南 京 航 空 航 天 大 学

二〇二二～ 二〇二三学年 第一学期 **《常微分方程》第四次课堂考试**

考试日期：2022 年 12 月 日 试卷类型： 试卷代号：

班号 **学号** **姓名**

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	**总分**
得分											

1）证明题请特别注重证明的严谨性。
2）计算题请给出详细的计算过程，如果仅仅给出计算结果则**没有分数**。
3）可以引用其它小题的结论（即使没有完成证明），但是不能循环证明。
4）此课堂作业为闭卷式，不允许使用任何资料和计算器。

练习一题号	1.1	1.2	1.3	1.4	练习一得分
得 分					

练习一（30分）、 设D是$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$的一个开区域，以及

$$f(t,y)=\begin{bmatrix} f_1(t,y_1,\cdots,y_n)\\ \cdots \\ f_n(t,y_1,\cdots,y_n)\end{bmatrix},\qquad \frac{\partial f}{\partial y_j}(t,y)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_j}(t,y_1,\cdots,y_n)\\ \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_j}(t,y_1,\cdots,y_n)\end{bmatrix}.$$

假设它们都是定义在D上的连续向量值函数。

1.1）（4分）给出关于f的Lipschitz条件的定义，给出关于f的局部Lipschitz条件的定义。

1.2）（8分）假设$(t_0,a)=(t_0,(a_1,\cdots,a_n)),(t_0,b)=(t_0,(b_1,\cdots,b_n))\in D$, 以及

$$\begin{aligned}[(t_0,a),(t_0,b)] &= \{(t_0,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n;(t_0,y)=(t_0,(b_1+s(a_1-b_1),\cdots,b_n+s(a_n-b_n))),0\le s\le 1\}\\ &= \{(t_0,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n;(t_0,y)=(t_0,b+s(a-b)),0\le s\le 1\}\subset D.\end{aligned}$$

利用单个变量的标量函数的Newton-Leibniz公式: $g(\alpha)-g(\beta)=\int_\beta^\alpha g'(s)ds$（其中$g'(s)$在$[\alpha,\beta]$上连续），证明：

$$f(t_0,a)-f(t_0,b)=\sum_{j=1}^n(a_j-b_j)\int_0^1\frac{\partial f}{\partial y_j}(t_0,b+s(a-b))ds.$$

1.3）（8分+）证明$f(t,y)$在D上满足局部Lipschitz条件。

1.4）（10分）利用Cauchy-Lipschitz定理，在上面的假设条件下证明：任给$(t_0, y^0) \in D$, 存在$\epsilon_0 > 0$, 使得下列Cauchy问题

$$(E-1) \qquad \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y^0 \end{cases}$$

存在唯一的定义在$[t_0-\epsilon_0, t_0+\epsilon_0]$上的解。

==

提示：Cauchy-Lipschitz定理

假设$f(t,y)$在$[t_0-\alpha, t_0+\alpha] \times \{y \in \mathbb{R}^n; |y-y^0| \le \beta\} = I \times \Omega$上连续，并且满足Lipschitz 条件,则Cauchy问题(E-1) 在 区间$]t_0-h, t_0+h[$上存在唯一解。这里

$$h = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\}, \quad M = \sup_{(t,y)\in I\times\Omega} |f(t,y)|.$$

==

练习二题号	2.1	2.2	2.3	2.4	练习二得分
得分					

练习二（40分）、

2.1）（12分）、 证明下列Gronwall不等式：假设ϕ是定义区间$[a,b]$上的非负函数，$t_0 \in [a,b]$, 且满足 $(A,B,C \geq 0)$,

$$\phi(t) \leq A + B\left|\int_{t_0}^{t} \phi(s)ds\right| + C|t-t_0|, \qquad t \in [a,b],$$

证明：

$$\phi(t) \leq Ae^{B|t-t_0|} + \frac{C}{B}\left(e^{B|t-t_0|} - 1\right), \qquad t \in [a,b].$$

由此导出

$$(G-1) \qquad \phi(t) \leq Ae^{B|t-t_0|} + C|t-t_0|e^{B|t-t_0|}, \qquad t \in [a,b].$$

2.2)（10分）、研究Cauchy问题

$$(E-2)\qquad \begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

其中$x_0 \in \mathbb{R}$ 以及f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数，且满足, $(k \geq 0)$,

$$(L-1)\qquad |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

证明Cauchy问题（E-2）的局部解可以唯一延拓成饱和解，既：唯一延拓成一个定义在开区间$]\alpha, \beta[$上的解$y(t)$，使得 $\alpha = -\infty$, 否则若$-\infty < \alpha$，则$\lim_{t\to\alpha} |y(t)| = +\infty$； 以及$\beta = +\infty$, 否则若$\beta < +\infty$，则$\lim_{t\to\beta} |y(t)| = +\infty$ 。

2.3)（13分）、证明 2.2) 中的解对于所有的在饱和解区间$]\alpha, \beta[$内的t满足

$$|x(t) - x_0| \le |t| \ |f(x_0)| \ e^{k|t|} .$$

2.4)（5分）、 证明2.2) 的饱和解定义在全空间 $\mathbb{R}$.

练习三题号	3.1	3.2	3.3	练习三得分
得　分				

练习三（30分）、

3.1)（5分）、研究Cauchy问题

$$(E-3) \qquad \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

其中$y_0 \in \mathbb{R}^n$ 以及$f(t,y)$ 是定义在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 上的实值n-维向量值连续函数，且满足, $(K, C \geq 0)$,

$$(L-1) \quad |f(t,x) - f(t,y)| \leq K|x-y|, \ |f(t,y_0)| \leq C, \ \forall x, \, y \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

证明Cauchy问题（E-3）的局部解可以唯一延拓成饱和解，既：唯一延拓成一个定义在开区间$]\alpha, \beta[$上的解$y(t)$，使得 $\alpha = -\infty$, 否则若$-\infty < \alpha$，则$\lim_{t \to \alpha} |y(t)| = +\infty$； 以及$\beta = +\infty$, 否则若$\beta < +\infty$，则$\lim_{t \to \beta} |y(t)| = +\infty$ 。

3.2)（10分）、证明 3.1) 中的解对于所有的在饱和解区间$]\alpha, \beta[$内的t满足

$$|y(t) - y_0| \leq C|t|\ e^{K|t|}\,.$$

由此导出3.1) 的饱和解定义在全空间 $\mathbb{R}$.

3.3)（15分）、研究线性方程组的Cauchy问题

$$(E-4)\qquad \begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + f_1(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + f_n(t), \\ (y_1(0), \cdots, y_n(0)) = (y_1^0, \cdots, y_n^0) \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

其中$a_{kj}, f_j \in C^0(\mathbb{R})$, 而且满足

$$(H)\qquad \max_{1\le k,j\le n} \sup_{t\in\mathbb{R}} |a_{kj}(t)|,\ \max_{1\le j\le n} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_j(t)| \le M < +\infty.$$

证明Cauchy问题(E-4)存在唯一的定义在全空间 $\mathbb{R}$上的解。