本题分数	30
得　分	

一、　填空题（每空 3 分）

1. 复数$(\frac{2}{i}-\frac{2+2i}{1-i}i)$的三角表达式为________________

2. 已知$z^2+8=0$，则$z=$ ________________.

3. 已知$e^z=-1-i$，则$z=$ ________________.

4. $\oint_{|z|=1}\cos(z^2+1)dz=$ __________.

5. $\int_0^i zdz=$ __________.

6. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+i}}z^n$的收敛半径为__________.

7. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}z^n$的收敛半径为__________.

8. $\mathrm{Res}\left[\frac{1}{2021i-z},2021i\right]=$ __________

9. $\mathrm{Res}[\frac{z-\sin z}{z^6},0]=$__________.

10. 函数$f(z)=\frac{\sin z^3+i}{z^3(z^2+9)}$的奇点为________________

扫描全能王 创建

本题分数	10
得　分	

二、函数 $f(z)=6xy+5+3x^2yi-3i$ 在何处可导？何处解析？并在可导点处求出该函数的导数。

本题分数	15
得　分	

三、证明 $u(x,y)=x(1-x)+y^2$ 为调和函数，并求出解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，使满足 $f(i)=1+i$。

本题分数	30
得　分	

四、计算以下积分。

1. $\oint\limits_{|z-1|=1} \dfrac{\cos z}{(z-1)^3}dz$

2. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z(z+2)}dz$

3. $\oint\limits_{C} \dfrac{e^z}{z(z-1)(z-2)}dz$，其中$c:|z|=3$

本题分数	15
得　分	

①将 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4z+3}$ 在 $0<|z+1|<2$ 内展成洛朗级数；

②将 $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展成洛朗级数。

一、

1. $2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

2. $2\sqrt{2}i$, $-2\sqrt{2}i$

3. $\frac{1}{2}\ln 2+i\left(2k\pi-\frac{3}{4}\pi\right)$, $k\in Z$

4. 0

5. $-\frac{1}{2}$

6. 1

7. $\frac{1}{e}$

8. -1

9. $-\frac{1}{120}$

10. $z=0$, $z=3i$, $z=-3i$, $z=\infty$

二

$\because u(x,y)=6xy+5$, $v(x,y)=3x^2y-3$

$\therefore u_x=6y$, $u_y=6x$

$v_x=6xy$, $v_y=3x^2$

C-R方程：$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 6y=3x^2 \\ 6x=-6xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$\therefore$ 仅在 $z=0$ 成立 C-R 条件

仅在 $z=0$ 处可导，处处不解析

$f'(0)=(6y+6xyi)\Big|_{(0,0)}=0$

三、

$u(x,y) = x - x^2 + y^2$

$\because u_x = 1 - 2x,\ u_{xx} = -2$

$u_y = 2y,\ u_{yy} = 2$

$\therefore u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 \equiv 0$

$\therefore u(x,y) = x(1-x) + y^2$ 是调和函数

$\because f'(z) = u_x - i u_y$

$\therefore f'(z) = 1 - 2x - 2yi = 1 - 2z$

$\therefore f(z) = \int 1 - 2z\,dz = -z^2 + z + C$

$\because f(i) = 1 + i$

$\therefore C = 0,\ f(z) = -z^2 + z$

四

1. $z=1$ 在 $|z-1|=1$ 内部

$\cos z$ 在 $|z-1|=1$ 内部解析

由高阶导数公式

原式 $= 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \lim\limits_{z\to 1} \frac{d^2 \cos z}{dz^2}$

$= \pi i \lim\limits_{z\to 1} -\cos z$

$= -\pi i \cos 1$

3. 令 $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)(z-2)}$

$z=0, z=1, z=2$ 是一阶极点

且在 $|z|=3$ 内部

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\frac{e^z}{z(z-2)}=-e$$

$$\mathrm{Res}[f(z),2]=\lim_{z\to 2}\frac{e^z}{z(z-1)}=\frac{e^2}{2}$$

由留数定理可知

$$\text{原式}=2\pi i\left(\frac{1}{2}-e+\frac{e^2}{2}\right)$$

$$=\pi i(1-2e+e^2)$$

五. ② $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$在 $0<|z|<+\infty$ 内是处处解析的，已知有

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\ |z|<+\infty$$

而 $\frac{1}{z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 解析

故 $$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{z})^n}{n!},\ 0<|z|<+\infty$$

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n}}{n!},\ 0<|z|<+\infty$$

∴ $$f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2-n}}{n!},\ 0<|z|<+\infty$$