2020-2021 学年第一学期期末补考试卷

一、填空 (每小题 3 分)

1.设函数
$$y = y(x)$$
由方程 $x = \int_{1}^{x+y} e^{-t^{2}} dt$ 确定,则 $y'(0) =$ _______

2.曲线弧
$$y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos t} \, dt$$
 的全长为_____

$$3.$$
半球面 $z=2+\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成的闭曲面在 xoy 面上投影部分的面

积为_____

$$4.\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{3}}{n^{4}+i^{4}}=\underline{\hspace{1cm}}$$

7.已知函数
$$f(x)$$
有连续导数,且 $\lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x} \right] = 2$,则 $f(0) = ______, f'(0) = ______$

二、选择题 (每小题 3 分)

$$1.$$
当 $n\to\infty$ 时, $e^2-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ 与 $\frac{a}{n}(a\neq 0)$ 是等价无穷小,则 $a=$ ()

(C)e

(A)1 (B)2

 $(A) \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x}}$

$$(D)e^2$$

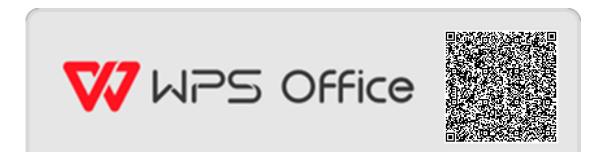
$$(B) \int_0^1 \frac{dx}{\ln(1+x)}$$

$$(C)\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sin x}$$

$$(D)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

三、设
$$F(x) = \int_0^x tf(x^2 - t^2)dt$$
, $f(x)$ 在 $x = 0$ 某领域内可导,且 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$,求

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^4}.$$



四、计算题(每题5分)

1.
$$\int \arctan \sqrt{x} \, dx$$

$$2.\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}} dx$$

$$3.\int \frac{x+1}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx$$

$$4. \int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} \, dx$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

五、已知一直线通过椭球面 $(x-2)^2+2(y-1)^2+3(z-3)^2=9$ 的中心,且与

L:
$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$$
垂直相交,求该直线的方程.





六、已知曲线 $y=ax^2+2x(a>0)$,若 $y=ax^2+2x(a>0)$ 与x=1及y=0所围成图形面积为 2,求上述图形绕y轴旋转所得旋转体的体积 V.

七、求函数 $f(x) = \int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}} |\cos t| dt$ 在 $[0, \pi]$ 上的最小值与最大值.

八、设f(x)在[a, b](a < b)上连续,且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x f(x)dx = 0$.

证明: (1)存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\int_a^{\xi} f(t)dt = 0$;

(2)至少存在不同的 ξ_1 , $\xi_2 \in (a, b)$, 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

