《常微分方程》课堂作业一

时间 2 小时，满分100分

1）证明题请特别注重证明的严谨性。
2）计算题请给出详细的计算过程, 如果仅仅给出计算结果则**没有分数**。
3）可以引用其它小题的结论（即使没有完成证明），但是不能循环证明。
4）此课堂作业为闭卷式，不允许使用任何资料和计算器。

练习一（35分）、

1.1）（3分）假设 $-\infty \le a < b \le +\infty, p(x)$ 是定义在开区间$]a,b[$上的连续函数，求下列微分方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y$$

的定义在$]a,b[$上的通解.

解：①对$\frac{dy}{dx} = p(x)y$, $y \equiv 0$为一个解.
②当$y \neq 0$时, 分离变量、两边积分整理得$y = c_1 e^{\int p(x)dx}$, $(c_1 \neq 0)$
综上：通解为 $y = c_1 e^{\int p(x)dx}$ (c_1为任意常数).

1.2）（7分）假设 $p(x), q(x)$ 是定义在开区间$]a,b[$上的连续函数，利用常数变易法求下列方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)$$

的定义在$]a,b[$上的通解.

解：对于$\frac{dy}{dx} = p(x)y$, 由1.1)知解为$y = c_1 e^{\int p(x)dx}$.
由常数变易法：令$y = c_1(x)e^{\int p(x)dx}$, 则

$$\begin{aligned} c_1'(x)e^{\int p(x)dx} + c_1(x)\cdot p(x)e^{\int p(x)dx} = \frac{dy}{dx} &= p(x)y + q(x) \\ &= c_1(x)e^{\int p(x)dx}\cdot p(x) + q(x), \end{aligned}$$

因此$c_1'(x)e^{\int p(x)dx} = q(x)$, 即$c_1'(x) = e^{-\int p(x)dx}q(x)$, 积分得

$$c_1(x) = \int e^{-p(x)dx}q(x)dx + c,$$

因此 $y = c_1(x)e^{\int p(x)dx} = (\int e^{-\int p(x)dx}q(x)dx + c)\cdot e^{\int p(x)dx}$, 其中c为任意常数.

1.3）（4分）假设$a < x_0 < b$， 求下列 Cauchy 问题的解：

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x), \quad y(x_0) = 1.$$

解： 由1.2)可知, $\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)$的通解为

$$y = (\int e^{-\int p(x)dx}q(x)dx + c)e^{\int p(x)dx}, \tag{1}$$

其中c为任意常数. (1)式等价于

$$y = (\int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)dt}q(s)ds + c)e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds},$$

根据$y(x_0)=1$, 因此

$$y(x_0)=(\int_{x_0}^{x_0} e^{-\int_{x_0}^{x_0} p(t)dt} q(s)ds+c)e^{\int_{x_0}^{x_0} p(s)ds}=c=1,$$

因此Cauchy问题的解为：$y=(\int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)dt} q(s)ds+1)e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}$.

1.4）（12分）利用 1.2)得到的通解公式，对下列问题(n 是常数)先求通解，再求特解：

1.4.a)定义在开区间 $]-\infty,-1[$ 上的方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x+1}y+e^x(x+1)^n,\quad y(-2)=2.$$

解：则由1.2)的通解公式知, 通解为：

$$y=e^{\int p(x)dx}(\int e^{-\int p(x)dx}q(x)dx+c),$$

令$\frac{n}{x+1}=p(x)$, $e^x(x+1)^n=q(x)$,
解为

$$y=e^{\int p(x)dx}(\int e^{-\int p(x)dx}+c)=(x+1)^n(e^x+c_1),$$

其中c_1为任意常数. 根据$y(-2)=2$, 因此, $c=(-1)^{-n}\cdot 2-\frac{1}{e^2}$. 特解为$y=(x+1)^n(e^x-\frac{1}{e^2}+(-1)^{-n}\cdot 2)$.

1.4.b)定义在 $]0,+\infty[$ 上的方程

$$\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x}y-e^x x^n=0,\quad y(1)=1.$$

解：等价为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x}y+e^x\cdot x^n,$$

令$p(x)=\frac{n}{x}, q(x)=e^x\cdot x^n$, 根据公式，因此

$$y=e^{\int p(x)dx}(\int e^{-\int p(x)dx}q(x)dx+c)=x^n(e^x+c),$$

其中c为任意常数. 当y(1)=1时, 得到$c=1-e$. 因此特解为$y=x^n(e^x+1-e)$.

1.5）（9分）对于下列问题，利用常数变易法先求通解，再求特解：

$$(1+x^2)y'+2xy=1+3x^2,\quad y(0)=1.$$

解：

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2xy}{1+x^2}=\frac{1+3x^2}{1+x^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{1+x^2}y+\frac{1+3x^2}{1+x^2},$$

先求$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{1+x^2}y$的通解, 通解为

$$y=c_1\frac{1}{x^2+1},$$

其中c_1为任意常数.

用常数变易法：令$y = c_1(x) \cdot \frac{1}{x^2+1}$,

$$c_1^{'}\frac{1}{x^2+1} + (-\frac{2x}{(x^2+1)^2}) \cdot c_1(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{1+x^2}y + \frac{1+3x^2}{1+x^2}$$
$$= -\frac{2x}{1+x^2} \cdot c_1(x) \cdot \frac{1}{x^2+1} + \frac{1+3x^2}{1+x^2},$$

得

$$c_1(x) = \int (1+3x^2)dx = x^3 + x + c.$$

因此通解为$y = c_1(x) \cdot \frac{1}{x^2+1} = (x^3+x+c) \cdot \frac{1}{x^2+1}$, （c为任意常数).
由$y(0) = 1$, 因此$y(0) = (0^3+0+c) \cdot \frac{1}{0^2+1} = c = 1$, 因此特解为

$$y = (x^3+x+1) \cdot \frac{1}{x^2+1}.$$

练习二（32分）、通过一次或几次变量变换求下列方程的隐式通解：
2.1)(9分)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy + x^3y^3}.$$

解：由题$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy+x^3y^3}$, 因此

$$\frac{dx}{dy} = xy + x^3y^3$$

有一解$x \equiv 0$. 令$x^{-2} = z$, 因此, $\frac{dz}{dy} = -2yz - 2y^3$. 计算得$z = c_1(x)e^{-y^2} = 1 - (y^2e^{y^2} + c)e^{-y^2} = -y^2 + 1 - ce^{-y^2}$, 其中$c$为任意常数. 因此通解为$x^{-2} = -y^2 + 1 - ce^{-y^2}$, 其中$c$为任意常数.

2.2)(9分)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y+3}{x+3y+2}.$$

解： 求解方程组

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ x + 3y + 2 = 0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = -\frac{11}{7}, \\ y = -\frac{1}{7}. \end{cases}$$

做变量变换, 令$X = x + \frac{11}{7}$, $Y = y + \frac{1}{7}$, 因此

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = \frac{2x-y+3}{x+3y+2} = \frac{2X-Y}{X+3Y} = \frac{2-\frac{Y}{X}}{1+3\frac{Y}{X}}.$$

令$u = \frac{Y}{X}$, 则$Y = uX$, $\frac{dY}{dX} = u + x\frac{du}{dx} = \frac{2-u}{1+3u}$, 因此

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2-u}{1+3u} - u = \frac{2-2u-3u^2}{1+3u} = -\frac{3u^2+2u-2}{1+3u}.$$

$3u^2+2u-2 = 0$时得到一个隐式解.
当$3u^2+2u-2 \neq 0$时,

$$3u^2+2u-2 = \pm e^{2c} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{c_1}{x^2}, \qquad c_1 \neq 0.$$

注意到$3u^2+2u-2=0$时为一个隐式解, 因此通解为$3u^2+2u-2=\frac{c_1}{x^2}$, ($c_1$为任意常数).
变量还原, 通解为 $3(y+\frac{1}{7})^2+2(y+\frac{1}{7})(x+\frac{11}{7})-2(x+\frac{11}{7})^2=c_1$ (c_1为任意常数).

2.3）（6分）证明方程

$$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=f(xy)$$

经过变换 $xy=u$ 可以化为变量分离方程.

解： 对$\frac{x}{y}\frac{dx}{dy}=f(xy)$, 令$xy=u$, 则

$$\frac{du}{dx}=y+x\frac{dy}{dx}=y+yf(u)=y(1+f(u))=\frac{u}{x}(1+f(u)),$$

即$\frac{du}{dx}=\frac{u(1+f(u))}{x}$可化为分离变量方程.

2.4）（8分）求下列方程的通解：

$$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2+x^2y^2}{2-x^2y^2}.$$

解：令$xy=u$, 则有$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2+u^2}{2-u^2}=f(u)$, 由2.3)得：

$$\frac{du}{dx}=\frac{u(1+f(u))}{x}=\frac{u(1+\frac{2+u^2}{2-u^2})}{x}=\frac{\frac{2u}{2-u^2}}{x}.$$

$u=0$为一个解, 即$xy=0$.

当$u\neq0$时，$y=\pm e^c e^{\frac{x^2y^2}{4}}=c_1e^{\frac{x^2y^2}{4}}$, ($c_1\neq0$).

综上, 通解为$y=c_1e^{\frac{x^2y^2}{4}}$, ($c_1$为任意常数).

练习三（33分）、

3.1)（15分）求下列Bernoulli方程

$$y'=y^3-\frac{y}{x}$$

的通解。

解： 对$y'=\frac{dy}{dx}=y^3-\frac{y}{x}$有一解$y\equiv0$. 当$y\neq0$时,

$$y^{-3}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x}y^{-2}+1 \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}\frac{dy^{-2}}{dx}=-\frac{1}{x}y^{-2}+1,$$

令$z=y^{-2}$, 因此$\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}z-2$.
通解为$(\frac{2}{x}+c)x^2y^2=1$, (c为任意常数).

3.2)（18分）考虑下列Ricatti方程

$$(R)\qquad\qquad y'=a(t)y^2+b(t)y+c(t)$$

这里a,b,c是定义在开区间$]a,b[$上的连续函数。

3.2.a)(8分) 假设已知方程(R)的一个解$y_0(t)$, 证明对于方程(R)的任意解y, 函数$u=y-y_0$ 是下列Bernoulli方程的解，

$$(B)\qquad\qquad u'=(2y_0(t)a(t)+b(t))u+a(t)u^2.$$

（因此如果知道方程(R)的一个解$y_0(t)$, 可以先求解上述Bernoulli方程，得到其通解u, 则$y=u+y_0$就是方程(R)的通解。）

证明：已知对方程$(R)\quad y^{'}=a(t)y^2+b(t)y+c(t)$, $y_0(t)$为其一解, y为方程(R)的任意解, 则

$$\begin{aligned} y^{'}&=a(t)y^2+b(t)y+c(t),\\ y_0^{'}(t)&=a(t)y_0^2(t)+b(t)y_0(t)+c(t), \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} (y-y_0)^{'}&=y^{'}-y_0^{'}(t)\\ &=a(t)(y^2-y_0^2(t))+b(t)(y-y_0(t))\\ &=a(t)(y-y_0(t))^2+b(t)(y-y_0(t))+2y_0(t)a(t)(y-y_0(t)), \end{aligned}$$

因此$y-y_0$即为$u^{'}=(2y_0(t)a(t)+b(t))u+a(t)u^2$的解.

3.2.b)(10分) 求解方程

$$y'=y^2-2ty+t^2-a^2+1$$

其中$a>0$是一个常数。

（**提示： 首先寻找上述方程的形如**$y_0(t)=t+\alpha$**的解。**）

解：

(2) $$y^{'}=y^2-2ty+t^2-a^2+1.$$

令$a(t)=1, b(t)=-2t, c(t)=t^2-a^2+1$, 假设方程(2)有一解$y_0(t)=t+\alpha$, 则

$$1=y_0^{'}(t)=(t+\alpha)^2-2t(t+\alpha)+t^2-a^2+1=\alpha^2-a^2+1,$$

因此$\alpha^2=a^2$. 令$\alpha_1=a$, 则$y_0(t)=t+a$为方程(2)的一个解.

现解方程

(3) $$u^{'}=(2y_0(t)a(t)+b(t))u+a(t)u^2=(2(t+a)\cdot 1+(-2t))u+1\cdot u^2=2au+u^2,$$

即$\frac{du}{dt}=2au+u^2=u(u+2a)$.

$u=\frac{c_1 2ae^{2at}}{1-c_1e^{2at}}$ (c_1为任意常数) 和 $u=-2a$ 为方程(3)的通解.

由3.2.a)的结论知$y=u+y_0$为(2)的通解, 即通解为 $y=\frac{c_1 2ae^{2at}}{1-c_1e^{2at}}+t+a$ 和 $y=t-a$.