2024 年南京航空航天大学航空学院《工科数学分析 A(2)》期末考试模拟题

出题人：伍霖　解答人：伍霖

一、填空题(每题 4 分，共 32 分)

1. 已知区域 $D=\{(x,y)\mid(x-k)^2+(y-k)^2\leqslant R^2\}$，求积分 $\iint_D(ax+by)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$________.

解：由对称性

$$\iint_D(ax+by)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=(a+b)\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=(a+b)\cdot\bar{x}\cdot\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=(a+b)\cdot k\cdot\pi R^2=k(a+b)\pi R^2.\square$$

2. 已知 L 为半圆 $0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}$ 的边界，求积分 $\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=$________.

解：设 L_1 为 $y=\sqrt{1-x^2}$，L_2 为 $y=0$，则有

$$\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_{L_1}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s+\int_{L_2}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^{\pi}\mathrm{e}\,\mathrm{d}s+\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{e}+2(\mathrm{e}-1).\square$$

3. 设 L 为曲线 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\x+y+z=1\end{cases}$，从 z 轴的正方向看 L 沿逆时针方向，求 $\oint_L xy\,\mathrm{d}x+yz\,\mathrm{d}y+zx\,\mathrm{d}z=$________.

解：取 Σ：$z=1-x-y$，$x^2+y^2+x+y\leqslant1$ 上侧，$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，则有

$$\oint_L xy\,\mathrm{d}x+yz\,\mathrm{d}y+zx\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\xy&yz&zx\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(x+y+z)\mathrm{d}S$$
$$=-\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{3\pi}{2}.\square$$

4. 求直线 L：$\begin{cases}2x-y+z-1=0\\x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 Π：$x+2y-z=0$ 上的投影直线方程________.

解：过直线 L 的平面束方程为

$$\lambda(2x-y+z-1)+\mu(x+y-z+1)=0$$

即

$$(2\lambda+\mu)x+(-\lambda+\mu)y+(\lambda-\mu)z+(-\lambda+\mu)=0$$

则与平面 Π 垂直的平面 Π_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(2\lambda+\mu,-\lambda+\mu,\lambda-\mu)$. 由题意可得

$$1\cdot(2\lambda+\mu)+2\cdot(-\lambda+\mu)-1\cdot(\lambda-\mu)=0$$

解得$\lambda=4\mu$，代回平面束方程可得直线方程为$3x-y+z-1=0$.□

5. 已知连续函数$f(x)$满足条件$f(x)=\int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{2x}$，求$f(x)=$________.

解：两端同时对x求导可得

$$f'(x)-3f(x)=2\mathrm{e}^{2x}$$

解得$f(x)=C\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}$，由于$f(0)=1$可得$C=3$，于是有$f(x)=3\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}$.□

6. 求微分方程$y''-2y'=\mathrm{e}^{2x}$满足条件$y(0)=1$，$y'(0)=1$的解________.

解：齐次方程$y''-2y'=0$的特征方程$\lambda^2-2\lambda=0$，解得$\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$，可得齐次方程通解为

$$\bar{y}=C_1+C_2\mathrm{e}^{2x}$$

设非齐次方程的特解为$y^*=Ax\mathrm{e}^{2x}$，代入可得$A=\frac{1}{2}$，综上可得非齐次方程的通解为

$$y=\bar{y}+y^*=C_1+\left(C_2+\frac{1}{2}x\right)\mathrm{e}^{2x}.\square$$

7. 设$y=y(x)$，$z=z(x)$由方程$z=xf(x+y)$和$F(x,y,z)=0$所确定的函数，其中f和F分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=$________.

解：分别在$z=xf(x+y)$和$F(x,y,z)=0$的两端对x求导可得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f+x\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)f'\\ F'_x+F'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{(f+xf')F'_y-xf'F'_x}{F'_y+xf'F'_z}，\quad F'_y+xf'F'_z\neq 0$$

8. 计算$\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$________，其中区域$\Omega$是由$\begin{cases}x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\\ x^2+y^2+(z-R)^2\leqslant R^2\end{cases}$所确定.

解：利用先二后一法可得

$$\iiint_{\Omega} z^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\frac{R}{2}}^{R} z^2 \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2-z^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{\frac{R}{2}} z^2 \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leqslant 2Rz-z^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\frac{R}{2}}^{R} \pi z^2 (R^2 - z^2)\mathrm{d}z + \int_{0}^{\frac{R}{2}} \pi z^2 (2Rz - z^2)\mathrm{d}z = \frac{59}{480}\pi R^5 . \square$$

二、计算题(第 9 大题 8 分，其余大题每道 10 分，共 68 分)

9. 求函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ 的极值.

解：求导可得

$$\begin{cases} f'_x = -3x^2 y - 2xy + 5x^4 \\ f'_y = 2y - x^3 - x^2 \end{cases}$$

解得驻点

$$P_1(0,0)，P_2\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)，P_3(1,1)$$

求二阶导可得

$$\begin{cases} f''_{xx} = A = -6xy - 2y + 20x^3 \\ f''_{xy} = B = -3x^2 - 2x \\ f''_{yy} = C = 2 \end{cases}$$

(1)当 $P_2\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)$ 时有 $A=\frac{100}{27}$，$B=-\frac{8}{3}$，$C=2$，于是有 $AC-B^2>0$，$A>0$，因此 P_2 为极小值点，极小值为 $f\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)=-\frac{4}{729}$；

(2)当 $P_3(1,1)$ 时有 $A=12$，$B=-5$，$C=2$，于是有 $AC-B^2<0$，$A>0$，因此 P_3 不是极值点；

(3)当 $P_3(1,1)$ 时有 $A=B=0$，$C=2$，于是有 $AC-B^2=0$，$A=0$，判别法失效，需要利用极值的定义. 因为有

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,y) = \lim_{x\to 0^+} f(x,2x^2) = \lim_{x\to 0^+} x^4(2-x) \geqslant 0 = f(0,0)$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x,y) = \lim_{x\to 0^+} f(x,2x^3) = \lim_{x\to 0^+} x^5(2x-1) \leqslant 0 = f(0,0)$$

所以 P_1 不是极值点.

综上，函数 $f(x,y)$ 在 $P_2\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)$ 时有极小值，极小值为 $f\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)=-\frac{4}{729}$.

10. 求常系数齐次微分方程组$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-2x+2y+2z\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-10x+6y+8z\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=3x-y-2z\end{cases}$的通解.

解：其系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 2\\ -10 & 6 & 8\\ 3 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

求特征值可得$\lambda_1=0$，$\lambda_2=1-\mathrm{i}$，$\lambda_2=1+\mathrm{i}$，其对应的特征向量分别为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}1+\mathrm{i}\\ 2\\ \mathrm{i}\end{pmatrix},\ \xi_3=\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\ 2\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

对应的三个线性无关的解为

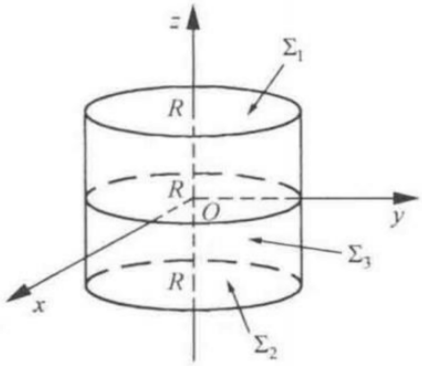
$$X_1(t)=\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix},\ X_2(t)=\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}\xi_2=\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}1+\mathrm{i}\\ 2\\ \mathrm{i}\end{pmatrix},\ X_3(t)=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\xi_2=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\ 2\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

取$X_3(t)$得到虚部和实部同样也是三个线性无关的解，分别是

$$X_1(t)=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix},\ \tilde{X}_2(t)=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}\cos t+\sin t\\ 2\cos t\\ \sin t\end{pmatrix},\ \tilde{X}_3(t)=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}\sin t-\cos t\\ 2\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}.\square$$

11. 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} \dfrac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R$，$z=-R(R>0)$ 所围成立体表面的外侧.

解： 如图所示



显然有

$$\iint_{\Sigma_1} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{\Sigma_2} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

记 Σ_1，Σ_2 在 xOy 平面上的投影区域为 D_{xy}，则

$$\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} \frac{z^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} \frac{R^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2} - \iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} \frac{(-R)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2} = 0$$

在 Σ_3 上有

$$\iint_{\Sigma_3} \frac{z^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

记 Σ_3 在 yOz 平面上的投影区域为 D_{yz}，则

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_3} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} &= \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{R^2+z^2} - \iint_{D_{yz}} \frac{-\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{R^2+z^2} \\ &= 2\iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{R^2+z^2} = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2} = \frac{1}{2}\pi^2 R\end{aligned}$$

所以 $\oiint_{\Sigma} \dfrac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{1}{2}\pi^2 R$.□

12. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{u\,\mathrm{d}v - v\,\mathrm{d}u}{u^2+v^2}$，其中 $u=ax+by$，$v=cx+dy\,(ad-bc\neq 0)$，L 为 xy 平面上环绕坐标原点的简单闭曲线，取逆时针方向为正.

解：将 u，v 代入可得

$$\oint_L \frac{u\,\mathrm{d}v - v\,\mathrm{d}u}{u^2+v^2} = (ad-bc)\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2} = (ad-bc)\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

对 P 和 Q 求导可得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(b^2+d^2)y^2-(a^2+c^2)x^2}{[(ax+by)^2+(cx+dy)^2]^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

由于 $(u,v)=(0,0)\Leftrightarrow(x,y)=(0,0)$，所以在 $(x,y)\neq(0,0)$ 的区域上，曲线积分与路径无关. 在简单闭曲线 L 内部取椭圆 Γ：$(ax+by)^2+(cx+dy)^2=\rho^2$，逆时针方向，$\rho>0$ 充分小. 则

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{u\,\mathrm{d}v - v\,\mathrm{d}u}{u^2+v^2} &= (ad-bc)\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}\\ &= (ad-bc)\frac{1}{\rho^2}\oint_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = (ad-bc)\frac{1}{\rho^2}\iint_D 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

这里 D 为椭圆 Γ 包围的区域. 对上式右边的二重积分作换元变换，令 $u=ax+by$，$v=cx+dy$，则有

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{ad-bc}$$

于是

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{u\,\mathrm{d}v - v\,\mathrm{d}u}{u^2+v^2} &= (ad-bc)\frac{1}{\rho^2}\iint_D 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{ad-bc}{\rho^2}\iint_D 2|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= \frac{ad-bc}{\rho^2}\cdot\frac{2}{|ad-bc|}\cdot\pi\rho^2 = \pm 2\pi.\square\end{aligned}$$

13. 讨论多元函数$z=f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在坐标原点处：

(1)是否连续；(2)偏导数是否存在；(3)是否可微；(4)偏导数是否连续.

解：(1)当$(x,y)\neq(0,0)$时，$|f(x,y)|\leqslant x^2+y^2$，故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$，所以函数在原点连续.

(2)在$(0,0)$点，$\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\dfrac{x^2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{x}$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2}}=0$$

即偏导数$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}$存在，且$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$；同理偏导数$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$也存在，且$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$.

(3)因为

$$\lim_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}}\frac{\triangle z-\left[\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\cdot\triangle x+\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\cdot\triangle y\right]}{\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}}=\lim_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}}\frac{[(\triangle x)^2+(\triangle y)^2]\sin\frac{1}{\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}}}{\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}}$$

$$=\lim_{\rho\to 0^+}\rho\sin\frac{1}{\rho}=0$$

故函数$f(x,y)$在$(0,0)$点可微，且$\mathrm{d}z=0\cdot\mathrm{d}x+0\cdot\mathrm{d}y=0$.

(4)当$(x,y)\neq(0,0)$时有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

由于$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sgn}x}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|}\text{不存在}$$

故偏导数$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$在原点不连续，同理偏导数$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$在原点不连续.□

14. 设函数$y(x)$满足方程

$$y(x)=x^3-x\int_1^x \frac{y(t)}{t^2}\mathrm{d}t+y'(x),\ x>0$$

并且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x^3}$存在，求函数$y(x)$.

解：将所给方程改写为

$$\frac{y(x)}{x}=x^2-\int_1^x \frac{y(t)}{t^2}\mathrm{d}t+\frac{y'(x)}{x}$$

将上式对x求导可得

$$y''(x)-\frac{x+1}{x}y'(x)=-2x^2$$

令$p=y'(x)$，则有

$$p'-\frac{x+1}{x}p=-2x^2$$

它的通解为

$$p=\mathrm{e}^{\int\frac{x+1}{x}\mathrm{d}x}\left(-2\int x^2\mathrm{e}^{-\int\frac{x+1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right)=C_1x\mathrm{e}^x+2x^2+2x$$

即得

$$y(x)=\int(C_1x\mathrm{e}^x+2x^2+2x)\mathrm{d}x=C_1(x-1)\mathrm{e}^x+\frac{2}{3}x^3+x^2+C_2$$

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x^3}$存在可得$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{C_1(x-1)\mathrm{e}^x+\frac{2}{3}x^3+x^2+C_2}{x^3}$存在，得$C_1=0$.又因为当$x=1$时有，$y(1)=1+y'(1)$，则

$$C_2=\frac{10}{3}$$

综上，所求函数为$y(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2+\frac{10}{3}$.□

15. 设$u(x,y)$在$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$上具有二阶连续偏导数，且有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2+y^2}{e^x+e^y}\cdot e^x$$

证明：$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}\left(x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy}{(\tan t-\arctan t)^2}=\dfrac{3\pi}{2}$.

解： 设$f(x)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，则有$\frac{\partial f}{\partial x}=x$，$\frac{\partial f}{\partial y}=y$.因此可得

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}\left(x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}(f_x u_x+f_y u_y)dx\,dy\\
&=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}[(x^2+y^2)u_x dy-(x^2+y^2)u_y dx]-\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}(x^2+y^2)(u_{xx}+u_{yy})dx\,dy\\
&=\frac{t^2}{2}\oint_{\partial D}(u_x dy-u_y dx)-\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}(x^2+y^2)(u_{xx}+u_{yy})dx\,dy\\
&=\frac{t^2}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}(u_{xx}+u_{yy})dx\,dy-\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}(x^2+y^2)(u_{xx}+u_{yy})dx\,dy\\
&=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}(t^2-x^2-y^2)\frac{x^2+y^2}{e^x+e^y}e^x dx\,dy\\
&=\frac{1}{4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}(t^2-x^2-y^2)(x^2+y^2)dx\,dy\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t(t^2-\rho^2)\rho^3 d\rho=\frac{\pi}{24}t^6
\end{aligned}$$

因此可得

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}\left(x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy}{(\tan t-\arctan t)^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{\pi}{24}t^6}{\frac{1}{36}t^6}=\frac{3\pi}{2}.\square$$