数值代数

Homework 4

黄文翀　3200100006

A Course Homework Assignment

2022 年 3 月 21 日

1 书面题解答

Problem 1

设 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 是 n 个正数. 证明：由 $v(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 定义的函数 $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个范数.

Solution.

正定性. 由于 $\alpha_i > 0$ 且 $x_i \geq 0$，总有 $\alpha_i x_i^2 \geq 0$，从而 $v(x) \geq 0$. 且 $v(x) = 0$ 当且仅当每个 $\alpha_i x_i^2 = 0$，当且仅当每个 $x_i = 0$，即 $x = 0$.

齐次性. $\forall x \in \mathbb{R}^n$，$\forall c \in \mathbb{R}$，有 $v(cx) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (cx_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(c^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = |c|v(x)$

三角不等式. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$，首先由 Cauchy-Schwarz 不等式，有：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{\alpha_i} x_i\right) \left(\sqrt{\alpha_i} y_i\right)\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \cdots (1)$$

从而有：

$$\begin{aligned}
v(x+y)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i + y_i)^2\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i\right) \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\
&= (v(x) + v(y))^2
\end{aligned}$$

即：$v(x+y) \leq v(x) + v(y)$，从而三角不等式成立，这就验证了 v 是一个范数.

Problem 2

证明：当且仅当 x 和 y 线性相关且 $x^T y \geq 0$ 时，才有：

$$\|x+y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$$

Solution.
由 Cauchy-Schwarz 不等式，有：

$$|x^T y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \qquad \cdots (2)$$

等号成立当且仅当 x 与 y 线性相关
另一方面，显然有：

$$x^T y \leq |x^T y| \qquad \cdots (3)$$

等号成立当且仅当 $x^T y \geq 0$
于是：

$$\|x+y\|_2^2 = (x+y)^T(x+y) = x^T x + y^T y + 2x^T y \leq x^T x + y^T y + 2\|x\|_2\|y\|_2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

即：$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$
等号成立当且仅当不等式 (2)(3) 的等号同时成立.
即当且仅当 x 和 y 线性相关且 $x^T y \geq 0$ 时成立.

Problem 3

证明：在 $\mathbb{R}^n$ 上，当且仅当 A 是正定阵时，函数 $f(x) = (x^TAx)^{\frac{1}{2}}$ 是一个向量范数.

Solution.
必要性. 设函数 $f(x) = (x^TAx)^{\frac{1}{2}}$ 是一个向量范数.
由向量范数的正定性，有：

$$(x^TAx)^{\frac{1}{2}} = f(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

从而：

$$x^TAx > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

由定义即 A 为正定阵.
充分性. 设 A 为正定阵.
则 $f(x)$ 的正定性显然，对于齐次性，有：

$$f(cx) = ((cx)^TA(cx))^{\frac{1}{2}} = (c^2x^TAx)^{\frac{1}{2}} = |c|f(x)$$

接下来只需验证三角不等式. 一方面，有：

$$f(x+y)^2 = (x+y)^TA(x+y) = x^TAx + y^TAy + x^TAy + y^TAx$$

另一方面，有：

$$(f(x)+f(y))^2 = x^Tx + y^Ty + (x^TAxy^TAy)^{\frac{1}{2}} + (y_TAyx^TAx)^{\frac{1}{2}}$$

那么只需证

$$x^TAy + y^TAx \leq (x^TAxy^TAy)^{\frac{1}{2}} + (y^TAyx^TAx)^{\frac{1}{2}} \qquad \cdots (4)$$

注意到 A 是正定阵，则存在正交阵 P 和对角元均为正数的对角阵 D，使得：

$$A = P^TDP$$

那么令 $u = Px, v = Py$，就有：

$$x^TAy = x^TP^TDPy = u^TDv$$

$$(x^TAxy^TAy)^{\frac{1}{2}} = (u^TDu)^{\frac{1}{2}}(v^TDv)^{\frac{1}{2}}$$

而 $u^TDv \leq (u^TDu)^{\frac{1}{2}}(v^TDv)^{\frac{1}{2}}$ 其实就是习题 1 中的不等式 (1),即得 $x^TAy \leq (x^TAxy^TAy)^{\frac{1}{2}}$.
再交换 x, y，即得到 $y^TAx \leq (y^TAyx^TAx)^{\frac{1}{2}}$.
从而不等式 (4) 得证，三角不等式成立.

Problem 4

设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上的一个向量范数，并且设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 证明：若 $rank(A) = n$，则 $\|x\|_A = \|Ax\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个向量范数.

Solution.
正定性. $\|x\|_A = \|Ax\| \geq 0$ 显然
且 $\|x\|_A = 0$ 当且仅当 $Ax = 0$，由 $rank(A) = n$ 即得 $x = 0$.
齐次性.

$$\|cx\|_A = \|A(cx)\| = \|c(Ax)\| = |c| \cdot \|Ax\| = |c| \cdot \|x\|_A$$

三角不等式.

$$\|x + y\|_A = \|A(x + y)\| = \|Ax + Ay\| \leq \|Ax\| + \|Ay\| = \|x\|_A + \|y\|_A$$

这就验证了 $\|\cdot\|_A$ 是一个向量范数.

Problem 5

定理 2.1.5 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则

(1) $\|A\|_2 = \max\{|y^T Ax| : x, y \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1\}$;

(2) $\|A^T\|_2 = \|A\|_2 = \sqrt{\|A^T A\|_2}$;

(3) 对任意的 n 阶正交矩阵 U, V，有 $\|UA\|_2 = \|AV\|_2 = \|A\|_2$.

Solution.

(1) 注意到：$\sqrt{\lambda_{\max}(AA^T)} = \sigma_{\max}(A)$

其中 $\sigma_{\max}(A)$ 表示 A 的最大奇异值. 考虑 A 的奇异值分解：

$$A = P\Sigma Q^T$$

其中 Σ 的对角元是 A 的所有奇异值，P, Q 是正交阵. 不妨设 $\Sigma_{11} = \sigma_{\max}(A)$，那么：

$$|y^T Ax| = |(P^T y)^T \Sigma (Q^T x)|$$

考虑任取 $x, y \in \mathbb{C}^n$，其中 $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$，取 $v = P^T y$, $u = Q^T x$，于是：

$$|y^T Ax| = |(P^T P v)^T \Sigma (Q^T Q u)| = |v^T \Sigma u| = \left|\sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i u_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i v_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\sigma_1} \cdot \sqrt{\sigma_1} = \sigma_1 = \|A\|_2$$

特别地，取 $y = Pe_1$, $x = Qe_1$，得：

$$|y^T Ax| = |(P^T P e_1)^T \Sigma (Q^T Q e_1)| = |e_1^T \Sigma e_1| = \Sigma_{11} = \sigma_1 = \|A\|_2$$

这就证明了 $\|A\|_2 = \max\{|y^T Ax| : x, y \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1\}$.

(2) 注意到转置操作不改变矩阵的特征值，故：

$$\|A^T\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(AA^T)} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \|A\|_2$$

设 $A^T A v = \lambda v$，那么 $(A^T A)^T (A^T A) v = (A^T A)(A^T A) v = (A^T A)(\lambda v) = \lambda^2 v$

因此 $\lambda_{\max}((A^T A)^T (A^T A)) = \lambda_{\max}^2 (A^T A)$，故：

$$\sqrt{\|A^T A\|_2} = \sqrt{\lambda_{\max}((A^T A)^T (A^T A))} = \sqrt{\lambda_{\max}^2 (A^T A)} = \lambda_{\max}(A^T A) = \|A\|_2$$

(3) 仍沿用 (1) 中的记号. 有：

$$UA = (UP)\Sigma Q^T \qquad AV = P\Sigma (V^T Q)^T$$

由于 $UP, (V^T Q)$ 仍然是正交阵，故上面两式即为 UA, AV 的奇异值分解. 由奇异值分解的唯一性，知，UA, AV 与 A 具有完全一样的奇异值，故：

$$\|UA\|_2 = \sigma_{\max}(UA) = \sigma_{\max}(A) = \|A\|_2 \qquad \|AV\|_2 = \sigma_{\max}(AV) = \sigma_{\max}(A) = \|A\|_2$$