

# 高级计数技巧：生成函数与多项式运算

Ebola

Institute of Mathematics,  
Zhejiang University.

July, 2023

- ① 生成函数
- ② 快速数论变换 (NTT)
- ③ 多项式运算
- ④ 多项式的其它应用
- ⑤ 参考文献

## ① 生成函数

普通生成函数

指数生成函数

## ② 快速数论变换 (NTT)

## ③ 多项式运算

## ④ 多项式的其它应用

## ⑤ 参考文献

# ① 生成函数

普通生成函数

指数生成函数

## ② 快速数论变换 (NTT)

## ③ 多项式运算

## ④ 多项式的其它应用

## ⑤ 参考文献

# 定义与例子

对于一个数列  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , 它的普通生成函数为:

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

# 定义与例子

对于一个数列  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , 它的普通生成函数为:

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

- $\{1, 2, 3\}$  的普通生成函数为:  $1 + 2x + 3x^2$
- $\{1, 1, 1, \dots\}$  的普通生成函数为:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

# 封闭形式

考虑  $\{1, 1, 1, \dots\}$  的普通生成函数:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

# 封闭形式

考虑  $\{1, 1, 1, \dots\}$  的普通生成函数:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

注意到

$$xF(x) + 1 = F(x)$$

因此

$$F(x) = \frac{1}{1-x}$$

我们称这种没有求和符号的表达式为封闭形式



# 封闭形式

求数列  $\{1, 0, 1, 0, \dots\}$  的普通生成函数，并化为封闭形式

# 封闭形式

求数列  $\{1, 0, 1, 0, \dots\}$  的普通生成函数，并化为封闭形式

【解】

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

# 封闭形式

求数列  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$  的普通生成函数，并化为封闭形式

# 封闭形式

求数列  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$  的普通生成函数，并化为封闭形式

【解】

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (x^{n+1})' \\
 &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' \\
 &= \left( \frac{1}{1-x} \right)' \\
 &= \frac{1}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

# 组合计数例子

假设你去买水果，一共要买  $n$  个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

## 组合计数例子

假设你去买水果，一共要买  $n$  个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

【解】设买  $i$  个苹果的方案数为  $a_i$ ，事实上  $a_i$  仅在  $i$  为偶数时为 1，否则为 0，因此苹果的生成函数为：

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x^2}$$

## 组合计数例子

假设你去买水果，一共要买  $n$  个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

【解】设买  $i$  个苹果的方案数为  $a_i$ ，事实上  $a_i$  仅在  $i$  为偶数时为 1，否则为 0，因此苹果的生成函数为：

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x^2}$$

同理，西瓜和梨的生成函数为

$$G(x) = 1 + x, \quad H(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

# 组合计数例子

假设你去买水果，一共要买  $n$  个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

【解】设买  $i$  个苹果的方案数为  $a_i$ ，事实上  $a_i$  仅在  $i$  为偶数时为 1，否则为 0，因此苹果的生成函数为：

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x^2}$$

同理，西瓜和梨的生成函数为

$$G(x) = 1 + x, \quad H(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

相乘得到

$$F(x)G(x)H(x) = \frac{1}{(1 - x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)x^n$$

所以一共有  $n + 1$  种购买方案。



# ① 生成函数

普通生成函数

指数生成函数

# ② 快速数论变换 (NTT)

# ③ 多项式运算

# ④ 多项式的其它应用

# ⑤ 参考文献

# 定义与例子

对于一个数列  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , 它的指数生成函数为:

$$F(x) = \sum_n a_n \frac{x^n}{n!}$$

# 定义与例子

对于一个数列  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , 它的指数生成函数为:

$$F(x) = \sum_n a_n \frac{x^n}{n!}$$

- $\{1, 2, 3\}$  的指数生成函数为:  $1 + x + \frac{1}{2}x^2$
- $\{1, 1, 1, \dots\}$  的指数生成函数为:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

# 封闭形式

考虑  $\{1, 1, 1, \dots\}$  的指数生成函数:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

# 封闭形式

求数列  $\{1, 0, 1, 0, \dots\}$  的指数生成函数，并化为封闭形式

# 封闭形式

求数列  $\{1, 0, 1, 0, \dots\}$  的指数生成函数，并化为封闭形式

【解】

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\
 &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})
 \end{aligned}$$

# 例题选讲：森林计数

求  $n$  个点带标号、深度不超过  $k$  的森林一共有多少种。

- 1 生成函数
- 2 快速数论变换 (NTT)
- 3 多项式运算
- 4 多项式的其它应用
- 5 参考文献



# 问题引入

给定多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

求  $h(x) = f(x)g(x)$  的各项系数，对 998244353 取模。

# 原根

注意:  $998244353 = 119 \times 2^{23} + 1$

我们说 3 是 998244353 的原根, 因为  $3^1, 3^2, \dots, 3^{998244352}$  对 998244353 取模的结果两两不同。下面为了方便我们记

$$p = 998244353$$

# 原根

注意：  $998244353 = 119 \times 2^{23} + 1$

我们说 3 是 998244353 的原根，因为  $3^1, 3^2, \dots, 3^{998244352}$  对 998244353 取模的结果两两不同。下面为了方便我们记  $p = 998244353$

根据费马小定理， $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ，那么令  $\omega_n = 3^{119 \times 2^{24-l}}$  (其中  $n = 2^l$ )，我们会发现  $\omega_n^n = 1$ ，所以  $\omega_n$  可以作为  $n$  次单位根！

# 原根

注意：  $998244353 = 119 \times 2^{23} + 1$

我们说 3 是 998244353 的原根，因为  $3^1, 3^2, \dots, 3^{998244352}$  对 998244353 取模的结果两两不同。下面为了方便我们记  $p = 998244353$

根据费马小定理， $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ，那么令  $\omega_n = 3^{119 \times 2^{24-l}}$ （其中  $n = 2^l$ ），我们会发现  $\omega_n^n = 1$ ，所以  $\omega_n$  可以作为  $n$  次单位根！

把 FFT 中的运算全部换成取模意义下的运算，再把  $n$  次单位复根替换成这里的  $\omega_n$ ，就得到了 NTT，它的性质就是取模意义下的 FFT。

# 代码

```

1 void NTT(int *a,bool INTT)
2 {
3     for(int i=0;i<len;i++) r[i]=(r[i/2]/2)|((i&1)<<(l-1));
4     for(int i=0;i<len;i++) if(i<r[i]) swap(a[i],a[r[i]]);
5     for(int i=1;i<len;i<=1)
6     {
7         int p=(i<<1);
8         int wn=Pow(3,(Mod-1)/p);
9         if(INTT) wn=Pow(wn,Mod-2);
10        for(int j=0;j<len;j+=p)
11        {
12            int w=1;
13            for(int k=0;k<i;k++)
14            {
15                int x=a[j+k],y=1ll*w*a[i+j+k]%Mod;
16                a[j+k]=(x+y)%Mod;
17                a[i+j+k]=(x-y+Mod)%Mod;
18                w=1ll*w*wn%Mod;
19            }
20        }
21    }
22    //为了方便，我们通常把INTT的最后一步除以n也写进NTT函数里
23    if(INTT) for(int i=0;i<len;i++) a[i]=1ll*a[i]*inv%Mod;
24 }

```

- ① 生成函数
- ② 快速数论变换 (NTT)
- ③ 多项式运算**
- ④ 多项式的其它应用
- ⑤ 参考文献

# 多项式牛顿迭代

给定多项式  $g(x)$ , 求一个多项式  $f(x)$ , 满足

$$g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n} \quad (1)$$

注意:  $\pmod{x^n}$  的意思是只保留最低的  $n$  项。

# 多项式牛顿迭代

给定多项式  $g(x)$ , 求一个多项式  $f(x)$ , 满足

$$g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n} \tag{1}$$

注意:  $(\text{mod } x^n)$  的意思是只保留最低的  $n$  项。

考虑倍增。设  $f_0(x)$  是方程 (1) 在  $(\text{mod } x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$  意义下的解, 那么  $f(x) - f_0(x)$  的最低次项就是  $x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$  项。考虑泰勒展开:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(f_0(x))}{i!} (f(x) - f_0(x))^i \pmod{x^n} \\ &\equiv g(f_0(x)) + g'(f_0(x))(f(x) - f_0(x)) \pmod{x^n} \end{aligned}$$



# 多项式牛顿迭代

给定多项式  $g(x)$ , 求一个多项式  $f(x)$ , 满足

$$g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n} \tag{1}$$

注意:  $\pmod{x^n}$  的意思是只保留最低的  $n$  项。

考虑倍增。设  $f_0(x)$  是方程 (1) 在  $\pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$  意义下的解, 那么  $f(x) - f_0(x)$  的最低次项就是  $x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$  项。考虑泰勒展开:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(f_0(x))}{i!} (f(x) - f_0(x))^i \pmod{x^n} \\ &\equiv g(f_0(x)) + g'(f_0(x))(f(x) - f_0(x)) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

由方程 (1) 得:

$$f(x) \equiv f_0(x) - \frac{g(f_0(x))}{g'(f_0(x))} \pmod{x^n}$$

# 多项式求逆

给定一个多项式  $f(x)$ , 求一个多项式  $g(x)$ , 使得

$$f(x)g(x) \equiv 1 \pmod{x^n} \quad (2)$$

# 多项式求逆

给定一个多项式  $f(x)$ , 求一个多项式  $g(x)$ , 使得

$$f(x)g(x) \equiv 1 \pmod{x^n} \quad (2)$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = \frac{1}{g(x)} - f(x)$$

# 多项式求逆

给定一个多项式  $f(x)$ , 求一个多项式  $g(x)$ , 使得

$$f(x)g(x) \equiv 1 \pmod{x^n} \quad (2)$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = \frac{1}{g(x)} - f(x)$$

设  $g_0(x)$  是方程 (2) 在  $(\text{mod } x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$  意义下的解, 由牛顿迭代有:

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv g_0(x) - \frac{h(g_0(x))}{h'(g_0(x))} \pmod{x^n} \\ &\equiv g_0(x) + \frac{\frac{1}{g_0(x)} - f(x)}{\frac{1}{g_0^2(x)}} \pmod{x^n} \\ &\equiv 2g_0(x) - g_0^2(x)f(x) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

FFT 优化即可, 复杂度  $T(n) = T(n/2) + O(n \log n) = O(n \log n)$

# 多项式开方

给定一个多项式  $f(x)$ , 求一个多项式  $g(x)$ , 使得

$$g^2(x) \equiv f(x) \pmod{x^n} \quad (3)$$

# 多项式开方

给定一个多项式  $f(x)$ , 求一个多项式  $g(x)$ , 使得

$$g^2(x) \equiv f(x) \pmod{x^n} \quad (3)$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = g^2(x) - f(x)$$

# 多项式开方

给定一个多项式  $f(x)$ ，求一个多项式  $g(x)$ ，使得

$$g^2(x) \equiv f(x) \pmod{x^n} \tag{3}$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = g^2(x) - f(x)$$

设  $g_0(x)$  是方程 (3) 在  $(\text{mod } x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$  意义下的解，由牛顿迭代有：

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv g_0(x) - \frac{h(g_0(x))}{h'(g_0(x))} \pmod{x^n} \\ &\equiv g_0(x) - \frac{g_0^2(x) - f(x)}{2g_0(x)} \pmod{x^n} \\ &\equiv \frac{1}{2}g_0(x) + \frac{1}{2}g_0^{-1}(x)f(x) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

需要做一次多项式求逆和一次多项式乘法，复杂度

$$T(n) = T(n/2) + O(n \log n) = O(n \log n)$$

# 多项式除法 (取模)

给定一个  $n$  次多项式  $f(x)$  和一个  $m(\leq n)$  次多项式  $g(x)$ , 求多项式  $Q(x), R(x)$ , 使得

$$f(x) \equiv Q(x)g(x) + R(x) \pmod{x^n} \quad (4)$$

且  $\deg R < m$  (类似整数的带余除法)



# 多项式除法 (取模)

给定一个  $n$  次多项式  $f(x)$  和一个  $m(\leq n)$  次多项式  $g(x)$ , 求多项式  $Q(x), R(x)$ , 使得

$$f(x) \equiv Q(x)g(x) + R(x) \pmod{x^n} \quad (4)$$

且  $\deg R < m$  (类似整数的带余除法)

考虑构造变换:

$$f^R(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

# 多项式除法 (取模)

给定一个  $n$  次多项式  $f(x)$  和一个  $m(\leq n)$  次多项式  $g(x)$ , 求多项式  $Q(x), R(x)$ , 使得

$$f(x) \equiv Q(x)g(x) + R(x) \pmod{x^n} \tag{4}$$

且  $\deg R < m$  (类似整数的带余除法)

考虑构造变换:

$$f^R(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

将方程 (4) 中的  $x$  替换成  $x^{-1}$ , 并且在两边乘上  $x^n$ , 得到:

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n-m} Q\left(\frac{1}{x}\right) x^m g\left(\frac{1}{x}\right) + x^{n-m+1} x^{m-1} R\left(\frac{1}{x}\right)$$

# 多项式除法 (取模)

给定一个  $n$  次多项式  $f(x)$  和一个  $m(\leq n)$  次多项式  $g(x)$ , 求多项式  $Q(x), R(x)$ , 使得

$$f(x) \equiv Q(x)g(x) + R(x) \pmod{x^n} \tag{4}$$

且  $\deg R < m$  (类似整数的带余除法)

考虑构造变换:

$$f^R(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

将方程 (4) 中的  $x$  替换成  $x^{-1}$ , 并且在两边乘上  $x^n$ , 得到:

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n-m} Q\left(\frac{1}{x}\right) x^m g\left(\frac{1}{x}\right) + x^{n-m+1} x^{m-1} R\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\implies f^R(x) = Q^R(x)g^R(x) + x^{n-m+1}R^R(x)$$

# 多项式除法 (取模)

$$f^R(x) = Q^R(x)g^R(x) + x^{n-m+1}R^R(x)$$

如果两边模掉  $x^{n-m-1}$ , 就可以消除  $R^R(x)$  项的影响, 而  $Q^R(x)$  的次数为  $(n-m) < (n-m+1)$ , 所以  $Q^R(x)$  不受影响

# 多项式除法 (取模)

$$f^R(x) = Q^R(x)g^R(x) + x^{n-m+1}R^R(x)$$

如果两边模掉  $x^{n-m+1}$ , 就可以消除  $R^R(x)$  项的影响, 而  $Q^R(x)$  的次数为  $(n-m) < (n-m+1)$ , 所以  $Q^R(x)$  不受影响, 可见

$$f^R(x) \equiv Q^R(x)g^R(x) \pmod{x^{n-m+1}}$$

多项式求逆得到  $Q^R(x)$ , 反转得到  $Q(x)$ , 回代方程 (4) 求出  $R(x)$

# 多项式 $\ln$

给定一个多项式  $f(x)$ , 求一个多项式  $g(x)$ , 使得

$$g(x) \equiv \ln f(x) \pmod{x^n} \quad (5)$$

# 多项式 $\ln$

给定一个多项式  $f(x)$ , 求一个多项式  $g(x)$ , 使得

$$g(x) \equiv \ln f(x) \pmod{x^n} \quad (5)$$

求导得

$$g'(x) \equiv f'(x)f^{-1}(x) \pmod{x^n}$$

依次进行求导、多项式求逆、多项式乘法、积分即可, 复杂度  $O(n \log n)$

# 多项式 exp

给定一个多项式  $f(x)$ , 保证  $[x^0]f(x) = 0$ , 求一个多项式  $g(x)$ , 使得

$$g(x) \equiv e^{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x)}{k!} \pmod{x^n} \tag{6}$$



# 多项式 exp

给定一个多项式  $f(x)$ , 保证  $[x^0]f(x) = 0$ , 求一个多项式  $g(x)$ , 使得

$$g(x) \equiv e^{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x)}{k!} \pmod{x^n} \quad (6)$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = \ln g(x) - f(x)$$

# 多项式 exp

给定一个多项式  $f(x)$ , 保证  $[x^0]f(x) = 0$ , 求一个多项式  $g(x)$ , 使得

$$g(x) \equiv e^{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x)}{k!} \pmod{x^n} \tag{6}$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = \ln g(x) - f(x)$$

设  $g_0(x)$  是方程 (3) 在  $(\text{mod } x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$  意义下的解, 由牛顿迭代有:

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv g_0(x) - \frac{h(g_0(x))}{h'(g_0(x))} \pmod{x^n} \\ &\equiv g_0(x) - \frac{\ln g_0(x) - f(x)}{g_0^{-1}(x)} \pmod{x^n} \\ &\equiv g_0(x) (1 - \ln g_0(x) + f(x)) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

需要做一次多项式  $\ln$  和一次多项式乘法, 复杂度

$$T(n) = T(n/2) + O(n \log n) = O(n \log n)$$

# 多项式的幂

给定正整数  $k$  和一个多项式  $f(x)$ , 保证  $[x^0]f(x) = 1$ , 求一个多项式  $g(x)$ , 使得

$$g(x) \equiv (f(x))^k \pmod{x^n} \quad (7)$$

# 多项式的幂

给定正整数  $k$  和一个多项式  $f(x)$ , 保证  $[x^0]f(x) = 1$ , 求一个多项式  $g(x)$ , 使得

$$g(x) \equiv (f(x))^k \pmod{x^n} \quad (7)$$

注意到

$$g(x) = e^{k \ln f(x)}$$

# 多项式三角函数

给定一个多项式  $f(x)$ , 求  $(\bmod x^n)$  意义下的  $\sin f(x), \cos f(x), \tan f(x)$ .

# 多项式三角函数

给定一个多项式  $f(x)$ , 求  $(\text{mod } x^n)$  意义下的  $\sin f(x), \cos f(x), \tan f(x)$ .

根据欧拉公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , 得到

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

# 多项式三角函数

给定一个多项式  $f(x)$ , 求  $(\bmod x^n)$  意义下的  $\sin f(x), \cos f(x), \tan f(x)$ .

根据欧拉公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , 得到

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

将  $f(x)$  代入得到

$$\sin f(x) = \frac{\exp(if(x)) - \exp(-if(x))}{2i}$$

$$\cos f(x) = \frac{\exp(if(x)) + \exp(-if(x))}{2}$$

$$\tan f(x) = \sin f(x) (\cos f(x))^{-1}$$

# 多项式三角函数

给定一个多项式  $f(x)$ , 求  $(\text{mod } x^n)$  意义下的  $\sin f(x), \cos f(x), \tan f(x)$ .

根据欧拉公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , 得到

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

将  $f(x)$  代入得到

$$\sin f(x) = \frac{\exp(if(x)) - \exp(-if(x))}{2i}$$

$$\cos f(x) = \frac{\exp(if(x)) + \exp(-if(x))}{2}$$

$$\tan f(x) = \sin f(x) (\cos f(x))^{-1}$$

注意, 在对 998244353 取模的意义下, 我们取  $i^2 \equiv -1 \pmod{998244353}$ , 可以取  $i = 86583718$  或  $911660635$



## 例题选讲：小朋友和二叉树

给定一个  $n$  个数的集合  $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ , 其中  $1 \leq c_i \leq M \leq 10^5$ , 如果一棵二叉树的每个点权都在集合  $c$  中, 我们就叫它“好树”。现给定  $m \leq 10^5$ , 对每个  $k = 1, \dots, m$ , 求有多少棵权值和为  $k$  的好树。答案对 998244353 取模。

# 例题选讲：小朋友和二叉树

给定一个  $n$  个数的集合  $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ , 其中  $1 \leq c_i \leq M \leq 10^5$ , 如果一棵二叉树的每个点权都在集合  $c$  中, 我们就叫它 “好树”。现给定  $m \leq 10^5$ , 对每个  $k = 1, \dots, m$ , 求有多少棵权值和为  $k$  的好树。答案对 998244353 取模。

【题解】 设  $g_i = [i \in c]$ ,  $f_i$  表示有多少颗权值之和为  $k$  的好树, 有:

$$f_m = \sum_{k=1}^M g_k \sum_{i=0}^{m-k} f_i f_{m-k-i}$$

为使递推成立, 需要令  $f_0 = 1$

例题选讲：小朋友和二叉树

给定一个  $n$  个数的集合  $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ ，其中  $1 \leq c_i \leq M \leq 10^5$ ，如果一棵二叉树的每个点权都在集合  $c$  中，我们就叫它“好树”。现给定  $m \leq 10^5$ ，对每个  $k = 1, \dots, m$ ，求有多少棵权值和为  $k$  的好树。答案对 998244353 取模。

【题解】设  $g_i = [i \in c]$ ， $f_i$  表示有多少颗权值之和为  $k$  的好树，有：

$$f_m = \sum_{k=1}^M g_k \sum_{i=0}^{m-k} f_i f_{m-k-i}$$

为使递推成立，需要令  $f_0 = 1$ ，设  $F(x), G(x)$  分别为  $f, g$  的普通型生成函数，有

$$F(x) = G(x)F^2(x) + 1$$

# 例题选讲：小朋友和二叉树

给定一个  $n$  个数的集合  $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ , 其中  $1 \leq c_i \leq M \leq 10^5$ , 如果一棵二叉树的每个点权都在集合  $c$  中, 我们就叫它 “好树”。现给定  $m \leq 10^5$ , 对每个  $k = 1, \dots, m$ , 求有多少棵权值和为  $k$  的好树。答案对 998244353 取模。

【题解】 设  $g_i = [i \in c]$ ,  $f_i$  表示有多少颗权值之和为  $k$  的好树, 有:

$$f_m = \sum_{k=1}^M g_k \sum_{i=0}^{m-k} f_i f_{m-k-i}$$

为使递推成立, 需要令  $f_0 = 1$ , 设  $F(x), G(x)$  分别为  $f, g$  的普通型生成函数, 有

$$F(x) = G(x)F^2(x) + 1$$

因此

$$F(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4G(x)}}{2G(x)}$$

应该选哪个解？

# 例题选讲：小朋友和二叉树

$$F_1(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4G(x)}}{2G(x)}, \quad F_2(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4G(x)}}{2G(x)}$$

注意到  $G(0) = 0$ ,  $F(0) = 1$ , 根据上面的表达式,  $x \rightarrow 0$  时,  
 $F_1(x) \rightarrow \infty$ , 因此舍弃  $F_1$

# 例题选讲：小朋友和二叉树

$$F_1(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4G(x)}}{2G(x)}, \quad F_2(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4G(x)}}{2G(x)}$$

注意到  $G(0) = 0$ ,  $F(0) = 1$ , 根据上面的表达式,  $x \rightarrow 0$  时,  $F_1(x) \rightarrow \infty$ , 因此舍弃  $F_1$ , 从而

$$F(x) = F_2(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4G(x)}}$$

多项式开根、求逆即可。

# 例题选讲：简单连通图计数

求  $n$  个点带标号的无向简单连通图个数， $n \leq 10^5$ ，对 998244353 取模

# 例题选讲：简单连通图计数

求  $n$  个点带标号的无向简单连通图个数， $n \leq 10^5$ ，对 998244353 取模

【题解】设  $f_n$  为答案， $g_n$  为  $n$  个点带标号简单图个数，显然  $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$



# 例题选讲：简单连通图计数

求  $n$  个点带标号的无向简单连通图个数， $n \leq 10^5$ ，对 998244353 取模

【题解】设  $f_n$  为答案， $g_n$  为  $n$  个点带标号简单图个数，显然  $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$   
枚举 1 号点所在的连通块大小，得到：

$$g_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} f_k g_{n-k}$$

# 例题选讲：简单连通图计数

求  $n$  个点带标号的无向简单连通图个数， $n \leq 10^5$ ，对 998244353 取模

【题解】设  $f_n$  为答案， $g_n$  为  $n$  个点带标号简单图个数，显然  $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$   
枚举 1 号点所在的连通块大小，得到：

$$g_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} f_k g_{n-k}$$

展开组合数，得到

$$\frac{g_n}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{f_k}{(k-1)!} \frac{g_{n-k}}{(n-k)!}$$

# 例题选讲：简单连通图计数

求  $n$  个点带标号的无向简单连通图个数， $n \leq 10^5$ ，对 998244353 取模

【题解】设  $f_n$  为答案， $g_n$  为  $n$  个点带标号简单图个数，显然  $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$   
枚举 1 号点所在的连通块大小，得到：

$$g_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} f_k g_{n-k}$$

展开组合数，得到

$$\frac{g_n}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{f_k}{(k-1)!} \frac{g_{n-k}}{(n-k)!}$$

设

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k x^k}{(k-1)!}, \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k x^k}{(k-1)!}, \quad H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k x^k}{k!}$$

显然有  $G(x) = F(x)H(x)$ ， $G(x)$  与  $H(x)$  的各项系数直接求出，最后  
多项式求逆即可。

## 例题选讲：竞赛图计数

求  $n$  个点强连通竞赛图的个数，对 998244353 取模， $n \leq 10^5$ .

竞赛图：任意两点之间恰好有一条边的有向图。

## 例题选讲：竞赛图计数

求  $n$  个点强连通竞赛图的个数，对 998244353 取模， $n \leq 10^5$ .

竞赛图：任意两点之间恰好有一条边的有向图。

【题解】设  $f_n$  表示  $n$  个点强连通竞赛图个数， $g_n$  表示  $n$  个点竞赛图个数，显然  $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$ ，另外我们认为  $f_0 = 0, g_0 = 1$ .

# 例题选讲：竞赛图计数

求  $n$  个点强连通竞赛图的个数，对 998244353 取模， $n \leq 10^5$ .

竞赛图：任意两点之间恰好有一条边的有向图。

【题解】设  $f_n$  表示  $n$  个点强连通竞赛图个数， $g_n$  表示  $n$  个点竞赛图个数，显然  $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$ ，另外我们认为  $f_0 = 0, g_0 = 1$ .

考虑枚举拓扑序最小的强连通分量大小，注意，这个强连通分量与其他点的连边一定是从这个分量指出去的，所以竞赛图计数归结为两个子问题，从而有

$$g_n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} f_i g_{n-i} \implies \frac{g_n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{i!} \cdot \frac{g_{n-i}}{(n-i)!}$$

## 例题选讲：竞赛图计数

求  $n$  个点强连通竞赛图的个数，对 998244353 取模， $n \leq 10^5$ .

竞赛图：任意两点之间恰好有一条边的有向图。

【题解】设  $f_n$  表示  $n$  个点强连通竞赛图个数， $g_n$  表示  $n$  个点竞赛图个数，显然  $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$ ，另外我们认为  $f_0 = 0, g_0 = 1$ .

考虑枚举拓扑序最小的强连通分量大小，注意，这个强连通分量与其他点的连边一定是从这个分量指出去的，所以竞赛图计数归结为两个子问题，从而有

$$g_n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} f_i g_{n-i} \implies \frac{g_n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{i!} \cdot \frac{g_{n-i}}{(n-i)!}$$

设  $G(x), F(x)$  分别是  $g$  与  $f$  的指数型生成函数，即得到  
 $G(x) = F(x)G(x) + 1$ ，于是

$$F(x) = 1 - G^{-1}(x)$$

# 例题选讲：P5748 集合划分计数

一个  $n$  个元素的集合，将其分为任意多个子集，求方案数。

$T$  组数据， $T \leq 1000$ ， $n \leq 10^5$



## 例题选讲: P5748 集合划分计数

一个  $n$  个元素的集合, 将其分为任意多个子集, 求方案数。

$T$  组数据,  $T \leq 1000$ ,  $n \leq 10^5$

**【题解】** 设  $B_n$  表示  $n$  个元素集合的划分方案数, 考虑最后一个元素所在的集合, 枚举该集合的大小、选取该集合中的元素, 得到:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}$$

# 例题选讲：P5748 集合划分计数

一个  $n$  个元素的集合，将其分为任意多个子集，求方案数。  
 $T$  组数据， $T \leq 1000$ ， $n \leq 10^5$

【题解】设  $B_n$  表示  $n$  个元素集合的划分方案数，考虑最后一个元素所在的集合，枚举该集合的大小、选取该集合中的元素，得到：

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}$$

设  $F(x)$  是  $B_n$  的指数型生成函数，即：

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

# 例题选讲：P5748 集合划分计数

乘上  $e^x$  得到：

$$\begin{aligned}
 e^x F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{x^m}{m!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n B_{n-m} \frac{x^n}{m!(n-m)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} B_{n-m} \frac{1}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} = F'(x)
 \end{aligned}$$

# 例题选讲：P5748 集合划分计数

乘上  $e^x$  得到：

$$\begin{aligned}
 e^x F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{x^m}{m!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n B_{n-m} \frac{x^n}{m!(n-m)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} B_{n-m} \frac{1}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} = F'(x)
 \end{aligned}$$

由于  $F(0) = B_0 = 1$ ，可以得到  $F(x) = e^{e^x - 1}$ ，多项式 exp 求出  $F(x)$  各项系数即可。

# 例题选讲：P4389 付公主的背包

有  $n$  种物品，体积为  $v_i$ ，都有无限件。给定  $m$ ，对于  $s \in [1, m]$ ，求用这些物品恰好装满  $s$  体积的方案数。  
 答案对 998244353 取模， $n, m \leq 10^5$ .

# 例题选讲：P4389 付公主的背包

有  $n$  种物品，体积为  $v_i$ ，都有无限件。给定  $m$ ，对于  $s \in [1, m]$ ，求用这些物品恰好装满  $s$  体积的方案数。  
 答案对 998244353 取模， $n, m \leq 10^5$ 。

【题解】设  $f_{i,j}$  表示用前  $i$  种物品恰好填满  $j$  体积的方案数，有 dp：

$$f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i,j-v_i}$$

# 例题选讲：P4389 付公主的背包

有  $n$  种物品，体积为  $v_i$ ，都有无限件。给定  $m$ ，对于  $s \in [1, m]$ ，求用这些物品恰好装满  $s$  体积的方案数。  
 答案对 998244353 取模， $n, m \leq 10^5$ 。

【题解】设  $f_{i,j}$  表示用前  $i$  种物品恰好填满  $j$  体积的方案数，有 dp：

$$f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i,j-v_i}$$

设  $F_i(x)$  是  $f_{i,1}, f_{i,2}, \dots$  的普通型生成函数，由 dp 式得到：

$$F_i(x) = F_{i-1}(x) + x^{v_i} F_i(x) \implies F_i(x) = F_{i-1}(x) \frac{1}{1 - x^{v_i}}$$

于是可以得到  $f_{n,1}, f_{n,2}, \dots$  的普通型生成函数：

$$F_n(x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x^{v_i}}$$

这并不好算

# 例题选讲: P4389 付公主的背包

考虑化乘法为加法, 也就是取  $\ln$  后再  $\exp$ :

$$F_n(x) = \exp \ln \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x^{v_i}} = \exp \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{1 - x^{v_i}}$$



# 例题选讲：P4389 付公主的背包

考虑化乘法为加法，也就是取  $\ln$  后再  $\exp$ ：

$$F_n(x) = \exp \ln \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x^{v_i}} = \exp \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{1 - x^{v_i}}$$

对  $\ln$  项泰勒展开：

$$F_n(x) = \exp \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{jv_i}}{j}$$

## 例题选讲：P4389 付公主的背包

考虑化乘法为加法，也就是取  $\ln$  后再  $\exp$ ：

$$F_n(x) = \exp \ln \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x^{v_i}} = \exp \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{1 - x^{v_i}}$$

对  $\ln$  项泰勒展开：

$$F_n(x) = \exp \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{jv_i}}{j}$$

事实上，我们只需在  $(\text{mod } x^m)$  下求系数，高次项可以忽略，因此

$$F_n(x) = \exp \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{v_i} \rfloor} \frac{x^{jv_i}}{j}$$

枚举的复杂度不能保证，还是不能做。

# 例题选讲：P4389 付公主的背包

不妨将体积相同的物品视为一类，记  $b_k$  为体积为  $k$  的物品数量，于是合并同类项得到

$$F_n(x) = \exp \sum_{k=1}^m b_k \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{k} \rfloor} \frac{x^{jk}}{j}$$

这个两重求和的复杂度由调和级数保证，是  $O(m \log m)$  的。最后再求  $\exp$  即可。

# 例题选讲：节选自 P7289 Chasse Neige

给定  $N$ ，对  $n = 1, 2, \dots, N$ ，求有多少个长度为  $n$  的 M 型排列  $\pi$ ，即：

- $\pi_1 < \pi_2$
- $\pi_{n-1} > \pi_n$
- 每个数都交错，即：对于  $i = 2, 3, \dots, n-1$ ， $\pi_i$  要么比左右两个数都小，要么比左右两个数都大

答案对 998244353 取模， $N \leq 10^5$

# 例题选讲：节选自 P7289 Chasse Neige

【题解】设  $f_n$  表示长度为  $n$  的 M 型排列个数

例题选讲：节选自 P7289 Chasse Neige

【题解】 设  $f_n$  表示长度为  $n$  的 M 型排列个数，枚举数字  $n$  放的位置  $(i + 1)$ ，选  $i$  个数放左边，剩下的放在右边，两边分别构成 M 型排列：

$$f_n = \sum_{i \text{ 是奇数}} \binom{n-1}{i} f_i f_{n-1-i}$$

另外，显然  $k$  为偶数时  $f_k = 0$ ；特别地，我们需要  $f_1 = 1$ 。

例题选讲：节选自 P7289 Chasse Neige

【题解】 设  $f_n$  表示长度为  $n$  的 M 型排列个数，枚举数字  $n$  放的位置  $(i + 1)$ ，选  $i$  个数放左边，剩下的放在右边，两边分别构成 M 型排列：

$$f_n = \sum_{i \text{ 是奇数}} \binom{n-1}{i} f_i f_{n-1-i}$$

另外，显然  $k$  为偶数时  $f_k = 0$ ；特别地，我们需要  $f_1 = 1$ 。设  $F(x)$  为  $f$  的指数型生成函数，有：

$$F'(x) = F^2(x) + 1$$

以及初始条件  $F(0) = 0$ ，下面来解这个方程。

# 例题选讲：节选自 P7289 Chasse Neige

【题解】 设  $f_n$  表示长度为  $n$  的 M 型排列个数，枚举数字  $n$  放的位置  $(i + 1)$ ，选  $i$  个数放左边，剩下的放在右边，两边分别构成 M 型排列：

$$f_n = \sum_{i \text{ 是奇数}} \binom{n-1}{i} f_i f_{n-1-i}$$

另外，显然  $k$  为偶数时  $f_k = 0$ ；特别地，我们需要  $f_1 = 1$ 。设  $F(x)$  为  $f$  的指数型生成函数，有：

$$F'(x) = F^2(x) + 1$$

以及初始条件  $F(0) = 0$ ，下面来解这个方程。

$$\frac{dF}{dx} = F^2 + 1 \implies \frac{dF}{F^2 + 1} = dx \implies \int \frac{dF}{F^2 + 1} = \int dx$$



例题选讲：节选自 P7289 Chasse Neige

【题解】 设  $f_n$  表示长度为  $n$  的 M 型排列个数，枚举数字  $n$  放的位置  $(i + 1)$ ，选  $i$  个数放左边，剩下的放在右边，两边分别构成 M 型排列：

$$f_n = \sum_{i \text{ 是奇数}} \binom{n-1}{i} f_i f_{n-1-i}$$

另外，显然  $k$  为偶数时  $f_k = 0$ ；特别地，我们需要  $f_1 = 1$ 。设  $F(x)$  为  $f$  的指数型生成函数，有：

$$F'(x) = F^2(x) + 1$$

以及初始条件  $F(0) = 0$ ，下面来解这个方程。

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} = F^2 + 1 &\implies \frac{dF}{F^2 + 1} = dx \implies \int \frac{dF}{F^2 + 1} = \int dx \\ &\implies \arctan F = x + C \implies F(x) = \tan(x + C) \end{aligned}$$

由  $F(0) = 0$  可以得到  $C = 0$ ，因此  $F(x) = \tan x$ ，多项式求  $\tan$  即可。

## ① 生成函数

## ② 快速数论变换 (NTT)

## ③ 多项式运算

## ④ 多项式的其它应用

多点求值与快速插值  
常系数齐次线性递推

## ⑤ 参考文献

- ① 生成函数
- ② 快速数论变换 (NTT)
- ③ 多项式运算
- ④ 多项式的其它应用**
  - 多点求值与快速插值
  - 常系数齐次线性递推
- ⑤ 参考文献

## ① 生成函数

## ② 快速数论变换 (NTT)

## ③ 多项式运算

## ④ 多项式的其它应用

多点求值与快速插值  
常系数齐次线性递推

## ⑤ 参考文献

- ① 生成函数
- ② 快速数论变换 (NTT)
- ③ 多项式运算
- ④ 多项式的其它应用
- ⑤ 参考文献

- [1] T. Sauer, *Numerical Analysis*.  
USA: Addison-Wesley Publishing Company, 2nd ed., 2011.
- [2] O. Wiki, “快速傅里叶变换 - OI Wiki.”  
(2023, May 18).
- [3] Karry5307, “题解 P7289 【「EZEC-5」Chasse Neige】.”  
(2021, Jan 26).

*Thank You*