南 京 航 空 航 天 大 学

二〇二一 ～ 二〇二二学年 第二学期 **《现代控制理论》考试试题**

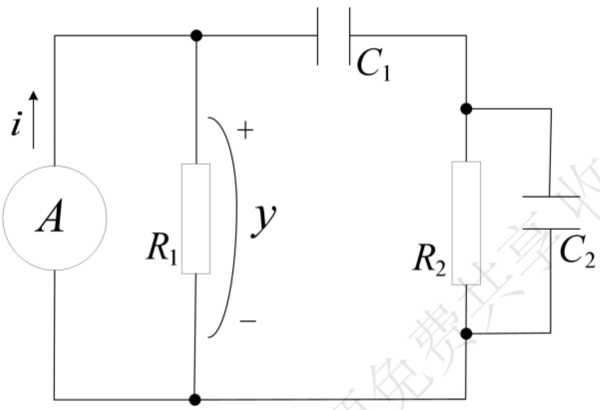
考试日期：2022年5月 日 试卷类型：A 试卷代号：

班号		学号		姓名	

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

本题分数	10分
得 分	

一、有如下电路图，设输入u为恒定电流源A的电流值i，输出y为电阻R_1上的电压值V_{c1}，若以电容C_1、C_2上的电压值V_{c1}、V_{c2}作为状态变量，取状态变量$x_1=V_{c1}$，$x_2=V_{c2}$，试列写该系统的状态空间表达式。



本题分数	10 分
得　　分	

二、已知线性定常系统的状态方程为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}u$，初始条件为 $x(0)=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$，试求系统的单位阶跃响应。

本题分数	15 分
得　　分	

三、

（1）若系统的传递函数为$G(s)=\dfrac{s^2+8s+7}{s^2+5s+6}$，试求系统的能控标准型，能观标准型，对角标准型；

（2）若系统的传递函数为$G(s)=\dfrac{s^2+6s+8}{s^2+5s+6}$，是否存在既能控又能观的状态空间实现，请说明原因。

本题分数	15 分
得　分	

四、已知系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\end{bmatrix}x$$

（1）判断系统的能控性与能观性；

（2）若系统能控，化为能控标准型，若系统不能控，将系统按能控性进行分解。

本题分数	15 分
得　　分	

五、某线性定常离散系统的状态方程为

$$x_1(k+1)=x_1(k)-x_2(k)$$
$$x_2(k+1)=\frac{1}{2}x_1(k)$$

（1）试分析系统在平衡状态 $x_e=0$ 处的稳定性；

（2）讨论李雅普诺夫渐近稳定的物理含义。

本题分数	20 分
得　　分	

六、给定原系统的传递函数为

$$\frac{s+1}{s(s-1)(s+3)}$$

（1）设计一个状态反馈增益矩阵，将传递函数变为 $\dfrac{1}{(s+2)(s+4)}$；

（2）求出系统在该状态反馈下的状态空间表达式，并分析状态反馈对系统性能的影响；

（3）为原系统设计一个全维状态观测器，使得观测器的极点为 $-5,-2\pm j2$。

本题分数	15 分
得　　分	

七、设系统状态方程及初始条件为 $\begin{matrix}\dot{x}_1(t)=u(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)\end{matrix}$，$x_1(0)=x_2(0)=2$，$x_1(2)=x_2(2)=0$，试求使性能指标 $J=2\int_0^2 u^2(t)dt$ 为极小的最优控制 $u^*(t)$ 和最优轨线 $x^*(t)$。

南 京 航 空 航 天 大 学

二〇二一～ 二〇二二学年 第 二 学期

课程名称：《 现代控制理论 》 参考答案及评分标准

命题教师： 试卷类型：A 试卷代号：

一、【10 分】

设C_1两端的电压为V_{c1}，C_2两端的电压为V_{c2}，则

$$\left(u-C_1\frac{dV_{c1}}{dt}\right)R_1=V_{c1}+V_{c2}$$

$$\left(C_1\frac{dV_{c1}}{dt}-C_2\frac{dV_{c2}}{dt}\right)R_2=V_{c2}$$ **（4 分）**

选择状态变量为$x_1=V_{c1},x_2=V_{c2}$，

则

$$\frac{dV_{c1}}{dt}=-\frac{1}{C_1R_1}V_{c1}-\frac{1}{C_1R_1}V_{c2}+\frac{1}{C_1}u$$

$$\frac{dV_{c2}}{dt}=-\frac{1}{C_2R_1}V_{c1}-\frac{R_1+R_2}{C_2R_1R_2}V_{c2}+\frac{1}{C_2}u$$

$$y=V_{c1}+V_{c2}$$ **（4 分）**

故而状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{C_1R_1} & -\frac{1}{C_1R_1}\\ -\frac{1}{C_2R_1} & -\frac{R_1+R_2}{C_2R_1R_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{C_1}\\ \frac{1}{C_2}\end{bmatrix}u$$ **（2 分）**

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

二、【10 分】

$$\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{s-2} & 0\\ \frac{1}{(s-2)(s-3)} & \frac{1}{s-3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2t} & 0\\ e^{3t}-e^{2t} & e^{3t}\end{bmatrix}$$ **（4 分）**

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t \Phi(\tau)Bu(t-\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ e^{3t}-e^{2t} & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}+\int_0^t \begin{bmatrix} e^{2\tau} & 0 \\ e^{3\tau}-e^{2\tau} & e^{3\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ e^{3t}-2e^{2t} \end{bmatrix}+\int_0^t \begin{bmatrix} e^{2\tau} \\ -e^{2\tau} \end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ e^{3t}-2e^{2t} \end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t}-1 \\ 1-e^{2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{2}e^{2t}-\frac{1}{2} \\ e^{3t}-\frac{5}{2}e^{2t}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

（6 分）

三、【15 分】

(1) $G(s)=1+\dfrac{3s+1}{s^2+5s+6}$

能控标准型为
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+u$$
（4 分）

能观标准型为
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+u$$
（4 分）

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{-5}{s+2}+\frac{8}{s+3}$$

取状态变量 $x_1=\dfrac{1}{s+2}u$， $x_2=\dfrac{1}{s+3}u$ **（2 分）**

对角标准型为
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix} -5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+u$$
（2 分）

(2) $G(s)=\dfrac{(s+2)(s+4)}{(s+2)(s+3)}$

由于传递函数存在零极点对消，它造成系统的状态空间实现要么不能控，要么不能观。 **（3 分）**

四、【15 分】

(1)

$$Q_c=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4 & 8\\ 1 & 3 & 9\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ rank\,Q_c=2 \quad \textbf{（2 分）}$$

$$Q_o=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -4 & -3 & 2\\ 8 & -9 & 3\end{bmatrix},\ rank\,Q_o=3 \quad \textbf{（2 分）}$$

所以系统不能控而能观。 **（1 分）**

（2）

构造非奇异变换阵： $T^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -4 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix}\frac{3}{10} & \frac{2}{5} & 0\\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ **（5 分）**

则 $\bar{A}=TAT^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 6 & \frac{2}{5}\\ 1 & 1 & \frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\bar{B}=TB=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\bar{C}=CT^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -11 & 1\end{bmatrix}$

因此，按能观性进行结构分解后的系统状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_c\\ \dot{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 6 & \frac{2}{5}\\ 1 & 1 & \frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u \quad \textbf{（5 分）}$$

$$y=\begin{bmatrix}3 & -11 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}$$

五、【15 分】

(1) $x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}x(k)$，计算平衡点为 $x_e=0$。

令 $Q=-I$，P 为对称阵，设 $P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$

$$G^T PG - P = -I \qquad \textbf{（4 分）}$$

即

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_{12}+\frac{1}{4}p_{22} & -p_{11}-\frac{3}{2}p_{12} \\ -p_{11}-\frac{3}{2}p_{12} & p_{11}-p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

可得联立方程：$\begin{cases} p_{12}+\frac{1}{4}p_{22}=-1 \\ -p_{11}-\frac{3}{2}p_{12}=0 \\ p_{11}-p_{22}=-1 \end{cases}$　　$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$　　**（3 分）**

P 为正定，系统在平衡状态 $x_e=0$ 处为大范围渐进稳定的。　　**（3 分）**

(2) 通过分析系统运动过程中能量的变化来判断系统的稳定性。构造一个反映系统运动过程中能量变化的虚拟能量函数，其时间导数如果始终小于零，表明系统运动逐步趋向平缓，直至在平衡状态处稳定。　　**（5 分）**

六、【20 分】

(1) 原系统传递函数 $\dfrac{s+1}{s(s-1)(s+3)}=\dfrac{s+1}{s^3+2s^2-3s}$

系统的可控标准型实现为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad \textbf{（2 分）}$$

$$y=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}x$$

系统可控，可通过状态反馈将其极点任意配置。

设反馈增益向量为 $k=\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$

闭环特征多项式为

$$|\lambda I-(A-bk)|=\lambda^3+(k_3+2)\lambda^2+(k_2-3)\lambda+k_1$$ （3 分）

期望闭环多项式为

$$(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+4)=\lambda^3+7\lambda^2+14\lambda+8$$ （2 分）

比较得 $k=[8\quad 17\quad 5]$。 （2 分）

(2)
$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -8 & -14 & -7\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$ （2 分）

$$y=[1\quad 1\quad 0]x$$

状态反馈改善了系统的动态性能和稳定性。 （2 分）

(3) 系统可观，可通过状态观测器来获取状态变量。

设反馈增益向量为 $h=[h_1\quad h_2\quad h_3]^T$

闭环特征多项式为

$$|\lambda I-(A-hc)|=\lambda^3+(h_1+h_2+2)\lambda^2+(2h_1+3h_2+h_3-3)\lambda+(-3h_1+2h_2+h_3)$$ （3 分）

期望闭环多项式为

$$(\lambda+5)(\lambda^2+4\lambda+8)=\lambda^3+9\lambda^2+28\lambda+40$$ （2 分）

比较得 $h=[-4\quad 11\quad 6]^T$。 （2 分）

七、【15 分】

令 $H=L+\lambda f=2u^2+\lambda_1 u+\lambda_2 x_1$，有 （2 分）

由协态方程

$$\dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=0,\qquad \lambda_2(t)=c_2$$ （1 分）

$$\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=-\lambda_2,\qquad \lambda_1(t)=-c_2 t+c_1$$ （1 分）

$$\frac{\partial H}{\partial u}=4u+\lambda_1=0,\qquad u^*(t)=-0.25\lambda_1=0.25(c_2 t-c_1)$$ （2 分）

由状态方程

$\dot{x}_1 = u$，

$x_1(t) = \frac{1}{8}c_2 t^2 - \frac{1}{4}c_1 t + c_3$，**（2分）**

$\dot{x}_2 = x_1$，

$x_2(t) = \frac{1}{24}c_2 t^3 - \frac{1}{8}c_1 t^2 + c_3 t + c_4$ **（2分）**

代入两点边界值条件：$x_1(0) = x_2(0) = 2$，$x_1(2) = x_2(2) = 0$，可以解出：$c_1 = 28$，$c_2 = 24$，$c_3 = 2, c_4 = 2$。于是 **（1分）**

$$x^*(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 - 7t + 2 \\ t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 2t + 2 \end{bmatrix}$$ **（2分）**

$u^*(t) = 6t - 7$ **（2分）**

南 京 航 空 航 天 大 学

二〇二一 ～ 二〇二二学年 第二学期 **《现代控制理论》考试试题**

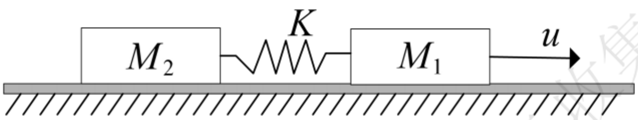
考试日期：2022 年 5 月 日　　　试卷类型：B　　　试卷代号：

班号	学号	姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

本题分数	10 分
得　分	

一、已知机械运动系统如下图所示，其中 M_1、M_2 为重物质量，K 为弹簧系数，忽略 M_1、M_2 在地面上所受的摩擦力。作用在 M_1 上的拉力 u 为系统输入量，M_1、M_2 的位移量 y_1、y_2 为系统输出量，试建立系统的状态空间表达式（运动自与重力相平衡的位置开始）。取状态变量 $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = \dot{y}_1, x_4 = \dot{y}_2$ 。



本题分数	10 分
得　　分	

二、已知线性定常系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}x$$

系统的初始状态为 $x(0)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$，输入量为 $u(t)=e^{-2t}\quad (t\geq 0)$，试求系统的输出响应 $y(t)$。

本题分数	15 分
得　　分	

三、 已知系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & -6 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

（1）将系统化成对角标准型；

（2）计算系统的传递函数，并根据传递函数的零极点对消情况判断系统是否能控和能观。

本题分数	15 分
得　　分	

四、已知系统状态空间模型如下所示：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & k\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}k-2\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}x$$

（1）求 k 的取值范围，使得系统既能控又能观；

（2）取 $k=-1$，若系统能观，将系统化为能观标准型，若系统不能观，将系统按能观性进行分解。

本题分数	15 分
得　　分	

五、系统的状态方程为

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 - 5x_2$$

（1）以李雅普诺夫第二方法确定该系统在原点的稳定性；

（2）从能量角度叙述李雅普诺夫第二方法的物理解释。

本题分数	20 分
得　分	

六、已知系统状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

（1）设计全维状态观测器使其极点位于 $-4,-3\pm j3$ 处；

（2）设计状态反馈使闭环系统的极点位于 $-5,-2,-2$ 处；

（3）求系统经状态反馈后的传递函数，分析状态反馈和全维状态观测器分别对传递函数有什么影响。

本题分数	共 15 分
得　　分	

七、已知系统状态方程及初始条件为 $\dot{x}(t)=-x(t)+u(t)$，$x(0)=5$，其控制约束为：$|u(t)|\le 2$，试求使性能指标 $J=\int_0^2(-x+\frac{1}{2}u)dt$ 为极小的最优控制 $u^*(t)$ 和最优轨线 $x^*(t)$。

南京航空航天大学

二〇二一～ 二〇二二学年 第 二 学期

课程名称：《 现代控制理论 》 参考答案及评分标准

命题教师： 试卷类型：B 试卷代号：

一、【10分】

由牛顿定律和弹簧定律可得

$$M_1\dot{x}_3 = u - K(x_1 - x_2)$$

$$M_2\dot{x}_4 = K(x_1 - x_2) \qquad \textbf{（4分）}$$

则

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{K}{M_1}x_1 + \frac{K}{M_1}x_2 + \frac{1}{M_1}u$$

$$\dot{x}_4 = \frac{K}{M_2}x_1 - \frac{K}{M_2}x_2 \qquad \textbf{（4分）}$$

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2$$

故而状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{K}{M_1} & \frac{K}{M_1} & 0 & 0\\ \frac{K}{M_2} & -\frac{K}{M_2} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{M_1}\\ 0\end{bmatrix}u \qquad \textbf{（2分）}$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

二、【10分】

$$\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$ （4 分）

$$y(t)=c\Phi(t)x(0)+\int_0^t c\Phi(\tau)Bu(t-\tau)d\tau=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$+\int_0^t\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-\tau} & e^{-\tau}-e^{-2\tau}\\ 0 & e^{-2\tau}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

（6 分）

$$=(6e^{-t}-e^{-2t})+\int_0^t -e^{-2\tau}e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

$$=6e^{-t}-e^{-2t}-te^{-2t}(t\geq 0)$$

三、【15 分】

(1) 特征方程为：

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -3\\ 2 & \lambda+2 & 6\\ 1 & 2 & \lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+6)=0$$ （2 分）

特征值为：

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-6$$ （2 分）

求对应特征值的特征向量：

对于 $\lambda_1=1$，

$$(\lambda_1 I-A)v_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 6\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow v_1=\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -4\\ 1\end{bmatrix}$$

对于 $\lambda_2=-1$，

$$(\lambda_2 I-A)v_2=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\\ v_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow v_2=\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\\ v_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

对于 $\lambda_3=-6$，

$$(\lambda_3 I-A)v_3=\begin{bmatrix}-6 & 0 & -3\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{31}\\ v_{32}\\ v_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow v_3=\begin{bmatrix}v_{31}\\ v_{32}\\ v_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -5\\ -4\end{bmatrix}$$ （2 分）

则

$$P=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3 & 2\\ -4 & 0 & -5\\ 1 & 1 & -4\end{bmatrix},P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14}\\ -\frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10}\\ -\frac{2}{35} & -\frac{11}{35} & -\frac{6}{35}\end{bmatrix}$$ **（2 分）**

$$\bar{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{bmatrix},\bar{B}=P^{-1}B=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix},\bar{C}=CP=\begin{bmatrix}7 & -5 & 0\end{bmatrix}$$

因此可得原系统的对角标准型为

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}u$$ **（2 分）**

$$y=\begin{bmatrix}7 & -5 & 0\end{bmatrix}\bar{x}$$

(2) 系统的传递函数为：

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$$

$$=\begin{bmatrix}7 & -5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s-1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{s+6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}=\frac{7}{(s-1)}$$ **（3 分）**

由于传递函数存在零极点对消，它造成系统的状态空间实现要么不能控，要么不能观。**（2 分）**

四、【15 分】

（1） 能控性矩阵 $Q_c=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k-2 & 2k-3\\ 1 & k\end{bmatrix}$

$\det(Q_c)=k^2-4k+3\neq 0$

可得系统能控的条件为 $k\neq 1$ 且 $k\neq 3$ **（2 分）**

能观性矩阵 $Q_o=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 6 & 3+k\end{bmatrix}$

$\det(Q_c)=3k+3\neq 0$

可得系统能控的条件为 $k\neq -1$ **（2 分）**

所以系统既能控又能观的条件为 $k\neq 1$ 且 $k\neq 3$ 且 $k\neq -1$ **（1 分）**

（2） $k=-1$ 时，系统状态空间模型为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}x$$

系统不能观。

构造非奇异变换阵：

$$T=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 0\end{bmatrix},T^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}\qquad \textbf{（4 分）}$$

则

$$\bar{A}=TAT^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & -1\end{bmatrix},\bar{B}=TB=\begin{bmatrix}-8\\-3\end{bmatrix},\bar{C}=CT^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\qquad \textbf{（4 分）}$$

因此，按能观性进行结构分解后的系统状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_o\\\dot{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_o\\x_{\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8\\-3\end{bmatrix}u$$

（2 分）

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_o\\x_{\bar{o}}\end{bmatrix}$$

五、【15 分】

方法一：

显然，原点是系统唯一的平衡状态。**（2 分）**

选取正定标量函数 $V(x)=x_1^2+x_2^2$，则 **（3 分）**

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=2x_1(-x_1+2x_2)+2x_2(2x_1-5x_2)\\&=-2x_1^2+8x_1x_2-10x_2^2\\&=-2(x_1-2x_2)^2-2x_2^2\end{aligned}\qquad \textbf{（2 分）}$$

对于状态空间中的一切非零 x 满足条件 $V(x)$ 正定和 $\dot{V}(x)$ 负定，$\|\mathbf{x}\|\to\infty,V(\mathbf{x})\to\infty$，故系统的原点平衡状态是大范围渐进稳定的。**（3 分）**

方法二：

系统的状态方程可以写为向量-矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

显然，原点 $x_1=x_2=0$ 是系统唯一的平衡状态。**（2 分）**

根据 $A^TP+PA=-Q$，取 $Q=I$，设 $P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}$，则（**3 分**）

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -5\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

解得 $P=\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & 1\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$。（**2 分**）

由于矩阵 P 正定，系统的原点平衡状态是大范围渐进稳定的。（**3 分**）

（2）通过分析系统运动过程中能量的变化来判断系统的稳定性。构造一个反映系统运动过程中能量变化的虚拟函数，其时间导数如果始终小于零，表明系统能量逐步衰减，直至在平衡状态处衰减至零，即系统稳定。（**5 分**）

六、【20 分】

（1） 系统可观，可通过状态观测器来获取状态变量。

令 $H=[h_1 \quad h_2 \quad h_3]^T$

$f(\lambda)=|\lambda I-(A-HC)|=\lambda^3+(3+h_3)\lambda^2+(5+h_2)\lambda+h_1$ （**3 分**）

$f^*(\lambda)=(\lambda+4)(\lambda^2+6\lambda+18)=\lambda^3+10\lambda^2+42\lambda+72$ （**2 分**）

$H=(72 \quad 37 \quad 7)^T$ （**2 分**）

（2）系统可控，可通过状态反馈将其极点任意配置。

令 $K=[k_1 \quad k_2 \quad k_3]$

$f(\lambda)=|\lambda I-(A-bK)|=\lambda^3+(k_1+3)\lambda^2+(3k_1+k_2+5)\lambda+5k_1+3k_2+k_3$ （**3 分**）

$f^*(\lambda)=\lambda^3+9\lambda^2+24\lambda+20$ （**2 分**）

$K=[6 \quad 1 \quad -13]$ （**2 分**）

（3）原系统传递函数 $\dfrac{1}{s^3+3s^2+5s}$

经状态反馈后的传递函数为 $\dfrac{1}{s^3+9s^2+24s+20}$ （**4 分**）

状态反馈改变了传递函数的极点，全维状态观测器不改变系统传递函数。（**2 分**）

七、【15 分】

$H=(-x+0.5u)+\lambda(-x+u)=(-1-\lambda)x+(0.5+\lambda)u$ （**2 分**）

$u^*(t)=\begin{cases}-2 & 0.5+\lambda>0\\ 2 & 0.5+\lambda<0\end{cases}$ （**2 分**）

$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}=\lambda+1 \Rightarrow \lambda=ce^{t}-1$。由 $\lambda(2)=0$，得 $\Rightarrow \lambda(t)=e^{t-2}-1$ **（2 分）**

$$u^{*}(t)=\begin{cases}2 & 0\le t<1.307\\ -2 & 1.307<t\le 2\end{cases}$$ **(2 分)**

$$\dot{x}=\begin{cases}-x+2\\ -x-2\end{cases},\qquad x^{*}(t)=\begin{cases}c_1e^{-t}+2 & 0\le t<1.307\\ c_2e^{-t}-2 & 1.307<t\le 2\end{cases}$$ **（2 分）**

$c_1=3, c_2=17.78$ **（2 分）**

$$x^{*}(t)=\begin{cases}3e^{-t}+2 & 0\le t<1.307\\ 17.78e^{-t}-2 & 1.307<t\le 2\end{cases}$$ **（3 分）**