Numerical Algebra：Homework 9

HUANG Wenchong
3200100006

May 3, 2022

1\. 证：$M_1^{(Jacob)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & 1 & \\ & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ ，$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}i$，$\lambda_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}i$

$\rho(M_1^{(Jacob)}) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$，故 Jacob 迭代法在 A_1 上不收敛

$M_1^{(G-S)} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ，$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2}$

$\rho(M_1^{(G-S)}) = \frac{1}{2} < 1$，故 G-S 迭代法在 A_1 上收敛.

$M_2^{(Jacob)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ，$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\rho(M_2^{(Jacob)}) = 0 < 1$，故 Jacob 迭代法在 A_2 上收敛.

$M_2^{(G-S)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$\rho(M_2^{(G-S)}) = 2 > 1$，故 G-S 迭代法在 A_2 上不收敛. □

2\. 证：由 $\rho(B) = 0$ 知 B 仅有特征根 0，且重数为 n.

于是 ∃ 正交阵 P，若当阵 J，使得 $B = P^T J P$，其中 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$

显然 $J^n = O$. 故 $B^n = (P^T J P)^n = P^T J^n P = O$

由迭代格式 $x_{k+1} = Bx_k + g$，得：

$$\begin{aligned} x_n &= B^n x_0 + (B^{n-1} + B^{n-2} + \cdots + I) g \\ &= (B^{n-1} + B^{n-2} + \cdots + I) g \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} Bx_n + g &= (B^n + B^{n-1} + \cdots + B) g + g \\ &= B^n g + (B^{n-1} + B^{n-2} + \cdots + I) g \\ &= (B^{n-1} + B^{n-2} + \cdots + I) g = x_n. \end{aligned}$$

故 x_n 是方程 $Bx + g = x$ 的精确解. 从而最多迭代 n 步即可. □

3. 解：(1) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & & a \\ & 1-\lambda & \\ a & & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - a^2(1-\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda+a)(1-\lambda-a)$

得A的特征根：$\lambda_1=1$，$\lambda_2=1+a$，$\lambda_3=1-a$

A正定 $\Leftrightarrow \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0 \Leftrightarrow \begin{cases}1+a>0\\1-a>0\end{cases} \Leftrightarrow -1<a<1$

(2) $M^{(Jacob)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$，有特征根 $0, a, -a$

故 $\rho(M^{(Jacob)}) = |a|$，当 $|a|<1$，Jacob迭代法收敛

(3) $M^{(G-S)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ a & 0 & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$，有特征根 $0, a$

故 $\rho(M^{(G-S)}) = |a|$，当 $|a|<1$，G-S迭代法收敛

$\square$

8. 证：设 λ 为H的任一特征根，对应特征向量 x，则：$Hx=\lambda x$

从而：
$$\begin{aligned} x^TBx &= x^T(P-H^TPH)x \\ &= x^TPx - (Hx)^TP(Hx) \\ &= x^TPx - \lambda^2(x^TPx) \\ &= (1-\lambda^2)(x^TPx) \end{aligned}$$

由B, P的正定性，有 $x^TBx>0$，$x^TPx>0$，从而必有 $1-\lambda^2>0$

$\Rightarrow |\lambda|<1 \Rightarrow \rho(H)<1$

故迭代法 $x_{k+1} = Hx_k + b$ 收敛

$\square$

9. 证：考虑Jacob迭代矩阵为 $B = D^{-1}(L+U) = I - D^{-1}A$

设带参 ω 的JOR迭代矩阵为 B_ω，则 $B_\omega = I - \omega D^{-1}A$

设 λ 是 B_ω 的特征值，则：

$|\lambda I - B_\omega| = 0 \Leftrightarrow |(\lambda-1)I + \omega D^{-1}A| = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{\lambda-1}{\omega}I + D^{-1}A\right| = 0$

$\Leftrightarrow \left|\left(\frac{\lambda-1}{\omega}+1\right)I - (I-D^{-1}A)\right| = 0 \Leftrightarrow \left|\left(1+\frac{\lambda-1}{\omega}\right)I - B\right| = 0$

$\Leftrightarrow 1+\frac{\lambda-1}{\omega}$ 是B的特征值

由Jacob迭代法收敛知 $\rho(B)<1$，即 $\left|1+\frac{\lambda-1}{\omega}\right|<1$

记 $\theta = 1+\frac{\lambda-1}{\omega}$，$\theta = \alpha+i\beta$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$，有 $\alpha^2+\beta^2<1$，且必有 $-1<\alpha<1$

易得 $\lambda = \theta\omega - \omega + 1 = (\alpha\omega - \omega + 1) + i\beta\omega$

$$(\alpha\omega-\omega+1)^2+\beta^2\omega^2 = \alpha^2\omega^2+\omega^2+1-2\alpha\omega^2+2\alpha\omega-2\omega+\beta^2\omega^2$$

$$< \omega^2+\omega^2+1-2\alpha\omega^2+2\alpha\omega-2\omega$$

$$= 2\omega^2(1-\alpha)+2\omega(\alpha-1)+1$$

$$= 2\omega(1-\alpha)(\omega-1)+1 < 1$$

（由于 $1-\alpha>0$，$\omega-1<0$，故 $\omega(1-\alpha)(\omega-1)<0$）

$\Rightarrow |\lambda|<1$．从而 $\rho(B_\omega)<1$．即带参 ω 的JOR迭代法收敛 □

10．证：必要性：因 D 具有正对角元，∃正对角元对角阵 S，使 $D=S^2$

注意到 $I-\omega D^{-1}A = S^{-1}(I-\omega S^{-1}AS^{-1})S$

即 $I-\omega D^{-1}A$ 与 $I-\omega S^{-1}AS^{-1}$ 相似，具有相同的特征根．

1) 设 λ 是 $S^{-1}AS^{-1}$ 的特征根，则：

$|\lambda I - S^{-1}AS^{-1}|=0 \Leftrightarrow |-\omega\lambda I+\omega S^{-1}AS^{-1}|=0$

$\Leftrightarrow |(1-\omega\lambda)I-(I-\omega S^{-1}AS^{-1})|=0$

$\Leftrightarrow 1-\omega\lambda$ 是 $I-\omega S^{-1}AS^{-1}$ 的特征根．

另由 A 实对称知 $I-\omega S^{-1}AS^{-1}$ 实对称，从而特征根都是实数

于是 $-1<1-\omega\lambda<1 \Rightarrow 0<\lambda<\frac{2}{\omega}$．

从而 $S^{-1}AS^{-1}$ 正定，对称性显然．

而 $\forall x\in\mathbb{R}^n$，$x^TAx=(Sx)^TS^{-1}AS^{-1}(Sx)>0$，故 A 对称正定

2) 注意到 $2I-\omega S^{-1}AS^{-1}=\omega S^{-1}(2\omega^{-1}D-A)S^{-1}$

从而 $2\omega^{-1}D-A$ 与 $2I-\omega S^{-1}AS^{-1}$ 具有相同的正定性，（对称性显然）

设 λ 是 $2I-\omega S^{-1}AS^{-1}$ 的特征根，则：

$|\lambda I-(2I-\omega S^{-1}AS^{-1})|=0$

$\Leftrightarrow |(\lambda-1)I-(I-\omega S^{-1}AS^{-1})|=0$

$\Leftrightarrow \lambda-1$ 是 $I-\omega S^{-1}AS^{-1}$ 的特征根

$\Rightarrow -1<\lambda-1<1 \Rightarrow 0<\lambda<2$．

故 $2I-\omega S^{-1}AS^{-1}$ 正定，从而 $2\omega^{-1}D-A$ 正定，对称性显然．

充分性：利用必要性中的一些观察：

$I-\omega D^{-1}A$ 相似于 $I-\omega S^{-1}AS^{-1}$

A 正定 $\Leftrightarrow S^{-1}AS^{-1}$ 正定

$2\omega^{-1}D-A$ 正定 $\Leftrightarrow 2I-\omega S^{-1}AS^{-1}$ 正定．

设 λ 是 $I-\omega D^{-1}A$ 的特征根，则也是 $I-\omega S^{-1}AS^{-1}$ 的特征根．

$\Rightarrow |\lambda I-(I-\omega S^{-1}AS^{-1})|=0 \Rightarrow \left|\frac{1-\lambda}{\omega}I-S^{-1}AS^{-1}\right|=0 \Rightarrow \frac{1-\lambda}{\omega}>0 \Rightarrow \lambda<1$

又 $|\lambda I-(I-\omega S^{-1}AS^{-1})|=0 \Rightarrow |(\lambda+1)I-(2I-\omega S^{-1}AS^{-1})|=0 \Rightarrow \lambda+1>0 \Rightarrow \lambda>-1$

故得 $\rho(I-\omega D^{-1}A)<1$．即JOR迭代法收敛 □

11. (1) A: 严格对角占优，即 $\sum_{j\neq i}|a_{ij}|<|a_{ii}|$，$i=1,2,\dots,n$

证：$\lambda I-L_\omega=(D-\omega L)^{-1}\left(\lambda(D-\omega L)-(1-\omega)D-\omega U\right)$

记 $C=\lambda(D-\omega L)-(1-\omega)D-\omega U$

$=(\lambda-1+\omega)D-\lambda\omega L-\omega U$

则 $\begin{cases} c_{ii}=(\lambda-1+\omega)a_{ii} \\ c_{ij}=\lambda\omega a_{ij}, & j<i \\ c_{ij}=\omega a_{ij}, & j>i. \end{cases}$ 　　现假设 $|\lambda|\geqslant 1$

从而 $\sum_{j\neq i}|c_{ij}|=\omega\left(|\lambda|\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|\right)$

$=\omega\sum_{j\neq i}|a_{ij}|+\omega(|\lambda|-1)\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|$

$\leqslant\omega\sum_{j\neq i}|a_{ij}|+(|\lambda|-1)\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$

$=(\omega+|\lambda|-1)\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$

$<(\omega+|\lambda|-1)|a_{ii}|$

$=(|\lambda|-|1-\omega|)|a_{ii}|$

$\leqslant|\lambda-1+\omega|\cdot|a_{ii}|=|c_{ii}|$

从而 C 严格对角占优，故 C 非奇异，于是 $\lambda I-L_\omega=(D-\omega L)^{-1}C$ 非奇异.

即 $|\lambda|\geqslant 1$ 不是 L_ω 的特征值. 故 $\rho(L_\omega)<1$. 从而带参 ω 的 SOR 迭代法收敛 □

(2) A: 不可约对角占优.

证：与(1)同理，$\left.\begin{matrix}|\lambda|>1\\ A\text{ 不可约对角占优}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$ C 不可约对角占优 $\Rightarrow$ C 非奇异

$\Rightarrow\rho(L_\omega)<1$，SOR 收敛.

□

补充题 1. 设 A 的元素满足 $\sum_{i\neq j}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}<1$，$j=1,2,\dots,n$. 则其 Jacob 迭代收敛

证: Jacob 迭代矩阵 $B=D^{-1}(L+U)$，元素为 $b_{ij}=-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\ (i\neq j)$，$b_{ii}=0$

则 $\|B\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|b_{ij}|=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i\neq j}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}<1$

$\Rightarrow\ \rho(B)\le\|B\|_1<1$. 故 Jacob 迭代收敛.

□

补充题 2. 设 A 的元素满足 $\sum_{i\neq j}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}<1$，$j=1,2,\dots,n$. 则其 Gauss-Seidel 迭代收敛.

证: G-S 迭代矩阵 $B=(D-L)^{-1}U$

设 λ 为 B 的一个特征值, 则 $\lambda I-B$ 奇异.

又 $\lambda I-B=\lambda I-(D-L)^{-1}U=(D-L)^{-1}(\lambda D-\lambda L-U)$

若 $\lambda\ge1$, 记 $\lambda D-\lambda L-U=(c_{ij})$，则 $c_{ij}=\lambda a_{ij}\ (i\ge j)$，$c_{ij}=a_{ij}\ (i<j)$

$$\Rightarrow\ \sum_{i\neq j}\frac{|c_{ij}|}{|c_{ii}|}=\sum_{i=1}^{j-1}\frac{|a_{ij}|}{\lambda|a_{ii}|}+\sum_{i=j+1}^{n}\frac{\lambda|a_{ij}|}{\lambda|a_{ii}|}\le\sum_{i=1}^{j-1}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}+\sum_{i=j+1}^{n}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}=\sum_{i\neq j}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}<1$$

$\Rightarrow\ \lambda D-\lambda L-U$ 非奇异 $\Rightarrow\ \lambda I-B$ 非奇异, 矛盾!

故必有 $\lambda<1$，从而 $\rho(B)<1$，即得 G-S 迭代法收敛.

□

1 上机题报告

1.1 通用子程序设计

1.1.1 Jacob 迭代法

迭代格式：

$$x^{(k)} = (I - D^{-1}A)x^{(k-1)} + D^{-1}b$$

设停机准则为 $||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_2 \leq err$，Matlab 程序实现如下：

```
function [x,step] = jacob(A,b,err)
    n = size(A,1);
    H = diag(ones(n,1)./diag(A));
    B = eye(n) - H*A;
    g = H*b;
    x0 = zeros(n,1);
    x = g;
    step = 0;
    while vecnorm(x-x0)>err
        x0 = x;
        x = B*x + g;
        step = step + 1;
    end
end
```

1.1.2 Gauss-Seidel 迭代法

迭代格式：

$$x^{(k)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k-1)} + (D - L)^{-1}b$$

分量形式为：

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)$$

设停机准则为 $||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_2 \leq err$，Matlab 程序实现如下：

```
function [x,step] = gauss_seidel(A,b,err)
    n = size(A,1);
    x0 = zeros(n,1);
    x = b;
    step = 0;
    while vecnorm(x-x0)>err
        x0 = x;
        for i = 1:n
            x(i) = b(i);
            for j = 1:n
```

```
                if j~=i
                    x(i) = x(i) - A(i,j)*x(j);
                end
            end
            x(i) = x(i)/A(i,i);
        end
        step = step + 1;
    end
end
```

1.1.3 超松弛迭代法

迭代格式：

$$x^{(k)} = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]x^{(k-1)} + \omega(D-\omega L)^{-1}b$$

分量形式为：

$$x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \omega\left(g_i + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij}x_j^{(k-1)}\right)$$

其中：

$$B = I - D^{-1}A, \qquad g = D^{-1}b$$

设停机准则为 $||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_2 \leq err$，Matlab 程序实现如下：

```
function [x,step] = sor(A,b,omega,err)
    n = size(A,1);
    x0 = zeros(n,1);
    x = b;
    step = 0;
    g = b./diag(A);
    B = eye(n) - diag(ones(n,1)./diag(A))*A;
    while vecnorm(x-x0)>err && step<20000
        x0 = x;
        for i = 1:n
            x(i) = x(i) * (1-omega) + omega*g(i);
            for j = 1:n
                if j~=i
                    x(i) = x(i) + omega*B(i,j)*x(j);
                end
            end
        end
        step = step + 1;
    end
end
```

1.2 数值实验

1.2.1 测试代码

为保证求解精度，程序中设 $err = 10^{-7}$，停机准则为 $||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_2 \leq err$

```
n = 100;
h = 1.0/n;
epsilon = 1;
a = 0.5;
A = zeros(n+1,n+1);
b = a*h*h*ones(n+1,1);
b(1) = 0;
b(n+1) = 1;
s = zeros(n+1,1);
for i = 0:n
    s(i+1) = (1-a)/(1-exp(-1/epsilon))*(1-exp(-i/(n*epsilon)))+a*i/n;
end

A(1,1) = 1;
for i = 2:n
    A(i,i-1) = epsilon;
    A(i,i) = -(2*epsilon+h);
    A(i,i+1) = epsilon+h;
end
A(n+1,n+1) = 1;

eps = 1e-7;
[x1,step1] = jacob(A,b,eps);
disp([step1 vecnorm(x1-s)]);
[x2,step2] = gauss_seidel(A,b,eps);
disp([step2 vecnorm(x2-s)]);
[x3,step3] = sor(A,b,1.95,eps);
disp([step3 vecnorm(x3-s)]);
```

1.2.2 松弛因子的选择

在对比各方法的优劣之前，先选择最佳的松弛因子使得 SOR 法能取得最好的表现。选择不同的松弛因子测试收敛所需的迭代次数，绘制如下图表

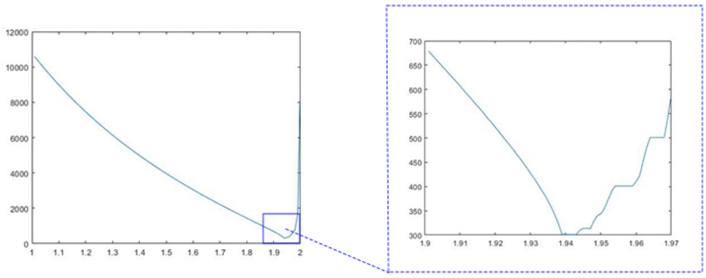

图 1: $\varepsilon = 1$ 时 SOR 迭代次数受松弛因子的影响曲线

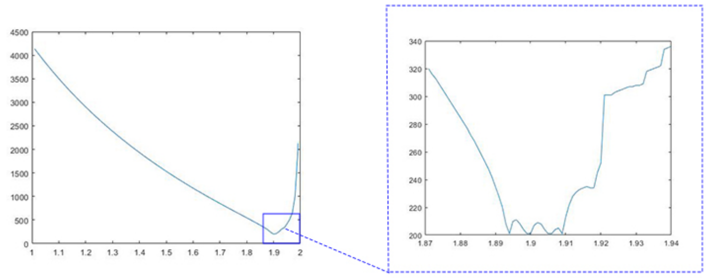

图 2: $\varepsilon = 0.1$ 时 SOR 迭代次数受松弛因子的影响曲线

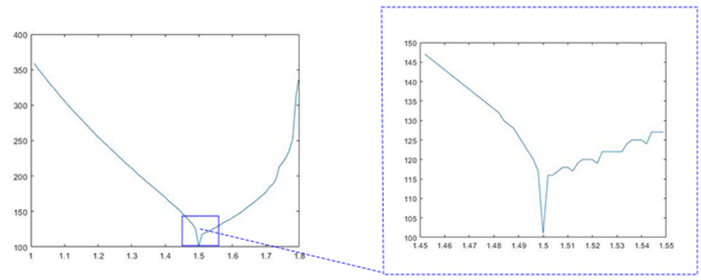

图 3: $\varepsilon = 0.01$ 时 SOR 迭代次数受松弛因子的影响曲线

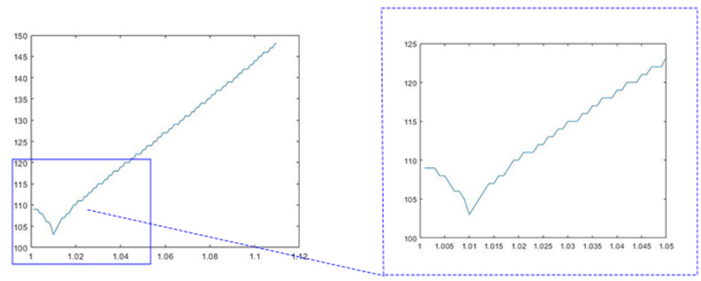

图 4: $\varepsilon = 0.0001$ 时 SOR 迭代次数受松弛因子的影响曲线

因此我们选择的松弛因子如下表:

ε	ω
1	1.94
0.1	1.90
0.01	1.50
0.0001	1.01

表 1: SOR 方法松弛因子的选择

1.2.3 三种迭代法的结果对比

在我们设定的停机准则下做数值实验，SOR 方法的松弛因子按表 1 所示选择，得到的结果如表 2-表 5 所示。

迭代方法	$\|\|y-y^*\|\|_2$	迭代次数
Jacob	2.3×10^{-3}	20898
G-S	2.3×10^{-3}	10778
SOR($\omega=1.94$)	2.2×10^{-3}	301

表 2: $\varepsilon=1$ 时各迭代方法的表现

迭代方法	$\|\|y-y^*\|\|_2$	迭代次数
Jacob	3.8×10^{-2}	8181
G-S	3.8×10^{-2}	4211
SOR($\omega=1.9$)	3.8×10^{-2}	201

表 3: $\varepsilon=0.1$ 时各迭代方法的表现

迭代方法	$\|\|y-y^*\|\|_2$	迭代次数
Jacob	9.9×10^{-2}	627
G-S	9.9×10^{-2}	365
SOR($\omega=1.5$)	9.9×10^{-2}	101

表 4: $\varepsilon=0.01$ 时各迭代方法的表现

迭代方法	$\|\|y-y^*\|\|_2$	迭代次数
Jacob	5.0×10^{-3}	120
G-S	5.0×10^{-3}	110
SOR($\omega=1.01$)	5.0×10^{-3}	103

表 5: $\varepsilon=0.0001$ 时各迭代方法的表现