1. 解：$A^T=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}$

$A^TA=\begin{pmatrix}35&44\\44&56\end{pmatrix}$

$A^Tb=\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$

$A^TAx=A^Tb \Rightarrow \begin{pmatrix}35&44\\44&56\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$

$\Rightarrow x=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

2. 解：$A^T=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

$A^TA=\begin{pmatrix}6&3&1&1\\3&9&3&3\\1&3&1&1\\1&3&1&1\end{pmatrix}$

$A^Tb=\begin{pmatrix}4\\3\\1\\1\end{pmatrix}$

$A^TAx=A^Tb \Rightarrow \begin{pmatrix}6&3&1&1\\3&9&3&3\\1&3&1&1\\1&3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow x=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\0\\0\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \quad (k_1,k_2\in\mathbb{R})$

10. 证：设 A 有奇异值分解：

$$A=QDP^T$$

其中 Q,P 正交，$D=\begin{pmatrix}\Sigma&\\&0\end{pmatrix}$，$\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$，是 A 的所有奇异值.

由 $A^TAXb=A^TAx=A^Tb \ (\forall b\in\mathbb{R}^m)$ 得：$A^TAX=A^T$

即 $PDQ^TQDP^TX=PDQ^T$

$\Rightarrow DP^TX=Q^T \Rightarrow X=P\begin{pmatrix}\Sigma^{-1}&\\&0\end{pmatrix}Q^T$

从而 $AXA=QDP^TP\begin{pmatrix}\Sigma^{-1}&\\&0\end{pmatrix}Q^TQDP^T=Q\begin{pmatrix}\Sigma&\\&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Sigma^{-1}&\\&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Sigma&\\&0\end{pmatrix}P^T=QDP^T=A$

$AX=QDP^TP\begin{pmatrix}\Sigma^{-1}&\\&0\end{pmatrix}Q^T=Q\begin{pmatrix}\Sigma&\\&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Sigma^{-1}&\\&0\end{pmatrix}Q^T=Q\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}Q^T$

$\Rightarrow (AX)^T=\left(Q\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}Q^T\right)^T=Q\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}Q^T=AX.$

□

12. 证： 记 $f(x)=\|Ax-b\|^2$

由 2 范数的性质知 f 连续可微

$\forall x\in \mathcal{X}_{LS}$，对 $w\in\mathbb{R}^n$ 且 $\|w\|_2=1$，$\alpha\in\mathbb{R}$，有：

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x+\alpha w)-f(x)}{\alpha}=w^T\nabla f(x)=0$$

又 $\dfrac{f(x+\alpha w)-f(x)}{\alpha}=2w^TA^T(Ax-b)$

从而令 $\alpha\to 0$ 即得 $w^TA^T(Ax-b)=0$.

由 w 的任意性知 $A^T(Ax-b)=0$，即 $A^TAx=A^Tb$.

□