一. 简答题（共5题，100.0分）

1. (简答题, 30.0分)

本题分数	30
得　分	

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）.

1. $(x^{2021})^{(2022)} =$ ________.

2. 当 $x \to 0$ 时，$\sqrt{1+x}-1 \sim$ ________.

3. 方程 $x^5+x-10=0$ 共有________个实根.

4. 已知 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ x-a, & x>0\end{cases}$ 是连续函数，则 a= ________.

5. 若 $f(x)$ 可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$= ________.

6. 曲线 $y=e^x$ 在 $x=0$ 处的切线方程为________

7. 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 dy= ________.

8. 函数 $y=x^2e^x$ 的单调减少的区间为 ________.

9. 曲线 $y=\frac{x^2}{x+1}$ 的斜渐近线为________.

10. 函数 $y=x+\sqrt{1-x}$ 在区间 $[-5,1]$ 上的最大值为________.

本题分数	20
得　分	

二、求下列极限（每题5分，共20分）.

1、$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2\sin x}$

3、$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+e^{\frac{2\pi}{n}}+e^{\frac{4\pi}{n}}+\cdots+e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right)$

4、$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

本题分数	30
得　分	

三、求下列积分（每题 6 分，共 30 分）

1. $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx$

2. $\int x^4 \ln x\, dx$

3. $\int \frac{x}{x^2+3x+4}dx$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x \, dx$

5. $\int_1^2 \frac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx$

03-12 10:15-12:15高等数学IV补考试卷

姓名： 学号：

题量：5 满分：100.0 考试时间：2022-03-12 10:10 至 2022-03-12 12:25

一. 简答题（共5题，100.0分）

4.（简答题，8.0分）

本题分数	8
得　分	

四、

设函数$f(x)$具有二阶连续导数，$f(0)=0$，试证明函数 $F(x)=\begin{cases} f'(0), & x=0, \\ \dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0. \end{cases}$ 连续，且具有一阶连续导数。

本题分数	12
得　分	

五、求解或证明（每题 6 分，共 12 分）.

1．已知函数$f(x)$在$x=1$处连续，且$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$,求$f'(1)$.

2．设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导。证明至少存在一点$\mu\in(0,1)$使得$f'(\mu)=2\mu[f(1)-f(0)]$.

一、1) 0

2) $\frac{1}{2}x$

3) 1

4) -1

5) $f'(x_0)$

6) $y=x+1$

7) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

8) $(-2,0)$

9) $y=x-1$

10) $\frac{5}{4}$

二/1. $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}\ln x}$

$= e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}}}$

$= e$

2 $\lim\limits_{x\to0} \frac{x-\sin x}{x^2\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}$

$= \frac{1}{6}$

3 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n}\left(1+e^{\frac{2\pi}{n}}+e^{\frac{4\pi}{n}}+\cdots+e^{\frac{2(n-1)\pi}{2n}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 e^{2\pi x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{2\pi x}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(e^{2\pi}-1\right)$$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=0$$

三/1 $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx$

令 $\sqrt[3]{x+2}=t$

$x+2=t^3$

$dx=3t^2dt$

原式 $=\int\frac{3t^2}{1+t}dt$

$=3\int\frac{t^2-1+1}{t+1}dt$

$=3\int t-1+\frac{1}{t+1}dt$

$=3\left(\frac{1}{2}t^2-t+\ln(t+1)\right)+C$

$=\frac{3}{2}(x+2)^{\frac{2}{3}}-3\sqrt[3]{x+2}+3\ln(\sqrt[3]{x+2}+1)+C$

2. $\int x^4 \ln x \, dx$

$= \frac{1}{5} \int \ln x \, dx^5$

$= \frac{1}{5} x^5 \ln x - \frac{1}{5} \int x^4 dx$

$= \frac{1}{5} x^5 \ln x - \frac{1}{25} x^5 + C$

3 $\int \frac{x}{x^2+3x+4} dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+4} dx^2$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2(x+\frac{3}{2})-3}{x^2+3x+4} dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+4} d\,x^2+3x \;-\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+4} dx$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+3x+4) - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+4} dx$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+3x+4) - \frac{3}{2}\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\arctan\left[\frac{2\sqrt{7}}{7}(x+\frac{3}{2})\right]\right) + C$

4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x \, dx$

$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, d\cos x$

$= -\frac{1}{4}\cos^4 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{1}{4} \times (0-1)$

$= \frac{1}{4}$

5 $\int_1^2 \frac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$

$= -\int_1^2 \frac{-2x-3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$

$= -\int_1^2 \frac{2-2x-5}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$

$= -\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}d(2x-x^2) + 5\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$

$= -2\sqrt{1+2x-x^2}\Big|_1^2 + 5\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$

$= -2\times(1-\sqrt{2}) + 5\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}}d\frac{x-1}{\sqrt{2}}$

$= 2(\sqrt{2}-1) + 5\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}\Big|_1^2$

$= 2(\sqrt{2}-1) + 5\times\left(\frac{\pi}{4}-0\right)$

$= 2\sqrt{2}-2+\frac{5\pi}{4}$

四

解 (1) $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=g(0)$，故 $g(x)$ 在 $x=0$ 点连续

(2) $g(x)$ 在 $x=0$ 点的可导性

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0).$$

(3) $g'(x)$ 的连续性

由(2)可得

$$g'(x)=\begin{cases}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}f''(0), & x=0\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$，　　从而 $\lim_{x\to 0} g'(x)=g'(0)$，故而 $g'(x)$ 在点 $x=0$ 连续，从而处处连续.

五/1

$$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=0$$

$$\Rightarrow f(1)=0$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

五/2

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}$$

设 $g(x)=x^2$，则 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足柯西中值定理的条件，

所以至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.