计算几何 4：平面最近点对、扫描线、辛普森积分

Ebola

Institute of Mathematics,
Zhejiang University.

Jan, 2024

1. 平面最近点对
2. 扫描线
3. 辛普森积分

平面最近点对

给定平面上 $n\ (\leq 4 \times 10^5)$ 个点，求最近点对的距离。坐标范围：$[-10^7, 10^7]$.

请不要“充分发扬人类智慧”。

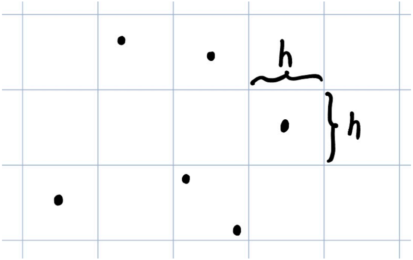
平面最近点对

先介绍一种复杂度有保证的随机方法。

平面最近点对

先介绍一种复杂度有保证的随机方法。

设 h 是前 i 个点的最近点对距离。我们用 $h \times h$ 的网格来存储前 i 个点（要用到哈希表）。显然，每个格子最多只有 4 个点，否则最近点对距离一定小于 h。

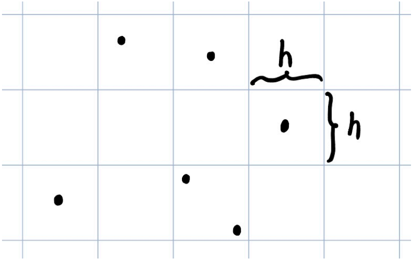


现在，要求点 $i+1$ 和前 i 个点之间的最近距离 c，只需要枚举点 $i+1$ 周围的九个格子即可，最多 36 个点，是 $O(1)$ 的。

平面最近点对

先介绍一种复杂度有保证的随机方法。

设 h 是前 i 个点的最近点对距离。我们用 $h \times h$ 的网格来存储前 i 个点（要用到哈希表）。显然，每个格子最多只有 4 个点，否则最近点对距离一定小于 h。



现在，要求点 $i+1$ 和前 i 个点之间的最近距离 c，只需要枚举点 $i+1$ 周围的九个格子即可，最多 36 个点，是 $O(1)$ 的。

如果 $c < h$，那么就要重构网格，重构网格的复杂度是 $O(i)$ 的。但如果先把所有点随机打乱，那么任何一个点 i 是前 i 个最近点对的概率是 $\frac{1}{i}$，所以期望复杂度 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} O(i) = O(n)$.（常数巨大，甚至跑不过 $n \log n$）

平面最近点对

现在来介绍 $n\log n$ 的方法。该方法基于分治。

平面最近点对

现在来介绍 $n \log n$ 的方法。该方法基于分治。

将所有点从左到右排序，分成两半；假如我们已经求出了两个点都在前一半的最近点对、两个点都在后一半的最近点对，其中较近的距离记为 h。现在我们要求第一个点在前一半、第二个点在后一半的最近点对。

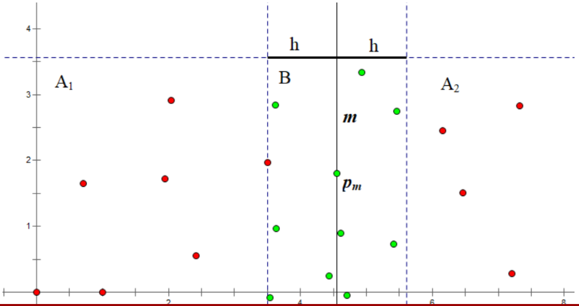
平面最近点对

现在来介绍 $n\log n$ 的方法。该方法基于分治。

将所有点从左到右排序，分成两半；假如我们已经求出了两个点都在前一半的最近点对、两个点都在后一半的最近点对，其中较近的距离记为 h。现在我们要求第一个点在前一半、第二个点在后一半的最近点对。

现在，假设直线 $x=x_m$ 是左右两部分的分界线，我们可以肯定，我们想求的点对一定在 B 中：

$$B=\{(x,y)\mid x_m-h\le x\le x_m+h\}.$$

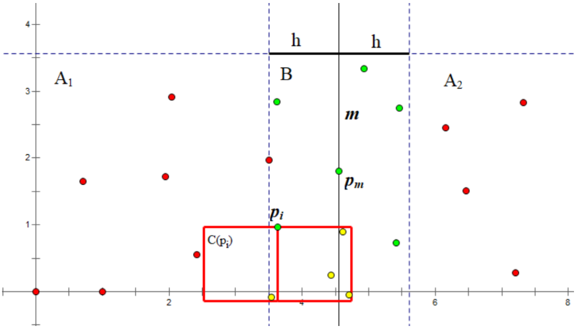


平面最近点对

现在，我们来枚举 B 中的点 p_i，我们想找到另一个 B 中的点 p_j 与它构成距离小于 h 的最近点对，所以 p_j 一定在 $C(p_i)$ 中：

$$C(p_i) = \{p_j \mid p_j \in B \text{ 且 } y_i - h \le y_j \le y_i\}.$$

（为了避免重复，我们只考虑纵坐标小于 y_i 的那些点）



平面最近点对

现在，我们得到了分治的大致步骤：

1. 递归处理左右两个子问题，取较小值得到 h；
2. 将区间内的所有点按纵坐标从小到大排序；
3. 挑选出区域 B 中的所有点；
4. 枚举 B 中的点 p_i，向前枚举 p_j 并更新答案，直到 $y_j < y_i - h$。

平面最近点对

现在，我们得到了分治的大致步骤：

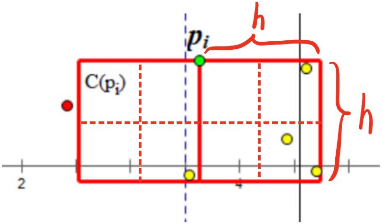
1. 递归处理左右两个子问题，取较小值得到 h；
2. 将区间内的所有点按纵坐标从小到大排序；
3. 挑选出区域 B 中的所有点；
4. 枚举 B 中的点 p_i，向前枚举 p_j 并更新答案，直到 $y_j < y_i - h$。

如果用 `sort` 来排序，复杂度会变成两个 $\log$，这样不好。但如果左右两个子区间分别按纵坐标排好了序，我们只要 $O(n)$ 二路归并就行了。

现在只剩一个问题：第四步看起来可能会退化成 $O(n^2)$。

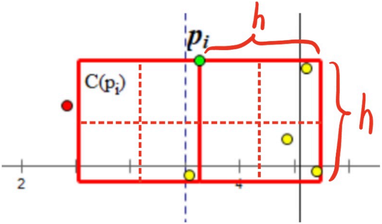
平面最近点对

我们把 $C(p_i)$ 的区域切割成 8 个格子，如下图所示。



平面最近点对

我们把 $C(p_i)$ 的区域切割成 8 个格子，如下图所示。



对于没有跨过分界线的格子，每个格子里最多只能有一个点，否则左侧的最近点对距离一定会 $< h$；同理，对于跨过分界线的格子，每个格子里最多只能有两个点。因此，$C(p_i)$ 中最多只有 10 个点（不包括 p_i 本身）。

事实上，可以进一步证明：$C(p_i)$ 中最多只有 7 个点（不包括 p_i 本身）。不过不重要，总之我们知道了第四步中的 j 循环最多跑常数次，因此合并过程的总复杂度是 $O(n)$ ，那么分治的总复杂度就是 $O(n\log n)$。

平面最小周长三角形

在给定的一组点中，选择三个点，使得它们构成的三角形周长最小。

平面最小周长三角形

做法和最近点对一样。分治，先找到两部分内部的最小周长三角形，记周长为 d，然后在区域 B 中查找：

$$B = \{(x, y) \mid x_m - \frac{d}{2} \leq x \leq x_m + \frac{d}{2}\}.$$

注意这里用了 $\frac{d}{2}$，因为周长为 d 的三角形最长边一定小于 $\frac{d}{2}$.

平面最小周长三角形

做法和最近点对一样。分治，先找到两部分内部的最小周长三角形，记周长为 d，然后在区域 B 中查找：

$$B = \{(x, y) \mid x_m - \frac{d}{2} \leq x \leq x_m + \frac{d}{2}\}.$$

注意这里用了 $\frac{d}{2}$，因为周长为 d 的三角形最长边一定小于 $\frac{d}{2}$. 接下来一样的，在 $C(p_i)$ 中枚举 p_j 和 p_k：

$$C(p_i) = \{p_j \mid p_j \in B \text{ 且 } y_i - \frac{d}{2} \leq y_j \leq y_i\}.$$

同样可以证明 $C(p_i)$ 中至多有常数个点，所以复杂度有保证。

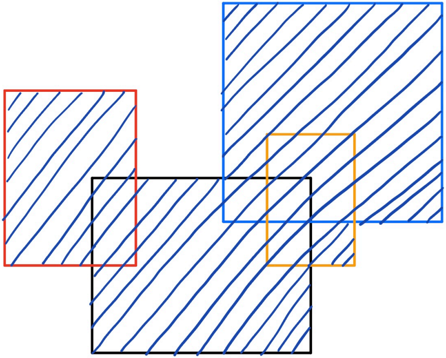
[CF120J] Minimum Sum

题意翻译

- **本题需文件操作**，从 `input.txt` 读入，输出到 `output.txt`。
- 给出 n 个向量。
- 对于任意一个向量 $v_i = (x_i, y_i)$，你可以使之变成一下之一：
  - $v_i^1 = (x_i, y_i)$
  - $v_i^2 = (-x_i, y_i)$
  - $v_i^3 = (x_i, -y_i)$
  - $v_i^4 = (-x_i, -y_i)$
- 你需要找到一组 $1 \le i, j \le n, i \ne j, 1 \le k_1, k_2 \le 4$ 使得 $|v_i^{k_1} + v_j^{k_2}|$ 最小。其中 $|a|$ 为向量 a 的模长。

[POJ1151] Atlantis

给定平面上 n 个矩形，求被矩形覆盖区域的面积。



$n \leq 100$，坐标范围 $[0, 10^5]$.

[POJ1151] Atlantis

我们想象一条从下往上走的水平直线，扫过矩形覆盖区域。（这里切出 ppt，手动播放动图 scanning.svg）

[POJ1151] Atlantis

我们想象一条从下往上走的水平直线，扫过矩形覆盖区域。（这里切出ppt，手动播放动图 scanning.svg）

我们需要维护扫描线和矩形覆盖区域相交的部分，每当相交部分发生变化，就计算：相交部分的长度 $\times$ 上次发生变化的位置到现在的高度，这就是这一部分区域的面积。把每一部分面积加起来即得到答案。

[POJ1151] Atlantis

如何维护扫描线和矩形覆盖区域相交的部分？

[POJ1151] Atlantis

如何维护扫描线和矩形覆盖区域相交的部分？

我们设数组 $a_1, ..., a_m$， a_i 表示扫描线的一小段 $[i, i+1)$ 和几个矩形相交。我们可以用线段树来维护这个数组。对于一个矩形 $[x_l, x_r] \times [y_l, y_r]$，当扫描线到达下边界 y_l 时，就令 $a_{x_l}, ..., a_{x_r}$ 都加一；当扫描线到达上边界 y_r 时，就令 $a_{x_l}, ..., a_{x_r}$ 都减一。可以用线段树的区间加来维护。

[POJ1151] Atlantis

如何维护扫描线和矩形覆盖区域相交的部分？

我们设数组 $a_1, \dots, a_m$， a_i 表示扫描线的一小段 $[i, i+1)$ 和几个矩形相交。我们可以用线段树来维护这个数组。对于一个矩形 $[x_l, x_r] \times [y_l, y_r]$，当扫描线到达下边界 y_l 时，就令 $a_{x_l}, \dots, a_{x_r}$ 都加一；当扫描线到达上边界 y_r 时，就令 $a_{x_l}, \dots, a_{x_r}$ 都减一。可以用线段树的区间加来维护。

每个线段树节点需要记录自己所表示的线段中，非零部分的总长度。每次做加法时，如果当前节点表示的线段完全位于加法区间中，就打上区间 $+1$ 标记。向上合并时，如果有区间加法标记，非零部分长度就是线段长度，否则，就把左右儿子的非零部分总长度加起来。

当然，扫描线也可以是从左往右扫的竖直直线，看个人习惯。

值域离散化

如果坐标范围是 $[0, 10^9]$ 怎么办？

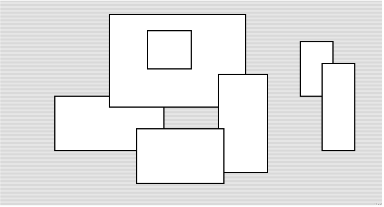
值域离散化

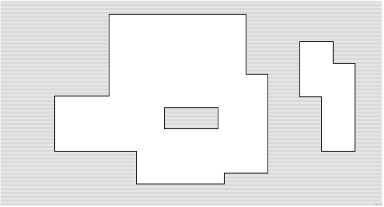
如果坐标范围是 $[0, 10^9]$ 怎么办？

离散化。把所有可能的横坐标按顺序排列成 $x_1, ..., x_t$，然后建立 $[1, t]$ 的线段树。每次经过矩形边界要做加法时，先在所有横坐标中找到矩形顶点的横坐标 x_i, x_j，然后对 $[i, j]$ 进行区间加（或减）一。当然，统计线段 $[l, r]$ 的长度时，要用 $x_r - x_l$.

[USACO5.5] 矩形周长 Picture

给定若干个矩形，合并成一个图形，求周长。矩形数量 ≤ 5000，坐标范围 10^5





[USACO5.5] 矩形周长 Picture

我们把周长分成两个部分：横线的总长度、竖线的总长度。

[USACO5.5] 矩形周长 Picture

我们把周长分成两个部分：横线的总长度、竖线的总长度。

对于横线的总长度，我们用一根水平直线从下往上扫描。如果 y_i 和 y_{i+1} 是相邻两个扫描高度（即扫描线发生变化的位置），扫描线在 y_i 处和区域相交的长度是 L_i（注意，如果某个矩形的上边界在 y_i 处，我们不算它和扫描线相交；如果下边界在 y_i 处，则算它和扫描线相交），在 y_{i+1} 处和区域相交的长度是 L_{i+1}，那么 y_{i+1} 处露出来的横线长度就是 $|L_i - L_{i+1}|$（可以画图感受）。

[USACO5.5] 矩形周长 Picture

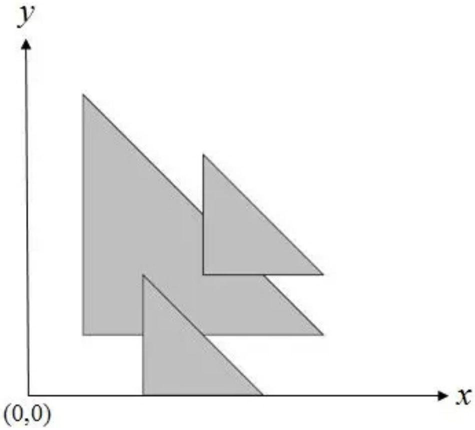
我们把周长分成两个部分：横线的总长度、竖线的总长度。

对于横线的总长度，我们用一根水平直线从下往上扫描。如果 y_i 和 y_{i+1} 是相邻两个扫描高度（即扫描线发生变化的位置），扫描线在 y_i 处和区域相交的长度是 L_i（注意，如果某个矩形的上边界在 y_i 处，我们不算它和扫描线相交；如果下边界在 y_i 处，则算它和扫描线相交），在 y_{i+1} 处和区域相交的长度是 L_{i+1}，那么 y_{i+1} 处露出来的横线长度就是 $|L_i - L_{i+1}|$（可以画图感受）。

竖线总长度同理，用竖直直线从左往右扫即可。

[HNOI2012] 三角覆盖问题

求三角覆盖面积。



三角形数量 $\leq 10^4$，坐标范围 $[0, 10^6]$.

[HNOI2012] 三角覆盖问题

从左到右**一格一格扫**。每到一个位置可能发生三种事情：线段上端点位置减一、增加一段新的线段、删除一个退化成点的线段。后两种事情总共发生 $O(n)$ 次，第一种事情会发生很多很多次，要优化。

[HNOI2012] 三角覆盖问题

从左到右**一格一格扫**。每到一个位置可能发生三种事情：线段上端点位置减一、增加一段新的线段、删除一个退化成点的线段。后两种事情总共发生 $O(n)$ 次，第一种事情会发生很多很多次，要优化。

如果某时刻一条线段被另一条完全覆盖，那么这条线段以后永远不会产生贡献，可以删去。（加入新线段时，把被它完全覆盖住的线段弹出；如果它自身被完全覆盖，则不添加之）最后得到的线段一定是下端点单调递增时，上端点也单调递增，可以用 set 维护。

[HNOI2012] 三角覆盖问题

从左到右**一格一格扫**。每到一个位置可能发生三种事情：线段上端点位置减一、增加一段新的线段、删除一个退化成点的线段。后两种事情总共发生 $O(n)$ 次，第一种事情会发生很多很多次，要优化。

如果某时刻一条线段被另一条完全覆盖，那么这条线段以后永远不会产生贡献，可以删去。（加入新线段时，把被它完全覆盖住的线段弹出；如果它自身被完全覆盖，则不添加之）最后得到的线段一定是下端点单调递增时，上端点也单调递增，可以用 set 维护。

当两线段相交时，下方线段上端点的改变并不会影响总覆盖长度。我们可以把它拆成：上方线段长度 + 下方线段长度-相交线段长度。这样，每一部分线段长度都是随着扫描线移动而减一的。用小根堆维护相交线段，当有相交线段退化成点时删去之。

[HNOI2012] 三角覆盖问题

从左到右**一格一格扫**。每到一个位置可能发生三种事情：线段上端点位置减一、增加一段新的线段、删除一个退化成点的线段。后两种事情总共发生 $O(n)$ 次，第一种事情会发生很多很多次，要优化。

如果某时刻一条线段被另一条完全覆盖，那么这条线段以后永远不会产生贡献，可以删去。（加入新线段时，把被它完全覆盖住的线段弹出；如果它自身被完全覆盖，则不添加之）最后得到的线段一定是下端点单调递增时，上端点也单调递增，可以用 set 维护。

当两线段相交时，下方线段上端点的改变并不会影响总覆盖长度。我们可以把它拆成：上方线段长度 + 下方线段长度-相交线段长度。这样，每一部分线段长度都是随着扫描线移动而减一的。用小根堆维护相交线段，当有相交线段退化成点时删去之。

这题暴力加各种优化其实可以过，数据很水，正解写起来细节非常多，大家量力而行。

二维数点问题

给定平面上 n $(\leq 10^5)$ 个点 (x_i, y_i)，以及 m $(\leq 10^5)$ 个矩形 $[l_i, r_i] \times [d_i, u_i]$，问每个矩形包含了几个点（边界也算）。

坐标范围 $[0, 10^6]$（更大的话也可以离散化）。

二维数点问题

一根线从左往右扫，碰到一个点就让位置 y_i 加一；碰到矩形左边界，就让答案 $\text{ans}_i -= \text{sum}(d_i, u_i)$；碰到矩形右边界，就让答案 $\text{ans}_i += \text{sum}(d_i, u_i)$。

二维数点问题

一根线从左往右扫，碰到一个点就让位置 y_i 加一；碰到矩形左边界，就让答案 $\text{ans}_i -= \text{sum}(d_i, u_i)$；碰到矩形右边界，就让答案 $\text{ans}_i += \text{sum}(d_i, u_i)$。

注意当扫描线到达一个新位置时，正确的操作顺序应该是：处理左边界、处理加点、处理右边界。

单点加、区间求和，用树状数组即可。

[ARC077C] guruguru

给定一个数组 $a_1, ..., a_n$ 和数字 M，从左到右依次操作，每次要把 a_i 变成 a_{i+1}（不操作 a_n），可以使用如下两种操作：

- 令 a_i 加一（当 $a_i = M$ 时，则令它变为 1）；
- 直接令 $a_i = X$。

现在，请你确定 X，使总操作次数最少。

[ARC077C] guruguru

可以将给定的数列看作若干个线段 $[a_i, a_{i+1}]$，若设定点在这个线段内（模意义下），则相当于可以从 a_i 跳到设定点，然后再一步一步走到 a_{i+1}，节省了 $x - a_i - 1$ 步。

[ARC077C] guruguru

可以将给定的数列看作若干个线段 $[a_i, a_{i+1}]$，若设定点在这个线段内（模意义下），则相当于可以从 a_i 跳到设定点，然后再一步一步走到 a_{i+1}，节省了 $x - a_i - 1$ 步。

于是我们可以将所有线段按左端点排序，然后枚举设定点的位置。对于枚举到的位置，将包含它的线段全部加入即可。这相当于一个扫描线的过程，扫到一个点，将左端点位于该位置的线段全部加入，右端点位于该位置的线段全部删除。然后维护：当前加入的线段数量、当前能节省的总步数。

[AH2017/HNOI2017] 影魔

奈文摩尔有 n 个灵魂，他们在影魔宽广的体内可以排成一排，从左至右标号 1 到 n。第 i 个灵魂的战斗力为 k_i，灵魂们以点对的形式为影魔提供攻击力。对于灵魂对 i, j $(i < j)$ 来说，若不存在 k_s $(i < s < j)$ 大于 k_i 或者 k_j，则会为影魔提供 p_1 的攻击力。另一种情况，令 c 为 $k_{i+1}, k_{i+2}, \cdots, k_{j-1}$ 的最大值，若 c 满足：$k_i < c < k_j$，或者 $k_j < c < k_i$，则会为影魔提供 p_2 的攻击力，当这样的 c 不存在时，自然不会提供这 p_2 的攻击力；其他情况的点对，均不会为影魔提供攻击力。

影魔的挚友噬魂鬼在一天造访影魔体内时被这些灵魂吸引住了，他想知道，对于任意一段区间 $[a, b]$，位于这些区间中的灵魂对会为影魔提供多少攻击力，即考虑所有满足 $a \le i < j \le b$ 的灵魂对 i, j 提供的攻击力之和。

顺带一提，灵魂的战斗力组成一个 1 到 n 的排列：$k_1, k_1, \cdots, k_n$。

[AH2017/HNOI2017] 影魔

换句话说：(i,j) 产生 p_1 贡献要求区间端点是最大值和次大值；产生 p_2 贡献只要求区间某一个端点是最大值。

对于一个位置 i，假设左右比它大的第一个位置分别为 L_i 和 R_i，特别地，若右边没有比第 i 个数大的数，则 $R_i = n+1$（L_i 同理）。考虑包含位置 i 的点对产生多少贡献？

[AH2017/HNOI2017] 影魔

换句话说：(i,j) 产生 p_1 贡献要求区间端点是最大值和次大值；产生 p_2 贡献只要求区间某一个端点是最大值。

对于一个位置 i，假设左右比它大的第一个位置分别为 L_i 和 R_i，特别地，若右边没有比第 i 个数大的数，则 $R_i = n+1$（L_i 同理）。考虑包含位置 i 的点对产生多少贡献？

先考虑 $j > i$，显然当 $j > R_i$ 时不产生贡献；而 (i, R_i) 的贡献是 p_1；$(i, i+1), (i, i+2), ..., (i, R_i - 1)$ 产生的贡献是 p_2。我们先把这类贡献加起来。

[AH2017/HNOI2017] 影魔

换句话说：(i,j) 产生 p_1 贡献要求区间端点是最大值和次大值；产生 p_2 贡献只要求区间某一个端点是最大值。

对于一个位置 i，假设左右比它大的第一个位置分别为 L_i 和 R_i，特别地，若右边没有比第 i 个数大的数，则 $R_i = n+1$（L_i 同理）。考虑包含位置 i 的点对产生多少贡献？

先考虑 $j > i$，显然当 $j > R_i$ 时不产生贡献；而 (i, R_i) 的贡献是 p_1；$(i, i+1), (i, i+2), ..., (i, R_i - 1)$ 产生的贡献是 p_2。我们先把这类贡献加起来。

从右往左扫描线，每扫到一个位置 i，就对区间 $[i+1, R_i - 1]$ 执行区间 $+p_2$ 操作；再给位置 R_i 执行 $+p_1$ 操作（*）；然后处理左端点在 i 的询问，对询问区间 $[q_l, q_r]$ 进行求和，作为这部分的答案贡献给该询问。

[AH2017/HNOI2017] 影魔

换句话说：(i,j) 产生 p_1 贡献要求区间端点是最大值和次大值；产生 p_2 贡献只要求区间某一个端点是最大值。

对于一个位置 i，假设左右比它大的第一个位置分别为 L_i 和 R_i，特别地，若右边没有比第 i 个数大的数，则 $R_i = n+1$（L_i 同理）。考虑包含位置 i 的点对产生多少贡献？

先考虑 $j > i$，显然当 $j > R_i$ 时不产生贡献；而 (i, R_i) 的贡献是 p_1；$(i, i+1), (i, i+2), ..., (i, R_i - 1)$ 产生的贡献是 p_2。我们先把这类贡献加起来。

从右往左扫描线，每扫到一个位置 i，就对区间 $[i+1, R_i-1]$ 执行区间 $+p_2$ 操作；再给位置 R_i 执行 $+p_1$ 操作（*）；然后处理左端点在 i 的询问，对询问区间 $[q_l, q_r]$ 进行求和，作为这部分的答案贡献给该询问。

现在考虑 $j < i$ 的部分，其实完全类似。但是我们刚刚挖了一个不大的坑⋯⋯？

[AH2017/HNOI2017] 影魔

换句话说：(i,j) 产生 p_1 贡献要求区间端点是最大值和次大值；产生 p_2 贡献只要求区间某一个端点是最大值。

对于一个位置 i，假设左右比它大的第一个位置分别为 L_i 和 R_i，特别地，若右边没有比第 i 个数大的数，则 $R_i = n+1$（L_i 同理）。考虑包含位置 i 的点对产生多少贡献？

先考虑 $j > i$，显然当 $j > R_i$ 时不产生贡献；而 (i, R_i) 的贡献是 p_1；$(i,i+1),(i,i+2),...,(i,R_i-1)$ 产生的贡献是 p_2。我们先把这类贡献加起来。

从右往左扫描线，每扫到一个位置 i，就对区间 $[i+1, R_i-1]$ 执行区间 $+p_2$ 操作；再给位置 R_i 执行 $+p_1$ 操作（*）；然后处理左端点在 i 的询问，对询问区间 $[q_l, q_r]$ 进行求和，作为这部分的答案贡献给该询问。

现在考虑 $j < i$ 的部分，其实完全类似。但是我们刚刚挖了一个不大的坑⋯⋯？

在考虑第二部分的时候，当扫到 R_i 位置时，由于 $L_{R_i} < i$，所以 (i, R_i) 被当成了一个贡献为 p_2 的点对。这怎么办？

[AH2017/HNOI2017] 影魔

换句话说：(i,j) 产生 p_1 贡献要求区间端点是最大值和次大值；产生 p_2 贡献只要求区间某一个端点是最大值。

对于一个位置 i，假设左右比它大的第一个位置分别为 L_i 和 R_i，特别地，若右边没有比第 i 个数大的数，则 $R_i = n+1$（L_i 同理）。考虑包含位置 i 的点对产生多少贡献？

先考虑 $j > i$，显然当 $j > R_i$ 时不产生贡献；而 (i, R_i) 的贡献是 p_1；$(i, i+1), (i, i+2), ..., (i, R_i - 1)$ 产生的贡献是 p_2。我们先把这类贡献加起来。

从右往左扫描线，每扫到一个位置 i，就对区间 $[i+1, R_i - 1]$ 执行区间 $+p_2$ 操作；再给位置 R_i 执行 $+p_1$ 操作（*）；然后处理左端点在 i 的询问，对询问区间 $[q_l, q_r]$ 进行求和，作为这部分的答案贡献给该询问。

现在考虑 $j < i$ 的部分，其实完全类似。但是我们刚刚挖了一个不大的坑⋯⋯？

在考虑第二部分的时候，当扫到 R_i 位置时，由于 $L_{R_i} < i$，所以 (i, R_i) 被当成了一个贡献为 p_2 的点对。这怎么办？

对，就在（*）的位置，把那个操作改成 $+(p_1 - p_2)$ 就可以抵消了。

1. 平面最近点对
2. 扫描线
3. 辛普森积分

问题引入

给定一个函数 $f(x)$ 和区间 $[a,b]$，求

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

的近似值。

我们给出一个公式:

$$I(a,b)=\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

假设 $f(x)$ 是一个二次函数，那么恰好满足:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I(a,b)$$

如果 $f(x)$ 不是二次函数呢？

我们给出一个公式：

$$I(a,b)=\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

假设 $f(x)$ 是一个二次函数，那么恰好满足：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I(a,b)$$

如果 $f(x)$ 不是二次函数呢？我们可以计算 $I(a,b)$，$I\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$，$I\left(\frac{a+b}{2},b\right)$，如果

$$\left|I(a,b)-\left(I\left(a,\frac{a+b}{2}\right)+I\left(\frac{a+b}{2},b\right)\right)\right|<\varepsilon$$

我们就认为我们的计算已经足够精确，将 $I(a,b)$ 作为结果返回即可。否则，递归处理两个子区间。

代码

```
double I(double l,double r)
{
    double mid=(l+r)/2;
    return (F(l)+4*F(mid)+F(r))*(r-l)/6;
}
double simpson(double l,double r,double A)
{
    double mid=(l+r)/2;
    double L=I(l,mid),R=I(mid,r);
    if(fabs(L+R-A)<eps) return L+R;
    return simpson(l,mid,L)+simpson(mid,r,R);
}
double simpson(double l,double r){return simpson(l,r,I(l,r));}
```

[NOI2005] 月下柠檬树

求一棵由圆台、圆锥组成的树在平行光下的投影面积。

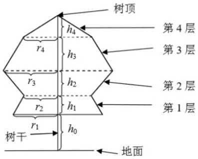


图 1 柠檬树的纵剖面图

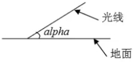
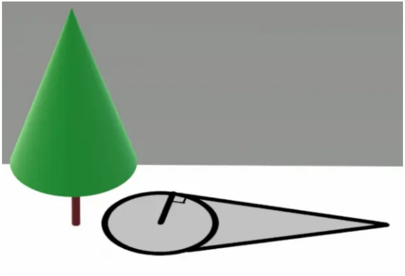
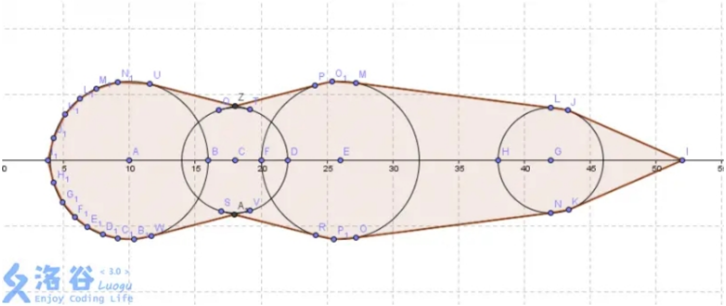


图 2 月光角度示意图

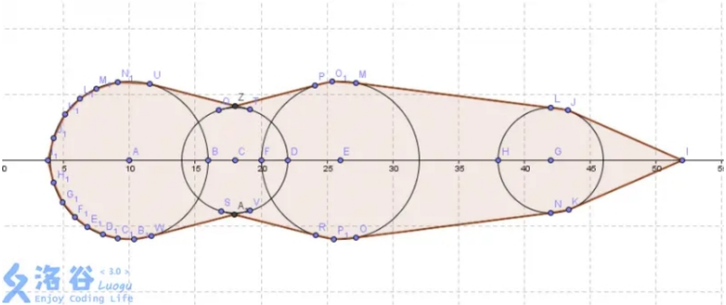


[NOI2005] 月下柠檬树



根据光线角度算出所有圆的圆心坐标，再算出相邻两个圆的公切线。注意：如果在投影里，一个圆被旁边的圆完全包含，则应该跳过之。把所有的圆存好、所有的公切线成对存好。

[NOI2005] 月下柠檬树



根据光线角度算出所有圆的圆心坐标，再算出相邻两个圆的公切线。注意：如果在投影里，一个圆被旁边的圆完全包含，则应该跳过之。把所有的圆存好、所有的公切线成对存好。

接下来用辛普森积分求面积，我们只需要解决直线 $x = t$ 与图形相交部分的长度。因为图形是一个单连通区域，我们可以枚举所有圆，求它与圆相交部分的长度；再枚举所有成对的公切线，求它被两条公切线夹住部分的长度；最后把求得的长度取最大值，就是和图形相交部分的长度。

Thank You