《高等数学I（1）》

2023-2024 学年第一学期期末考试试卷

一、填空题

1、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{3x+2}\sin\dfrac{2}{x}=$________

2、$y=\cos 2x$，则$y^{(n)}=$__________

3、函数$y=x+2\cos x$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值为____________

4、设函数$f(x)$满足$\int xf(x)dx=x^2e^x+C$，$\int\dfrac{e^x}{f(x)}dx=$__________

5、设函数$f(x)$满足$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$，则$\int_0^1 f(x)dx=$__________

6、曲线$y=\ln\cos x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$的弧长为________

二、选择题

1、设$I_1=\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin x\cos^2 x}{x}dx,I_2=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3 x+\cos^2 xdx,I_3=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^4 x-\cos^4 xdx,$，则有( )

A. $I_1<I_3<I_2$　　B. $I_2<I_3<I_1$　　C. $I_3<I_1<I_2$　　D. $I_2<I_1<I_3$

2、下列反常积分发散的是( )

A. $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$　　B. $\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$　　C. $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx$　　D. $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}dx$

3、若幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n$在 x=-3 处收敛，则此级数在 x=2 处( )

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛　　C. 发散　　D. 敛散性不能确定

三、计算题

1、$\int \ln(1+x^2)dx$

2、$\int \frac{2x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$

3、$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$

4、设函数$f(x)=\int_1^x \frac{\sin t^2}{t}dt$，求$\int_0^1 xf(x)dx$

四、判断下列级数的敛散性，其中正项级数请指明收敛还是发散；交错级数请指明绝对收敛、条件收敛还是发散

1、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

2、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n^3-n^2+1}}$

五、求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n+1}$的收敛域与和函数

六、将函数$f(x)=\ln(3+x)$展开成$(x-1)$的幂级数，并给出 x 的范围

七、设由抛物线$y=x^2-2x$和直线$y=x-2$所围成的平面图形的面积，并求该平面图形绕 y 轴旋转得到的旋转体体积

八、设$f(x)=\int_0^x |\cos t|dt$，

（1）当$n\pi \leqslant x \leqslant (n+1)\pi$时，（n 为正整数），证明：$2n < f(x) < 2(n+1)$

（2）求$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

九、若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\mu_n|$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$是否收敛？若收敛，给出证明；若发散，举例说明。