数值代数

Homework 2

黄文翀　3200100006

A Course Homework Assignment

2022 年 3 月 5 日

1 书面题解答

Problem 1

证明：如果 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 有三角分解，并且是非奇异的，那么定理 1.1.2 中的 L 和 U 都是唯一的。

Solution.

设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

首先有 $det(L) = 1$, $det(U) = u_{11} \cdots u_{nn}$, 以及 $det(L)det(U) = det(A) \neq 0$, 因此 $u_{11}, ..., u_{nn}$ 均非零. 注意到:

$$a_{1k} = (1\ 0\ \cdots\ 0)\,(u_{k1}\ u_{k2}\ \cdots u_{kn})^T = u_{k1} \qquad k = 1, ..., n$$

这就唯一确定了 U 的第一行

现在假设 L 与 U 的前 $m-1$ 行都已经唯一确定，注意到:

$$a_{mk} = \sum_{j=1}^{n} l_{mj}u_{jk} = \sum_{j=1}^{k} l_{mj}u_{jk} \qquad k = 1, ..., m-1$$

由于 $u_{kk} \neq 0$ $(k = 1, ..., m-1)$，得:

$$l_{mk} = \frac{a_{mk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{mj}u_{jk}}{u_{kk}} \qquad k = 1, ..., m-1$$

按 k 从 1 到 $m-1$ 依次计算，则每次计算时右式均为已知，故 $l_{m1}, ..., l_{m(m-1)}$ 唯一确定. 又注意到:

$$a_{mk} = \sum_{j=1}^{n} l_{mj}u_{jk} = u_{mk} + \sum_{j=1}^{m-1} l_{mj}u_{jk} \qquad k = m, ..., n$$

于是得:

$$u_{mk} = a_{mk} - \sum_{j=1}^{m-1} l_{mj}u_{jk} \qquad k = m, ..., n$$

按 k 从 m 到 n 依次计算，则每次计算时右式均为已知，故 $u_{mm}, ..., u_{mn}$ 唯一确定.

这样 L 与 U 的第 m 行也唯一确定。于是由数学归纳法，L 与 U 的前 n 行都被唯一确定，即 L 与 U 是唯一的.

Problem 2

设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的定义如下:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \ or \ j = n \\ -1, & i > j \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

证明: A 有满足 $|l_{ij}| \leq 1$ 和 $u_{nn} = 2^{n-1}$ 的三角分解.

Solution.
设

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

显然 L, U 满足 $|l_{ij}| \leq 1$ 和 $u_{nn} = 2^{n-1}$，下面只需验证 $A = LU$.
对于 $i = j < n$，由于 U 的第 j 列仅有 u_{jj} 非零，有:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} = l_{jj}u_{jj} = 1$$

对于 $j = n$, $i = 1, ..., n$，有:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} = 2^{i-1} - \sum_{k=1}^{i-1} 2^{k-1} = 2^{i-1} - (2^{i-1} - 1) = 1$$

对于 $i > j, j \neq n$，由于 U 的第 j 列仅有 u_{jj} 非零，有:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} (-u_{kj}) = -1$$

对于其余情况，即 $i < j, j \neq n$，由于 L 第 i 行仅前 i 列非零，而 U 第 j 列前 $j-1 (\geq i)$ 行均为 0，因此相乘的结果为 0.

验证完毕.

Problem 3

证明：如果使用全主元高斯消去法得到 $PAQ = LU$，则对任意的 i，有 $|u_{ii}| \geq |u_{ij}|$ $(j = i+1, ..., n)$.

Solution.

假设在前 k 步全主元法高斯消去确定的矩阵 $A^{(k)}$ 中，满足：

$$|a_{ii}^{(k)}| \geq |a_{ij}^{(k)}| \ (i = 1, ..., k;\ j = i+1, ..., n)$$

在第 $k+1$ 步的全主元法高斯消去中，首先选取 $A^{(k)}$ 后 $n-k$ 行中绝对值最大的元素 a_{xy}，然后交换行列，将其变换到 $(k+1, k+1)$ 位置，那么自然有：

$$|a_{(k+1)(k+1)}^{(k+1)}| \geq |a_{(k+1)j}^{(k+1)}| \ (j = k+1, ..., n)$$

经过消去后，前 k 行仅交换了第 $k+1, y$ 列，即：

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{iy}^{(k)}, & j = k+1 \\ a_{i(k+1)}^{(k)}, & j = y \\ a_{ij}^{(k)}, & otherwise \end{cases} \qquad i = 1, ..., k$$

于是显然有下式成立：

$$|a_{ii}^{(k+1)}| \geq |a_{ij}^{(k+1)}| \ (i = 1, ..., k+1;\ j = i+1, ..., n)$$

由于 $U = A^{(n-1)}$，故由归纳法得证.

Problem 4

假定已知 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的三角分解：$A = LU$. 试设计一个算法来计算 A^{-1} 的 (i,j) 元素.

Solution.
设

$$A^{-1} = B = (\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_n)$$

注意到：

$$LUB = AA^{-1} = I = (e_1\ e_2\ \cdots\ e_n)$$

上式等价于：

$$LU\beta_k = e_k \qquad \forall k = 1, ..., n$$

因此只需依次计算 $Ly = e_j$，$U\beta_j = y$，即可确定 β_j，从而得到 A^{-1} 的 (i,j) 元素.
上述算法只涉及到上、下三角方程组的求解，因而计算量是 $O(n^2)$ 的.

Algorithm 1 Calculate $x = A_{ij}^{-1}$

$y \leftarrow$ solveUnitLowerTriangularEquation(L, e_j)
$\beta_j \leftarrow$ solveUpperTriangularEquation(U, y)
$x \leftarrow \beta_j(i)$

Problem 5

证明：如果 $A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是严格对角占优阵，那么 A 有三角分解 $A = LU$，并且 $|l_{ij}| < 1$

Solution.

对矩阵的阶数使用归纳法证明.

一阶矩阵显然成立，现假设题述论断对于 $(n-1)$ 阶矩阵成立. 考虑经过一步高斯消去后，A 具有如下形状：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

那么由归纳假设，A_2 有三角分解 $A_2 = L'U'$，并且 $|l'_{ij}| < 1$. 由对角占优条件，有：

$$|a_{11}| > \sum_{i=2}^{n} |a_{i1}| \geq 0$$

于是 A 也有三角分解 $A = LU$，其中：

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{11}^{-1}\beta_1 & L' \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & U' \end{bmatrix} \qquad \beta_1\text{表示}\begin{bmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

于是对于 $j \geq 2$，有 $|l_{ij}| = |l'_{ij}| < 1$.

而对于 $j = 1$，$i = 2, ..., n$，总有 $|a_{11}| > |a_{i1}|$，因此 $|l_{i1}| = \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} < 1$.

由归纳法即得证.

2 上机题报告

2.1 朴素高斯消元法通用子程序

不选取主元的朴素 LU 分解，将 L, U 存储于 A 中，代码如下：

```
function A = getLU(A)
    n = size(A,1);
    for j=1:n-1
        A(j+1:n,j) = A(j+1:n,j)/A(j,j);
        A(j+1:n,j+1:n) = A(j+1:n,j+1:n) - A(j+1:n,j)*A(j,j+1:n);
    end
end
```

使用上述分解子程序，以及求解上三角方程、单位下三角方程的子程序，编写出如下解方程通用子程序：

```
function x = solveEquationWithLU(A, b)
    A = getLU(A);
    y = solveUnitLowerTriangularEquation(A, b);
    x = solveUpperTriangularEquation(A, y);
end
```

2.2 列主元法高斯消元法通用子程序

使用列主元法高斯消元计算 LU 分解，返回 P，并将 L, U 存储于 A 中，代码如下：

```
function [p, A] = getPLU(A)
    n = size(A,1);
    p = zeros(1,n);
    for j = 1:n-1
        p(j) = j;
        for k = j+1:n
            if abs(A(k,j))>abs(A(p(j),j))
                p(j) = k;
            end
        end
        A([j p(j)],:) = A([p(j),j],:);
        A(j+1:n,j) = A(j+1:n,j)/A(j,j);
        A(j+1:n,j+1:n) = A(j+1:n,j+1:n) - A(j+1:n,j)*A(j,j+1:n);
    end
end
```

同样可以使用上述方法编写解方程通用子程序。由于此时的方程变为 $LUx = Pb$，因此在调用上述子程序之前应该先对 b 进行对应的行变换。代码如下：

```
function x = solveEquationWithPLU(A, b)
    [p,A] = getPLU(A);
    n = size(b,1);
    for i = 1:n-1
        b([i p(i)],:) = b([p(i) i],:);
    end
    y = solveUnitLowerTriangularEquation(A, b);
    x = solveUpperTriangularEquation(A, y);
end
```

2.3 测试

下面的代码首先生成了 A 和 b，然后分别调用两种方法求解，输出解，并输出与实际解 $(1,1,...,1)^T_{84}$ 的误差。（误差以欧式距离度量）

```
A = zeros(84, 84);
b = zeros(84, 1);
A(1,1) = 6; A(1,2) = 1;
b(1) = 7;
for i = 2:83
    A(i,i-1) = 8;
    A(i,i) = 6;
    A(i,i+1) = 1;
    b(i) = 15;
end
A(84,83) = 8; A(84,84) = 6;
b(84) = 14;

root = ones(84,1);

x = solveEquationWithLU(A,b);
disp(x.');
disp(vecnorm(x-root));

y = solveEquationWithPLU(A,b);
disp(y.');
disp(vecnorm(y-root));
```

运行结果如下:

```
  1.0e+08 *

 列 1 至 15

   0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000

 列 16 至 30

   0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000

 列 31 至 45

   0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000

 列 46 至 60

   0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000

 列 61 至 75

  -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0001    0.0002   -0.0003    0.0007   -0.0013    0.0026   -0.0052    0.0105   -0.0209

 列 76 至 84

   0.0419   -0.0836    0.1665   -0.3303    0.6501   -1.2582    2.3487   -4.0263    5.3684

  7.2594e+08

列 1 至 15

  1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000

列 16 至 30

  1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000

列 31 至 45

  1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000

列 46 至 60

  1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000

列 61 至 75

  1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000

列 76 至 84

  1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000

 3.7828e-06
```

观察发现，朴素法的结果与实际解相差甚远，其与实际解的欧氏距离高达 7.26×10^{8}。而列主元法的结果与实际解距离仅为 3.78×10^{-8}。