1 一 (18分)、给定方程 $x-\ln x-2=0$,

(1) 分析该方程存在几个根, 并找出每个根所在的区间 (区间长度取 1);

(2) 用收敛的不动点迭代格式求出最小根 (取 $\epsilon=10^{-3}$, 保留小数点后 3 位), 并证明迭代法的收敛性。

(5.0分)

二(18分)、给定方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 其中

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & w & w\\ 3w & 1 & 0\\ w & 0 & 1\end{pmatrix},$$

而 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$, $w\in\mathbb{R}$. 试确定 w 的取值范围, 使求解该方程组的 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式都收敛.

(5.0分)

3 三 (20分)、(1) 已知连续函数 $f(x)$ 在 $x=-3, -1, 0, 5$ 时的值分别是 $-2, 0, 2, 5$, 用二次拉格朗日插值估计 $f(3)$;

(2) 确定经验曲线 $y=ae^{bx}$ 中的参数 a, b, 使该曲线与下列数据相拟合. (保留小数点后 4 位)

x_i	1	2	3	4
y_i	40	30	20	15

(5.0分)

4 四 (20分)、给定定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4-\sin^2 x}\,dx$$

(用 7 个点上的函数值计算),

(1) 用复化梯形法计算 T_6;

(2) 用复化辛普森法计算 S_3.

(保留小数点后 4 位)

(5.0分)

5 五 (17分)、用梯形公式解初值问题:

$$\begin{cases} y' = e^{-x}\cos x - y, & 0 \le x \le 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

取步长 $h = 0.1$, 计算 $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$ 和 $y(0.4)$ 的近似值. (保留小数点后 4 位)

(5.0分)

6

六 (7分)、考虑求 $\sqrt{c}$ 的牛顿迭代公式 $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{c}{x_k})$, 对任意的初始值 x_0, 证明: $x_k \geq \sqrt{c}$, 且 $\{x_k\}$ 是单调递减序列, 其中 $k \geq 1$.

(5.0分)

40. 给定方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & \omega & \omega \\ 3\omega & 1 & 0 \\ \omega & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^3,\omega\in\mathbf{R}$. 试确定 ω 的取值范围, 使求解该方程组的 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式都收敛.

解 Jacobi 迭代矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & \omega & \omega \\ 3\omega & \lambda & 0 \\ \omega & 0 & \lambda \end{vmatrix}=0,$$

即 $\lambda^3-4\omega^2\lambda=0$, 求得其根为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2\omega,\lambda_3=-2\omega$. 当且仅当 $|2\omega|<1$, 即 $|\omega|<\dfrac{1}{2}$ 时, Jacobi 格式收敛.

Gauss-Seidel 迭代矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & \omega & \omega \\ 3\lambda\omega & \lambda & 0 \\ \lambda\omega & 0 & \lambda \end{vmatrix}=0,$$

即 $\lambda^3-4\lambda^2\omega^2=0$, 求得 $\lambda_{1,2}=0,\lambda_3=4\omega^2$. 迭代格式收敛 $\Longleftrightarrow|4\omega^2|<1$, 即 $|\omega|<\dfrac{1}{2}$.

综上, 当 $|\omega|<\dfrac{1}{2}$ 时, Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式都收敛.

$$\begin{cases} 1 > |\beta w| \\ 1 > |w| \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3} < w < \frac{1}{3}$$

即满足要求.

3. (1) 由于采用二次插值 取 ~~x=3~~ $x=-1$, $x=0$, $x=5$ 进行插值

则 $L_2(x) = \frac{x(x-5)}{-1\times(-1-5)} \times 0 + \frac{(x+1)(x-5)}{1\times(0-5)} \times 2 + \frac{(x+1)x}{(5+1)\times 5} \times 5$

$= -\frac{7}{30}x^2 + \frac{53}{30}x + 2$

取 $x=3$ 代入 得 $f(3) \approx L_2(3) = 5.2$

(2) 取 $\ln y = \ln a + bx$

令 $\bar{y} = \ln y$ $A = \ln a$ 则有 $\bar{y} = A + bx$

取 $\Phi = \mathrm{span}\{1, x\}$ $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$

则 $(\varphi_0, \varphi_0) = 4$ $(\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_0) = 10$

$(\varphi_1, \varphi_1) = 30$ $(\varphi_0, f) = 105$

$(\varphi_1, f) = 220$

由 $\begin{cases} 4A + 10b = 105 \\ 10A + 30b = 220 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 47.5 \\ b = -8.5 \end{cases}$ 故 $y = e^{47.5} \cdot e^{-8.5x}$

4. $n=7$ 用复合梯形公式 $h=\frac{\frac{\pi}{3}-0}{7}=\frac{\pi}{21}$ $f(x)=\sqrt{4-\sin^2x}$.

$x_k=\frac{\pi}{21}k \ (k=1,2\cdots6)$

$T_7=\frac{h}{2}\left[f(0)+2\sum_{k=1}^{6}f(x_k)+f(\frac{\pi}{3})\right]\approx2.0927$

用复合辛普森公式 $h=\frac{\pi}{21}$. $f(x)=\sqrt{4-\sin^2x}$ d $x_k=\frac{\pi}{21}k \ (k=1,2\cdots6)$

$x_{k+\frac{1}{2}}=\frac{k\pi}{21}+\frac{\pi}{42}$ $k=0,1,2\cdots6$

$S_7=\frac{h}{6}\left[f(0)+4\sum_{k=0}^{6}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{6}f(x_k)+f(\frac{\pi}{3})\right]$

≈2.0928

补充

五. 由于梯形法计算公式为 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})\right]$

故由于 $f(x)=e^{-x}\cos x-y$

$\therefore y_{n+1}=y_n+\frac{0.1}{2}\left(e^{-x_n}\cos x_n-y_n+e^{-x_{n+1}}\cos x_{n+1}-y_{n+1}\right)$

整理得 $y_{n+1}=\frac{1}{1.05}y_n+\frac{1}{21}\left[e^{-x_n}\cos x_n-y_n+e^{-(x_n+0.1)}\cos(x_n+0.1)\right]$

取 $y(0)=0$ 则 $y(0.1)\approx0.0907$

$y(0.2)\approx0.1642$

$y(0.3)\approx0.2228$

$y(0.4)\approx0.2688$

更正

证法二　设 $f(x)=x^2-a(a>0)$. 易知 $f(x)=0$ 在 $[0,+\infty)$ 内有唯一实根 $x^*=\sqrt{a}$. 对 $f(x)$ 应用牛顿迭代法，得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right), k=0,1,2,\cdots$$

当 $x_0>\sqrt{a}$ 时，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 单调递减有下界 $\sqrt{a}$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\sqrt{a}$.

当 $x_0\in(0,\sqrt{a})$ 时，

$$x_1=\frac{1}{2}\left[x_0+\frac{a}{x_0}\right]=\frac{1}{2}\left[\sqrt{x_0}-\sqrt{\frac{a}{x_0}}\right]+\sqrt{a}>\sqrt{a}$$