Numerical Algebra：Homework 11

HUANG Wenchong
3200100006

May 17, 2022

7. 先考察 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ & \lambda\end{pmatrix}$，取 $x_0^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$x_0^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

取 $x_0=x_0^{(1)}$，则： $x_1=Ax_0=\begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix}$，$y_1=\frac{x_1}{\|x_1\|_\infty}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=x_0^{(1)}$

从而此时序列收敛，$\{y_n\}\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

取 $x_0=x_0^{(2)}$，则： $x_1=Ax_0=\begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}$，$y_1=\begin{pmatrix}\lambda^{-1}\\1\end{pmatrix}$

$x_2=Ay_1=\begin{pmatrix}2\\\lambda\end{pmatrix}$，$y_2=\begin{pmatrix}2\lambda^{-1}\\1\end{pmatrix}$ ...

当 $n-1\leqslant|\lambda|<n$ 时，

$x_n=Ay_{n-1}=\begin{pmatrix}n\\\lambda\end{pmatrix}$，$y_n=\begin{pmatrix}1\\\lambda/n\end{pmatrix}$

$x_{n+1}=Ay_n=\begin{pmatrix}\lambda+\frac{\lambda}{n}\\\frac{\lambda^2}{n}\end{pmatrix}=\frac{\lambda}{n}\begin{pmatrix}n+1\\\lambda\end{pmatrix}$，$y_{n+1}=\begin{pmatrix}1\\\lambda/(n+1)\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\{y_n\}\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

而 $\{x_0^{(1)},x_0^{(2)}\}$ 构成 $\mathbb{R}^2$ 的基，故 $\forall x_0\in\mathbb{R}^2$，总有 $\{y_n\}\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

现考察 $B=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ & -\lambda\end{pmatrix}$，$x_0^{(1)},x_0^{(2)}$ 仍同上.

取 $x_0=x_0^{(1)}$，则： $x_1=Bx_0=\begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix}$，$y_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=x_0$

从而此时序列收敛，$\{y_n\}\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

取 $x_0=x_0^{(2)}$，则： $x_1=Bx_0=\begin{pmatrix}1\\-\lambda\end{pmatrix}$，$y_1=\begin{pmatrix}\lambda^{-1}\\-1\end{pmatrix}$

$x_2=By_1=\begin{pmatrix}0\\\lambda\end{pmatrix}$，$y_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x_0$.

从而序列振荡，$y_{2n}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$y_{2n-1}=\begin{pmatrix}\lambda^{-1}\\-1\end{pmatrix}$，$\forall n=1,2,3,\dots$

任取 $x_0=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$a_1,a_2\in\mathbb{R}$，$a_1^2+a_2^2=1$.

则： $x_1=Bx_0=\begin{pmatrix}a_1\lambda+a_2\\-a_2\lambda\end{pmatrix}$，$y_1=\frac{x_1}{\|x_1\|_\infty}$

$x_2=By_1=\frac{Bx_1}{\|x_1\|_\infty}=\frac{1}{\|x_1\|_\infty}\begin{pmatrix}a_1\lambda^2\\a_2\lambda^2\end{pmatrix}$，$y_2=\frac{1}{\max\{a_1,a_2\}}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$

$x_3=By_2=\frac{1}{\max\{a_1,a_2\}}\begin{pmatrix}a_1\lambda+a_2\\-a_2\lambda\end{pmatrix}$，$y_3=\frac{x_1}{\|x_1\|_\infty}$.

序列振荡，$y_{2n}=\frac{1}{\max\{a_1,a_2\}}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$y_{2n-1}=\frac{Bx_0}{\|Bx_0\|_\infty}$. $\forall n=1,2,3,\dots$ □

8. 用上机题的程序测试，当 $\|y_{k+1}-y_k\|_\infty<10^{-5}$ 时终止.

迭代次数：449. $y_k=\begin{pmatrix}1.00000\\0.00447\\0.00001\end{pmatrix}$，$\lambda=1.00447$.

□

9. $A-\mu I$ 的模最大特征值为 $\lambda_1-\mu$ 或 $\lambda_n-\mu$

要使 $A-\mu I$ 的幂法收敛于 λ_1 的特征向量，应保证：

$$|\lambda_1-\mu| > |\lambda_n-\mu|.$$

收敛速度的比值为：

$$\omega = \max\left\{\frac{|\lambda_2-\mu|}{|\lambda_1-\mu|}, \frac{|\lambda_n-\mu|}{|\lambda_1-\mu|}\right\} \quad (\text{次大模比最大模}).$$

当 $|\lambda_2-\mu|=|\lambda_n-\mu|$ 时，上式取得 min．此时 $\mu=\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_n)$．即得证 □

10. 构造矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & & & & & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & & & & \cdots & -a_{n-1} \\ & 1 & 0 & & & \cdots & -a_{n-2} \\ & & 1 & 0 & & \cdots & -a_{n-3} \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 & -a_1 \\ & & & & & 1 & -a_0 \end{pmatrix}$$

则 $|\lambda I-A|=p(\lambda)$．即 p 是 A 的特征多项式．

对 A 用幂法求模最大特征根即可． □

11.

$$A-\tilde{\lambda}I=\begin{pmatrix} 2-1.2679 & 1 & 0 \\ 1 & 3-1.2679 & 1 \\ 0 & 1 & 4-1.2679 \end{pmatrix}$$

取 $v_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，解 $(A-\tilde{\lambda}I)\tilde{v}=v_0$，得：

$$\tilde{v}=\begin{pmatrix}12644.60\\-9256.11\\3387.91\end{pmatrix}$$

取 $v=\frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|_2}$，得近似特征向量 $v=\begin{pmatrix}0.7887\\-0.5773\\0.2113\end{pmatrix}$

检验误差：$\|Av-\tilde{\lambda}v\|_\infty = 6.24\times 10^{-5}$． □

1 上机题报告

1.1 幂法求实矩阵模最大特征根通用子程序设计

分以下四种情况考虑:

第一种: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$, 且 $\lambda_1 > 0$

第二种: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$, 且 $\lambda_1 < 0$

第三种: $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq ... \geq |\lambda_n|$, 且 $\lambda_1 = -\lambda_2$

第四种: $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq ... \geq |\lambda_n|$, 且 $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$

如果是前两种情况, 返回 λ_1, 后两种情况返回 $(\lambda_1, \lambda_2)^T$. 如果不是上述四种情况, 则幂法失败, 返回一个空向量.

```
function lambda = maxeig(A)
    x = rand(size(A,1),1);
    step = 0;
    while(step<5000)
        step = step + 1;
        x1 = A*x;
        y1 = x1 / norm(x1,inf);
        lambda = max(abs(x1));
        % 若序列收敛, 则有正的实特征根
        if(norm(y1-x,inf)<1e-5)
            return;
        end
        x = y1;
    end
    x = x / norm(x,inf);
    x1 = A*x;
    y1 = x1 / norm(x1,inf);

    % 若隔项收敛且仅差一个负号, 则为负的实特征根
    if(vecnorm(x+y1)<1e-4)
        lambda = -lambda;
        return;
    end

    % 判断是否为两个互为相反数的实特征根
    x2 = A*x1;
    lambda1 = sqrt(norm(x2,inf));
    lambda = [lambda1; -lambda1];
    x = [x2+lambda1*x1, x2-lambda1*x1];
    if(vecnorm(A*x(:,1)-lambda1*x(:,1))<1e-4 && vecnorm(A*x(:,2)+lambda1*x(:,2))<1e
       -4)
        return;
    end
```

```
    % 判断是否为两个共轭复特征根
    x3 = A*x2;
    B = [x2(1:2), x1(1:2)];
    b = -x3(1:2);
    sol = B\b;
    p = sol(1);
    q = sol(2);
    if(vecnorm(x3+p*x2+q*x1)<1e-4)
        lambda = [complex(p/2,sqrt(q-p*p/4)); complex(p/2,-sqrt(q-p*p/4))];
        return;
    end

    lambda = [];
end
```

1.2 求多项式模最大根通用子程序设计

求多项式:

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

的模最大根. 考虑构造如下矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

注意到 $|\lambda I - A| = f(\lambda)$，于是只需调用幂法求矩阵 A 的模最大特征根即可.

以下程序的输入是 n 维向量 $(a_0, a_1, ..., a_{n-1})^T$，表示多项式的各项系数.

```
function [root] = maxroot(a)
    n = size(a,1);
    A = zeros(n,n);
    A(2:n,1:n-1) = eye(n-1);
    A(1:n,n) = -a;
    root = maxeig(A);
end
```

1.3 数值实验 - 上机习题 6.1

使用上述程序求解下列各高次方程的模最大根:

(1) $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$

(2) $x^3 - 3x - 1 = 0$

(3) $x^8 + 101x^7 + 208.01x^6 + 10891.01x^5 + 9802.08x^4 + 79108.9x^3 - 99902x^2 + 790x - 1000 = 0$

测试代码如下（附件 ex_6_1.m）：

```
a1 = [3, -5, 1].';
a2 = [-1, -3, 0].';
a3 = [-1000, 790, -99902, 79108.9, 9802.08, 10891.01, 208.01, 101].';
disp(maxroot(a1));
disp(maxroot(a2));
disp(maxroot(a3));
```

测试结果如下（从上到下分别是第一个、第二个、第三个方程的模最大根）：

```
              -3
1.87938538980303
            -100
```

为了验证答案，使用 matlab 自带的函数 eig 求解方程的所有根，三个方程的结果依次如下：

```
ans =
         0.999999977312123
          1.00000002268788
                        -3

ans =
         -1.53208888623796
        -0.347296355333861
          1.87938524157182

ans =
                         1 +                     0i
      -6.50521303491303e-17 +    0.0999999999999998i
      -6.50521303491303e-17 -    0.0999999999999998i
                        -1 +                     3i
                        -1 -                     3i
       1.77635683940025e-15 +                    10i
       1.77635683940025e-15 -                    10i
                      -100 +                     0i
```

对比观察，发现程序 maxroot 求解的结果确实是三个方程的模最大根.