数值代数

Homework 12

黄文翀　3200100006

A Course Homework Assignment

2022 年 5 月 25 日

1 书面题解答

Problem 1

应用 QR 算法的基本迭代格式于矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

并考察所得序列的特点，它是否收敛?

Solution.
对 A 施以 QR 分解，使 $A = QR$，得:

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad R = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

迭代一次:

$$A_1 = RQ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

对 A_1 进行 QR 分解，使 $A_1 = Q_1R_1$，得:

$$Q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

迭代一次:

$$A_2 = R_1Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A$$

可见矩阵序列陷入循环，不收敛，但隔项收敛：奇数项全为 A_1，偶数项全为 A.

Problem 2

设 $A \in R^{n\times n}$. 证明：存在初等置换矩阵 P 和初等下三角阵 M，使得 $(MP)A(MP)^{-1}$ 具有如下形状：

$$(MP)A(MP)^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Solution.

记 $A = (a''_{ij})$，若 A 的第一列除 a''_{11} 外均为零，则结论显然成立. 现设 A 的第一列存在非零元 a''_{i1} $(i \geq 2)$.

取 $P = I_{2,i}$，则：

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \cdots & \alpha'_{1n} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} & \cdots & \alpha'_{2n} \\ \alpha'_{31} & \alpha'_{32} & \cdots & \alpha'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha'_{n1} & \alpha'_{n2} & \cdots & \alpha'_{nn} \end{bmatrix}$$

其中 $\alpha'_{21} \neq 0$，那么令 $l = (0, 1, -\frac{\alpha'_{31}}{\alpha'_{21}}, ..., -\frac{\alpha'_{n1}}{\alpha'_{21}})^T$，以及：

$$M = I - le_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha'_{31}}{\alpha'_{21}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{\alpha'_{n1}}{\alpha'_{21}} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

于是：

$$(MP)A(MP)^{-1} = M(PAP^{-1})M^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Problem 3

利用第 15 题的结果，设计一个利用非正交变换将 A 上 Hessenberg 化的实用算法.

Solution.
用上题的方法，对于第 k 列，设变换前为 $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$ 可以取 $P_k = I_{k,i}$，其中 $a_{ki}^{(k)} \neq 0$.
记 $P_k A^{(k)} P_k^{-1} = (a_{ij}^{(k')})$，取 $l_k = (0, 0, ..., 1, \frac{a_{(k+1)k}^{(k')}}{a_{kk}^{(k')}}, ..., \frac{a_{nk}^{(k')}}{a_{kk}^{(k')}})^T$，然后令 $M_k = I - l_k e_k$
如此取得 $M_1, ..., M_{n-1}$ 和 $P_1, ..., P_{n-1}$，使得：

$$(M_{n-1}P_{n-1}) \cdots (M_1 P_1) A (M_1 P_1)^{-1} \cdots (M_{n-1}P_{n-1})^{-1}$$

是上 Hesenberg 阵.

Problem 4

设 H 是一个不可约的上 Hessenberg 阵. 证明：存在一个对角阵 D，使得 $D^{-1}HD$ 的次对角元均为 1，$\kappa_2(D) = \|D\|_2\|D^{-1}\|_2$ 是多少？

Solution.
设 $D = d_1, d_2, ..., d_n$，则：

$$D^{-1}HD = \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ h_{21}d_1d_2^{-1} & * & * & \cdots & * \\ & h_{32}d_2d_3^{-1} & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * & * \\ & & & h_{n(n-1)}d_{n-1}d_n^{-1} & * \end{bmatrix}$$

只需依次取：

$$d_1 = 1, \qquad d_k = h_{k(k-1)}d_{k-1}(k \geq 2)$$

即可使 $D^{-1}HD$ 的次对角元均为 1. 现考虑计算 $\kappa_2(D)$. 首先递推代入得：

$$d_k = h_{21}h_{32}\cdots h_{k(k-1)} \qquad k = 2, ..., n$$

由由二范数的性质有：

$$\|D\|_2 = \sqrt{\rho(DD^T)} = \max_{k=1}^{n} |d_k|$$

在以前的习题中我们曾证明：

$$\|D^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_{k=1}^{n} |d_k|}$$

故可记：

$$M = \max\{1,\ h_{21},\ h_{32}h_{21},\ ...,\ h_{n(n-1)}\cdots h_{32}h_{21}\}$$

$$m = \min\{1,\ h_{21},\ h_{32}h_{21},\ ...,\ h_{n(n-1)}\cdots h_{32}h_{21}\}$$

即有：

$$\kappa_2(D) = \frac{M}{m}$$

Problem 5

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$x \in \mathbb{C}^n$，$X = [x, Ax, ..., A^{n-1}x]$. 证明：如果 X 是非奇异的，则 $X^{-1}AX$ 是上 Hessenberg 矩阵.

Solution.

首先记 $M = (m_{ij}) = X^{-1}AX$，则有：

$$AX = XM$$

对于 $j = 1, ..., n-1$，上式两侧取第 j 列比较，即：

$$AXe_j = XMe_j \qquad j = 1, ..., n-1$$

展开即：

$$A^j x = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}(A^{i-1}x)$$

而由 X 非奇异，知 $\{x, Ax, ..., A^{n-1}x\}$ 线性无关，因此上式必然导出：

$$m_{(j+1)j} = 1, \qquad m_{ij} = 0 \ (i \neq j+1)$$

这表明 M 具有如下形式：

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{1n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & m_{2n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & m_{(n-1)n} \\ & & & 1 & m_{nn} \end{bmatrix}$$

它是一个上 Hessenberg 阵.

Problem 6

设 H 是一个奇异的不可约上 Hessenberg 矩阵，证明：进行一次基本的 QR 迭代后，H 的零特征值将出现.

Solution.
由 H 奇异不可约可知，$rank(H) = n - 1$. 从而它具有 QR 分解 $H = QR$，其中：

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 R_1 是一个 $(n-1)n$ 的矩阵，于是一次迭代后：

$$A_1 = RQ = \begin{bmatrix} R_1 Q \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而零特征值出现在最后一行.

Problem 7

证明：若给定 $H = H_0$，并由

$$H_k - \mu_k I = U_k R_k \quad 和 \quad H_{k+1} = R_k U_k + \mu_k I$$

产生矩阵 H_k，则：

$$(U_0 \cdots U_j)(R_j \cdots R_0) = (H - \mu_0 I) \cdots (H - \mu_j I).$$

Solution.
对 j 施以归纳法证明. 首先 $j = 0$ 时结论显然成立. 下设 $j = k$ 时结论成立，即：

$$(U_0 \cdots U_k)(R_k \cdots R_0) = (H - \mu_0 I) \cdots (H - \mu_k I)$$

来推导 $j = k + 1$ 时的情况. 由题设条件，可以注意到如下等式成立：

$$\begin{aligned} R_p(H_p - \mu_{k+1} I) &= R_p(U_p R_p + \mu_p I - \mu_{k+1} I) \\ &= (R_p U_p + \mu_p I - \mu_{k+1} I) R_p \\ &= (H_{p+1} - \mu_p + \mu_p - \mu_{k+1} I) R_p \\ &= (H_{p+1} - \mu_{k+1} I) R_p \end{aligned} \qquad (p \leq k)$$

应用上述结果，即得：

$$\begin{aligned} (H - \mu_0 I) \cdots (H - \mu_{k+1} I) &= (U_0 \cdots U_k)(R_k \cdots R_0)(H_0 - \mu_{k+1} I) \\ &= (U_0 \cdots U_k)(R_k \cdots R_1)(H_1 - \mu_{k+1} I) R_0 \\ &= (U_0 \cdots U_k)(R_k \cdots R_2)(H_2 - \mu_{k+1} I) R_1 R_0 \\ &\vdots \\ &= (U_0 \cdots U_k)(H_{k+1} - \mu_{k+1} I)(R_k \cdots R_0) \\ &= (U_0 \cdots U_{k+1})(R_{k+1} \cdots R_0) \end{aligned}$$

即得到 $j = k + 1$ 时结论成立，由归纳法即得证.