2024 年秋季学期《解析几何与线性代数 A》阶段测试（2）

一、已知 $\mathbb{R}^3$ 中的向量 $\mathbf{u}=[1,1,1]^T$，线性映射 $L_A(\mathbf{x})$ 将 $\mathbb{R}^3$ 中的向量 $\mathbf{x}$ 映射为关于 $\mathbf{u}$ 的正交投影向量，分别用矩阵、向量、向量的线性组合表示这个线性映射。

二、1. 写出 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的线性映射 $L_A(\mathbf{x})$ 的定义。

2. 证明：若映射 $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 满足以下两个条件：

①$\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$，$L(\mathbf{x}+\mathbf{y})=L(\mathbf{x})+L(\mathbf{y})$；

②$\forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 和 $c\in\mathbb{R}$，$L(c\mathbf{x})=cL(\mathbf{x})$；

则该映射为线性映射。

三、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$，求 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $L_A(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ 的值域 $\operatorname{range}(L_A)$ 与核 $\ker(L_A)$。

四、证明矩阵乘法的结合律 $(AB)C=A(BC)$。

五、设矩阵方程 $AX=B+X$，其中 $A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&3&2\\1&-1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\\2&1\end{bmatrix}$，求 X。

六、若 n 阶方阵 A 和 m 阶方阵 B 都可逆，求 $M=\begin{bmatrix}A&C\\O&B\end{bmatrix}$ 的逆矩阵。

七、1.对于 n 阶方阵 $A=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n]$，其中 $\mathbf{a}_i=[a_{1i},a_{2i},\ldots,a_{nj}]^T$，写出 A 的行列式 $\det A$ 的定义式，并写出行列式关于向量 $\mathbf{a}_i$ 的性质。

2. 证明：$\det(AB)=\det A\det B$。（提示：利用矩阵乘法的定义以及行列式的定义和性质）

八、证明：若矩阵 A 不可逆，则其伴随矩阵 $\operatorname{adj}(A)$ 也不可逆。