2019-2020 学年第二学期期末考试 A 卷

一、填空题(每空 2 分，共 28 分)

1、设$\begin{vmatrix} x & 1 & y \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2$,则$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ x & 1 & y \end{vmatrix}=$________.

2、已知矩阵A满足$A^2+3A=5E$,则$(A+2E)^{-1}=$________.

3、设A为3阶矩阵,$|A|=3$,则$||A|A^{-1}|=$______齐次线性方程组$AX=0$的解为________.

4、设$\alpha_1=(1,-1,2,-1)^T,\alpha_2=(2,0,1,-2)^T,\alpha_3=(3,1,a,-3)^T$,则$a$满足______时,

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，一个极大线性无关组是________.

5、设A是3阶实对称矩阵,满足$A^2+A=2E$,且$|A|=4$,则A的所有特征值为______,$|A^2+E|=$

____.

6、$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{13}\begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}=$______,$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}^{14}=$______.

7、已知$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+kx_2x_3$是正定的,则$k$的取值范围是______,此二次型的规范形是________.

8、设A是5×3的矩阵,则线性方程组$AX=b$的有无穷解的充要条件是__________;

若$r(A)=2$,则$AX=0$的基础解系中有几个线性无关的解向量:__________.

二、计算题(每小题 8 分，共 32 分)

1、求行列式$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 1\\3 & 4 & 1 & 2\\4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$的值.

2、设$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\0 & 3 & 2\\1 & -1 & 3\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\\-2 & 1\end{bmatrix}$,$X$满足矩阵方程$AX=B+X$,求$X$.

3、设$\mathscr{A}$为R^3上的线性变换,满足$\mathscr{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\\2x_3\end{bmatrix}$,

求$\mathscr{A}$在一组基$\beta_1=(1,0,0)^T,\beta_2=(1,1,0)^T,\beta_3=(1,1,1)^T$下的矩阵.

4、已知矩阵$A=\begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{bmatrix}$的一个二重特征值是$\lambda_1=3$,

(1)求参数x和另一特征值λ_2;　(2)问A能否对角化?并说明理由.

三、(14分)

设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$,问:当$a,b$为何值时,方程组无解,有唯一解,有无穷多解?当有无穷多解时,求通解.

四、(14 分) 利用正交变换法$X=UY$将化下面的二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$,为标准形,并求出所用的正交变换.

五、证明题(每题 6 分,共 12 分)

1、设λ_1,λ_2为矩阵A的两个不同的特征值,对应的特征向量分别为α_1,α_2,
证明:$\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充要条件是:$\lambda_2\neq 0$.

2、设A,B为n阶正交矩阵,且$|AB|=-1$,证明:$|A+B|=0$.