南 京 航 空 航 天 大 学

二〇二一 ～ 二〇二二学年 第一学期 **《常微分方程》考试试题**

考试日期： 年 月 日 试卷类型：B 试卷代号：

班号	学号	姓名

题号	一	二	三	四	总分
得分					

1）复述定理题请完整复述，给出所有概念和记号的严格定义。

2）证明题请特别注重证明的严谨性。条理清楚、叙述完整以及推理严格的答题**可以最高加分 60%**；简单的描述或者非严格的证明则**最多也只能得到这道题的 50% 的分数**。

3）计算题请给出详细的计算过程，非常完美的答题**可以最高加分 60%** 。如果仅仅给出计算结果则**没有分数**。

4）可以引用其它小题的结论（即使没有完成证明），但是**不能循环证明**。

5）**可以引用课程中的定理，但是必需首先完整的叙述该定理**。

6）期末考试为闭卷式考试，禁止使用**任何资料、计算器和手机**。

练习一题号	1.1	2.2	练习一得分
得 分			

练习一（15分）、

1.1)（5分）、 给出Lipschitz函数的定义。

1.2)（10分）、 完整复述Cauchy-Lipsctitz定理。

练习二题号	2.1	2.2	2.3	2.4	练习二得分
得　分					

练习二（45分+26分）、考虑线性方程组:

$$
(2.1)\qquad \begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_3' = 2x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}
$$

2.1）、（15+8分）求（2.1）中相应的矩阵A的特征值和特征向量。

2.2）、（8+4分）求方程组（2.1）的基本解组。

2.3） 、（10+6分）求方程组（2.1）的满足初始条件的解:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.4) 、（12+8分）求下列方程组的基本解组。

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_3' = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_4' = x_5 \\ x_5' = -2x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

练习三题号	3.1	3.2	3.3	练习三得分
得　分				

练习三、（15+9分）证明Gronwall不等式。

3.1) 、（5+3分）假设$\phi, a \in C^0([0,T[)$ 是非负函数，以及 $B \geq 0$是一个常数，满足：

$$\phi(t) \leq \int_0^t a(s)\phi(s)ds + B. \tag{3.1}$$

令 $v(t) = \int_0^t a(s)\phi(s)ds$，证明：$v'(t) - a(t)v(t) \leq B\,a(t)$.

3.2）、（5+3分）首先计算$\left(e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau} v(t)\right)'$, 然后证明:

$$e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau} v(t) \le B\int_0^t e^{-\int_0^s a(\tau)d\tau} a(s)ds$$

3.3）、（5+3分）证明：对于$t\in[0,T[$,

$$\phi(t)\le B\left(1+\int_0^t a(s)\ e^{\int_s^t a(\tau)d\tau}ds\right).$$

练习四题号	4.1	4.2	4.3	4.4	练习四得分
得　分					

练习四、（25+15分）

4.1）、（6+4分）假设

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix},$$

是一个n阶对角形矩阵，

$$(4.1)\qquad\qquad \sigma=\max_{1\le j\le n}\{\lambda_j\}<0.$$

首先计算e^{tA}，然后证明：

$$\|e^{-\sigma t}\,e^{tA}\,x\|\le\|x\|,\quad\forall t\ge 0,\quad\forall x\in\mathbb{R}^n.$$

这里$\|x\|=\sum_{j=1}^n|x_j|$.

4.2）、（10+6分）假设$B(t)$是一个$n \times n$矩阵，其系数是定义在$[0,+\infty[$ 上的实值函数。证明：$x(t)$是下列Cauchy问题的解

$$(4.2) \qquad \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + B(t)x(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

当且仅当$x(t)$满足

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)x(s)ds.$$

4.3)、(5+3 分) 假设 $x(t)$ 是 Cauchy 问题 (4.2) 的解, 令

$$\varphi(t) = e^{-\sigma t} x(t), \quad \|B(t)\| = \sup_{1 \le j,k \le n} |a_{jk}(t)|.$$

证明：存在 $C \ge 0$ 使得

$$\|\varphi(t)\| \le C\|x_0\| + \int_0^t \|B(s)\| \, \|\varphi(s)\| ds.$$

4.4) 、(4+2分) 证明:

$$\|x(t)\| \le C e^{\sigma t} \left(1 + \int_0^t \|B(s)\| \, e^{\int_s^t \|B(\tau)\| d\tau} ds \right).$$