带 Peano 余项的 Taylor 公式

黄文翀
3200100006

2022 年 6 月 27 日

Taylor 公式是由英国数学家泰勒提出的利用某点附近导数信息逼近整个函数的方法，是研究复杂函数的微分性质的常用方法。在应用数学中广泛使用。例如在最优化的一维搜索中，所谓的“单点插值法”都是通过初始点的 Taylor 展开式来局部表述这个函数，找到逼近意义下的最优从而确定布长。而 Taylor 公式的高维推广也在高维函数最优化中有着重要的作用。

Taylor 公式常见的形式有 Peano 余项、Lagrange 余项、积分余项等多种形式。其中 Peano 余项是最基础的，也是最漂亮的，实际应用时通常忽略余项，因而带 Peano 余项的 Taylor 公式也是应用最为广泛的。本文将阐述带 Peano 余项的 Taylor 展开定理，并予以证明。

1 定理描述

设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，则存在 x_0 的一个邻域，对于该邻域中的任一点 x，成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x), \tag{1}$$

其中余项 $r_n(x)$ 满足

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n). \tag{2}$$

2 证明

考虑 $r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$，只要证明 $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$. 显然有:

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = r_n''(x_0) = \cdots = r_n^{(}n-1)(x_0) = 0. \tag{3}$$

反复应用洛必达法则，可得:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x \to x_0} \frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{r_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} \\
&\ \ \vdots \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\cdots 2(x-x_0)} \\
&= \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \right] \\
&= \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0) \right] \\
&= \frac{1}{n!} \left[f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) \right] = 0
\end{aligned}$$

因此

$$r_n(x) = o((x-x_0)^n).$$

证毕.