《数值代数》第一周作业

Ex. 1

给出求下三角矩阵的逆矩阵的详细算法

分析

设下三角矩阵:

$$L=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

首先得出L可逆的充要条件

令:

$$L_1=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad L_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad L_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

注意到:

$$L=L_1L_2\cdots L_n$$

因此:

$$L^{-1}=L_n^{-1}\cdots L_2^{-1}L_1^{-1}$$

不难发现:

$$L_1^{-1}=\begin{pmatrix} l_{11}^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{21}l_{11}^{-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{31}l_{11}^{-1} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -l_{n1}l_{11}^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad L_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{22}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -l_{32}l_{22}^{-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -l_{n2}l_{22}^{-1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad L_n^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

L可逆当且仅当$L_1,\ldots,L_n$均可逆，当且仅当$l_{11},l_{22},\ldots,l_{nn}$均非零。若$L$可逆，则:

$$L_n^{-1}\cdots L_2^{-1}L_1^{-1}(L|I)=(I|L^{-1})$$

因此可以对$(L|I)$进行初等行变换得到逆矩阵

算法：下三角矩阵求逆

$A = [L\ I]$
$for\ j = 1 : n-1$
$\quad A(j,1:2n) \leftarrow A(j,1:2n)/A(j,j)$
$\quad for\ k = j+1 : n$
$\quad\quad A(k,1:2n) \leftarrow A(k,1:2n) - A(k,j)A(j,1:2n)$
end
$A(n,1:2n) \leftarrow A(n,1:2n)/A(n,n)$

最后的结果存储在矩阵的右半部分中

Ex. 4

确定一个3×3 Gauss变换L，使得

$$L \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

分析

设:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

需满足如下方程:

$$\begin{cases} 2l_{21} + 3 = 7 \\ 2l_{31} + 4 = 8 \end{cases}$$

得到：$l_{21} = 2$，$l_{31} = 2$，因此:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex. 7

设A对称且$a_{11} \neq 0$，并假定经过一步Gauss消去之后，A具有如下形状:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

证明：A_2仍是对称阵

证明

记变换后的A为(a'_{ij})，则对于$i,j \geq 2$，有：$a'_{ij} = a_{ij} - a_{i1}a_{11}^{-1}a_{1j}$

其对称元：$a'_{ji} = a_{ji} - a_{j1}a_{11}^{-1}a_{1i} = a_{ij} - a_{1j}a_{11}^{-1}a_{i1} = a_{ij} - a_{i1}a_{11}^{-1}a_{1j} = a'_{ij}$

即A_2是对称阵

Ex. 8

设$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$是严格对角占优阵，即$A$满足:

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{kj}|, \qquad k = 1, \ldots, n$$

又设经过一步Gauss消去后，A具有如下形状：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

试证：矩阵A_2仍然是严格对角占优阵

证明

记变换后的A为(a'_{ij})，则对于$i, j \geq 2$，有：$a'_{ij} = a_{ij} - a_{i1} a_{11}^{-1} a_{1j}$

对于$k \geq 2$，有：

$$a'_{kk} = a_{kk} - a_{k1} a_{11}^{-1} a_{1k}:$$

考虑：

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j=2\\j\neq k}}^{n} |a'_{kj}| &= \sum_{\substack{j=2\\j\neq k}}^{n} \left|a_{kj} - a_{k1} a_{11}^{-1} a_{1j}\right| \\
&\leq \sum_{\substack{j=2\\j\neq k}}^{n} |a_{kj}| + |a_{k1}| \cdot |a_{11}^{-1}| \sum_{\substack{j=2\\j\neq k}}^{n} |a_{1j}| \\
&< |a_{kk}| - |a_{k1}| + |a_{k1}| \cdot |a_{11}^{-1}| (|a_{11}| - |a_{1k}|) \\
&= |a_{kk}| - |a_{k1}| \cdot |a_{11}^{-1}| \cdot |a_{1k}| \\
&\leq |a_{kk} - a_{k1} a_{11}^{-1} a_{1k}| \\
&= |a'_{kk}|
\end{aligned}$$

故矩阵A_2仍然是严格对角占优阵

Ex. 10

设A是正定阵，并假定经过一步Gauss消去之后，A具有如下形状：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

证明：A_2仍是正定阵

证明

我们知道，一个矩阵是正定矩阵，当且仅当它的各阶顺序主子式大于零

我们也知道，第三类初等变换不改变行列式的值

经过一步高斯消元后，A的各阶顺序主子式仅发生了第三类初等变换，因此值不变，仍然大于零

因此变换后的A（记为$\tilde{A}$）仍然正定，那么$\tilde{A}$的一阶顺序主子式$a_{11} > 0$

A_2的k阶主子式的值记为D'_k，$\tilde{A}$的k阶主子式的值记为$\tilde{D}_k$，显然$\tilde{D}_{k+1} = a_{11} D'_k \ (k = 1, \ldots, n-1)$

于是由$\tilde{D}_{k+1} > 0$，$a_{11} > 0$，得$D'_k > 0 \ (k = 1, \ldots, n-1)$，由充要条件即有$A_2$正定