一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3x+2}\sin\frac{2}{x}=$ ________.

2. $y=\cos 2x$,则$y^{(n)}=$ ________.

3. 函数$y=x+2\cos x$在区间$[0,\ \frac{\pi}{2}]$上的最大值为________.

4. 设函数$f(x)$满足$\int xf(x)\mathrm{d}x=x^2e^x+C$, $\int\frac{e^x}{f(x)}dx=$ ________.

5. 设函数$f(x)$满足$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\,dx$，则$\int_0^1 f(x)\,dx=$ ________.

6. 曲线$y=\ln\cos x\,(0\le x\le\frac{\pi}{4})$的弧长为________.

二、选择题

1. 设$I_1=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x\cos^2 x}{x}dx$，$I_2=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\cos^2 x)dx$，$I_3=\int_{-\pi}^{\pi}(x\sin^4 x-\cos^4 x)\,dx$,则有（）

（A） $I_1<I_3<I_2$ （B） $I_2<I_3<I_1$

（C） $I_3<I_1<I_2$ （D） $I_2<I_1<I_3$

2. 下列反常积分发散的是（）

（A） $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\,dx$ （B） $\int_0^{+\infty}xe^{-x}\,dx$

（C） $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ （D） $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$

3. 若幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$在$x=-3$处收敛，则此级数在$x=2$处( )

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛

（C）发散　　（D）敛散性不能确定

三、计算题

1. $\int ln(1+x^2)dx$

2. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$

3. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$

4.设函数$f(x)=\int_1^x \frac{sint^2}{t}dt$，求$\int_0^1 xf(x)dx$

四、判别下列级数的敛散性，其中正项级数请指明收敛还是发散，交错级数请指明绝对收敛、条件收敛还是发散。

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n^3-n^2+1}}$

五、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n+1}$的收敛域与和函数

六、将函数$\mathrm{f(x)} = \ln(3+\mathrm{x})$展开成$(x-1)$的幂级数，并给出$x$的范围。

七、求由抛物线$y = x^2 - 2x$与直线$y = x - 2$所围成的平面图形的面积，并求该平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

八、设函数$f(x)=\int_0^x |\cos t| dt$

(1)当$n\pi \le x \le (n+1)\pi$时（其中 n 为正整数）

证明：$2n \le f(x) \le 2(n+1)$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

九、若级数$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$是否收敛？若收敛，给出证明；若发散，举例说明。

一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3x+2}\sin\frac{2}{x}=$ $\underline{\frac{2}{3}}$.

2. $y=\cos 2x$,则$y^{(n)}=$ $\underline{2^n\cos(2x+\frac{n}{2}\pi)}$.

3. 函数$y=x+2\cos x$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值为 $\underline{\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}}$.

4. 设函数$f(x)$满足$\int xf(x)\mathrm{d}x=x^2e^x+C$, $\int\frac{e^x}{f(x)}dx=$ $\underline{\ln(2+x)}+C$.

5. 设函数$f(x)$满足$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\,dx$，则 t

$\int_0^1 f(x)\,dx=$ $\underline{\frac{\pi}{4-\pi}}$.

6. 曲线$y=\ln\cos x(0\le x\le\frac{\pi}{4})$的弧长为 $\underline{\ln(\sqrt{2}+1)}$.

二、选择题

1. 设$I_1=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x\cos^2 x}{x}dx$，$I_2=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\cos^2 x)dx$，$I_3=\int_{-\pi}^{\pi}(x\sin^4 x-\cos^4 x)\,dx$,则有（C）

(A) $I_1<I_3<I_2$　(B) $I_2<I_3<I_1$

(C) $I_3<I_1<I_2$　(D) $I_2<I_1<I_3$

$I_1=2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\cos^2 x\,dx$　c_1

$I_2=2\int_0^{\pi}1\cdot\cos^2 x\,dx>0$

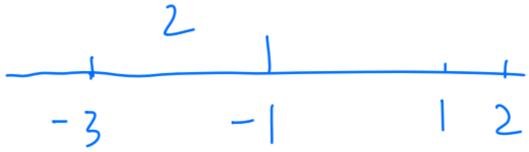
$I_3=-2\int_0^{\pi}\cos^4 x\,dx<0$

2. 下列反常积分发散的是（D）

(A) $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx=1$　(B) $\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$ X

(C) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\frac{\pi^2}{8}$　(D) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$

$a\to\infty$



3. 若幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$在$x=-3$处收敛，则此级数在$x=2$处(D)

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛

（C）发散　　（D）敛散性不能确定

三、计算题

1. $\int ln(1+x^2)dx$

$= x\ln(1+x^2) - \int x\, d\ln(1+x^2)$

$= x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C.$

2. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$

$2-2x$

$= \int \frac{2x-2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$

$= -\int \frac{d(3+2x-x^2)}{\sqrt{3+2x-x^2}} + 3\int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx = -2\sqrt{3+2x-x^2} + \arcsin\frac{x-1}{2}$

$+ C$

3. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$

令 $x = 2\sin t \quad t \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$

$dx = 2\cos t\, dt$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos t}{4\sin^2 t \cdot 2\cos t}dt = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \csc^2 t\, dt = -\frac{1}{4}\cot t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3})$

4.设函数$f(x)=\int_1^x \frac{sint^2}{t}dt$，求$\int_0^1 xf(x)dx$ $f'(x)$?

解: $\int_0^1 x f(x) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x) dx^2 = \frac{1}{2}x^2 f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 d f(x)$

$f'(x) = \frac{\sin x^2}{x}$

$= -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x) dx$

$= -\frac{1}{4}\int_0^1 \sin x^2 dx^2$

$= \frac{1}{4}\cos x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(\cos 1 - 1)$

四、判别下列级数的敛散性，其中正项级数请指明收敛还是发散，交错级数请指明绝对收敛、条件收敛还是发散。

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n = \frac{e}{3} < 1$ 收敛

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n^3-n^2+1}}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{n^3-n^2+1}} > \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ $u_{n+1} < u_n$ $\therefore$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3-n^2+1}}$ 发散

条件收敛

五、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n+1}$的收敛域与和函数

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1$ $\therefore R=1$ $x\in(-1,1)$

$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)(-1)^{n+1}$ 发散. $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)$ 发散.

$\therefore x\in(-1,1)$.

$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty}(nx^{n+1})'$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^2 (x^n)'\right)'$$

$$= x\left(x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'\right)'$$

$$= \frac{2x^2}{(1-x)^3} \quad x\in(-1,1)$$

六、将函数$f(x) = \ln(3 + x)$展开成$(x - 1)$的幂级数，并给出x的范围。

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \quad x\in(-1,1]$$

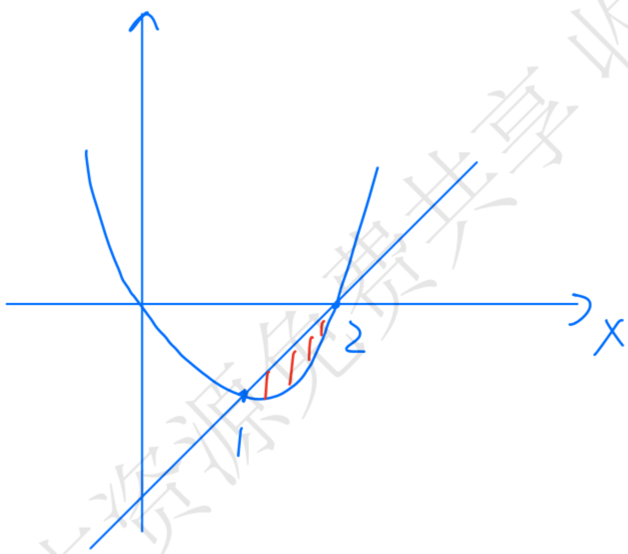
$$\ln(3+x) = \ln(4+x-1) = \ln 4\left(1+\frac{x-1}{4}\right)$$

$$= \ln 4 + \ln\left(1+\frac{x-1}{4}\right)$$

$$\ln(3+x) = \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot 4^n}(x-1)^n \quad x\in(-3,5]$$

七、求由抛物线$y = x^2 - 2x$与直线$y = x - 2$所围成的平面图形的面积，并求该平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

$$x^2-2x = x-2 \qquad x=2 \quad x=1$$



$$S = -\int_1^2 (x^2-2x-x+2)\,dx$$

$$= \int_1^2 (3x-x^2-2)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx = -\int_1^2 2\pi x(x^2-2x)\,dx - \left(-\int_1^2 2\pi x(x-2)\,dx\right.$$

$$= -2\pi\left(\int_1^2 x^3-2x^2\,dx - \int_1^2 x^2-2x\,dx\right)$$

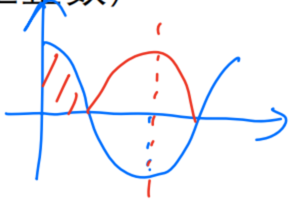
$$= \frac{\pi}{2}$$

八、设函数$f(x)=\int_0^x|\cos t|dt$

(1)当$n\pi\le x\le(n+1)\pi$时（其中 n 为正整数）

证明：$2n\le f(x)\le 2(n+1)$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$



(1) $\int_0^x|\cos t|dt \ge \int_0^{n\pi}|\cos t|dt = n\int_0^{\pi}|\cos t|dt = 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt = 2n$

$\int_0^x|\cos t|dt \le \int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|dt = (n+1)\int_0^{\pi}|\cos t|dt = 2(n+1)$

$\therefore 2n\le f(x)\le 2(n+1)$

(2) $\frac{f(x)}{x}\ge\frac{2n}{(n+1)\pi}$ $\quad\frac{f(x)}{x}\le\frac{2(n+1)}{n\pi}$

$\frac{2n}{(n+1)\pi}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{2(n+1)}{n\pi}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{2}{\pi}$

九、若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|\mu_n|$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$是否收敛？若收敛，给出证明；若发散，举例说明。

证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 收敛.

令 $u_n=\frac{1}{2}(|\mu_n|+\mu_n)=\begin{cases}\mu_n & \mu_n>0\\ 0 & \mu_n\le 0.\end{cases}$

$u_n\le|\mu_n|$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. $\quad \mu_n=2u_n-|\mu_n|$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 收敛.