

2024 年南京航空航天大学航空学院《高等代数 A(2)》

期末考试模拟题

出题人：伍霖

一、填空题(每题 5 分, 共 30 分)

1. 设 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_3$, 则二次型的矩阵是_____, 二次型的秩为_____.

2. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 6x_2x_3$, $a > 3$ 在实数域上的规范形为_____.

3. 设 A 是三阶实对称矩阵, 且满足 $A^2 + 2A = 0$, 若 $kA + E$ 是正定矩阵, 则_____. (填 k 的范围)

4. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 且 $f(\lambda) = x^{11} - 2x^9 + x^8 + x^3 - x + 2$, 求 $f(A) =$ _____.

5. 求 λ 矩阵 $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$ 的标准形_____.

6. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $A^n =$ _____. (n 为正整数)

二、计算题(第 7 大题 10 分, 其余大题每道 15 分, 共 70 分)

7. 设 A, B 都是 $m \times n$ 实矩阵, 且 $B^T A$ 为可逆矩阵, 证明: $A^T A + B^T B$ 是正定矩阵.

8. 设 V_1 及 V_2 是 n 维空间 V 的两个子空间, 且 $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1$, 证明: $V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$.

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

9. 设 \mathcal{A} 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换, 证明三个条件等价: (1) \mathcal{A} 是可逆的; (2) \mathcal{A} 是单射; (3) \mathcal{A} 是满射.

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

10. 设 V 为数域 P 上 n 为线性空间, \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 为 V 的线性变换且满足 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, 又设 λ_0 是 \mathcal{A} 的一个特征值, 证明:

(1) $V^{\lambda_0} = \{\alpha \in V \mid \text{存在正整数 } m, \text{ 使 } (\mathcal{A} - \lambda_0 \mathcal{E})^m \alpha = \mathbf{0}\}$ 是 \mathcal{A} 的不变子空间, 其中 \mathcal{E} 是恒等变换;

(2) V^{λ_0} 也是 \mathcal{B} 的不变子空间.

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

11. 用正交变换将二次曲面 $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 = 1$ 化为标准形并说明曲面类型.

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store