2024 年南京航空航天大学航空学院《工科数学分析 A(2)》期末考试模拟题

出题人：伍霖

一、填空题(每题 4 分，共 32 分)

1. 已知区域$D=\{(x,y)\,|\,(x-k)^2+(y-k)^2\leqslant R^2\}$，求积分$\iint_D(ax+by)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$________.

2. 已知 L 为半圆$0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}$的边界，求积分$\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s=$________.

3. 设 L 为曲线$\begin{cases}z=x^2+y^2\\x+y+z=1\end{cases}$，从 z 轴的正方向看 L 沿逆时针方向，求$\oint_L xy\,\mathrm{d}x+yz\,\mathrm{d}y+zx\,\mathrm{d}z=$________.

4. 求直线 L：$\begin{cases}2x-y+z-1=0\\x+y-z+1=0\end{cases}$在平面$\Pi$：$x+2y-z=0$上的投影直线方程________.

5. 已知连续函数$f(x)$满足条件$f(x)=\int_0^{3x}f\left(\frac{t}{3}\right)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{2x}$，求$f(x)=$________.

6. 求微分方程$y''-2y'=\mathrm{e}^{2x}$满足条件$y(0)=1$，$y'(0)=1$的解________.

7. 设$y=y(x)$，$z=z(x)$由方程$z=xf(x+y)$和$F(x,y,z)=0$所确定的函数，其中f和F分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=$________.

8. 计算$\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$________，其中区域$\Omega$是由$\begin{cases}x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\\x^2+y^2+(z-R)^2\leqslant R^2\end{cases}$所确定.

二、计算题(第 9 大题 8 分，其余大题每道 10 分，共 68 分)

9. 求函数$f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$的极值.

10. 求常系数齐次微分方程组$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2x + 2y + 2z \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -10x + 6y + 8z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 3x - y - 2z \end{cases}$的通解.

11. 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R$，$z=-R\,(R>0)$ 所围成立体表面的外侧.

12. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{u\,\mathrm{d}v - v\,\mathrm{d}u}{u^2 + v^2}$，其中 $u = ax + by$，$v = cx + dy\,(ad - bc \neq 0)$，$L$ 为 xOy 平面上环绕坐标原点的简单闭曲线，取逆时针方向为正.

13. 讨论多元函数$z=f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}，x^2+y^2\neq 0\\0，x^2+y^2=0\end{cases}$在坐标原点处：

(1)是否连续；(2)偏导数是否存在；(3)是否可微；(4)偏导数是否连续.

14. 设函数 $y(x)$ 满足方程

$$y(x)=x^3-x\int_1^x \frac{y(t)}{t^2}\mathrm{d}t+y'(x),\ x>0$$

并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x^3}$ 存在，求函数 $y(x)$.

15. 设$u(x,y)$在$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$上具有二阶连续偏导数，且有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2+y^2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\cdot\mathrm{e}^x$$

证明：$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}\left(x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(\tan t-\arctan t)^2}=\dfrac{3\pi}{2}$.