南京航空航天大学《线性代数》

2018-2019 学年第一学期期末考试 A 卷

一、(每空 2 分) 填空题

1. 四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3x & 2x & 1 & 2 \\ 1 & x & 5 & -1 \\ 4 & 3 & -x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 项的系数是______，x^3 项的系数是______

2. 设向量组 $\alpha_1=(1,2,-3)^T$，$\alpha_2=(a,0,-b)^T$，$\alpha_3=(1,1,0)^T$ 线性无关，则 a,b 满足的关系式为________，一个极大线性无关组是____________

3. 线性空间 $V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c\in R\right\}$ 的维数是________，一组基是________

4. 设 A 为三阶矩阵，$|A|=-2$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $|A^*-A^{-1}|=$________；若交换 A 的第一列与第二列得到矩阵 B，则 $|BA^{-1}|=$________

5. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{123}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=$________，$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{121}=$________

6. 设四阶矩阵 A 满足条件 $|\sqrt{2}E+A|=0, AA^T=2E, |A|<0$，其中 E 为四阶单位矩阵。则 A 的一个特征值是______，A^* 的一个特征值是________

7. 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2kx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，则 k 的取值范围是________，此二次型的正惯性指数是________

二、(每小题 8 分) 计算题 (要求写出计算过程)

1. 求行列式 $D=\begin{vmatrix} a-3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & a-3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a-3 \end{vmatrix}$ 的值

2. 已知矩阵方程$AX=B+X$，若$A=\begin{pmatrix}3&2&3\\1&0&0\\-1&2&2\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，求矩阵$X$

3. 设$\mathscr{A}$为R^3的一个线性变换，满足

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\x_2+x_3\\x_1\end{pmatrix}$$

求$\mathscr{A}$在基$\eta_1=(1,0,0)^T,\eta_2=(1,1,0)^T,\eta_3=(0,0,1)^T$下的矩阵

4. 设$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&2\end{pmatrix}$相似，确定$a,b$，并求$P$，使得$P^{-1}AP=B$

三、（13 分）设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2+ax_3+7x_4=8 \\ x_1+2x_2+3x_3=4 \\ -x_2+x_3+(a-2)x_4=b-1 \end{cases}$

问：当a,b为何值时，此方程组无解，有唯一解，有无穷多解？并求出方程组有无穷多解时的通解。

四、（12 分）已知二次型为$f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_1x_3$

（1）求系数矩阵A

（2）用正交变换法将此二次型化为标准型，并求出所做的正交变换$X=TY$，以及二次型的标准型

五、（每题 5 分）证明题

1. 设A,B都是n阶矩阵，A可逆，且A与B相似，证明：A^n与B^n相似

2. 设矩阵 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，其中 A 和 D 分别为 m 阶和 n 阶矩阵，且 A 可逆，证明：

$|M|=|A||D-CA^{-1}B|$

3. 设A,B均为n阶正交矩阵，且$|A|=-|B|$，证明：$|A+B|=0$

2018-2019 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、（每空 2 分）填空题

1. 【正解】$-3,2$

【学解】根据行列式定义，含 x^4 的项仅有 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=-3x^4$，含 x^3 的项仅有 $(-1)^{\tau(2,1,3,4)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=2x^3$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1：行列式的概念及其性质

2. 【正解】$3a+b\neq 0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

【学解】由题意知：$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -b & 0 \end{vmatrix}\neq 0\Longrightarrow 3a+b\neq 0$，极大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 12：极大线性无关组

3.【正解】3，$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

【学解】因为对于任意的$a,b,c\in R$，有$\begin{pmatrix}a&b\\a&c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

并且$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$是线性无关的，所以维数为 3，一组基为$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15：向量空间

4.【正解】$\frac{27}{2},-1$

【学解】$|A^*-A^{-1}|=|A^{-1}||AA^*-E|=-\frac{1}{2}||A|E-E|=-\frac{1}{2}|-3E|=-\frac{(-3)^3}{2}|E|=\frac{27}{2}$

由初等矩阵关系知$B=A\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以$|BA^{-1}|=|B||A^{-1}|=|A|\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}|A^{-1}|=-1$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9【重要题型】题型 1：矩阵的运算与矩阵行列式的计算

5. 【正解】$\begin{pmatrix}-2&3&-1\\1&-1&0\\3&-4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3&-2\\2&4&-3\\0&1&-1\end{pmatrix}$

【学解】$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=E$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{123}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{122}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

从而$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{123}\begin{pmatrix}2&-3&1\\3&-4&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3&1\\3&-4&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&-1\\1&-1&0\\3&-4&2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}^{121}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}^{120}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

从而$\begin{pmatrix}2&-3&1\\3&-4&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{121}=\begin{pmatrix}2&-3&1\\3&-4&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\2&4&-3\\0&1&-1\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19-24【重要题型】题型 4：求矩阵的高次幂

6.【正解】$-\sqrt{2},2\sqrt{2}$

【学解】由$|\sqrt{2}E+A|=0\Longrightarrow-\sqrt{2}$是方程$|\lambda E-A|=0$的根，于是一个特征值为$-\sqrt{2}$

又因为$AA^T=2E\Longrightarrow|AA^T|=|2E|=2^4=16\Longrightarrow|A|=-4\Longrightarrow AA^*=|A|E=-4E$

从而$A^*=-4A^{-1}$，所以A^*的一个特征值为$\dfrac{-4}{-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19-24【重要题型】题型 1：求特征值

7.【正解】$(-2,1),3$

【学解】该二次型对应的矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&k&-1\\k&4&2\\-1&2&4\end{bmatrix}$，要使得正定，那么$\begin{vmatrix}1&k\\k&4\end{vmatrix}=4-k^2>0$

$$\begin{vmatrix}1&k&-1\\k&4&2\\-1&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&2\\2&4\end{vmatrix}-k\begin{vmatrix}k&2\\-1&4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}k&4\\-1&2\end{vmatrix}=-4(k+2)(k-1)>0$$

取交集，所以$-2<k<1$，又因为正定，所以正惯性指数为3

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24：正定二次型和正定矩阵

二、（每小题 8 分）计算题（要求写出计算过程）

1.【学解】$D=\begin{vmatrix}a-3&-1&0&1\\-1&a-3&1&0\\0&1&a-3&-1\\1&0&-1&a-3\end{vmatrix}\xlongequal[c_2+c_4]{c_1+c_3}\begin{vmatrix}a-3&0&0&1\\0&a-3&1&0\\a-3&0&a-3&-1\\0&a-3&-1&a-3\end{vmatrix}$

$=(a-3)^2\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&0&a-3&-1\\0&1&-1&a-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_2]{r_3-r_1}(a-3)^2\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&a-3&-2\\0&0&-2&a-3\end{vmatrix}$

$=(a-3)^2\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a-3&-2\\-2&a-3\end{vmatrix}=(a-3)^2(a-5)(a-1)$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1：行列式的概念及其性质

2.【学解】由$AX=B+X\Longrightarrow(A-E)X=B$

因为$A-E=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix},|A-E|=\begin{vmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=-1\neq0\Longrightarrow X=(A-E)^{-1}B$

$(A-E,B)=\begin{pmatrix}2&2&3&4&2&3\\1&-1&0&1&1&0\\-1&2&1&-1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&4&3&2&0&3\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&1&0&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&0&-1&2&-12&-9\\0&1&1&0&3&3\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&1&1&0&3&3\\0&0&1&-2&12&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&1&0&2&-9&-6\\0&0&1&-2&12&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&-8&-6\\0&1&0&2&-9&-6\\0&0&1&-2&12&9\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow X=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4：矩阵的概念和基本运算

3.【学解】$\mathscr{A}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=2\eta_1+\eta_3,\mathscr{A}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\eta_2+\eta_3,\mathscr{A}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=-\eta_1+\eta_2$

所以$\mathscr{A}$在基$\eta_1=(1,0,0)^T,\eta_2=(1,1,0)^T,\eta_3=(0,0,1)^T$下的矩阵为$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

【考点延伸】线性变换的定义

4.【学解】由A与对角矩阵B相似知A的特征值为$2,b,2$

因为$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-2)[\lambda^2-(3+a)\lambda+3a-3]$

因为2是二重根，所以$2^2-(3+a)2+3a-3=0\Longrightarrow a=5$

从而$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+12)=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$，从而$b=6$

当$\lambda=2$时，考虑$A-2E=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\2&2&-2\\-3&-3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，解得两个线性无关的特征向量为

$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

当$\lambda=6$时，考虑$A-6E=\begin{bmatrix}-5&-1&1\\2&-2&-2\\-3&-3&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}5&1&-1\\1&-1&-1\\3&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&3&2\\1&-1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$，解得特征向量$\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$

所以可令$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\1&3&1\end{bmatrix}$（不唯一）

【考点延伸】《考试宝典》知识点 20：矩阵相似对角化

三、【学解】$\begin{pmatrix}1&1&1&2&3\\2&3&a&7&8\\1&2&0&3&4\\0&-1&1&a-2&b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&2&3\\0&1&a-2&3&2\\0&1&-1&1&1\\0&-1&1&a-2&b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&2&3\\0&0&a-1&2&1\\0&1&-1&1&1\\0&0&0&a-1&b\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&1&1&2&3\\0&1&-1&1&1\\0&0&a-1&2&1\\0&0&0&a-1&b\end{pmatrix}$

当$a-1=0,b\neq0$时，即$a=1,b\neq0$，方程组无解

当$a\neq1$时，方程组有唯一解。

当$a=1,b=0$时，方程组有无穷多组解，此时：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&2&3\\2&3&1&7&8\\1&2&0&3&4\\0&-1&1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&2&3\\0&1&-1&1&1\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_3+2x_4=3\\x_2-x_3+x_4=1\\2x_4=1\end{cases}$$

令$x_3=c$，那么解得$\begin{cases} x_1=\frac{3}{2}-2c \\ x_2=\frac{1}{2}+c \\ x_4=\frac{1}{2} \end{cases}$，所以通解为$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2}-2c \\ \frac{1}{2}+c \\ c \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}=c\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17：非齐次线性方程组

四、【学解】(1) 系数矩阵$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0 \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-1$

$\lambda_1=\lambda_2=1$，$A-E=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，解得两个特征向量$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_3=-1$，$A+E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，解得特征向量$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

令$T=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$，对应的二次型的标准型为$f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 22：二次型

五、(每题 5 分) 证明题

1.【学解】因为A与B相似，所以存在可逆矩阵C，使得$B=C^{-1}AC$

从而$B^n=(C^{-1}AC)(C^{-1}AC)\cdots\cdots(C^{-1}AC)=C^{-1}A^nC$，命题得证

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19-24【重要题型】题型 5：相似矩阵

2.【学解】因为$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$，从而

$$\left|\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} \Longrightarrow |M| = |A||D-CA^{-1}B|$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 7：分块矩阵

3.【学解】因为A,B为正交矩阵，所以$|A|$与$|B|$只可能取得 1 或-1

又因为$|A|+|B|=0$，故而不妨可以设$|A|=1,|B|=-1$

$$|A+B| = |(A+B)^T| = |A^T+B^T| = |A^{-1}+B^{-1}| = -|A||A^{-1}+B^{-1}||B| = -|A+B| \Longrightarrow |A+B| = 0$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19-24【重要题型】题型 8：正交矩阵的性质和证明