南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一九 ~ 二〇二〇学年 第二学期 **《复合材料力学》考试试题**

考试日期：2020 年 6 月 13 日 试卷类型：C 试卷代号：

班号		学号		姓名	

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题分数	
得 分	

一. 简答题: (共 42 分)

（1）树脂基纤维增强复合材料的概念。(6 分)

连续相为树脂、增强相为纤维，将树脂浸渍到纤维束或平面织物中，经过热压处理成型的复合材料。

（2）解释经典层压板理论中的直法线和等法线假设。(6 分)

直法线假设 — 变形前垂直于中面的直线段，在变形后仍保持直线，且长度不变。

等法线假设 — 原垂直于中面的法线受载后长度不变，应变为零。

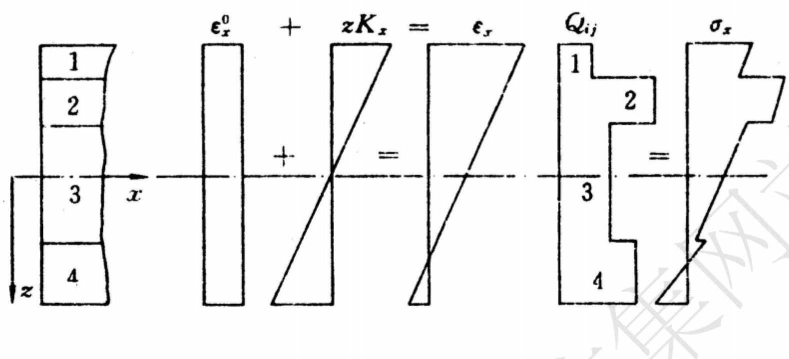
（3）残余应力与残余应变。(6 分)

一般由湿热变形引起。当层合板从固化温度冷却到室温时，材料经受降温作用，或因吸湿而经受湿度差作用，由于各铺层的材料或/和铺层角度不尽一致，因此无约束时各铺层的湿热自由应变不尽一致，这样就造成了各铺层的残余应变，即无外载时的层合板应变与各层的湿热自由应变之差。与残余应变对应的应力称为残余应力。

（4）树脂基纤维增强复合材料的概念。(8 分)

1.非均质性；2.各向异性；3.高比强度比模量；4.可设计性；5.高抗疲劳性能；6.高耐腐蚀性能；7.优越的抗振动性能；8.良好的热稳定性。

（5）请用图表示一般层合板的应变和应力沿厚度的变化规律。(8 分)



（6）请解释各向异性、正交各向异性、横观各向同性和各向同性材料的概念及其独立弹性常数的个数。(8 分)

各向异性材料： 21

正交各向异性材料：9

横观各向同性材料：5

各向同性材料材料：2

本题分数	
得　分	

二.证明题: (共 10 分)

对于对称层合板，证明其耦合刚度矩阵 B=0。

证明：层合板的耦合刚度矩阵 B 为，

$$[B]=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\overline{Q}\right]_k\left(Z_k^2-Z_{k-1}^2\right)$$

对于对称层合板，取相对中面对称的两同方向单层，设为+j 层合板和-j 层，则，

$$\left[\overline{Q}\right]^{+j}=\left[\overline{Q}\right]^{-j}=\left[\overline{Q}\right]^{j}$$

有，

$$[B]^{+j}+[B]^{-j}=\frac{1}{2}\left[\overline{Q}\right]^{+j}\left(Z_j^2-Z_{j-1}^2\right)+\frac{1}{2}\left[\overline{Q}\right]^{-j}\left(Z_{-(j-1)}^2-Z_{-j}^2\right)$$

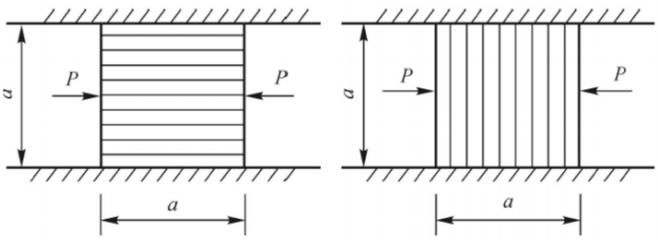
$$=\frac{1}{2}\left[\overline{Q}\right]^{j}\left[\left(Z_j^2-Z_{j-1}^2\right)+\left(-Z_{(j-1)}^2-\left(-Z_j^2\right)\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\overline{Q}\right]^{j}\left[Z_j^2-Z_{j-1}^2+Z_{j-1}^2-Z_j^2\right]=0$$

对任何两对称单层，都有以上关系，所以[B]=0。

本题分数	
得　分	

三. 计算题: (共 48 分)

1. 一块长为a 的正方形H T3 / 5224（材料参数见书上38页表3.1） 复合材料的单向板，厚度为h =1 m m ，紧夹在两块刚性板之间，作用力P =2 k N ，请计算在下图（a）和（b）情况下单向板沿作用力P 方向的变形Δa 。(10分)



(a)　　　　(b)

$$S_{11}=7.1\times10^{-3}(GPa)^{-1},S_{22}=116\times10^{-3}(GPa)^{-1},S_{12}=-2.5\times10^{-3}(GPa)^{-1},S_{66}=200\times10^{-3}(GPa)^{-1}$$

a): $\sigma_1 = \frac{P}{\mathrm{a^*h}} = \frac{2}{a}$， $\varepsilon_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_2 = S_{12}\sigma_1 + S_{22}\sigma_2 = 0$

$\Rightarrow \sigma_2 = -\frac{S_{12}^2}{S_{22}}\sigma_1$

$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1 + S_{12}\sigma_2 =$ $(S_{11} - \frac{S_{12}^2}{S_{22}})$ σ_1

$=$ $(7.1\times10^{-3} - \frac{(2.5\times10^{-3})^2}{116\times10^{-3}})$ σ_1

$=7.046\times10^{-3}\sigma_1$

解得 $\Delta a = a\cdot\varepsilon_1 = 0.01409\mathrm{mm}$

b) $\sigma_2 = \frac{P}{\mathrm{a^*h}}$， $\varepsilon_1 = 0$

同 a）中理得 $\varepsilon_2 = (S_{22} - \frac{S_{12}^2}{S_{11}})$ σ_2

$\Delta a = a * \varepsilon_2 = 0.2321mm$

2. 层合板[0/90]s 单独受内力 N_x=100N/mm 作用，使用 Tsai-Hill 准则计算该层合板的第一层失效强度。已知: 单层厚 t=0.125mm；E_{11}=140GPa; E_{22}=8.5GPa; G_{12}=5.0GPa; μ_{12}=0.35；X_t =1400MPa，Y_t=50MPa，S=100MPa。 (20 分)

解：由层合板载荷-应变关系有，

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix}$$

因为：①[0/90]s 是对称层合板；②内力矩 M=0，则有，

B=0； κ=0； $$\begin{bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & \nu_{12}E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ \nu_{21}E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141049.1 & 2997.3 & 0 \\ 2997.3 & 8563.7 & 0 \\ 0 & 0 & 5000.0 \end{bmatrix} \text{MPa};$$

由层合板[0/90]s 的铺设特征，有：$\theta = 0^0$时，$m=1, n=0$；$\theta = 90^0$时，$m=0, n=1$；

有：$\begin{bmatrix} \overline{Q}_{11}^{0} \\ \overline{Q}_{22}^{0} \\ \overline{Q}_{12}^{0} \\ \overline{Q}_{66}^{0} \\ \overline{Q}_{16}^{0} \\ \overline{Q}_{26}^{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ （1 分）；$\begin{bmatrix} \overline{Q}_{11}^{90} \\ \overline{Q}_{22}^{90} \\ \overline{Q}_{12}^{90} \\ \overline{Q}_{66}^{90} \\ \overline{Q}_{16}^{90} \\ \overline{Q}_{26}^{90} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{22} \\ Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ （1 分）；$\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{12} \\ A_{66} \\ A_{16} \\ A_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t(Q_{11}+Q_{22}) \\ 2t(Q_{11}+Q_{22}) \\ 4tQ_{12} \\ 4tQ_{66} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37403.2 \\ 37403.2 \\ 1498.7 \\ 2500.0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$ ；

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2} \\ \dfrac{A_{12}}{A_{12}^2-A_{11}A_{22}} \\ 0 \end{bmatrix} N_x = \begin{bmatrix} 2.678\times10^{-3} \\ -1.073\times10^{-4} \\ 0 \end{bmatrix};$$

故有：

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_{0^0} = T\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{0^0} = T\begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_{0^0} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{0^0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 377.4 \\ 7.1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{MPa};$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_{90^0} = T\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{90^0} = T\begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_{90^0} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{90^0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.1 \\ 22.6 \\ 0 \end{bmatrix} \text{MPa};$$

采用 Tsai-Hill 准则对全部铺角单层(0°层和 90°层)进行计算，得函数值，

$$f_{0^\circ} = \frac{\sigma_{1,0}^2}{X^2} + \frac{\sigma_{2,0}^2}{Y^2} - \frac{\sigma_{1,0}\sigma_{2,0}}{X^2} + \frac{\tau_{12,0}^2}{S^2} = 0.092$$

$$f_{90^\circ} = \frac{\sigma_{1,90}^2}{X^2} + \frac{\sigma_{2,90}^2}{Y^2} - \frac{\sigma_{1,90}\sigma_{2,90}}{X^2} + \frac{\tau_{12,90}^2}{S^2} = 0.205$$

上述值中 90°层的大，所以 90°层为层合板的第一失效层。

设 90°层断裂时的内力 N_x 为 N_{cr}，此时 $f_{90^\circ}=1$，则计算得：

$$N_{cr}=221.1\text{N/mm}$$

则层合板[0/90]s 的第一层失效强度σ_{fs} 为：

$$\sigma_{fs}=N_{cr}/(4t)=221.1/(4\times0.125)\ \text{MPa}=442.2\ \text{MPa}$$

3.试用 Tsai-Wu 准则求 GFRP（玻璃/环氧）单向板$[45]_{10}$在偏轴下(θ=45°)的拉伸与压缩强度。已知材料性能：$X_t=X_c=1050$MPa，$Y_t=30$MPa，$Y_c=140$MPa，$S=40$MPa。(18 分)

解：应力转轴公式：

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m^2 & n^2 & 2mn\\ n^2 & m^2 & -2mn\\ -mn & mn & m^2-n^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_X\\ \sigma_Y\\ \tau_{XY}\end{bmatrix},\quad m=\cos\theta,\quad n=\sin\theta$$

根据已知条件：$\theta=45^\circ$，$\sigma_y=0,\tau_{xy}=0$ 求得：

$$\sigma_1=0.5\sigma_X,\ \sigma_2=0.5\sigma_X,\ \tau_{12}=-0.5\sigma_X$$

Tsai-Wu 张量准则：

$$F_1\sigma_1+F_2\sigma_2+F_{11}\sigma_1^2+F_{22}\sigma_2^2+F_{66}\sigma_6^2+2F_{12}\sigma_1\sigma_2=1$$

其中

$$F_1=\frac{1}{X_T}-\frac{1}{X_c},\quad F_{11}=\frac{1}{X_TX_c},\quad F_2=\frac{1}{Y_T}-\frac{1}{Y_c},$$

$$F_{22}=\frac{1}{Y_TY_c},\quad F_{66}=\frac{1}{S^2},\quad F_{12}=-0.5\sqrt{F_{11}F_{22}}$$

已知：

$$X_t=10.5\times10^2MPa,\ X_c=10.5\times10^2MPa,$$

$$Y_t=0.3\times10^2MPa,\ Y_c=1.4\times10^2MPa,\ S=0.4\times10^2MPa$$

则：

$$F_1=0,\ F_{11}=9.0703\times10^{-7}\ \text{MPa}^{-1},\ F_2=2.619\times10^{-2}\ \text{MPa}^{-1},\ F_{22}=2.3809\times10^{-4}\ \text{MPa}^{-1},$$

$$F_{66}=6.25\times10^{-4}\ \text{MPa}^{-1},\ F_{12}=-7.3477\times10^{-6}\ \text{MPa}^{-1}$$

代入 Tsai-Wu 张量准则中得：

$$2.123254\times10^{-4}\sigma_x^2+1.3095\times10^{-2}\sigma_x-1=0$$

求解一元二次方程得：

$$\sigma_x=44.4\ \text{(MPa)（拉伸强度）}$$

$$\sigma_x=-106.1\ \text{(MPa)（压缩强度）}$$