

高级计数技巧：生成函数与多项式运算

Ebola

Institute of Mathematics,
Zhejiang University.

July, 2023

- ① 生成函数
- ② 快速数论变换 (NTT)
- ③ 多项式运算
- ④ 多项式的其它应用
- ⑤ 参考文献

① 生成函数

普通生成函数

指数生成函数

② 快速数论变换 (NTT)

③ 多项式运算

④ 多项式的其它应用

⑤ 参考文献

① 生成函数

普通生成函数

指数生成函数

② 快速数论变换 (NTT)

③ 多项式运算

④ 多项式的其它应用

⑤ 参考文献

定义与例子

对于一个数列 a_0, a_1, a_2, \dots , 它的普通生成函数为:

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

定义与例子

对于一个数列 a_0, a_1, a_2, \dots , 它的普通生成函数为:

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

- $\{1, 2, 3\}$ 的普通生成函数为: $1 + 2x + 3x^2$
- $\{1, 1, 1, \dots\}$ 的普通生成函数为: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

封闭形式

考虑 $\{1, 1, 1, \dots\}$ 的普通生成函数:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

封闭形式

考虑 $\{1, 1, 1, \dots\}$ 的普通生成函数:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

注意到

$$xF(x) + 1 = F(x)$$

因此

$$F(x) = \frac{1}{1-x}$$

我们称这种没有求和符号的表达式为封闭形式

封闭形式

求数列 $\{1, 0, 1, 0, \dots\}$ 的普通生成函数，并化为封闭形式

封闭形式

求数列 $\{1, 0, 1, 0, \dots\}$ 的普通生成函数，并化为封闭形式

【解】

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

封闭形式

求数列 $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ 的普通生成函数，并化为封闭形式

封闭形式

求数列 $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ 的普通生成函数，并化为封闭形式

【解】

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (x^{n+1})' \\
 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' \\
 &= \left(\frac{1}{1-x} \right)' \\
 &= \frac{1}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

组合计数例子

假设你去买水果，一共要买 n 个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

组合计数例子

假设你去买水果，一共要买 n 个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

【解】设买 i 个苹果的方案数为 a_i ，事实上 a_i 仅在 i 为偶数时为 1，否则为 0，因此苹果的生成函数为：

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x^2}$$

组合计数例子

假设你去买水果，一共要买 n 个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

【解】设买 i 个苹果的方案数为 a_i ，事实上 a_i 仅在 i 为偶数时为 1，否则为 0，因此苹果的生成函数为：

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x^2}$$

同理，西瓜和梨的生成函数为

$$G(x) = 1 + x, \quad H(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

组合计数例子

假设你去买水果，一共要买 n 个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

【解】设买 i 个苹果的方案数为 a_i ，事实上 a_i 仅在 i 为偶数时为 1，否则为 0，因此苹果的生成函数为：

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x^2}$$

同理，西瓜和梨的生成函数为

$$G(x) = 1 + x, \quad H(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

相乘得到

$$F(x)G(x)H(x) = \frac{1}{(1 - x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)x^n$$

所以一共有 $n + 1$ 种购买方案。

① 生成函数

普通生成函数

指数生成函数

② 快速数论变换 (NTT)

③ 多项式运算

④ 多项式的其它应用

⑤ 参考文献

定义与例子

对于一个数列 a_0, a_1, a_2, \dots , 它的指数生成函数为:

$$F(x) = \sum_n a_n \frac{x^n}{n!}$$

定义与例子

对于一个数列 a_0, a_1, a_2, \dots , 它的指数生成函数为:

$$F(x) = \sum_n a_n \frac{x^n}{n!}$$

- $\{1, 2, 3\}$ 的指数生成函数为: $1 + x + \frac{1}{2}x^2$
- $\{1, 1, 1, \dots\}$ 的指数生成函数为: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

封闭形式

考虑 $\{1, 1, 1, \dots\}$ 的指数生成函数:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

封闭形式

求数列 $\{1, 0, 1, 0, \dots\}$ 的指数生成函数，并化为封闭形式

封闭形式

求数列 $\{1, 0, 1, 0, \dots\}$ 的指数生成函数，并化为封闭形式

【解】

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\
 &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})
 \end{aligned}$$

例题选讲：森林计数

求 n 个点带标号、深度不超过 k 的森林一共有多少种。

① 生成函数

② 快速数论变换 (NTT)

③ 多项式运算

④ 多项式的其它应用

⑤ 参考文献

问题引入

给定多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

求 $h(x) = f(x)g(x)$ 的各项系数，对 998244353 取模。

原根

注意: $998244353 = 119 \times 2^{23} + 1$

我们说 3 是 998244353 的原根, 因为 $3^1, 3^2, \dots, 3^{998244352}$ 对 998244353 取模的结果两两不同。下面为了方便我们记

$$p = 998244353$$

原根

注意: $998244353 = 119 \times 2^{23} + 1$

我们说 3 是 998244353 的原根, 因为 $3^1, 3^2, \dots, 3^{998244352}$ 对 998244353 取模的结果两两不同。下面为了方便我们记 $p = 998244353$

根据费马小定理, $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, 那么令 $\omega_n = 3^{119 \times 2^{24-l}}$ (其中 $n = 2^l$), 我们会发现 $\omega_n^n = 1$, 所以 ω_n 可以作为 n 次单位根!

原根

注意： $998244353 = 119 \times 2^{23} + 1$

我们说 3 是 998244353 的原根，因为 $3^1, 3^2, \dots, 3^{998244352}$ 对 998244353 取模的结果两两不同。下面为了方便我们记 $p = 998244353$

根据费马小定理， $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ，那么令 $\omega_n = 3^{119 \times 2^{24-l}}$ （其中 $n = 2^l$ ），我们会发现 $\omega_n^n = 1$ ，所以 ω_n 可以作为 n 次单位根！

把 FFT 中的运算全部换成取模意义下的运算，再把 n 次单位复根替换成这里的 ω_n ，就得到了 NTT，它的性质就是取模意义下的 FFT。

代码

```
1 void NTT(int *a,bool INTT)
2 {
3     for(int i=0;i<len;i++) r[i]=(r[i/2]/2)|(((i&1)<<(l-1)));
4     for(int i=0;i<len;i++) if(i<r[i]) swap(a[i],a[r[i]]);
5     for(int i=1;i<len;i<=1)
6     {
7         int p=(i<<1);
8         int wn=Pow(3,(Mod-1)/p);
9         if(INTT) wn=Pow(wn,Mod-2);
10        for(int j=0;j<len;j+=p)
11        {
12            int w=1;
13            for(int k=0;k<i;k++)
14            {
15                int x=a[j+k],y=1ll*w*a[i+j+k]%Mod;
16                a[j+k]=(x+y)%Mod;
17                a[i+j+k]=(x-y+Mod)%Mod;
18                w=1ll*w*wn%Mod;
19            }
20        }
21    }
22    //为了方便，我们通常把INTT的最后一步除以n也写进NTT函数里
23    if(INTT) for(int i=0;i<len;i++) a[i]=1ll*a[i]*inv%Mod;
24 }
```

- 1 生成函数
- 2 快速数论变换 (NTT)
- 3 多项式运算**
- 4 多项式的其它应用
- 5 参考文献

多项式牛顿迭代

给定多项式 $g(x)$, 求一个多项式 $f(x)$, 满足

$$g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n} \quad (1)$$

注意: $\pmod{x^n}$ 的意思是只保留最低的 n 项。

多项式牛顿迭代

给定多项式 $g(x)$, 求一个多项式 $f(x)$, 满足

$$g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n} \tag{1}$$

注意: $(\text{mod } x^n)$ 的意思是只保留最低的 n 项。

考虑倍增。设 $f_0(x)$ 是方程 (1) 在 $(\text{mod } x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ 意义下的解, 那么 $f(x) - f_0(x)$ 的最低次项就是 $x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 项。考虑泰勒展开:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(f_0(x))}{i!} (f(x) - f_0(x))^i \pmod{x^n} \\ &\equiv g(f_0(x)) + g'(f_0(x))(f(x) - f_0(x)) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

多项式牛顿迭代

给定多项式 $g(x)$, 求一个多项式 $f(x)$, 满足

$$g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n} \tag{1}$$

注意: $\pmod{x^n}$ 的意思是只保留最低的 n 项。

考虑倍增。设 $f_0(x)$ 是方程 (1) 在 $\pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$ 意义下的解, 那么 $f(x) - f_0(x)$ 的最低次项就是 $x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 项。考虑泰勒展开:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(f_0(x))}{i!} (f(x) - f_0(x))^i \pmod{x^n} \\ &\equiv g(f_0(x)) + g'(f_0(x))(f(x) - f_0(x)) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

由方程 (1) 得:

$$f(x) \equiv f_0(x) - \frac{g(f_0(x))}{g'(f_0(x))} \pmod{x^n}$$

多项式求逆

给定一个多项式 $f(x)$, 求一个多项式 $g(x)$, 使得

$$f(x)g(x) \equiv 1 \pmod{x^n} \quad (2)$$

多项式求逆

给定一个多项式 $f(x)$, 求一个多项式 $g(x)$, 使得

$$f(x)g(x) \equiv 1 \pmod{x^n} \quad (2)$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = \frac{1}{g(x)} - f(x)$$

多项式求逆

给定一个多项式 $f(x)$, 求一个多项式 $g(x)$, 使得

$$f(x)g(x) \equiv 1 \pmod{x^n} \quad (2)$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = \frac{1}{g(x)} - f(x)$$

设 $g_0(x)$ 是方程 (2) 在 $(\text{mod } x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ 意义下的解, 由牛顿迭代有:

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv g_0(x) - \frac{h(g_0(x))}{h'(g_0(x))} \pmod{x^n} \\ &\equiv g_0(x) + \frac{\frac{1}{g_0(x)} - f(x)}{\frac{1}{g_0^2(x)}} \pmod{x^n} \\ &\equiv 2g_0(x) - g_0^2(x)f(x) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

FFT 优化即可, 复杂度 $T(n) = T(n/2) + O(n \log n) = O(n \log n)$

多项式开方

给定一个多项式 $f(x)$, 求一个多项式 $g(x)$, 使得

$$g^2(x) \equiv f(x) \pmod{x^n} \quad (3)$$

多项式开方

给定一个多项式 $f(x)$, 求一个多项式 $g(x)$, 使得

$$g^2(x) \equiv f(x) \pmod{x^n} \quad (3)$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = g^2(x) - f(x)$$

多项式开方

给定一个多项式 $f(x)$ ，求一个多项式 $g(x)$ ，使得

$$g^2(x) \equiv f(x) \pmod{x^n} \tag{3}$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = g^2(x) - f(x)$$

设 $g_0(x)$ 是方程 (3) 在 $(\text{mod } x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ 意义下的解，由牛顿迭代有：

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv g_0(x) - \frac{h(g_0(x))}{h'(g_0(x))} \pmod{x^n} \\ &\equiv g_0(x) - \frac{g_0^2(x) - f(x)}{2g_0(x)} \pmod{x^n} \\ &\equiv \frac{1}{2}g_0(x) + \frac{1}{2}g_0^{-1}(x)f(x) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

需要做一次多项式求逆和一次多项式乘法，复杂度

$$T(n) = T(n/2) + O(n \log n) = O(n \log n)$$

多项式除法 (取模)

给定一个 n 次多项式 $f(x)$ 和一个 $m(\leq n)$ 次多项式 $g(x)$, 求多项式 $Q(x), R(x)$, 使得

$$f(x) \equiv Q(x)g(x) + R(x) \pmod{x^n} \quad (4)$$

且 $\deg R < m$ (类似整数的带余除法)

多项式除法 (取模)

给定一个 n 次多项式 $f(x)$ 和一个 $m(\leq n)$ 次多项式 $g(x)$, 求多项式 $Q(x), R(x)$, 使得

$$f(x) \equiv Q(x)g(x) + R(x) \pmod{x^n} \quad (4)$$

且 $\deg R < m$ (类似整数的带余除法)

考虑构造变换:

$$f^R(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

多项式除法 (取模)

给定一个 n 次多项式 $f(x)$ 和一个 $m(\leq n)$ 次多项式 $g(x)$, 求多项式 $Q(x), R(x)$, 使得

$$f(x) \equiv Q(x)g(x) + R(x) \pmod{x^n} \quad (4)$$

且 $\deg R < m$ (类似整数的带余除法)

考虑构造变换:

$$f^R(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

将方程 (4) 中的 x 替换成 x^{-1} , 并且在两边乘上 x^n , 得到:

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n-m} Q\left(\frac{1}{x}\right) x^m g\left(\frac{1}{x}\right) + x^{n-m+1} x^{m-1} R\left(\frac{1}{x}\right)$$

多项式除法 (取模)

给定一个 n 次多项式 $f(x)$ 和一个 $m(\leq n)$ 次多项式 $g(x)$, 求多项式 $Q(x), R(x)$, 使得

$$f(x) \equiv Q(x)g(x) + R(x) \pmod{x^n} \quad (4)$$

且 $\deg R < m$ (类似整数的带余除法)

考虑构造变换:

$$f^R(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

将方程 (4) 中的 x 替换成 x^{-1} , 并且在两边乘上 x^n , 得到:

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n-m} Q\left(\frac{1}{x}\right) x^m g\left(\frac{1}{x}\right) + x^{n-m+1} x^{m-1} R\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\implies f^R(x) = Q^R(x) g^R(x) + x^{n-m+1} R^R(x)$$

多项式除法 (取模)

$$f^R(x) = Q^R(x)g^R(x) + x^{n-m+1}R^R(x)$$

如果两边模掉 x^{n-m-1} , 就可以消除 $R^R(x)$ 项的影响, 而 $Q^R(x)$ 的次数为 $(n-m) < (n-m+1)$, 所以 $Q^R(x)$ 不受影响

多项式除法 (取模)

$$f^R(x) = Q^R(x)g^R(x) + x^{n-m+1}R^R(x)$$

如果两边模掉 x^{n-m+1} , 就可以消除 $R^R(x)$ 项的影响, 而 $Q^R(x)$ 的次数为 $(n-m) < (n-m+1)$, 所以 $Q^R(x)$ 不受影响, 可见

$$f^R(x) \equiv Q^R(x)g^R(x) \pmod{x^{n-m+1}}$$

多项式求逆得到 $Q^R(x)$, 反转得到 $Q(x)$, 回代方程 (4) 求出 $R(x)$

多项式 \ln

给定一个多项式 $f(x)$, 求一个多项式 $g(x)$, 使得

$$g(x) \equiv \ln f(x) \pmod{x^n} \quad (5)$$

多项式 \ln

给定一个多项式 $f(x)$, 求一个多项式 $g(x)$, 使得

$$g(x) \equiv \ln f(x) \pmod{x^n} \quad (5)$$

求导得

$$g'(x) \equiv f'(x)f^{-1}(x) \pmod{x^n}$$

依次进行求导、多项式求逆、多项式乘法、积分即可, 复杂度 $O(n \log n)$

多项式 exp

给定一个多项式 $f(x)$, 保证 $[x^0]f(x) = 0$, 求一个多项式 $g(x)$, 使得

$$g(x) \equiv e^{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x)}{k!} \pmod{x^n} \tag{6}$$

多项式 exp

给定一个多项式 $f(x)$, 保证 $[x^0]f(x) = 0$, 求一个多项式 $g(x)$, 使得

$$g(x) \equiv e^{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x)}{k!} \pmod{x^n} \quad (6)$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = \ln g(x) - f(x)$$

多项式 exp

给定一个多项式 $f(x)$, 保证 $[x^0]f(x) = 0$, 求一个多项式 $g(x)$, 使得

$$g(x) \equiv e^{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x)}{k!} \pmod{x^n} \quad (6)$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = \ln g(x) - f(x)$$

设 $g_0(x)$ 是方程 (3) 在 $(\text{mod } x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ 意义下的解, 由牛顿迭代有:

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv g_0(x) - \frac{h(g_0(x))}{h'(g_0(x))} \pmod{x^n} \\ &\equiv g_0(x) - \frac{\ln g_0(x) - f(x)}{g_0^{-1}(x)} \pmod{x^n} \\ &\equiv g_0(x) (1 - \ln g_0(x) + f(x)) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

需要做一次多项式 \ln 和一次多项式乘法, 复杂度

$$T(n) = T(n/2) + O(n \log n) = O(n \log n)$$

多项式的幂

给定正整数 k 和一个多项式 $f(x)$, 保证 $[x^0]f(x) = 1$, 求一个多项式 $g(x)$, 使得

$$g(x) \equiv (f(x))^k \pmod{x^n} \quad (7)$$

多项式的幂

给定正整数 k 和一个多项式 $f(x)$, 保证 $[x^0]f(x) = 1$, 求一个多项式 $g(x)$, 使得

$$g(x) \equiv (f(x))^k \pmod{x^n} \quad (7)$$

注意到

$$g(x) = e^{k \ln f(x)}$$

多项式三角函数

给定一个多项式 $f(x)$, 求 $(\bmod x^n)$ 意义下的
 $\sin f(x), \cos f(x), \tan f(x)$.

多项式三角函数

给定一个多项式 $f(x)$, 求 $(\text{mod } x^n)$ 意义下的 $\sin f(x), \cos f(x), \tan f(x)$.

根据欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, 得到

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

多项式三角函数

给定一个多项式 $f(x)$, 求 $(\text{mod } x^n)$ 意义下的 $\sin f(x), \cos f(x), \tan f(x)$.

根据欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, 得到

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

将 $f(x)$ 代入得到

$$\sin f(x) = \frac{\exp(if(x)) - \exp(-if(x))}{2i}$$

$$\cos f(x) = \frac{\exp(if(x)) + \exp(-if(x))}{2}$$

$$\tan f(x) = \sin f(x) (\cos f(x))^{-1}$$

多项式三角函数

给定一个多项式 $f(x)$, 求 $(\bmod x^n)$ 意义下的 $\sin f(x), \cos f(x), \tan f(x)$.

根据欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, 得到

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

将 $f(x)$ 代入得到

$$\sin f(x) = \frac{\exp(if(x)) - \exp(-if(x))}{2i}$$

$$\cos f(x) = \frac{\exp(if(x)) + \exp(-if(x))}{2}$$

$$\tan f(x) = \sin f(x) (\cos f(x))^{-1}$$

注意, 在对 998244353 取模的意义下, 我们取

$i^2 \equiv -1 \pmod{998244353}$, 可以取 $i = 86583718$ 或 911660635

例题选讲：小朋友和二叉树

给定一个 n 个数的集合 $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, 其中 $1 \leq c_i \leq M \leq 10^5$, 如果一棵二叉树的每个点权都在集合 c 中, 我们就叫它“好树”。现给定 $m \leq 10^5$, 对每个 $k = 1, \dots, m$, 求有多少棵权值和为 k 的好树。答案对 998244353 取模。

例题选讲：小朋友和二叉树

给定一个 n 个数的集合 $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ ，其中 $1 \leq c_i \leq M \leq 10^5$ ，如果一棵二叉树的每个点权都在集合 c 中，我们就叫它“好树”。现给定 $m \leq 10^5$ ，对每个 $k = 1, \dots, m$ ，求有多少棵权值和为 k 的好树。答案对 998244353 取模。

【题解】 设 $g_i = [i \in c]$ ， f_i 表示有多少颗权值之和为 k 的好树，有：

$$f_m = \sum_{k=1}^M g_k \sum_{i=0}^{m-k} f_i f_{m-k-i}$$

为使递推成立，需要令 $f_0 = 1$

例题选讲：小朋友和二叉树

给定一个 n 个数的集合 $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ ，其中 $1 \leq c_i \leq M \leq 10^5$ ，如果一棵二叉树的每个点权都在集合 c 中，我们就叫它“好树”。现给定 $m \leq 10^5$ ，对每个 $k = 1, \dots, m$ ，求有多少棵权值和为 k 的好树。答案对 998244353 取模。

【题解】 设 $g_i = [i \in c]$ ， f_i 表示有多少颗权值之和为 k 的好树，有：

$$f_m = \sum_{k=1}^M g_k \sum_{i=0}^{m-k} f_i f_{m-k-i}$$

为使递推成立，需要令 $f_0 = 1$ ，设 $F(x), G(x)$ 分别为 f, g 的普通型生成函数，有

$$F(x) = G(x)F^2(x) + 1$$

例题选讲：小朋友和二叉树

给定一个 n 个数的集合 $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, 其中 $1 \leq c_i \leq M \leq 10^5$, 如果一棵二叉树的每个点权都在集合 c 中, 我们就叫它“好树”。现给定 $m \leq 10^5$, 对每个 $k = 1, \dots, m$, 求有多少棵权值和为 k 的好树。答案对 998244353 取模。

【题解】设 $g_i = [i \in c]$, f_i 表示有多少颗权值之和为 k 的好树, 有:

$$f_m = \sum_{k=1}^M g_k \sum_{i=0}^{m-k} f_i f_{m-k-i}$$

为使递推成立, 需要令 $f_0 = 1$, 设 $F(x), G(x)$ 分别为 f, g 的普通型生成函数, 有

$$F(x) = G(x)F^2(x) + 1$$

因此

$$F(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4G(x)}}{2G(x)}$$

应该选哪个解?

例题选讲：小朋友和二叉树

$$F_1(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4G(x)}}{2G(x)}, \quad F_2(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4G(x)}}{2G(x)}$$

注意到 $G(0) = 0$, $F(0) = 1$, 根据上面的表达式, $x \rightarrow 0$ 时,
 $F_1(x) \rightarrow \infty$, 因此舍弃 F_1

例题选讲：小朋友和二叉树

$$F_1(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4G(x)}}{2G(x)}, \quad F_2(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4G(x)}}{2G(x)}$$

注意到 $G(0) = 0$, $F(0) = 1$, 根据上面的表达式, $x \rightarrow 0$ 时, $F_1(x) \rightarrow \infty$, 因此舍弃 F_1 , 从而

$$F(x) = F_2(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4G(x)}}$$

多项式开根、求逆即可。

例题选讲：简单连通图计数

求 n 个点带标号的无向简单连通图个数， $n \leq 10^5$ ，对 998244353 取模

例题选讲：简单连通图计数

求 n 个点带标号的无向简单连通图个数， $n \leq 10^5$ ，对 998244353 取模

【题解】设 f_n 为答案， g_n 为 n 个点带标号简单图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$

例题选讲：简单连通图计数

求 n 个点带标号的无向简单连通图个数， $n \leq 10^5$ ，对 998244353 取模

【题解】设 f_n 为答案， g_n 为 n 个点带标号简单图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$
枚举 1 号点所在的连通块大小，得到：

$$g_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} f_k g_{n-k}$$

例题选讲：简单连通图计数

求 n 个点带标号的无向简单连通图个数， $n \leq 10^5$ ，对 998244353 取模

【题解】设 f_n 为答案， g_n 为 n 个点带标号简单图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$
枚举 1 号点所在的连通块大小，得到：

$$g_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} f_k g_{n-k}$$

展开组合数，得到

$$\frac{g_n}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{f_k}{(k-1)!} \frac{g_{n-k}}{(n-k)!}$$

例题选讲：简单连通图计数

求 n 个点带标号的无向简单连通图个数， $n \leq 10^5$ ，对 998244353 取模

【题解】设 f_n 为答案， g_n 为 n 个点带标号简单图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$ 枚举 1 号点所在的连通块大小，得到：

$$g_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} f_k g_{n-k}$$

展开组合数，得到

$$\frac{g_n}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{f_k}{(k-1)!} \frac{g_{n-k}}{(n-k)!}$$

设

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k x^k}{(k-1)!}, \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k x^k}{(k-1)!}, \quad H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k x^k}{k!}$$

显然有 $G(x) = F(x)H(x)$ ， $G(x)$ 与 $H(x)$ 的各项系数直接求出，最后多项式求逆即可。

例题选讲：竞赛图计数

求 n 个点强连通竞赛图的个数，对 998244353 取模， $n \leq 10^5$.

竞赛图：任意两点之间恰好有一条边的有向图。

例题选讲：竞赛图计数

求 n 个点强连通竞赛图的个数，对 998244353 取模， $n \leq 10^5$.

竞赛图：任意两点之间恰好有一条边的有向图。

【题解】设 f_n 表示 n 个点强连通竞赛图个数， g_n 表示 n 个点竞赛图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$ ，另外我们认为 $f_0 = 0, g_0 = 1$.

例题选讲：竞赛图计数

求 n 个点强连通竞赛图的个数，对 998244353 取模， $n \leq 10^5$.

竞赛图：任意两点之间恰好有一条边的有向图。

【题解】设 f_n 表示 n 个点强连通竞赛图个数， g_n 表示 n 个点竞赛图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$ ，另外我们认为 $f_0 = 0, g_0 = 1$.

考虑枚举拓扑序最小的强连通分量大小，注意，这个强连通分量与其他点的连边一定是从这个分量指出去的，所以竞赛图计数归结为两个子问题，从而有

$$g_n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} f_i g_{n-i} \implies \frac{g_n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{i!} \cdot \frac{g_{n-i}}{(n-i)!}$$

例题选讲：竞赛图计数

求 n 个点强连通竞赛图的个数，对 998244353 取模， $n \leq 10^5$.

竞赛图：任意两点之间恰好有一条边的有向图。

【题解】设 f_n 表示 n 个点强连通竞赛图个数， g_n 表示 n 个点竞赛图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$ ，另外我们认为 $f_0 = 0, g_0 = 1$.

考虑枚举拓扑序最小的强连通分量大小，注意，这个强连通分量与其他点的连边一定是从这个分量指出去的，所以竞赛图计数归结为两个子问题，从而有

$$g_n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} f_i g_{n-i} \implies \frac{g_n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{i!} \cdot \frac{g_{n-i}}{(n-i)!}$$

设 $G(x), F(x)$ 分别是 g 与 f 的指数型生成函数，即得到
 $G(x) = F(x)G(x) + 1$ ，于是

$$F(x) = 1 - G^{-1}(x)$$

例题选讲：P5748 集合划分计数

一个 n 个元素的集合，将其分为任意多个子集，求方案数。

T 组数据， $T \leq 1000$ ， $n \leq 10^5$

例题选讲：P5748 集合划分计数

一个 n 个元素的集合，将其分为任意多个子集，求方案数。
 T 组数据， $T \leq 1000$ ， $n \leq 10^5$

【题解】 设 B_n 表示 n 个元素集合的划分方案数，考虑最后一个元素所在的集合，枚举该集合的大小、选取该集合中的元素，得到：

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}$$

例题选讲：P5748 集合划分计数

一个 n 个元素的集合，将其分为任意多个子集，求方案数。
 T 组数据， $T \leq 1000$ ， $n \leq 10^5$

【题解】设 B_n 表示 n 个元素集合的划分方案数，考虑最后一个元素所在的集合，枚举该集合的大小、选取该集合中的元素，得到：

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}$$

设 $F(x)$ 是 B_n 的指数型生成函数，即：

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

例题选讲：P5748 集合划分计数

乘上 e^x 得到：

$$\begin{aligned}
 e^x F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{x^m}{m!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n B_{n-m} \frac{x^n}{m!(n-m)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} B_{n-m} \frac{1}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} = F'(x)
 \end{aligned}$$

例题选讲：P5748 集合划分计数

乘上 e^x 得到：

$$\begin{aligned}
 e^x F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{x^m}{m!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n B_{n-m} \frac{x^n}{m!(n-m)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} B_{n-m} \frac{1}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} = F'(x)
 \end{aligned}$$

由于 $F(0) = B_0 = 1$ ，可以得到 $F(x) = e^{e^x - 1}$ ，多项式 exp 求出 $F(x)$ 各项系数即可。

例题选讲：P4389 付公主的背包

有 n 种物品，体积为 v_i ，都有无限件。给定 m ，对于 $s \in [1, m]$ ，求用这些物品恰好装满 s 体积的方案数。
 答案对 998244353 取模， $n, m \leq 10^5$.

例题选讲：P4389 付公主的背包

有 n 种物品，体积为 v_i ，都有无限件。给定 m ，对于 $s \in [1, m]$ ，求用这些物品恰好装满 s 体积的方案数。
 答案对 998244353 取模， $n, m \leq 10^5$ 。

【题解】设 $f_{i,j}$ 表示用前 i 种物品恰好填满 j 体积的方案数，有 dp：

$$f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i,j-v_i}$$

例题选讲：P4389 付公主的背包

有 n 种物品，体积为 v_i ，都有无限件。给定 m ，对于 $s \in [1, m]$ ，求用这些物品恰好装满 s 体积的方案数。
 答案对 998244353 取模， $n, m \leq 10^5$ 。

【题解】设 $f_{i,j}$ 表示用前 i 种物品恰好填满 j 体积的方案数，有 dp：

$$f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i,j-v_i}$$

设 $F_i(x)$ 是 $f_{i,1}, f_{i,2}, \dots$ 的普通型生成函数，由 dp 式得到：

$$F_i(x) = F_{i-1}(x) + x^{v_i} F_i(x) \implies F_i(x) = F_{i-1}(x) \frac{1}{1 - x^{v_i}}$$

于是可以得到 $f_{n,1}, f_{n,2}, \dots$ 的普通型生成函数：

$$F_n(x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x^{v_i}}$$

这并不好算

例题选讲：P4389 付公主的背包

考虑化乘法为加法，也就是取 \ln 后再 \exp ：

$$F_n(x) = \exp \ln \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x^{v^i}} = \exp \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{1 - x^{v^i}}$$

例题选讲：P4389 付公主的背包

考虑化乘法为加法，也就是取 \ln 后再 \exp ：

$$F_n(x) = \exp \ln \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x^{v_i}} = \exp \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{1 - x^{v_i}}$$

对 \ln 项泰勒展开：

$$F_n(x) = \exp \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{jv_i}}{j}$$

例题选讲：P4389 付公主的背包

考虑化乘法为加法，也就是取 \ln 后再 \exp ：

$$F_n(x) = \exp \ln \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x^{v_i}} = \exp \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{1 - x^{v_i}}$$

对 \ln 项泰勒展开：

$$F_n(x) = \exp \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{jv_i}}{j}$$

事实上，我们只需在 $(\text{mod } x^m)$ 下求系数，高次项可以忽略，因此

$$F_n(x) = \exp \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{v_i} \rfloor} \frac{x^{jv_i}}{j}$$

枚举的复杂度不能保证，还是不能做。

例题选讲：P4389 付公主的背包

不妨将体积相同的物品视为一类，记 b_k 为体积为 k 的物品数量，于是合并同类项得到

$$F_n(x) = \exp \sum_{k=1}^m b_k \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{k} \rfloor} \frac{x^{jk}}{j}$$

这个两重求和的复杂度由调和级数保证，是 $O(m \log m)$ 的。最后再求 \exp 即可。

例题选讲: P7289 Chasse Neige

给 T 组询问, 每次询问给定两个正整数 n, k , 求有多少个长度为 n 的排列 π 满足:

- $\pi_1 < \pi_2$
- $\pi_{n-1} > \pi_n$
- 恰好存在 k 个位置 i 满足 $\pi_{i-1} < \pi_i$ 且 $\pi_i > \pi_{i+1}$

答案对 998244353 取模, 每次询问保证 $n \leq r$, 且 $r, T \leq 10^5$

① 生成函数

② 快速数论变换 (NTT)

③ 多项式运算

④ 多项式的其它应用

多点求值与快速插值
常系数齐次线性递推

⑤ 参考文献

① 生成函数

② 快速数论变换 (NTT)

③ 多项式运算

④ 多项式的其它应用

多点求值与快速插值

常系数齐次线性递推

⑤ 参考文献

① 生成函数

② 快速数论变换 (NTT)

③ 多项式运算

④ 多项式的其它应用

多点求值与快速插值
常系数齐次线性递推

⑤ 参考文献

- ① 生成函数
- ② 快速数论变换 (NTT)
- ③ 多项式运算
- ④ 多项式的其它应用
- ⑤ 参考文献

- [1] T. Sauer, *Numerical Analysis*.
USA: Addison-Wesley Publishing Company, 2nd ed., 2011.
- [2] O. Wiki, “快速傅里叶变换 - OI Wiki.”
(2023, May 18).
- [3] pengyule, “FFT (1) - pengyule.”
(2021, Dec 30).

Thank You