2024 年南京航空航天大学航空学院《高等代数 A(2)》期末考试模拟题

出题人：伍霖　解答人：伍霖

一、填空题(每题 5 分，共 30 分)

1. 设 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+3x_2^2-x_3^2+x_1x_2-2x_1x_3+3x_2x_3$，则二次型的矩阵是________，二次型的秩为________.

解： 二次型矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&-1&0\\ \frac{1}{2}&3&\frac{3}{2}&0\\ -1&\frac{3}{2}&-1&0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&-1&0\\ 0&1&-1&0\\ 0&0&\frac{19}{4}&0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以二次型的秩为 3.□

2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_2^2+ax_3^2+6x_2x_3$，$a>3$ 在实数域上的规范形为________.

解： 二次型矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&a&3\\0&3&a\end{bmatrix}$$

由 A 的特征多项式 $|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda-a-3)(\lambda-a+3)$，可知 A 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=a+3$，$\lambda_3=a-3$. 故 f 的秩为 3，正惯性指数也为 3，所以 f 的规范形应为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.□

3. 设 A 是三阶实对称矩阵，且满足 $A^2+2A=0$，若 $kA+E$ 是正定矩阵，则________.(填 k 的范围)

解： 由 $A^2+2A=0$ 知矩阵 A 的特征值是 0 或-2，那么 kA 的特征值是 0 或-2k，$kA+E$ 的特征值是 1 或 1-2k. 又因为正定的充分必要条件是特征值全大于零，故 $k<\frac{1}{2}$.□

4. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，且 $f(\lambda)=x^{11}-2x^9+x^8+x^3-x+2$，求 $f(A)=$________.

解： A 的特征多项式 $g(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^2-2\lambda+1$，用 $g(\lambda)$ 除 $f(\lambda)$ 可得

$$f(\lambda)=(x^8+1)g(\lambda)+(1+\lambda)$$

由哈密顿—凯莱定理及上式有

$$f(A)=A+E=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}.\square$$

5\. 求λ矩阵$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda&\lambda^2&\lambda\\\lambda&\lambda&-\lambda\\1+\lambda^2&\lambda^2&-\lambda^2\end{bmatrix}$的标准形________.

解：用初等变换法可得

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda&\lambda^2&\lambda\\\lambda&\lambda&-\lambda\\1+\lambda^2&\lambda^2&-\lambda^2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda^2+\lambda\end{bmatrix}.\square$$

6\. 设$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$，求$A^n=$________. ($n$ 为正整数)

解：化为对角阵，即存在$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，使

$$P^{\mathrm{T}}AP=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

由此可得

$$A^n=\left[P\begin{bmatrix}3&0\\0&-1\end{bmatrix}P^{-1}\right]^n=P\begin{bmatrix}3^n&0\\0&(-1)^n\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3^n+(-1)^n}{2}&\frac{3^n-(-1)^n}{2}\\\frac{3^n-(-1)^n}{2}&\frac{3^n+(-1)^n}{2}\end{bmatrix}.\square$$

二、计算题(第 7 大题 10 分，其余大题每道 15 分，共 70 分)

7\. 设A，B都是$m\times n$实矩阵，且$B^{\mathrm{T}}A$为可逆矩阵，证明：$A^{\mathrm{T}}A+B^{\mathrm{T}}B$是正定矩阵.

解：因为

$$(A^{\mathrm{T}}A+B^{\mathrm{T}}B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A+B^{\mathrm{T}}B$$

所以$A^{\mathrm{T}}A+B^{\mathrm{T}}B$是实对称矩阵. 由于$B^{\mathrm{T}}A$为可逆矩阵，又$n=r(B^{\mathrm{T}}A)\leqslant r(A)\leqslant n$，故$r(A)=n$，所以齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$只有零解，于是对任意实向量$x\neq\mathbf{0}$有$Ax\neq\mathbf{0}$，故

$$x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A+B^{\mathrm{T}}B)x=x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax+x^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Bx=(Ax)^{\mathrm{T}}Ax+(Bx)^{\mathrm{T}}Bx>0$$

根据定义知，$A^{\mathrm{T}}A+B^{\mathrm{T}}B$是正定矩阵.$\square$

8. 设V_1及V_2是 n 维空间 V 的两个子空间，且维$(V_1+V_2)=$维$(V_1\cap V_2)+1$，证明：$V_1\subseteq V_2$或$V_2\subseteq V_1$.

解： 设V_1及V_2的维数分别是n_1与n_2，而$V_1\cap V_2$的维数维 m，则由假设可得

$$m\leqslant n_i\leqslant \text{维}(V_1\cap V_2)=m+1,\ i=1,2$$

如果$n_1=n_2=m$，则由于维$(V_1+V_2)=m+1$及

$$V_1\cap V_2\subseteq V_1,\ V_1\cap V_2\subseteq V_2$$

得$V_1=V_2=V_1\cap V_2$，与条件矛盾. 如果$n_1=n_2=m+1$，则由于维$(V_1+V_2)=m+1$及

$$V_1\subseteq V_1+V_2,\ V_2\subseteq V_1+V_2$$

又得$V_1=V_2=V_1+V_2$，这也与条件矛盾. 但当$n_1=m$，$n_2=m+1$时，$V_1=V_1\cap V_2\subset V_2$；当$n_1=m+1$，$n_2=m$时，$V_2=V_1\cap V_2\subset V_1$.

综上，$V_1\subseteq V_2$或者$V_2\subseteq V_1$.□

9. 设$\mathscr{A}$是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，证明三个条件等价：(1)$\mathscr{A}$是可逆的；(2) $\mathscr{A}$是单射；(3)$\mathscr{A}$是满射.

解：(1) ⇒ (2). $\forall \boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta} \in V$，若$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}$，则$\boldsymbol{\alpha} = \mathscr{A}^{-1}\mathscr{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$，所以$\mathscr{A}$是单射；

(2) ⇒ (3). 取 V 的一组基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$，由$\mathscr{A}$是单射易知，$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1$，$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_n$也是 V 的一组基. $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$，$\exists k_1$，$\cdots$，$k_n \in P$ 有

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_n = \mathscr{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n) = \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}$$

其中$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n \in V$，故$\mathscr{A}$是满射；

(3) ⇒ (1). 取 V 的一组基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$，则$\exists \boldsymbol{\beta}_i \in V$，使$\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{\alpha}_i$，$i = 1, 2, ..., n$. 由于$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，可证$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_n$也线性无关，从而为 V 的一组基. 又

$$\forall \boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n \in V$$

令

$$\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\beta}_n$$

则$\mathscr{B} \in L(V)$. $\forall \boldsymbol{\gamma} \in V$，设$\boldsymbol{\gamma} = l_1\boldsymbol{\beta}_1 + l_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + l_n\boldsymbol{\beta}_n$，则

$$\begin{aligned}\mathscr{B}\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma} &= \mathscr{B}(l_1\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}_1 + l_2\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + l_n\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}_n) = \mathscr{B}(l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_n\boldsymbol{\alpha}_n) \\ &= l_1\boldsymbol{\beta}_1 + l_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + l_n\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\gamma}\end{aligned}$$

即$\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{E}$，同理可证$\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{E}$. 所以$\mathscr{A}$可逆.□

10. 设 V 为数域 P 上 n 为线性空间，$\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 为 V 的线性变换且满足 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$，又设 λ_0 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征值，证明：

(1)$V^{\lambda_0}=\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid$ 存在正整数 m, 使 $(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^m\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，其中 $\mathscr{E}$ 是恒等变换；

(2)V^{λ_0} 也是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间.

解：(1)易证，V^{λ_0} 是 V 的子空间. $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V^{\lambda_0}$，则 $\exists m\in N$ 使

$$(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^m\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\Longrightarrow(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^m(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^m\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{A}\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

即 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}\in V^{\lambda_0}$，从而 V^{λ_0} 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

(2)$\forall\boldsymbol{\beta}\in V^{\lambda_0}$，则 $\exists r\in N$ 使 $(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^r\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. 因为

$$(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^r\mathscr{B}\boldsymbol{\beta}=\mathscr{B}(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^r\boldsymbol{\beta}=\mathscr{B}\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

所以 $\mathscr{B}\boldsymbol{\beta}\in V^{\lambda_0}$，从而 V^{λ_0} 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间.□

11. 用正交变换将二次曲面$2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3=1$化为标准形并说明曲面类型.

解： 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$对于的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{bmatrix}$$

则$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=10$.其对应的基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-4,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$，由于$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$已经正交，再单位化即得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2=\left(-\frac{4}{\sqrt{18}},\frac{1}{\sqrt{18}},-\frac{1}{\sqrt{18}}\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$$

作正交变换

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}$$

则二次曲面变为$y_1^2+y_2^2+10y_3^2=1$，它表示一个旋转椭球面.□