数值代数

Homework 4

黄文翀　3200100006

A Course Homework Assignment

2022 年 3 月 30 日

1 书面题解答

Problem 1

设 $\|\cdot\|$ 是由向量范数 $\|\cdot\|$ 诱导出来的矩阵范数. 证明：若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 非奇异，则：

$$\|A^{-1}\|^{-1} = \min_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Solution.
$\forall x \in \mathbb{R}^n$，有 $\|x\| = \|A^{-1}Ax\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|$，即：

$$\|A^{-1}\|^{-1} \le \|x\|^{-1}\|Ax\|$$

即得,

$$\|A^{-1}\|^{-1} \le \|Ax\| \quad (\|x\| = 1)$$

欲证结论，只需再证明 $\exists x$, s.t. $\|Ax\| = \|A^{-1}\|^{-1}$. 根据定义：

$$\|A^{-1}\| = \max_{\|y\|=1} \|A^{-1}y\|$$

取 $\|y\| = 1$，使得 $\|A^{-1}\| = \|A^{-1}y\|$，再取：

$$x = \frac{A^{-1}y}{\|A^{-1}\|}$$

那么就有：

$$\|Ax\| = \left\|\frac{AA^{-1}y}{\|A^{-1}\|}\right\| = \left\|\frac{y}{\|A^{-1}\|}\right\| = \frac{\|y\|}{\|A^{-1}\|} = \|A^{-1}\|^{-1}$$

且：

$$\|x\| = \frac{\|A^{-1}y\|}{\|A^{-1}\|} = \frac{\|A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} = 1$$

从而得证.

Problem 2

设 $A = LU$ 是 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的 LU 分解，这里 $|l_{ij}| \le 1$; 又设 a_i^T 和 u_i^T 分别表示 A 和 U 的第 i 行. 验证等式

$$u_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^T$$

并用它证明 $\|U\|_\infty \le 2^{n-1}\|A\|_\infty$.

Solution.
根据 LU 分解按列计算的公式有:

$$u_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk} \qquad (i = 1, ..., k)$$

而当 $k < i$ 时，有:

$$u_{ik} = 0 = a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk}$$

从而即有:

$$u_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^T$$

记：$\|u_i^T\| = \|u_i\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |u_{ij}|$
根据范数的三角不等式及齐次性:

$$\|u_i^T\| \le \|a_i^T\| + \sum_{j=1}^{i-1} |l_{ij}| \cdot \|u_j^T\| \le \|A\|_\infty + \sum_{j=1}^{i-1} \|u_j^T\|$$

事实上，我们有 $\|u_k^T\| \le 2^{k-1}\|A\|_\infty$，可以归纳证明. 当 $k = 1$ 时,

$$\|u_1^T\| \le \|A\|_\infty$$

考虑从 $1, ..., k$ 推出 $k+1$,

$$\|u_{k+1}^T\| \le \|A\|_\infty + \sum_{j=1}^{k} \|u_j^T\| \le \|A\|_\infty + \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1}\|A\|_\infty = 2^k\|A\|_\infty$$

从而 $\|u_n^T\| \le 2^{n-1}\|A\|_\infty$，故:

$$\|U\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \|u_i^T\| \le 2^{n-1}\|A\|_\infty$$

Problem 3

设

$$A = \begin{pmatrix} 375 & 374 \\ 752 & 750 \end{pmatrix}$$

(1) 计算 A^{-1} 和 $\kappa_\infty(A)$;

(2) 选择 $b, \delta b, x$ 和 δx，使得：$Ax = b$, $A(x + \delta x) = b + \delta b$. 而且 $\|\delta b\|_\infty / \|b\|_\infty$ 很小，但 $\|\delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$ 却很大.

(3) 选择 $b, \delta b, x$ 和 δx，使得：$Ax = b$, $A(x + \delta x) = b + \delta b$. 而且 $\|\delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$ 很小，但 $\|\delta b\|_\infty / \|b\|_\infty$ 却很大.

Solution.

(1)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 375 & -187 \\ -376 & 187.5 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 1502, \qquad \|A^{-1}\|_\infty = 563.5$$

$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 846377$$

(2) 取:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \delta x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

则:

$$b = Ax = \begin{pmatrix} 1123 \\ 2252 \end{pmatrix}, \qquad \delta b = A\delta x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

于是:

$$\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{2}{2252} = 8.9 \times 10^{-4}, \qquad \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{1}{2} = 0.5$$

相比而言，$\|\delta b\|_\infty / \|b\|_\infty$ 很小，$\|\delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$ 很大.

(3) 取:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \delta x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

则:

$$b = Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \delta b = A\delta x = \begin{pmatrix} 375 \\ 752 \end{pmatrix}$$

于是:

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1, \qquad \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 376$$

相比而言，$\|\delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$ 很小，$\|\delta b\|_\infty / \|b\|_\infty$ 很大.

Problem 4

若 A 和 $A+E$ 都是非奇异的，证明:

$$\|(A+E)^{-1}-A^{-1}\| \leq \|E\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|(A+E)^{-1}\|.$$

Solution.
注意到:

$$A(A+E) = A^2 + A = (A+E)A$$

故:

$$A^{-1}(A+E)^{-1} = (A+E)^{-1}A^{-1}$$

从而:

$$\begin{aligned}(A+E)^{-1} - A^{-1} &= AA^{-1}(A+E)^{-1} - (A+E)(A+E)^{-1}A^{-1} \\ &= AA^{-1}(A+E)^{-1} - (A+E)A^{-1}(A+E)^{-1} \\ &= (A-(A+E))A^{-1}(A+E)^{-1} \\ &= (-E)A^{-1}(A+E)^{-1}\end{aligned}$$

故由矩阵范数的相容性和齐次性，有:

$$\|(A+E)^{-1} - A^{-1}\| = \|(-E)A^{-1}(A+E)^{-1}\| \leq \|E\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|(A+E)^{-1}\|$$

2 上机报告

2.1 通用子程序

将书上算法 2.5.1 编制成通用子程序，如下：

```
function [nrm] = norm1Optimize(B)
    k = 1;
    n = size(B,1);
    x = (1.0/n)*ones(n,1);
    while k==1
        w = B*x;
        v = sign(w);
        z = (B.')*v;
        nmz = norm(z,inf);
        if nmz <= (z.')*x
            nrm = norm(w,1);
            k = 0;
        else
            x = zeros(n,1);
            for j = 1:n
                if abs(z(j))==nmz
                    x(j) = 1;
                    break;
                end
            end
            k = 1;
        end
    end
end
```

估计矩阵条件数的程序如下：

```
function a = kappa(A,k)
    if k==1
        a = norm1Optimize(A)*norm1Optimize(inv(A));
    end
    if k==inf
        a = norm1Optimize(A.')*norm1Optimize(inv(A.'));
    end
end
```

只需要调用 kappa(A,inf) 即可估计矩阵 A 的无穷范数条件数

2.2 习题 2(1) 代码

生成 n 阶 Hilbert 矩阵的程序如下:

```
function [A] = hilbert(n)
    A = zeros(n,n);
    for i = 1:n
        for j = 1:n
            A(i,j) = 1.0/(i+j-1);
        end
    end
end
```

以下是本题程序，用于计算 5 到 20 阶 Hilbert 矩阵的无穷范数条件数并输出

```
for n = 5:20
    disp(kappa(hilbert(n),inf));
end
```

2.3 测试结果

阶数	∞ 范数条件数
5	9.4366e+05
6	2.9070e+07
7	9.8519e+08
8	3.3873e+10
9	1.0996e+12
10	3.5352e+13
11	1.2295e+15
12	3.8420e+16
13	7.4907e+17
14	1.5679e+18
15	1.2092e+18
16	7.1626e+19
17	1.2269e+19
18	4.4141e+18
19	4.7506e+18
20	1.0480e+19

可以看出 Hilbert 矩阵的无穷范数条件数普遍很大。而且到了 14 阶之后由于矩阵过于接近奇异值，逆矩阵的计算已经开始不准确，从而得到的无穷范数条件数不再具有参考价值。