高级计数技巧：生成函数与多项式运算

Ebola

Institute of Mathematics,
Zhejiang University.

July, 2023

1. 生成函数
   - 普通生成函数
   - 指数生成函数
2. 快速数论变换（NTT）
3. 多项式运算
4. 常系数齐次线性递推
5. 参考文献

定义与例子

对于一个数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$，它的普通生成函数为：

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

定义与例子

对于一个数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$，它的普通生成函数为：

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

- $\{1, 2, 3\}$ 的普通生成函数为：$1 + 2x + 3x^2$
- $\{1, 1, 1, \ldots\}$ 的普通生成函数为：$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

封闭形式

考虑 $\{1, 1, 1, ...\}$ 的普通生成函数：

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

封闭形式

考虑 $\{1, 1, 1, ...\}$ 的普通生成函数：

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

注意到

$$xF(x) + 1 = F(x)$$

因此

$$F(x) = \frac{1}{1-x}$$

我们称这种没有求和符号的表达式为封闭形式

封闭形式

求数列 $\{1,0,1,0,...\}$ 的普通生成函数，并化为封闭形式

封闭形式

求数列 $\{1, 0, 1, 0, ...\}$ 的普通生成函数，并化为封闭形式

【解】

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

封闭形式

求数列 $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ 的普通生成函数，并化为封闭形式

封闭形式

求数列 $\{1,2,3,4,...\}$ 的普通生成函数，并化为封闭形式

【解】

$$\begin{aligned}F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})' \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)' \\ &= \left(\frac{1}{1-x}\right)' \\ &= \frac{1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

组合计数例子

假设你去买水果，一共要买 n 个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

组合计数例子

假设你去买水果，一共要买 n 个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

【解】设买 i 个苹果的方案数为 a_i，事实上 a_i 仅在 i 为偶数时为 1，否则为 0，因此苹果的生成函数为：

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}$$

组合计数例子

假设你去买水果，一共要买 n 个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

【解】设买 i 个苹果的方案数为 a_i，事实上 a_i 仅在 i 为偶数时为 1，否则为 0，因此苹果的生成函数为：

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1 - x^2}$$

同理，西瓜和梨的生成函数为

$$G(x) = 1 + x, \quad H(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1 - x}$$

组合计数例子

假设你去买水果，一共要买 n 个，其中苹果只能买偶数个，西瓜最多买一个，梨可以买任意个。请问一共有多少种购买方案？

【解】设买 i 个苹果的方案数为 a_i，事实上 a_i 仅在 i 为偶数时为 1，否则为 0，因此苹果的生成函数为：

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}$$

同理，西瓜和梨的生成函数为

$$G(x) = 1 + x, \quad H(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

相乘得到

$$F(x)G(x)H(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

所以一共有 $n+1$ 种购买方案。

定义与例子

对于一个数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ 它的指数生成函数为：

$$F(x) = \sum_n a_n \frac{x^n}{n!}$$

定义与例子

对于一个数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$，它的指数生成函数为：

$$F(x) = \sum_n a_n \frac{x^n}{n!}$$

- $\{1, 2, 3\}$ 的指数生成函数为：$1 + x + \frac{1}{2}x^2$
- $\{1, 1, 1, \dots\}$ 的指数生成函数为：$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

封闭形式

考虑 $\{1, 1, 1, \ldots\}$ 的指数生成函数：

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

封闭形式

求数列 $\{1, 0, 1, 0, ...\}$ 的指数生成函数，并化为封闭形式

封闭形式

求数列 $\{1,0,1,0,\ldots\}$ 的指数生成函数，并化为封闭形式

【解】

$$\begin{aligned}F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\end{aligned}$$

例题选讲：森林计数

求 n 个点带标号、深度不超过 k 的森林一共有多少种。

1. 生成函数
2. **快速数论变换（NTT）**
3. 多项式运算
4. 常系数齐次线性递推
5. 参考文献

问题引入

给定多项式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$$

求 $h(x) = f(x)g(x)$ 的各项系数，对 998244353 取模。

原根

注意：$998244353 = 119 \times 2^{23} + 1$

我们说 3 是 998244353 的原根，因为 $3^1, 3^2, \ldots, 3^{998244352}$ 对 998244353 取模的结果两两不同。下面为了方便我们记 $p = 998244353$

原根

注意： $998244353 = 119 \times 2^{23} + 1$

我们说 3 是 998244353 的原根，因为 $3^1, 3^2, ..., 3^{998244352}$ 对 998244353 取模的结果两两不同。下面为了方便我们记 $p = 998244353$

根据费马小定理，$3^{p-1} \equiv 1 \pmod p$，那么令 $\omega_n = 3^{119 \times 2^{24-l}}$（其中 $n = 2^l$），我们会发现 $\omega_n^n = 1$，所以 ω_n 可以作为 n 次单位根！

原根

注意： $998244353 = 119 \times 2^{23} + 1$

我们说 3 是 998244353 的原根，因为 $3^1, 3^2, ..., 3^{998244352}$ 对 998244353 取模的结果两两不同。下面为了方便我们记 $p = 998244353$

根据费马小定理，$3^{p-1} \equiv 1 \pmod p$，那么令 $\omega_n = 3^{119\times 2^{24-l}}$（其中 $n = 2^l$），我们会发现 $\omega_n^n = 1$，所以 ω_n 可以作为 n 次单位根！

把 FFT 中的运算全部换成取模意义下的运算，再把 n 次单位复根替换成这里的 ω_n，就得到了 NTT，它的性质就是取模意义下的 FFT。

代码

```
void NTT(int *a,bool INTT)
{
    for(int i=0;i<len;i++) r[i]=(r[i/2]/2)|((i&1)<<(l-1));
    for(int i=0;i<len;i++) if(i<r[i]) swap(a[i],a[r[i]]);
    for(int i=1;i<len;i<<=1)
    {
        int p=(i<<1);
        int wn=Pow(3,(Mod-1)/p);
        if(INTT) wn=Pow(wn,Mod-2);
        for(int j=0;j<len;j+=p)
        {
            int w=1;
            for(int k=0;k<i;k++)
            {
                int x=a[j+k],y=1ll*w*a[i+j+k]%Mod;
                a[j+k]=(x+y)%Mod;
                a[i+j+k]=(x-y+Mod)%Mod;
                w=1ll*w*wn%Mod;
            }
        }
    }
    //为了方便，我们通常把INTT的最后一步除以n也写进NTT函数里
    if(INTT) for(int i=0;i<len;i++) a[i]=1ll*a[i]*inv%Mod;
}
```

多项式牛顿迭代

给定多项式 $g(x)$，求一个多项式 $f(x)$，满足

$$g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n} \tag{1}$$

注意：$(\bmod x^n)$ 的意思是只保留最低的 n 项。

多项式牛顿迭代

给定多项式 $g(x)$，求一个多项式 $f(x)$，满足

$$g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n} \tag{1}$$

注意：$\pmod{x^n}$ 的意思是只保留最低的 n 项。

考虑倍增。设 $f_0(x)$ 是方程 (1) 在 $\pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$ 意义下的解，那么 $f(x) - f_0(x)$ 的最低次项就是 $x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 项。考虑泰勒展开：

$$\begin{aligned} g(f(x)) &\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(f_0(x))}{i!}(f(x) - f_0(x))^i \pmod{x^n} \\ &\equiv g(f_0(x)) + g'(f_0(x))(f(x) - f_0(x)) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

多项式牛顿迭代

给定多项式 $g(x)$，求一个多项式 $f(x)$，满足

$$g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n} \tag{1}$$

注意：$(\bmod\ x^n)$ 的意思是只保留最低的 n 项。

考虑倍增。设 $f_0(x)$ 是方程 (1) 在 $(\bmod\ x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ 意义下的解，那么 $f(x) - f_0(x)$ 的最低次项就是 $x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 项。考虑泰勒展开：

$$\begin{aligned} g(f(x)) &\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(f_0(x))}{i!}(f(x) - f_0(x))^i \pmod{x^n} \\ &\equiv g(f_0(x)) + g'(f_0(x))(f(x) - f_0(x)) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

由方程 (1) 得：

$$f(x) \equiv f_0(x) - \frac{g(f_0(x))}{g'(f_0(x))} \pmod{x^n}$$

多项式求逆

给定一个多项式 $f(x)$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$f(x)g(x) \equiv 1 \pmod{x^n} \tag{2}$$

多项式求逆

给定一个多项式 $f(x)$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$f(x)g(x) \equiv 1 \pmod{x^n} \tag{2}$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = \frac{1}{g(x)} - f(x)$$

多项式求逆

给定一个多项式 $f(x)$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$f(x)g(x) \equiv 1 \pmod{x^n} \tag{2}$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = \frac{1}{g(x)} - f(x)$$

设 $g_0(x)$ 是方程 (2) 在 $\pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$ 意义下的解，由牛顿迭代有：

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv g_0(x) - \frac{h(g_0(x))}{h'(g_0(x))} \pmod{x^n} \\ &\equiv g_0(x) + \frac{\frac{1}{g_0(x)} - f(x)}{\frac{1}{g_0^2(x)}} \pmod{x^n} \\ &\equiv 2g_0(x) - g_0^2(x)f(x) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

FFT 优化即可，复杂度 $T(n) = T(n/2) + O(n\log n) = O(n\log n)$

多项式开方

给定一个多项式 $f(x)$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g^2(x) \equiv f(x) \pmod{x^n} \tag{3}$$

多项式开方

给定一个多项式 $f(x)$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g^2(x) \equiv f(x) \pmod{x^n} \tag{3}$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = g^2(x) - f(x)$$

多项式开方

给定一个多项式 $f(x)$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g^2(x) \equiv f(x) \pmod{x^n} \tag{3}$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = g^2(x) - f(x)$$

设 $g_0(x)$ 是方程 (3) 在 $\pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$ 意义下的解，由牛顿迭代有：

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv g_0(x) - \frac{h(g_0(x))}{h'(g_0(x))} \pmod{x^n} \\ &\equiv g_0(x) - \frac{g_0^2(x) - f(x)}{2g_0(x)} \pmod{x^n} \\ &\equiv \frac{1}{2} g_0(x) + \frac{1}{2} g_0^{-1}(x) f(x) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

需要做一次多项式求逆和一次多项式乘法，复杂度
$T(n) = T(n/2) + O(n \log n) = O(n \log n)$

多项式除法（取模）

给定一个 n 次多项式 $f(x)$ 和一个 $m(\leq n)$ 次多项式 $g(x)$，求多项式 $Q(x), R(x)$，使得

$$f(x) \equiv Q(x)g(x) + R(x) \pmod{x^n} \tag{4}$$

且 $\deg R < m$（类似整数的带余除法）

多项式除法（取模）

给定一个 n 次多项式 $f(x)$ 和一个 $m(\leq n)$ 次多项式 $g(x)$，求多项式 $Q(x), R(x)$，使得

$$f(x) \equiv Q(x)g(x) + R(x) \pmod{x^n} \tag{4}$$

且 $\deg R < m$（类似整数的带余除法）

考虑构造变换：

$$f^R(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

多项式除法（取模）

给定一个 n 次多项式 $f(x)$ 和一个 $m(\leq n)$ 次多项式 $g(x)$，求多项式 $Q(x), R(x)$，使得

$$f(x) \equiv Q(x)g(x) + R(x) \pmod{x^n} \tag{4}$$

且 $\deg R < m$（类似整数的带余除法）

考虑构造变换：

$$f^R(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

将方程 (4) 中的 x 替换成 x^{-1}，并且在两边乘上 x^n，得到：

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n-m} Q\left(\frac{1}{x}\right) x^m g\left(\frac{1}{x}\right) + x^{n-m+1} x^{m-1} R\left(\frac{1}{x}\right)$$

多项式除法（取模）

给定一个 n 次多项式 $f(x)$ 和一个 $m(\leq n)$ 次多项式 $g(x)$，求多项式 $Q(x), R(x)$，使得

$$f(x) \equiv Q(x)g(x) + R(x) \pmod{x^n} \tag{4}$$

且 $\deg R < m$（类似整数的带余除法）

考虑构造变换：

$$f^R(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

将方程 (4) 中的 x 替换成 x^{-1}，并且在两边乘上 x^n，得到：

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n-m} Q\left(\frac{1}{x}\right) x^m g\left(\frac{1}{x}\right) + x^{n-m+1} x^{m-1} R\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\implies f^R(x) = Q^R(x) g^R(x) + x^{n-m+1} R^R(x)$$

多项式除法（取模）

$$f^R(x) = Q^R(x)g^R(x) + x^{n-m+1}R^R(x)$$

如果两边模掉 x^{n-m-1}，就可以消除 $R^R(x)$ 项的影响，而 $Q^R(x)$ 的次数为 $(n-m) < (n-m+1)$，所以 $Q^R(x)$ 不受影响

多项式除法（取模）

$$f^R(x) = Q^R(x)g^R(x) + x^{n-m+1}R^R(x)$$

如果两边模掉 x^{n-m-1}，就可以消除 $R^R(x)$ 项的影响，而 $Q^R(x)$ 的次数为 $(n-m) < (n-m+1)$，所以 $Q^R(x)$ 不受影响，可见

$$f^R(x) \equiv Q^R(x)g^R(x) \pmod{x^{n-m+1}}$$

多项式求逆得到 $Q^R(x)$，反转得到 $Q(x)$，回代方程 (4) 求出 $R(x)$

多项式 ln

给定一个多项式 $f(x)$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g(x) \equiv \ln f(x) \pmod{x^n} \tag{5}$$

多项式 ln

给定一个多项式 $f(x)$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g(x) \equiv \ln f(x) \pmod{x^n} \tag{5}$$

求导得

$$g'(x) \equiv f'(x) f^{-1}(x) \pmod{x^n}$$

依次进行求导、多项式求逆、多项式乘法、积分即可，复杂度 $O(n \log n)$

多项式 exp

给定一个多项式 $f(x)$，保证 $[x^0]f(x)=0$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g(x) \equiv e^{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x)}{k!} \pmod{x^n} \tag{6}$$

多项式 exp

给定一个多项式 $f(x)$，保证 $[x^0]f(x)=0$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g(x) \equiv e^{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x)}{k!} \pmod{x^n} \tag{6}$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x)) = \ln g(x) - f(x)$$

多项式 exp

给定一个多项式 $f(x)$，保证 $[x^0]f(x)=0$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g(x)\equiv e^{f(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^k(x)}{k!}\pmod{x^n} \tag{6}$$

用多项式牛顿迭代的思路。设

$$h(g(x))=\ln g(x)-f(x)$$

设 $g_0(x)$ 是方程 (3) 在 $\pmod{x^{\lceil \frac{n}{2}\rceil}}$ 意义下的解，由牛顿迭代有：

$$\begin{aligned}g(x)&\equiv g_0(x)-\frac{h(g_0(x))}{h'(g_0(x))}\pmod{x^n}\\&\equiv g_0(x)-\frac{\ln g_0(x)-f(x)}{g_0^{-1}(x)}\pmod{x^n}\\&\equiv g_0(x)\left(1-\ln g_0(x)+f(x)\right)\pmod{x^n}\end{aligned}$$

需要做一次多项式 ln 和一次多项式乘法，复杂度 $T(n)=T(n/2)+O(n\log n)=O(n\log n)$

多项式的幂

给定正整数 k 和一个多项式 $f(x)$，保证 $[x^0]f(x)=1$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g(x) \equiv (f(x))^k \pmod{x^n} \tag{7}$$

多项式的幂

给定正整数 k 和一个多项式 $f(x)$，保证 $[x^0]f(x)=1$，求一个多项式 $g(x)$，使得

$$g(x) \equiv (f(x))^k \pmod{x^n} \tag{7}$$

注意到

$$g(x) = e^{k \ln f(x)}$$

多项式三角函数

给定一个多项式 $f(x)$，求 $\pmod{x^n}$ 意义下的 $\sin f(x), \cos f(x), \tan f(x)$.

多项式三角函数

给定一个多项式 $f(x)$，求 $\pmod{x^n}$ 意义下的 $\sin f(x), \cos f(x), \tan f(x)$.

根据欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$，得到

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

多项式三角函数

给定一个多项式 $f(x)$，求 $\pmod{x^n}$ 意义下的 $\sin f(x), \cos f(x), \tan f(x)$.

根据欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$，得到

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

将 $f(x)$ 代入得到

$$\sin f(x) = \frac{\exp(if(x)) - \exp(-if(x))}{2i}$$
$$\cos f(x) = \frac{\exp(if(x)) + \exp(-if(x))}{2}$$
$$\tan f(x) = \sin f(x) (\cos f(x))^{-1}$$

多项式三角函数

给定一个多项式 $f(x)$，求 $\pmod{x^n}$ 意义下的 $\sin f(x), \cos f(x), \tan f(x)$.

根据欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$，得到

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

将 $f(x)$ 代入得到

$$\sin f(x) = \frac{\exp(if(x)) - \exp(-if(x))}{2i}$$
$$\cos f(x) = \frac{\exp(if(x)) + \exp(-if(x))}{2}$$
$$\tan f(x) = \sin f(x) (\cos f(x))^{-1}$$

注意，在对 998244353 取模的意义下，我们取 $i^2 \equiv -1 \pmod{998244353}$，可以取 $i = 86583718$ 或 911660635

例题选讲：小朋友和二叉树

给定一个 n 个数的集合 $c = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$，其中 $1 \le c_i \le M \le 10^5$，如果一棵二叉树的每个点权都在集合 c 中，我们就叫它“好树”。现给定 $m \le 10^5$，对每个 $k = 1, ..., m$，求有多少棵权值和为 k 的好树。答案对 998244353 取模。

例题选讲：小朋友和二叉树

给定一个 n 个数的集合 $c = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$，其中 $1 \le c_i \le M \le 10^5$，如果一棵二叉树的每个点权都在集合 c 中，我们就叫它“好树”。现给定 $m \le 10^5$，对每个 $k = 1, ..., m$，求有多少棵权值和为 k 的好树。答案对 998244353 取模。

【题解】设 $g_i = [i \in c]$，f_i 表示有多少颗权值之和为 k 的好树，有：

$$f_m = \sum_{k=1}^{M} g_k \sum_{i=0}^{m-k} f_i f_{m-k-i}$$

为使递推成立，需要令 $f_0 = 1$

例题选讲：小朋友和二叉树

给定一个 n 个数的集合 $c=\{c_1,c_2,...,c_n\}$，其中 $1\le c_i\le M\le 10^5$，如果一棵二叉树的每个点权都在集合 c 中，我们就叫它“好树”。现给定 $m\le 10^5$，对每个 $k=1,...,m$，求有多少棵权值和为 k 的好树。答案对 998244353 取模。

【题解】设 $g_i=[i\in c]$，f_i 表示有多少颗权值之和为 k 的好树，有：

$$f_m=\sum_{k=1}^{M} g_k\sum_{i=0}^{m-k} f_i f_{m-k-i}$$

为使递推成立，需要令 $f_0=1$，设 $F(x),G(x)$ 分别为 f,g 的普通型生成函数，有

$$F(x)=G(x)F^2(x)+1$$

例题选讲：小朋友和二叉树

给定一个 n 个数的集合 $c=\{c_1,c_2,...,c_n\}$，其中 $1\le c_i\le M\le 10^5$，如果一棵二叉树的每个点权都在集合 c 中，我们就叫它"好树"。现给定 $m\le 10^5$，对每个 $k=1,...,m$，求有多少棵权值和为 k 的好树。答案对 998244353 取模。

【题解】设 $g_i=[i\in c]$，f_i 表示有多少颗权值之和为 k 的好树，有：

$$f_m=\sum_{k=1}^{M}g_k\sum_{i=0}^{m-k}f_if_{m-k-i}$$

为使递推成立，需要令 $f_0=1$，设 $F(x),G(x)$ 分别为 f,g 的普通型生成函数，有

$$F(x)=G(x)F^2(x)+1$$

因此

$$F(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4G(x)}}{2G(x)}$$

应该选哪个解？

例题选讲：小朋友和二叉树

$$F_1(x) = \frac{1+\sqrt{1-4G(x)}}{2G(x)}, \quad F_2(x) = \frac{1-\sqrt{1-4G(x)}}{2G(x)}$$

注意到 $G(0)=0$，$F(0)=1$，**根据上面的表达式**，$x \to 0$ **时**，$F_1(x) \to \infty$，**因此舍弃** F_1

例题选讲：小朋友和二叉树

$$F_1(x) = \frac{1+\sqrt{1-4G(x)}}{2G(x)}, \quad F_2(x) = \frac{1-\sqrt{1-4G(x)}}{2G(x)}$$

注意到 $G(0)=0$，$F(0)=1$，根据上面的表达式，$x \to 0$ 时，$F_1(x) \to \infty$，因此舍弃 F_1，从而

$$F(x) = F_2(x) = \frac{2}{1+\sqrt{1-4G(x)}}$$

多项式开根、求逆即可。

例题选讲：简单连通图计数

求 n 个点带标号的无向简单连通图个数，$n \leq 10^5$，对 998244353 取模

例题选讲：简单连通图计数

求 n 个点带标号的无向简单连通图个数，$n \le 10^5$，对 998244353 取模

【题解】 设 f_n 为答案，g_n 为 n 个点带标号简单图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$

例题选讲：简单连通图计数

求 n 个点带标号的无向简单连通图个数，$n \leq 10^5$，对 998244353 取模

【题解】设 f_n 为答案，g_n 为 n 个点带标号简单图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$
枚举 1 号点所在的连通块大小，得到：

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} f_k g_{n-k}$$

例题选讲：简单连通图计数

求 n 个点带标号的无向简单连通图个数，$n \le 10^5$，对 998244353 取模

【题解】设 f_n 为答案，g_n 为 n 个点带标号简单图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$
枚举 1 号点所在的连通块大小，得到：

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} f_k g_{n-k}$$

展开组合数，得到

$$\frac{g_n}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{(k-1)!} \frac{g_{n-k}}{(n-k)!}$$

例题选讲：简单连通图计数

求 n 个点带标号的无向简单连通图个数，$n \le 10^5$，对 998244353 取模

【题解】设 f_n 为答案，g_n 为 n 个点带标号简单图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$
枚举 1 号点所在的连通块大小，得到：

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} f_k g_{n-k}$$

展开组合数，得到

$$\frac{g_n}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{(k-1)!} \frac{g_{n-k}}{(n-k)!}$$

设

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_n x^n}{(n-1)!}, \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_n x^n}{(k-1)!}, \quad H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_n x^n}{n!}$$

显然有 $G(x) = F(x)H(x)$，$G(x)$ 与 $H(x)$ 的各项系数直接求出，最后多项式求逆即可。

例题选讲：竞赛图计数

求 n 个点强连通竞赛图的个数，对 998244353 取模，$n \le 10^5$.

竞赛图：任意两点之间恰好有一条边的有向图。

例题选讲：竞赛图计数

求 n 个点强连通竞赛图的个数，对 998244353 取模，$n \leq 10^5$.

竞赛图：任意两点之间恰好有一条边的有向图。

【题解】设 f_n 表示 n 个点强连通竞赛图个数，g_n 表示 n 个点竞赛图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$，另外我们认为 $f_0 = 0, g_0 = 1$.

例题选讲：竞赛图计数

求 n 个点强连通竞赛图的个数，对 998244353 取模，$n \le 10^5$.

竞赛图：任意两点之间恰好有一条边的有向图。

【题解】设 f_n 表示 n 个点强连通竞赛图个数，g_n 表示 n 个点竞赛图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$，另外我们认为 $f_0 = 0, g_0 = 1$.

考虑枚举拓扑序最小的强连通分量大小，注意，这个强连通分量与其他点的连边一定是从这个分量指出去的，所以竞赛图计数归结为两个子问题，从而有

$$g_n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} f_i g_{n-i} \implies \frac{g_n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{i!} \cdot \frac{g_{n-i}}{(n-i)!}$$

例题选讲：竞赛图计数

求 n 个点强连通竞赛图的个数，对 998244353 取模，$n \le 10^5$.

竞赛图：任意两点之间恰好有一条边的有向图。

【题解】设 f_n 表示 n 个点强连通竞赛图个数，g_n 表示 n 个点竞赛图个数，显然 $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$，另外我们认为 $f_0 = 0, g_0 = 1$.

考虑枚举拓扑序最小的强连通分量大小，注意，这个强连通分量与其他点的连边一定是从这个分量指出去的，所以竞赛图计数归结为两个子问题，从而有

$$g_n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} f_i g_{n-i} \implies \frac{g_n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{i!} \cdot \frac{g_{n-i}}{(n-i)!}$$

设 $G(x), F(x)$ 分别是 g 与 f 的指数型生成函数，即得到 $G(x) = F(x)G(x) + 1$，于是

$$F(x) = 1 - G^{-1}(x)$$

例题选讲：P5748 集合划分计数

一个 n 个元素的集合，将其分为任意多个子集，求方案数。
T 组数据，$T \leq 1000$，$n \leq 10^5$

例题选讲：P5748 集合划分计数

一个 n 个元素的集合，将其分为任意多个子集，求方案数。
T 组数据，$T \le 1000$，$n \le 10^5$

【题解】设 B_n 表示 n 个元素集合的划分方案数，考虑最后一个元素所在的集合，枚举该集合的大小、选取该集合中的元素，得到：

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

例题选讲：P5748 集合划分计数

一个 n 个元素的集合，将其分为任意多个子集，求方案数。
T 组数据，$T \le 1000$，$n \le 10^5$

【题解】设 B_n 表示 n 个元素集合的划分方案数，考虑最后一个元素所在的集合，枚举该集合的大小、选取该集合中的元素，得到：

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

设 $F(x)$ 是 B_n 的指数型生成函数，即：

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

例题选讲：P5748 集合划分计数

乘上 e^x 得到：

$$
\begin{aligned}
e^x F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{x^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} B_{n-m} \frac{x^n}{m!(n-m)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} B_{n-m} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} = F'(x)
\end{aligned}
$$

例题选讲：P5748 集合划分计数

乘上 e^x 得到：

$$
\begin{aligned}
e^x F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{x^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} B_{n-m} \frac{x^n}{m!(n-m)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} B_{n-m} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} = F'(x)
\end{aligned}
$$

由于 $F(0) = B_0 = 1$，可以得到 $F(x) = e^{e^x - 1}$，多项式 exp 求出 $F(x)$ 各项系数即可。

例题选讲：P4389 付公主的背包

有 n 种物品，体积为 v_i，都有无限件。给定 m，对于 $s \in [1, m]$，求用这些物品恰好装满 s 体积的方案数。
答案对 998244353 取模，$n, m \le 10^5$.

例题选讲：P4389 付公主的背包

有 n 种物品，体积为 v_i，都有无限件。给定 m，对于 $s \in [1, m]$，求用这些物品恰好装满 s 体积的方案数。
答案对 998244353 取模，$n, m \le 10^5$.

【题解】设 $f_{i,j}$ 表示用前 i 种物品恰好填满 j 体积的方案数，有 dp：

$$f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i,j-v_i}$$

例题选讲：P4389 付公主的背包

有 n 种物品，体积为 v_i，都有无限件。给定 m，对于 $s \in [1, m]$，求用这些物品恰好装满 s 体积的方案数。
答案对 998244353 取模，$n, m \le 10^5$.

【题解】设 $f_{i,j}$ 表示用前 i 种物品恰好填满 j 体积的方案数，有 dp：

$$f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i,j-v_i}$$

设 $F_i(x)$ 是 $f_{i,1}, f_{i,2}, \ldots$ 的普通型生成函数，由 dp 式得到：

$$F_i(x) = F_{i-1}(x) + x^{v_i} F_i(x) \implies F_i(x) = F_{i-1}(x) \frac{1}{1 - x^{v^i}}$$

于是可以得到 $f_{n,1}, f_{n,2}, \ldots$ 的普通型生成函数：

$$F_n(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x^{v^i}}$$

这并不好算

例题选讲：P4389 付公主的背包

考虑化乘法为加法，也就是取 ln 后再 exp：

$$F_n(x) = \exp \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x^{v_i}} = \exp \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1}{1 - x^{v_i}}$$

例题选讲：P4389 付公主的背包

考虑化乘法为加法，也就是取 ln 后再 exp：

$$F_n(x) = \exp \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x^{v_i}} = \exp \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1}{1-x^{v_i}}$$

对 $\ln$ 项泰勒展开：

$$F_n(x) = \exp \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{jv_i}}{j}$$

例题选讲：P4389 付公主的背包

考虑化乘法为加法，也就是取 ln 后再 exp：

$$F_n(x) = \exp \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x^{v_i}} = \exp \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1}{1 - x^{v_i}}$$

对 $\ln$ 项泰勒展开：

$$F_n(x) = \exp \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{jv_i}}{j}$$

事实上，我们只需在 $(\bmod x^m)$ 下求系数，高次项可以忽略，因此

$$F_n(x) = \exp \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{m}{v_i} \right\rfloor} \frac{x^{jv_i}}{j}$$

枚举的复杂度不能保证，还是不能做。

例题选讲：P4389 付公主的背包

不妨将体积相同的物品视为一类，记 b_k 为体积为 k 的物品数量，于是合并同类项得到

$$F_n(x) = \exp \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{k} \rfloor} \frac{x^{jk}}{j}$$

这个两重求和的复杂度由调和级数保证，是 $O(m \log m)$ 的。最后再求 $\exp$ 即可。

例题选讲：节选自 P7289 Chasse Neige

给定 N，对 $n = 1, 2, ..., N$，求有多少个长度为 n 的 M 型排列 π，即：

- $\pi_1 < \pi_2$
- $\pi_{n-1} > \pi_n$
- 每个数都交错，即：对于 $i = 2, 3, ..., n-1$，π_i 要么比左右两个数都小，要么比左右两个数都大

答案对 998244353 取模，$N \leq 10^5$

例题选讲：节选自 P7289 Chasse Neige

【题解】设 f_n 表示长度为 n 的 M 型排列个数

例题选讲：节选自 P7289 Chasse Neige

【题解】设 f_n 表示长度为 n 的 M 型排列个数，枚举数字 n 放的位置 $(i+1)$，选 i 个数放左边，剩下的放在右边，两边分别构成 M 型排列：

$$f_n = \sum_{i\text{是奇数}} \binom{n-1}{i} f_i f_{n-1-i}$$

另外，显然 k 为偶数时 $f_k = 0$；特别地，我们需要 $f_1 = 1$。

例题选讲：节选自 P7289 Chasse Neige

【题解】设 f_n 表示长度为 n 的 M 型排列个数，枚举数字 n 放的位置 $(i+1)$，选 i 个数放左边，剩下的放在右边，两边分别构成 M 型排列：

$$f_n=\sum_{i\text{是奇数}}\binom{n-1}{i}f_if_{n-1-i}$$

另外，显然 k 为偶数时 $f_k=0$；特别地，我们需要 $f_1=1$。设 $F(x)$ 为 f 的指数型生成函数，有：

$$F'(x)=F^2(x)+1$$

以及初始条件 $F(0)=0$，下面来解这个方程。

例题选讲：节选自 P7289 Chasse Neige

【题解】设 f_n 表示长度为 n 的 M 型排列个数，枚举数字 n 放的位置 $(i+1)$，选 i 个数放左边，剩下的放在右边，两边分别构成 M 型排列：

$$f_n = \sum_{i\text{是奇数}} \binom{n-1}{i} f_i f_{n-1-i}$$

另外，显然 k 为偶数时 $f_k = 0$；特别地，我们需要 $f_1 = 1$。设 $F(x)$ 为 f 的指数型生成函数，有：

$$F'(x) = F^2(x) + 1$$

以及初始条件 $F(0) = 0$，下面来解这个方程。

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = F^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}F}{F^2+1} = \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}F}{F^2+1} = \int \mathrm{d}x$$

例题选讲：节选自 P7289 Chasse Neige

【题解】设 f_n 表示长度为 n 的 M 型排列个数，枚举数字 n 放的位置 $(i+1)$，选 i 个数放左边，剩下的放在右边，两边分别构成 M 型排列：

$$f_n = \sum_{i\text{是奇数}} \binom{n-1}{i} f_i f_{n-1-i}$$

另外，显然 k 为偶数时 $f_k = 0$；特别地，我们需要 $f_1 = 1$。设 $F(x)$ 为 f 的指数型生成函数，有：

$$F'(x) = F^2(x) + 1$$

以及初始条件 $F(0) = 0$，下面来解这个方程。

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = F^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}F}{F^2+1} = \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}F}{F^2+1} = \int \mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \quad \arctan F = x + C \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \tan(x+C)$$

由 $F(0) = 0$ 可以得到 $C = 0$，因此 $F(x) = \tan x$，多项式求 $\tan$ 即可。

问题引入

给定 $f_1, \ldots, f_k$，以及数列初值 $a_1, \ldots, a_k$，数列通项公式为

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} f_i a_{n-i}$$

求 a_n，答案对 998244353 取模，$n \le 10^9, k \le 32000$

矩阵形式

我们把递推关系写成矩阵形式 $\mathbf{y}_n = M\mathbf{y}_{n-1}$，展开为

$$\begin{bmatrix} a_{n-k+1} \\ a_{n-k+2} \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ f_k & f_{k-1} & f_{k-2} & \cdots & f_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-k} \\ a_{n-k+1} \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}_k$ 是已知的，我们要求的就是 $\mathbf{y}_{n+k-1} = M^{n-1}\mathbf{y}_k$ 的第一个分量。

矩阵形式

我们把递推关系写成矩阵形式 $\mathbf{y}_n = M\mathbf{y}_{n-1}$，展开为

$$\begin{bmatrix} a_{n-k+1} \\ a_{n-k+2} \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ f_k & f_{k-1} & f_{k-2} & \cdots & f_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-k} \\ a_{n-k+1} \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}_k$ 是已知的，我们要求的就是 $\mathbf{y}_{n+k-1} = M^{n-1}\mathbf{y}_k$ 的第一个分量。M 的特征多项式为

$$p(x) = \det(xI - M) = x_k - \sum_{i=1}^{k} f_i x^{k-i}$$

矩阵形式

我们把递推关系写成矩阵形式 $\mathbf{y}_n = M\mathbf{y}_{n-1}$，展开为

$$\begin{bmatrix} a_{n-k+1} \\ a_{n-k+2} \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ f_k & f_{k-1} & f_{k-2} & \cdots & f_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-k} \\ a_{n-k+1} \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}_k$ 是已知的，我们要求的就是 $\mathbf{y}_{n+k-1} = M^{n-1}\mathbf{y}_k$ 的第一个分量。M 的特征多项式为

$$p(x) = \det(xI - M) = x_k - \sum_{i=1}^{k} f_i x^{k-i}$$

根据 Cayley-Hamilton 定理，有

$$p(M) = O$$

进一步处理

我们令 $f(x)=x^{n-1}$，我们需要求的就是 $f(M)=M^{n-1}$。

进一步处理

我们令 $f(x) = x^{n-1}$，我们需要求的就是 $f(M) = M^{n-1}$。借助多项式带余除法的思路，设

$$f(x) = Q(x)p(x) + R(x)$$

其中 $R(x)$ 的次数不超过 $k-1$，也就是 $R(x) = x^{n-1} \mod p(x)$，不妨记 $R(x) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i x^i$，

进一步处理

我们令 $f(x) = x^{n-1}$，我们需要求的就是 $f(M) = M^{n-1}$。借助多项式带余除法的思路，设

$$f(x) = Q(x)p(x) + R(x)$$

其中 $R(x)$ 的次数不超过 $k-1$，也就是 $R(x) = x^{n-1} \mod p(x)$，不妨记 $R(x) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i x^i$，将 M 代入，根据 $p(M) = O$，得：

$$M^n = f(M) = R(M) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i M^i$$

怎么求 $r_0, \ldots, r_{k-1}$？

进一步处理

我们令 $f(x)=x^{n-1}$，我们需要求的就是 $f(M)=M^{n-1}$。借助多项式带余除法的思路，设

$$f(x)=Q(x)p(x)+R(x)$$

其中 $R(x)$ 的次数不超过 $k-1$，也就是 $R(x)=x^{n-1} \mod p(x)$，不妨记 $R(x)=\sum_{i=0}^{k-1} r_i x^i$，将 M 代入，根据 $p(M)=O$，得：

$$M^n=f(M)=R(M)=\sum_{i=0}^{k-1} r_i M^i$$

怎么求 $r_0,\dots,r_{k-1}$？

快速幂取模。把快速幂里的运算全部换成多项式运算即可。当 k 较小时，多项式运算可以暴力实现，复杂度 $O(k^2\log n)$；当 k 较大时需要 NTT 优化，复杂度 $O(k\log k\log n)$

进一步处理

现在我们求出了 $r_0, \dots, r_{k-1}$，所以

$$\mathbf{y}_{n+k-1} = M^{n-1}\mathbf{y}_k = \sum_{i=0}^{k-1} r_i M^i \mathbf{y}_k = \sum_{i=0}^{k-1} r_i \mathbf{y}_{k+i}$$

进一步处理

现在我们求出了 $r_0, \ldots, r_{k-1}$，所以

$$\mathbf{y}_{n+k-1} = M^{n-1}\mathbf{y}_k = \sum_{i=0}^{k-1} r_i M^i \mathbf{y}_k = \sum_{i=0}^{k-1} r_i \mathbf{y}_{k+i}$$

我们只关心 $\mathbf{y}_{n+k-1}$ 的第一个分量 a_n，由上式子得

$$a_n = \sum_{i=0}^{k-1} r_i a_{i+1}$$

$O(k)$ 即可求出。

例题选讲：NOI2017 泳池

有一个长度为 N，高度为 1001 的网格图，每一个格子有 q 的概率是安全的，每个格子是否安全是独立事件。

如果一个子矩形中的所有格子都是安全的，且它的下边界贴着网格下边界，我们就说这个子矩形是安全的。

求最大安全子矩形面积为 K 的概率。

$n \le 10^9$，$K \le 10^3$，答案对 998244353 取模。

例题选讲：NOI2017 泳池

【题解】首先作前缀和差分：求出最大安全子矩形面积不超过 K 的概率，答案记作 $Ans(K)$，再求出 $Ans(K-1)$，相减即得到答案。

例题选讲：NOI2017 泳池

【题解】首先作前缀和差分：求出最大安全子矩形面积不超过 K 的概率，答案记作 $Ans(K)$，再求出 $Ans(K-1)$，相减即得到答案。

设 f_n 表示底部宽度为 n 的区域内、右下角的格子是危险的、最大安全子矩形面积不超过 K 的概率；显然 $Ans(K) = \frac{f_{n+1}}{1-q}$。

例题选讲：NOI2017 泳池

【题解】首先作前缀和差分：求出最大安全子矩形面积不超过 K 的概率，答案记作 $Ans(K)$，再求出 $Ans(K-1)$，相减即得到答案。

设 f_n 表示底部宽度为 n 的区域内、右下角的格子是危险的、最大安全子矩形面积不超过 K 的概率；显然 $Ans(K) = \frac{f_{n+1}}{1-q}$。

再设 g_n 表示底部宽度为 n 的区域内、最底下一行格子全都是安全的、最大安全子矩形面积不超过 K 的概率。

例题选讲：NOI2017 泳池

【题解】首先作前缀和差分：求出最大安全子矩形面积不超过 K 的概率，答案记作 $Ans(K)$，再求出 $Ans(K-1)$，相减即得到答案。

设 f_n 表示底部宽度为 n 的区域内、右下角的格子是危险的、最大安全子矩形面积不超过 K 的概率；显然 $Ans(K) = \frac{f_{n+1}}{1-q}$。

再设 g_n 表示底部宽度为 n 的区域内、最底下一行格子全都是安全的、最大安全子矩形面积不超过 K 的概率。枚举最底下一行的最右边一个危险格子出现的位置，得到递推

$$f_n = \sum_{i=0}^{\min(k-1,n)} (1-q) g_i f_{n-1-i}$$

例题选讲：NOI2017 泳池

【题解】首先作前缀和差分：求出最大安全子矩形面积不超过 K 的概率，答案记作 $Ans(K)$，再求出 $Ans(K-1)$，相减即得到答案。

设 f_n 表示底部宽度为 n 的区域内、右下角的格子是危险的、最大安全子矩形面积不超过 K 的概率；显然 $Ans(K)=\frac{f_{n+1}}{1-q}$。

再设 g_n 表示底部宽度为 n 的区域内、最底下一行格子全都是安全的、最大安全子矩形面积不超过 K 的概率。枚举最底下一行的最右边一个危险格子出现的位置，得到递推

$$f_n=\sum_{i=0}^{\min(k-1,n)}(1-q)g_if_{n-1-i}$$

如果 $g_0,\ldots,g_{k-1}$ 已知，这就是个常系数线性递推，数据范围是 $k\le 10^3$，所以直接用暴力方法 $O(k^2\log n)$ 即可。下面考虑求 g

例题选讲：NOI2017 泳池

设 $h_{i,j}$ 表示宽为 i 的区域内、最底下 j 行全部安全、自底向上第 $j+1$ 行存在危险格子、最大安全子矩形面积不超过 K 的概率

例题选讲：NOI2017 泳池

设 $h_{i,j}$ 表示宽为 i 的区域内、最底下 j 行全部安全、自底向上第 $j+1$ 行存在危险格子、最大安全子矩形面积不超过 K 的概率，显然

$$g_i = \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{k}{i} \right\rfloor} h_{i,j}$$

例题选讲：NOI2017 泳池

设 $h_{i,j}$ 表示宽为 i 的区域内、最底下 j 行全部安全、自底向上第 $j+1$ 行存在危险格子、最大安全子矩形面积不超过 K 的概率，显然

$$g_i = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{i} \rfloor} h_{i,j}$$

枚举自底向上第 $j+1$ 行最左边的危险格子的位置，得到转移

$$h_{i,j} = \sum_{s=1}^{i} q^j(1-q)\left(\sum_{t \geq j+1} h_{s-1,t}\right)\left(\sum_{t \geq j} h_{i-s,t}\right)$$

复杂度？

例题选讲：NOI2017 泳池

设 $h_{i,j}$ 表示宽为 i 的区域内、最底下 j 行全部安全、自底向上第 $j+1$ 行存在危险格子、最大安全子矩形面积不超过 K 的概率，显然

$$g_i = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{i} \rfloor} h_{i,j}$$

枚举自底向上第 $j+1$ 行最左边的危险格子的位置，得到转移

$$h_{i,j} = \sum_{s=1}^{i} q^j(1-q)\left(\sum_{t \geq j+1} h_{s-1,t}\right)\left(\sum_{t \geq j} h_{i-s,t}\right)$$

复杂度？注意到有效状态满足 $ij \leq k$，所以调和级数保证了只有 $O(k \log k)$ 个有效状态。再加一个后缀和优化就可以 $O(k)$ 单次转移，总复杂度 $O(k^2 \log k)$

[1] T. Sauer, *Numerical Analysis*.
USA: Addison-Wesley Publishing Company, 2nd ed., 2011.

[2] O. Wiki, "快速傅里叶变换 - OI Wiki."
(2023, May 18).

[3] O. Wiki, "常系数线性递推 - OI Wiki."
(2023, June 27).

[4] Karry5307, "题解 P7289 【「EZEC-5」Chasse Neige】."
(2021, Jan 26).

Thank You