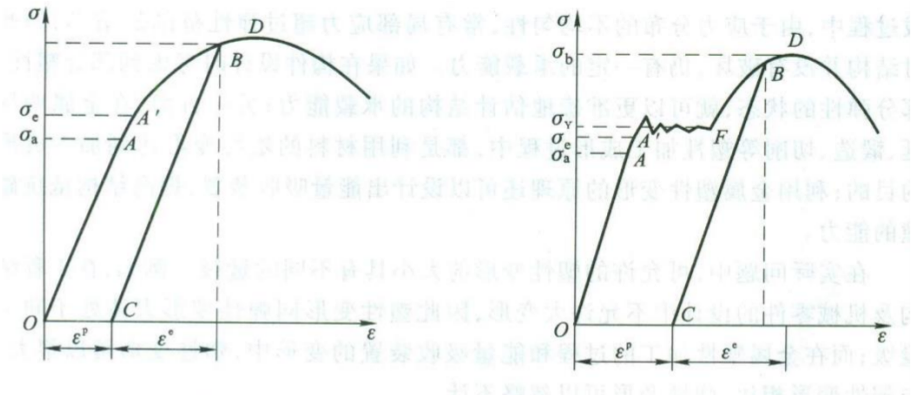
前置知识



(a) 铝　　(b) 低碳钢

工程应变	$\varepsilon=\dfrac{l-l_0}{l}$	名义应力	$\sigma=\dfrac{F}{A_0}$
弹性变形	ε^{e}	塑性变形	ε^{p}
比例极限	σ_a	弹性极限	σ_e
屈服应力	σ_Y	强度极限	σ_b
条件屈服应力(产生0.2%的塑性应变相对应的应力)			$\sigma_{0.2}$
真应力	$\bar{\sigma}=\dfrac{F}{A}$	自然应变	$\bar{\varepsilon}=\ln(1+\varepsilon)$

第一章

1. 加、卸载准则

在简单应力下，可以写成

$$\left.\begin{array}{ll}\sigma\mathrm{d}\sigma>0 & \text{加载}\\ \sigma\mathrm{d}\sigma<0 & \text{卸载}\end{array}\right\}$$

把简单拉伸试件在塑性阶段的应力-应变关系归纳为

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{d}\sigma=E_{\mathrm{t}}\mathrm{d}\varepsilon & \text{对于}\,\sigma\mathrm{d}\sigma>0\\ \mathrm{d}\sigma=E\,\mathrm{d}\varepsilon & \text{对于}\,\sigma\mathrm{d}\sigma<0\end{array}\right\}$$

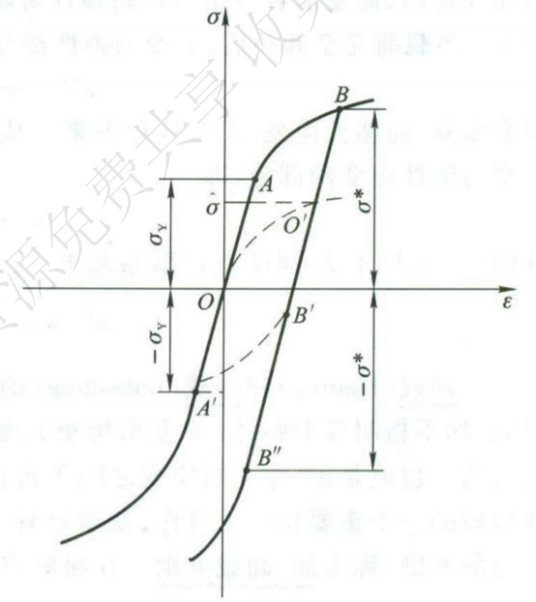
2. 后继屈服应力的函数形式

$$\sigma=H(\varepsilon^{\mathrm{p}})\Longleftrightarrow\phi(\sigma,h_{\mathrm{a}})=0$$

其中h_{a}是记录材料塑性加载历史的参数，ϕ则称为加载函数.

3. Banschinger 效应

对于单晶体，在加载到强度极限后开始卸载，然后再反向加载，其反向屈服应力的绝对值比初始屈服应力σ_{Y}要大，即正向强化的反向亦强化. 然而，对于一般非单晶体材料，在这种情况下反向屈服应力的绝对值比初始屈服应力σ_{Y}要小，即正向强化时反向会弱化.



4. 材料的塑性变形的共同特点

(1)应力-应变关系呈非线性；

(2)路劲相关性：由于材料在加载过程和卸载过程中服从不同的规律，应力与应变间不存在单值对应关系；

(3)耗散性：由于塑性应变不可恢复，故外力所作的塑性功具有不可逆性.

5. 静水压力试验

(1)静水压与材料的体积改变之间近似服从线性弹性规律；

(2)材料的塑性变形与静水压力无关.

6. 应变的对数定义

(1)可以对应变使用加法；

$$\varepsilon \neq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$
$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3$$

(2)体积不可压缩条件$(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)=1$可以简单地表示为

$$\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3 = 0$$

7. 材料塑性行为的基本假设

(1)材料的塑性行为与时间、温度无关；

(2)材料具有无限的韧性，即认为材料可以无限地变形而不出现断裂；

(3)变形前材料是初始各向同性的，且拉伸和压缩的$\bar{\sigma}-\bar{\varepsilon}$曲线一致；

(4)关于卸载和后继屈服的假设：在产生塑性变形后卸载载荷，材料服从弹性规律；重新加载后的后继屈服应力等于卸载前的应力，这就是说重新加载达到屈服后的$\sigma-\varepsilon$曲线是卸载前$\sigma-\varepsilon$曲线的延伸线；

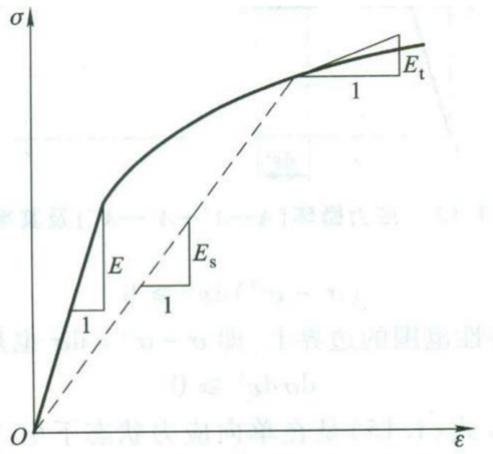
(5)关于弹性和塑性的假设：在任何条件下的应变总能分解为弹性和塑性两部分，即$\varepsilon=\varepsilon^{e}+\varepsilon^{p}$；材料的弹性性质不因塑性变形而改变，即$\varepsilon^{e}=\dfrac{\sigma}{E}$，其中弹性模量$E$是与塑性变形无关的常数；

(6)塑性变形是在体积不变(不可压缩)条件下发生的. 静水压力只产生体积的弹性变化，不产生塑性变形；

(7)关于材料稳定性的假设：当应力单调变化时，假设$\sigma-\varepsilon$曲线具有以下不等式

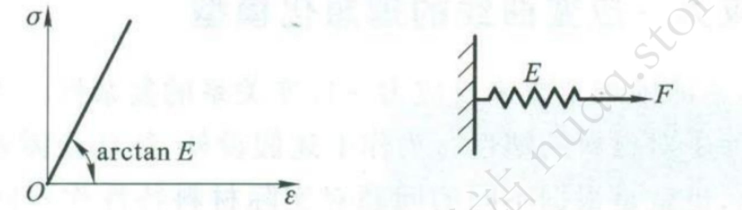
$$E > E_s \geqslant E_t \geqslant 0$$

其中$E_s=\dfrac{\sigma}{E}$和$E_t=\dfrac{d\sigma}{d\varepsilon}$分别是$\sigma-\varepsilon$曲线的割线模量和切线模量.



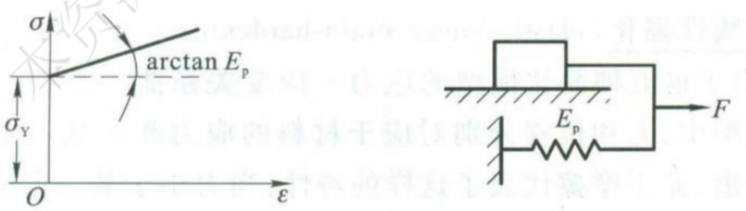
8. **应力-应变曲线的理想化模型**

(1)理想弹性模型

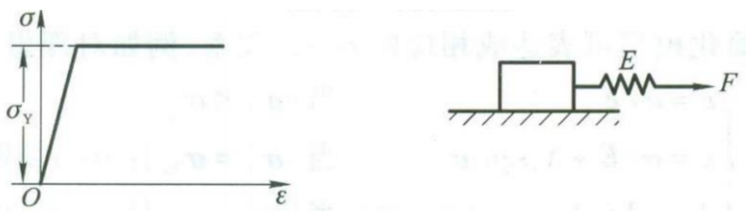


(2)理想刚塑性模型

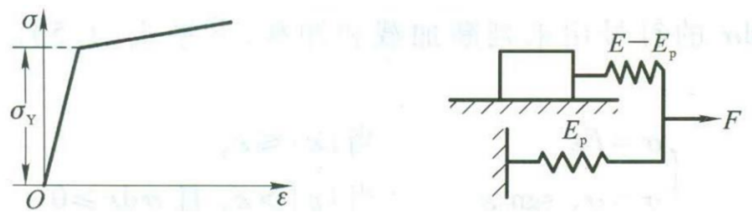
(3)刚-线性强化模型



(4)理想弹塑性模型



(5)弹-线性强化模型



9. **强化模型**

(1)等向强化模型：不论是拉伸或压缩，应变强化总是相等地产生和发展. 其表达式为

$$|\sigma| = \sigma^* = \psi\left(\int |\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}|\right) = F\left(\int \mathrm{d}W^{\mathrm{p}}\right)$$

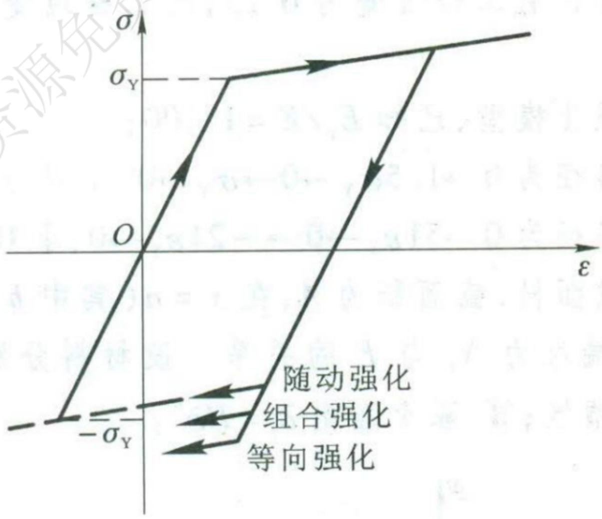
其中σ^*是$|\sigma|$在此前的塑性变形历史中曾经达到过的最大值，且$\sigma^* > \sigma_{\mathrm{Y}}$；$\int |\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}|$表示塑性应变按照绝对值进行积累，而函数$\psi$可以根据材料的拉伸试验得出；$\int \mathrm{d}W^{\mathrm{p}}$表示塑性比功，函数$F$可以根据材料的拉伸试验得出. σ^*、$\int |\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}|$和$\int \mathrm{d}W^{\mathrm{p}}$都是单调变化的正数，都可以选作记录材料塑性变形历史的参数.

(2)随动强化模型：假定由于 Bauschinger 效应减少了反方向加载时的屈服应力，而总的弹性范围的大小保持不变. 其表达式为

$$|\hat{\sigma} - \varepsilon| = \sigma_{\mathrm{Y}}$$

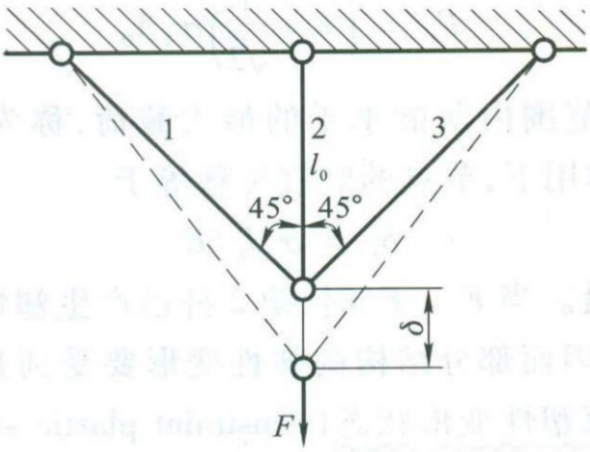
(3)组合强化模型：将上述两种强化模型组合起来，写成

$$|\sigma - \hat{\sigma}| = \sigma^*$$



第二章

1. 只施加竖直力的理想弹塑性材料的三杆桁架



设各杆的初始截面积均为A_0，第 2 杆的初始长度为l_0，相邻杆间夹角为45°，则第 1 杆和第 3 杆的长度均为$\sqrt{2}\,l_0$，用N_1、N_2和N_3分别表示杆的内力，则由节点平衡方程得出

$$N_1 = N_3,\quad \frac{N_1 + N_3}{\sqrt{2}} + N_2 = F$$

用应力表示可得

$$\sqrt{2}\,\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{F}{A_0}$$

变形协调条件

$$\delta = \varepsilon_2 l_0 = 2\varepsilon_1 l_0$$

于是有

$$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$$

(1)弹性阶段：应力关系有

$$\sigma_2 = 2\sigma_1$$

解得

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}} \cdot \dfrac{F}{A_0} \\ \sigma_2 = \dfrac{2}{2+\sqrt{2}} \cdot \dfrac{F}{A_0} \end{cases}$$

所以第 2 杆先屈服，此时

$$\sigma_2 = \sigma_Y,\quad F_e = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sigma_Y A_0,\quad \delta_e = \varepsilon_2 l_0 = \frac{\sigma_Y l_0}{E}$$

(2)约束塑性阶段：此时有

$$\begin{cases}\sigma_2=\sigma_Y\\ \sigma_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{F}{A_0}-\sigma_Y\right)\end{cases}$$

(3)塑性流动阶段：第 1 杆屈服，此时

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_Y,\ F_Y=\left(1+\sqrt{2}\right)\sigma_Y A_0,\ \delta_y=2\varepsilon_1 l_0=\frac{2\sigma_Y l_0}{E}=2\delta_e$$

(4)卸载阶段：由增量法

$$\triangle\sigma_1=\frac{1}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{\triangle F}{A_0}=E\triangle\varepsilon_1,\ \triangle\sigma_2=\frac{2}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{\triangle F}{A_0}=E\triangle\varepsilon_2,\ \triangle F=\left(1+\sqrt{2}\right)\sigma_Y A_0$$

因此有

$$\triangle\sigma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_Y,\ \triangle\sigma_2=\sqrt{2}\sigma_Y,\ \triangle\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma_Y}{E},\ \triangle\varepsilon_2=\sqrt{2}\frac{\sigma_Y}{E}$$

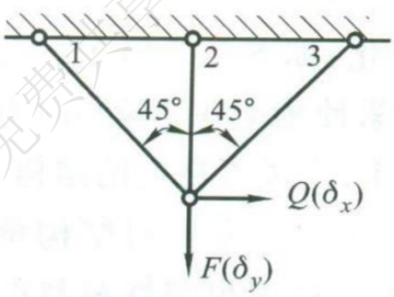
叠加上初始应力可得

$$\sigma_1^\circ=\sigma_Y-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_Y=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sigma_Y>0,\ \sigma_2^\circ=\sigma_Y-\sqrt{2}\sigma_Y=\left(1-\sqrt{2}\right)\sigma_Y<0$$

$$\varepsilon_1^\circ=\frac{\sigma_Y}{E}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma_Y}{E}=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sigma_Y}{E}>0,\ \varepsilon_2^\circ=2\frac{\sigma_Y}{E}-\sqrt{2}\frac{\sigma_Y}{E}=\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{\sigma_Y}{E}>0$$

$$\delta_y^\circ=\frac{2\sigma_Y l_0}{E}-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma_Y}{E}\cdot l_0=\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{\sigma_Y l_0}{E}=\left(2-\sqrt{2}\right)\delta_e>0$$

2. 先施加竖直力再施加水平力的理想弹塑性材料的三杆桁架



对桁架先仅仅施加F直到极限载荷$F_Y=\left(1+\sqrt{2}\right)\sigma_Y A_0$，同时保持$Q=0$. 此时

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_Y,\ \delta_y=2\varepsilon_1 l_0=\frac{2\sigma_Y l_0}{E}=2\delta_e,\ \delta_x=0$$

然后在保持节点竖直位移δ_y不变的情况下增加Q，这时F将有相应的改变. 用增量法有

$$\triangle\sigma_2+\frac{\triangle\sigma_1+\triangle\sigma_3}{\sqrt{2}}=\frac{\triangle F}{A_0},\ \frac{\triangle\sigma_1-\triangle\sigma_3}{\sqrt{2}}=\frac{\triangle Q}{A_0}$$

变形协调条件

$$\triangle\varepsilon_1=\frac{\triangle\delta_y+\triangle\delta_x}{2l_0},\ \triangle\varepsilon_2=\frac{\triangle\delta_y}{l_0},\ \triangle\varepsilon_3=\frac{\triangle\delta_y-\triangle\delta_x}{2l_0}$$

可得

$$\triangle\varepsilon_2=\triangle\varepsilon_1+\triangle\varepsilon_3$$

现在保持$\triangle\delta_y=0$施加Q，故

$$\triangle\delta_x=\delta_x>0,\ \triangle\varepsilon_1=\frac{\triangle\delta_x}{2l_0}>0,\ \triangle\varepsilon_2=0,\ \triangle\varepsilon_3=-\frac{\triangle\delta_x}{2l_0}<0$$

即第 1 杆继续伸长，第 2 杆长度不变，第 3 杆发生卸载. 于是

$$\triangle\sigma_1=\triangle\sigma_2=0,\ \triangle\sigma_3=E\triangle\varepsilon_3=-\frac{E\delta_x}{2l_0}<0$$

进而求得

$$\frac{\triangle F}{A_0}=\frac{\triangle\sigma_3}{\sqrt{2}}<0,\ \frac{\triangle Q}{A_0}=-\frac{\triangle\sigma_3}{\sqrt{2}}>0,\ \triangle F=-\triangle Q$$

即Q增加时F必须减小. 当$\triangle\sigma_3=-2\sigma_Y$使$\sigma_3=-\sigma_Y$时，第 3 杆进入反向屈服，整个桁架再次进入塑性流动状态(保持δ_y不变即增加了约束，所以需要 3 根杆都屈服结构才进入塑性流动状态)，此时

$$Q=Q_Y=\sqrt{2}\,\sigma_Y A_0,\ F=F_Y+\triangle F=\left(1+\sqrt{2}\right)\sigma_Y A_0-\sqrt{2}\,\sigma_Y A_0=\sigma_Y A_0$$

叠加上初始状态可得

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_Y,\ \sigma_3=-\sigma_Y,\ \delta_y=2\varepsilon_1 l_0=\frac{2\sigma_Y l_0}{E},\ \delta_x=-2\triangle\varepsilon_3 l_0=\frac{4\sigma_Y l_0}{E}$$

$$\varepsilon_3=\varepsilon_Y-\frac{2\sigma_Y l_0}{E}=-\varepsilon_Y,\ \varepsilon_1=\varepsilon_Y+\frac{2\sigma_Y l_0}{E}=3\varepsilon_Y,\ \varepsilon_2=2\varepsilon_Y$$

3. 按照比例加载的理想弹塑性材料的三杆桁架

按照$F:Q=1:\sqrt{2}$单调比例增加，直到结构达到塑性极限状态. 有协调关系

$$\varepsilon_2=\varepsilon_1+\varepsilon_3$$

于是有

$$\sigma_2=\sigma_1+\sigma_3$$

有应力方程的平衡方程

$$\sigma_2+\frac{\sigma_1+\sigma_3}{\sqrt{2}}=\frac{F}{A_0},\ \frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sqrt{2}}=\frac{Q}{A_0},\ Q=\sqrt{2}\,F$$

解得

$$\sigma_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}+2\right)\frac{F}{2A_0}>0,\ \sigma_2=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\frac{F}{A_0}>0,\ \sigma_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}-2\right)\frac{F}{2A_0}<0$$

必背公式

1. 三根桁架的应变方程(变形协调方程)

$$\triangle\varepsilon_1=\frac{\triangle\delta_y+\triangle\delta_x}{2l_0},\ \triangle\varepsilon_2=\frac{\triangle\delta_y}{l_0},\ \triangle\varepsilon_3=\frac{\triangle\delta_y-\triangle\delta_x}{2l_0}$$

2. 应力边界条件

$$S_{Ni}=\sigma_{ij}l_j$$

3. 平均正应力(静水压力)

$$\sigma_{\mathrm{m}}=\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}=\frac{1}{3}\sigma_{kk}$$

4. 应力张量分解

$$\sigma_{ij}=\sigma_{\mathrm{m}}\delta_{ij}+s_{ij}$$

5. 应力张量的应力不变量

$$J_1=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3,\ J_2=-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1),\ J_3=\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

6. 应力偏张量主值(主偏应力)

$$s_j=\sigma_j-\sigma_{\mathrm{m}}$$

7. 应力偏张量的应力不变量

$$J_1'=s_1+s_2+s_3=0,\ J_3'=s_1s_2s_3=(\sigma_1-\sigma_{\mathrm{m}})(\sigma_2-\sigma_{\mathrm{m}})(\sigma_3-\sigma_{\mathrm{m}})$$

$$\begin{aligned}J_2'&=-(s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1)=\frac{1}{2}(s_1^2+s_2^2+s_3^2)=\frac{1}{2}(s_{11}^2+s_{22}^2+s_{33}^2+2s_{12}^2+2s_{23}^2+2s_{31}^2)\\&=\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}\\&=\frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]\\&=\frac{1}{6}[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)]\\&=\frac{1}{6}[(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2+6(\tau_{r\theta}^2+\tau_{\theta z}^2+\tau_{zr}^2)]\end{aligned}$$

8. 八面体应力分量，正应力和剪应力

$$|\boldsymbol{F}_8|^2=\frac{1}{3}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2),\ \sigma_8=\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}=\sigma_{\mathrm{m}},\ \tau_8=\sqrt{|\boldsymbol{F}_8|^2-\sigma_8^2}=\sqrt{\frac{2}{3}J_2'}$$

9. 等效应力

$$\bar{\sigma}=\sqrt{3J_2'}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

$$\bar{\tau}=\sqrt{J_2'}=\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

10. 最大剪应力

$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

11. 等效应变

$$\bar{\varepsilon}=\sqrt{\frac{4}{3}I_2'}=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}$$

$$\bar{\gamma}=2\sqrt{I_2'}=\sqrt{3}\,\bar{\varepsilon}=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}$$

12. Tresca 屈服条件

$$\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)=k$$

单向拉伸

$$k=\frac{1}{2}\sigma_Y$$

纯剪切

$$k=\tau_Y$$

13. Mises 屈服条件

$$J_2'=\frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]=C$$

单向拉伸

$$J_2'=\frac{1}{3}\sigma_Y^2=C$$

纯剪切

$$J_2'=\tau_Y^2=C$$

14. 受拉扭组合的薄壁圆管

Mises 屈服条件

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_Y}\right)^2+3\left(\frac{\tau}{\sigma_Y}\right)^2=1$$

Tresca 屈服条件

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_Y}\right)^2+4\left(\frac{\tau}{\sigma_Y}\right)^2=1$$

16. 平面主应力公式

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \ \sigma'' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \ \sigma''' = 0$$

17. 广义 Hooke 定律

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G} - \frac{3v}{E}\sigma_{\mathrm{m}}\delta_{ij}$$

18. 增量理论

Levy-Mises 理论(理想刚塑性，复杂加载，$\mu = \frac{1}{2}$)

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \mathrm{d}\lambda s_{ij}, \ \mathrm{d}\lambda = \frac{3\overline{\mathrm{d}\varepsilon}}{2\sigma_{\mathrm{Y}}}, \ \frac{\mathrm{d}\varepsilon_1}{s_1} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_2}{s_2} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_3}{s_3}$$

Prandtl-Reuss 理论(理想弹塑性，复杂加载，$\mu \leqslant \frac{1}{2}$)

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \frac{\mathrm{d}s_{ij}}{2G} + \mathrm{d}\lambda s_{ij}, \ \mathrm{d}\lambda = \frac{3\,\mathrm{d}W}{2\sigma_{\mathrm{Y}}^2}$$

伊柳辛理论(幂强化，简单加载，$\mu = \frac{1}{2}$)

$$e_{ij} = \frac{1}{2G_s}s_{ij}, \ G_s = \frac{\bar{\sigma}}{3\bar{\varepsilon}}$$

19. 薄壁圆管受拉扭作用的量纲归一化

$$\sigma^2 + \tau^2 = 1$$

20. 阶梯变形路径积分

γ 为常数

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sigma}{1+\sigma_0}\cdot\frac{1-\sigma_0}{1-\sigma}\right)$$

ε 为常数

$$\gamma - \gamma_0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\tau}{1+\tau_0}\cdot\frac{1-\tau_0}{1-\tau}\right)$$