《常微分方程》课堂作业三
求解常系数方程

时间 2 小时，满分100分

1）证明题请特别注重证明的严谨性。条理清楚、叙述完整以及推理严格的答题**可以最高加分**50%；简单的描述或者非严格的证明则 **最多也只能得到这道题的**50% **的分数**。
2）计算题请给出详细的计算过程，非常完美的答题可以最高加分50%。如果仅仅给出计算结果则没有分数。
3）可以引用其它小题的结论（即使没有完成证明），但是不能循环证明。
4）可以不抄题目，但编号要写清楚，不然不予记分。
5）此课堂作业为闭卷式，不允许使用任何资料和计算器。

练习一（30分）、考虑线性方程组：

$$(E-1)\qquad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1.1）（8分）求方程组（E-1）的相应的齐次方程组的基本解矩阵 $\Phi(t)$。

解：令 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$， $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 原方程可化为$x'=Ax$, 令$A$的特征值为$\lambda$, 则特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2,$$

令$|\lambda E-A|=0$, 解得二重特征值$\lambda_{1,2}=1$. 由定义知

$$e^{tA}=e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda E)}=e^t\cdot(E+\frac{t}{1!}(A-\lambda E)+\cdots),$$

由于

$$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad (A-\lambda E)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故$(A-\lambda E)^n=0\ (n\geq 2)$.

则$e^{tA}=e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda E)}=e^t\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}t\right)=\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$.

因此有基本解矩阵：$\Phi(t)=\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$.

1.2）（8分）、令

$$\phi(t)=\Phi(t)c(t),\qquad c(t)=\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix}$$

其中$\Phi(t)$是1.1）中的基本解矩阵，$c(t)$是待定向量函数。证明：$\phi(t)$是非齐次方程组（E-1）的解的充分必要条件是向量函数$c(t)$满足：

$$\Phi(t)c'(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

解：$\Rightarrow$ 若$\phi(t)$是非齐次方程组(E-1)的解, 令 $f(t)=\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$, 则有$\phi'(t)=A\phi(t)+f(t)$成立.

因为$\phi(t)=\Phi(t)c(t)$, 则

$$\phi^{'}(t)=\Phi^{'}(t)c(t)+\Phi(t)c^{'}(t).$$

而由于$\Phi(t)$为齐次方程的基本解矩阵, 因此$\Phi^{'}(t)=A\Phi(t)$成立.

代回式子得：

$$\phi^{'}(t)=A\Phi(t)c(t)+\Phi(t)c^{'}(t)=A\phi(t)+\Phi(t)c^{'}(t)=A\phi(t)+f(t),$$

由于$A\Phi(t)c(t)=A\phi(t)$, 故$\Phi(t)c^{'}(t)=f(t)=\begin{pmatrix}e^{-t}\\0\end{pmatrix}$成立.

$\Leftarrow$ 若$\Phi(t)c^{'}(t)=\begin{pmatrix}e^{-t}\\0\end{pmatrix}=f(t)$, 则对于$\phi(t)=\Phi(t)c(t)$,

$$\begin{aligned}\phi^{'}(t)&=\Phi^{'}(t)c(t)+\Phi(t)c^{'}(t)\\&=A\phi(t)+\begin{pmatrix}e^{-t}\\0\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1}$$

即成立$\phi^{'}(t)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\phi(t)+\begin{pmatrix}e^{-t}\\0\end{pmatrix}$, 因此$\phi(t)$为非齐次方程组(E-1)的解.

1.3）（9分）利用1.2）的结果求非齐次方程组（E-1）的通解。

解：由1.1)知：有齐次方程基解矩阵

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}e^t&te^t\\0&e^t\end{pmatrix},\quad c(t)=\begin{pmatrix}c_1(t)\\c_2(t)\end{pmatrix}.$$

由1.2)知：有命题$\Phi(t)c^{'}(t)=f(t)=\begin{pmatrix}e^{-t}\\0\end{pmatrix}$成立, 即

$$\begin{pmatrix}e^t&te^t\\0&e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1^{'}(t)\\c_2^{'}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t(c_1^{'}(t)+tc_2^{'}(t))\\e^tc_2^{'}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-t}\\0\end{pmatrix},$$

解得$\begin{cases}c_1^{'}(t)=e^{-2t}\\c_2{'}(t)=0\end{cases}$,积分有$\begin{cases}c_1(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}+c_1,\\c_2(t)=c_2,\end{cases}$, 此时有通解

$$\phi(t)=\Phi(t)c(t)=\begin{pmatrix}e^t&te^t\\0&e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}e^{-2t}+c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}e^{-t}+c_1e^t+c_2te^t\\c_2e^t\end{pmatrix}.$$

1.4）（5分）求非齐次方程组（E-1）的满足Cauchy初始条件

$$\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

的特解。

解：

$$\phi(0)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}-\frac{1}{2}+c_1=1,\\c_2=2,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}c_1=\frac{3}{2},\\c_2=2.\end{cases}$$

因此存在特解： $\phi_0(t)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^t+2te^t\\2e^t\end{pmatrix}$.

练习二（50分）、考虑线性方程组：

$$(E-2)\qquad \begin{cases} x_1' = -x_1 + 2x_2 - 2x_3, \\ x_2' = 6x_1 - 5x_2 + 6x_3, \\ x_3' = 4x_1 - 4x_2 + 5x_3. \end{cases}$$

2.1）（8分）求方程组（E-2）的相应的矩阵A的特征根，以及其单重根的相应特征向量。

解：令$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 6 & -5 & 6 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. 设$A$的特征根$\lambda$, 即有

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -2 \\ 6 & -5-\lambda & 6 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1-\lambda & -5-\lambda & 6 \\ 0 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & -7-\lambda & 8 \\ 0 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)((\lambda+7)(\lambda-5)+32) = -(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda-3) = -(\lambda-1)^2(\lambda+3).$$

令$|A-\lambda E| = 0$, $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = -3$, 有单重根$\lambda = -3$, 设对应的特征向量为$x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix}$, 代入$(A-\lambda E)x_0 = 0$中可得$\begin{cases} 2x_{10} + 2x_{20} - 2x_{30} = 0, \\ 6x_{10} - 2x_{20} + 6x_{30} = 0, \\ 4x_{10} - 4x_{20} + 8x_{30} = 0, \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} x_{10} = -1, \\ x_{20} = 3, \\ x_{30} = 2, \end{cases}$ 因此对于单重根$\lambda = -3$, 有特征向量$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2.2）（12分）对于在 2.1）中求出的矩阵A的二重特征根λ，求方程组（E-2）的形如

$$\phi(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{bmatrix}$$

的解，其中 $P_1(t), P_2(t), P_3(t)$都是一阶多项式或者常数（零阶多项式）。

解：设$\phi(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} at+x \\ bt+y \\ ct+z \end{pmatrix}$,
由于$\phi(t)$为(E-2)的解, 且二重根$\lambda = 1$, 故有：

$$(2)\qquad \phi'(t) = A\phi(t), \qquad \phi'(t) = e^t \begin{pmatrix} at+x+a \\ bt+y+b \\ ct+z+c \end{pmatrix} = A\phi(t),$$

而 $A\phi(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 6 & -5 & 6 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} at+x \\ bt+y \\ ct+z \end{pmatrix}$. 因此有方程：

$$(3)\qquad \begin{cases} at+x+a = -(at+x+a) + 2(bt+y) - 2(ct+z), \\ bt+y+b = 6(at+x) - 5(bt+y) + 6(ct+z), \\ ct+z+c = 4(at+x) - 4(bt+y) + 5(ct+z). \end{cases}$$

$a=b=c=0, y=x+z$, 整理得 取$x=1$, $z=0$, 或取$x=0$, $z=1$, 得到两个线性无关的解 $e^t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$和$e^t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

2.3）（8分）利用 2.1）和 2.2）的结果求出方程组（E-2）的一个基本解矩阵。

解：$\begin{pmatrix}e^t\\e^t\\0\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0\\e^t\\e^t\end{pmatrix}$为两个线性无关的解.

结合2.1), 有特征根$\lambda=-3$, 特征向量$\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$, 因此$\phi_{10}(t)=\begin{pmatrix}-e^{-3t}\\3e^{-3t}\\2e^{-3t}\end{pmatrix}$. 因此, 有基本矩阵$(\phi_{10},\phi_{20},\phi_{30})$ 成立, 即有基本矩阵$\begin{pmatrix}-e^{-3t}&e^t&0\\3e^{-3t}&e^t&e^t\\2e^{-3t}&0&e^t\end{pmatrix}$.

2.4）（8分）求方程组（E-2）的满足初始条件

$$\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\x_3(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

的解。

解：令

$$\phi_{10}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}e^{-3t},\quad \phi_{20}=\begin{pmatrix}e^t\\e^t\\0\end{pmatrix},\quad \phi_{30}=\begin{pmatrix}0\\e^t\\e^t\end{pmatrix}.$$

令该$x(t)=a\phi_{10}+b\phi_{20}+c\phi_{30}$, $\quad(a,b,c$为常数$)$.

当$t=0$时, $\phi_{10}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\quad\phi_{20}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\quad\phi_{30}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

因此有$x(0)=\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\x_3(0)\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-a+b=\eta_1,\\3a+b+c=\eta_2,\\2a+c=\eta_3,\end{cases}$ 解得: $\begin{cases}a=\frac{1}{2}(-\eta_1+\eta_2-\eta_3),\\b=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2-\eta_3),\\c=\eta_1-\eta_2+2\eta_3.\end{cases}$

因此有解：$x=a\phi_{10}+b\phi_{20}+c\phi_{30}$,

$$x(t)=\frac{1}{2}(-\eta_1+\eta_2-\eta_3)e^{-3t}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2-\eta_3)e^t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+(\eta_1-\eta_2+2\eta_3)e^t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

2.5）（9分）计算 e^{tA}.

解：对于e^{tA}, 有$t=0$时, $e^{tA}=e^0=E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 分别令2.4)中$\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

代入$\begin{cases}a=\frac{1}{2}(-\eta_1+\eta_2-\eta_3),\\b=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2-\eta_3),\\c=\eta_1-\eta_2+2\eta_3,\end{cases}$ 得

$$\begin{cases}a_1=-\frac{1}{2},\\b_1=\frac{1}{2},\\c_1=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}a_2=\frac{1}{2},\\b_2=\frac{1}{2},\\c_2=-1,\end{cases}\qquad\begin{cases}a_3=-\frac{1}{2},\\b_3=-\frac{1}{2},\\c_3=2.\end{cases}\tag{4}$$

因此,

$$x_1(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\-1\end{pmatrix}e^{-3t}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}e^{t}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{t}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{t}\\-\frac{3}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{t}+e^{t}\\-e^{-3t}+e^{t}\end{pmatrix},$$

$$x_2(t)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{t}\\\frac{3}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{t}-e^{t}\\e^{-3t}-e^{t}\end{pmatrix},\quad x_3(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{t}\\-\frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{t}+2e^{t}\\-e^{-3t}+2e^{t}\end{pmatrix}.$$

因此,

$$\begin{aligned}e^{tA}&=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{t}&-\frac{1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{t}&\frac{1}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{t}\\-\frac{3}{2}e^{-3t}+\frac{3}{2}e^{t}&\frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{t}&-\frac{3}{2}e^{-3t}+\frac{3}{2}e^{t}\\-e^{-3t}+e^{t}&e^{-3t}-e^{t}&-e^{-3t}+2e^{t}\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{5}$$

2.6) （5分） 求下列方程组的基本解组

$$(E-3)\qquad\begin{cases}x_1'=-x_1+2x_2-2x_3,\\x_2'=6x_1-5x_2+6x_3,\\x_3'=4x_1-4x_2+5x_3,\\x_4'=x_4+x_5,\\x_5'=x_5.\end{cases}$$

解：对于方程组(E-3), 可看作由(E-1), (E-2)拼接而成.

而(E-2)有基解矩阵 $\begin{pmatrix}-e^{-3t}&e^{t}&0\\3e^{-3t}&e^{t}&e^{t}\\2e^{-3t}&0&e^{t}\end{pmatrix}$, (E-1)有基解矩阵$\begin{pmatrix}e^{t}&te^{t}\\0&e^{t}\end{pmatrix}$.

因此(E-3)有基解矩阵 $\begin{pmatrix}-e^{-3t}&e^{t}&0&0&0\\3e^{-3t}&e^{t}&e^{t}&0&0\\2e^{-3t}&0&e^{t}&0&0\\0&0&0&e^{t}&te^{t}\\0&0&0&0&e^{t}\end{pmatrix}$成立.

因此

$$x_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\0\\0\end{pmatrix}e^{-3t},\ x_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}e^{t},\ x_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}e^{t},\ x_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\e^{t}\\0\end{pmatrix},\ x_5=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\te^{t}\\e^{t}\end{pmatrix},$$

上述x_1,x_2,x_3,x_4,x_5为基本解组.

练习三（20分）

3.1）（10分）求方程

$$\frac{d^3x}{dt^3}+3\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+x=e^{-t}(t-5)$$

的通解。

解：先验证齐次方程的特征值，是-1, 通解为$(c_1+c_2t+c_3t^3)e^{-t}$, 非齐次方程的一个特解为$t^3(A+Bt)e^{-t}$带入原方程得$A=-\frac{5}{6},B=\frac{1}{24}$. 通解为$(c_1+c_2t+c_3t^3)e^{-t}+\frac{1}{24}t^3(t-20)e^{-t}$。

3.2）（10分）求方程

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}-4t\frac{dx}{dt}+6x=0$$

的通解。

解：设欧拉方程有形如t^k的解，带入方程得$k^2-5k+6=0$，$k_1=2, k_2=3$. 通解为$x(t)=c_1t^2+c_2t^3$.