南京航空航天大学

二〇二〇～二〇二一 学年 第 1 学期 《 高等数学二期中 》考试试题

考试日期：2020 年 11 月 22 日　　试卷类型：A　　试卷代号：080010

班号　　学号　　姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题分数	24
得　分	

夹逼准则：

一. 填空

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+4^n+6^n+8^n+10^n}=$ ______。

2. 函数可微是函数连续的______条件。

3. 若函数 $f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)\cdots(x+10)$，则 $f'(1)=$ ______

4. 若函数 $f(x)=\ln(\tan x)$，则 $df(x)=$ ______。

5. 在 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$ 是 x 的______阶无穷小。

6. 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$ ____。

7. 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为______。

8. $f(x)=\cos 2x$ 的 n 阶皮亚诺型余项的麦克劳林展开式为______。

$\cos x=$

本题分数	9
得　分	

二. 选择题

1. 若 $x=\dfrac{1}{n}$ 是函数 $f(x)=x\left[\dfrac{1}{x}\right]$ 的间断点，它的类型是（ ）

A. 可去间断点　B. 跳跃间断点　C. 无穷间断点　D. 振荡间断点

2. 设 $f(x)$ 连续，且 $f'(x_0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得（ ）

A. 对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0)$，有 $f(x)>f(x_0)$

B. 对任意 $x\in(x_0,x_0+\delta)$，有 $f(x)>f(x_0)$

C. $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内单调减少

D. $f(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内单调增加

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有（ ）

A. 一个极小值点和两个极大值点

B. 两个极小值点和一个极大值点

C. 两个极小值点和两个极大值点

D. 三个极小值点和一个极大值点

本题分数	8
得　分	

三、求函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$ 的间断点，并指出其具体类型。

（1^∞ 型）

本题分数	8
得　分	

四、$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x>0\\ x^2g(x) & x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处极限是否存在？是否连续？是否可导？

本题分数	25
得　分	

五、计算题

1.设 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

2.设 $y=\sin^4\left[\cos^4\left(\tan\dfrac{1}{x}\right)\right]$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\ln\left(1+x^2\right)^{\arctan x}}$

5.参数方程求导 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$

本题分数	8
得　分	

六、求出函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln\left(1+e^x\right)$ 的渐近线方程。

$x\neq 0$

本题分数	8
得　分	

七、求函数 $f(x)=|x|e^{x}$ 在 $[-2,1]$ 上的极值和最值。

本题分数	10
得　分	

八、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，证明：

（1）至少存在一点 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f(\eta)=\eta$；

(2)对任意实数 λ，至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$。

南京航空航天大学

二〇二〇～二〇二一 学年 第 1 学期 《 高等数学二期中 》考试试题

考试日期：2020 年 11 月 22 日　　试卷类型：A　　试卷代号：080010

班号　　　学号　　　姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题分数	24
得　分	

夹逼准则：$10=\sqrt[n]{10^n}<\sqrt[n]{2^n+4^n+6^n+8^n+10^n}<\sqrt[n]{5\cdot 10^n}=10\sqrt[n]{5}\to 10$

一. 填空

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+4^n+6^n+8^n+10^n}=$ ___10___。

2. 函数可微是函数连续的___充要___条件。

3.若函数 $f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)\cdots(x+10)$，则 $f'(1)=$ ___$\frac{11!}{10}$ 或 $11\cdot 9!$___。

$f'(x)=(x+2)(x-3)(x+4)(x-5)(x+6)(x-7)(x+8)(x-9)(x+10)+\underbrace{\cdots}_{x=1\text{时均为零}}$

4.若函数 $f(x)=\ln(\tan x)$，则 $df(x)=$ ___$\sec^2x\cdot\cot x\,dx$___。

$f'(x)=\frac{(\tan x)'}{\tan x}=\frac{\sec^2x}{\tan x}$

5. 在 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$ 是 x 的___3___阶无穷小。

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^k}\ (k>0)\ \left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^k}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$ $\searrow\frac{1}{2}$

6. 设函数 $y=\frac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$ ____。

$=\frac{1}{2}\frac{1}{x+\frac{3}{2}}$

7. 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点(0,1)处的切线方程为___$y-2x-1=0$___。

$\cos(xy)\cdot(y+xy')+\frac{y'-1}{y-x}=1$　当 $x=0,y=1$ 时 $y'=2$

8. $f(x)=\cos 2x$ 的 n 阶皮亚诺型余项的麦克劳林展开式为________。

$\cos x=$

本题分数	9
得　分	

二. 选择题

1. 若 $x=\frac{1}{n}$ 是函数 $f(x)=x\left[\frac{1}{x}\right]$ 的间断点，它的类型是（A）

A. 可去间断点　B. 跳跃间断点　C. 无穷间断点　D. 振荡间断点

x	$(-\infty,x_0)$	(x_0,x_1)	$(x_1,0)$	$(0,x_2)$	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗	↘	↗

→不能说明单调性

2.设 $f(x)$ 连续，且 $f'(x_0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得（B）

A. 对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0)$，有 $f(x)>f(x_0)$

B. 对任意 $x\in(x_0,x_0+\delta)$，有 $f(x)>f(x_0)$

C. $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内单调减少

D. $f(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内单调增加

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$

$\Downarrow\ \forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$

$\begin{cases}\text{当 } x>x_0 \text{ 时}, f(x)>f(x_0)\\ \text{当 } x<x_0 \text{ 时}, f(x)<f(x_0)\end{cases}$

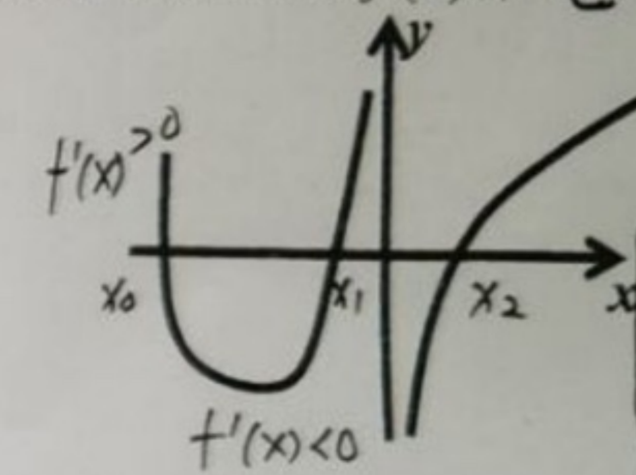
3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有（C）

A. 一个极小值点和两个极大值点

B. 两个极小值点和一个极大值点

C. 两个极小值点和两个极大值点

D. 三个极小值点和一个极大值点



当

x	$(-\infty,x_1)$	(x_0,x_1)	$(x_1,0)$	$(0,x$
$f'(x)$	+	−	+	−
$f(x)$	↗	↘	↑	↘

可能的极值点 $\begin{cases}\text{不可导点}: x=0\\ \text{驻点}: x_0, x_1, x_2\end{cases}$

本题分数	8
得　分	

三、求函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$ 的间断点，并指出其具体类型。

$(1^\infty$ 型$)$

$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(1+\left(\frac{\sin t}{\sin x}-1\right)\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$

$=\lim\limits_{t\to x}\left(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}}$

$=e^{\frac{x}{\sin x}}\quad(x\neq 0)$

$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点，

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}=e^1=e$

所以 $x=0$ 是第一类可去型间断点。

本题分数	8
得　分	

四、$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x>0\\ x^2g(x) & x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处极限是否存在？是否连续？是否可导？

(1) 判断~~极~~续性：求 $f(0^+)$、$f(0)$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}\xlongequal[\text{替换}]{\text{无穷小}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}=0$

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}x^2g(x)\xlongequal[g(x)\text{有界}]{\lim x^2=0}0$

$\therefore\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处极限存在。

(2) 判断连续性：

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$，$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

(3) 判断 $f'(0)$ 存在性：用定义求 $f'_+(0)$、$f'_-(0)$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}\cdot x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}\cdot x}=0$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}xg(x)=0$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

本题分数	25
得　分	

五、计算题

1.设 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

法一：取对数法：

$\ln y=x[\ln x-\ln(1+x)]$

两边求导

$\dfrac{y'}{y}=\ln\dfrac{x}{1+x}+x\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}\right]=\ln\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}$

$y'=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x\left[\ln\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}\right]$

2.设 $y=\sin^4\left[\cos^4\left(\tan\dfrac{1}{x}\right)\right]$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

$y'=4\sin^3[\cos^4(\tan\frac{1}{x})]\cdot\cos[\cos^4(\tan\frac{1}{x})]\cdot[\cos^4(\tan\frac{1}{x})]'$

$=4\sin^3[\cos^4(\tan\frac{1}{x})]\cdot\cos[\cos^4(\tan\frac{1}{x})]\cdot4\cos^3(\tan\frac{1}{x})\cdot-\sin(\tan\frac{1}{x})\cdot\underbrace{(\tan\tfrac{1}{x})'}_{=\sec^2\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})}$

$=4\sin^3[\cos^4(\tan\frac{1}{x})]\cdot\cos[\cos^4(\tan\frac{1}{x})]\cdot4\cos^3(\tan\frac{1}{x})\cdot\sin(\tan\frac{1}{x})\cdot\sec^2\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x(x+x^2-1)+1}{x(e^x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x(x+x^2-1)+1}{x^2}$

$\overset{\text{洛}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x(x^2+3x)}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x(x+3)}{2}=\dfrac{3}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\ln(1+x^2)^{\arctan x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\arctan x\cdot\ln(1+x^2)}$

$\overset{\text{替}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

$\overset{\text{洛}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$

5.参数方程求导 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$

$\dfrac{dx}{dt}=\cos t$，$\dfrac{dy}{dt}=t\cos t$.

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t\cos t}{\cos t}=t$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{\cos t}=\sec t\Rightarrow\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sec\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$

本题分数	8
得　分	

六、求出函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线方程。

$x\neq0$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right)=\infty$

$\therefore x=0$ 是 $y=f(x)$ 的一条铅直渐近线.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$　$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

$\therefore y=0$ 是 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}\right)=0+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}\overset{\text{洛}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-\cancel{\ln e^x}]=\cancel{+\infty}$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{e^x})=0$　$\therefore$ ~~没~~有斜 $y=x$

本题分数	8
得　分	

七、求函数 $f(x)=|x|e^x$ 在 $[-2,1]$ 上的极值和最值。

$$f(x)=\begin{cases} xe^x & 1\geq x\geq 0 \\ -xe^x & -2\leq x<0 \end{cases}$$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} xe^x = 0$

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} -xe^x = 0$

$\Rightarrow f(0^+)=f(0^-)=f(0)=0$

$\therefore f(x)$ 在 $[-2,1]$ 上连续.

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xe^x}{x}=1$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-xe^x}{x}=-1$

$\Rightarrow f'(0)$ 不存在，$x=0$ 为不可导点.

$$f'(x)=\begin{cases} (1+x)e^x & 1\geq x>0 \\ \text{不存在} & x=0 \\ -(1+x)e^x & -2\leq x<0 \end{cases}$$

$x=-1$ 是驻点，

x	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	不存在	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

极大值 $f(-1)=\frac{1}{e}$

极小值 $f(0)=0$

$f(-2)=2\cdot\frac{1}{e^2}$ $\quad f(1)=e$

$f_{max}=e$ $\quad f_{min}=0$

本题分数	10
得　分	

八、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，证明：

（1）至少存在一点 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f(\eta)=\eta$；

(2)对任意实数 λ，至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$。

证明：(1) 令 $F(x)=f(x)-x$，在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续

$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$，$F(1)=f(1)-1=0-1=-1<0$

由零点定理可知，$\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$，s.t.

$F(\eta)=0$

即 $f(\eta)=\eta$.

(2) 令 $G(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$，在 $[0,\eta]$ 上连续，在 $(0,\eta)$ 上可导

$G(0)=0=G(\eta)=0$.

由 Rolle 定理可知，$\exists\xi\in(0,\eta)$，s.t.

$G'(\xi)=0$

$-\lambda e^{-\lambda\xi}[f(\xi)-\xi]+e^{-\lambda\xi}[f'(\xi)-1]=0$

$-\lambda[f(\xi)-\xi]+f'(\xi)-1=0$

即 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.