2020-2021 学年第一学期期末考试 B 卷

一、填空（每空格 3 分）

1.设曲线$y=y(x)$由$\begin{cases} x=\int_0^u e^{-t^2}dt \\ y=\int_0^u \sin(u-t)dt \end{cases}$确定，则$y'(0)=$ ________

2.曲线$y=\ln(1-x^2)$上相应于$0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$的一段弧长为 ________

3.半球面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$和旋转抛物面$z=x^2+y^2$所围闭曲面在xoy面上投影部分的面积为

____

4.$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{\frac{1}{n}}\cdot e^{\frac{2}{n}}\cdots e^{\frac{n}{n}}}=$ ________

5.已知三点$A(1,0,1),B(2,1,1),C(1,1,1)$，则$\Delta ABC$底边$AC$上高为 ________

6.设有二阶连续导数的函数$y=f(x)>0,f(2)=\frac{1}{2},f'(2)=0$，且$\int_0^1 x^2 f''(2x)dx=0$，则$y=f(x)$与$x=0,x=2$所围平面图形的面积$S=$ ________

7.已知$f(x)$有连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right]=2$，则$f(0)=$ ________，$f'(0)=$ ________

二、选择题（每题 3 分）

1.当$x\to 0$时，$bx-\sin x$与$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt$是等价无穷小，则（　　）

（A）$a=4,b=1$　　（B）$a=1,b=4$　　（C）$a=-4,b=1$　　（D）$a=4,b=-1$

2.设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续导数，则下列说法正确的是（　　）

1.若$f''(x)>0$，则$\int_0^1 f(x)dx>f\left(\frac{1}{2}\right)$　　2.若$f''(x)>0$，则$\int_0^1 f(x)dx<f\left(\frac{1}{2}\right)$

3.若$f''(x)<0$，则$\int_0^1 f(x)dx>f\left(\frac{1}{2}\right)$　　4.若$f''(x)<0$，则$\int_0^1 f(x)dx<f\left(\frac{1}{2}\right)$

（A）1,4　　（B）2，3　　（C）2,4　　（D）1,3

3.下列反常积分收敛的是（　　）

（A）$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+2x}}dx$　　（B）$\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[3]{x}}dx$

（C）$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}dx$　　（D）$\int_{1}^{3}\frac{1}{(x-1)^3}dx$

三、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}t\ln t dt}{x^4}$

四、计算题（每题 5 分）

1. $\int\frac{1}{\cos^2 x+2\sin^2 x}dx$

2. $\int\frac{\ln x}{(1-x)^2}dx$

3. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$

4.若函数$f(x)=xe^x+\frac{x(e^x+e^{-x})}{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}\int_{-1}^{1}f(x)dx$，求$\int_{-1}^{1}f(x)dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x dx}{\sin x+\cos x}$

五、已知一直线通过$x+y-z-8=0$与直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$的交点，且与$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$垂直相交，求该直线的方程

六、曲线$y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$绕$x$轴旋转一周所得的旋转体，将它在$x=0,x=\xi(\xi>0)$之间部分的体积记为$V(\xi)$，且$V(a)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)\,(0<a<\xi)$，求$a$为多少

七、设$x\in R$，求$f(x)=\int_0^1|2x-t|dt$及$f(x)$的极值

八、设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内二阶可导，且$f(0)=f(1)=\int_0^1 f(x)dx$，证明：

1.方程$f(x)=\int_0^1 f(x)dx$在$(0,1)$内至少有一个实根；

2.存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=0$