二〇二〇 ～ 二〇二一学年　第二 学期

《线性代数》考试试题

考试日期：2021 年 10 月 17 日　　试卷类型：A 卷　　试卷代号：1821116

班级：　　学号：　　姓名：　　

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、填空题（每空 2 分）

本题分数	20 分
得　分	

1、设 $a_1=(6,a+1,3)^T$，$a_2=(a,2,-2)^T$，$a_3=(a,1,0)^T$，当a满足条件：____________时，a_1,a_2,a_3线性无关。

2、设向量α和β的长度分别为 2 和 3，则向量$\alpha+\beta$和$\alpha-\beta$的内积$(\alpha+\beta,\alpha-\beta)=$

__________.

3、设$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$,则$P^{10}AP^{11}=$____________.

4、已知A是三阶方阵,且$|A|=2$,则$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-\frac{1}{2}A^*\right|=$____________.

5、设三阶矩阵A满足$|A+E|=|2A+E|=|3A+E|=0$,则A的所有特征值是

____________，$|4A+E|=$________________.

6、$(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$的系数矩阵A的特征值为1、-3、-2,则该二次型 的规范型

为__________________，且当 t 满足________________时，矩阵$A-tE$是正定矩阵，其中E是单位矩阵。

7、设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ ________________，将 A^{-1} 表示成初等矩阵的乘积

____

本题分数	9分
得　分	

二、选择题（每题3分，共9分）

1、下面叙述中，有几个是正确的结论？（）

(1) $A^2=O$ 可以推出 $|A|=0$

(2) $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$

(3) $A^2-E^2=(A-E)(A+E)$

(4) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

2、下面叙述中，哪一个是正确的结论？（）

A.一个可逆矩阵经过任何的初等变换后得到的仍然是可逆矩阵。

B.一个不可逆矩阵有可能等价于单位矩阵。

C.一个不可逆矩阵经过适当的初等变换可以变成可逆矩阵。

D.一个可逆矩阵经过适当的初等变换可以变成不可逆矩阵。

3、非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同解向量,则正确的是？（）

$A.\alpha+\beta$ 是 $Ax=0$ 的一个解向量

$B.\alpha-\beta$ 是 $Ax=b$ 的一个解向量

$C.k\alpha+l\beta(k+l=1)$ 是 $Ax=b$ 的一个解向量

$C.k\alpha+l\beta(k+l=1)$ 是 $Ax=0$ 的一个解向量

本题分数	32 分
得　　分	

三、计算题（每题 8 分，完整写出计算过程）

1、求行列式$|A|=\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}$的值

2、设三阶矩阵A，B满足$AB=A+B$，且$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，求$A+B$

3、在向量空间R^3中，已知两组基：$\varepsilon_1=(1,0,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,0)^T,\varepsilon_3=(1,0,1)^T$及$\eta_1=(2,0,-1)^T,\eta_2=(1,2,-2)^T,\eta_3=(2,1,1)^T$

(1)求由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到基$\eta_1,\eta_2,\eta_3$的过渡矩阵

(2)若向量a在基η_1,η_2,η_3下的坐标为$(1,1,-1)^T$,求α在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的坐标

4、设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&4&1\\0&0&k\end{bmatrix}$,则当$k$取何值时,$A$可对角化?

本题分数	27 分
得　　分	

四、已知非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$$

则在何时方程组无解？何时有唯一解？何时有无穷解?在有无穷解时，求λ的取值范围和方程组的通解

五、已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

(1)求出该二次型的系数矩阵A

(2)用正交变换法将其化为标准形，并求出所用的正交变换及二次型的标准形

本题分数	12 分
得　　分	

五、证明题。（共 12 分）

1、(5分)若A是对称矩阵，B是反对称矩阵，问$AB-BA$是否为对称矩阵，给出证明过程

2、(7分)已知$a^2+b^2+c^2=1$,且a,b,c都是实数,证明:

若$A=\begin{bmatrix}1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2\end{bmatrix}$，则$rank(A)=2$

(提示:可设$\alpha=(a,b,c)^T$,则$\alpha\alpha^T=1$)