南 京 航 空 航 天 大 学

二〇二〇 ～ 二〇二一学年 第二学期《现代控制理论》考试试题

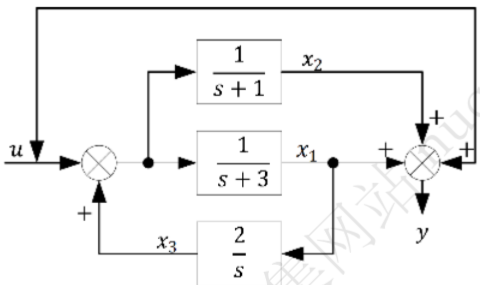
考试日期：2021 年 5 月　日　　试卷类型：A　　试卷代号：

班号	学号	姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

本题分数	10 分
得　分	

一、已知系统如下图所示：



(1) 写出图示系统的状态方程及输出方程；

(2) 判别该系统的能控性与能观性；

(3) 求出该系统的传递函数。

本题分数	10 分
得　　分	

二、已知线性定常系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

将该系统的状态空间表达式变换为对角标准型。

本题分数	10 分
得　　分	

三、已知系统的状态空间表达式为 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$，当初始条件为$\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$时，试求该系统在单位阶跃输入下，系统的状态响应。

本题分数	10 分
得　　分	

四、已知线性定常系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&-3\\0&1&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&1&-2\end{bmatrix}x$$

试判断系统状态是否完全能控，若状态不完全能控，试对系统进行分解。

本题分数	15 分
得　　分	

五、已知系统的传递函数为

$$\mathrm{G}(s)=\frac{s+10}{s^2+2as+1}\text{(a为实数)}$$

（1） 试列写该系统的可控标准型实现；

（2） 在（1）的基础上，试用李雅普诺夫第二法判断该系统的稳定性。（10分）

本题分数	15 分
得　　分	

六、已知系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

1.用状态反馈将系统闭环极点配置在-1、-2、-2；

2.该系统的状态观测器是否存在？若存在，请设计一个极点为-2、-2、-3的全维状态观测器；

本题分数	15 分
得　分	

七、 设人造卫星姿态控制系统的状态方程为

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

求从已知初始状态$x_1(0)=0$和$x_2(0)=0$,在$t_f=1$时刻转移到目标集（终端约束条件）

$$x_1(1)+x_2(1)=1$$

且使性能泛函$\mathrm{J}=\frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt$为最小的最优控制$u^*(t)$和相应的最优轨线$\boldsymbol{x}^*(t)$ 。

本题分数	15 分
得　　分	

八、已知 $J[x_1,x_2]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x_1x_2+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)dt, x_1(0)=0, x_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$
$x_2(0)=0, x_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$，试求使泛函 J 取极值的轨迹 $x^*(t)$ 。

南 京 航 空 航 天 大 学

二〇二〇～ 二〇二一学年　第 二 学期

课程名称：《 现代控制理论 》 参考答案及评分标准

命题教师：　　试卷类型：A　　试卷代号：

一、【10 分】(1) 由图所示的系统列写方程得

$$\begin{cases}(\mathrm{u}+x_3)\cdot\dfrac{1}{(s+1)}=x_2\\(\mathrm{u}+x_3)\cdot\dfrac{1}{(s+3)}=x_1\\\dfrac{2}{s}\cdot x_1=x_3\\u+x_1+x_2=y\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}\dot{x}_1=u+x_3-3x_1\\\dot{x}_2=u+x_3-x_2\\\dot{x}_3=2x_1\\y=u+x_1+x_2\end{cases}\text{（1 分）}$$

写成矩阵形式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-3&0&1\\0&-1&1\\2&0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u\text{（2 分）}$$

$$\mathrm{y}=[1\quad 1\quad 0]x+u$$

(2) 该系统的能控性矩阵为

$$U_c=[b\quad Ab\quad A^2b]=\begin{bmatrix}1&-3&10\\1&-1&2\\0&1&-3\end{bmatrix}\text{（2 分）}$$

该系统的能控性矩阵的秩为 3，所以该系统能控。

该系统的能观性矩阵为

$$U_o=\begin{bmatrix}c\\cA\\cA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-3&-1&2\\11&1&-4\end{bmatrix}\text{（2 分）}$$

该系统的能观性矩阵的秩为 3，所以该系统能观

（3）如图所示系统的传递函数由图可得

$$\mathrm{g(s)}=\mathrm{c(sI-A)}^{-1}b$$

$$= [1 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+3s-2} & 0 & \frac{1}{s^2+3s-2} \\ \frac{2}{(s+1)(s^2+3s-2)} & \frac{1}{s+1} & \frac{s+3}{(s+1)(s^2+3s-2)} \\ \frac{2}{s^2+3s-2} & 0 & \frac{s+3}{s^2+3s-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 1 = \frac{s^3+6s^2+5s-2}{s^3+4s^2+s-2}$$

（3 分）

二、【10 分】，

① 求特征值（2 分）

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda+6 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

解得

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = -3$$

② 系统矩阵 A 为友矩阵，且其特征值互异，则其变换矩阵为范德蒙矩阵（2 分）

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

③ 求P^{-1}（2 分）

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

④ 求$\bar{A}$，$\bar{B}$，$\bar{C}$（4 分）

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & -3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CP = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 1]$$

则对角标准型

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & -3 \end{bmatrix}\bar{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}u, \quad y = [1 \quad 1 \quad 1]\bar{x}$$

三、【10分】

单位阶跃函数$U(s)=\frac{1}{s}$，（1分）

$$x(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]x(0)+L^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)]\ \text{（3分）}$$
$$=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]x(0)+L^{-1}\left[\frac{1}{s}(sI-A)^{-1}B\right]\ \text{（3分）}$$
$$=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2e^{-2t}+5e^{-4t}+1\\2e^{-2t}-5e^{-4t}+3\end{bmatrix}\ \text{（3分）}$$

四、【10分】

系统的能控性矩阵

$$Q_c=[b\quad Ab\quad A^2b]=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&-3\\0&1&-2\end{bmatrix}$$
$$rank\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&-3\\0&1&-2\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&-2\\0&1&-2\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&-2\end{bmatrix}=2<n=3$$

因此，该系统不完全能控。(2分)

构造非奇异变换矩阵（不唯一，保证非奇异即可）

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\ \text{（2分）}$$

其中，前两列$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=b$，$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=Ab$，线性无关，第三列任意

线性变换后状态空间表达式为

$$\dot{\bar{x}}=P^{-1}AP\bar{x}+P^{-1}bu=$$
$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&-3\\0&1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u=$$
$$\begin{bmatrix}0&-1&-1\\1&-2&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\\\bar{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}\bar{A}_c&\bar{A}_{12}\\0&\bar{A}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}\bar{b}_c\\0\end{bmatrix}u$$
$$y=CP\bar{x}=[0\quad 1\quad -2]\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\bar{x}=$$
$$[1\quad -1\quad -2]\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\\\bar{x}_3\end{bmatrix}=[\bar{C}_c\quad \bar{C}_{\bar{c}}]\ \text{（3分）}$$

其中

$$\bar{A}_c=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-2\end{bmatrix}\qquad \bar{b}_c=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\qquad \bar{C}_c=[1\quad -1]$$

而

$$rank[\bar{b}_c\quad \bar{A}_c\bar{b}_c]=rank\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=2\ \text{（3分）}$$

五、【15 分】(1) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2a\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u};\boldsymbol{y}=[1 0 1]\boldsymbol{x}$（6 分）

(2) 平衡点为：$x_e=0$，令 $\mathbf{V}(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2$，则 $\dot{\mathbf{V}}(x)=2x_1\dot{x_1}+2x_2\dot{x_2}=-4ax_2^2$，讨论：

当 a>0 时，系统渐近稳定；（3 分）

当 a=0 时，系统李雅普诺夫意义下稳定；（3 分）

当 a<0 时，系统不稳定。（3 分）

六、【15 分】

1. 由题可知

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, c=[1 \quad 0 \quad 0]$$

设状态反馈矩阵 $\mathrm{k}=[k_1 \quad k_2 \quad k_3]$ （2 分）

添加反馈后的闭环系统特征式：（3 分）

$$\mathrm{D(s)}=|sI-(A-bK)|=s^3+(2k_1+k_3+3)s^2+(2k_1-k_2+4k_3+5)s+2k_1-3k_2+3k_3+1$$

若状态反馈后的极点为-1，-2，-2

$$f^*(s)=(s+1)(s+2)^2=s^3+5s^2+8s+4$$

$$\text{令 }\mathrm{D(s)}=f^*(s) \qquad \text{得} k_1=\frac{6}{7} \quad k_2=-\frac{1}{7} \quad k_3=\frac{2}{7}\text{（2 分）}$$

2. $S_o=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & -2\\ -1 & 4 & 6\end{bmatrix}$ $rank(S_O)=3$ 系统能观（2 分）

全维状态观测器存在

设观测器反馈矩阵 $\mathrm{H}=(H_1 \quad H_2 \quad H_3)$（2 分）

添加观测器后

$$\mathrm{D(s)}=|sI-(A-HC)|=\begin{vmatrix}s+1+H_1 & 2 & 2\\ H_2 & s+1 & 1\\ -1+H_3 & 0 & s+1\end{vmatrix}$$

$$=s^3+(H_1+3)s^2+(2H_1-2H_2-2H_3+5)\mathrm{s}+H_1-2H_2+1\text{（2 分）}$$

若添加观测器后极点为-2，-2，-3 则

$$f^*(s)=(s+2)^2(s+3)=s^3+7s^2+16s+12$$

$$\text{令}\mathrm{D(s)}=f^*(s)\text{ 得 }H_1=4, H_2=-3.5, H_3=2\text{（2 分）}$$

七、【15 分】

由题意知

$$F[\boldsymbol{x}(t_f),t_f]=0, L(\cdot)=\frac{1}{2}u^2$$

$$N_1(\boldsymbol{x}(t_f),t_f)=x_1(1)+x_2(1)-1$$

构造哈密顿函数为

$$H=L+\lambda^T f=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u\text{（3 分）}$$

由伴随方程

$$\dot{\lambda_1}=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0 \quad \lambda_1=c_1, \qquad \dot{\lambda_2}=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1,\ \lambda_2=-c_1 t+c_2\text{（3 分）}$$

由极值条件

$$\frac{\partial H}{\partial u}=u+\lambda_2(t)=0, \qquad u(t)=-\lambda_2(t)=c_1 t-c_2\text{（2 分）}$$

由状态方程

$$\dot{x}_2=\frac{\partial H}{\partial x_2}=u=c_1 t-c_2, \quad x_2(t)=\frac{1}{2}c_1 t^2-c_2 t+c_3$$

$$\dot{x}_1=\frac{\partial H}{\partial x_1}=x_2=\frac{1}{2}c_1 t^2-c_2 t+c_3, \quad x_1=\frac{1}{6}c_1 t^3-\frac{1}{2}c_2 t^2+c_3 t+c_4\text{（2 分）}$$

根据已知初始状态和目标集约束条件

$$x_1(0)=0,\ \ x_2(0)=0,\ \ x_1(1)+x_2(1)-1=0$$

可以求得

$$c_3=c_4=0,\quad 4c_1-9c_2=6$$

根据横截条件

$$\lambda_1(1)=\frac{\partial N_1^T}{\partial x_1(t)}\beta\Big|_{t=1}=\beta,\ \ \lambda_2(1)=\frac{\partial N_1^T}{\partial x_2(t)}\beta\Big|_{t=1}=\beta \text{（2 分）}$$

得到$\lambda_1(1)=\lambda_2(1)$，故有$c_1=\frac{1}{2}c_2$

由$4c_1-9c_2=6$可以解出

$$c_1=-\frac{3}{7},\quad c_2=-\frac{6}{7}$$

从而最优控制$u^*(t)$和相应的最优轨线$x^*(t)$为

$$u^*(t)=-\frac{3}{7}t+\frac{6}{7},\quad x_1{}^*=-\frac{1}{14}t^3+\frac{3}{7}t^2,\quad x_2{}^*=-\frac{3}{14}t^2+\frac{6}{7}t \text{（3 分）}$$

八、【15 分】

（1）系统中连续时间被控对象的传递函数为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{(s+1)(s+2)} \text{（2 分）}$$

连续时间被控对象的状态空间表达式为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-2x_1-3x_2+u\end{cases}$$

写成向量矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t) \text{（3 分）}$$

输出方程为

$$y(kT)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\end{bmatrix}$$

根据

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}=\mathcal{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix} \text{（2 分）}$$

可得

$$\boldsymbol{G}(T)=e^{\boldsymbol{A}t}|_{t=T}=\begin{bmatrix}2e^{-T}-e^{-2T} & e^{-T}-e^{-2T}\\ -2e^{-T}+2e^{-2T} & -e^{-T}+2e^{-2T}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{h}(T)=\int_0^T e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{b}dt=\int_0^T\begin{bmatrix}e^{-t}-e^{-2t}\\ -e^{-t}+e^{-2t}\end{bmatrix}dt=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-e^{-T}+\frac{1}{2}e^{-2T}\\ e^{-T}-e^{-2T}\end{bmatrix}$$

则被控对象的离散化状态方程为

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)T\\ x_2(k+1)T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-T}-e^{-2T} & e^{-T}-e^{-2T}\\ -2e^{-T}+2e^{-2T} & -e^{-T}+2e^{-2T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-e^{-T}+\frac{1}{2}e^{-2T}\\ e^{-T}-e^{-2T}\end{bmatrix}r(kT)$$

$$y(kT)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\end{bmatrix} \text{（3 分）}$$

(2) 令 $r(t)=1, T=0.1s$，可得离散化方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.99 & 0.086 \\ -0.172 & 0.733 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0.0045 \\ 0.086 \end{bmatrix}$$ （2 分）

当$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$时，

$$k=0, \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.99 & 0.086 \\ -0.172 & 0.733 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0.0045 \\ 0.086 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.0045 \\ 0.086 \end{bmatrix}$$

$$k=1, \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.99 & 0.086 \\ -0.172 & 0.733 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0.0045 \\ 0.086 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.016 \\ 0.148 \end{bmatrix}$$

$$k=2, \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.99 & 0.086 \\ -0.172 & 0.733 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0.0045 \\ 0.086 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.033 \\ 0.192 \end{bmatrix}$$

……

系统的离散化输出为

$$y(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}=x_1(k)$$ （3 分）

$$y(0)=0;\ y(1)=0.0045;\ y(2)=0.016;\ y(3)=0.033,\ \cdots$$