计算几何 2：旋转卡壳、三角形、圆

Ebola

Institute of Mathematics,
Zhejiang University.

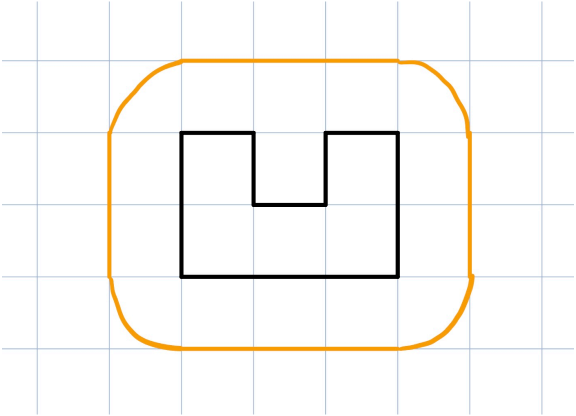
Jan, 2024

P2116 城墙

有一次，一个贪婪的国王命令他的骑士在他的城堡外修建一堵围墙，要求围墙离城堡的最近距离不能少于 L。
城堡是一个 n 边形，国王非常吝啬，不愿意多花建一米的围墙，多建的话他会杀掉负责修建的骑士。
请你帮助这个倒霉的骑士，帮他求出最少需要修建多长的围墙。

P2116 城墙

答案是凸包周长 $+2\pi L$.



向量的旋转

如果一个向量 $\vec{v} = (x, y)$，现在将它逆时针旋转 $90°$，得到什么？

向量的旋转

如果一个向量 $\vec{v} = (x, y)$，现在将它逆时针旋转 90°，得到什么？

$$\vec{v}^{\perp} = (-y, x). \tag{1}$$

向量的旋转

如果一个向量 $\vec{v} = (x, y)$，现在将它逆时针旋转 θ，得到什么？

向量的旋转

如果一个向量 $\overrightarrow{v} = (x, y)$，现在将它逆时针旋转 θ，得到什么？

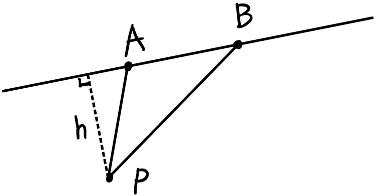
$$\text{Rotate}(\overrightarrow{v}, \theta) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta). \qquad (2)$$

点到直线的距离

给定 P, A, B 三点坐标，求点 P 到直线 AB 的距离。（别用斜率）

点到直线的距离

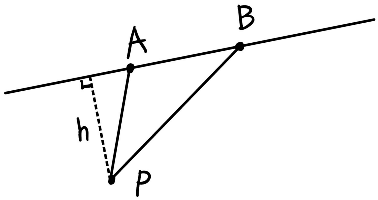
给定 P, A, B 三点坐标，求点 P 到直线 AB 的距离。（别用斜率）



$$h = \frac{S_{\Delta PAB}}{|AB|} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}|}{|AB|}. \tag{3}$$

点到直线的距离

给定 P, A, B 三点坐标，求点 P 到直线 AB 的距离。（别用斜率）



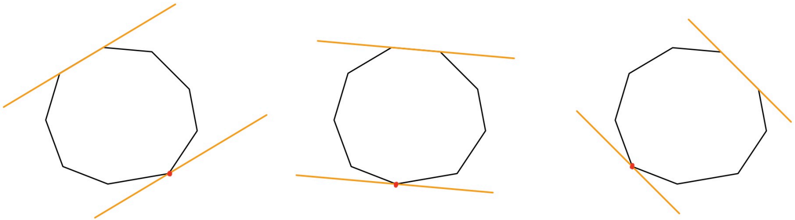
$$h = \frac{S_{\Delta PAB}}{|AB|} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}|}{|AB|}. \tag{3}$$

```
double DistanceToLine(Point P, Point A, Point B){
    return fabs(Cross(A-P, B-P)) / Length(A-B);
}
```

【模板】旋转卡壳

给定平面上 n 个点，求凸包直径（直径是指最远的两个顶点的距离）。

旋转卡壳



如图所示，枚举上凸壳的边 P_iP_{i+1}，找到距离它最远的点。显然，当我们顺时针枚举边时，对面的点也只会顺时针方向前进，所以复杂度是 $O(n)$ 的。

旋转卡壳

```
double RotatingCalipers(Point *ch, int n){
    if(n==2) return Length(ch[2] - ch[1]);
    int cur=0;
    double ans=0;
    ch[n+1] = ch[1];
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        while(DistanceToLine(ch[cur], ch[i], ch[i+1])
            <= DistanceToLine(ch[cur%n+1], ch[i], ch[i+1])){
             cur = cur % n + 1;
        }
        ans=max(ans, max(Length(ch[i] - ch[cur]),
                             Length(ch[i+1] - poly[cur])));
    }
    return ans;
}
```

旋转卡壳

其实由于 $\Delta P_iP_{i+1}Q$ 的底边 P_iP_{i+1} 是固定的，最大化 Q 到直线 $l_{P_iP_{i+1}}$ 的距离就等价于最大化 $\Delta P_iP_{i+1}Q$ 的面积，因此不需要求点到直线的距离，直接调用叉乘即可，可以优化常数。

```
double RotatingCalipers(Point *ch, int n){
    if(n==2) return Length(ch[2] - ch[1]);
    int cur=0;
    double ans=0;
    ch[n+1] = ch[1];
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        while(fabs(Cross(ch[i]-ch[cur], ch[i+1]-ch[cur]))
           <= fabs(Cross(ch[i]-ch[cur%n+1], ch[i+1]-ch[cur%n+1]))){
            cur = cur % n + 1;
        }
        ans=max(ans, max(Length(ch[i] - ch[cur]),
                         Length(ch[i+1] - poly[cur])));
    }
    return ans;
}
```

[HNOI2007] 最小矩形覆盖

给定一些点的坐标，求能够覆盖所有点的最小面积的矩形，输出所求矩形的面积和四个顶点坐标。

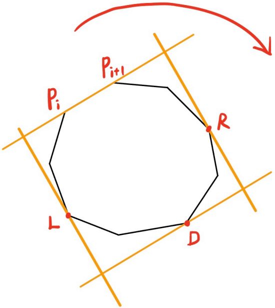
[HNOI2007] 最小矩形覆盖

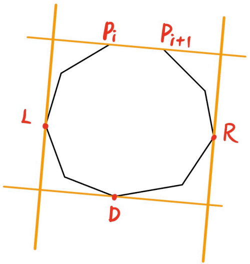
覆盖所有点等价于覆盖凸包的所有顶点，所以肯定先求凸包。

[HNOI2007] 最小矩形覆盖

覆盖所有点等价于覆盖凸包的所有顶点，所以肯定先求凸包。

接下来都会想到旋转卡壳，像这样：



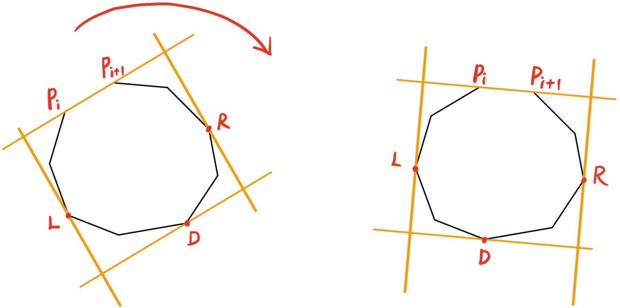


然后按顺序枚举边 P_iP_{i+1}，并维护 L, R, D 三个点。但是有一个问题。

[HNOI2007] 最小矩形覆盖

覆盖所有点等价于覆盖凸包的所有顶点，所以肯定先求凸包。

接下来都会想到旋转卡壳，像这样：



然后按顺序枚举边 P_iP_{i+1}，并维护 L, R, D 三个点。但是有一个问题。

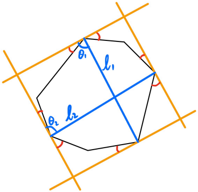
为什么最小矩形一定有一条边和凸包的某条边重合？难道最小矩形不能每条边都只和凸包的一个顶点相切吗？

[HNOI2007] 最小矩形覆盖

结论：最小矩形一定有一条边与凸包重合。

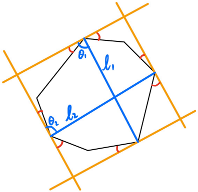
[HNOI2007] 最小矩形覆盖

结论：最小矩形一定有一条边与凸包重合。
证明：若不然，即最小矩形的每条边都只和凸包的一个顶点相切。



[HNOI2007] 最小矩形覆盖

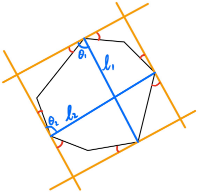
结论：最小矩形一定有一条边与凸包重合。
证明：若不然，即最小矩形的每条边都只和凸包的一个顶点相切。



此时面积是：$S = l_1 \sin\theta_1 \cdot l_2 \sin\theta_2$.

[HNOI2007] 最小矩形覆盖

结论：最小矩形一定有一条边与凸包重合。
证明：若不然，即最小矩形的每条边都只和凸包的一个顶点相切。

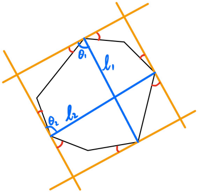


此时面积是：$S = l_1 \sin\theta_1 \cdot l_2 \sin\theta_2$.
将矩形某条边旋转很小很小的 θ 角度（使标红的那些角仍然大于 0），另外三条边卡上去，新矩形的面积为：

$$
\begin{aligned}
S' &= l_1 \sin(\theta_1 + \theta) \cdot l_2 \sin(\theta_2 + \theta) && (4) \\
&= -\frac{1}{2} l_1 l_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta) - \cos(\theta_1 - \theta_2)\right). && (5)
\end{aligned}
$$

[HNOI2007] 最小矩形覆盖

结论：最小矩形一定有一条边与凸包重合。
证明：若不然，即最小矩形的每条边都只和凸包的一个顶点相切。



此时面积是：$S = l_1 \sin\theta_1 \cdot l_2 \sin\theta_2$.
将矩形某条边旋转很小很小的 θ 角度（使标红的那些角仍然大于 0），另外三条边卡上去，新矩形的面积为：

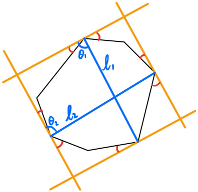
$$S' = l_1 \sin(\theta_1 + \theta) \cdot l_2 \sin(\theta_2 + \theta) \tag{4}$$

$$= -\frac{1}{2} l_1 l_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta) - \cos(\theta_1 - \theta_2)\right). \tag{5}$$

按照假设，必须当 $\theta = 0$ 时 S' 取得最小值。也就是说当 $\theta = 0$ 时 $\cos(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta)$ 取得最大值。

[HNOI2007] 最小矩形覆盖

结论：最小矩形一定有一条边与凸包重合。
证明：若不然，即最小矩形的每条边都只和凸包的一个顶点相切。



此时面积是：$S = l_1 \sin\theta_1 \cdot l_2 \sin\theta_2$.
将矩形某条边旋转很小很小的 θ 角度（使标红的那些角仍然大于 0），另外三条边卡上去，新矩形的面积为：

$$S' = l_1 \sin(\theta_1+\theta) \cdot l_2 \sin(\theta_2+\theta) \tag{4}$$

$$= -\frac{1}{2} l_1 l_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2-2\theta) - \cos(\theta_1-\theta_2)\right). \tag{5}$$

按照假设，必须当 $\theta = 0$ 时 S' 取得最小值。也就是说当 $\theta = 0$ 时 $\cos(\theta_1+\theta_2-2\theta)$ 取得最大值。根据 cos 的性质我们必须有 $\theta_1+\theta_2 = 2k\pi$，这显然是不可能的，证毕！

[HNOI2007] 最小矩形覆盖

现在我们已经证明了结论，可以放心地卡壳了。

```
double RotatingCalipers(Point *ch, int n){
    int D = 0, L = -1, R = -1;
    double ans = 0;
    ch[n+1] = ch[1];
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        while(DistanceToLine(ch[D], ch[i], ch[i+1])
            <= DistanceToLine(ch[D%n+1], ch[i], ch[i+1])){
            D = D % n + 1;
        }
        if(L==-1) L = i + 2;
        if(R==-1) R = D % n + 1;
        Point D2 = D + Rotate(ch[i+1]-ch[i], pi/2);
        while(DistanceToLine(ch[R], ch[D], D2)
            <= DistanceToLine(ch[R%n+1], ch[D], D2)){
            R = R % n + 1;
        }
        while(...) L = L % n + 1;  // 自己写
        ans = max(ans, ...);       // 自己写
    }
    return ans;
}
```

[SCOI2007] 最大土地面积

给定一些点的坐标，选其中四个点，使它们构成的四边形面积最大。

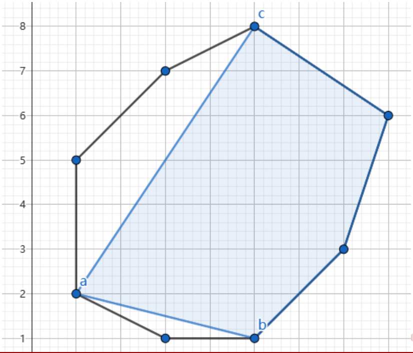
[SDCPC2023] Computational Geometry

给定一个有 n 个顶点的凸多边形 P，您需要选择 P 的三个顶点，按逆时针顺序记为 a，b 和 c。要求在 b 沿逆时针方向到 c 之间恰有 k 条边（也就是说，a 不是这 k 条边的端点）。

考虑用线段 ab 和 ac 将 P 割开。将由线段 ab，ac，以及 b 和 c 之间的 k 条边围成的 $(k+2)$ 边形记作 Q。

求 Q 可能的最大面积。

注意，ab 和 ac 可以与 P 的边重合。



[SDCPC2023] Computational Geometry

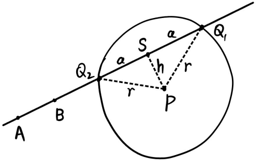
枚举 b，然后 c 就确定了，接下来要让 a 离 l_{bc} 的距离最远，其实也就是旋转卡壳。

圆与直线的交点

给定直线上两个点 A, B 的坐标、圆心 P 的坐标、圆的半径 r，求直线 l_{AB} 与圆的交点。

圆与直线的交点

给定直线上两个点 A, B 的坐标、圆心 P 的坐标、圆的半径 r，求直线 l_{AB} 与圆的交点。



先求出 P 到 l_{AB} 的距离 h，然后计算 $a=\sqrt{r^2-h^2}$，然后求出：

$$S = P + h\frac{\overrightarrow{AB}^{\perp}}{|AB|} \tag{6}$$

$$Q_1 = S + a\frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} \tag{7}$$

$$Q_2 = S - a\frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} \tag{8}$$

[BZOJ2178] 圆的面积并

给定 n $(n \leq 1000)$ 个圆，求它们覆盖区域的面积。

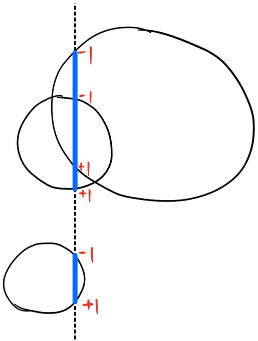
[BZOJ2178] 圆的面积并

基本思路是辛普森积分求 $\int_L^R f(t)\ dt$，其中 $f(t)$ 表示直线 $x = t$ 与覆盖区域相交部分的长度。

[BZOJ2178] 圆的面积并

基本思路是辛普森积分求 $\int_L^R f(t)\ dt$，其中 $f(t)$ 表示直线 $x=t$ 与覆盖区域相交部分的长度。

对于一条直线 $x=t$，我们可以枚举所有圆，求出与该直线的所有交点，并从小到大排序，然后依次枚举；每碰到一个下交点，就加 1，碰到上交点就减 1；非零部分的总长度就是相交部分的长度。



圆交

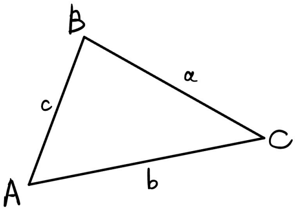
给定两个圆的圆心坐标 P_1, P_2，以及它们的半径 r_1, r_2，判断它们是否有交点（或切点），如果有，求之。

正余弦定理

在求圆交之前，我们先来看两个三角形里的基本定理。

正余弦定理

在求圆交之前，我们先来看两个三角形里的基本定理。



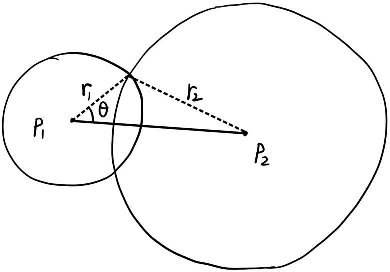
正弦定理：

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{n} = \frac{\sin C}{c}. \tag{9}$$

余弦定理：

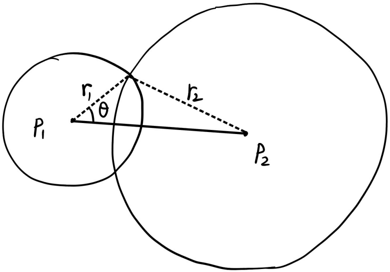
$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \tag{10}$$

圆交



先用余弦定理求出 θ，

圆交



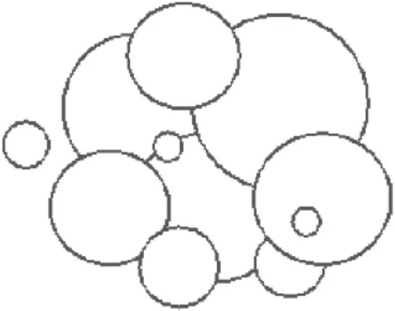
先用余弦定理求出 θ，然后求出第一个交点：

$$P_1 + r_1 \frac{\mathrm{Rotate}(\overrightarrow{P_1P_2}, \theta)}{|P_1P_2|}. \tag{11}$$

第二个交点类似。

[UVA10969] Sweet Dream

依次输入 n 个圆的圆心坐标、半径，后输入的圆堆叠在先输入的圆上面，问最后可见部分的弧长总和。T 组数据。($T, n \leq 100$)



[UVA10969] Sweet Dream

对于第 i 个圆，求出它和其它所有圆的交点，并将这些交点按逆时针排序。

[UVA10969] Sweet Dream

对于第 i 个圆，求出它和其它所有圆的交点，并将这些交点按逆时针排序。

这些交点将圆分成若干个圆弧，每个圆弧要么整个露出来，要么整个被挡掉。所以只要判断每个圆弧的中点是否位于某个圆 $j\ (>i)$ 内部即可。最后将露出来的圆弧长度累加。

Thank You