14. 解：$fl(x_1x_2\cdots x_n) = x_1x_2\cdots x_n(1+\delta_2)\cdots(1+\delta_n)$

$\leqslant x_1x_2\cdots x_n(1+1.01(n-1)u)$ （定理 2.3.3）

故 $\varepsilon \leqslant 1.01(n-1)u$ □

15. 证：$S_2=(x_1+x_2)(1+\delta_2)$

$S_k=(S_{k-1}+x_k)(1+\delta_k)=\sum\limits_{s=1}^{k}x_s\prod\limits_{j=s}^{k}(1+\delta_j)\quad(\delta_1=0)$

$fl\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)=S_n=\sum\limits_{s=1}^{n}x_s\prod\limits_{j=s}^{n}(1+\delta_j)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i(1+\eta_i)$

其中 $(1+\eta_i)=\prod\limits_{j=i}^{n}(1+\delta_j)$，$\delta_1=0$，$|\delta_2|,\dots,|\delta_n|\leqslant u$.

由定理 2.3.3，$|\eta_1|\leqslant 1.01(n-1)u$

$|\eta_i|\leqslant 1.01(n-i+1)u$，$i=2,3,\dots,n$ □

16. 证：记 $y=Ax$

$y_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$

$fl(y_i)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(1+\gamma_j)\prod\limits_{k=j}^{n}(1+\delta_k)$，其中 $|\gamma_j|,|\delta_k|\leqslant u$，特别地 $\delta_1=0$.

记 $fl(y_i)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(1+\varepsilon_{ij})=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+\sum\limits_{j=1}^{n}e_{ij}x_j$

其中 $1+\varepsilon_{ij}=(1+\gamma_j)\prod\limits_{k=j}^{n}(1+\delta_k)$，$e_{ij}=a_{ij}\varepsilon_{ij}$

由定理 2.3.3，有：$|\varepsilon_{i1}|\leqslant 1.01nu$，则 $|e_{i1}|\leqslant 1.01n|a_{i1}|u\quad(i=1,\dots,n)$

$|\varepsilon_{ij}|\leqslant 1.01(n-j+2)u$，则 $|e_{ij}|\leqslant 1.01(n-j+2)|a_{ij}|u\quad(i=1,\dots,n,\ j=2,\dots,n)$ □

17. 证：$fl(x^Tx)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2(1+\gamma_i)\prod\limits_{j=i}^{n}(1+\delta_j)$，$|\gamma_i|,|\delta_j|\leqslant u$，$\delta_1=0$.

记 $fl(x^Tx)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2(1+\varepsilon_i)$.

其中 $1+\varepsilon_i=(1+\gamma_i)\prod\limits_{j=i}^{n}(1+\delta_j)\leqslant(1+u)^n=1+nu+O(u^2)$. $\Rightarrow |\varepsilon_i|\leqslant nu+O(u^2)$

则又 $fl(x^Tx)=x^Tx(1+\alpha)$

其中 $\alpha=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_ix_i^2}{x^Tx}$，则 $|\alpha|\leqslant\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(nu+O(u^2))x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}=nu+O(u^2)$ □

18. 证：设第k步列主元消去后的矩阵为 $A^{(k)}$.

由三对角阵的性质，有：

$|a^{(k)}_{k+1,k+2}|\leqslant|a_{k+1,k+2}|$，$(u_{k+1,k+2}=a^{(k)}_{k+1,k+2})$.

$a^{(k)}_{k+3\dots n,1\dots n}=a_{k+3\dots n,1\dots n}$,

进行消去（可能交换第 k+1，k+2 行），得：

$u_{k+2,k+2}=a_{k+2,k+2}-\beta a^{(k)}_{k+1,k+2}$，其中 $|\beta|\leqslant1$

则 $|u_{k+2,k+2}|\leqslant 2\max\limits_{i,j}|A|$. 这就表明 $\rho=\dfrac{\max\limits_{i,j}|\tilde{U}|}{\max|A|}\leqslant2$. □

19. 证：由定义有：$|a_{kk}| \geq \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} |a_{ik}|$ 对 $k=1,\dots,n$ 成立

从而 $\max_{i,j} |a_{ij}| = \max_{k} |a_{kk}|$，设 $|a_{ss}| = \max_{k} |a_{kk}|$.

由 $a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} + u_{ij}$，有：

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$

$\Rightarrow \max_{ij} |u_{ij}| \leq |a_{ss}| + \sum_{k=1}^{i-1} |u_{kj}|$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{i-1} |u_{kj}| = \sum_{k=1}^{i-1} \left| a_{kj} - \sum_{t=1}^{k-1} l_{kt} u_{tj} \right| \leq \sum_{k=1}^{i-1} |a_{kj}| \leq |a_{ss}|$

从而 $\rho = \dfrac{\max_{ij} |u_{ij}|}{\max_{ij} |a_{ij}|} \leq \dfrac{2|a_{ss}|}{|a_{ss}|} = 2.$ □

20. 解：不妨记 $PA = (a_{ij})$，$PE = (e_{ij})$．显然 $\|E\|_\infty = \|PE\|_\infty$.

$u_{ij} = fl\left(a_{ij} - \sum_{k=i-3}^{i-1} l_{ik} u_{kj}\right)$

$\quad = a_{ij}(1+\delta_i) - \sum_{k=i-3}^{i-1} l_{ik} u_{kj} (1+\delta_k)$.

其中 $|\delta_k| \leq 1.01\,(i-k+1)u \leq 4.04u$ $(k=i-3,\dots,i)$.

$\Rightarrow a_{ij} = \dfrac{u_{ij}}{1+\delta_i} + \sum_{k=i-3}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \dfrac{1+\delta_k}{1+\delta_i}$

另一方面 $a_{ij} = \sum_{k=i-3}^{i-1} l_{ik} u_{kj} - e_{ij}$

从而 $|e_{ij}| = \left| u_{ij} \dfrac{\delta_i}{1+\delta_i} + \sum_{k=i-3}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \dfrac{\delta_k - \delta_i}{1+\delta_i} \right|$

$\quad \leq \dfrac{8.08}{1-0.01} u \sum_{k=i-3}^{i} |l_{ik}| \cdot |u_{kj}|$

$\quad \leq 8.17\, u \sum_{k=i-3}^{i} |l_{ik}| \cdot |u_{kj}|$.

$\Rightarrow \|E\|_\infty \leq 8.17\, u \|\tilde{L}\|_\infty \|\tilde{U}\|_\infty \leq 32.68\, u \|\tilde{U}\|_\infty$

由 $PA = LU$，有：
$$\begin{aligned}
a_{ii} &= u_{ii} + l_{i,i-1} u_{i-1,i} + l_{i,i-2} u_{i-2,i} \\
a_{i,i+1} &= u_{i,i+1} + l_{i,i-1} u_{i-1,i+1} + l_{i,i-2} u_{i-2,i+1} \\
a_{i,i+2} &= u_{i,i+2} + l_{i,i-1} u_{i-1,i+2} \\
a_{i,i+3} &= u_{i,i+3}.
\end{aligned}$$

从而易得 $|u_{i,i+3}| \leq M$，$|u_{i,i+2}| \leq 2M$，$|u_{i,i+1}| \leq 4M$，$|u_{ii}| \leq 8M$．（其中 $M = \max_{ij} |a_{ij}|$）

故 $\|\tilde{U}\|_\infty \leq 7\rho \|A\|_\infty \leq 56 \|A\|_\infty$.

$\Rightarrow \|E\|_\infty = \|PE\|_\infty \leq 32.68u \cdot 56 \|A\|_\infty = 1830.08\, M$. □