

# 第一章

## 复数与复变函数

### 内容提要

#### 一、复数及其代数运算和几何表示

##### 1. 复数的概念

定义 设  $x, y$  都是实数, 我们把形如  $z = x + iy$  的表达式称为复数. 其中  $i$  称为虚数单位, 且具有性质  $i^2 = -1$ ,  $x$  和  $y$  分别称为复数  $z$  的实部和虚部, 记为

$$x = \operatorname{Re}(z), y = \operatorname{Im}(z).$$

(1) 当  $x=0, y \neq 0$  时,  $z = iy$  称为纯虚数.

(2) 当  $y=0$  时,  $z = x + 0 \cdot i$  视为实数  $x$ .

(3) 设  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ , 则  $z_1 = z_2$ , 当且仅当  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ .

(4) 当  $x = y = 0$  时, 称  $z = 0$ .

##### 2. 复数的运算

###### (1) 加(减)法

两个复数的加(减)法, 定义为实部与实部相加(减)及虚部与虚部相加(减), 即



$$(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

## (2) 乘法

两个复数相乘按多项式乘法法则相乘并注意  $i^2 = -1$ , 即

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

## (3) 除法

若  $z_2 \neq 0$ , 将满足  $z_2 \cdot z = z_1$  的复数  $z$  定义为  $z_1$  除以  $z_2$  的商,

记为  $z = \frac{z_1}{z_2}$ , 即

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

## (4) 复数的共轭及性质

设  $z = x + iy$ , 称  $x - iy$  为复数  $z$  的共轭复数, 记为  $\bar{z}$  或  $z^*$ , 即  $\bar{z} = x - iy$ , 它有如下性质:

$$\textcircled{1} \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} (z_2 \neq 0);$$

$$\textcircled{2} \overline{\bar{z}} = z, z\bar{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2;$$

$$\textcircled{3} \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

## 3. 复数的几种表示方法

## (1) 复数的坐标表示

每一个复数  $z = x + iy$  确定平面上一个坐标为  $(x, y)$  的点, 反之亦然, 这意味着复数集与平面上的点之间存在一一对应. 由于这个特殊的一一对应存在, 我们常把以  $x$  为实轴,  $y$  为虚轴的平面称之为复平面.  $(x, y)$  为复数  $z = x + iy$  的坐标表示形式, 称为点  $z$ .

## (2) 复数的向量表示

记复数  $z = x + iy$  在平面上确定的点为  $P$ , 原点为  $O$ . 设复数  $z$  对应向量  $\overrightarrow{OP}$ . 这也是一个特别的一一对应. 为此我们称向量  $\overrightarrow{OP}$  为复数  $z$  的向量表示式.



向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 $z$ 的模或绝对值,记为 $|z|$ ,我们有结论:

$$z\bar{z} = |z|^2 = |z^2|.$$

当 $z \neq 0$ 时,以正实轴为始边,向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边所确定的角 $\theta$ 称为复数 $z$ 的辐角,记为

$$\operatorname{Arg} z = \theta.$$

当 $z=0$ 时,辐角不确定.

$\operatorname{Arg} z$ 是一个多值函数.称满足条件 $-\pi < \theta \leq \pi$ 的 $\theta$ 为幅角的主值,记为 $\arg z$ .从而有

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

利用复数的向量表示法对任意复数 $z_1, z_2$ ,三角不等式

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

的意义为三角形的一边不大于两边之和,不等式

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

表示三角形的一边不小于两边之差的绝对值.

### (3) 复数的三角表示

设 $z \neq 0$ ,  $r$ 是 $z$ 的模,  $\theta$ 是 $z$ 的任意一个辐角.则

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

### (4) 复数的指数表示

在三角表式示中,利用欧拉公式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 可得

$$z = re^{i\theta},$$

称为复数 $z$ 的指数表示式.

以上复数的不同表示法仅是形式上的差异,它们各有其特点.复数及其运算的几何解释可以从向量表示法得到,复数运算中模与辐角的变化规律可以由三角或指数表示法得到.

## 4. 复数的乘幂与方根

### (1) 积与商

设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  则



$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (r_2 \neq 0).$$

即

$$\textcircled{1} |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0);$$

$$\textcircled{2} \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

注意: (i) 正确理解等式②的含义;

(ii) 乘积与商的几何解释.

## (2) 乘幂

设  $z = r e^{i\theta}$ , 则  $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ . 棣莫弗(De Moivre)公式:  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$  及其应用.

## (3) 方根

$$\text{设 } z = r e^{i\theta}, \text{ 则 } \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

$$(k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

注意:  $\sqrt[n]{z}$  的  $n$  值性及几何解释.

# 二、复变函数及其极限与连续

## 1. 复变函数的概念

复变函数是高等数学中一元实变函数概念的推广,二者定义的表述形式几乎完全一样,只要将定义中的“实数(或实数集)”换为“复数(或复数集)”就行了.但对下面几点应多加注意:

(1) 实变函数是单值函数,而复变函数有单值函数和多值函数之分.

(2) 复变函数  $w = f(z)$  是从  $z$  平面上的点集  $G$  到  $w$  平面上的点集  $G^*$  的一个映射,因此,它不但可以把  $z$  平面上的点映射(或变换)为  $w$  平面上的点,而且可以把  $z$  平面上的曲线或图形映射为  $w$  平面上的曲线或图形,实现两个不同复平面上的图形之间的有趣的变换,为简化或研究某些问题提



供了可能.

(3) 由于一个复变函数  $w=f(z)$  对应着两个二元实变函数:

$$u=u(x,y), \quad v=v(x,y),$$

所以, 可以将对复变函数的研究转化为对两个二元实变函数的研究. 这是研究复变函数的常用思想方式之一.

## 2. 平面点集

(1)  $z_0$  的  $\delta$ -邻域: 满足关系  $|z-z_0|<\delta$  的点  $z$  的全体称为点  $z_0$  的一个  $\delta$ -邻域, 而满足  $0<|z-z_0|<\delta$  的点  $z$  的全体称为点  $z_0$  的一个去心  $\delta$ -邻域.

(2) 内点: 设  $G$  是一平面点集,  $z_0 \in G$ , 若存在  $z_0$  的某个邻域也包含于  $G$ , 则称  $z_0$  为  $G$  的内点.

(3) 开集: 若  $G$  的每个点都是内点, 则称  $G$  为开集.

(4) 连通集: 对  $G \subset C$  (即复平面),  $G$  非空, 若存在一对  $G$  中不交的开集  $G_1, G_2$ , 满足  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset, G_2 \cap G \neq \emptyset$ , 且  $G \subset (G_1 \cup G_2)$  则称  $G$  为连通集.

(5) 区域: 连通的开集叫区域. 应该注意的是, 可以证明, 对于开集, 连通性等价于另一种更直观的属性, 即道路连通, 也即  $G$  内任意两点都可以用一条  $G$  中的折线连接.

(6) 边界: 若  $z_0$  点的任意一个邻域内既有区域  $G$  中的点, 又不属于  $G$  中的点, 则  $z_0$  称为区域  $G$  的一个边界点. 由  $G$  的全体边界点组成的集合称为  $G$  的边界.

(7) 闭区域: 区域  $G$  及其边界一起构成闭区域, 记为  $\bar{G}$ .

(8) 简单闭曲线: 设曲线  $C: z=z(t)=x(t)+iy(t), a \leq t \leq b$ . 当  $x(t)$  与  $y(t)$  连续时, 称  $C$  为连续曲线. 对  $t_1, t_2 \in [a, b)$ , 当  $t_1 \neq t_2$  而有  $z(t_1)=z(t_2)$  时, 点  $z(t_1)$  称为曲线  $C$  的重点. 没有重点的连续曲线  $C$ , 称为简单 (或 Jordan) 曲线. 如果简单曲线  $C$  的两个端点重合, 则  $C$  称为简单闭曲线.

由以上定义知, 简单曲线自身不相交, 简单闭曲线则只有起点与终点重合.

(9) 光滑曲线: 曲线  $z=z(t)=x(t)+iy(t), a \leq t \leq b$ , 当  $x'(t)$



与  $y'(t)$  连续且  $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$  时, 称为光滑曲线, 由几条光滑曲线依次连接而成的曲线, 称为按段光滑曲线.

(10) 单连通域: 若属于区域  $G$  的任何简单闭曲线  $C$  的内部也属于  $G$ , 则称  $G$  为单连通域. 否则称为多连通域.

### 3. 复变函数的极限与连续性

(1) 定义: 设函数  $w = f(z)$  在  $z_0$  点的去心邻域  $0 < |z - z_0| < \rho$  内有定义, 若任给  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0 (0 < \delta \leq \rho)$ , 当  $0 < |z - z_0| < \delta$  时, 有  $|f(z) - A| < \epsilon$  成立, 则称常数  $A$  为  $f(z)$  当  $z$  趋于  $z_0$  时的极限, 记为:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A.$$

若  $f(z)$  在  $z_0$  点有定义, 且  $f(z_0) = A$ , 则称  $f(z)$  在点  $z_0$  连续. 若  $f(z)$  在区域  $G$  内每一点都连续, 我们称  $f(z)$  在  $G$  内连续.

(2) 设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $A = u_0 + iv_0$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ , 那么

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0 \end{cases} \quad (1)$$

由此可见, 复变函数极限的定义虽在形式上与一元实函数的极限定义相似, 但实质上却相当于二元实函数的极限. 这导致了第二章用极限定义的复变函数的导数的概念, 较之一元实变函数的导数概念, 其要求要苛刻得多.

(3) 如果  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ ,  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$ , 那么

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = AB,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$



(4) 由定义及式①易得连续的充要条件:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0) \end{cases}$$

两个连续函数  $h = g(z)$ ,  $w = f(h)$  复合所得的函数  $w = f[g(z)]$  仍是连续函数.



## 典型例题与解题技巧

**【例 1】** 将复数  $z = \frac{(\sqrt{3}+i)(2-2i)}{(\sqrt{3}-i)(2+2i)}$  化为三角形形式与指数形式.

**解题分析** 将一个复数  $z$  化为三角形形式与指数形式的关键在于求出该复数的模与辐角的主值. 通常的方式是先将  $z$  化成代数形式  $z = x + iy$ , 再利用  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  与反正切公式分别求出它的模与主辐角. 本题中由于  $z$  的分子与分母互为共轭复数, 而复数与其共轭复数的模相等, 因此, 容易利用复数商的模公式求出  $|z|$ . 至于主辐角除可反正切公式求得外, 也可以利用关于乘积与商的辐角公式来求. 下面给出两种解法, 便于读者比较.

**解题过程** 将  $z$  的分子与分母同乘以  $(\sqrt{3}+i)(2-2i)$ , 得  $z = \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{|\sqrt{3}+i|^2} \cdot \frac{(2-2i)^2}{|2-2i|^2} = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(-i) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ , 所以  $|z| = 1$ ,  $\arg z = \arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\pi}{6}$ . 从而得到  $z$  的三角形式与指数形式:

$$z = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} = e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

另一种解法是, 由于分子与分母恰为一对共轭复数, 故其模相同, 于是



$$|z| = \frac{|(\sqrt{3}+i)(2-2i)|}{|(\sqrt{3}-i)(2-2i)|} = 1$$

$$\operatorname{Arg} z = 2[\operatorname{Arg}(\sqrt{3}+i) + \operatorname{Arg}(2-2i)]$$

$$= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

【例 2】 设  $z_1, z_2$  为复平面上任意两点, 证明不等式

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

分析 这个不等式的几何意义为以  $z_1, z_2, z_1 - z_2$  为边的三角形, 一边的长度 ( $|z_1 - z_2|$ ) 不小于两边的长度之差的绝对值 ( $||z_1| - |z_2||$ ). 证明这个不等式可利用书中已证的三角不等式.

证明  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$$\because |z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$$

$$\therefore |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \quad \text{①}$$

$$\because |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1|$$

$$\therefore |z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2| \quad \text{②}$$

利用①与②得

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

【例 3】 设复数  $\alpha$  满足  $|\alpha| < 1$ , 试证

$$\left| \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \right| \begin{cases} = 1, & \text{当 } |z| = 1 \\ < 1, & \text{当 } |z| < 1 \\ > 1, & \text{当 } |z| > 1 \end{cases}$$

分析 比较复数  $\frac{z_1}{z_2}$  的模  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$  与 1 的大小等价于比较  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2$  与 1 的大小, 也相当于比较  $|z_1|^2$  与  $|z_2|^2$  的大小. 此时常用公式  $|z|^2 = z\bar{z}$ ,  $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2)$  以及三角不等式.

证明 由等式

$$|z-\alpha|^2 = |z|^2 + |\alpha|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}z)$$

$$|1-\bar{\alpha}z|^2 = 1 + |\alpha|^2 |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}z)$$

可知

$$|z-\alpha|^2 - |1-\bar{\alpha}z|^2 = (|z|^2 - 1)(1 - |\alpha|^2)$$





注意到  $|\alpha| < 1$ , 便有

$$|z - \alpha|^2 - |1 - \bar{\alpha}z|^2 \begin{cases} = 0, & \text{当 } |z| = 1 \\ < 0, & \text{当 } |z| < 1 \\ > 0, & \text{当 } |z| > 1 \end{cases}$$

从而

$$\left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|^2 = \frac{|z - \alpha|^2}{|1 - \bar{\alpha}z|^2} \begin{cases} = 1, & \text{当 } |z| = 1 \\ < 1, & \text{当 } |z| < 1 \\ > 1, & \text{当 } |z| > 1 \end{cases}$$

由此即得要证明的结论.

【例 4】函数  $w = \frac{1}{z+1}$  将  $z$  平面上的下列曲线变成  $w$  平面上的什么曲线?

$$(1) x^2 + y^2 = 1; \quad (2) y = x + 1; \quad (3) y = 1.$$

解题分析 解此题的要点是利用公式

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

及题中映射

$$w = \frac{1}{z+1}, \quad z = \frac{1}{w} - 1.$$

解题过程 令  $w = u + iv$

(1) 由  $x^2 + y^2 = 1$  有

$$\frac{1}{4}(z + \bar{z})^2 - \frac{1}{4}(z - \bar{z})^2 = 1$$

即

$$z\bar{z} = 1$$

$$\left(\frac{1}{w} - 1\right)\left(\frac{1}{\bar{w}} - 1\right) = 1$$

$$\frac{(1-w) \cdot (1-\bar{w})}{w\bar{w}} = 1$$

$$(1-w)(1-\bar{w}) = w\bar{w}$$

$$w + \bar{w} = 1$$



即

$$u = \frac{1}{2}$$

即圆  $x^2 + y^2 = 1$  映成了直线  $u = \frac{1}{2}$ .

(2) 由  $y = x + 1$  知

$$\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + 1$$

代入  $z = \frac{1}{w} - 1$  得

$$\frac{1}{2i} \left( \frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} - 2 \right) + 1$$

两边乘以  $2i\bar{w}w$  得

$$\bar{w} - w = i(w + \bar{w})$$

由前设  $\bar{w}u = -iv$  知

$$\bar{w} - w = -2iv$$

$$w + \bar{w} = 2u$$

代入上式则有

$$u = -v$$

即直线  $y = x + 1$  被映成了直线  $u = -v$ .

(3) 由  $y = 1$  知

$$\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = 1$$

$$z - \bar{z} = 2i$$

$$\frac{1}{w} - 1 - \left( \frac{1}{\bar{w}} - 1 \right) = 2i$$

$$\frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} = 2i$$

$$\bar{w} - w = 2i\bar{w}w$$

即

$$2i(u^2 + v^2) = -2iv$$



$$u^2 + v^2 + v = 0$$

所以直线  $y=1$  映成了圆  $u^2 + v^2 + v = 0$ .

【例 5】判断下列函数在给定点处的极限是否存在. 若存在, 试求出极限的值.

$$(1) f(z) = \frac{z \operatorname{Re}(z)}{|z|}, \quad z \rightarrow 0;$$

$$(2) f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}, \quad z \rightarrow 0;$$

$$(3) f(z) = \frac{z-i}{z(z^2+1)}, \quad z \rightarrow i.$$

**解题分析** 判断一个复变函数在给定点处的极限是否存在有三种方法: 一是用函数极限的定义, 类似于实变函数, 定义多用于验证某函数的极限等式, 本书对这种方法不作更多的要求. 但是, 读者应当会用极限定义来判定某函数的极限不存在; 第二种方法是利用教材第 26 页中的定理一, 讨论函数的实部  $u = u(x, y)$  与  $v = v(x, y)$  的极限是否存在, 这是判断极限是否存在的常用方法; 第三种方法是利用教材中第 27 页的定理二, 直接利用极限的有理运算法则求函数的极限. 与实变函数一样, 应用时必须满足这些法则成立的条件.

下面给出的解法都基于以上三种方法, 其中有的小题给出了多种解法.

**解题过程** (1) 由于  $|f(z)| = |z| \left| \frac{\operatorname{Re}(z)}{z} \right| \leq |z|$ , 所以, 对于任给的

$\varepsilon > 0$ , 取  $d = \varepsilon$ , 则当  $0 < |z| < d$  时, 恒有

$$|f(z) - 0| = |f(z)| \leq |z| < \varepsilon$$

根据极限定义, 当  $z \rightarrow 0$  时,  $f(z)$  的极限存在, 并且其值为 0.

(2) 令  $z = x + iy$ , 则  $f(z) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ , 从而有

$$u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = 0.$$



令  $z$  沿直线  $y=kx$  趋于 0, 则

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u(x,y) = \lim_{(x \rightarrow 0, x^2 + k^2 x^2)} \frac{x^2 - k^2 x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

由于它随  $k$  的不同而不同, 因此, 当  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时  $u(x, y)$  的极限不存在, 故  $z \rightarrow 0$  时,  $f(z)$  的极限不存在.

(3) 由于  $f(z)$  的分子与分母中含有极限为零的因子, 消去后得

$$f(z) = \frac{z-i}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z(z+i)} (z \neq i),$$

所以

$$\lim_{z \rightarrow i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z(z+i)} = -\frac{1}{2}.$$



## 历年考研真题评析

【题 1】把复数  $z = 1 + \sin\alpha + i\cos\alpha$ ,  $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$  化为三角表示式

与指数表示式, 并求  $z$  的辐角的主值. (山东大学 2005 年)

解题分析 本题主要考察复数的三角表示法和指数表示法, 以及辐角和主值的求法.

解题过程  $z = 1 + \sin\alpha + i\cos\alpha$

$$\begin{aligned} &= 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + i2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

所以  $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$ , 所以  $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$ .

因此

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) < 0$$

故



$$r = |z| = -2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

由于

$$-\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right),$$

从而得  $z$  的三角表示式:

$$z = -2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \right],$$

及指数表示式:

$$z = -2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) e^{i\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

注意, 这里的辐角  $\theta = \frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$  不是主值, 因为

$$\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < \frac{7}{4}\pi,$$

但它只能与主值相差一个  $2\pi$  的整数倍, 从上式容易看出, 如果不等式的每项各加  $(-2\pi)$ , 得

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < -\frac{\pi}{4}.$$

这个  $-\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$  就符合关于主值的要求了. 因此  $\arg z = -$

$\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$ . 如果  $\theta$  取主值, 那么  $z$  的三角表示式与指数表

示式分别为

$$z = -2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \right],$$

$$z = -2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) e^{-i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

【题 2】 设  $n$  为自然数, 证明等式

$$\left( \frac{1 + \sin\theta + i\cos\theta}{1 + \sin\theta - i\cos\theta} \right)^n = \cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$



(北京大学 2005 年)

**分析** 上面涉及到复数  $n$  次幂的等式,通常需要先将被数化为三角形式,然后再用 De Moivre 公式  $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$  证明.

**证明** 令  $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ , 可知

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin\theta + i\cos\theta}{1 + \sin\theta - i\cos\theta} &= \frac{1 + \cos\varphi + i\sin\varphi}{1 + \cos\varphi - i\sin\varphi} \\ &= \frac{2\cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2i\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{2\cos^2 \frac{\varphi}{2} - 2i\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{\varphi}{2} + i\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2} - i\sin \frac{\varphi}{2}} \\ &= \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i\sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 = \cos\varphi + i\sin\varphi, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 + \sin\theta + i\cos\theta}{1 + \sin\theta - i\cos\theta} \right)^n &= \cos n\varphi + i\sin n\varphi \\ &= \cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right). \end{aligned}$$

**【题 3】** 求满足关系式  $\cos\theta < r < 3\cos\theta$  ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) 的点  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$  的集合  $G$ . 若  $G$  为一区域, 则指明它是单连通域还是多连通域. (中山大学 2006 年)

**解题分析** 此题考察知识点“单连通域”和“多连通域”.

**解题过程** 由  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , 可知

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

于是所给的关系式  $\cos\theta < r < 3\cos\theta$  变为



$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} < \sqrt{x^2+y^2} < \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

或

$$x < x^2 + y^2 < 3x$$

于是可见此区域是单连通的.

【题 4】在映射  $w = z^2$  下, 求下列平面点集在  $w$  平面上的象.

(1) 线段  $0 < r < 2, \theta = \frac{\pi}{4}$ ;

(2) 双曲线  $x^2 - y^2 = 4$ ;

(3) 扇形区域  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}, 0 < r < 2$ . (山东大学 2005 年)

解题分析 此题是关于映射的复习.

解题过程 (1) 设  $z = re^{i\theta}, w = \rho e^{i\varphi}$ , 则  $\rho = r^2, \varphi = 2\theta$ , 故线段  $0 < r < 2$ ,

$\theta = \frac{\pi}{4}$  映射为  $0 < \rho < 4, \varphi = \frac{\pi}{2}$ , 也是线段 [见图 1-1

(a)].

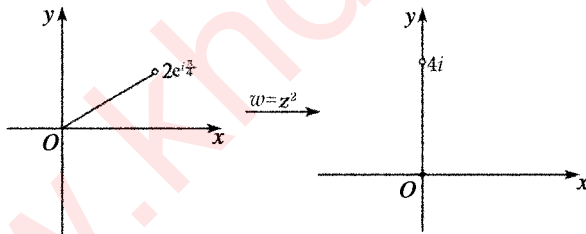


图 1-1(a)

(2) 设  $z = x + iy, w = u + iv$ , 则

$$z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

故

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy$$

所以  $x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow u = 4$ , 为平行于  $v$  轴的直线 [见图 1-1(b)].

(3) 设  $z = re^{i\theta}, w = \rho e^{i\varphi}$ , 则

$$\rho = r^2, \varphi = 2\theta$$

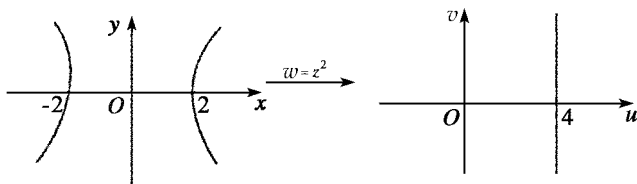


图 1-1(b)

故扇形域  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}, 0 < r < 2$  映射为  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < \rho < 4$ , 也是扇形域[见图 1-1(c)].

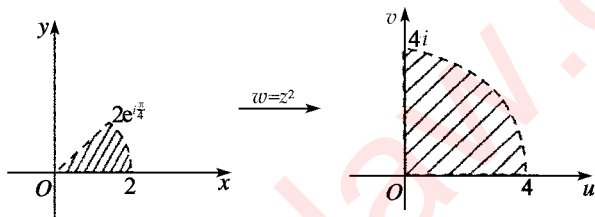


图 1-1(c)

### 【题 5】 试证函数

$$f(z) = \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{z} - \frac{\bar{z}}{z} \right)$$

当  $z \rightarrow 0$  时的极限不存在. (天津大学 2005 年)

分析 这又是一道关于复变函数的极限问题.

$$\begin{aligned} \text{证明 } f(z) &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{z^2 - \bar{z}^2}{z \bar{z}} \\ &= \frac{(z + \bar{z})(z - \bar{z})}{2i |z|^2} = \frac{2\operatorname{Re}(z) \cdot 2i \operatorname{Im}(z)}{2i |z|^2} \\ &= \frac{2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)}{|z|^2} \end{aligned}$$

令  $z = x + iy$ , 则有  $f(z) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ . 由此得

$$u(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = 0$$





让  $z$  沿直线  $y = mx$  趋于零, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx \rightarrow 0}} u(x, y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{2m}{1 + m^2}.\end{aligned}$$

可见沿不同斜率的直线,  $u(x, y)$  趋于不同的值, 所以  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y)$  不存在. 虽然  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} v(x, y) = 0$ , 但根据前述结论,  $\lim_{x \rightarrow z_0} f(z)$  不存在.



## 课后习题全解

○1. 求下列复数  $z$  的实部和虚部、共轭复数、模与辐角:

$$1) \frac{1}{3+2i}; 2) \frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}; 3) \frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}; 4) i^8 - 4i^{21} + i.$$

解  $1) \frac{1}{3+2i} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{3}{13}; \operatorname{Im}(z) = -\frac{2}{13}; \bar{z} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i;$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(-\frac{2}{13}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{13}}; \arg z = -\operatorname{arctg} \frac{2}{3};$$

$$\operatorname{Arg} z = -\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$2) \frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = -i - \frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -i - \frac{3i-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{3}{2}; \operatorname{Im}(z) = -\frac{5}{2}; \bar{z} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i; |z| =$$

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}; \arg z = -\operatorname{arctg} \frac{5}{3}; \operatorname{Arg} z = -\operatorname{arctg}$$

$$\frac{5}{3} + 2k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$3) \frac{(3+4i)(2-5i)}{2i} = \frac{26-7i}{2i} = -\frac{7}{2} - 13i$$



$$\operatorname{Re}(z) = -\frac{7}{2}; \operatorname{Im}(z) = -13; \bar{z} = -\frac{7}{2} + 13i;$$

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 13^2} = \frac{5}{2}\sqrt{29}; \arg z = \arctg \frac{26}{7} - \pi;$$

$$\operatorname{Arg} z = \arctg \frac{26}{7} - \pi + 2k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$4) i^8 - 4i^{21} + i = i^{4+4} - 4i^{4 \times 5 + 1} + i = 1 - 4i + i = 1 - 3i$$

$$\operatorname{Re}(z) = 1; \operatorname{Im}(z) = -3; \bar{z} = 1 + 3i; |z| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}; \arg z = -\arctg 3; \operatorname{Arg} z = -\arctg 3 + 2k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

○2. 当  $x, y$  等于什么实数时, 等式  $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$  成立?

解 由所给等式可得

$$x+1+i(y-3) = (1+i)(5+3i) = 2+8i$$

利用复数相等的概念

$$\begin{cases} x+1=2 \\ y-3=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=11 \end{cases},$$

即  $x=1, y=11$  时等式成立.

○3. 证明虚单位  $i$  有这样的性质:  $-i = i^{-1} = \bar{i}$ .

证明 因  $-i = \frac{-i \cdot i}{i} = -\frac{i^2}{i} = \frac{1}{i} = i^{-1}, \bar{i} = -i$ , 所以

$$-i = i^{-1} = \bar{i}.$$

○4. 证明:

$$1) |z|^2 = z\bar{z};$$

$$2) \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2;$$

$$3) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2;$$

$$4) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0);$$

$$5) \overline{\bar{z}} = z;$$

$$6) \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(\bar{z} + z), \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

证明 1) 设  $z = x + iy$ , 则  $|z|^2 = x^2 + y^2, z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ , 从而有  $|z|^2 = z\bar{z}$ .



2) 设  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ , 则

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \pm z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)} \\ &= \overline{(x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i} = (x_1 \pm x_2) - (y_1 \pm y_2)i \\ \overline{z_1 \pm z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)} \pm \overline{(x_2 + iy_2)} \\ &= (x_1 - iy_1) \pm (x_2 - iy_2) = (x_1 \pm x_2) - (y_1 \pm y_2)i\end{aligned}$$

从而有  $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$ .

3) 设  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ , 则

$$\begin{aligned}\overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} \\ &= \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)} \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{x_1 + iy_1} \overline{x_2 + iy_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)\end{aligned}$$

从而有  $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$ .

$$\begin{aligned}4) \text{ 由 } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\right)} = \frac{\overline{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2)i}}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) - (x_2 y_1 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} &= \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) - (x_2 y_1 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}\end{aligned}$$

可知  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$ .

5) 设  $z = x + iy$ , 则  $\overline{z} = x - iy, \overline{\overline{z}} = \overline{(x - iy)} = x + iy = z$ . 即  $\overline{\overline{z}} = z$ .

6) 设  $z = x + iy$ , 则  $\overline{z} = x - iy$ , 从而

$$\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) = x = \operatorname{Re}(z)$$

$$\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}(x + iy - x + iy) = \frac{1}{2i}(2iy) = y = \operatorname{Im}(z)$$



结论得证.

- ◎5. 对任何  $z, z^2 = |z|^2$  是否成立? 如果是, 就给出证明. 如果不是, 对哪些  $z$  值才成立?

分析 考查复数性质.

解 对于任何复数  $z = x + iy$ , 易知

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi, |z|^2 = x^2 + y^2.$$

于是, 由  $z^2 = |z|^2$  可得

$$x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 + y^2$$

比较两边的实虚部, 等价地有

$$2xy = 0, x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 0 \text{ 即 } y = 0.$$

故对任何虚数  $z, z^2 = |z|^2$  不成立, 只有当  $z$  为实数 (虚部为零) 时, 等式  $z^2 = |z|^2$  才成立.

- ◎6. 当  $|z| \leq 1$  时, 求  $|z^n + a|$  的最大值, 其中  $n$  为正整数,  $a$  为复数.

分析 主要考查最大值问题.

解 由三角不等式及  $|z| \leq 1$  可知

$$|z^n + a| \leq |z|^n + |a| \leq 1 + |a|$$

而且当  $z_0 = e^{i \frac{\arg a}{n}}$  时,  $|z_0^n + a| = |e^{i \arg a} + a| = |e^{i \arg a} + |a| e^{i \arg a}| = 1 + |a|$ , 故其最大值为  $1 + |a|$ .

- ◎7. 判定下列命题的真假:

- 1) 若  $c$  为实常数, 则  $c = \bar{c}$ ;
- 2) 若  $z$  为纯虚数, 则  $z \neq \bar{z}$ ;
- 3)  $i < 2i$ ;
- 4) 零的辐角是零;
- 5) 仅存在一个数  $z$ , 使得  $\frac{1}{z} = -z$ ;
- 6)  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ;
- 7)  $\frac{1}{i} \bar{z} = i \bar{z}$ .

分析 一些命题的真假, 要求有比较好的掌握基础知识.

解 1) 真; 2) 真; 3) 假 (复数不能比较大小); 4) 假 (复数零的辐角是



不确定的);5)假(由  $\frac{1}{z} = -z$  得  $z^2 = -1$ , 从而  $z$  可取  $\pm i$  两个值);6)一般不真(由三角不等式  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ , 等号仅当  $\arg z_1 - \arg z_2 = 2k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  时成立);7)真.

○8. 将下列复数化为三角表示式和指数表示式:

$$1) i; \quad 2) -1;$$

$$3) 1 + i\sqrt{3}; \quad 4) 1 - \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi);$$

$$5) \frac{2i}{-1+i}; \quad 6) \frac{(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi - i\sin 3\varphi)^3}.$$

解  $1) i = \cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2}$  (三角表示式)

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (\text{指数表示式})$$

$$2) -1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{\pi i}$$

$$3) |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2, \arg(1 + i\sqrt{3}) = \arctg \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3},$$

故

$$1 + i\sqrt{3} = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}) \quad (\text{三角表示式})$$

$$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad (\text{指数表示式})$$

$$\begin{aligned} 4) |1 - \cos\varphi + i\sin\varphi| &= \sqrt{(1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos\varphi} = 2\sin \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

(注意  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ),  $\arg(1 - \cos\varphi + i\sin\varphi) = \arctg \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} =$

$$\arctg \frac{2\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{2\sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \arctg(\cot \frac{\varphi}{2}) = \arctg(\operatorname{tg} \frac{\pi - \varphi}{2})$$

$$= \frac{\pi - \varphi}{2}, \text{ 故}$$

$$1 - \cos\varphi + i\sin\varphi = 2\sin \frac{\varphi}{2} (\cos \frac{\pi - \varphi}{2} + i\sin \frac{\pi - \varphi}{2}) \quad (\text{三角表示})$$



式)

$$1 - \cos\varphi + i\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}e^{i\frac{\pi-\varphi}{2}} \quad (\text{指数表示式})$$

$$5) \frac{2i}{-1+i} = \frac{2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{2-2i}{2} = 1-i, \text{其模为}\sqrt{2}, \text{其辐}$$

$$\text{角 } \arg \frac{2i}{-1+i} = \arg(1-i) = \arctg\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4},$$

$$\text{故 } \frac{2i}{-1+i} = \sqrt{2} \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i\sin \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{三角表示式}) \quad \frac{2i}{-1+i} = \sqrt{2}$$

$$e^{(-\frac{\pi}{4})i} \quad (\text{指数表示式})$$

$$6) \frac{(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi - i\sin 3\varphi)^3} = \frac{(e^{i5\varphi})^2}{(e^{-3i\varphi})^3} = \frac{e^{i10\varphi}}{e^{-i9\varphi}} = e^{i19\varphi} \quad (\text{指数式})$$

$$= \cos(19\varphi) + i\sin(19\varphi) \quad (\text{三角式})$$

○9. 将下列坐标变换公式写成复数形式:

$$1) \text{ 平移公式: } \begin{cases} x = x_1 + a_1, \\ y = y_1 + b_1; \end{cases}$$

$$2) \text{ 旋转公式: } \begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{cases}$$

解 1) 令  $z = x + iy, z_1 = x_1 + iy_1, c_1 = a_1 + ib_1$ , 则平移公式的复数形式为  $z = z_1 + c_1$ .

2) 令  $z = x + iy, z_1 = x_1 + iy_1, c = \cos\alpha + i\sin\alpha, c$  又可写成  $c = e^{i\alpha}$ , 从而旋转公式

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \end{cases}$$

可写成

$$\begin{aligned} z &= (x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha) + i(x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha) \\ &= (x_1 + iy_1)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = z_1 e^{i\alpha} \end{aligned}$$

○10. 一个复数乘以  $-i$ , 它的模与辐角有何改变?

解 由于复数  $z = |z|e^{i\arg z}, -i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$ , 所以复数  $z$  乘以  $-i$  为  $-iz =$



$|z|e^{i\arg z} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i} = |z|e^{i(\arg z - \frac{\pi}{2})}$ , 即模不变, 辐角减小  $\frac{\pi}{2}$ .

○11. 证明:  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ , 并说明其几何意义.

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad & |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2 \\ &\quad + |z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + |z_2|^2 \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \end{aligned}$$

几何意义为: 以  $z_1, z_2$  为边构成的平行四边形的两条对角线长度的平方和等于四边长的平方和.

●12. 证明下列各题:

1) 任何有理分式函数  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  可以化为  $X + iY$  的形式,

其中  $X$  与  $Y$  为具有实系数的  $x$  与  $y$  的有理分式函数;

2) 如果  $R(z)$  为 1) 中的有理函数, 但具有实系数, 那么  $R(\bar{z}) = X - iY$ ;

3) 如果复数  $a + ib$  是实系数方程

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

的根, 那么  $a - ib$  也是它的根.

分析 要明确有理分式的形式.

证明 1) 设  $z = x + iy$ ,  $P(z) = P_1(x, y) + iP_2(x, y)$ ,  $Q(z) = Q_1(x, y) + iQ_2(x, y)$  则  $P_i(x, y), Q_i(x, y) (i=1, 2)$  是  $x, y$  的实多项式, 而且

$$R(z) = \frac{1}{Q_1^2 + Q_2^2} [(P_1 Q_1 + P_2 Q_2) + i(-P_1 Q_2 + P_2 Q_1)]$$

$$\text{令} \quad X = \frac{P_1 Q_1 + P_2 Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2}, Y = \frac{-P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1^2 + Q_2^2}$$

易知  $X$  与  $Y$  都为具有实系数的  $x$  与  $y$  的有理分式函数, 并



且  $R(z) = X + iY$ .

2) 如果  $P(z), Q(z)$  是实系数多项式, 则有关系式  $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}, Q(\bar{z}) = \overline{Q(z)}$ .

事实上, 对任一实系数多项式

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

( $a_0, a_1, \cdots, a_n$  为实数, 即  $\bar{a}_j = a_j$  ( $j=0, 1, 2, \cdots, n$ ))

$$\begin{aligned}\overline{P(z)} &= \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \\ &= \overline{a_0 z^n} + \overline{a_1 z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1} z} + \overline{a_n} \\ &= a_0 \bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \bar{z} + a_n = P(\bar{z})\end{aligned}$$

从而

$$R(\bar{z}) = \frac{P(\bar{z})}{Q(\bar{z})} = \frac{\overline{P(z)}}{\overline{Q(z)}} = \overline{\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)} = \overline{X + iY} = X - iY$$

3) 令  $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ , 由 2) 中的事实有  $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ . 如果  $a + ib$  是所给实系数方程的根, 则  $P(a + ib) = 0$ . 于是  $P(a - ib) = P(\overline{a + ib}) = \overline{P(a + ib)} = 0$ , 这说明  $a - ib$  也是它的根.

**小结** 有理分式函数可以化为复数形式, 其中虚、实部全为实系数有理分式函数; 实系数方程的根的共轭也是根.

◎13. 如果  $z = e^{it}$ , 证明:

$$1) z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos nt; \quad 2) z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin nt.$$

**分析** 复数的幂性质要掌握.

**证明** 由  $z = e^{it}$  易知  $z^n = (e^{it})^n = e^{int} = \cos nt + i\sin nt$ ,  $\frac{1}{z^n} = e^{-int} = \cos nt - i\sin nt$ , 所以

$$1) z^n + \frac{1}{z^n} = \cos nt + i\sin nt + \cos nt - i\sin nt = 2\cos nt$$

$$2) z^n - \frac{1}{z^n} = \cos nt + i\sin nt - (\cos nt - i\sin nt) = 2i\sin nt$$

○14. 求下列各式的值:

$$1) (\sqrt{3} - i)^5; \quad 2) (1 + i)^6;$$





$$3) \sqrt[6]{-1}; \quad 4) (1-i)^{\frac{1}{3}}.$$

解 1)  $(\sqrt{3}-i)^5 = \left[ 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \right]^5$

$$= \left\{ 2 \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] \right\}^5$$

$$= 2^5 \left( \cos \frac{-5\pi}{6} + i\sin \frac{-5\pi}{6} \right)$$

$$= 32 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

$$= -16\sqrt{3} - 16i$$

$$2) (1+i)^6 = \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^6$$

$$= 8 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i\sin \frac{3\pi}{2} \right) = -8i$$

3) 由  $-1 = e^{\pi i} = \cos \pi + i\sin \pi$  得

$$\sqrt[6]{-1} = e^{\frac{\pi+2k\pi}{6}i} = \cos \frac{\pi+2k\pi}{6} + i\sin \frac{\pi+2k\pi}{6} \quad (k=0,1,2,3,4,5).$$

即 6 个值分别为  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ .

4) 由  $1-i = \sqrt{2} \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$  得

$$(1-i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2} \left[ \cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right]$$

( $k=0,1,2$ )

即 3 个值分别为  $\sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} - i\sin \frac{\pi}{12} \right),$

$$\sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{7}{12}\pi + i\sin \frac{7}{12}\pi \right), \quad \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{5}{4}\pi + i\sin \frac{5}{4}\pi \right).$$

◎15. 若  $(1+i)^n = (1-i)^n$ , 试求  $n$  的值.

分析 化为三角表示式计算.



解 由  $(1+i)^n = (1-i)^n$  可得

$$\left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n = \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} \right) \right]^n$$

$$2^{\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) = 2^{\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{-n\pi}{4} + i \sin \frac{-n\pi}{4} \right)$$

$$\text{即有 } \sin \frac{n\pi}{4} = \sin \frac{-n\pi}{4} = -\sin \frac{n\pi}{4}, \Rightarrow \sin \frac{n\pi}{4} = 0, \frac{n\pi}{4} = k\pi, n =$$

$$4k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

○16. 1) 求方程  $z^3 + 8 = 0$  的所有根;

2) 求微分方程  $y''' + 8y = 0$  的一般解.

解 1) 方程  $z^3 + 8 = 0$  等价于  $z^3 = -8$ , 其根为

$$z = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) \quad (k=0, 1, 2)$$

$$\text{即 } z_0 = 1 + \sqrt{3}i, z_1 = -2, z_2 = 1 - \sqrt{3}i \text{ 为所求的根.}$$

2) 因微分方程  $y''' + 8y = 0$  的特征方程为

$$r^3 + 8 = 0$$

由 1) 得其特征值为  $-2, 1 \pm \sqrt{3}i$ , 故方程的通解为

$$y = C_1 e^{-2x} + e^x (C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x)$$

其中  $C_1, C_2, C_3$  为任意常数.

◎17. 在平面上任意选一点  $z$ , 然后在复平面上画出下列各点的位置:

$$-z, \bar{z}, -\bar{z}, \frac{1}{z}, -\frac{1}{z}$$

分析 考查复数的基本知识.

解 取  $z = 1 - i$  得  $-z = -1 + i, \bar{z} = 1 + i, -\bar{z} = -1 - i,$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

各点位置如图 1-2(a) 所示.

一般地, 如图 1-2(b) 所示,  $-z$  与  $z$  关于原点对称;  $\bar{z}$  与  $z$  关于

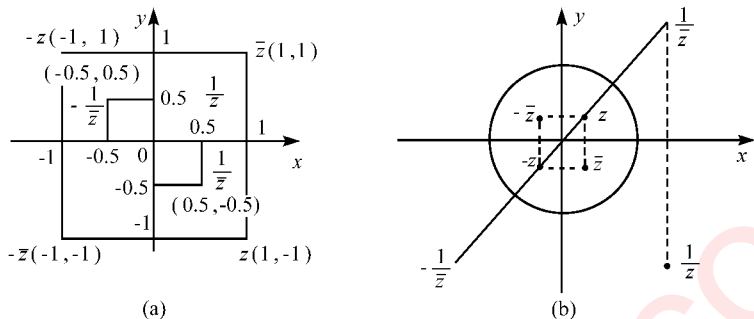


图 1-2

实轴对称;  $-\bar{z}$  与  $z$  关于虚轴对称. 又由  $\frac{1}{z} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$  得  $\frac{1}{z}$  与  $z$  的辐角相同, 且  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ , 即  $\frac{1}{z}$  与  $z$  是关于单位圆周的对称点. 如图 1-1(b) 中, 设  $|z| < 1$ , 则  $\frac{1}{z}$  在单位圆外, 且使  $0, z$  和  $\frac{1}{z}$  共一条射线, 而且  $|z| \cdot \left| \frac{1}{z} \right| = 1$ .  $-\frac{1}{\bar{z}}$  是  $\frac{1}{z}$  关于原点的对称点.

◎18. 已知两点  $z_1$  与  $z_2$  (或已知三点  $z_1, z_2, z_3$ ), 问下列各点  $z$  位于何处?

1)  $z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ ;

2)  $z = \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2$ , 其中  $\lambda$  为实数;

3)  $z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ .

分析 做好图, 就能看出来.

解 1) 设  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$  则  $z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \frac{x_1 + x_2}{2} + i \frac{y_1 + y_2}{2}$  位于  $z_1$  与  $z_2$  连线的中点.

2)  $z = \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 = [\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] + i[\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2]$



$y_2]$ , 当  $\lambda$  为实数时,  $z$  位于  $z_1$  与  $z_2$  的连线上, 其中  $\lambda = \frac{|z - z_2|}{|z_1 - z_2|}$ . 特别地, 若  $0 \leq \lambda \leq 1$ , 则  $z$  是在以  $z_1, z_2$  为端点的线段上的点.

3) 再设  $z_3 = x_3 + iy_3$ , 则当  $z_1, z_2, z_3$  不共线时  $z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + i \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$  位于三角形  $z_1 z_2 z_3$  的重心;

若  $z_1, z_2, z_3$  共线时, 则  $z$  在此直线上, 物理意义仍是重心所在点.

◎19. 设  $z_1, z_2, z_3$  三点适合条件:  $z_1 + z_2 + z_3 = 0, |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ . 证明:  $z_1, z_2, z_3$  是内接于单位圆周  $|z| = 1$  的一个正三角形的顶点.

分析 要掌握三角形的性质.

证明 由 11 题的结论及题设条件可知

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \\ &= 2(1+1) = 4 \\ |-z_3|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= 4 \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = 3, \\ |z_1 - z_2| &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned} |z_2 - z_3|^2 &= 2(|z_2|^2 + |z_3|^2) - |z_2 + z_3|^2 \\ &= 4 - |-z_1|^2 = 3 \\ |z_1 - z_3|^2 &= 2(|z_1|^2 + |z_3|^2) - |z_1 + z_3|^2 \\ &= 4 - |-z_2|^2 = 3 \end{aligned}$$

即  $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_1 - z_3| = \sqrt{3}$ .  $z_1, z_2, z_3$  是内接于单位圆周  $|z| = 1$  的一个正三角形的顶点.

●20. 如果复数  $z_1, z_2, z_3$  满足等式  $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ , 证明  $|z_2 - z_1| =$

$|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ , 并说明这些等式的几何意义.

分析 思维灵活, 掌握各种三角形的性质.



解 由所给等式可得

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right| &= \left| \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \right| \Rightarrow |z_1 - z_3|^2 \\ &= |z_2 - z_1| \cdot |z_2 - z_3| \end{aligned} \quad ①$$

$$\text{及 } \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} - 1 = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - 1 \Rightarrow \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}$$

两边取绝对值又可得

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_1} \right| &= \left| \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \right| \Rightarrow |z_2 - z_3|^2 \\ &= |z_3 - z_1| \cdot |z_1 - z_2| \end{aligned} \quad ②$$

上面式①与式②相除可知  $|z_1 - z_3|^3 = |z_2 - z_3|^3$ , 即  $|z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$ , 再代入式①便有  $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3| = |z_1 - z_2|$ , 这说明  $z_1, z_2, z_3$  构成一个等边三角形.

小结 复数的差的关系, 对应了点的距离, 本题主要考查了这一性质.

◎21. 指出下列各题中点  $z$  的轨迹或所在范围, 并作图:

- 1)  $|z-5|=6$ ;                      2)  $|z+2i| \geq 1$ ;
- 3)  $\operatorname{Re}(z+2)=-1$ ;              4)  $\operatorname{Re}(i\bar{z})=3$ ;
- 5)  $|z+i|=|z-i|$ ;              6)  $|z+3|+|z+1|=4$ ;
- 7)  $\operatorname{Im}(z) \leq 2$ ;                      8)  $\left| \frac{z-3}{z-2} \right| \geq 1$ ;
- 9)  $0 < \arg z < \pi$ ;              10)  $\arg(z-i) = \frac{\pi}{4}$ .

分析 考查基础知识, 做图要标准.

解 设  $z=x+iy$ .

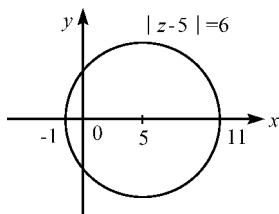
1) 由  $|z-5|=6$  得  $|z-5| = \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 6$ , 轨迹为以  $(5, 0)$  为圆心, 6 为半径的圆周, 见图 1-3(a).

2) 由  $|z+2i| = \sqrt{x^2 + (y+2)^2} \geq 1$  得  $z$  的轨迹为以  $(0, -2)$  为中心, 1 为半径的圆周及其外部区域, 见图 1-3(b).

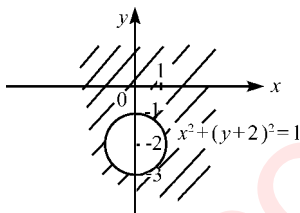
3) 由  $z+2=x+2+iy$  得  $\operatorname{Re}(z+2)=-1$  相当  $x=-3$ ,  $z$  的轨迹为直线  $x=-3$ , 见图 1-3(c).



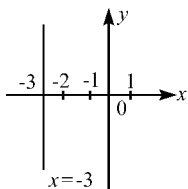
4) 由  $i\bar{z} = i(x - iy) = y + ix$  得  $\operatorname{Re}(i\bar{z}) = y$ , 即  $\operatorname{Re}(i\bar{z}) = 3$  相当于  $y = 3$ ,  $z$  的轨迹为直线  $y = 3$ , 见图 1-3(d).



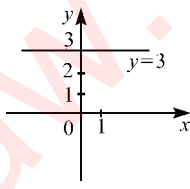
(a)



(b)



(c)



(d)

图 1-3

5) 由  $|z+i| = |z-i|$  得  $x^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2$ , 即  $y = 0$ ,  $z$  的轨迹为实轴, 见图 1-3(e).

6) 由于  $|z+3|$  表示  $z$  与  $-3$  的距离, 所以  $|z+3| + |z+1| = 4$  表示  $z$  距点  $-3$  与  $-1$  的距离之和为 4,  $z$  的轨迹为以  $(-3, 0)$ ,  $(-1, 0)$  为焦点, 以 4 为长轴的椭圆:  $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 见图 1-3(f).

7)  $\operatorname{Im}(z) \leq 2$  相当于  $y \leq 2$ ,  $z$  的轨迹为直线  $y = 2$  及其下方区域, 见图 1-3(g).

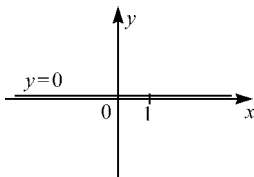
8) 由  $\left| \frac{z-3}{z-2} \right| = \frac{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}} \geq 1$  得

$$(x-3)^2 + y^2 \geq (x-2)^2 + y^2$$

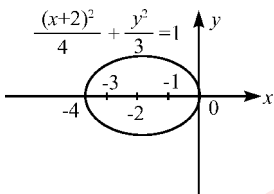
化简得  $x \leq \frac{5}{2}$ ,  $z$  的轨迹为直线  $x = \frac{5}{2}$  及其左方区域, 见图 1-3



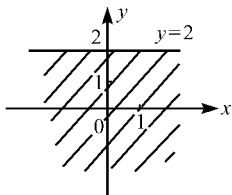
(h).



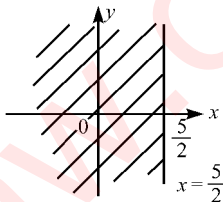
(e)



(f)



(g)



(h)

图 1-3

9) 由  $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  得

$\arg z = 0 \Rightarrow z$  为  $x$  轴正向上的点 (正实轴)

$\arg z = \pi \Rightarrow z$  为  $x$  轴负向上的点 (负实轴)

所以  $0 < \arg z < \pi$  为上半平面 (不含实轴), 即  $z$  的轨迹为不包含实轴的上半平面, 见图 1-3(i).

10) 由  $\arg(z-i) = \arg[x + (y-1)i] = \frac{\pi}{4}$  得

$$\operatorname{tg}[\arg(z-i)] = 1 \quad (x > 0, y > 1)$$

即  $\frac{y-1}{x} = 1$ , 故  $\arg(z-i) = \frac{\pi}{4}$  相当于  $y-x-1=0 (x > 0, y > 1)$

1),  $z$  的轨迹为以  $i$  为起点的射线  $y-x-1=0 (x > 0)$ , 见图 1-3(j).

- 22. 描出下列不等式所确定的区域或闭区域, 并指明它是有界的还是无界的? 单连通的还是多连通的?

1)  $\operatorname{Im}(z) > 0$ ;

2)  $|z-1| > 4$ ;



3)  $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ ;

4)  $2 \leq |z| \leq 3$ ;

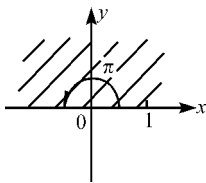


图 1-3(i)

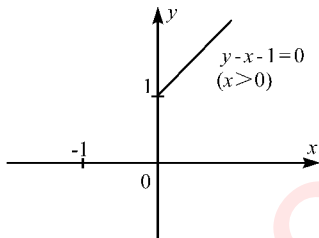


图 1-3(j)

5)  $|z-1| < |z+1|$ ;

6)  $-1 < \arg z < -1 + \pi$ ;

7)  $|z-1| < 4|z+1|$ ;

8)  $|z-2| + |z+2| \leq 6$ ;

9)  $|z-2| - |z+2| > 1$ ;

10)  $z\bar{z} - (2+i)z - (2-i)\bar{z} \leq 4$ .

分析 考查基础知识, 绘图要标准.

解 令  $z = x + iy$  后可将本题的条件转化为  $x, y$  满足的条件, 然后在直角坐标系中解答.

1)  $\operatorname{Im}(z) > 0$ , 即  $y > 0$  为不包含实轴的上半平面, 是无界单连通区域, 见图 1-4(a).

2)  $|z-1| > 4$ , 即  $(x-1)^2 + y^2 > 16$  为圆周  $(x-1)^2 + y^2 = 16$  的外部 (不含圆周), 是无界多连通区域, 见图 1-4(b).

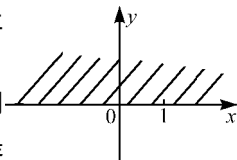


图 1-4(a)

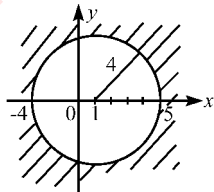


图 1-4(b)

3)  $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ , 即  $0 < x < 1$  为由直线  $x=0$  及  $x=1$  所构成的带形区域 (不含两直线), 是无界单连通区域, 见图 1-4(c).

4)  $2 \leq |z| \leq 3$ , 即  $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$  为由圆周  $x^2 + y^2 = 4$  与  $x^2 + y^2 = 9$  所围成的环形闭区域 (包括圆周), 是有界多连通闭区





域,见图 1-4(d).

$$5) |z-1| < |z+3| \text{ 即}$$

$$(x-1)^2 + y^2 < (x+3)^2 + y^2$$

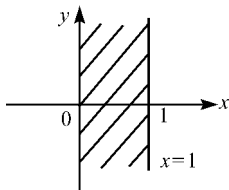


图 1-4(c)

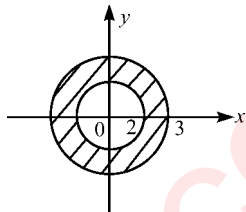


图 1-4(d)

化简得  $x > -1$  为直线  $x = -1$  右边的区域(不含直线  $x = -1$ ),是无界单连通区域,见图 1-4(e).

6)  $-1 < \arg z < -1 + \pi$  为由射线  $\arg z = -1$  及  $\arg z = -1 + \pi$  构成的角形域(不含两射线),是无界单连通区域,见图 1-4(f).

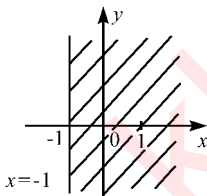


图 1-4(e)

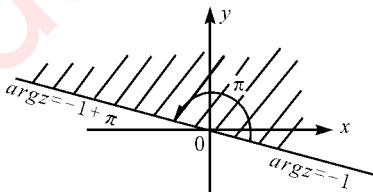


图 1-4(f)

7) 设  $z = x + iy$ , 则  $|z-1| < 4|z+1|$  可写成

$$(x-1)^2 + y^2 < 16(x+1)^2 + 16y^2$$

化简得  $\left(x + \frac{17}{15}\right)^2 + y^2 > \left(\frac{8}{15}\right)^2$ , 表示以  $z = -\frac{17}{15}$  为中心,  $\frac{8}{15}$  为半径的圆周的外部区域(不含圆周),为无界多连通区域,见图 1-4(g).

8)  $|z-2| + |z+2| \leq 6$  为椭圆  $|z-2| + |z+2| = 6$  的内部(包含椭圆),此椭圆是以  $(2,0)$  与  $(-2,0)$  为焦点,6 为长轴的椭圆:  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ , 这是一个有界单连通的闭区域,见图 1-4(h).



9)  $|z-2| - |z+2| > 1$  可写成

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} > \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + 1, \text{ 两边平方}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 > 1 + 2\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + x^2 + 4x + 4 + y^2$$

$$-8x - 1 > 2\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \quad \left(\text{由此易知 } x < -\frac{1}{8}\right), \text{ 两边再平方}$$

方

$$60x^2 - 4y^2 > 15 \text{ 或 } 4x^2 - \frac{4}{15}y^2 > 1$$

再注意到  $x < -\frac{1}{8}$ , 即知不等式  $|z-2| - |z+2| > 1$  表示双曲

线  $4x^2 - \frac{4}{15}y^2 = 1$  的左边分支的内部(含焦点  $z = -2$  的那部分)区域, 是无界单连通区域, 见图 1-4(i).

10)  $z\bar{z} - (2+i)z - (2-i)\bar{z} \leq 4$  可写成

$$x^2 + y^2 - (2+i)(x+iy) - (2-i)(x-iy) \leq 4$$

化简得  $x^2 + y^2 + 2y - 4x \leq 4$  或

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 9$$

是以  $(2, -1)$  为圆心, 3 为半径的圆周及其内部, 这是一个有界单连通闭区域, 见图 1-4(j).

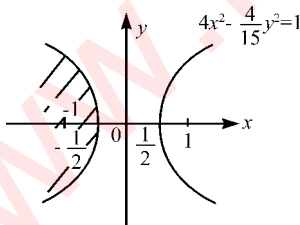


图 1-4(i)

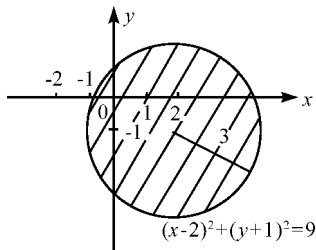


图 1-4(j)

小结 区域、闭区域、有界的、无界的、单连通、多连通的观念与基本性质, 只要区分明确即可.



●23. 证明复平面上的直线方程可写成

$$\alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z = c \quad (\alpha \neq 0 \text{ 为复数}, c \text{ 为实常数}).$$

分析 考查直线与圆周基本知识.

证明 设  $z = x + iy, \alpha = a + ib$ , 则

$$\alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z = c \text{ 可写为 } (a + ib)(x - iy) + (a - ib)(x + iy) = c, \text{ 等价地 } 2ax + 2by = c, \text{ 这是直线的一般方程. 反过来, 对任一条直线 } Ax + By + C = 0 (A, B \text{ 不同时为零}) \text{ 只须令 } z = x + iy, \alpha = \frac{A + iB}{2}, c = -C, \text{ 便可将其方程写成}$$

$$\alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z = c \quad (\alpha \neq 0 \text{ 为复数}, c \text{ 为实常数}).$$

小结 复平面上的直线方程表示形式, 代入基本形式即可得出.

●24. 证明复平面上的圆周方程可写成:

$$z \bar{z} + \alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z + c = 0 \quad (\text{其中 } \alpha \text{ 为复数}, c \text{ 为实常数}).$$

分析 考查直线与圆周基本知识.

证明 圆周的一般方程为

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 - c \geq 0)$$

令  $z = x + iy, \alpha = a + ib$ , 则

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = z \bar{z} + \alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z + c$$

故圆周方程可写成  $z \bar{z} + \alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z + c = 0$ .

小结 复平面上的圆周方程的表示形式, 代入基本形式即可得出.

◎ 25. 将下列方程( $t$  为实参数) 给出的曲线用一个实直角坐标方程表出:

1)  $z = t(1 + i);$

2)  $z = acost + ibsint (a, b \text{ 是不为零的实常数});$

3)  $z = t + \frac{i}{t};$

4)  $z = t^2 + \frac{i}{t^2};$

5)  $z = a \cosh t + ib \sinh t (a, b \text{ 是不为零的实常数});$

6)  $z = ae^{it} + be^{-it};$

7)  $z = e^{\alpha t} (\alpha = a + bi \text{ 为复数且 } b \neq 0).$



分析 坐标系转换.

解 令  $z = x + iy$ .

$$1) z = t(1+i) = t + ti \text{ 相当于 } \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \text{ 消去参数 } t \text{ 后, 化成}$$

直角坐标方程为  $y = x$  (直线).

$$2) z = acost + ibsint \text{ 相当于 } \begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases}, \text{ 消去参数 } t \text{ 后化成}$$

直角坐标方程为  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  (椭圆).

$$3) z = t + \frac{i}{t} \text{ 相当于 } \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}, \text{ 消去参数 } t \text{ 后化成直角坐标系}$$

方程为  $xy = 1$  (等轴双曲线).

$$4) z = t^2 + \frac{i}{t^2} \text{ 相当于 } \begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{1}{t^2} \end{cases}, \text{ 消去参数 } t \text{ 后为 } xy = 1 (x >$$

$0, y > 0$ ) (等轴双曲线在第一象限中的一支).

$$5) z = a\cosh t + ib\sinh t \text{ 相当于 } \begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases}, \text{ 消去参数 } t \text{ 后为 } \frac{x^2}{a^2} -$$

$\frac{y^2}{b^2} = 1$  (双曲线).

$$6) z = ae^{it} + be^{-it} = acost + ia\sin t + bcost - ib\sin t \\ = (a+b)\cos t + i(a-b)\sin t$$

相当于  $\begin{cases} x = (a+b)\cos t \\ y = (a-b)\sin t \end{cases}$ , 化成直角坐标方程为

$$\frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{(a-b)^2} = 1 \quad (\text{椭圆, 其中 } a \neq \pm b)$$

当  $a = b$  时, 则方程表示  $x$  轴上的线段  $[-|a+b|, |a+b|]$ ; 当  $a = -b$  时, 则方程表示  $y$  轴上的线段  $[-|a-b|, |a-b|]$ .

$$7) z = e^{at} = e^{(a+ib)t} = e^{at} \cdot e^{ibt} = e^{at} (\cos bt + i\sin bt) \text{ 相当于}$$



$\begin{cases} x = e^{at} \cos bt \\ y = e^{at} \sin bt \end{cases}$ , 消去参数  $t$  后化成直角坐标方程 (只须由

$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} bt \Rightarrow t = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  代入  $x^2 + y^2 = e^{2at}$  即可) 为

$$x^2 + y^2 = e^{\frac{2a}{b} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}.$$

○ 26. 函数  $w = \frac{1}{z}$  把下列  $z$  平面上的曲线映射成  $w$  平面上怎样的曲线?

1)  $x^2 + y^2 = 4$ ;

2)  $y = x$ ;

3)  $x = 1$ ;

4)  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ .

解 令  $z = x + iy, w = u + iv$ , 则  $w = \frac{1}{z}$  相当于

$$u + iv = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

或

$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ v = \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

1) 由函数  $w = \frac{1}{z}$  的如上关系式可知当  $x^2 + y^2 = 4$  时  $u^2 +$

$$v^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \text{ 即 } w \text{ 平面上像曲线为 } u^2 + v^2 = \frac{1}{4} \text{ (圆周).}$$

2) 当  $y = x$  时,  $u = -v$  或  $u + v = 0$  为  $w$  平面上的直线.

3) 当  $x = 1$  时, 易知  $\begin{cases} u = \frac{1}{1 + y^2} \\ v = \frac{-y}{1 + y^2} \end{cases}$ , 消去  $y$  后为  $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2$

$= \frac{1}{4}$ , 是  $w$  平面上的圆周.

4) 当  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  时  $\begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$  代

入



$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ v = \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} u = \frac{1 + \cos\theta}{2 + 2\cos\theta} = \frac{1}{2} \\ v = \frac{-\sin\theta}{2 + 2\cos\theta} \end{cases}$$

为  $w$  平面上的直线  $u = \frac{1}{2}$ .

◎27. 已知映射  $w = z^3$ , 求

1) 点  $z_1 = i, z_2 = 1 + i, z_3 = \sqrt{3} + i$  在  $w$  平面上的像;

2) 区域  $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$  在  $w$  平面上的像.

分析 掌握平面上的像的概念.

解 1)  $z_1 = i, w_1 = z_1^3 = i^3 = -i$

$$\begin{aligned} z_2 = 1 + i, w_2 = z_2^3 &= (1 + i)^3 = (1 + i)^2(1 + i) \\ &= -2 + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 = \sqrt{3} + i &= 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right), w_3 = z_3^3 \\ &= 2^3\left(\cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6}\right) = 8i \end{aligned}$$

即  $z_1, z_2, z_3$  的像分别为  $-i, -2 + 2i, 8i$ .

2) 令  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ , 则  $w = z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$ .

于是当  $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$  时  $0 < \arg w = 3\arg z < \pi$ , 即区域

$0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$  的像区域为  $0 < \arg w < \pi$  (上半平面).

◎28. 证明: 1) 如果  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$ , 那么  $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm$

$$g(z)] = A \pm B; \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = AB; \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq$$

0);

2) 函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在  $z_0 = x_0 + iy_0$  处连续的充要条件是:  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处连续.

分析 基本性质的证明.



证明 1) 令  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $g(z) = p(x, y) + iq(x, y)$ ,  $A = a_1 + ia_2$ ,  $B = b_1 + ib_2$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ . 于是

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = a_1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = a_2 \end{cases}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} p(x, y) = b_1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} q(x, y) = b_2 \end{cases}$$

利用高等数学中关于极限的运算法则易知

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} [u(x, y) \pm p(x, y)] &= a_1 \pm b_1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} [v(x, y) \pm q(x, y)] &= a_2 \pm b_2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm g(z)$$

$$= A \pm B$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (up - vq) &= a_1 b_1 - a_2 b_2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (uq + vp) &= a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) g(z) = AB$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{up + vq}{p^2 + q^2} &= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2} \left( = \operatorname{Re} \frac{A}{B} \right) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{vp - uq}{p^2 + q^2} &= \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1^2 + b_2^2} \left( = \operatorname{Im} \left( \frac{A}{B} \right) \right) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$$

$$= \left( \frac{A}{B} \right) \quad (B \neq 0)$$

2)  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在  $z_0 = x_0 + iy_0$  处连续  
 $\Leftrightarrow f(z)$  在  $z_0$  处有定义且  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow u(x, y)$  与  $v(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处有定义且



$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0) \end{cases}$$

等价地  $u(x, y)$  与  $v(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处连续.

- 29. 设函数  $f(z)$  在  $z_0$  连续且  $f(z_0) \neq 0$ , 那么可找到  $z_0$  的小邻域, 在这邻域内  $f(z) \neq 0$ .

分析 考查连续的性质.

证明 设  $z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0, f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , 则  $f(z)$  在  $z_0$  连续  $\Leftrightarrow u(x, y)$  与  $v(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  连续. 由  $f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) \neq 0$  可知  $u(x_0, y_0)$  与  $v(x_0, y_0)$  之中必有一个不为零, 不妨设  $u(x_0, y_0) \neq 0$ , 于是  $u(x_0, y_0) > 0$  (或  $< 0$ ). 由高等数学中连续函数的保号定理可知, 必有  $(x_0, y_0)$  的一个邻域, 在此邻域内  $u(x, y) > 0$  (或  $< 0$ ). 从而在  $z_0 = x_0 + iy_0$  的这个邻域内  $f(z) \neq 0$ .

小结 函数连续的性质, 即在此点的小邻域内连续, 利用此性质就可以得到结果.

- 30. 设  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ , 证明  $f(z)$  在  $z_0$  的某一去心邻域内是有界的, 即存在一个实常数  $M > 0$ , 使在  $z_0$  的某一去心邻域内有

$$|f(z)| \leq M.$$

分析 掌握有界, 有极限, 连续的性质.

证明 由  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$  根据极限的定义, 对于  $\epsilon < 1$ , 相应地存在

正数  $\delta$ , 当  $0 < |z - z_0| < \delta$  时

$$|f(z) - A| < 1 \Rightarrow |f(z)| = |f(z) - A + A| \leq |f(z) - A| + |A| < 1 + |A|.$$

取  $M = 1 + |A| (> 0)$ , 可知在  $z_0$  的  $\delta$  去心邻域内有  $|f(z)| \leq M$ .

小结 函数在一点有极限, 则在小邻域内有界, 考查极限与有界的关系.





● 31. 设  $f(z) = \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{z} - \frac{\bar{z}}{z} \right)$ , ( $z \neq 0$ ). 试证当  $z \rightarrow 0$  时  $f(z)$  的极限不存在.

分析 掌握有界, 有极限, 连续的性质.

证明 令  $z = x + iy$ ,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , 则

$$u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{2i} \left( \frac{x + iy}{x - iy} - \frac{x - iy}{x + iy} \right) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

即  $u(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ ,  $v(x, y) = 0$ . 注意到  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$  存在的

充要条件是  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y)$  与  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} v(x, y)$  存在, 而  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y)$

$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$  不存在 (沿  $y = kx$  趋于零易知其极限随  $k$  变化), 故当  $z \rightarrow 0$  时  $f(z)$  的极限不存在.

小结  $\frac{0}{0}$  型的极限, 利用复数的通用形式, 代入即可.

● 32. 试证  $\arg z$  在原点与负实轴上不连续.

分析 掌握有界, 有极限, 连续的性质.

证明 令  $f(z) = \arg z$ . 由于  $f(0)$  无定义, 所以  $f(z) = \arg z$  在原点不连续.

设  $z_0 \neq 0$  为负实轴上任意一点, 则  $f(z_0) = \arg z_0 = \pi$ , 而且不难看出, 当  $z$  从上半平面趋于  $z_0$  时,  $f(z) = \arg z \rightarrow \pi$ , 即

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \operatorname{Im} z > 0}} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \operatorname{Im} z > 0}} \arg z = \pi$$

当  $z$  从下半平面趋于  $z_0$  时,  $f(z) = \arg z \rightarrow -\pi$ , 即

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \operatorname{Im} z < 0}} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \operatorname{Im} z < 0}} \arg z = -\pi$$

故  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  不存在,  $f(z)$  在  $z_0$  点不连续, 再由  $z_0$  的任意性

可知结论.

小结 考查连续的概念, 对于特殊函数, 结合本身的性质, 与连续的性质, 即可得到.

## 第二章

# 解析函数

### 内容提要

#### 一、复变函数的导数与解析函数的概念

##### 1. 复变函数的导数与微分

设函数  $w = f(z)$  定义于区域  $D$ ,  $z_0, z_0 + \Delta z \in D$ . 若极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  处可导, 该极限值称为  $f(z)$  在  $z_0$  处的导数, 记作

$$f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (1)$$

此时, 称  $f'(z_0)\Delta z$  为  $f(z)$  在  $z_0$  处的微分, 记作  $dw = f'(z_0)dz$ . 若  $f(z)$  在  $z_0$  处的微分存在, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  处可微. 若  $f(z)$  在区域  $D$  内每点都可导(可微), 则称它在  $D$  内可导(可微). 与一元实变函数相同, 复变函数可导与可微是等价的.

由于复变函数的导数定义在形式上与一元实变函数的导数定



义相同,因此,复变函数的求导法则也与一元实变函数的求导法则完全相同.

注意,由于导数定义中对极限式 ① 存在的要求是与  $\Delta z \rightarrow 0$  的路径和方式无关,因此,复变函数导数的定义实际上比一元实变函数导数的定义要求苛刻得多.如果当  $\Delta z$  沿某一路径趋于 0 时,  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$  的极限不存在,或者沿两条不同路径趋于 0 时,  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$  趋于不同的数,那么该函数在  $z_0$  处不可导.这就为判断函数的不可导性提供了有效的方法.

同一元实变函数可导与连续的关系一样,复变函数  $w = f(z)$  在点  $z_0$  可导,则它必在该点连续;反之不成立.

## 2. 柯西—黎曼条件(C—R 条件)

(1) 若  $w = f(z)$  在  $z_0$  点可导,则当  $\Delta z$  分别沿平行于坐标轴的路径趋于零时,  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$  必定要趋于同一个数(如图 2-1),由此得到可导的一个必要条件, C—R 条件:

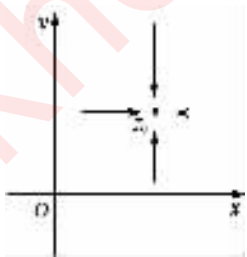


图 2-1

若函数  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  于点  $z = x + iy$  可导,则在点  $(x, y)$  必有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

式 ② 也称为 C—R 方程,在极坐标系下,它的表达式为

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$



由此可见,可导的复变函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  的实部  $u(x, y)$  和虚部  $v(x, y)$  不是随意拼起来的,它们之间有密切的联系.

可用此命题的逆否命题来判断某些函数不可导,即:若  $f(z)$  在  $z_0$  点不满足 C-R 方程则  $f(z)$  在  $z_0$  点不可导.

(2) 若  $f(z)$  可导,则  $f(z)$  的导数可写成以下四种形式:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

故当  $f(z)$  可导时,仅由其实部或仅由其虚部就可求出  $f(z)$  的导数来.

### 3. 解析函数

#### (1) 定义

如果  $f(z)$  在点  $z_0$  及  $z_0$  的邻域内处处可导,那么称  $f(z)$  在  $z_0$  点解析. 如果  $f(z)$  在区域  $D$  内每一点解析,那么称  $f(z)$  在  $D$  内解析,或称  $f(z)$  是  $D$  内的一个解析函数(全纯函数或正则函数). 如果  $f(z)$  在  $z_0$  不解析,那么称  $z_0$  为  $f(z)$  的奇点.

两个解析函数的和、差、积、商(除去分母为零的点)都是解析函数;解析函数的复合函数仍是解析函数.

#### (2) 函数解析的一个充分必要条件

**定理** 函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在  $z = x + iy$  处可导的充要条件是:  $u(x, y), v(x, y)$  在点  $(x, y)$  处可微,而且满足柯西—黎曼(Cauchy—Riemann)方程(简称 C-R 方程):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

当函数满足 C-R 条件时,可按下列公式之一计算  $f'(z)$ :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

注意: C-R 条件只是函数  $f(z)$  可导的必要条件而并非充分条件.



如果考虑区域上的解析函数,由 C-R 条件就可以得到下面的结论:

函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在区域  $D$  内解析(即在  $D$  内可导)的充要条件是:  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  在  $D$  内处处可微,而且满足 C-R 方程.

推论 设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在区域  $D$  内有定义,如果在  $D$  内  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  的四个偏导数  $u'_x, u'_y, v'_x, v'_y$  存在且连续,并且满足 C-R 方程,则  $f(z)$  在  $D$  内解析.

### (3) 运算法则

#### ① 导数的四则运算

设  $f(z)$  和  $g(z)$  都是区域  $D$  上的解析函数,则  $f(z) \pm g(z)$ ,

$f(z)g(z)$ , 及  $\frac{f(z)}{g(z)} (g(z) \neq 0)$  在  $D$  上解析, 且有

$$[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z),$$

$$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}.$$

#### ② 复合函数的求导法则

设函数  $\xi = f(z)$  在区域  $D$  内解析, 函数  $w = g(\xi)$  在区域  $G$  内的解析, 又  $f(D) \subset G$  ( $f(D)$  表示函数  $\xi = f(z)$  的值域, 也就是区域  $D$  的像), 则复合函数  $w = g(f(z)) = h(z)$  在  $D$  内解析, 且有

$$h'(z) = [g(f(z))]' = g'(f(z))f'(z).$$

#### ③ 反函数的求导法则

设函数  $w = f(z)$  在区域  $D$  内单叶解析且  $f'(z) \neq 0$ , 又反函数  $z = f^{-1}(w) = \varphi(w)$  存在且连续, 则

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)} \Big|_{z=\varphi(w)} = \frac{1}{f'(\varphi(w))}.$$

### (4) 复变函数可导与解析的判别方法

① 利用可导与解析的定义以及运算法则;

② 利用可导与解析的充要条件.



## 二、初等解析函数

### 1. 指数函数

定义:  $e^z = \exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$ .

主要性质有:

(1) 解析性: 在  $z$  平面内处处解析, 且  $(e^z)' = e^z$ .

(2) 加法定理:  $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$ .

(3) 周期性:  $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ .

### 2. 对数函数

定义:  $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$ .

主要性质有:

(1) 多值性: 对数函数有无穷多个分支, 其中  $\ln z = \ln |z| + i \arg z$  称为主值支, 其余分支为:

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

(2) 解析性: 在除去原点和负实轴的  $z$  平面内处处解析, 且

$$(\operatorname{Ln} z)' = (\ln z)' = \frac{1}{z}$$

(3) 保持了实变对数函数的如下性质:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

但是,  $\operatorname{Ln} z^n \neq n \operatorname{Ln} z (n > 1)$ , 并且“负数无对数”这个结论不成立.

### 3. 乘幂 $a^b$ 与幂函数

定义: 设  $a$  为不等于零的一个复数,  $b$  为任意一个复数, 我们定义乘幂  $a^b$  为  $e^{b \operatorname{Ln} a}$ , 即

$$a^b = e^{b \operatorname{Ln} a}.$$

因为  $\operatorname{Ln} a = \ln |a| + i(\arg a + 2k\pi)$  是多值的, 因而  $a^b$  也是多值的.

如果  $a = z$  为复变数, 就得到一般的幂函数  $w = z^b = e^{b \operatorname{Ln} z}$ , 当



$b = n$  与  $\frac{1}{n}$  时, 就分别得到通常的幂函数  $w = z^n$  及  $z = w^n$  的

反函数  $w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$ .

$z^b$  的各个分支在除去原点和负实轴的复平面内是解析的, 且  $(z^b)' = bz^{b-1}$ .

务必把  $e$  的  $z$  次幂  $e^z$  (它一般是多值的) 与指数函数  $e^z$  (它一定是单值的) 严加区分.

#### 4. 三角函数与双曲函数

定义:  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ .

它们在复平面上处处解析, 并且  $(\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z$ . 实变数中的一些三角恒等式在此仍然成立.  $\sin z$  或  $\cos z$  也同样分别具有周期性 with 奇偶性, 但不再具有有界性, 即不等式  $|\sin z| \leq 1$  与  $|\cos z| \leq 1$  不成立.

其它复三角函数如  $\operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z$  等的定义与性质可仿照  $\sin z$  与  $\cos z$  讨论.

双曲正弦函数与双曲余弦函数

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

在复平面上处处解析, 并且  $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$ . 实变数中一些双曲恒等式在此仍然成立.  $\operatorname{sh} z$  与  $\operatorname{ch} z$  也分别具有奇偶性. 应该注意的是复双曲正弦与双曲余弦函数是以  $2\pi i$  为周期的函数.

其它复双曲函数如  $\operatorname{th} z, \operatorname{ch} z$  等的定义与性质可仿照  $\operatorname{sh} z$  与  $\operatorname{ch} z$  讨论.

#### 5. 反三角函数与反双曲函数

定义:  $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$$



分别称为  $z$  的反正弦、余弦、正切函数.

定义:  $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$

$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$

$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$

分别称为  $z$  的反双曲正弦、反双曲余弦、反双曲正切函数.



## 典型例题与解题技巧

【例 1】 指出下列各函数的解析区域,并求出其导数:

$$(1) f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1}; (2) f(z) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

解题分析 利用可导与解析的判别方法找出解析区域,然后用求导

公式或  $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$  求出其导数.

解题过程 (1) 函数  $f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1}$  的分子与分母均为解析函数,所

以  $f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1}$  在除去分母为零的点  $z = \pm i$  外是

解析的. 又分子在  $z = \pm i$  处不为零,故  $f(z)$  的解析区域为复平面除去  $\pm i$  两点,而且

$$f'(z) = \left( \frac{z^2}{z^2 + 1} \right)' = \frac{2z}{(z^2 + 1)^2} (z \neq \pm i)$$

(2)  $u = \sin x \operatorname{ch} y, v = \cos x \operatorname{sh} y$ , 故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y, \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \operatorname{sh} y, \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \operatorname{ch} y.$$

以上四个偏导在复平面上连续,故  $u, v$  可微,又满足

$C-R$  方程  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ , 易得  $f(z)$  在复平面

上处处解析,且

$$f'(z) = u_x + i v_x = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$





**【例 2】** 设函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在区域  $D$  内解析, 且满足下列条件之一, 试证  $f(z)$  在  $D$  中内是常数.

(1)  $\overline{f(z)}$  在  $D$  内也解析;

(2)  $u = e^v + 1$ .

**分析** 为了证明  $f(z)$  在  $D$  内是常数, 只要证明在  $D$  内它的实部  $u$  (或虚部  $v$ ) 是常数, 或者  $f'(z) \equiv 0$ , 也就是要证明在  $D$  内  $u$  (或  $v$ ) 的一阶偏导数恒为 0. 对于 (1), 由  $f(z)$  及  $\overline{f(z)}$  都在  $D$  内解析, 故必满足 C-R 方程, 从而不难得到所要证明的结论; 对于 (2), 由于  $u = e^v + 1$ , 所以只要证明  $u$  与  $v$  中有一个为常数就行了. 这也可利用  $f(z)$  解析, 满足 C-R 方程及上述等式得到.

**证明** (1) 由  $f(z)$  与  $\overline{f(z)}$  都在  $D$  内解析, 必满足 C-R 方程得:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial y}, & -\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}$$

将上面两组等式分别相加, 我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

再利用导数公式及 C-R 方程, 有

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

故知  $f(z)$  在  $D$  内是常数.

(2) 利用 C-R 方程及等式  $u = e^v + 1$  可得

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^v \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^v \frac{\partial v}{\partial y},$$

从而有

$$(1 + e^{2v}) \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

故  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ . 因此,  $v$  与  $u$  在  $D$  内都是常数, 说明

$f(z)$  在  $D$  内也是常数.



【例 3】 证明(1) $\bar{z}^2$ ; (2) $e^{\bar{z}}$ ; (3) $\sin \bar{z}$  在复平面上不解析.

分析 一般证明函数在复平面处处不可导或不解析多用函数不满足 C-R 条件来证明.

证明 (1) 因  $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - i2xy$ , 所以

$$u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = -2xy.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2y, \frac{\partial v}{\partial y} = -2x.$$

由此可知,  $w = \bar{z}^2$  仅在点  $(0, 0)$  处 C-R 条件成立, 所以  $w = \bar{z}^2$  仅在点  $(0, 0)$  处可导, 而在整个复平面上不解析.

(2) 因  $e^{\bar{z}} = e^x(\cos y - i \sin y)$ , 所以

$$u = e^x \cos y, v = -e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \frac{\partial v}{\partial y} = -e^x \cos y.$$

所以只有当  $y = k\pi \pm \pi/2 (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  时, 才有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

由此可见,  $e^{\bar{z}}$  在复平面上不解析.

(3) 由  $\sin \bar{z} = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$ , 所以

$$u = \sin x \cosh y, v = -\cos x \sinh y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y, \frac{\partial v}{\partial y} = -\cos x \cosh y,$$

因此, 只有当  $x = k\pi \pm (\pi/2) (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  时, 才有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

可见  $\sin \bar{z}$  在复平面上不解析.

【例 4】 证明下列函数在  $z$  平面上解析, 并分别求出其导数.

$$(1) f(z) = e^x(x \cos y - y \sin y) + ie^x(y \cos y + x \sin y);$$

$$(2) f(x) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$



**解题分析** 利用 C—R 方程和导数运算法则.

**解题过程** (1) 若令  $f(z) = u + iv$ , 则  $u, v$  具有连续偏导数. 故只要验证在  $z$  平面上 C—R 方程成立.

$$u = e^x(x \cos y - y \sin y)$$

$$v = e^x(y \cos y + x \sin y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x \cos y - y \sin y) + e^x \cos y$$

$$= e^x(x \cos y - y \sin y + \cos y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(-x \sin y - \sin y - y \cos y)$$

$$= -e^x(x \sin y + \sin y + y \cos y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x(y \cos y + x \sin y) + e^x \sin y$$

$$= e^x(y \cos y + x \sin y + \sin y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x(\cos y - y \sin y + x \cos y)$$

所以 C—R 方程  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  在  $z$  平面上成立.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= e^x(\cos y + x \cos y - y \sin y) \\ &\quad + i e^x(\sin y + x \sin y + y \cos y) \\ &= e^x[e^{iy} + x e^{iy} + i y e^{iy}] \\ &= e^{x+iy}[1 + x + iy] \\ &= e^z(1 + z) \end{aligned}$$

$$(2) u = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \operatorname{sh} y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \operatorname{sh} y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \operatorname{ch} y,$$

所以 C—R 方程在  $z$  平面上成立.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$



**【例 5】** 证明  $f(z)$  在上半平面解析的充要条件是  $\overline{f(\overline{z})}$  在下半平面解析.

**分析** 当  $f(z)$  与  $\overline{f(\overline{z})}$  都解析时,  $f(z)$  必为常数. 故当  $f(z)$  不是常数时,  $f(z)$  与  $\overline{f(\overline{z})}$  不可能同时解析. 但本例却指出: 当  $f(z)$  解析时, 不论  $f(z)$  是否为常数,  $\overline{f(\overline{z})}$  必解析; 反过来也成立.

**证明** 设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , 则

$$\overline{f(\overline{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y).$$

先证必要性. 因为  $f(z)$  解析, 故有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

因此,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, -y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, -y)}{\partial(-y)} = \frac{\partial[-v(x, -y)]}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x, -y)}{\partial(-y)} &= -\frac{\partial v(x, -y)}{\partial x} = \frac{\partial[-v(x, -y)]}{\partial x}\end{aligned}$$

两式表明  $\overline{f(\overline{z})}$  的实部与虚部满足 C-R 条件, 又显然  $u(x, -y)$  与  $-v(x, -y)$  可微, 所以  $\overline{f(\overline{z})}$  在下半平面可微.

再证充分性. 若已知  $\overline{f(\overline{z})}$  于下半平面解析, 则由必要性中推出之等式,  $\overline{f(\overline{z})}$  必于上半平面解析, 亦即  $f(z)$  于上半平面解析.

**【例 6】** 证明不等式

$$|\operatorname{Im}(z)| \leq |\sin z| \leq e^{|\operatorname{Im}(z)|}$$

**分析** 利用正弦函数及不等式有关知识证明.

**证明** 令  $z = x + iy$ , 则题中不等式为

$$|y| \leq |\sin(x + iy)| \leq e^{|y|}$$

由正弦函数的定义

$$\begin{aligned}\sin(x + iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i}(e^{-y+ix} - e^{y-ix}) \\ &= \frac{1}{2i}[(e^{-y} - e^y)\cos x + i\sin x(e^{-y} + e^y)]\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \therefore |\sin(x+iy)| &\leq \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \\
 &\leq \frac{1}{2}(e^{|y|} + e^{|y|}) = e^{|y|} \\
 |\sin(x+iy)| &\geq \frac{1}{2}|e^y - e^{-y}| \geq |y|
 \end{aligned}$$

∴ 原不等式成立.

## 历年考研真题评析

**【题 1】** 设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在区域  $D$  内解析, 并且  $v = u^2$ , 试求  $f(z)$ . (大连工学院 2006 年)

**解题分析** 利用  $C-R$  条件求解.

**解题过程** 由  $C-R$  条件及关系式  $v = u^2$  可知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \frac{\partial u}{\partial y} \quad ①$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2u \frac{\partial u}{\partial x} \quad ②$$

将式 ② 代入式 ①, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}(4u^2 + 1) = 0$$

因为  $4u^2 + 1 \neq 0$ , 所以  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

由 ② 有  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ , 所以  $u = c$  (常数), 于是  $f(z) = u + iv = c + ic^2$  为常数.

**【题 2】** 设  $f(z)$  在区域  $D$  内解析, 证明:

- (1) 若  $\arg f(z)$  为一常数, 则  $f(z)$  恒为常数;
- (2) 若  $\overline{f(z)}$  也在区域  $D$  内解析, 则  $f(z)$  恒为常数. (东北大学 2005 年)

**分析** 利用解析函数的性质证明.

**证明** (1) 因为  $\arg z$  在  $D$  内是一个常数, 所以可设  $\arg z = \theta$  ( $\theta$  为常数), 则  $-\pi < \theta \leq \pi$ .



① 若  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , 则  $u = 0$ , 从而  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ , 又因为  $f(z)$

在  $D$  内解析, 所以

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

从而有  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ , 所以  $v$  为常数.

故  $f(z)$  在  $D$  内为常数.

② 若  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , 则  $\theta = \operatorname{arctg} \frac{v}{u}$ , 于是有

$$\begin{cases} -v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ -v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

同上的讨论, 可得  $u, v$  均为常数.

故  $f(z)$  为常数.

③ 若  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ , 则  $\theta = \pi + \operatorname{arctg} \frac{v}{u}$

若  $-\pi < \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ , 则  $\theta = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{v}{u}$

对于这两种情形的讨论与 ② 类似, 均可得知  $f(z)$  为常数.

综上所述, 只要  $f(z)$  在  $D$  内解析, 且  $\arg z$  为常数, 就有  $f(z)$  为常数.

(2) 因为  $f(z)$  在  $D$  内解析, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad ①$$

又  $\overline{f(z)} = u - iv$  也在  $D$  内解析, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(-v)}{\partial x} \quad ②$$

由 ① 与 ② 可得  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

故  $f(z)$  在  $D$  内为常数.



**【题 3】** 设  $z = x + iy, f(z) = \left( xe^x \cos y - ye^x \sin y + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + i \left( xe^x \sin y + ye^x \cos y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$ , 问  $f(z)$  在哪几点对  $z$  可导? 求出  $f'(z)$ . (兰州大学 2005 年)

**解题分析** 利用可导的充要条件求解.

**解题过程** 设  $u, v$  分别表示  $f(z)$  的实部、虚部, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x+1)e^x \cos y - ye^x \sin y - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (x+1)e^x \sin y + ye^x \cos y + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -(x+1)e^x \sin y - ye^x \cos y - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = (x+1)e^x \cos y - ye^x \sin y - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

故当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时,  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ , 即  $C-R$  条

件成立, 且  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  在  $x^2 + y^2 \neq 0$  的点都连续, 因

此  $f(z)$  在  $z \neq 0$  的点可导.

实际上, 不难看出  $f(z) = ze^z + \frac{1}{z}$ , 从而当  $z \neq 0$  时

$$f'(z) = (z+1)e^z - \frac{1}{z^2}.$$

**【题 4】** 若  $f(z), g(z)$  在单连通区域  $D$  内解析,  $\alpha, \beta \in D$ , 证明  $\int_{\alpha}^{\beta} f(z)g'(z)dz = f(z)g(z) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} g(z)f'(z)dz$ . (东北大学 2005 年)

**分析** 利用解析函数及导数的性质.

**证明** 因为  $f(z), g(z)$  在单连通区域  $D$  内解析, 故  $f(z) \cdot g(z)$  也在  $D$  内解析, 且

$$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

所以  $f(z) \cdot g(z)$  是  $f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$  的原函数. 对  $\alpha$ 、



$\beta \in D$ , 得

$$\int_a^\beta [f'(z)g(z) + f(z)g'(z)]dz = [f(z)g(z)] \Big|_a^\beta$$

$$\text{即 } \int_a^\beta f(z)g'(z)dz = f(z)g(z) \Big|_a^\beta - \int_a^\beta g(z)f'(z)dz$$

【题5】 验证  $g(z) = \sin z$  在复平面上解析, 而  $\overline{g(z)}$  在复平面上不解析. (东北大学 2005 年)

分析 用  $C-R$  条件求解.

证明  $g(z) = \sin z$  在复平面上解析,

$$\text{因为 } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i\sin x), e^{-iz} = e^y(\cos x - i\sin x)$$

$$\text{所以 } \overline{\sin z} = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

$$\text{而 } \frac{\partial}{\partial x}(\sin x \cosh y) = \cos x \cosh y, \frac{\partial}{\partial y}(-\cos x \sinh y) = -\cos x \cosh y \text{ 即}$$

$\overline{\sin z}$  不满足  $C-R$  条件, 故  $\overline{g(z)} = \overline{\sin z}$  在复平面上不解析.

## 课后习题全解

○ 1. 利用导数定义推出:

$$1) (z^n)' = nz^{n-1} (n \text{ 为正整数}); \quad 2) \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}.$$

$$\text{证明 } 1) \text{ 令 } f(z) = z^n \quad f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z}$$

用数学归纳法证:  $(z^n)' = nz^{n-1}$

当  $n = 1$  时

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z) - z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1 = 1 \cdot z^{1-1}$$

即  $(z^1)' = 1 \cdot z^{1-1}$  成立.

设当  $n = k$  时, 有  $(z^k)' = kz^{k-1}$

则  $n = k + 1$  时

$$(z^n)' = (z^{k+1})' = (z \cdot z^k)' = z' \cdot z^k + z(z^k)'$$





$$= 1 \cdot z^k + z \cdot k \cdot z^{k-1} = z^k(k+1) = nz^{n-1}$$

由数学归纳法原理知:

$$(z^n)' = nz^{n-1} \quad (n \text{ 为正整数})$$

$$2) \text{ 令 } f(z) = \frac{1}{z}$$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{z+\Delta z} - \frac{1}{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{-\Delta z}{z^2 + \Delta z \cdot z}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-1}{z^2 + \Delta z \cdot z} = -\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

◎ 2. 下列函数何处可导?何处解析?

$$1) f(z) = x^2 - iy;$$

$$2) f(z) = 2x^3 + 3y^3 i;$$

$$3) f(z) = xy^2 + ix^2 y;$$

$$4) f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

分析 在某点可导,验证是否满足  $C-R$  方程即可. 在  $z_0$  解析:

$f(z)$  在点  $z_0$  及含  $z_0$  的某邻域内处处可导.

解 1) 令  $u = x^2, v = -y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

$$\text{满足} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\text{即} \quad 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

所以  $f(z)$  在直线  $x = -\frac{1}{2}$  上可导,而在复平面上处处不

解析.

$$2) u = 2x^3, v = 3y^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 9y^2$$

$$\text{若} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\text{有} \quad 6x^2 = 9y^2$$

$$\text{即} \quad \sqrt{2}x = \pm \sqrt{3}y$$



即只在  $\sqrt{2}x \pm \sqrt{3}y = 0$  上可导,但在复平面上处处不解析.

$$3) u = xy^2, v = x^2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x^2$$

$$\text{满足} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

即  $y^2 = x^2, 2xy = -2xy \Rightarrow y = \pm x, x = 0$  或  $y = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$

即只在  $z = 0$  处可导,在复平面上处处不解析.

$$4) u = \sin x \operatorname{sh} y, \quad v = \cos x \operatorname{sh} y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \operatorname{sh} y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \operatorname{sh} y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

故  $f(z)$  在复平面上处处可导,处处解析.

◎ 3. 指出下列函数  $f(z)$  的解析性区域,并求出其导数:

$$1) (z-1)^5; \quad 2) z^3 + 2iz;$$

$$3) \frac{1}{z^2 - 1}; \quad 4) \frac{az + b}{cz + d} (c, d \text{ 中至少有一个不为 } 0).$$

分析 考查关于连续、解析等基本性质.

解 1)  $f(z) = (z-1)^5$

$f'(z) = 5(z-1)^4, f(z)$  在复平面内处处解析.

$$2) f(z) = z^3 + 2iz$$

$f'(z) = 3z^2 + 2i, f(z)$  在复平面内处处解析.

$$3) f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$$

$$f'(z) = \frac{-2z}{(z^2 - 1)^2}, \text{ 又 } z^2 - 1 = 0, z = \pm 1$$

除  $z = \pm 1$  点外,  $f(z)$  在复平面上处处解析.

$$4) f(z) = \frac{az + b}{cz + d} (c, d \text{ 中至少有一个不为 } 0)$$



$$f'(z) = \frac{a(cz+d) - (az+b) \cdot c}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

若  $c = 0$ , 则处处解析; 若  $c \neq 0$ ,  $cz+d=0$ ,  $z = -\frac{d}{c}$ , 则除  $z$

$= -\frac{d}{c}$  点外,  $f(z)$  在复平面上处处解析.

○ 4. 求奇点.

$$1) \frac{z+1}{z(z^2+1)}; \quad 2) \frac{z-2}{(z+1)^2(z^2+1)}.$$

解 1) 由  $z(z^2+1)=0$  得  $z=0, z=\pm i$

奇点:  $0, \pm i$

2) 由  $(z+1)^2(z^2+1)=0$ , 得  $z=\pm i, z=-1$

奇点:  $\pm i, -1$

◎ 5. 复变函数的可导性与解析性有什么不同? 判断函数的解析性有哪些方法?

分析 考查连续、解析等基本性质.

解 复变函数的可导性反映了函数在某一点的局部性质, 而解析性则反映了函数在一个区域内的整体性质. 函数可以在某个区域内仅在一点处可导, 在这个区域内的其他点均不可导, 此时在这一点处不解析; 而如果说函数在某一点处解析, 则这个函数必定在这一点的某邻域内处处解析. 因此, 函数在一点处解析与在这一点的领域内可导才是等价的.

判断函数的解析性有两种常用方法: (1) 是用定义, 利用可导性判断解析性; (2) 是用定理: 函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在其定义域  $D$  内解析  $\Leftrightarrow u(x, y)$  和  $v(x, y)$  在  $D$  内任一点  $z = x + iy$  可微, 且满足  $C-R$  方程  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -$

$$\frac{\partial v}{\partial x}.$$

◎ 6. 判断下列命题的真假. 若真, 请给以证明; 若假, 请举例说明.

1) 如果  $f(z)$  在  $z_0$  连续, 那么  $f'(z_0)$  存在;



- 2) 如果  $f'(z_0)$  存在, 那么  $f(z)$  在  $z_0$  解析;
- 3) 如果  $z_0$  是  $f(z)$  的奇点, 那么  $f(z)$  在  $z_0$  不可导;
- 4) 如果  $z_0$  是  $f(z)$  和  $g(z)$  的一个奇点, 那么  $z_0$  也是  $f(z) + g(z)$  和  $f(z)/g(z)$  的奇点;
- 5) 如果  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  可导(指偏导数存在), 那么  $f(z) = u + iv$  亦可导;
- 6) 设  $f(z) = u + iv$  在区域  $D$  内是解析的, 如果  $u$  是实常数, 那么  $f(z)$  在整个  $D$  内是常数; 如果  $v$  是实常数, 那么  $f(z)$  在  $D$  内也是常数.

分析 考查关于连续解析等基本性质.

解 1) 命题为假.

例如,  $f(z) = x + 2iy$  在复平面内任一点连续, 但不满足  $C-R$  方程, 故  $f'(z)$  不存在.

2) 命题为假.

例如,  $f(z) = |z|^2$  在  $z = 0$  可导, 但不解析.

3) 命题为假.

例如, 见上例, 不解析的点叫奇点, 但可能有导数.

4) 命题为假.

例如,  $f(z) = \frac{1}{z-1}, g(z) = \frac{-1}{z-1}$

$z_0 = 1$  为  $f(z)$  和  $g(z)$  的一奇点, 但不是  $f(z) + g(z) = 0$  和  $f(z)/g(z) = -1$  的奇点.

5) 命题为假.

例如, 令  $u(x, y) = x^2, v(x, y) = xy$ , 则  $u(x, y), v(x, y)$  均可导, 但  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = x$ , 于是  $f(z)$  不可导.

6) 命题为真.

已知  $f(z)$  在  $D$  内解析  $\forall z \in D$ , 有

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$



且满足 C-R 方程:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ .

又  $u = \text{常数} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = \text{常}$

数

故  $f(z) = u + iv = \text{常数}$ .

●7. 如果  $f(z) = u + iv$  是  $z$  的解析函数, 证明:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} |f(z)|\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} |f(z)|\right)^2 = |f'(z)|^2$$

分析 考查解析函数的性质, 利用 C-R 方程代入即可得到结果.

证明 由  $f(z) = u + iv$  得

$$|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

又由于  $f(z)$  是解析函数

有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} |f(z)| = \frac{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} |f(z)| = \frac{u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$\text{所以 } \left(\frac{\partial}{\partial x} |f(z)|\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} |f(z)|\right)^2$$

$$= \left[ \frac{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right]^2 + \left[ \frac{u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right]^2$$

$$\left( \text{将 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \text{ 代入} \right)$$

$$= \frac{(u^2 + v^2) \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right]}{u^2 + v^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$\text{又由 } f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{可得}$$



$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$\text{左} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \text{右}$$

得证.

小结 解析函数的性质,涉及到函数求模,求偏导,求导数等,代入即可.

- 8. 设  $my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$  为解析函数,试确定  $l, m, n$  的值.

解 设  $u = my^3 + nx^2y, v = x^3 + lxy^2$ , 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2nyx, \frac{\partial u}{\partial y} = 3my^2 + nx^2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + ly^2, \frac{\partial v}{\partial y} = 2lxy.$$

由  $C-R$  方程 
$$\begin{cases} 2nyx = 2lxy \\ 3x^2 + ly^2 = -(3my^2 + nx^2) \end{cases}$$

所以  $n = l = -3, m = 1$ .

- 9. 证明:柯西-黎曼方程的极坐标形式是

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

分析 运用复合函数求导的方法,再运用( $-R$ 方程作转换).

证明 由  $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

得 
$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}$$

再由复合函数求导法则可得

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2}, \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \left(-\frac{y}{r^2}\right)$$



$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{y}{r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{x}{r^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{y}{r} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{x}{r^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{x}{r} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{y}{r^2}$$

由  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ , 得

$$\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{x}{r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{y}{r^2} = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{y}{r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{x}{r^2}$$

即  $x \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - y \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{x}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{y}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}$  ①

由  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ , 得

$$\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{y}{r} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{x}{r^2} = -\frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{x}{r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{y}{r^2}$$

即  $y \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + x \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{y}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{x}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}$  ②

仅将  $\frac{\partial u}{\partial r}$  及  $\frac{\partial v}{\partial r}$  看做线性方程组中的  $x_1, x_2$ , 其余看做系数

$a_{11}, a_{12}$  等, 联立求解 ①②, 得

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

**小结** 此题使用  $C-R$  方程时作转换要小心, 最后要用到代数中解线性方程组的知识.

**◎10.** 证明: 如果函数  $f(z) = u + iv$  在区域  $D$  内解析, 并满足下列条件之一, 那么  $f(z)$  是常数.

- 1)  $f(z)$  恒取实值;
- 2)  $\overline{f(z)}$  在  $D$  内解析;
- 3)  $|f(z)|$  在  $D$  内是一个常数;
- 4)  $\arg f(z)$  在  $D$  内是一个常数;



5)  $au + bv = c$ , 其中  $a, b$  与  $c$  为不全为零的实常数

分析 1) 使用  $C-R$  方程和常数导数为 0 的知识.

2) 使用  $C-R$  方程作转换.

3) 利用 2) 的结论和  $C-R$  方程. 4) 利用  $C-R$  方程.

5) 关键还是  $C-R$  方程的使用.

证明 1)  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \equiv$  实值

则  $v(x, y) \equiv 0$  且  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$f(z)$  解析, 则  $f(z)$  满足  $C-R$  方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

于是  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow u = \text{常数}$

$f(z) \equiv C$

注意: 关键是使用  $C-R$  方程.

由  $f(z) = u + iv$  在  $D$  内解析, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

又  $\overline{f(z)} = u - iv$  在  $D$  内解析得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

由 ①、②, 得  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

所以  $f(z) = C_1 + iC_2 \equiv C$

注意: 使用  $C-R$  方程, 和常数导数为零的知识.

3) 若  $|f(z)| \equiv C$

若  $f(z) = 0$ ,  $f(z)$  是常数.

若  $|f(z)| \equiv C \neq 0$ , 则  $f(z) \neq 0$

于是  $f(z) \cdot \overline{f(z)} = C^2$

即  $\overline{f(z)} = \frac{C^2}{f(z)}$

也解析





于是由 2), 知  $f(z) \equiv C$

注意:  $f(z) \equiv 0$  与  $\neq 0$  两种情况.

4) 设  $\arg f(z) = \theta \equiv C$ , 则

$$\frac{v}{u} = \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} C = C' \Rightarrow v = u \cdot C'$$

上式分别对  $x$  及  $y$  求偏导, 再用  $C-R$  方程

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = C' \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -C' \frac{\partial u}{\partial x}$$

即 
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - C' \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ C' \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

系数矩阵 
$$\begin{vmatrix} 1 & -C' \\ C' & 1 \end{vmatrix} = 1 + C'^2 \neq 0$$

由克拉默法则知 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

再由  $C-R$  方程得 
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

于是 
$$u \equiv C_1, v \equiv C_2$$

即 
$$f(z) = C_1 + iC_2$$

要注意克拉默法则的使用条件.

5) 若  $a \neq 0$ , 由  $au + bv = c$ , 得

$$u = \frac{c - bv}{a}$$

有 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{b}{a} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{b}{a} \frac{\partial v}{\partial y}$$

由  $C-R$  方程 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

于是 
$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial y}$$

即 
$$\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1\right] \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$



$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow u \equiv C_1, v \equiv C_2$$

$$\Rightarrow f(z) = C_1 + iC_2$$

注意  $C-R$  条件中, 各个式的转化.

◎ 11. 下列关系是否正确?

1)  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ ;      2)  $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ ;

3)  $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$ .

分析 对等式左端和右端分别进行计算, 再对两端进行比较.

解 1)  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$  正确. 因为

$$\begin{aligned}\overline{e^z} &= \overline{e^x(\cos y + i \sin y)} = e^x(\cos y - i \sin y) \\ &= e^x[\cos(-y) + i \sin(-y)] = e^x e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}\end{aligned}$$

2)  $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$  正确. 因为

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\overline{\cos z} = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$$

$$\text{而 } \cos \bar{z} = \cos(x - iy) = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$$

$$\text{所以 } \overline{\cos z} = \cos \bar{z}$$

3)  $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$  正确. 因为

$$\overline{\sin z} = \overline{\sin(x + iy)} = \overline{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}$$

$$= \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

$$\sin \bar{z} = \sin(x - iy) = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

$$= \sin x \cosh(-y) + i \cos x \sinh(-y)$$

$$= \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

$$\text{所以 } \overline{\sin z} = \sin \bar{z}$$

注意: 计算和各公式的应用, 特别是和差化积.

◎ 12. 找出下列方程的全部解:

1)  $\sin z = 0$ ;

2)  $\cos z = 0$ ;

3)  $1 + e^z = 0$ ;

4)  $\sin z + \cos z = 0$ .

解 1) 由  $\sin z = 0$ , 得

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0$$



即 
$$e^{2iz} = 1$$

故 
$$z = n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

2) 由  $\cos z = 0$  得  $e^{iz} + e^{-iz} = 0$ , 即  $e^{2iz} = -1$ , 故

$$z = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

3) 由  $1 + e^z = 0$  得  $e^z = -1$ , 故

$$z = (2n+1)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

4) 由  $\sin z + \cos z = 0$ , 得

$$\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) + \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 0$$

即 
$$e^{2iz} = -i$$

故 
$$z = n\pi - \frac{\pi}{4} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

○ 13. 证明:

1)  $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2;$$

2)  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1;$

3)  $\sin 2z = 2 \sin z \cos z;$

4)  $\operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z};$

5)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z, \cos(z + \pi) = -\cos z;$

6)  $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y, |\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y.$

证明

$$1) \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$= \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i}$$

$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2}$$

所以  $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

同理  $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$



$$2) \text{ 左边} = \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 = 1 = \text{右边}$$

3) 在 1)  $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$  中, 令  $z_1 = z_2 = z$  可得 3).

$$\begin{aligned} 4) \text{ 右边} &= \frac{2\sin z / \cos z}{1 - \sin^2 z / \cos^2 z} = \frac{2\sin z \cdot \cos z}{\cos^2 z - \sin^2 z} \\ &= \frac{2 \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) \cdot \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)}{\left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2} \\ &= \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{\frac{2i}{e^{2iz} + e^{-2iz}}} = \frac{\sin 2z}{\cos 2z} = \operatorname{tg} 2z = \text{左边} \end{aligned}$$

$$5) \text{ 左边} = \sin \frac{\pi}{2} \cos(-z) + \cos \frac{\pi}{2} \sin(-z) = \cos z = \text{右边}$$

边

$$\text{左边} = \cos z \cos \pi - \sin z \sin \pi = -\cos z = \text{右边}$$

$$\begin{aligned} 6) |\cos z|^2 &= |\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y|^2 \\ &= (\cos x \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \operatorname{sh} y)^2 \\ &= \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y \\ &= \cos^2 x (1 + \operatorname{sh}^2 y) + (1 - \cos^2 x) \operatorname{sh}^2 y \\ &= \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y \end{aligned}$$

同理

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$$

● 14. 说明:

1) 当  $y \rightarrow \infty$  时,  $|\sin(x + iy)|$  和  $|\cos(x + iy)|$  趋于无穷大;

2) 当  $t$  为复数时,  $|\sin t| \leq 1$  和  $|\cos t| \leq 1$  不成立.

分析 将原问题转化为另处一个较简单的问题.

解 1)  $\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$

$$\begin{aligned} |\cos(x + iy)| &= \sqrt{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} \\ &= \sqrt{(1 - \sin^2 x)(1 + \operatorname{sh}^2 y) + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} \end{aligned}$$



$$= \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} \geq |\operatorname{sh} y|$$

$\operatorname{sh} y$  为奇函数, 只须证:  $y > 0$  时,  $\operatorname{sh} y > y$ , 则有  $|\operatorname{sh} y| > |y|$ , 从而得

$$|\cos(x + iy)| > |y|$$

即得  $y \rightarrow \infty$  时,  $|\cos(x + iy)| \rightarrow \infty$

下证:  $y > 0$  时,  $\operatorname{sh} y > y$ , 而这是个高等数学问题.

令  $f(y) = \operatorname{sh} y - y$ ,  $f'(y) = \operatorname{ch} y - 1 > 0$

所以  $f(y) \uparrow$  (当  $y > 0$  时)

而  $f(0) = \operatorname{sh} 0 - 0 = 0$

所以  $f(y) > f(0) = 0$

即  $\operatorname{sh} y > y$  (当  $y > 0$  时)

关于  $|\sin(x + iy)|$  为无穷大 (当  $y \rightarrow \infty$ ), 也可类似证明.

2) 当  $t$  为复数时,  $|\sin t| \leq 1$  和  $|\cos t| \leq 1$  不成立, 以  $\cos z$  为例

$$\cos z|_{z=i} = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} \approx 1.5471$$

所以  $|\cos z|_{z=i} > 1$

小结 关键在于找出一个较简单的问题来代替原问题.

◎15. 求  $\operatorname{Ln}(-i)$ ,  $\operatorname{Ln}(-3 + 4i)$  和它们的主值.

分析 运用求主值的公式.

解  $\operatorname{Ln}(-i) = \ln |-i| + i \operatorname{Arg}(-i) + i(2k\pi)$

$$= 0 - \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i$$

$$= \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

所以主值为  $-\frac{\pi}{2}i$ .

$\operatorname{Ln}(-3 + 4i) = \ln |-3 + 4i| + i \operatorname{Arg}(-3 + 4i)$

$$= \ln 5 + i \arctg\left(-\frac{4}{3}\right) + 2k\pi i$$



$$= \ln 5 + i\left(\pi - \arctg \frac{4}{3}\right) + 2k\pi i$$

$$= \ln 5 + i\arctg \frac{4}{3} + (2k+1)\pi i$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

所以主值为  $\ln 5 + i(\pi - \arctg \frac{4}{3})$ .

◎ 16. 证明对数的下列性质:

$$1) \operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2;$$

$$2) \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

分析 运用公式将  $z_1, z_2$ , 分开, 再分别组合.

$$\begin{aligned} \text{证明 } 1) \operatorname{Ln}(z_1 z_2) &= \ln |z_1 z_2| + i\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) + 2k\pi i \\ &= \ln |z_1| + \ln |z_2| + i\operatorname{Arg} z_1 + 2l\pi i \\ &\quad + i\operatorname{Arg} z_2 + 2m\pi i \\ &= \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 \quad (k, l, m \in \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \ln \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + i\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + 2k\pi i \\ &= \ln |z_1| - \ln |z_2| + i\operatorname{Arg} z_1 - i\operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi i \\ &= \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2 \quad (k \in \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

注意: 运用  $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi$

◎ 17. 说明下列等式是否正确

$$1) \operatorname{Ln} z^2 = 2\operatorname{Ln} z;$$

$$2) \operatorname{Ln} \sqrt{z} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} z.$$

分析 将  $z$  转化为  $re^{i\theta}$  形式再进行比较.

解 1) 不正确. 因为

$$\text{由 } z = re^{i\theta}, z^2 = r^2 e^{i2\theta}$$

$$\operatorname{Ln} z^2 = \ln |z^2| + i(2\theta + 2k\pi)$$

$$\operatorname{Ln} z^2 = 2\ln r + i(2\theta + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad ①$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\theta + 2k\pi)$$

$$2\operatorname{Ln} z = 2\ln r + i(2\theta + 4k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad ②$$



比较式①与式②发现:式①的值比式②的值要多一些.

2) 不正确. 因为

$$\frac{1}{2} \operatorname{Ln} z = \frac{1}{2} \{ \ln r + i(\theta + 2k\pi) \} = \frac{1}{2} \ln r + i \left( \frac{\theta}{2} + k\pi \right) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{\frac{\theta+2l\pi}{2}i} (l=0, 1)$ , 即  $\sqrt{z}$  的两个值为  $\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$  与  $-\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$ .

于是  $\operatorname{Ln} \sqrt{z}$  有两个无穷值:

第一组为

$$\operatorname{Ln}(\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}) = \ln \sqrt{r} + i \left( \frac{\theta}{2} + 2k_1\pi \right) = \frac{1}{2} \ln r + i \left( \frac{\theta}{2} + 2k_1\pi \right) \quad (k_1=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

第二组为

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(\sqrt{r} e^{i\frac{\theta+2\pi}{2}}) &= \ln \sqrt{r} + i \left( \frac{\theta}{2} + \pi + 2k_1\pi \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln r + i \left[ \frac{\theta}{2} + (2k_2+1)\pi \right] \quad (k_2=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

虽然当  $k=2k_1$ , ( $k_1=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时,  $\frac{1}{2} \operatorname{Ln} z$  与第一组无

穷值函数相同, 当  $k=2k_2+1$  ( $k_2=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时  $\frac{1}{2} \operatorname{Ln} z$

与第二组无穷值函数相同, 但  $\operatorname{Ln} \sqrt{z}$  与  $\frac{1}{2} \operatorname{Ln} z$  是两个不同的

无穷值函数.

○18. 求  $e^{1-i\frac{\pi}{2}}$ ,  $\exp[(1+i\pi)/4]$ ,  $3^i$  和  $(1+i)^i$  的值.

解 1)  $e^{1-i\frac{\pi}{2}} = e \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = e \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = -ie$

2)  $\exp[(1+i\pi)/4]$

$$= \exp\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}i\right) = e^{\frac{1}{4}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= e^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{4}} (1+i)$$



$$\begin{aligned}
 3) 3^i &= e^{i \ln 3} = e^{i[\ln 3 + 2k\pi]} = e^{i \ln 3 - 2k\pi} \\
 &= e^{-2k\pi} e^{i \ln 3} = e^{-2k\pi} (\cos \ln 3 + i \sin \ln 3) \\
 &\quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) (1+i)^i &= e^{i \operatorname{Ln}(1+i)} = e^{i(\ln|1+i| + i[\operatorname{Arg}(1+i) + 2k\pi])} \\
 &= e^{i(\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} = e^{i \ln\sqrt{2} + i^2(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} \\
 &= e^{i \ln\sqrt{2} - (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} = e^{-(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} \cdot e^{i \ln\sqrt{2}} \\
 &= e^{-(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} \left( \cos \frac{\ln 2}{2} + i \sin \frac{\ln 2}{2} \right) \\
 &\quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)
 \end{aligned}$$

◎19. 证明:  $(z^a)' = az^{a-1}$ , 其中  $a$  为实数.

分析 将  $z$  转化为  $e$  的指数形式, 再用复合函数求导.

$$\text{证明 } (z^a)' = (e^{a \operatorname{Ln} z})' = e^{a \operatorname{Ln} z} \frac{d}{dz}(a \operatorname{Ln} z) = z^a \cdot a \cdot \frac{1}{z} = az^{a-1}$$

◎20. 证明:

$$1) \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1; \quad 2) \operatorname{sh}^2 z + \operatorname{ch}^2 z = \operatorname{ch} 2z;$$

$$3) \operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2;$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2.$$

分析 还是将  $\operatorname{sh}$  和  $\operatorname{ch}$  转化为  $e^z$  和  $e^{-z}$  的和与差.

$$\begin{aligned}
 \text{证明 } 1) \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z &= \left( \frac{e^{-z} + e^z}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{e^{-2z} + e^{2z} + 2}{4} - \frac{e^{-2z} + e^{2z} - 2}{4} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \operatorname{sh}^2 z + \operatorname{ch}^2 z &= \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{e^{2z} + e^{-2z} - 2}{4} + \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2}{4} \\
 &= \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{2} = \operatorname{ch} 2z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2 \\
 &= \frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2} \cdot \frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2} + \frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2} \cdot \frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2}
 \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 &= \frac{2e^{z_1} e^{z_2} - 2e^{-(z_1+z_2)}}{4} = \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{2} = \operatorname{sh}(z_1+z_2) \\
 &\operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2 \\
 &= \frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2} \cdot \frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2} + \frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2} \cdot \frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2} \\
 &= \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-(z_1+z_2)}}{2} = \operatorname{ch}(z_1+z_2)
 \end{aligned}$$

◎21. 解下列方程:

$$1) \operatorname{sh} z = 0; \quad 2) \operatorname{ch} z = 0; \quad 3) \operatorname{sh} z = i.$$

分析 将  $\operatorname{sh}$  和  $\operatorname{ch}$  转化为三角函数形式.

解 1)  $\operatorname{sh} z = \frac{1}{i} \sin iz = -i \sin iz, \operatorname{sh} z = 0$

即

$$\sin iz = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{由} \quad \sin iz &= \sin[i(x+iy)] = \sin(-y+ix) \\
 &= \sin(-y) \operatorname{ch} x + i \cos y \operatorname{sh} x = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(-y) \operatorname{ch} x = 0 & \text{①} \\ \cos y \operatorname{sh} x = 0 & \text{②} \end{cases}$$

在式①中,  $\operatorname{ch} x \neq 0 \Rightarrow \sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi (k=0, \pm 1, \dots)$  代入

式②  $\cos(k\pi) \operatorname{sh} x = 0, (\pm 1) \operatorname{sh} x = 0$

$$\Rightarrow \operatorname{sh} x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow z = x + iy = 0 + ik\pi = k\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$2) \operatorname{ch} z = \cos(iz) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(iz) = \cos[i(x+iy)] = \cos(-y+ix)$$

$$= \cos(-y) \operatorname{ch} x - i \sin(-y) \operatorname{sh} x$$

$$= \cos y \operatorname{ch} x + i \sin y \operatorname{sh} x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{ch} x \cos y = 0 & \text{③} \\ \sin y \operatorname{sh} x = 0 & \text{④} \end{cases}$$

$$\operatorname{ch} x \neq 0, \text{由式③} \Rightarrow \cos y = 0$$

$$\Rightarrow y = k\pi + \frac{\pi}{2}, k=0, \pm 1 \dots$$



代入式④,得  $\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sh}x = 0$

$$\Rightarrow (\pm 1)\operatorname{sh}x = 0 \Rightarrow \operatorname{sh}x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow z = x + iy = 0 + i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = i\frac{\pi + 2k\pi}{2} = \frac{2k+1}{2}\pi i$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

3) 由 1) 的推导过程知

$$\operatorname{sh}z = -i\sin iz = (-i)(-\sin y \operatorname{ch}x + i\cos y \operatorname{sh}x) = i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin y \operatorname{ch}x = 1 \\ \operatorname{sh}x \cos y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{⑤} \\ \text{⑥} \end{matrix}$$

由式⑥,若  $\operatorname{sh}x = 0$ ,得

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

将  $x=0$  代入式⑤得

$$1 \cdot \sin y = 1 \Rightarrow y = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

若  $\cos y = 0$ ,得  $y = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,代入式⑤,得

$$\begin{aligned} \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ch}x &= 1 \\ \Rightarrow \operatorname{ch}x &= \pm 1 \end{aligned}$$

又  $\operatorname{ch}x > 0$  恒成立,舍去  $\operatorname{ch}x = -1$

$$\Rightarrow \operatorname{ch}x = 1 \Rightarrow x = 0, y = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow z = x + iy = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

○22. 证明教材中式(2.3.19)与(2.3.20).

$$\text{证明} \quad \operatorname{ch}iy = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \frac{\cos y + i\sin y + \cos y - i\sin y}{2} = \cos y$$

$$\operatorname{sh}iy = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2} = \frac{\cos y + i\sin y - \cos y + i\sin y}{2} = i\sin y$$

$$\operatorname{ch}iy = \cos y, \operatorname{sh}iy = i\sin y$$

(2.3.19)得证.



$$\begin{aligned}
 \operatorname{ch}(x+iy) &= \cos i(x+iy) = \cos(-y+ix) \\
 &= \cos(-y)\cos ix - \sin(-y)\sin ix \\
 &= \cos y \operatorname{ch} x + i \sin y \operatorname{sh} x \\
 \operatorname{sh}(x+iy) &= i \sin[(x+iy)(-i)] = i \sin(y-ix) \\
 &= i \sin y \cos ix - i \cos y \sin ix \\
 &= \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y
 \end{aligned}$$

(2.3.20) 得证.

● 23. 证明  $\operatorname{sh} z$  的反函数  $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$ .

分析 用  $z = \operatorname{sh} w$ , 然后将  $\operatorname{sh} w$  用指数的组合写出, 再求出  $z$ .

证明 设  $z = \operatorname{sh} w$ , 则

$$w = \operatorname{Arsh} z$$

$$\text{又 } z = \operatorname{sh} w = \frac{1}{2}(e^w - e^{-w}), \text{ 于是}$$

$$e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0$$

$$e^w = z + \sqrt{z^2 + 1}$$

$$w = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

即

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

小结 这里用到解一元二次方程的知识.

● \* 24. 已知平面流速场的复势  $f(z)$  为

$$1) (z+i)^2; \quad 2) z^3; \quad 3) \frac{1}{z^2+1}.$$

求流动的速度以及流线和等势线的方程.

分析 求出  $f'(z)$  和  $\overline{f'(\bar{z})}$  然后用公式

求流动的速度以及流线和等势线的方程.

解 1)  $f(z) = (z+i)^2 = (x+yi+i)^2$

$$= x^2 - (y+1)^2 + 2x(y+1)i$$

$$f'(z) = 2(z+i) \quad v = \overline{f'(\bar{z})} = 2(\bar{z}-i) = 2x - 2(y+1)i$$

流函数

$$\Psi(x, y) = 2x(y+1)$$

流线方程

$$x(y+1) = c_1 \quad \text{即} \quad y = \frac{c_1}{x} - 1$$



势函数  $\varphi(x, y) = x^2 - (y+1)^2$

等势线方程  $x^2 - (y+1)^2 = c_2$

速度方程为  $v(z) = 2(\bar{z} - i)$

$$\begin{aligned} 2) f(z) &= z^3 = (x+yi)^3 \\ &= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \end{aligned}$$

$$f'(z) = 3z^2 = 3(x^2 - y^2 + 2xyi)$$

$$v = \overline{f'(z)} = 3\bar{z}^2 = 3(x^2 - y^2 - 2xyi)$$

流函数  $\Psi(x, y) = 3x^2y - y^3$

流线方程  $(3x^2 - y^2)y = c_1$

势函数  $\varphi(x, y) = x(x^2 - 3y^2)$

等势线方程  $x(x^2 - 3y^2) = c_2$

速度方程为  $v(z) = 3\bar{z}^2$

$$3) f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{x^2 - y^2 + 1 - 2xyi}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}$$

$$f'(z) = -\frac{2z}{(z^2 + 1)^2}$$

$$v = \overline{f'(z)} = \frac{-2(x - yi)(x^2 - y^2 + 1 + 2xyi)}{[(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2]^2}$$

流函数  $\Psi(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}$

流线方程  $\frac{xy}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} = c_1$

势函数  $\varphi(x, y) = \frac{x^2 - y^2 + 1}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}$

等势线方程  $\frac{x^2 - y^2 + 1}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} = c_2$

速度方程式  $v(z) = -\frac{2\bar{z}}{(\bar{z}^2 + 1)^2}$

小结 注意各公式的运用及计算.

# 第三章

## 复变函数的积分

### 内容提要

#### 一、复变函数积分的概念

##### 1. 复积分的概念与性质

设函数  $w = f(z)$  定义在区域  $D$  内,  $C$  是  $D$  内起点为  $\alpha$  终点为  $\beta$  的一条光滑的(或分段光滑的)有向曲线, 把曲线  $C$  任意分成  $n$  个弧段, 设分点为

$$\alpha = z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_k, \dots, z_n = \beta,$$

在每个弧段  $\overline{z_{k-1} z_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 上任意取一点  $\xi_k$ , 并作和式

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k.$$

这里  $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ , 用  $\Delta s_k$  表示弧  $\overline{z_{k-1} z_k}$  的长度,  $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta s_k\}$ . 当  $\delta \rightarrow 0$  时, 如果不论对  $C$  的任何分法及  $\xi_k$  的取法如何,  $S_n$  有惟一极限, 那么称这极限值为函数  $f(z)$  沿曲线  $C$  的积分, 记住

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k.$$



若  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在区域  $D$  内连续, 则上述积分存在, 而且

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy.$$

复积分有许多与高等数学中曲线积分相似的性质, 如

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| = \int_C |f(z)| ds \leq ML$$

这里  $L$  为有向曲线  $C$  的长度,  $M = \max_{z \in C} |f(z)|$ ,  $|dz|$  表示弧长的微分, 即

$$|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = ds.$$

## 2. 复变函数的计算

(1) 化为两个二元实变函数的第二类线积分:

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy;$$

(2) 利用曲线  $C$  的参数方程将它化为定积分, 设积分路径  $C$  由参数方程  $z = z(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$  给出, 起点  $A$  对应于  $\alpha$ , 终点  $B$  对应于  $\beta$ , 则

$$\int_C f(z) dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)] z'(t) dt$$

## 二、柯西—古萨基本定理

### 1. 柯西—古萨基本定理

设  $f(z)$  在单连域  $B$  内解析,  $C$  为  $B$  内任一闭曲线, 则

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

### 2. 基本定理的推广

(1) 设  $f(z)$  在单连域  $B$  内解析, 在闭区域  $\bar{B}$  上连续,  $C$  为  $B$  的边界曲线, 则

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

(2) 复合闭路定理 设  $f(z)$  在多连通域  $D$  内解析,  $C$  为  $D$  内



任一简单闭曲线,  $C_1, C_2, \dots, C_n$  是  $C$  内的简单闭曲线, 它们互不包含也互不相交, 并且以  $C, C_1, C_2, \dots, C_n$  为边界的区域全含于  $D$  内, 则

$$\textcircled{1} \oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz, \text{ 其中 } C \text{ 与 } C_k \text{ 均取正向};$$

$$\textcircled{2} \oint_{\Gamma} f(z) dz = 0, \text{ 其中 } \Gamma \text{ 为由 } C \text{ 及 } C_k (k=1, 2, \dots, n) \text{ 所组成的复合闭路.}$$

### 3. 不定积分与原函数

若  $f(z)$  在单连通区域  $D$  内解析,  $C$  是  $D$  内的光滑曲线, 则积分

$$\int_C f(z) dz \text{ 只与 } C \text{ 的起点 } z_0 \text{ 和终点 } z \text{ 有关, 固定起点 } z_0, \text{ 则 } F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \text{ 是 } D \text{ 内的单值函数.}$$

(1)  $F(z)$  在  $D$  内解析, 且  $F'(z) = f(z)$ , 则称  $F(z)$  是  $f(z)$  在  $D$  内的一个原函数.

(2) 若  $F(z)$  是  $f(\xi)$  的一个原函数, 则

$$\int_{z_0}^z f(\xi) dz = F(\xi) - F(z_0).$$

这与定积分中的牛顿—莱布尼兹公式类似, 且有与之类似的分部积分公式

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) g'(z) dz = f(z) g(z) \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(z) g(z) dz$$

和换元公式

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} f[\varphi(z)] \varphi'(z) dz &= \int_{z_0}^{z_1} f[\varphi(z)] d\varphi(z) \\ &= F[\varphi(z_1)] - F[\varphi(z_0)] \end{aligned}$$

其中,  $\varphi(z)$  是单值解析函数.

## 三、柯西积分公式

### 1. 柯西积分公式

设  $f(z)$  在区域  $D$  内解析,  $C$  为  $D$  内任一正向简单闭曲线. 其



内部完全含于  $D$ ,  $z_0$  为  $C$  内任意一点, 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

柯西积分公式给出了解析函数  $f(z)$  的一个积分表达式. 它表明, 只要  $f(z)$  在区域边界上的值一经确定, 那么它在区域内部任一点处的值就完全确定. 它反映了解析函数在区域内部的值与其在区域边界上的值之间的密切关系, 是解析函数的重要特性.

## 2. 高阶导数公式

在柯西积分公式同样的条件下, 我们有

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \dots).$$

高阶导数公式表明, 在区域  $D$  内的解析函数, 其导函数仍是  $D$  内的解析函数, 而且具有任意阶导数. 这是解析函数区别于可微实变函数的又一重要特性.

利用上述两个公式, 我们可以将教材第三章 §1 例 2 中的公式推广到一般情形:

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

其中  $C$  为包含  $z_0$  的任一简单正向闭曲线.

## 四、解析函数与调和函数

### 1. 定义

(1) 调和函数: 如果二元实函数  $\varphi(x, y)$  在区域  $D$  内具有二阶连续偏导数, 且满足拉普拉斯 (Laplace) 方程:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

则称  $\varphi(x, y)$  为区域  $D$  内的调和函数.

若  $f(z) = u + iv$  为解析函数, 则其实部  $u$  和虚部  $v$  都是调和函数. 反之, 若  $u, v$  为任意二个调和函数, 则  $u + iv$  不-





定是解析函数.

(2) 共轭调和函数: 设  $u(x, y)$  为区域  $D$  内给定的调和函数, 我们把使  $u + iv$  在  $D$  内构成解析函数的调和函数  $v(x, y)$  称为  $u(x, y)$  的共轭调和函数.

若  $v$  是  $u$  的共轭调和函数, 则  $-u$  是  $v$  的共轭调和函数.

## 2. 关系

任何在区域  $D$  内解析的函数, 它的实部和虚部都是  $D$  内的调和函数; 且虚部为实部的共轭调和函数.

调和函数在诸如流体力学和电磁场理论等实际问题中, 有着重要的应用. 又由于解析函数与调和函数的密切联系, 使我们可以借助于解析函数的理论去解决调和函数的问题.

## 3. 求解方法

已知调和函数  $u(x, y)$  或  $v(x, y)$  求解析函数  $f(z) = u + iv$  的方法

### (1) 不定积分法

因为  $f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y + iv_x$

即  $f'(z) = u_x - iu_y = u(z), f'(z) = v_y + iv_x = v(z)$

所以  $f(z) = \int u(z) dz + c$

$f(z) = \int v(z) dz + c$

### (2) 线积分法

若已知实部  $u = u(x, y)$ , 利用 C-R 方程可得  $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx +$

$\frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$ , 故虚部为

$$v = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C.$$

由于该线积分与路径无关, 可选简单路径 (如折线) 计算它, 其中  $(x_0, y_0)$  与  $(x, y)$  为  $B$  内的点. 若已知虚部  $v$ , 可用类似

方法求得实部  $u$ .

## 典型例题与解题技巧

**【例 1】** 计算积分  $\oint_c (z-a)^n dz$ , 其中  $c$  为不经过点  $a$  的正向简单闭曲线,  $n$  为整数.

**解题分析** 此例由于没有明确给出积分路径  $c$ , 我们必须就点  $a$  与  $c$  的位置关系以及  $(z-a)^n$  的解析情况, 利用复积分基本定理与复积分计算公式来完成此题.

**解题过程** 当  $n \geq 0$  时, 函数  $(z-a)^n$  在复平面内处处解析, 所以由柯西-古萨定理得  $\oint_c f(z) dz = 0$ . 同样, 当  $a$  不在  $c$  内时, 对任何整数  $n$ ,  $(z-a)^n$  在以  $c$  为边界的闭区域上解析, 从而  $\oint_c (z-a)^n dz = 0$ .

下面仅讨论  $n < 0$  且  $a$  在  $c$  内的情形.

当  $a$  在  $c$  内部时, 则在  $c$  内挖去  $a$  的邻域:  $|z-a| < \rho$ , 由复合闭路定理及复积分计算公式得

$$\oint_c (z-a)^n dz = \oint_{|z-a|=\rho} (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} \rho^n e^{in\theta} \cdot \rho i e^{i\theta} d\theta = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta$$

$$\text{而当 } n = -1 \text{ 时} \quad \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = 2\pi$$

$$\text{当 } n \neq -1 \text{ 时} \quad \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = \frac{1}{(n+1)i} e^{i(n+1)\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

故上述讨论可总结如下:

$$\oint_c (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1, a \text{ 在 } c \text{ 内} \\ 0, & n = -1, a \text{ 不在 } c \text{ 内} \end{cases}$$

**【例 2】** 计算积分  $\oint_c \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz$ .



$$(1) C: |z+1| = \frac{1}{2};$$

$$(2) C: |z-1| = \frac{1}{2};$$

$$(3) C: |z| = 2.$$

**解题分析** 计算积分时用柯西积分公式及复合闭路定理

$$\frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} = \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{(z+1)(z-1)}$$

**解题过程**

$$\begin{aligned} (1) \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz &= \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z-1} dz \\ &= 2\pi i \left. \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z-1} \right|_{z=-1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 令 } f(z) = \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z+1}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz &= \oint_C \frac{f(z)}{z-1} dz = 2\pi i f(1) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i \end{aligned}$$

(3) 由复合闭路定理

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=2} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz &= \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz + \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i = \sqrt{2} \pi i \end{aligned}$$

**【例 3】** 证明下列命题:



(1) 柯西不等式 设  $f(z)$  在区域  $D$  内解析,  $z_0 \in D$ , 圆周  $C_r: |\zeta - z_0| = r$  及其内部全含于  $D$ , 则  $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M(r)}{r^n}$ , 其中  $M(r) = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$ ;

(2) 刘维尔(Liouville)定理 若  $f(z)$  在复平面上解析且有界, 则  $f(z)$  必恒为常数.

分析 (1) 柯西不等式是关于在  $D$  内的解析函数的  $n$  阶导数的不等式, 因此, 它的证明需要利用解析函数的高阶导数公式. 由于该公式是关于  $f^{(n)}(z_0)$  的积分表达式, 所以在估计  $|f^{(n)}(z_0)|$  的过程中还要利用积分的不等式性质.

(2) 为了证明  $f(z)$  在复平面上恒为常数, 只要证明  $f'(z) \equiv 0$ . 为此, 利用(1)中的柯西不等式可得

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M(r)}{r} \leq \frac{M}{r}, \text{ 其中 } M \text{ 为 } |f(z)| \text{ 在复平面上的上界. 再令 } r \rightarrow +\infty, \text{ 即可证明该结论.}$$

证明 (1) 应用高阶导数公式与积分的不等式性质可得,

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{C_r} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} ds \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} \oint_{C_r} ds \\ &= \frac{n!}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{n!M(r)}{r^n} \end{aligned}$$

(2) 设  $|f(z)| \leq M$ ,  $z_0$  为复平面上的任意一点. 由于对任何  $r$ ,  $M(r) \leq M$ , 故由柯西不等式知, 对任何  $r$  都有

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$$

令  $r \rightarrow +\infty$ , 即得  $f'(z_0) = 0$ . 根据  $z_0$  在复平面上的任意性, 所以在复平面上恒有  $f'(z) = 0$ , 从而得知  $f(z)$  恒为常数.

注 柯西不等式和刘维尔定理在复变函数中有许多重要的应用, 因而是两个重要的结论.



【例 4】 求积分  $I = \oint_C \frac{1}{z^3(z+1)(z-2)} dz$  的值, 其中  $C$  为  $|z| = r$ ,  $r \neq 1, 2$ .

解题分析 利用解析及复合闭路定理.

解题过程 (1) 当  $0 < r < 1$  时, 设  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$ , 那么

$f(z)$  在  $C$  内解析. 所以

$$I = \oint_C \frac{f(z)}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0)$$

而

$$f''(z) = -\frac{6z^2 - 6z + 6}{(z^2 - z - 2)^3}, \quad f''(0) = -\frac{3}{4}$$

所以

$$I = -\frac{3}{4}\pi i$$

(2) 当  $1 < r < 2$  时, 作圆  $C_0, C_1$ , 如图 3-1(a), 这时, 根据复合闭路定理, 得

$$\begin{aligned} I &= \oint_{C_0} \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)} + \oint_{C_1} \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)} \\ &= -\frac{3\pi i}{4} + 2\pi i g(-1) \quad \left(g(z) = \frac{1}{z^3(z-2)}\right) \\ &= -\frac{3\pi i}{4} + 2\pi i \left[\frac{1}{z^3(z-2)}\right]_{z=-1} \\ &= -\frac{3\pi i}{4} + \frac{2\pi i}{3} = -\frac{1}{12}\pi i \end{aligned}$$

(3) 当  $r > 2$  时, 作圆  $C_0, C_1, C_2$ , 如图 3-1(b), 这时

$$I = \oint_{C_0} + \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$$

右端第一、第二两个积分的和就是(2)中的结果, 即等于

$-\frac{\pi i}{12}$ . 在右端第三个积分中, 设

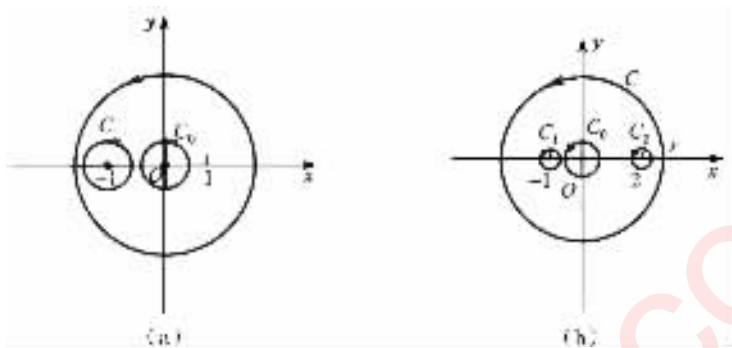


图 3-1

$$f(z) = \frac{1}{z^3(z+1)}$$

这个函数在  $C_2$  内处处解析, 根据柯西积分公式, 有

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} &= \oint_{C_2} \frac{1}{z^3(z+1)(z-2)} dz \\ &= 2\pi i f(2) = 2\pi i \left[ \frac{1}{z^3(z+1)} \right]_{z=2} = \frac{\pi i}{12} \end{aligned}$$

所以

$$I = -\frac{1}{12}\pi i + \frac{1}{12}\pi i = 0$$

**【例 5】** 设  $u = x^2 - y^2 + xy$  为调函数, 试求其共轭调和函数  $v(x, y)$  及解析函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

**解题分析** 本题有三种解法; 利用  $C-R$  条件; 线积分法; 不定积分法. 我们在这里用  $C-R$  条件来解题.

**解题过程** 利用  $C-R$  条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y + x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

故  $u(x, y)$  满足 Laplace 方程, 又

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$$



$$\text{所以 } v = \int (2y - x) dx + \varphi(y) = 2xy - \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + \varphi'(y) = 2x + y$$

$$\varphi'(y) = y, \quad \varphi(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

$$\text{故 } v(x, y) = 2xy - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C \quad (C \text{ 为任意常数})$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) \\ &= (x^2 - y^2 + xy) + i(2xy - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}y^2) + iC \\ &= (x^2 + 2ixy - y^2) - \frac{1}{2}i(x^2 + 2ixy - y^2) + iC \\ &= (x + iy)^2 - \frac{1}{2}i(x + iy)^2 + iC \\ &= \frac{1}{2}(2 - i)z^2 + iC \end{aligned}$$

【例 6】 设  $H(x, y)$  具有二阶连续的偏导数,  $f(z) = u + iv$  是  $z = x + iy$  的解析函数, 试证明

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \right) \cdot |f'(z)|^2$$

并由此推证, 对任意的  $p > 0$  有

$$\frac{\partial^2 |f(z)|^p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f(z)|^p}{\partial y^2} = p^2 |f(z)|^{p-2} |f'(z)|^2.$$

分析 由复合函数求导法则结合解析函数  $f(z)$  的性质, 如  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial v}{\partial x}, f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \text{ 等可直接验证结论} \end{aligned}$$

. 然后把要推证的结果与所得结论相比较, 取  $H(x, y) = |f(z)|^p = (u^2 + v^2)^{p/2}$  即可.

证明 因  $f(z) = u + iv$  是  $z$  的解析函数, 所以  $v$  为  $u$  的共轭调和函



$$\text{数而且 } f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$\text{于是由 } \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} &= \left( \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned}$$

(在  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$  中将  $x$  换为  $y$  即可)

$$\text{得 } \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial H}{\partial u} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &\quad + \frac{\partial H}{\partial v} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &= \left( \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \right) \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &= \left( \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \right) \cdot |f'(z)|^2 \end{aligned}$$

若令  $H(x, y) = |f(z)|^p = (u^2 + v^2)^{p/2}$ , 则

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 |f(z)|^p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f(z)|^p}{\partial y^2} \\ &= \left[ \frac{\partial^2 (u^2 + v^2)^{p/2}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 (u^2 + v^2)^{p/2}}{\partial v^2} \right] \cdot |f'(z)|^2 \\ &= p^2 (u^2 + v^2)^{\frac{p-2}{2}} |f'(z)|^2 \\ &= p^2 |f(z)|^{p-2} |f'(z)|^2 \end{aligned}$$





## 历年考研真题评析

【题 1】 计算  $\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$ , 其中  $C$  是不经过 0 与 1 的闭光滑曲线.

(大连工学院 2005 年)

解题分析 分情况讨论解决此题.

解题过程 分以下四种情况讨论:

1° 若封闭曲线  $C$  既不包含 0 也不包含 1, 则  $f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)^3}$  在  $C$  内解析, 由柯西—古萨基本定理, 有

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = 0$$

2° 若 0 在  $C$  内而 1 在  $C$  外 [如图 3-2(a)], 则  $f(z) = \frac{e^z}{(1-z)^3}$  在  $C$  内解析, 据柯西积分公式有

$$\begin{aligned} \int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz &= \int_C \frac{e^z/(1-z)^3}{z} dz \\ &= 2\pi i \cdot \frac{e^z}{(1-z)^3} \Big|_{z=0} = 2\pi i \end{aligned}$$

3° 若 1 在  $C$  内而 0 在  $C$  外, 则  $f(z) = \frac{e^z}{z}$  在  $C$  内解析, 据高阶导数公式有

$$\begin{aligned} \int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz &= \int_C \frac{e^z/z}{(1-z)^3} dz = \int_C -\frac{e^z/z}{(z-1)^3} dz \\ &= \frac{2\pi i}{2!} [-f''(1)] \\ &= \pi i \frac{(z^2 - 2z + 2)e^z}{-z^3} \Big|_{z=1} \\ &= -\pi i \end{aligned}$$

4° 若 0 和 1 都在  $C$  内, 则分别以 0, 1 为圆心, 以  $\rho > 0$  为半径作圆  $C_1, C_2$ , 使  $C_1$  和  $C_2$  也在  $C$  内 [如图 3-2(b)], 且  $C_1$  与  $C_2$  互不相交, 互不包含. 据复合闭路定理有

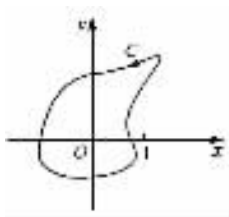


图 3-2(a)

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = \int_{C_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz + \int_{C_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$

积分  $\int_{C_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$  即为  $2^\circ$  的结果  $2\pi i$ ,

$\int_{C_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$  即为  $3^\circ$  的结果  $-e\pi i$ ,

所以  $\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = (2-e)\pi i$

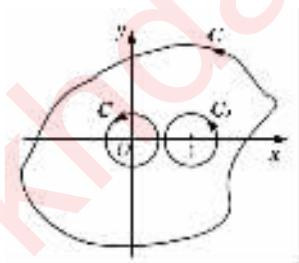


图 3-2(b)

**【题 2】** 计算积分  $\int_{|z|=r} \frac{1}{(z-a)^n} dz$

其中  $r > 0, n$  是整数,  $|a| \neq r$ . (复旦大学 2005 年)

**解题分析** 利用柯西定理计算积分.

**解题过程** (1)  $|a| > r$  时,  $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$  在  $|z| \leq r$  上解析,

所以

$$\oint_{|z|=r} \frac{1}{(z-a)^n} dz = 0$$



(2)  $|a| < r$  时,  $a$  属于区域  $|z| \leq r$ ,

$$\oint_{|z|=r} \frac{1}{(z-a)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i, n=1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases}$$

**【题 3】** 如果  $f(z)$  在  $|z| \leq a$  上解析, 在  $|z|=a$  上, 有  $|f(z)| > m$ , 且  $|f(0)| < m$ , 其中  $a$  及  $m$  为正数. 证明:  $f(z)$  在  $|z| < a$  内至少有一个零点. (东北大学 2005 年)

**分析** 用反证法.

**证明** 假设  $f(z)$  在  $|z| < a$  内无零点, 已知在  $|z|=a$  上,  $|f(z)| > m > 0$ , 且  $f(z)$  在  $|z| \leq a$  上解析, 则  $\frac{1}{f(z)}$  在  $|z| \leq a$  上也解析, 由

Cauchy 积分公式知:

$$\frac{1}{f(0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=a} \frac{f(z)}{z-0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=a} \frac{1}{zf(z)} dz$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad \left| \frac{1}{f(0)} \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=a} \frac{1}{zf(z)} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \oint_{|z|=a} \frac{1}{|zf(z)|} dz < \frac{2\pi a}{2\pi ma} = \frac{1}{m} \end{aligned}$$

即  $|f(0)| \geq m$ , 这与已知  $|f(0)| < m$  矛盾, 得证.

**【题 4】** 设  $u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$ ,

(1) 试证明  $u(x, y)$  是复平面  $C$  上调和函数;

(2) 求  $C$  上一个解析函数, 使其实部恰为  $u(x, y)$ . (吉林大学 2005 年)

**解题分析** 此题考查知识点为调和函数及 C-R 条件.

**解题过程**  $u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$

$$(1) \frac{\partial u}{\partial x} = e^x [(x+1) \cos y - y \sin y]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x [(x+2) \cos y - y \sin y]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x [(x+1) \sin y + y \cos y]$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x[(x+2)\cos y - y\sin y]$$

即 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

故  $u(x, y)$  是复平面  $C$  上调和函数.

(2) 设  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  为  $C$  上一个解析函数, 则由  $C-R$  条件, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = e^x[(x+1)\cos y - y\sin y] \\ v &= \int e^x[(x+1)\cos y - y\sin y] dy + \varphi(x) \\ &= e^x[x\sin y + y\cos y] + \varphi(x)\end{aligned}$$

且 
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

所以 
$$\begin{aligned}e^x[(x+1)\sin y + y\cos y] + \varphi'(x) \\ = e^x[(x+1)\sin y + y\cos y]\end{aligned}$$

故 
$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 0, \quad \varphi(x) = c \\ v(x, y) &= e^x[x\sin y + y\cos y] + c \\ f(x, y) &= u(x, y) + iv(x, y) \\ &= e^x[(x+iy)\cos y + (x+iy)i\sin y] + ic \\ &= ze^z + ic\end{aligned}$$

**【题 5】** 设  $u(z)$  是  $\{0 < |z| < \infty\}$  上的调和函数, 满足  $u(z) = u(|z|)$ , 试求  $u(z)$  的一般形式. (复旦大学 2006 年)

**解题分析** 利用高阶求导及调和函数的性质求解.

**解题过程** 令  $z = x + iy$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \frac{\partial z}{\partial y} = i$ ,

由  $u(z) = u(|z|)$ , 得

$$\begin{cases} u_x = u'(z) = u'(|z|) \frac{x}{|z|} \\ u_y = u'(z) = u'(|z|) \frac{y}{|z|} \end{cases}$$



$$\text{从而} \begin{cases} u_{xx} = u''(z) = u''(|z|) \frac{x^2}{|z|^2} + u'(|z|) \cdot \frac{y^2}{|z|^3} \\ u_{yy} = -u''(z) = u''(|z|) \frac{y^2}{|z|^2} + u'(|z|) \cdot \frac{x^2}{|z|^3} \end{cases}$$

因为  $u$  为调和函数, 所以

$$u_{xx} + u_{yy} = u''(|z|) + \frac{u'(|z|)}{|z|} = 0$$

$$\text{从而} \quad \frac{u''(|z|)}{u'(|z|)} = -\frac{1}{|z|}$$

$$u'(|z|) = \frac{c}{|z|} \Rightarrow u(|z|) = c \ln |z| + d$$

易证该函数为调和函数.

又  $u(z) = u(|z|)$ , 所以  $u(z)$  的一般形式为

$$u(z) = c \ln |z| + d$$

## 课后习题全解

○1. 沿下列路线计算积分  $\int_0^{3+i} z^2 dz$ .

- 1) 自原点至  $3+i$  的直线段;
- 2) 自原点沿实轴至 3, 再由 3 沿直向上至  $3+i$ ;
- 3) 自原点沿虚轴至  $i$ , 再由  $i$  沿水平方向向右至  $3+i$ .

解 1) 所给路线的参数方程为:  $z = (3+i)t, 0 \leq t \leq 1$ , 起点参数  $t = 0$ , 终点参数  $t = 1$ . 由复积分计算公式:

$$\begin{aligned} \int_0^{3+i} z^2 dz &= \int_0^1 [(3+i)t]^2 [(3+i)t]' dt \\ &= (3+i)^3 \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} (3+i)^3 = 6 + \frac{26}{3}i \end{aligned}$$

2) 自原点沿实轴至 3 这一段路线  $c_1$  的参数方程为:  $z = 3t, 0 \leq t \leq 1$ , 由 3 沿直向上至  $3+i$  这一段路线  $c_2$  的参数方程为:  $z = 3 + ti, 0 \leq t \leq 1$ . 由公式:

$$\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_{c_1} z^2 dz + \int_{c_2} z^2 dz$$



$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (3t)^2 (3t)' dt + \int_0^1 (3+ti)^2 (3+ti)' dt \\
&= 27 \int_0^1 t^2 dt + i \int_0^1 (9+6ti-t^2) dt \\
&= \frac{27}{3} + 9i - 3 - \frac{1}{3}i = 6 + \frac{26}{3}i
\end{aligned}$$

3) 自原点沿虚轴至  $i$  这一段路线  $c_1$  的参数方程为:  $z = ti, 0 \leq t \leq 1$ , 由  $i0$  沿水平方向向右至  $3+i$  这一段路线  $c_2$  的参数方程为:  $z = t+i, 0 \leq t \leq 3$ . 由公式:

$$\begin{aligned}
\int_0^{3+i} z^2 dz &= \int_{c_1} z^2 dz + \int_{c_2} z^2 dz \\
&= \int_0^1 (ti)^2 (ti)' dt + \int_0^3 (t+i)^2 (t+i)' dt \\
&= -i \int_0^1 t^2 dt + \int_0^3 (t^2 + 2it - 1) dt \\
&= -\frac{i}{3} + \frac{27}{3} + 9i - 3 = 6 + \frac{26}{3}i
\end{aligned}$$

○ 2. 分别沿  $y = x$  与  $y = x^2$  算出积分  $\int_0^{1+i} (x^2 + iy) dz$  的值.

解 1) 路线  $y = x$  的参数方程为  $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$ , 或  $z = t + it, 0 \leq t \leq 1$ , 这样  $dz = (1+i)dt$ . 由公式:

$$\begin{aligned}
\int_0^{1+i} (x^2 + iy) dz &= \int_0^1 (t^2 + it)(1+i) dt \\
&= (1+i) \left[ \int_0^1 t^2 dt + i \int_0^1 t dt \right] = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i
\end{aligned}$$

2) 路线  $y = x^2$  的参数方程为  $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$ , 或  $z = t + it^2, 0 \leq t \leq 1$ , 这样  $dz = (1+2it)dt$ . 由公式:

$$\begin{aligned}
\int_0^{1+i} (x^2 + iy) dz &= \int_0^1 (t^2 + it^2)(1+2it) dt \\
&= (1+i) \left( \int_0^1 t^2 dt + 2i \int_0^1 t^3 dt \right)
\end{aligned}$$



$$= -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$$

- 3. 设  $f(z)$  在单连通域  $B$  内处处解析,  $C$  为  $B$  内任何一条正向简单闭曲线, 问

$$\oint_C \operatorname{Re}[f(z)] dz = 0, \oint_C \operatorname{Im}[f(z)] dz = 0$$

是否成立? 如果成立, 给出证明; 如果不成立, 举例说明.

分析 运用解析性质, 并利用积分路径和找出个较好的特例.

解 不一定成立. 例如  $f(z) = z, C: |z| = 1$ . 此时  $\operatorname{Re}[f(z)]$

$$= x, \operatorname{Im}[f(z)] = y, C: z = e^{it} (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ 或 } \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} (0$$

$\leq t \leq 2\pi), dz = ie^{it} dt$ . 由公式:

$$\begin{aligned} \oint_C \operatorname{Re}[f(z)] dz &= \int_0^{2\pi} \cos t \cdot ie^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \cos t (\cos t + i \sin t) dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt = \pi i \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_C \operatorname{Im}[f(z)] dz &= \int_0^{2\pi} \sin t \cdot ie^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt - \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -\pi i \neq 0 \end{aligned}$$

小结 找出实部虚部分别计算.

○4. 利用在单位圆周上  $\bar{z} = \frac{1}{z}$  的性质, 及柯西积分公式说明  $\oint_C \bar{z} dz =$

$2\pi i$ , 其中  $C$  为正向单位圆周  $|z| = 1$ .

解 注意到复积分  $\oint_C f(z) dz$  中积分变量  $z$  始终限制在  $C$  上变化, 在

$$\text{单位圆周 } |z| = 1 \text{ 上 } z\bar{z} = 1, \text{ 所以 } \oint_C \bar{z} dz = \oint_C \frac{\bar{z} z}{z} dz = \oint_C \frac{1}{z} dz.$$

而在柯西积分公式  $\oint_C \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \varphi(z_0)$  中取  $z_0 = 0, \varphi(z)$



$$= 1, c: |z| = 1, \text{易知} \oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i. \text{故} \oint_C \frac{\bar{z}}{z} dz = 2\pi i.$$

○ 5. 计算积分  $\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|} dz$  的值, 其中  $C$  为正向圆周:

$$1) |z| = 2, \quad 2) |z| = 4.$$

解 1) 正向圆周  $|z| = 2$  的参数方程为:  $z = 2e^{it} (0 \leq t \leq 2\pi)$ .  
由公式:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\bar{z}}{|z|} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{\overline{2e^{it}}}{|2e^{it}|} 2ie^{it} dt \\ &= 2i \int_0^{2\pi} dt = 4\pi i \end{aligned}$$

2) 由柯西积分公式及积分性质, 则

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\bar{z}}{|z|} dz &= \oint_C \frac{\bar{z}}{4} dz = \frac{1}{4} \oint_C \frac{\bar{z}z}{z} dz \\ &= 4 \oint_C \frac{1}{z} dz = 8\pi i \end{aligned}$$

○ 6. 试用观察法得出下列积分的值, 并说明观察时所依据的是什么?  $C$  是正向单位圆周  $|z| = 1$ .

$$1) \oint_C \frac{dz}{z-2}; \quad 2) \oint_C \frac{dz}{z^2+2z+4};$$

$$3) \oint_C \frac{dz}{\cos z}; \quad 4) \oint_C \frac{dz}{z - \frac{1}{2}};$$

$$5) \oint_C z e^z dz; \quad 6) \oint_C \frac{dz}{\left(z - \frac{i}{2}(z+2)\right)}.$$

解 1) 被积分函数  $\frac{1}{z-2}$  的奇点  $z=2$  在  $|z|=1$  之外, 利用柯西—古萨定理即知积分值为零.

2) 被积分函数  $\frac{1}{z^2+2z+4}$  的两个奇点  $z_1 = -1 + \sqrt{3}i, z_2 = -1$

$-\sqrt{3}i$  (分母为零的点) 均在  $|z|=1$  之外, 利用柯西—古





萨定理即知积分值为零.

3) 被积函数  $\frac{1}{\cos z}$  的奇点  $z_k = (k + \frac{1}{2})\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) (分母为零的点) 均在  $|z| = 1$  之外, 利用柯西—古萨

定理即分值为零.

4) 由柯西积分公式即知  $\oint_C \frac{1}{z - \frac{1}{2}} dz = 2\pi i$ .

5) 被积函数  $ze^z$  在复平面上处处解析, 利用柯西—古萨定理即知积分值为零.

6) 由柯西积分公式:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{(z - \frac{i}{2})(z + 2)} &= \oint_C \frac{1}{z - \frac{i}{2}} dz \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{z + 2} \Big|_{z=\frac{i}{2}} = \frac{4\pi i}{4 + i} \end{aligned}$$

○7. 沿指定曲线的正向计算下列各积分:

1)  $\oint_C \frac{e^z}{z - 2} dz, C: |z - 2| = 1;$

2)  $\oint_C \frac{dz}{z^2 - a^2}, C: |z - a| = a;$

3)  $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz, C: |z - 2i| = \frac{3}{2};$

4)  $\oint_C \frac{z}{z - 3} dz, C: |z| = 2;$

5)  $\oint_C \frac{dz}{(z^2 - 1)(z^3 - 1)}, C: |z| = r < 1;$

6)  $\oint_C z^3 \cos z dz, C$  为包围  $z = 0$  的闭曲线;

7)  $\oint_C \frac{dz}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}, C: |z| = \frac{3}{2};$



$$8) \oint_C \frac{\sin z}{z} dz, C: |z| = 1;$$

$$9) \oint_C \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^2} dz, C: |z| = 2;$$

$$10) \oint_C \frac{e^z}{z^5} dz, C: |z| = 1.$$

解 1) 由柯西积分公式得

$$\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i \cdot e^z \Big|_{z=2} = 2\pi i e^2$$

2) 由柯西积分公式(注意  $a$  在  $C$  内,  $-a$  在  $C$  外)得

$$\oint_C \frac{1}{z^2 - a^2} dz = \oint_C \frac{1}{(z+a)(z-a)} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{z+a} \Big|_{z=-a} = \frac{\pi i}{a}$$

3) 由柯西积分公式(注意  $i$  在  $C$  内,  $-i$  在  $C$  外)得

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = \oint_C \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{iz}}{z+i} \Big|_{z=i} = \pi e^{-1} = \frac{\pi}{e}$$

4) 由柯西—古萨定理注意到被积函数  $\frac{z}{z-3}$  的奇点  $z=3$  在  $|z|=2$  之外)得积分值为零.

5) 由柯西—古萨定理[注意到被积函数  $\frac{1}{(z^2-1)(z^3-1)}$  在  $|z|=r(<1)$  上及内部解析或奇点在  $|z|=r(<1)$  之外], 得积分值为零.

6) 由柯西—古萨定理(注意到被积函数  $z^3 \cos z$  在复平面上处处解析)得积分值为零.

7) 由柯西积分公式得

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} &= \frac{1}{2i} \left( \oint_C \frac{1}{z^2+4} dz - \oint_C \frac{1}{z^2+1} dz \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left( 2\pi i \cdot \frac{1}{z^2+4} \Big|_{z=i} - 2\pi i \frac{1}{z^2+4} \Big|_{z=-i} \right) = 0 \end{aligned}$$



## 8) 由柯西积分公式得

$$\oint_C \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi i \cdot \sin z \Big|_{z=0} = 0$$

## 9) 由高阶导数的柯西积分公式

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^2} dz = 2\pi i \cdot (\sin z)' \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0$$

## 10) 由高阶导数的柯西积分公式

$$\oint_C \frac{e^z}{z^5} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{4!} (e^z)^{(4)} \Big|_{z=0} = \frac{\pi i}{12}$$

## ○ 8. 计算下列各题:

$$1) \int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z} dz;$$

$$2) \int_{\frac{\pi}{6}i}^0 \operatorname{ch} 3z dz;$$

$$3) \int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz;$$

$$4) \int_0^1 z \sin z dz;$$

$$5) \int_0^i (z - i) e^{-z} dz;$$

$$6) \int_1^i \frac{1 + \operatorname{tg} z}{\cos^2 z} dz \quad (\text{沿 } 1 \text{ 到 } i \text{ 的直线段}).$$

解 利用与实积分类似的复积分牛顿—莱不尼兹公式.

$$1) \int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z} dz = \frac{1}{2} e^{2z} \Big|_{-\pi i}^{3\pi i} = \frac{1}{2} (e^{6\pi i} - e^{-2\pi i}) = 0$$

$$\begin{aligned} 2) \int_{\frac{\pi}{6}i}^0 \operatorname{ch} 3z dz &= \frac{1}{3} \operatorname{sh} 3z \Big|_{\frac{\pi}{6}i}^0 \\ &= -\frac{1}{3} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} i \\ &= -\frac{1}{3} i \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{i}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz &= \frac{1}{2} \int_{-\pi i}^{\pi i} (1 - \cos 2z) dz \\ &= \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{2} \sin 2z \right) \Big|_{-\pi i}^{\pi i} \\ &= \pi i - \frac{1}{2} \sin 2\pi i = \pi i - \frac{i}{2} \operatorname{sh} 2\pi \end{aligned}$$



$$4) \int_0^1 z \sin z dz = - \int_0^1 z (\cos z)' dz \text{ (分部积分)}$$

$$= - [z \cos z]_0^1 + \int_0^1 \cos z dz$$

$$= - \cos 1 + \sin z \Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1$$

$$5) \int_0^i (z-i) e^{-z} dz = - \int_0^i (z-i) (e^{-z})' dz$$

$$= - [(z-i) e^{-z}] \Big|_0^i + \int_0^i e^{-z} dz$$

$$= -i + (-e^{-z}) \Big|_0^i$$

$$= -i - e^{-i} + 1 = 1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1)$$

$$6) \int_1^i \frac{1 + \operatorname{tg} z}{\cos^2 z} dz = \int_1^i (1 + \operatorname{tg} z) (\operatorname{tg} z)' dz$$

$$= \left[ \operatorname{tg} z + \frac{1}{2} (\operatorname{tg} z)^2 \right]_1^i$$

$$= \operatorname{tgi} + \frac{1}{2} (\operatorname{tgi})^2 - \operatorname{tg} 1 - \frac{1}{2} (\operatorname{tg} 1)^2$$

$$= i \operatorname{th} 1 - \frac{1}{2} (\operatorname{th} 1)^2$$

$$- \operatorname{tg} 1 - \frac{1}{2} (\operatorname{tg} 1)^2$$

这里用到关系式  $\operatorname{tgi} = i \operatorname{th} 1$ .

○ 9. 计算下列积分:

$$1) \oint_C \left( \frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i} \right) dz, \text{ 其中 } C: |z|=4 \text{ 为正向};$$

$$2) \oint_C \frac{2i}{z^2+1} dz, \text{ 其中 } C: |z-1|=6 \text{ 为正向};$$

$$3) \oint_{C=C_1+C_2} \frac{\cos z}{z^3} dz, \text{ 其中 } C_1: |z|=2 \text{ 为正向}, C_2: |z|=3 \text{ 为负向};$$

$$4) \oint_C \frac{dz}{z-i}, \text{ 其中 } C \text{ 为以 } \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{6}{5}i \text{ 为顶点的正向菱形};$$

$$5) \oint_C \frac{e^z}{(z-\alpha)^3} dz, \text{ 其中 } \alpha \text{ 为 } |\alpha| \neq 1 \text{ 的任意复数}, C: |z|=1 \text{ 为}$$



正向.

解 1) 由柯西积分公式(注意  $-1, -2i$  均在  $C$  内)得

$$\begin{aligned}\oint_C \left( \frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i} \right) dz &= 4 \oint_C \frac{dz}{z+1} + 3 \oint_C \frac{dz}{z+2i} \\ &= 4 \cdot 2\pi i \cdot 1 + 3 \cdot 2\pi i \cdot 1 = 14\pi i\end{aligned}$$

2) 被积函数  $\frac{2i}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}$ , 其奇点  $\pm i$  均在  $C$  内, 由柯西积分公式得

$$\oint_C \frac{2i}{z^2+1} dz = \oint_C \frac{1}{z-i} dz - \oint_C \frac{1}{z+i} dz = 2\pi i - 2\pi i = 0$$

$$\begin{aligned}3) \oint_{C=C_1+C_2} \frac{\cos z}{z^3} dz &= \oint_{C_1} \frac{\cos z}{z^3} dz + \oint_{C_2} \frac{\cos z}{z^3} dz \\ &= \oint_{C_1} \frac{\cos z}{z^3} dz + \oint_{\bar{C}_2} \frac{\cos z}{z^3} dz\end{aligned}$$

其中  $C_2: |z|=3$  为正向. 由高阶导数的柯西积分公式得,

$$\text{原积分} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} (\cos z)''|_{z=0} - 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} (\cos z)''|_{z=0} = 0.$$

4)  $z=i$  在  $C$  内部,  $\varphi(z) \equiv 1$  在复平面上处处解析, 由柯西积分公式  $\oint_C \frac{\varphi(z)}{z-i} dz = 2\pi i \varphi(i) = 2\pi i$ , 即得  $\oint_C \frac{1}{z-i} dz = 2\pi i$ .

5) 当  $|\alpha| > 1$  时, 被积函数的奇点  $\alpha$  在  $C$  外, 由柯西—古萨定理得积分值为零. 而当  $|\alpha| < 1$  时奇点  $\alpha$  在  $C$  内, 由高阶导数的柯西积分公式得

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-\alpha)^3} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} (e^z)''|_{z=\alpha} = \pi i e^\alpha$$

○ 10. 证明: 当  $C$  为任何不通过原点的简单闭曲线时,  $\oint_C \frac{1}{z^2} dz = 0$ .

证明 1) 当  $z=0$  在  $C$  外时, 由柯西—古萨定理得  $\oint_C \frac{1}{z^2} dz = 0$ .

2) 当  $z=0$  在  $C$  内时, 在高阶导数的柯西积分公式

$$\oint_C \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \varphi^{(n)}(z_0) \text{ 中取 } \varphi(z) \equiv 1, n=1, z_0=$$



$$0 \text{ 得 } \oint_C \frac{1}{z^2} dz = 2\pi i \cdot (1)' = 0.$$

- 11. 下列两积分的值是否相等? 积分 2) 的值能否利用闭路变形原理从 1) 的值得到? 为什么?

$$1) \oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{z} dz.$$

分析 注意函数是否解析.

解 参阅本章习题 5 的解答, 易知

$$\oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z} dz = \oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}z}{z^2} dz = \oint_{|z|=2} \frac{4}{z^2} dz = 0$$

$$\oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{z} dz = \oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}z}{z^2} dz = \oint_{|z|=4} \frac{16}{z^2} dz = 0$$

这里用到习题 10 的结论及沿圆周  $|z|=R$  正向积分时被积函数中  $\bar{z}z$ ,  $|z|$ ,  $\bar{z}$  可分别用  $R^2$ ,  $R$ ,  $\frac{R}{z}$  代替的事实. 由此可见两积分值是相等的. 积分 2) 的值不能利用闭路变形原理从 1) 的值得到, 因为被积函数  $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$  中复平面上处处不解析.

但将积分 1) 与 2) 分别变为  $4 \oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2} dz$  与  $16 \oint_{|z|=4} \frac{1}{z^2} dz$  以

后, 积分 2) 的值可由积分 1) 的值得到, 这是由于函数  $\frac{1}{z^2}$  在  $|z| > 0$  内是解析的缘故.

小结 注意解析与否.

- ◎12. 设区域  $D$  为右半平面,  $z$  为  $D$  内圆周  $|z|=1$  的任意一点, 用在  $D$  内的任意一条曲线  $C$  连结原点与  $z$ , 证明

$$\operatorname{Re} \left[ \int_0^z \frac{1}{1+\xi^2} d\xi \right] = \frac{\pi}{4}. \quad (\text{提示: 可取从原点沿实轴到 } 1, \text{ 再从 } 1 \text{ 沿圆周 } |z|=1 \text{ 到 } z \text{ 的曲线作为 } C).$$

分析 本题注意公式的运用.

证明 记  $C = C_1 + C_2$ , 其中  $C_1$  为从原点沿实轴到 1 的路线, 参数



方程为  $z = x (0 \leq x \leq 1)$ ,  $C_2$  为从 1 沿圆周  $|z| = 1$  到  $z$  的路线. 注意到函数  $\frac{1}{1+\xi^2}$  在  $D$  内解析,

$$\begin{aligned}\int_0^z \frac{1}{1+\xi^2} d\xi &= \int_{C_1} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi + \int_{C_2} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+\xi^2} d\xi + \int_{C_2} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_{C_2} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi\end{aligned}$$

我们只须证明  $\operatorname{Re} \left\{ \int_{C_2} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi \right\} = 0$

由  $\frac{1}{1+\xi^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+i\xi^2} + \frac{1}{1-i\xi^2} \right) = \frac{-i}{2} \left( \ln \frac{1+i\xi}{1-i\xi} \right)'$  及复积分的牛顿-莱不尼兹公式得

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi &= \frac{-i}{2} \ln \frac{1+i\xi}{1-i\xi} \Big|_1^z \\ &= \frac{-i}{2} \left( \ln \frac{1+iz}{1-iz} - \ln \frac{1+i}{1-i} \right) \\ &= \frac{-i}{2} \left[ \ln \left| \frac{1+iz}{1-iz} \right| - \ln \left| \frac{1+i}{1-i} \right| \right. \\ &\quad \left. + i \left( \arg \frac{1+iz}{1-iz} - \arg \frac{1+i}{1-i} \right) \right] \\ \operatorname{Re} \left\{ \int_{C_2} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi \right\} &= \frac{1}{2} \left( \arg \frac{1+iz}{1-iz} - \arg \frac{1+i}{1-i} \right)\end{aligned}$$

令  $z = e^{i\theta}$ , 则由  $z \in D$  可知  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ . 于是

$$\begin{aligned}\frac{1+iz}{1-iz} &= \frac{1+ie^{i\theta}}{1-ie^{i\theta}} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} i, \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} > 0, \arg \frac{1+iz}{1-iz} \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i, \arg \frac{1+i}{1-i} = \frac{\pi}{2}$$



故  $\operatorname{Re} \left\{ \int_{C_2} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi \right\} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0$ , 要证结论成立.

- ◎ 13. 设  $C_1$  与  $C_2$  为相交于  $M, N$  两点的简单闭曲线, 它们所围成的区域分别为  $B_1$  与  $B_2$ ,  $B_1$  与  $B_2$  的公共部分为  $B$ . 如果  $f(z)$  在  $B_1 - B$  与  $B_2 - B$  内解析,  $C_1, C_2$  上也解析, 证明:  $\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$ .

分析 要会做积分替换.

证明 如图 3-3, 设  $M, N$  两点分别将曲线  $C_1$  分为  $L_1, L_2$  两部分, 将  $C_2$  分为  $L_3, L_4$  两部分, 即

$$C_1 = L_1 + L_2, C_2 = L_3 + L_4$$

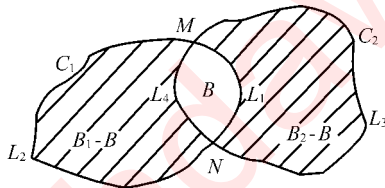


图 3-3

由题设,  $f(z)$  在区域  $B_1 - B$  及其边界  $L_2 + L_4$  上解析, 在区域  $B_2 - B$  及其边界  $L_3 + L_1$  上解析, 所以由柯西-古萨定理得

$$\oint_{L_2+L_4} f(z) dz = \int_{L_2} f(z) dz - \int_{L_4} f(z) dz = 0$$

$$\oint_{L_3+L_1} f(z) dz = \int_{L_3} f(z) dz - \int_{L_1} f(z) dz = 0$$

于是

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} f(z) dz &= \int_{L_1} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz \\ &= \int_{L_3} f(z) dz + \int_{L_4} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz \end{aligned}$$

- 14. 设  $C$  为不经过  $\alpha$  与  $-\alpha$  的正向简单闭曲线,  $\alpha$  为不等于零的任





何复数. 试就  $\alpha$  与  $-\alpha$  跟  $C$  的各种不同位置, 计算积分  $\oint_C$

$\frac{z}{z^2 - \alpha^2} dz$  的值.

分析 充分掌握公式.

解 注意到  $\oint_C \frac{z}{z^2 - \alpha^2} dz = \frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{z - \alpha} dz + \frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{z + \alpha} dz$ , 可用柯西积分公式及柯西—古萨定理讨论如下:

1) 当  $C$  不包含  $\alpha$  与  $-\alpha$  时

$$\oint_C \frac{z}{z^2 - \alpha^2} dz = 0$$

2) 当  $C$  包含  $\alpha$  与  $-\alpha$  时

$$\oint_C \frac{z}{z^2 - \alpha^2} dz = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i + \frac{1}{2} \cdot 2\pi i = 2\pi i$$

3) 当  $C$  包含  $\alpha$  而不包含  $-\alpha$  时

$$\oint_C \frac{z}{z^2 - \alpha^2} dz = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i + 0 = \pi i$$

4) 当  $C$  包含  $-\alpha$  而不包含  $\alpha$  时

$$\oint_C \frac{z}{z^2 - \alpha^2} dz = 0 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi i = \pi i$$

小结 要注意  $a$  与  $c$  的不同位置来进行计算.

- 15. 设  $C_1$  与  $C_2$  为两条互不包含, 也不相交的正向简单闭曲线, 证明:

$$\frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{C_1} \frac{z^2}{z - z_0} dz + \oint_{C_2} \frac{\sin z}{z - z_0} dz \right] = \begin{cases} z_0^2, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_1 \text{ 内时,} \\ \sin z_0, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_2 \text{ 内时.} \end{cases}$$

分析 由  $z_0$  的不同位置分别求解.

证明 1) 当  $z_0$  在  $C_1$  内时,  $z_0$  在  $C_2$  外, 由柯西积分公式及柯西—古萨定理得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{C_1} \frac{z^2}{z - z_0} dz + \oint_{C_2} \frac{\sin z}{z - z_0} dz \right] &= \frac{1}{2\pi i} [2\pi i \cdot z^2 |_{z=z_0} + 0] \\ &= z_0^2 \end{aligned}$$



2) 当  $z_0$  在  $C_2$  内时,  $z_0$  在  $C_1$  外, 同样由柯西积分公式及柯西—古萨定理得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{C_1} \frac{z^2}{z-z_0} dz + \oint_{C_2} \frac{\sin z}{z-z_0} dz \right] &= \frac{1}{2\pi i} [0 + 2\pi i \cdot \sin z|_{z=z_0}] \\ &= \sin z_0 \end{aligned}$$

小结 此类证明题关键在于看题干中的已知找到解题关键所在.

- 16. 设函数  $f(z)$  在  $0 < |z| < 1$  内解析, 且沿任何圆周  $C: |z| = r, 0 < r < 1$  的积分等于零, 问  $f(z)$  是否必需在  $z=0$  处解析? 试举例说明之.

解 不一定. 例如  $f(z) = \frac{1}{z^2}$  沿任何圆周  $C: |z| = r, 0 < r < 1$  的积分等于零 (由高阶导数的柯西积分公式或复积分计算公式易知, 参见第 10 题), 但  $f(z)$  在  $z=0$  处不解析.

- ◎ 17. 设  $f(z)$  与  $g(z)$  在区域  $D$  内处处解析,  $C$  为  $D$  内的任意一条简单闭曲线, 它的内部全含于  $D$ . 如果  $f(z) = g(z)$  在  $C$  上所有的点处成立, 试证在  $C$  内所有的点处  $f(z) = g(z)$  也成立.

分析 此类问题关键在于由  $z_0$  的任意性推出普遍性.

证明 对  $C$  内任一点  $z_0$ , 由柯西积分公式得  $[f(z) - g(z)]|_{z=z_0}$   

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) - g(z)}{z - z_0} dz.$$
 因为  $f(z) - g(z)$  在  $D$  内解析且

在  $C$  上  $f(z) - g(z) \equiv 0$ , 所以

$$f(z_0) - g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{0}{z - z_0} dz = 0 \Rightarrow f(z_0) = g(z_0)$$

再由  $z_0$  的任意性即知在  $C$  内所有点处  $f(z) = g(z)$ .

- 18. 设区域  $D$  是圆环域,  $f(z)$  在  $D$  内解析, 以圆环的中心为中心作正向圆周  $K_1$  与  $K_2$ ,  $K_2$  包含  $K_1$ ,  $z_0$  为  $K_1, K_2$  之间任一点, 试证  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$  成立, 但  $C$  要换为  $K_1^- + K_2$  (见

图 3-4).

分析 本题只要想到做辅助线  $AB$  便很容易求解.

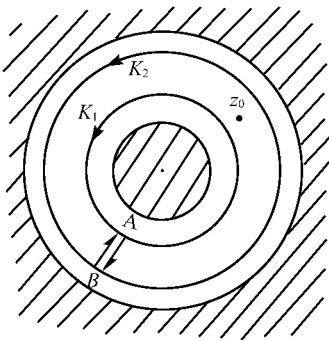


图 3-4

**证明** 如图 3-4, 作辅助线段  $AB$ . 这样在路线  $A \rightarrow K_1^- \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow K_2 \rightarrow B \rightarrow A$  或  $K_1^- + \overline{AB} + K_2 + \overline{BA}$  记为  $L$  所围成的单连通区域内及  $L$  上  $f(z)$  均解析, 且  $z_0$  在  $L$  内部. 由柯西积分公式得

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)$$

或

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1^- + K_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\overline{AB}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\overline{BA}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \end{aligned}$$

而路线  $\overline{AB}$  与  $\overline{BA}$  在同一直线上但方向相反, 沿其上的积分值相抵消. 故有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1^- + K_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

**小结** 注意辅助线的方向.

- 19. 设  $f(z)$  在单连通域  $B$  内处处解析, 且不为零.  $C$  为  $B$  内任何一条简单闭曲线, 问积分  $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  是否等于零? 为什么?

**解** 积分  $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ , 因为  $f(z)$  在  $B$  内解析且  $f(z) \neq 0$ , 所以



$f'(z)$  与  $\frac{1}{f(z)}$  在  $B$  内解析, 进而  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  在  $B$  内解析, 由柯西—古萨定理即知其积分值等于零.

- 20. 试说明柯西—古萨基本定理中的  $C$  为什么可以不是简单闭曲线?

解 因为闭曲线可以由若干个简单闭曲线依次相互连接组成, 又沿闭曲线的积分等于沿这若干个简单闭曲线的积分之和, 所以函数  $f(z)$  沿任一简单闭曲线积分等于零可推出  $f(z)$  沿闭曲线的积分也等于零, 故柯西—古萨基本定理中的路线  $C$  可以不是简单闭曲线.

- ◎ 21. 设  $f(z)$  在区域  $D$  内解析,  $C$  为  $D$  内的任意一条正向简单闭曲线, 它的内部全含于  $D$ , 证明: 对在  $D$  内但不在  $C$  上的任意一点

$$z_0, \text{ 等式 } \oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \text{ 成立.}$$

分析 属于定理的恒等变形.

证明 注意到  $f(z)$  及  $f'(z)$  在  $C$  上及  $D$  内都解析, 由柯西积分公式及柯西—古萨定理得

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i f'(z_0), & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C \text{ 内} \\ 0, & \text{当 } z_0 \text{ 不在 } C \text{ 内} \end{cases}$$

由高阶导数的柯西积分公式及柯西—古萨定理得

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = \begin{cases} 2\pi i f'(z_0), & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C \text{ 内} \\ 0, & \text{当 } z_0 \text{ 不在 } C \text{ 内} \end{cases}$$

$$\text{故有等式 } \oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

- 22. 如果  $\varphi(x, y)$  和  $\psi(x, y)$  都具有二阶连续偏导数, 且适合拉普拉斯方程, 而  $s = \varphi_y - \psi_x, t = \varphi_x + \psi_y$ , 那么  $s + it$  是  $x + iy$  的解析函数.

解 由  $\frac{\partial s}{\partial x} = \varphi_{yx} - \psi_{xx}, \frac{\partial s}{\partial y} = \varphi_{yy} - \psi_{xy},$   
 $\frac{\partial t}{\partial x} = \varphi_{xx} + \psi_{yx}, \frac{\partial t}{\partial y} = \varphi_{xy} + \psi_{yy}.$



及假设:  $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0, \varphi_{yx} = \varphi_{xy}, \psi_{xy} = \psi_{yx}$ , 可知  $s, t$  可微 (有连续的一阶偏导数) 且满足

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{\partial t}{\partial x} \quad (\text{柯西-黎曼方程})$$

故  $s + it$  是  $x + iy$  的解析函数.

- 23. 设  $u$  为区域  $D$  内的调和函数及  $f = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ , 问  $f$  是不是  $D$  内的解析函数? 为什么?

解 是. 因为  $f(z)$  的实部  $\frac{\partial u}{\partial x}$  与虚部  $-\frac{\partial u}{\partial y}$  可微 (有一阶连续偏导数) 且满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\text{即 } u_{xx} + u_{yy} = 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\text{即 } u_{xy} = u_{yx})$$

所以  $f(z)$  为  $D$  内的解析函数.

- ◎ 24. 函数  $v = x + y$  是  $u = x + y$  的共轭调和函数吗? 为什么?

分析 验证是否满足  $C-R$  方程.

解 不是. 因为  $\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = 1, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, u, v \text{ 调和, 但柯西-黎曼方程 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ 不成立, 所以 } v = x + y \text{ 不是 } u = x + y \text{ 的共轭调和函数 (等价地 } u + iv \text{ 不解析).}$$

- 25. 设  $u$  和  $v$  都是调和函数, 如果  $v$  是  $u$  的共轭调和函数, 那么  $u$  也是  $v$  的共轭调和函数. 这句话对吗? 为什么?

解 不对. 因为  $v$  是  $u$  的共轭调和函数相当于  $u, v$  调和且满足柯西-黎曼方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

若  $u$  也是  $v$  的共轭调和函数, 那么必有



$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

上面两式相结合便有  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, u, v$  为常数.

即当  $u, v$  为常数时, 互为共轭调和函数, 除此之外这句话不对.

◎ 26. 证明: 一对共轭调和函数的乘积仍为调和函数.

分析 掌握复合函数的偏导.

证明 设  $u, v$  是一对共轭调和函数 (不妨设  $v$  是  $u$  的共轭调和函数), 则

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, v_{xx} + v_{yy} = 0, u_x = v_y, u_y = -v_x$$

$$\text{于是 } (uv)_x = u_x v + u v_x, (uv)_y = u_y v + u v_y$$

$$(uv)_{xx} = u_{xx} v + 2u_x v_x + u v_{xx}$$

$$(uv)_{yy} = u_{yy} v + 2u_y v_y + u v_{yy}$$

$$\begin{aligned} (uv)_{xx} + (uv)_{yy} &= v(u_{xx} + u_{yy}) \\ &\quad + 2(u_x v_x + u_y v_y) + u(v_{xx} + v_{yy}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

乘积  $uv$  仍为调和函数.

● 27. 如果  $f(z) = u + iv$  是一解析函数, 试证:

1)  $i\overline{f(z)}$  也是解析函数;

2)  $-u$  是  $v$  的共轭调和函数;

$$3) \frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial y^2} = 4(u_x^2 + v_x^2) = 4|f'(z)|^2.$$

分析 解析函数与调和函数有密切关系.

证明 1) 因  $\overline{i\overline{f(z)}} = i\overline{\overline{f(z)}} = -if(z)$ ,  $f(z)$  解析, 所以  $-if(z)$  即  $i\overline{f(z)}$  也是解析函数.

2) 由 1) 可知  $i\overline{f(z)} = v - iu$  解析, 从而其虚部  $-u$  是实部  $v$  的共轭调和函数.

3) 由  $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$  及解析函数  $f(z) = u + iv$  的虚部  $v$  是实部  $u$  的共轭调和函数, 即  $u_{xx} + u_{yy} = 0, v_{xx} + v_{yy}$



$= 0, u_x = v_y, u_y = -v_x, f'(z) = u_x + iv_x$  可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial y^2} &= 2u u_{xx} + 2(u_x)^2 \\ &+ 2v v_{xx} + 2(v_x)^2 + 2u u_{yy} + 2(u_y)^2 + 2v v_{yy} + 2(v_y)^2 \\ &= 2u(u_{xx} + u_{yy}) + 2[(u_x)^2 + (v_x)^2 + (u_y)^2 + (v_y)^2] \\ &+ 2v(v_{xx} + v_{yy}) = 2[(u_x)^2 + (v_x)^2 + (-v_x)^2 + (u_x)^2] \\ &= 4[(u_x)^2 + (v_x)^2] = 4|f'(z)|^2 \end{aligned}$$

小结 1) 2) 直接计算即可, 3) 要注意展开与合并.

◎ 28. 证明:  $u = x^2 - y^2$  和  $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$  都是调和函数, 但  $u + iv$  不是

解析函数.

分析 验证  $C-R$  方程.

证明 因  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{6yx^2 - 2y^3}{(x^2 + y^2)^3}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2y^3 - 6yx^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

所以  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, u, v$  都是调和函数, 但

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  不成立,  $u + iv$  不是解析函数.

◎ 29. 求具有下列形式的所有调和函数  $u$ :

1)  $u = f(ax + by), a$  与  $b$  为常数;

2)  $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , [提示: 1) 令  $t = ax + by$ , 因  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , 从

而有  $f''(t) = 0$ ; 2) 令  $t = \frac{y}{x}$ ].

分析 注意复合函数的偏导公式.

解 1) 令  $t = ax + by, a^2 + b^2 \neq 0$ , 因若  $a^2 + b^2 = 0$ , 则  $a = b =$



0. 则无意义。则

$$u_x = f'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = af'(ax + by)$$

$$u_{xx} = af''(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = a^2 f''(ax + by)$$

$$u_y = f'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = bf'(ax + by)$$

$$u_{yy} = bf''(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = b^2 f''(ax + by)$$

由  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  得  $(a^2 + b^2)f''(ax + by) = 0 \Rightarrow f''(t) = 0$ ,  
 $f'(t) = C_1 \Rightarrow f(t) = C_1 t + C_2$ , 其中  $C_1, C_2$  为任意实常数, 即  
 形如  $u = f(ax + by)$  的调和函数为  $u = C_1(ax + by) + C_2$ .

2) 令  $t = \frac{y}{x}$  可知

$$u_x = f'(t) \frac{-y}{x^2}, u_{xx} = f''(t) \frac{y^2}{x^4} + f'(t) \frac{2y}{x^3}$$

$$u_y = f'(t) \frac{1}{x}, u_{yy} = f''(t) \frac{1}{x^2}$$

由  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  得

$$f''(t) \frac{x^2 + y^2}{x^4} + f'(t) \frac{2y}{x^3} = 0$$

即

$$f''(t)(1 + t^2) + f'(t) \cdot 2t = 0$$

$$\text{于是 } \frac{df'(t)}{f'(t)} = -\frac{2t}{1+t^2} dt \Rightarrow f'(t) = \frac{C_1}{1+t^2}$$

进而  $f(t) = C_1 \arctgt + C_2$ , 故形如  $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$  的调和函数为

$$u = C_1 \arctg \frac{y}{x} + C_2, \text{ 其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意实常数.}$$

◎ 30. 由下列各已知调和函数求解析函数  $f(z) = u + iv$ .

$$1) u = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2);$$

$$2) v = \frac{y}{x^2 + y^2}, f(2) = 0;$$





$$3) u = 2(x-1)y, f(2) = -i;$$

$$4) v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, x > 0.$$

分析 此类问题关键在于积分时分段求, 简化积分形式并认真计算即可得出正确结果.

解 1) 由公式

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) + C \\ &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + C \\ &= \int_{(0,0)}^{(x,0)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_{(x,0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C \\ &= \int_0^x -u_y(x, 0) dx + \int_0^y u_x(x, y) dy + C \\ &= \int_0^x -3x^2 dx + \int_0^y (3x^2 + 6xy - 3y^2) dy + C \\ &= -x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } f(z) &= (x-y)(x^2 + 4xy + y^2) \\ &\quad + i(-x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + C) \\ &= (1-i)(x+iy)^3 + iC = (1-i)z^3 + iC \quad (C \text{ 为任意实常数}) \end{aligned}$$

2) 由公式

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(1,1)}^{(x,y)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + C \\ &= \int_{(1,1)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + C \\ &= \int_{(1,1)}^{(x,1)} \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + \int_{(x,1)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + C \\ &= \int_1^x v_y(x, 1) dx + \int_1^y -v_x(x, y) dy + C \\ &= \int_1^x \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx + \int_1^y \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy + C \\ &= \int_1^x \frac{dx}{x^2 + 1} - 2 \int_1^x \frac{dx}{(1 + x^2)^2} + x \int_1^y \frac{d(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + C \end{aligned}$$



$$= \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1 - 2 \left[ \frac{1}{2} \left( \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} \right) \right]_{x=1}^{x=x} \\ + \left[ \frac{-x}{x^2+y^2} \right]_{y=1}^{y=y} + C = \frac{-x}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} + C$$

因此  $f(z) = -\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} + C + i \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} + C - \frac{1}{z}$

又  $f(2) = 0$  得  $C = 0$ , 故  $f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{z}$

3) 由柯西—黎曼方程得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2(x-1) \quad ①$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2y \quad ②$$

由式 ① 得  $v = -\int 2(x-1)dx + g(y) = -(x-1)^2 + g(y)$

代入式 ② 后,  $g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2 + C$ , 所以

$$v(x, y) = -(x-1)^2 + y^2 + C$$

$$f(z) = u + iv = 2(x-1)y + i[-(x-1)^2 + y^2 + C] \\ = -i(z-1)^2 + iC$$

又  $f(2) = -i \Rightarrow -i + iC = -i \Rightarrow C = 0$ , 即  $f(z) = -i(z-1)^2$ .

4) 由柯西—黎曼方程得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad ③$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2} \quad ④$$

由式 ③ 得  $u = \int \frac{x}{x^2+y^2} dx + g(y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + g(y)$

代入式 ④ 后,  $\frac{y}{x^2+y^2} + g'(y) = \frac{y}{x^2+y^2}, g'(y) = 0 \Rightarrow g(y)$

$= C$  (实常数), 所以  $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + C$ .

即  $f(z) = u + iv = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + C + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$



$$= \ln z + C.$$

○31. 设  $v = e^{px} \sin y$ , 求  $p$  的值使  $v$  为调和函数, 并求出解析函数

$$f(z) = u + iv.$$

解 由  $\frac{\partial v}{\partial x} = p e^{px} \sin y, \frac{\partial v}{\partial y} = e^{px} \cos y$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = p^2 e^{px} \sin y, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -e^{px} \sin y$$

及  $v_{xx} + v_{yy} = (p^2 - 1)e^{px} \sin y = 0$  得  $p = \pm 1$  时  $v$  为调和函数.

由柯西—黎曼方程得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^{px} \cos y \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -p e^{px} \sin y \quad (2)$$

由式 (1) 得  $u = \int e^{px} \cos y dx + g(y) = \frac{1}{p} e^{px} \cos y + g(y)$  代入

式 (2) 后,  $-\frac{1}{p} e^{px} \sin y + g'(y) = -p e^{px} \sin y$  注意  $p = \pm 1$

$g'(y) = 0, g(y) = C$  (任意实常数), 所以

$$u(x, y) = \frac{1}{p} e^{px} \cos y + C$$

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{p} e^{px} \cos y + C + i e^{px} \sin y$$

$$= \begin{cases} e^z + C, & \text{当 } p = 1 \text{ 时} \\ -e^{-z} + C, & \text{当 } p = -1 \text{ 时} \end{cases}$$

◎ \* 32. 如果  $u(x, y)$  是区域  $D$  内的调和函数,  $C$  为  $D$  内以  $z_0$  为中心的任何一个正向圆周:  $|z - z_0| = r$ , 它的内部全含于  $D$ . 试证:

1)  $u(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的值等于  $u(x, y)$  在圆周  $C$  上的平均

值, 即  $u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) d\varphi$ ;

2)  $u(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的值等  $u(x, y)$  在圆域  $|z - z_0| \leq r_0$  上



平均值. 即

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) r d\varphi dr$$

分析 掌握调和函数和解析函数的关系.

证明 1) 对于区域  $D$  内的调和函数 (只须对  $D$  内包含  $|z - z_0| \leq r$  的单连通区域上的调和函数)  $u(x, y)$ , 总存在函数  $v(x, y)$  使  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  为解析函数. 于是对  $f(z)$  应用平均值公式可知

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) &= \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) d\varphi + \\ i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

两边复数的实虚部对应相等即得结论.

2) 利用结论 1), 对任意的  $r, 0 \leq r \leq r_0$  都有

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) d\varphi = u(x_0, y_0)$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad & \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) r d\varphi dr \\ &= \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} r \left[ \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) d\varphi \right] dr \\ &= \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} r \cdot 2\pi u(x_0, y_0) dr = \frac{u(x_0, y_0)}{r_0^2} \int_0^{r_0} 2r dr = \\ & u(x_0, y_0) \end{aligned}$$

○ \* 33. 如果  $f(z) = u + iv$  在区域  $D$  内处处解析,  $C$  为  $D$  内的正向圆周:  $|z| = R$ , 它的内部全含于  $D$ . 设  $z$  为  $C$  内一点, 并令  $\tilde{z} = R^2/\bar{z}$ , 试证

$$\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \oint_C \frac{\bar{z} f(\xi)}{\xi \bar{z} - R^2} d\xi = 0$$

证明 由  $\tilde{z} = R^2/\bar{z}$  及  $z$  为  $C$  内一点可知  $|\tilde{z}| = \frac{R^2}{|z|} > R$ , 于是



函数  $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$  在  $|\xi| \leq R$  上解析, 由柯西-古萨定理得

$$\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \oint_C \frac{\bar{z} f(\xi)}{\xi \bar{z} - R^2} d\xi = 0$$

◎ \* 34. 根据柯西积分公式与习题 33 的结果, 证明

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[ \frac{1}{\xi - z} + \frac{\bar{z}}{R^2 - \xi \bar{z}} \right] f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(R^2 - z\bar{z})}{(\xi - z)(R^2 - \xi \bar{z})} f(\xi) d\xi \quad (\text{其中 } C \text{ 为 } |z| = R) \end{aligned}$$

分析 积分即可, 注意计算.

证明 根据柯西积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (\text{其中 } z \text{ 为 } C \text{ 内点})$$

又由 33 题结论:

$$\oint_C \frac{\bar{z} f(\xi)}{\xi \bar{z} - R^2} d\xi = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\bar{z} f(\xi)}{R^2 - \xi \bar{z}} d\xi = 0$$

上面两式相加得

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \oint_C \frac{\bar{z} f(\xi)}{R^2 - \xi \bar{z}} d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[ \frac{1}{\xi - z} + \frac{\bar{z}}{R^2 - \xi \bar{z}} \right] f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(R^2 - z\bar{z}) f(\xi)}{(\xi - z)(R^2 - \xi \bar{z})} d\xi \end{aligned}$$

◎ \* 35. 如果令  $\xi = Re^{i\theta}$ ,  $z = re^{i\varphi}$ , 验证

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{(\xi - z)(R^2 - \bar{\xi} \bar{z})} &= \frac{d\xi/\xi}{(\xi - z)(\bar{\xi} - \bar{z})} \\ &= \frac{id\theta}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} \end{aligned}$$

并由习题 34 的结果, 证明

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f(Re^{i\theta})}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta.$$



取其实部得

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R \cos \theta, R \sin \theta)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta \end{aligned}$$

这个积分称为泊松(Poisson)积分. 通过这个公式, 一个调和函数在一个圆内的值可用它在圆周上的值来表示.

分析 由需验证结论找出解题方向.

证明 由  $\xi = Re^{i\theta}$  得  $d\xi = Re^{i\theta} d\theta = i\xi d\theta$  且  $R^2/\xi = \bar{\xi}$ . 于是

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{(\xi - z)(R^2 - \xi \bar{z})} &= \frac{d\xi}{(\xi - z)(\xi \bar{\xi} - \xi \bar{z})} = \frac{d\xi/\xi}{(\xi - z)(\bar{\xi} - \bar{z})} \\ &= \frac{id\theta}{|Re^{i\theta} - re^{i\varphi}|^2} \\ &= \frac{id\theta}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} \end{aligned}$$

由习题 34 结果及复积分计算公式

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(R^2 - z\bar{z})f(\xi)}{(\xi - z)(\bar{\xi} - \bar{z})} \cdot \frac{d\xi}{\xi} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)f(Re^{i\theta})}{|Re^{i\theta} - re^{i\varphi}|^2} \cdot \frac{d\xi}{\xi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)f(Re^{i\theta})}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} \cdot d\theta \end{aligned}$$

上式两边取实部就得 Poisson 公式:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R \cos \theta, R \sin \theta)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta \end{aligned}$$

● \* 36. 设  $f(z)$  在简单闭曲线  $C$  内及  $C$  上解析, 且不恒为常数,  $n$  为正整数.

1) 试用柯西积分公式证明

$$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{[f(\xi)]^n}{\xi - z} d\xi \quad (z \text{ 在 } C \text{ 内})$$

2) 设  $M$  为  $|f(\xi)|$  在  $C$  上的最大值,  $L$  为  $C$  的长,  $d$  为  $z$  到



$C$  的最短距离, 试用积分估值公式与 1) 中的等式, 证明不等式

$$|f(z)| \leq M \left( \frac{L}{2\pi d} \right)^{\frac{1}{n}}$$

3) 令  $n \rightarrow +\infty$ , 对 2) 中的不等式取极限, 证明:  $|f(z)| \leq M$ . 这个结果表明: 在闭区域内不恒为常数的解析函数的模的最大值只能在区域的边界上取得(最大模原理).

分析 熟练运用各种公式即可.

证明 1) 易知  $[f(z)]^n$  在  $C$  上及  $C$  内解析, 对此函数应用柯西积分公式使得:

$$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{[f(\xi)]^n}{\xi - z} d\xi$$

2) 由 1) 的结果及复积分估值公式得

$$\begin{aligned} |[f(z)]^n| &= |f(z)|^n = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_C \frac{[f(\xi)]^n}{\xi - z} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{|f(\xi)|^n}{|\xi - z|} |d\xi| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{M^n}{d} |d\xi| \\ &= \frac{M^n L}{2\pi d} \end{aligned}$$

这里用到  $|f(\xi)| \leq M$ ,  $|\xi - z| \geq d$ ,  $\oint_C |d\xi| = L$ ,

于是两边开  $n$  次根易知  $|f(z)| \leq M \left( \frac{L}{2\pi d} \right)^{\frac{1}{n}}$ .

3) 在结果 2) 中令  $n \rightarrow +\infty$ , 并注意到  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 (a > 0)$

易知  $|f(z)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M \left( \frac{L}{2\pi d} \right)^{\frac{1}{n}} = M$ .

小结 会从题干中找出思路.