

一、填空题

1、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx^2}{2x^2 + x} = \underline{\hspace{2cm}}$

2、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^3 + xy + e^y = 1$ 所确定，则 $y'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

3、设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int x^3 f(\ln x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

4、 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x^3}{1 + \cos^2 x} + \sin^2 x \cos x \right) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

5、反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

6、设 $f(x)$ 为：连续函数，且满足 $f(x) = x + x^2 \int_0^1 f(x) dx$ ，则 $\int_0^1 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

7、设直线 $y = x$ 和抛物线 $y = x^2$ 所围成的平面图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$

8、由直线 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 x 从 3 到 8 的一段弧的长度为 $\underline{\hspace{2cm}}$

9、若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -3$ 处收敛，则此级数在 $x = 1$ 处 $\underline{\hspace{2cm}}$

二、计算题

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (t - \arctan t) dt}{x^2 \ln(1+x^2)}$

2、 $\int \frac{2x-5}{x^2-8x+17} dx$



$$3、\int x \arctan x dx$$

$$4、\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

三、判断下列级数的敛散性，其中正项级数请指明收敛还是发散；交错级数请指明绝对收敛、条件收敛还是发散

$$1、\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

$$2、\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

四、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$ 的收敛域与和函数



五、将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ 展开成 $(x+1)$ 的幂级数，并给出 x 的范围

六、设由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积为 V_1 ，由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转而成的旋转体体积为 V_2 ，其中 $0 < a < 2$ ，则当 a 为何值时， $V_1 + V_2$ 取到最大值？并求出最大值。

七、设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ ，求函数 $\phi(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 在 $-1 \leq x \leq 1$ 上的表达式

八、设函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上具有连续导数， $f(a) = 0, M = \max_{x \in [0, a]} |f'(x)|$ ，证明： $|\int_0^a f(x) dx| \leq \frac{1}{2} Ma^2$

