3. 由 $\|x\|_2=\|Hx\|_2$，得：

$$1^2+4^2+6^2+3^2+4^2=1^2+\alpha^2+4^2+6^2$$

$\Rightarrow \alpha=5$.

$y=Hx=(1\ 5\ 4\ 6\ 0\ 0)^T$

$v=x-y=(0\ -5\ 0\ 0\ 3\ 4)^T$

$w=\frac{v}{\|v\|_2}=\frac{1}{\sqrt{26}}(0\ -5\ 0\ 0\ 3\ 4)^T$

$H=I-ww^T$ 即为所求变换.

4. $\begin{cases}5\cos\theta+12\sin\theta=\alpha\\ -5\sin\theta+12\cos\theta=\alpha\end{cases}$

$\Rightarrow 7\cos\theta-17\sin\theta=0$

$\Rightarrow \cos\theta=\frac{17}{\sqrt{7^2+17^2}}=\frac{17}{13\sqrt2}$. $\sin\theta=\frac{7}{13\sqrt2}$. $\alpha=\frac{169}{\sqrt{7^2+17^2}}=\frac{13}{\sqrt2}$

6. 1) 首先考虑求 $c=\cos\theta$. $s=\sin\theta$，使：

$$\begin{pmatrix}c & s\\ -s & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ \sqrt{r^2-a^2}\end{pmatrix}$$，其中 $r^2=x_1^2+x_2^2$，$0<a\le r$

```
[c, s] = givens(x1, x2, a)
    b = sqrt(x1^2 + x2^2 - a^2)
    T = sqrt((b x1 - a x2)^2 + (b x2 + a x1)^2)
    c = (b x2 + a x1) / T
    s = (a x2 - b x1) / T
```

2) ~~再~~考虑当 $x=e_1$ 时，求正交阵 Q，使 $Qx=y$

用1)中算法依次变换使 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}y_1\\ x_2^{(1)}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_2^{(1)}\\ x_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}y_2\\ x_3^{(1)}\end{pmatrix}$，…，$\begin{pmatrix}x_{n-1}^{(1)}\\ x_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}y_{n-1}\\ y_n\end{pmatrix}$

由正交变换的二范数不变性，最后一步一定满足 ${x_{n-1}^{(1)}}^2+x_n^2=y_{n-1}^2+y_n^2$. 故良定义.

算法表述如下：

```
Q = findQofe1(y)
    for i = 1 : n-1
        [c, s] = givens(x_i, x_{i+1}, y_i)
        Q = diag(I_{i-1}, (c s; -s c), I_{n-i-1}) Q
        x_{i+1} = sqrt(x_i^2 + x_{i+1}^2 - y_i^2)
```

这个过程总能保证 $x_i^2+x_{i+1}^2\ge y_i^2$.

3) 考虑任意的 x. 取一 householder 变换 H. 使 $Hx=e_1$.

再用 2) 中算法求 Q. 即:

```
[v, β] = householder(x)
H = I - βvv^T
Q = findQofe1(y)
Q = QH
```

7. 若 x 与 y 线性相关, 取 $H=I$

否则, 取 $w=\frac{x-\alpha y}{\|x-\alpha y\|_2}$, $H=I-2ww^T$ 即为所求.

8. 取 $v_1=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ l_{nn}-\sigma_1\\ l_{n+1,n}\\ \vdots\\ l_{mn}\end{pmatrix}$, 其中 $\sigma_1^2=l_{nn}^2+\cdots+l_{mn}^2$. $\beta_1=2/v_1^Tv$

令 $H_1=I-\beta_1 v_1 v_1^T$, 则:

$$L^{(1)}=H_1L=\begin{pmatrix} l_{11}^{(1)} & & & \\ \vdots & l_{22}^{(1)} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & l_{nn}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{m1}^{(1)} & l_{m2}^{(1)} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

第 k 步, 令:

$$v_k=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ l_{(n-k+1)(n-k+1)}^{(k-1)}-\sigma_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ l_{n+1,n}^{(k-1)}\\ \vdots\\ l_{m,n}^{(k-1)}\end{pmatrix},\ \text{其中}\ \sigma_k^2={l_{(n-k+1)(n-k+1)}^{(k-1)}}^2+\sum_{t=n+1}^{m}{l_{t,n}^{(k-1)}}^2,\quad \beta_k=2/v_k^Tv_k.$$

令 $H_k=I-\beta_k v_k v_k^T$, 则:

$$L^{(k)}=H_kL^{(k-1)}=\begin{pmatrix} l_{11}^{(k)} & & \\ \vdots & l_{(n-k+1)(n-k+1)}^{(k)} & \\ l_{n1}^{(k)} \cdots & l_{n(n-k+1)}^{(k)} \cdots & l_{nn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{m1}^{(k)} \cdots & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

一直做到第 n 步, 得到 $L^{(n)}=\begin{pmatrix}L_1\\0\end{pmatrix}\begin{matrix}n\\m-n\end{matrix}$, 其中 L_1 是下三角阵.

及 $L^{(n)}=H_n\cdots H_1L$

9. 由上题，可求得 $Q=H_n\cdots H_1$，使得 $QL=\begin{pmatrix}L_1\\0\end{pmatrix}\begin{matrix}n\\m-n\end{matrix}$，记 $QP=\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}\begin{matrix}n\\m-n\end{matrix}$

由正交变换的二范数不变性：

$$\|Lz-Pb\|_2=\min \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \|QLz-QPb\|_2=\min$$

$$\Leftrightarrow \left\|\begin{pmatrix}L_1z\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}Q_1b\\Q_2b\end{pmatrix}\right\|_2=\min$$

$$\Leftrightarrow \|L_1z-Q_1b\|_2^2+\|Q_2b\|_2^2=\min$$

$$\Leftrightarrow L_1z-Q_1b=0 .$$

故可用如下步骤求解问题 (*)：

- 用 Ex8 方法求得 Q，使 $QL=\begin{pmatrix}L_1\\0\end{pmatrix}$
- 记 $QP=\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}\begin{matrix}n\\m-n\end{matrix}$，计算 $c_1=Q_1b$
- 解下三角方程组 $L_1z=c_1$

现若有 $Ux=z$，则：

$$\|Lz-Pb\|_2=\min$$

$$\Leftrightarrow \|LUx-Pb\|_2=\min$$

$$\Leftrightarrow \|PAx-Pb\|_2=\min$$

$$\Leftrightarrow \|Ax-b\|_2=\min .$$

11. 对于 $k=2,\dots,n$，构造：

$$G_k=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}c & & s & & \\ & \ddots & & & \\ -s & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}1\\ \\ k\\ \\ \\ \end{matrix}\\ \begin{matrix}1 & \quad & k & \quad & \quad\end{matrix}\end{array}，使 \begin{pmatrix}c & s\\-s & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_k\\ \alpha_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\r\end{pmatrix}$$

则 $$G_n\cdots G_2A=A^{(1)}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{(1)} & & & O\\ \beta_2^{(1)} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \beta_n^{(1)} & \cdots 0 \cdots & & \alpha_n^{(1)}\end{pmatrix}$$

再构造

$$G_k^{(1)}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}c & & s & & \\ -s & \ddots & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}1\\ k\\ \\ \\ \end{matrix}\\ \begin{matrix}1 & \quad & k & \quad & \quad\end{matrix}\end{array}，使 \begin{pmatrix}c & s\\-s & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1^{(1)}\\ \beta_k^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix}$$

则 $$G_n^{(1)}\cdots G_2^{(1)}A^{(1)}=A^{(2)}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)}\\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{nn}^{(2)}\end{pmatrix}$$，令 $Q^T=G_n^{(1)}\cdots G_2^{(1)}G_n\cdots G_2$，即得 $A=QR$

数值代数第八次作业

黄文翀 3200100006 强基数学2001班

1 书面题

2 上机题

2.1 通用子程序简介

首先实现一个Householder变换，如下：

```
function [v,beta] = householder(x)
% 计算x的Householder变换
    n = length(x);
    v = zeros(n,1);
    ita = norm(x,inf);
    x = x/ita;
    sigma = x(2:n).'*x(2:n);
    v(2:n) = x(2:n);
    if sigma==0
        beta = 0;
    else
        alpha = sqrt(x(1)*x(1)+sigma);
        if x(1)<=0
            v(1) = x(1)-alpha;
        else
            v(1) = -sigma/(x(1)+alpha);
        end
        beta = 2*v(1)*v(1)/(sigma+v(1)*v(1));
        v = v/v(1);
    end
end
```

借助Householder变换实现QR分解，如下：

```
function [Q,R] = getQR(A)
% 计算矩阵A的QR分解，其中A的行数不小于列数
    m = size(A,1);
    n = size(A,2);
    Q = eye(m);
    for j = 1:n
        if j<m
            [v,beta] = householder(A(j:m,j));
            H = eye(m-j+1)-beta*(v*v.');
            A(j:m,j:n) = H * A(j:m,j:n);
            Q = Q * blkdiag(eye(j-1), H);
```

```
            end
        end
        R = A(1:n,1:n);
    end
```

借助QR分解，求解最小二乘问题，程序如下：

```
function x = solveLSwithQR(A,b)
% 用QR分解求解最小二乘问题
    m = size(A,1);
    n = size(A,2);
    [Q,R] = getQR(A);
    c = Q(1:m,1:n).'*b;
    x = solveUpperTriangularEquation(R,c);
end
```

2.2 上机习题3.1

2.2.1 方程一

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & & & & & \\ 8 & 6 & 1 & & & & \\ & 8 & 6 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 8 & 6 & 1 & \\ & & & & 8 & 6 & 1 \\ & & & & & 8 & 6 \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 15 \\ \vdots \\ 15 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}$$

使用QR方法求解的程序见`ex_3_1_1.m`

第一章习题中$n = 84$，但在尝试使用QR方法时，发现84阶时产生的误差已经严重溢出，至多只能求解到55阶，且误差远高于列主元法，略高于朴素LU分解法。当$n = 55$时，各算法的误差为：

朴素LU分解	列主元法LU分解	QR分解
1.3522	7.0471e-15	4.0567

2.2.2 方程二

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & & & & & \\ 1 & 10 & 1 & & & & \\ & 1 & 10 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 10 & 1 & \\ & & & & 1 & 10 & 1 \\ & & & & & 1 & 10 \end{pmatrix}_{100\times 100} = b$$

其中b随机选取. 程序见`ex_3_1_2.m`. 以下是运行程序得到的各算法误差：

朴素LU分解	列主元法LU分解	Cholesky分解	改进Cholesky分解	QR分解
2.161e-15	0.157e-15	0	0	1.617e-15

QR分解的误差略小于朴素LU分解，大于其它算法.

2.2.3 方程三

$$Hx = b$$

其中H是40阶Hilbert矩阵，b_i是H第i行所有元素之和. 程序见`ex_3_1_3.m`. 以下是运行程序得到的各算法误差:

朴素LU分解	列主元法LU分解	Cholesky分解	改进Cholesky分解	QR分解
2539.3	605.13	467.73	677.10	8875.0

可以看出QR分解的误差最大.

2.3 上机习题3.2

求解程序见`ex_3_2.m`，求得解为:

$$a = b = c = 1$$

这是精确解.

2.4 上机习题3.3

求解程序见`ex_3_3.m`，求得解为:

```
[2.0775, 0.71894, 9.68, 0.1535, 13.68, 1.9868, -0.95819, -0.48407, -0.073646,
1.0187, 1.4435, 2.9027, 16.34]
```

残差为: $||Ax - b||_2 = 16.34$