2020-2021 学年第一学期期末补考试卷

一、填空（每小题 3 分）

1.设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x=\int_{1}^{x+y} e^{-t^2}dt$ 确定，则 $y'(0)=$__________

2.曲线弧 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$ 的全长为__________

3.半球面 $z=2+\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成的闭曲面在 xoy 面上投影部分的面积为__________

4.$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i^3}{n^4+i^4}=$__________

5.已知三点 $A(1，1，1)$，$B(2，2，1)$，$C(2，1，2)$，则 ΔABC 底边 AC 上高为__________

6.设 $f''(x)$ 在 $[0，1]$ 上连续，且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，求 $\int_{0}^{1}xf''(2x)dx=$__________

7.已知函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right]=2$，则 $f(0)=$________，$f'(0)=$________

二、选择题（每小题 3 分）

1.当 $n\to\infty$ 时，$e^2-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$ 与 $\dfrac{a}{n}(a\neq 0)$ 是等价无穷小，则 $a=$ （　　）

$(A)1$　　$(B)2$　　$(C)e$　　$(D)e^2$

2.下列反常积分收敛的是 （　　）

$(A)\int_{1}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$　　$(B)\int_{0}^{1}\dfrac{dx}{\ln(1+x)}$

$(C)\int_{-1}^{1}\dfrac{dx}{\sin x}$　　$(D)\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

三、设 $F(x)=\int_{0}^{x}tf(x^2-t^2)dt$，$f(x)$ 在 $x=0$ 某领域内可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^4}$.

四、计算题(每题 5 分)

1. $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$

2. $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

3. $\int \frac{x+1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx$

4. $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

五、已知一直线通过椭球面$(x-2)^2+2(y-1)^2+3(z-3)^2=9$的中心，且与

L：$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$垂直相交，求该直线的方程.

六、已知曲线$y=ax^2+2x(a>0)$，若$y=ax^2+2x(a>0)$与$x=1$及$y=0$所围成图形面积为 2，求上述图形绕y轴旋转所得旋转体的体积V.

七、求函数$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\cos t|dt$在$[0，\pi]$上的最小值与最大值.

八、设$f(x)$在$[a，b]$ $(a<b)$上连续，且$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xf(x)dx=0$.

证明：(1)存在一点$\xi\in(a，b)$，使得$\int_a^{\xi} f(t)dt=0$；

(2)至少存在不同的ξ_1，$\xi_2\in(a，b)$，使得$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.