

南 京 航 空 航 天 大 学

二〇二一 ~ 三〇二二 学年 第 I 学期 《复变函数》考试试题											
考试日期: 2021 年 10 月 2i 日 试卷类型: A 试卷代号:											
班号				学号				姓名			
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、填空题 (每题三分)

1. 复数 $\frac{1+i}{1-i} + 1$ 的三角表达式为_____
2. 已知 $z^3 - 2 = 0$, 则 $z =$ _____
3. 已知 $e^z = 1 + i$, 则 $z =$ _____
4. $i^{1+i} =$ _____
5. $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z-2} dz =$ _____
6. $\int_0^i z dz =$ _____
7. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2021}} z^n$ 的收敛半径为_____
8. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ 的收敛半径为_____
9. $\text{Res}\left[\frac{1}{z-2021i}, 2021i\right] =$ _____
10. $\text{Res}\left[\frac{1-\cos z}{z^5}, 0\right] =$ _____

二、函数 $f(z) = 2xy + 1 + x^2yi + 3i$ 在何处可导? 何处解析? 在可导点处求出该函数的导数.

三、证明 $u(x, y) = 2x(3y - x) + 2y^2$ 为调和函数，并求出解析函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ，使满足 $f(i) = 2 + i$.

四、计算以下积分.

1. $\oint_{|z-1|=1} \frac{\cos z}{(z-1)^5} dz$

2. $\oint_{|z|=1} \frac{2z}{(z-\frac{1}{2})(z^2+2)} dz$

3. $\oint_{|z|=8} \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)^2} dz$

五、(1) 将 $f(z) = \frac{1}{z^2-4z+3}$ 在 $2 < |z-3| < +\infty$ 内展成洛朗级数；

(2) 将 $f(z) = z^4 \sin \frac{1}{z}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内展成洛朗级数.

六、求将上半平面 $\text{Im}z > 0$ 映射成单位圆 $|w| < 1$ 的分式线性映射 $w = f(z)$, 使满足条件:

$$f(i) = 0, f(0) = 1.$$