]$。根据定义，$S[l, r]$ 是 S 的前缀。在计算 z_i 时我们保证 $l \le i$，初始时 $l = r = 1$.

现在来计算 z_i。

Case 1$(i \le r)$：此时有 $S[i, r] = S[i-l+1, r-l+1]$.



显然，$z_i \ge \min(z_{i-l+1}, r-i+1)$. 此时：

- 若 $z_{i-l+1} < r-i+1$，则 $z_i = z_{i-l+1}$，无法继续扩展；

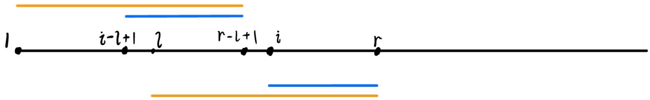
Z 函数的线性算法

我们称区间 $[i, i+z_i-1]$ 为 i 的 Z-box.

我们维护右端点最靠右的 Z-box，记作 $[l, r]$。根据定义，$S[l, r]$ 是 S 的前缀。在计算 z_i 时我们保证 $l \le i$，初始时 $l = r = 1$.

现在来计算 z_i。

Case 1$(i \le r)$：此时有 $S[i, r] = S[i-l+1, r-l+1]$.



显然，$z_i \ge \min(z_{i-l+1}, r-i+1)$. 此时：

- 若 $z_{i-l+1} < r-i+1$，则 $z_i = z_{i-l+1}$，无法继续扩展；
- 否则，我们令 $z_i = r-i+1$，然后暴力枚举下一个字符扩展 z_i。

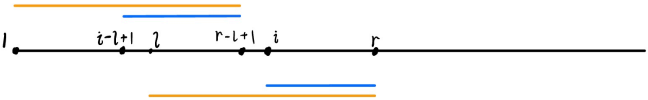
Z 函数的线性算法

我们称区间 $[i, i + z_i - 1]$ 为 i 的 Z-box.

我们维护右端点最靠右的 Z-box，记作 $[l, r]$。根据定义，$S[l, r]$ 是 S 的前缀。在计算 z_i 时我们保证 $l \leq i$，初始时 $l = r = 1$.

现在来计算 z_i。

Case 1$(i \leq r)$：此时有 $S[i, r] = S[i - l + 1, r - l + 1]$.



显然，$z_i \geq \min(z_{i-l+1}, r - i + 1)$. 此时：

- 若 $z_{i-l+1} < r - i + 1$，则 $z_i = z_{i-l+1}$，无法继续扩展；
- 否则，我们令 $z_i = r - i + 1$，然后暴力枚举下一个字符扩展 z_i。

Case 1$(i > r)$：此时从 $S[i]$ 开始暴力枚举。

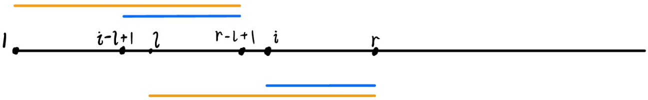
Z 函数的线性算法

我们称区间 $[i, i + z_i - 1]$ 为 i 的 Z-box.

我们维护右端点最靠右的 Z-box，记作 $[l, r]$。根据定义，$S[l, r]$ 是 S 的前缀。在计算 z_i 时我们保证 $l \leq i$，初始时 $l = r = 1$.

现在来计算 z_i。

Case 1$(i \leq r)$：此时有 $S[i, r] = S[i - l + 1, r - l + 1]$.



显然，$z_i \geq \min(z_{i-l+1}, r - i + 1)$. 此时：

- 若 $z_{i-l+1} < r - i + 1$，则 $z_i = z_{i-l+1}$，无法继续扩展；
- 否则，我们令 $z_i = r - i + 1$，然后暴力枚举下一个字符扩展 z_i。

Case 1$(i > r)$：此时从 $S[i]$ 开始暴力枚举。

注意：如果求出 z_i 后发现 $i + z_i - 1 > r$，则需要更新 $[l, r]$。（在线模拟）

Z 函数的线性算法

```
void get_z(char s[], int z[]){
    int n = strlen(s+1);
    int l = 1, r = 1;
    for(int i = 2; i <= n; i++){
        z[i] = (i <= r) ? min(z[i-l+1], r-i+1) : 0;
        // 注意：当 i<=r 且 z[i-l+1]<r-i+1 时，while 循环一定不会执行
        while(i+z[i] <= n && s[1+z[i]] == s[i+z[i]]) z[i]++;
        if(i+z[i]-1 > r) l = i, r = i+z[i]-1;
    }
    z[1] = n;
}
```

Z 函数的线性算法

```
void get_z(char s[], int z[]){
    int n = strlen(s+1);
    int l = 1, r = 1;
    for(int i = 2; i <= n; i++){
        z[i] = (i <= r) ? min(z[i-l+1], r-i+1) : 0;
        // 注意: 当 i<=r 且 z[i-l+1]<r-i+1 时, while 循环一定不会执行
        while(i+z[i] <= n && s[1+z[i]] == s[i+z[i]]) z[i]++;
        if(i+z[i]-1 > r) l = i, r = i+z[i]-1;
    }
    z[1] = n;
}
```

为什么这个算法是 $O(n)$ 的？

Z 函数的线性算法

```
void get_z(char s[], int z[]){
    int n = strlen(s+1);
    int l = 1, r = 1;
    for(int i = 2; i <= n; i++){
        z[i] = (i <= r) ? min(z[i-l+1], r-i+1) : 0;
        // 注意：当 i<=r 且 z[i-l+1]<r-i+1 时，while 循环一定不会执行
        while(i+z[i] <= n && s[1+z[i]] == s[i+z[i]]) z[i]++;
        if(i+z[i]-1 > r) l = i, r = i+z[i]-1;
    }
    z[1] = n;
}
```

为什么这个算法是 $O(n)$ 的？

【答】每执行一次 `while` 循环，必然导致 r 向后移动至少一位。而 $r \leq n$，所以总共最多执行 n 次。

【模板】扩展 KMP

给定两个字符串 a, b，长度 $\leq 2 \times 10^7$，你要求出两个数组：

- b 的 z 函数数组 z，即 b 与 b 的每一个后缀的 LCP 长度。
- b 与 a 的每一个后缀的 LCP 长度数组 p。

对于一个长度为 n 的数组 a，设其权值为 $\operatorname{xor}_{i=1}^{n} i \times (a_i + 1)$。

注：LCP，即 Longest Common Prefix，最长公共前缀。

【模板】扩展 KMP

给定两个字符串 a, b，长度 $\leq 2\times 10^7$，你要求出两个数组：

- b 的 z 函数数组 z，即 b 与 b 的每一个后缀的 LCP 长度。
- b 与 a 的每一个后缀的 LCP 长度数组 p。

对于一个长度为 n 的数组 a，设其权值为 $\operatorname{xor}_{i=1}^{n} i\times(a_i+1)$。

注：LCP，即 Longest Common Prefix，最长公共前缀。

【解】令 c=b#a，求它的 Z 函数 z^c 即可。$z_i^b=z_i^c$，$p_i=z^c_{|b|+1+i}$.

[UVA11475] Extend to Palindrome

给定一个字符串 S，在其末尾添加尽可能少的字符，使之成为回文串。

[UVA11475] Extend to Palindrome

设 S' 是 S 的反串，显然，答案不会比 SS' 更长。我们可以在 SS' 的基础上，从 S' 的开头部分删去尽可能多的东西。

[UVA11475] Extend to Palindrome

设 S' 是 S 的反串，显然，答案不会比 SS' 更长。我们可以在 SS' 的基础上，从 S' 的开头部分删去尽可能多的东西。

我们把 S 拆分，记为 $S = AT$，那么 $S' = T'A'$。我们可以考虑将 T' 删去，从而得到 ATA'，为了让它是一个回文串，T 必须是一个回文串。

[UVA11475] Extend to Palindrome

设 S' 是 S 的反串，显然，答案不会比 SS' 更长。我们可以在 SS' 的基础上，从 S' 的开头部分删去尽可能多的东西。

我们把 S 拆分，记为 $S = AT$，那么 $S' = T'A'$。我们可以考虑将 T' 删去，从而得到 ATA'，为了让它是一个回文串，T 必须是一个回文串。

问题转化成了：求 S 的一个尽可能长的后缀，且它恰好是一个回文串。这和我们之前讲的是一样的。

[CF432D] Prefixes and Suffixes

给你一个长度为 n 的长字符串，“完美子串”既是它的前缀也是它的后缀，求“完美子串”的个数且统计这些子串的在长字符串中出现的次数

[CF432D] Prefixes and Suffixes

如果 $i + z_i - 1 = n$，那么 $S[i, n](= S[1, n - i + 1])$ 就是一个完美子串。
如何统计出现次数？

[CF432D] Prefixes and Suffixes

如果 $i+z_i-1=n$，那么 $S[i,n](=S[1,n-i+1])$ 就是一个完美子串。
如何统计出现次数？

只需要统计每个前缀作为子串的出现次数，记第 i 个前缀的出现次数是 `cnt[i]`。对于一个位置 i，有
$S[i,i]=S[1,1],...,S[i,i+z_i-1]=S[1,z_i]$，所以令
`cnt[1]++,...,cnt[z[i]]++` 即可。

[CF432D] Prefixes and Suffixes

如果 $i + z_i - 1 = n$，那么 $S[i, n](= S[1, n - i + 1])$ 就是一个完美子串。如何统计出现次数？

只需要统计每个前缀作为子串的出现次数，记第 i 个前缀的出现次数是 cnt[i]。对于一个位置 i，有 $S[i, i] = S[1, 1], ..., S[i, i + z_i - 1] = S[1, z_i]$，所以令 cnt[1]++,...,cnt[z[i]]++ 即可。

不需要对每个 i 都从 1 枚举到 z_i 去统计，只要令 cnt[z[i]]++，最后对 cnt 数组做一次后缀和即可。

[UVA11022] String Factoring（加强版）

我们可以把字符串中连续几个相同的部分压缩成相同的一个。压缩可以嵌套进行，比如字符串 $DOODOO$ 可以先压缩成 $(DOO)^2$，然后压缩成 $(D(O)^2)^2$。

一个字符串的 Factoring 是它经过若干次压缩得到的结果，这个结果不能再次压缩。比如 $(DOO)^2$ 就不是 $DOODOO$ 的压缩，因为 $(DOO)^2$ 还可以进一步压缩成 $(D(O)^2)^2$。给定字符串 S（长度不超过 500 且仅包含大写英文字母），求出它的最短 Factoring 的长度。

[UVA11022] String Factoring（加强版）

区间 dp，设 $f_{l,r}$ 表示区间 $[l,r]$ 的答案。分两种情况：

[UVA11022] String Factoring（加强版）

区间 dp，设 $f_{l,r}$ 表示区间 $[l,r]$ 的答案。分两种情况：

1. 直接压缩：找到 $S[l,r]$ 的最小循环节 $S[l,c]$，令 $f_{l,r}=f_{l,c}$.

[UVA11022] String Factoring（加强版）

区间 dp，设 $f_{l,r}$ 表示区间 $[l,r]$ 的答案。分两种情况：

1. 直接压缩：找到 $S[l,r]$ 的最小循环节 $S[l,c]$，令 $f_{l,r}=f_{l,c}$.
2. 分段压缩：找一个分界点 k，对两侧分别压缩，即令 $f_{l,r}=\min(f_{l,r},f_{l,k}+f_{k+1,r})$.

[UVA11022] String Factoring（加强版）

区间 dp，设 $f_{l,r}$ 表示区间 $[l,r]$ 的答案。分两种情况：

1. 直接压缩：找到 $S[l,r]$ 的最小循环节 $S[l,c]$，令 $f_{l,r}=f_{l,c}$.
2. 分段压缩：找一个分界点 k，对两侧分别压缩，即令 $f_{l,r}=\min(f_{l,r},f_{l,k}+f_{k+1,r})$.

对于第一种情况，可以借助 Z 函数 $O(r-l)$ 完成，因此总复杂度 $O(n^3)$.

[UVA11022] String Factoring（加强版）

给定一个字符串 S，多组询问，每次给定一个整数 k，问在 S 的所有子串中挑选出 k 个完全一样的字符串有几种方案。对 10^9+7 取模。

例如 $S=\text{"}ababa\text{"}$，$k=2$，则答案为 7.

字符串长度 ≤ 5000，询问总数 $\leq 10^5$.

[UVA11022] String Factoring（加强版）

如果我们知道出现 i 次的本质不同子串有多少个，记作 f_i，那么对于给定 k 的询问，答案就是：

$$\mathrm{ans}_k = \sum_{i=k}^{n} f_i \binom{i}{k}.$$

如果数组 f 已知，我们可以 $O(n^2)$ 算出 $\mathrm{ans}_1, \ldots, \mathrm{ans}_n$，然后 $O(1)$ 回答每个询问。

[UVA11022] String Factoring（加强版）

如果我们知道出现 i 次的本质不同子串有多少个，记作 f_i，那么对于给定 k 的询问，答案就是：

$$\mathrm{ans}_k = \sum_{i=k}^{n} f_i \binom{i}{k}.$$

如果数组 f 已知，我们可以 $O(n^2)$ 算出 $\mathrm{ans}_1, \ldots, \mathrm{ans}_n$，然后 $O(1)$ 回答每个询问。

现在来考虑如何计算数组 f。

[UVA11022] String Factoring（加强版）

问题：求出现 i 次的本质不同子串有多少个（f_i）。

[UVA11022] String Factoring（加强版）

问题：求出现 i 次的本质不同子串有多少个（f_i）。

由于本质不同子串总共最多 $\frac{1}{2}n^2$ 个，我们可以给它们编一个号，用数组 `idx[l][r]` 来表示 $S[l,r]$ 是第几个本质不同子串。然后用 `cnt[i]` 表示第 i 个本质不同子串出现了几次。

[UVA11022] String Factoring（加强版）

问题：求出现 i 次的本质不同子串有多少个（f_i）。

由于本质不同子串总共最多 $\frac{1}{2}n^2$ 个，我们可以给它们编一个号，用数组 idx[l][r] 来表示 $S[l, r]$ 是第几个本质不同子串。然后用 cnt[i] 表示第 i 个本质不同子串出现了几次。

可以发现 cnt 是 idx 的桶，f 又是 cnt 的桶。

```
for(int i = 1; i <= n; i++)
    for(int j = i; j <= n; j++)
        cnt[idx[i][j]]++;
for(int i = 1; i <= maxidx; i++)
    f[cnt[i]]++;
```

现在关键是求出 idx 数组。

[UVA11022] String Factoring（加强版）

问题：求 `idx[l][r]` 表示 $S[l,r]$ 是第几个本质不同的子串。（内容相同但位置不同的子串应该有相同的编号）

[UVA11022] String Factoring（加强版）

问题：求 idx[l][r] 表示 $S[l,r]$ 是第几个本质不同的子串。（内容相同但位置不同的子串应该有相同的编号）

我们从后往前求，首先令 idx[n][n]=1. 接下来我们依次往前添加字符。

[UVA11022] String Factoring（加强版）

问题：求 `idx[l][r]` 表示 $S[l,r]$ 是第几个本质不同的子串。（内容相同但位置不同的子串应该有相同的编号）

我们从后往前求，首先令 `idx[n][n]=1`. 接下来我们依次往前添加字符。假设现在已经求完了 `idx[l][r]` $(i < l \le r)$，我们要求出 `idx[i][r]` $(i \le r \le n)$.

[UVA11022] String Factoring（加强版）

问题：求 `idx[l][r]` 表示 $S[l,r]$ 是第几个本质不同的子串。（内容相同但位置不同的子串应该有相同的编号）

我们从后往前求，首先令 `idx[n][n]=1`. 接下来我们依次往前添加字符。假设现在已经求完了 `idx[l][r]` $(i<l\le r)$，我们要求出 `idx[i][r]` $(i\le r\le n)$.

我们令 $T=S[i,n]$，求出 T 的 Z 数组 $z_1,\dots,z_{n-i+1}$. 找到最大值 $z_j=\max\{z_1,\dots,z_{n-i+1}\}$.

[UVA11022] String Factoring（加强版）

问题：求 `idx[l][r]` 表示 $S[l,r]$ 是第几个本质不同的子串。（内容相同但位置不同的子串应该有相同的编号）

我们从后往前求，首先令 `idx[n][n]=1`. 接下来我们依次往前添加字符。假设现在已经求完了 `idx[l][r]` $(i<l\le r)$，我们要求出 `idx[i][r]` $(i\le r\le n)$.

我们令 $T=S[i,n]$，求出 T 的 Z 数组 $z_1,\ldots,z_{n-i+1}$. 找到最大值 $z_j=\max\{z_1,\ldots,z_{n-i+1}\}$.

现在，$S[i,i],\ldots,S[i,i+z_j-1]$ 都是在后面出现过的子串，所以令 `idx[i][i+k]=idx[i+j-1][i+j-1+k]` $(0\le k<z_j)$. 而

$S[i,i+z_j],\ldots,S[i,n]$ 都是新增的本质不同子串，给它们新的编号即可。

[NOIP2020] 字符串匹配

小 C 学习完了字符串匹配的相关内容，现在他正在做一道习题。

对于一个字符串 S，题目要求他找到 S 的所有具有下列形式的拆分方案数：

$S = ABC$，$S = ABABC$，$S = ABAB \dots ABC$，其中 A，B，C 均是非空字符串，且 A 中出现奇数次的字符数量不超过 C 中出现奇数次的字符数量。

更具体地，我们可以定义 AB 表示两个字符串 A，B 相连接，例如 $A = \text{aab}$，$B = \text{ab}$，则 $AB = \text{aabab}$。

并递归地定义 $A^1 = A$，$A^n = A^{n-1}A$（$n \geq 2$ 且为正整数）。例如 $A = \text{abb}$，则 $A^3 = \text{abbabbabb}$。

则小 C 的习题是求 $S = (AB)^i C$ 的方案数，其中 $F(A) \leq F(C)$，$F(S)$ 表示字符串 S 中出现奇数次的字符的数量。两种方案不同当且仅当拆分出的 A、B、C 中有至少一个字符串不同。

小 C 并不会做这道题，只好向你求助，请你帮帮他。

[NOIP2020] 字符串匹配

我们构造两个辅助数组：`suf[p]`$= F(S[p,n])$，`f[p][c]` 表示 $F(S[1,1]), F(S[1,2]), ..., F(S[1,p])$ 中 $\leq c$ 的数有几个。

我们先别管怎么求这两个数组，假如已经求出来了，我们应该如何计算答案？

[NOIP2020] 字符串匹配

我们构造两个辅助数组：suf[p]$= F(S[p,n])$，f[p][c] 表示 $F(S[1,1]), F(S[1,2]), ..., F(S[1,p])$ 中 $\leq c$ 的数有几个。

我们先别管怎么求这两个数组，假如已经求出来了，我们应该如何计算答案？

我们可以枚举 $AB = S[1,p]$，然后枚举 i，那么 $(AB)^i = S[1,ip]$，$C = S[ip+1,n]$．由于我们要保证 $S[1,p]$ 是 $S[1,ip]$ 的循环节，因此必须满足 $ip \leq p + z_{p+1}$（为什么？）；当然，为了保证 C 非空，还要满足 $ip \leq n-1$.

[NOIP2020] 字符串匹配

我们构造两个辅助数组：suf[p]$= F(S[p,n])$，f[p][c] 表示 $F(S[1,1]),F(S[1,2]),...,F(S[1,p])$ 中 $\leq c$ 的数有几个。

我们先别管怎么求这两个数组，假如已经求出来了，我们应该如何计算答案？

我们可以枚举 $AB=S[1,p]$，然后枚举 i，那么 $(AB)^i=S[1,ip]$，$C=S[ip+1,n]$. 由于我们要保证 $S[1,p]$ 是 $S[1,ip]$ 的循环节，因此必须满足 $ip\leq p+z_{p+1}$（为什么？）；当然，为了保证 C 非空，还要满足 $ip\leq n-1$.

现在，我们要考虑将 $S[1,p]$ 拆分成 A 和 B，并且保证 $F(A)\leq F(C)$，以及 A,B 均非空，那么方案有多少种？

[NOIP2020] 字符串匹配

我们构造两个辅助数组：suf[p]$= F(S[p,n])$，f[p][c] 表示 $F(S[1,1]), F(S[1,2]), ..., F(S[1,p])$ 中 $\leq c$ 的数有几个。

我们先别管怎么求这两个数组，假如已经求出来了，我们应该如何计算答案？

我们可以枚举 $AB = S[1,p]$，然后枚举 i，那么 $(AB)^i = S[1,ip]$，$C = S[ip+1,n]$. 由于我们要保证 $S[1,p]$ 是 $S[1,ip]$ 的循环节，因此必须满足 $ip \leq p + z_{p+1}$（为什么？）；当然，为了保证 C 非空，还要满足 $ip \leq n-1$.

现在，我们要考虑将 $S[1,p]$ 拆分成 A 和 B，并且保证 $F(A) \leq F(C)$，以及 A, B 均非空，那么方案有多少种？（答案是 f[p-1][suf[i*p+1]]）.

[NOIP2020] 字符串匹配

我们构造两个辅助数组：suf[p]= $F(S[p,n])$，f[p][c] 表示 $F(S[1,1]), F(S[1,2]), ..., F(S[1,p])$ 中 $\le c$ 的数有几个。

我们先别管怎么求这两个数组，假如已经求出来了，我们应该如何计算答案？

我们可以枚举 $AB = S[1,p]$，然后枚举 i，那么 $(AB)^i = S[1,ip]$，$C = S[ip+1,n]$. 由于我们要保证 $S[1,p]$ 是 $S[1,ip]$ 的循环节，因此必须满足 $ip \le p + z_{p+1}$（为什么？）；当然，为了保证 C 非空，还要满足 $ip \le n-1$.

现在，我们要考虑将 $S[1,p]$ 拆分成 A 和 B，并且保证 $F(A) \le F(C)$，以及 A, B 均非空，那么方案有多少种？（答案是 f[p-1][suf[i*p+1]]）.

```
long long ans = 0;
// 枚举 AB = S[1,p]
for(int p = 2; p < n; p++){
    int ed = min(p + z[p+1], n-1);
    // 枚举 (AB)^i 中的 i
    for(int i = 1; i * p <= ed; i++)
        // 寻找 S[1,p] 有几种划分成 AB 的方案使得 F(A)<=F(C)
        ans += f[p-1][suf[i * p + 1]];
}
```

复杂度：$\sum_{p=1}^{n} O(\frac{n}{p}) = O(n \ln n)$.

[NOIP2020] 字符串匹配

现在来思考如何求辅助数组：`suf[p]`$= F(S[p,n])$，以及 `f[p][c]` 表示 $F(S[1,1]), F(S[1,2]), ..., F(S[1,p])$ 中 $\le c$ 的数有几个。

[NOIP2020] 字符串匹配

现在来思考如何求辅助数组：suf[p]$=F(S[p,n])$，以及 f[p][c] 表示 $F(S[1,1]),F(S[1,2]),...,F(S[1,p])$ 中 $\leq c$ 的数有几个。

suf[p] 非常好求，直接看代码

```
suf[n+1] = 0;
memset(cnt, 0, sizeof(cnt));
for(int p = n; p >= 1; p--){
    cnt[s[p]-'a']++;
    if(cnt[s[p]-'a'] & 1) suf[p] = suf[p+1] + 1;
    else suf[p] = suf[p+1] - 1;
}
```

这是因为 $F(S[p,n])=F(S[p+1,n])\pm 1$，加一还是减一由 $S[p]$ 在 $S[p,n]$ 中出现的次数决定。

[NOIP2020] 字符串匹配

现在来思考如何求辅助数组：suf[p]= $F(S[p,n])$，以及 f[p][c] 表示 $F(S[1,1]), F(S[1,2]), ..., F(S[1,p])$ 中 $\leq c$ 的数有几个。

suf[p] 非常好求，直接看代码

```
suf[n+1] = 0;
memset(cnt, 0, sizeof(cnt));
for(int p = n; p >= 1; p--){
    cnt[s[p]-'a']++;
    if(cnt[s[p]-'a'] & 1) suf[p] = suf[p+1] + 1;
    else suf[p] = suf[p+1] - 1;
}
```

这是因为 $F(S[p,n]) = F(S[p+1,n]) \pm 1$，加一还是减一由 $S[p]$ 在 $S[p,n]$ 中出现的次数决定。

事实上，为了求出 f[p][c] 数组，我们还需要一个辅助数组：pre[p]= $F(S[1,p])$，现在请大家仿照上面的代码写出求 pre 的代码。

[NOIP2020] 字符串匹配

现在，我们先统计 $F(S[1,1]),\ldots,F(S[1,p])$ 中 $=c$ 的数有几个。

```
for(int p = 1; p <= n; p++){
    memcpy(f[p], f[p-1], sizeof(f[p]));
    f[p][pre[p]]++;
}
```

[NOIP2020] 字符串匹配

现在，我们先统计 $F(S[1,1]),...,F(S[1,p])$ 中 $=c$ 的数有几个。

```
for(int p = 1; p <= n; p++){
    memcpy(f[p], f[p-1], sizeof(f[p]));
    f[p][pre[p]]++;
}
```

再对 c 做一个前缀和，就得到了我们需要的 f[p][c].

```
for(int p = 1; p <= n; p++)
    for(int c = 1; c <= 26; c++)
        f[p][c] += f[p][c-1];
```

Thank You