带 Peano 余项的 Taylor 公式

黄文翀
3200100006

2022 年 6 月 27 日

1 定理描述

设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，则存在 x_0 的一个邻域，对于该邻域中的任一点 x，成立

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x), \tag{1}$$

其中余项 $r_n(x)$ 满足

$$r_n(x) = o((x-x_0)^n). \tag{2}$$

2 证明

考虑 $r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$，只要证明 $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$. 显然有：

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = r_n''(x_0) = \cdots = r_n^(n-1)(x_0) = 0. \tag{3}$$

反复应用洛必达法则，可得：

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{r_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} \\
&\ \ \vdots \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\cdots 2(x-x_0)} \\
&= \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}\right] \\
&= \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right] \\
&= \frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)\right] = 0
\end{aligned}
$$

因此

$$
r_n(x) = o((x-x_0)^n).
$$

证毕.