Numerical Algebra：Homework 14

HUANG Wenchong

3200100006

See my codes in my Github!

June 4, 2022

1 书面题

19. (1) 证：若 $\xi_1\xi_n=0$，设 $\xi_1=0$，则由 $Tx=\lambda x$，有：

$$\begin{cases} \alpha_1\xi_1+\beta_2\xi_2=\lambda\xi_1 & \cdots ① \\ \beta_2\xi_1+\alpha_2\xi_2+\beta_3\xi_3=\lambda\xi_2 & \cdots ② \\ \vdots & \\ \beta_{n-1}\xi_{n-2}+\alpha_{n-1}\xi_{n-1}+\beta_n\xi_n=\lambda\xi_{n-1} & \cdots (n-1) \\ \beta_n\xi_{n-1}+\alpha_n\xi_n=\lambda\xi_n & \cdots (n) \end{cases}$$

由 $\beta_2\neq 0$ 及①式得：$\xi_2=\beta_2^{-1}(\lambda-\alpha_1)\xi_1=0$

由 $\beta_k\neq 0$ 及 $(k-1)$ 式得：$\xi_k=\beta_k^{-1}(\lambda\xi_{k-1}-\alpha_{k-1}\xi_{k-1}-\beta_{k-1}\xi_{k-2})=0$，$k=3,4,\dots,n$

从而 $x=0$，矛盾．

同理若 $\xi_n=0$，则：

由 $\beta_n\neq 0$ 及 (n) 式得：$\xi_{n-1}=\beta_n^{-1}(\lambda-\alpha_n)\xi_n=0$

由 $\beta_k\neq 0$ 及 (k) 式得：$\xi_{k-1}=\beta_k^{-1}(\lambda\xi_k-\alpha_k\xi_k-\beta_{k+1}\xi_{k+1})=0$，$k=n-1,n-2,\dots,2$

从而 $x=0$，矛盾．

综上，$\xi_1\xi_n\neq 0$．

(2) 证：对 $i=2$，有

$$p_{i-1}(\lambda)=p_1(\lambda)=\alpha_1-\lambda$$

$$\beta_2\xi_2=\lambda\xi_1-\alpha_1\xi_1=-p_1(\lambda)\xi_1=-p_1(\lambda)\quad(\text{由①式得})．$$

设已证明对 $2,\dots,i-1$ 成立 $(i\geq 3)$，则：

$$\begin{aligned} p_{i-1}(\lambda)&=(\alpha_{i-1}-\lambda)p_{i-2}(\lambda)-\beta_{i-1}^2p_{i-3}(\lambda)．\\ &=(\alpha_{i-1}-\lambda)\cdot(-1)^{i-2}\beta_2\cdots\beta_{i-1}\xi_{i-1}-\beta_{i-1}^2\cdot(-1)^{i-3}\cdot\beta_2\cdots\beta_{i-2}\xi_{i-2}\ (\text{归纳假设})\\ &=\beta_2\cdots\beta_{i-1}\cdot(-1)^{i-1}\left[(\lambda-\alpha_{i-1})\xi_{i-1}-\beta_{i-1}\xi_{i-2}\right]\\ &=\beta_2\cdots\beta_{i-1}(-1)^{i-1}\cdot\beta_i\xi_i\quad(\text{由 }(k)\text{ 式得}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \beta_2\cdots\beta_i\xi_i=(-1)^{i-1}p_{i-1}(\lambda)$$

从而由归纳法即得证．

□

20. 证：将 T 分块为

$$T=\begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_m \end{pmatrix}$$

其中 $T_j\ (j=1,\dots,m)$ 是不可约的三对角阵．记 $m_\lambda(T_j)$ 为 λ 在 T_k 中的代数重数，若 λ 不是 T_j 的特征值则记 $m_\lambda(T_j)=0$．

由于 T_k 不可约，故不含重特征值，从而 $m_\lambda(T_j)\leq 1$．

而 $k=m_\lambda(T)=\sum_{j=1}^{m}m_\lambda(T_j)\leq m$，且 $m-1$ 为零次对角元的个数．

故至少有 $k-1$ 个次对角元为零．

□

22. 设 $e=(1,1,\dots,1)^T$，反幂法迭代格式如下：

$$\begin{cases}(T-\tilde{\lambda}I)y=e\\ \tilde{v}=y/\|y\|_\infty\end{cases}$$

由 $(T-\tilde{\lambda}I)y=e$ 展开各分量得：

$$\begin{cases}(\alpha_1-\tilde{\lambda})y_1+\beta_2y_2=1\\ (\alpha_k-\tilde{\lambda})y_k+\beta_ky_{k-1}+\beta_{k+1}y_{k+1}=1 \quad (k=2,3,\dots,n-1)\\ (\alpha_n-\tilde{\lambda})y_n+\beta_ny_{n-1}=1\end{cases}$$

首先假设 $\beta_2,\dots,\beta_n\neq0$，则取 $y_1=1$，有：

$$y_2=\beta_2^{-1}(1-\alpha_1+\tilde{\lambda})$$

$$y_k=\beta_k^{-1}\left(1-(\alpha_{k-1}-\tilde{\lambda})y_{k-1}-\beta_{k-1}y_{k-2}\right),\ k=3,\dots,n$$

这样求得 y，再由 $\tilde{v}=y/\|y\|_\infty$ 求得近似特征向量 $\tilde{v}$。

现设 T 不可约，则 T 可分块为可约三对角阵：

$$T=\begin{pmatrix}T_1&&\\&\ddots&\\&&T_m\end{pmatrix}$$，其中 T_j 为 $n_j\times n_j$ 的不可约三对角阵。

对于 T_j，若 $\tilde{\lambda}$ 也是 T_j 的近似特征值，可由上述方法求得 T_j 对应 $\tilde{\lambda}$ 的近似特征向量 $\tilde{v}_j^*$，即 $\|T_j\tilde{v}_j^*-\tilde{\lambda}\tilde{v}_j^*\|<\varepsilon$。

取 $\tilde{v}_j=\begin{pmatrix}0_{n_1+\cdots+n_{j-1}}\\ \tilde{v}_j^*\\ 0_{n_{j+1}+\cdots+n_m}\end{pmatrix}$，则 $\|T\tilde{v}_j-\tilde{\lambda}\tilde{v}_j\|=\|T_j\tilde{v}_j^*-\tilde{\lambda}\tilde{v}_j^*\|<\varepsilon$。

从而 $\tilde{v}_j$ 是 T 对应 $\tilde{\lambda}$ 的近似特征向量，对每个以 $\tilde{\lambda}$ 为近似特征值的 T_j 都如此取一个 $\tilde{v}_j$，即得到 T 对应 $\tilde{\lambda}$ 的所有线性无关的近似特征向量。

□

2 上机题报告

2.1 过关 Jacobi 方法求实对称矩阵全部特征值和特征向量的通用子程序

以下是通用子程序（symEigJacobi.m）

```
function [D,Q,step] = symEigJacobi(A)
% 过关Jacobi方法求实对称矩阵的所有特征根和特征向量
    eps = 1e-16;
    n = size(A,1);
    sigma = 2*n; %关值的递减系数
    delta = max(max(abs(A)));
    Q = eye(n);
    step = 0;
    while true
        pass = true;
        for p = 1:n
            for q = p+1:n
                if abs(A(p,q))>eps
                    P = symShar2(A,p,q);
                    A = P'*A*P;
                    Q = Q*P;
                    pass = false;
                end
            end
        end
        if pass, break; end
        step = step+1;
        delta = delta / sigma;
    end
    D = diag(diag(A));
end

function Q = symShar2(A,p,q)
    tau = (A(q,q)-A(p,p))/(2*A(p,q));
    if tau==0, t=1;
    else, t=sign(tau)/(abs(tau)+sqrt(1+tau^2)); end
    c = 1/sqrt(1+t^2);
    s = t*c;
    Q = eye(size(A,1));
    Q(p,p) = c; Q(p,q) = s;
    Q(q,p) = -s; Q(q,q) = c;
end
```

2.2 上机习题 7.1

下面程序首先输出 $n=5$ 时的求解结果，再对于 $n=2,...,100$ 分别求解并记录误差和迭代次数，并绘制图像. 其中误差是指:

$$||AQ-QD||_\infty$$

程序如下（ex_7_1_jacobi.m）：

```
[A,D,Q,step] = solve(5)

index = zeros(99,1);
err = zeros(99,1);
steps = zeros(99,1);
for n = 2:100
    index(n-1) = n;
    [A,D,Q,step] = solve(n);
    err(n-1) = norm(A*Q-Q*D,inf);
    steps(n-1) = step;
end
subplot(1,2,1)
plot(index, err);
xlabel('(1) residual of n','fontname', 'Times new roman','interpreter', 'latex');
box off
subplot(1,2,2)
plot(index, steps);
xlabel('(2) iterations of n','fontname', 'Times new roman','interpreter', 'latex');
box off

function [A,D,Q,step] = solve(n)
    A = zeros(n);
    for i = 1:n-1
        A(i,i) = 4;
        A(i,i+1) = 1;
        A(i+1,i) = 1;
    end
    A(n,n) = 4;
    [D,Q,step] = symEigJacobi(A);
end
```

输出结果如下：

```
A =
     4     1     0     0     0
     1     4     1     0     0
     0     1     4     1     0
     0     0     1     4     1
     0     0     0     1     4
```

```
D =

    2.2679         0         0         0         0
         0    5.7321         0         0         0
         0         0    5.0000         0         0
         0         0         0    3.0000         0
         0         0         0         0    4.0000


Q =

    0.2887    0.2887   -0.5000    0.5000    0.5774
   -0.5000    0.5000   -0.5000   -0.5000    0.0000
    0.5774    0.5774   -0.0000    0.0000   -0.5774
   -0.5000    0.5000    0.5000    0.5000    0.0000
    0.2887    0.2887    0.5000   -0.5000    0.5774


step =
     5
```

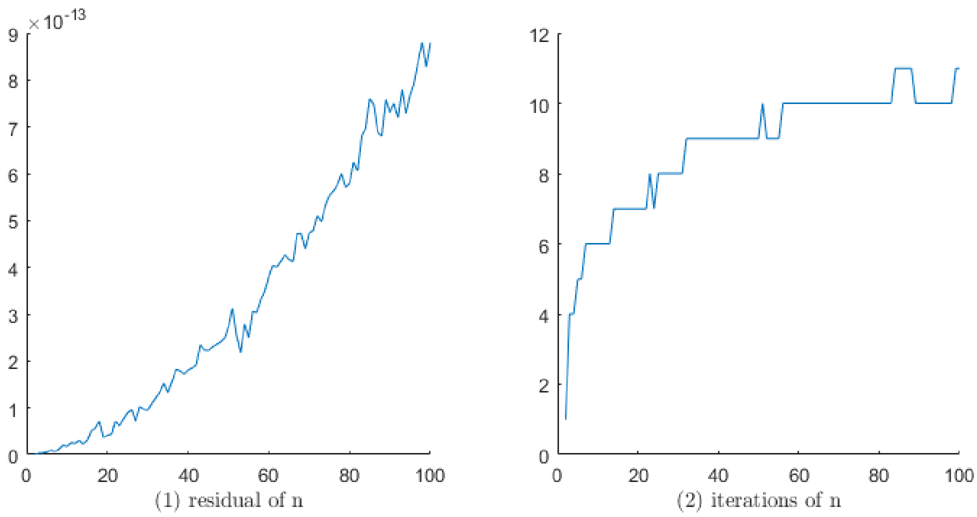

图 1: 误差与迭代次数关于阶数 n 的图像