南 京 航 空 航 天 大 学

二○一八 ～ 二○一九 学年　第 II 学期 **《工科数学分析 (2)》考试试题**

考试日期：　2019 年 6 月 30 日　　　试卷类型：A　　　试卷代号：

班号　　　　　　学号　　　　　　姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、填空题：（每题 4 分，共 24 分）

本题分数	24
得　分	

1. 若表达式 $\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，则 $a=$____________.

2. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \dfrac{\tan x}{x}\mathrm{d}x=$____________________.

3. 曲面 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成区域的外侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y-z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-(y+z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=$______________________.

4. 设 Γ 为螺旋线 $x=\cos t, y=\sin t, z=t$ 从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一段，则 $\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=$______________________.

5. 函数 $u=xyz$ 在点 $(3,4,5)$ 处沿锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的法线方向（与 z 轴正方向夹角为锐角）的方向导数为__________________________.

6. 已知 $y_1=x, y_2=x+\mathrm{e}^x, y_1=1+x+\mathrm{e}^x$ 是微分方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=d(x)$ 的三个解，则方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ 满足 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的解 $y(x)=$______________.

二、单项选择题：（每题 4 分，共 12 分）

本题分数	12
得　分	

1．在 $\mathbb{R}^2$ 上满足下列哪条，积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关　（　　）

(A) $P(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+4y^2}, Q(x,y)=\dfrac{x+4y}{x^2+4y^2}$；　(B) $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$；

(C) $P(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+4y^2}, Q(x,y)=\dfrac{x-4y}{x^2+4y^2}$；　(D) 以上都不可以.

2. 设 σ_{xy} 为曲面 $\Sigma: z=z(x,y)$ 在 xy 平面的投影域，则下述正确的是：（　　）

(A) $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y)\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y=\iint\limits_{\sigma_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　(B) $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y)\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y=-\iint\limits_{\sigma_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(C) $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\sigma_{xy}} f(x,y)\sqrt{1+z_x^2++z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；(D) $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\sigma_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3．已知函数 $f(x)$ 可导，$f(1)=1$，$F(x)=\int_0^2 |x-y| f(y)\mathrm{d}y$，则 $F''(1)=$（　　）

(A) 0；　　(B) 1；　　(C) 2　；　　(D) 3 .

三、计算题（每题 6 分，共 24 分）

本题分数	24
得　分	

1. L 为曲线 $x^2+y^2=2(x+y)$，求 $\oint_L (2x^2+3y^2)\mathrm{d}s$.

2. 求线性微分方程组$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{dt} = -2x_1 - x_2 \end{cases}$满足条件$x_1(0) = x_2(0) = 1$的特解.

3．设$\vec{r} = (x, y, z), r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，求函数$f(r)$的表达式，满足$\mathrm{div}\left(f(r)\vec{r}\right) = 0$.

4．求三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 围成.

本题分数	10
得　分	

四、已知 Σ 是由直线段 $x-1=y=z$ $(0\le z\le 2)$ 绕 z 旋转所成曲面的外侧，计算曲面积分

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(2x-2x^3)\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z+(zy^2+6x^2y+z^2x)\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}x-z^2y\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y\ .$$

本题分数	10
得　　分	

五、设函数 $u(x,y)$ 在整个平面上具有二阶连续偏导数，且 $u(0,1)=1,\ u(\pi,0)=0$，L 是从点 $A(0,1)$ 沿曲线 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 到点 $(\pi,0)$ 的曲线段，计算曲线积分 $I=\int_L\left[u_x(x,y)+xy\right]\mathrm{d}x+u_y(x,y)\mathrm{d}y$.

本题分数	10
得　　分	

六、设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0, f'(0)=1$，曲线积分 $\int_L\left[xy(x+y)-f(x)y\right]\mathrm{d}x+\left[f'(x)+x^2y\right]\mathrm{d}y$ 与路径无关.

（1）求函数 $f(x)$；（2）求积分 $\int_{(0,0)}^{(a,b)}\left[xy(x+y)-f(x)y\right]\mathrm{d}x+\left[f'(x)+x^2y\right]\mathrm{d}y$.

本题分数	10
得　　分	

七、设Γ为弧长为s的有向光滑曲线段，

（1）将$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$化为对弧长的曲线积分；

（2）若$M=\max\limits_{\Gamma}\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$，证明不等式

$$\left|\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|\le Ms.$$

一、 填空题

1. $\underline{2}$；2. $\underline{\ln\cos 1}$； 3. $\underline{-\frac{1}{6}}$； 4. $\underline{-\pi}$； 5. $\underline{-6\sqrt{2}}$； 6. $\underline{e^x-1}$.

二、 选择题

1.（A） 2. (C) 3.（C）

三、

1. 解：令 $x=1+\sqrt{2}\cos t, y=1+\sqrt{2}\sin t$，……………………………………………… (2 分)

则原式 $=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[2(1+\sqrt{2}\cos t)^2+3(1+\sqrt{2}\sin t)^2\right]\mathrm{d}t=20\sqrt{2}\pi$ ……………………… (6 分)

2. 解：$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$，$\det\left(A-\lambda E\right)=\lambda^2-2\lambda+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=1$ ……………(2 分)

基解矩阵为 $\boldsymbol{X}(t)=\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\right)\mathrm{e}^t=\begin{pmatrix}2t+1 & 2t\\ -2t+1 & -2t\end{pmatrix}\mathrm{e}^t$ ………………… (4 分)

因此满足初始条件的特解为 $x_1(t)=(4t+1)\mathrm{e}^t, x_2(t)=(-4t+1)\mathrm{e}^t$ ……………………… (6 分)

3 解：由于 $\mathrm{div}\left(f(r)\vec{r}\right)=3f(r)+rf'(r)=0$ ……………………………………………… (3 分)

故 $f(r)=Cr^{-3}=\frac{C}{r^3}$ …………………………………………………………………… (6 分)

4 解：$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ………………………………………………………… (2 分)

$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{8}$ …………………………………… (6 分)

四、解： $x-1=y=z\ (0\le z\le 2)$ 绕 z 旋转所成曲面为 $\Sigma: x^2+y^2=2z^2+2z+1$，… (3 分)

令 $\Sigma_1: z=0$（下侧），$\Sigma_2: z=1$（上侧），由 Gauss 公式，$\oiint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\oiint\limits_{\Sigma_1}-\oiint\limits_{\Sigma_2}$

其中 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=2\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=2\pi\int_0^1(2z^2+2z+1)\mathrm{d}z=\frac{16\pi}{3}$ …………………………… (8 分)

同时 $\oiint\limits_{\Sigma_1} =0, \oiint\limits_{\Sigma_2} = \iint\limits_{x^2+y^2\le 5} -y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，原积分$=\dfrac{16\pi}{3}$ .... (10 分)

五、解：$I=\int_L u_x(x,y)\mathrm{d}x+u_y(x,y)\mathrm{d}y+\int_L xy\mathrm{d}x=I_1+I_2$，其中$I_1$与路径无关

$I_1=\int_0^{\pi}u_x(x,1)\mathrm{d}x+\int_1^0 u_y(\pi,y)\mathrm{d}y=u(\pi,1)-u(0,1)+u(\pi,0)-u(\pi,1)=-1$ ...... (5 分)

$I_2=\int_L xy\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x\cdot\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=2$ ....(8 分)

于是 $I=I_1+I_2=1$ .... (10 分)

六、解：（1） $f(x)$ 满足微分方程 $f''(x)+f(x)=x^2$， $f(0)=0, f'(0)=1$ .... (2 分)

可得 $f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$； .... (5 分)

（2） $\int_{(0,0)}^{(a,b)}\left[xy(x+y)-f(x)y\right]\mathrm{d}x+\left[f'(x)+x^2y\right]\mathrm{d}y$

$=\int_{(0,0)}^{(a,b)}\mathrm{d}\left[-2y\sin x+y\cos x+2xy+\dfrac{1}{2}x^2y^2\right]$ .... (10 分)

$=-2b\sin a+b\cos a+2ab+\dfrac{1}{2}a^2b^2$

七、（1）设有向曲线Γ的单位切向量为$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$ .... (4 分)

（2）由于 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

则 $\left|P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right|\le\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cdot\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}\le M$ ... (6 分)

于是 $\left|\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|\le\int_\Gamma\left|P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right|\mathrm{d}s\le Ms$ .... (10 分)

南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一八 ～ 二〇一九 学年 第 II 学期 **《工科数学分析 (2)》考试试题**

考试日期： 2019 年 6 月 30 日 试卷类型：B 试卷代号：

班号 学号 姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、填空题：（每题 4 分，共 24 分）

本题分数	24 分
得 分	

1. 设 f 为可微函数，已知 $F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=$____________________，

2. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(xz,y+z)=0$ 所确定的隐函数，

 f 可微，则 $\mathrm{d}z=$__________________________________.

3. 设向量场 $\vec{A}=\{x^2y, y^2z, z^2x\}$，则 $\mathrm{div}\vec{A}=$____________________________,

 $\mathrm{rot}\vec{A}=$____.

4. 设 L 是从 $O(0,0)$ 到 $A(6,0)$ 的上半圆周，

 则 $\int_L(\mathrm{e}^x\sin y+8y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-7x)\mathrm{d}y=$________________________.

5. 交换积分次序

$$\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-x}^{\frac{x+3}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{2x}^{\frac{x+3}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

6. 写出以函数 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ 为通解的常系数齐次线性微分方程：

____.

二、单项选择题：（每题 4 分，共 12 分）

本题分数	12 分
得　　分	

1．二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，

则在 $(0,0)$ 点，下述正确的是：（　　）

(A) 极限不存在，因此不连续；　(B) 连续但是不可微；

(C) 可微，偏导函数不连续；　(D) 可微且偏导函数连续.

2. 微分方程 $y''-\lambda^2 y=\mathrm{e}^{\lambda x}+\mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda>0)$ 的特解形式为（　　）

(A) $a(\mathrm{e}^{\lambda x}+\mathrm{e}^{-\lambda x})$；　(B) $ax(\mathrm{e}^{\lambda x}+\mathrm{e}^{-\lambda x})$；

(C) $x(a\mathrm{e}^{\lambda x}+b\mathrm{e}^{-\lambda x})$；　(D) $x^2(a\mathrm{e}^{\lambda x}+b\mathrm{e}^{-\lambda x})$.

3．$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y$ 化为极坐标形式为（　　）

(A) $\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\sec\varphi} f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho$；　(B) $\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\sec\varphi} f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho$；

(C) $\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi} f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho$；　(D) $\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi} f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho$.

三、计算题（每题 7 分，共 28 分）

本题分数	28 分
得　　分	

1. 利用曲线积分计算星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 所围图形的面积.

2. L 为曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=1 \end{cases}$ ，从 z 轴的正方向看 L 沿顺时针方向，求

$$\oint_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z \ .$$

3．求微分方程 $y''-2y'=\mathrm{e}^x(x^2+x-3)$ ，$y|_{x=0}=2$ ，$y'|_{x=0}=2$ 满足初始条件的特解.

4．求线性微分方程组$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{dt} = & -x_1 + 3x_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{dt} = & 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$的通解.

本题分数	8 分
得　　分	

四、设$z = f(x,y)$具有连续偏导数，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

（1）求$\dfrac{\partial z}{\partial r}$；（2）若$f(x,y)$在$x^2 + y^2 = 1$上恒为 0，求

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{1}{2\pi} \iint\limits_{\varepsilon^2 \le x^2 + y^2 \le 1} \dfrac{xf_x + yf_y}{x^2 + y^2} \mathrm{d}\sigma$.

本题分数	8 分
得　　分	

五、计算$\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 为一条无重点，分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，L 的方向为逆时针方向。

本题分数	10 分
得　　分	

六、设曲面Σ是由空间曲线$\Gamma: x=t, y=2t, z=t^2 (0\le t\le 1)$绕 z 轴旋转一周而成的旋转曲面，求曲面Σ的方程；若曲面Σ的法向量与 z 轴正向成钝角，已知连续函数 $f(x,y,z)$ 满足：

$$f(x,y,z)=(x+y+z)^2+\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y，$$

求 $f(x,y,z)$ 的表达式.

本题分数	10
得　　分	

七、（1）求函数 $f(x,y,z)=x+2y-2z+5$ 在 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$ 上的最大值和最小值；

（2）证明不等式 $\frac{3}{2}\pi<\iiint\limits_{\Omega}\sqrt[3]{x+2y-2z+5}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z<3\pi$.

一、 填空题

1. $xf(x^2)$；2. $\mathrm{d}z=-\dfrac{1}{xf_1+f_2}(zf_1\mathrm{d}x+f_2\mathrm{d}y)$； 3. $2xy+2yz+2zx;\ \{-y^2,-z^2,-x^2\}$；

4. $\dfrac{135}{2}\pi$；   5. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{\frac{y}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{2y-3}^{\frac{y}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x$；6. $y'''-y''+4y'-4y=0$.

二、 选择题

1.（C） 2．(C) 3.（B）

三、

1. 解：$S=\dfrac{1}{2}\oint x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=6a^2\int_0^{\pi/2}[\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t]\mathrm{d}t=\dfrac{3}{8}\pi a^2$ ……分)

2. 解：取Σ：$z=1(x^2+y^2\le 1)$下侧，$\cos\alpha=\cos\beta=0,\cos\gamma=-1,$

$$原式=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}dS=2\iint_\Sigma dS=2\pi$$ ……………………………)

3 解：对应齐次方程特征根为：$r_1=0$，$r_2=2$，

故对应齐次方程的通解为：$y=C_1+C_2e^{2x}$ …… …… …… …… …… …… …… …… …分)

自由项$f(x)=e^x(x^2+x-3)$，$\lambda=1$不是特征根，

所以方程特解为：$y^*=e^x(Ax^2+Bx+C)$

代入方程解得$A=-1$，$B=-1$，$C=1$，$y^*=-e^x(x^2+x-1)$，

故方程的通解为：$y=C_1+C_2e^{2x}-e^x(x^2+x-1)$ …… …… ………………… ….)

由初始条件得：$C_1+C_2+1=2$，$C_2=1$得$C_1=0$，$C_2=1$.

故方程满足初始条件的特解为：$y=e^{2x}-e^x(x^2+x-1)$. ………………… …. …)

4 解：$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$，$\det(A-\lambda E)=(-1-\lambda)(-1-\lambda)-6=\lambda^2+3\lambda-4=0$ …)

特征根为$\lambda_1=-4,\ \lambda_2=1$，…分)

特征向量为$r_{-4}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}, r_1=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$，………………)

解得通解为 $\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-4t} & 3\mathrm{e}^{t}\\ -\mathrm{e}^{-4t} & 2\mathrm{e}^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=c_1\mathrm{e}^{-4t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+c_2\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$ ……………)

四、解：（1）$\dfrac{\partial z}{\partial r}=\cos\theta f_x+\sin\theta f_y$；…………)

（2）$\displaystyle\iint\limits_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^1\frac{r(\cos\theta f_x+\sin\theta f_y)}{r^2}r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^1\frac{\partial z}{\partial r}\mathrm{d}r$

$\displaystyle=\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\Big|_\varepsilon^1\mathrm{d}\theta=-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ ……………)

$=-2\pi f(\varepsilon\cos\theta_0,\varepsilon\sin\theta_0)\qquad\left(\theta_0\in(0,2\pi)\right)$

于是 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=-\lim_{\varepsilon\to0+}f(\varepsilon\cos\theta_0,\varepsilon\sin\theta_0)=-f(0,0)$ ……)

五、解：记 L 围成的闭区域为 D, 令 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2},Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, 则当 $x^2+y^2\ne0$ 时，有

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. (1) 当 $(0,0)\notin D$ 时，则 $\displaystyle\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$. ……………

(2) 当 $(0,0)\in D$ 时，作位于 D 内圆周 $l:x^2+y^2=r^2$，记 D_1 由 L 和 l 围成，则有

$\displaystyle\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\oint_l\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$. 即

$\displaystyle\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_l\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}d\theta=2\pi$. ....)

六、解：Γ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转曲面为 $\Sigma:x^2+y^2=5z(0\le z\le1)$ ……)

首先 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le5}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{25}{4}\pi$

令 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=A$，可得 $f(x,y,z)=(x+y+z)^2+A-\dfrac{25}{4}\pi$ ……

记 $S:z=1,x^2+y^2\le5$ 取上侧，Ω 为 Σ 与 S 围成的区域，根据 Gauss 公式

$$A=\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\left((x+y+z)^2+A-\frac{25}{4}\pi\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{\Sigma+S}\left((x+y+z)^2+A-\frac{25}{4}\pi\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{10}{3}\pi$$

于是 $f(x,y,z)=(x+y+z)^2-\dfrac{35}{12}\pi$ ………………………………)

七、（1）首先在 Ω 内部 $x^2+y^2+z^2<1$，$f(x,y,z)=x+2y-2z+5$ 没有驻点，在边界 $x^2+y^2+z^2=1$ 上，应用 Lagrange 乘数法，令 $F=x+2y-2z+5+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$，由 $\begin{cases} F_x=1+2\lambda x=0 & F_z=-2+2\lambda z=0 \\ F_y=2+2\lambda y=0 & F_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$ 可得条件极值点 $P_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right),P_2\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，$f(P_1)=8,f(P_2)=2$ 分别为最大值和最小值. ……………………………)

（2）证明：由于在 Ω 上，$f(x,y,z)=x+2y-2z+5$ 的最大值和最小值分别为 $8,2$，因此

$$\sqrt[3]{2}\,\frac{4}{3}\pi \le \iiint_\Omega \sqrt[3]{x+2y-2z+5}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \le \sqrt[3]{8}\,\frac{4}{3}\pi$$

由于 $\sqrt[3]{2}\,\frac{4}{3}\pi>\frac{3}{2}\pi,\sqrt[3]{8}\,\frac{4}{3}\pi<3\pi$，因此 $\frac{3}{2}\pi<\iiint_\Omega \sqrt[3]{x+2y-2z+5}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z<3\pi$ ……分)