

# 南京航空航天大学

第1页 (共6页)

二〇一八 ~ 二〇一九 学年 第II学期 《工科数学分析(2)》期中试题

考试日期: 2019年5月11日 试卷类型: A 试卷代号:

班号			学号				姓名				
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

## 一、填空题 (每题4分, 共40分)

本题分数	40
得分	

- 求使曲线  $x = t, y = t^2, z = t^3$  在该点处的切线与平面  $x + 2y + z = 4$  平行的点的坐标为\_\_\_\_\_。
- 设二元函数  $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$ , 则  $dz|_{(1,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 设  $f(x, y)$  为有界闭区域  $D: x^2 + y^2 \leq a^2$  上连续可导函数, 则  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \iint_D f(x, y) d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 函数  $u = (x-y)^2 + (z-x)^2 - 2(y-z)^2$  在点  $M(1, 2, 2)$  处方向导数的最大值为\_\_\_\_\_。
- 设函数  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ , 则该函数在点  $(1, 1, 1)$  处的梯度  $\text{grad} f(1, 1, 1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $F(x - az, y - bz) = 0$  所确定, 其中  $a, b$  是常数,  $F(u, v)$  任意可微, 则  $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7.  $I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{3}x} f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy$  在极坐标系下的二次积分为

$I =$  \_\_\_\_\_.

8. 设  $f(x,y) = (1+xy)^{\frac{1}{x}}$ , 则  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y) =$  \_\_\_\_\_.

9. 设  $f(x,y)$  连续, 且  $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{2\pi} \iint_D f(x,y) dx dy$ , 其中

$D: x^2+y^2 \leq 1$ , 则  $\iint_D f(x,y) dx dy =$  \_\_\_\_\_.

10. 函数  $f(x,y) = 2x^2 + ax + xy^2 + by$  在点  $(1,-1)$  处取得极值, 则常数

$a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_.

本题分数	60
得 分	

二、计算题 (前两题 6 分, 其余 8 分, 共 60 分)

1. 设函数  $f(x,y,z) = xy^2z^3$ , 其中  $z = z(x,y)$  是由方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$  所确定的隐函数, 求  $f_x(1,1,1)$ . (8 分)

2. 计算  $\int_0^1 dy \int_y^1 x^2 e^{x^2} dx$ . (6 分)

3.  $z = f[\varphi(x) - y, \psi(y) + x]$ ,  $f$  具有连续的二阶偏导数,  $\varphi$ ,  $\psi$  可导, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ . (6 分)

4. 在椭球面  $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$  上求一点使函数  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

在该点沿方向  $\vec{l} = \{1, -1, 0\}$  的方向导数最大. (8 分)

5 计算  $\iint_D \min\{x, y\} dx dy$ , 其中  $D: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1$ . (8 分)

6. 求螺旋面  $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = v \end{cases} \quad (u \geq 0, v \in R)$

在点  $M(1, 0, 0)$  处的切平面与法线方程. (8 分)

7. 研究函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点  $(0, 0)$  处是否连续? 偏导数是否存在? 是否可微? 偏导函数是否连续? (8 分)

8. 证明: 设  $z = f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  内有二阶连续偏导数, 且  $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = 0$ ,  $f_{xy}(x, y) \neq 0$ . 证明  $z = f(x, y)$  的最大值和最小值只能在  $D$  的边界上取得. (8 分)

1.  $(-1, 1, -1)$  和  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$     2.  $2edx + (e+2)dy$     3.  $f(0, 0)$     4.  $2\sqrt{6}$

5.  $6i + 3j$  或  $\{6, 3, 0\}$     6. 1    7.  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^2 f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$

8.  $e$     9.  $\frac{\pi}{3}$     10.  $a = -5, b = 2$

1. 解:  $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1 \varphi'(x) + f_2$ , ..... (3 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\varphi'(x)f_{11} + [\varphi'(x)\psi'(y) - 1]f_{12} + \psi'(y)f_{22} \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

2. 解: 交换积分次序..... (2 分)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^1 dx \int_0^x x^2 e^{x^2} dy = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 de^{x^2} \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned} \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

3. 解: 利用隐函数求导公式可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x - 3yz}{2z - 3xy} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{从而 } f_x(x, y, z) = y^2 z^3 + 3xy^2 z^2 \left( -\frac{2x - 3yz}{2z - 3xy} \right) \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$\text{故 } f_x(1, 1, 1) = -2 \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

4. 解: 向量  $\vec{l} = \{1, -1, 0\}$  的方向余弦为  $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

函数  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  在任意一点的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \sqrt{2}(x - y) \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

构造拉格朗日函数  $F(x, y, z, \lambda) = \sqrt{2}(x - y) + \lambda(2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1)$  可得  
拉格朗日函数  $F(x, y, z, \lambda)$  的驻点为  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$  和  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$  ..... (6 分)

5.解:  $\min\{x, y\} = \begin{cases} y, & x > y \\ x, & x \leq y \end{cases}$  ..... (3 分)

则  $\iint_D \min\{x, y\} dx dy = \int_0^1 dy \int_y^3 y dx + \int_0^1 dy \int_0^y x dx = \frac{4}{3}$  ..... (8 分)

6.解: 点  $M(1, 0, 0)$  对应于参数  $v = 0, u = 1$  ..... (1 分)

$$\vec{s}_1 = \{x_u, y_u, z_u\}|_{v=0, u=1} = \{\cos v, \sin v, 0\}|_{v=0, u=1} = \{1, 0, 0\}$$

$$\vec{s}_2 = \{x_v, y_v, z_v\}|_{v=0, u=1} = \{-u \sin v, u \cos v, 1\}|_{v=0, u=1} = \{0, 1, 1\}$$
 ..... (4 分)

切平面的法向量  $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \{1, 0, 0\} \times \{0, 1, 1\} = \{0, -1, 1\}$  ..... (6 分)

切平面方程为  $-y + z = 0$ , 法线方程为  $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$  ..... (8 分)

7.解: (1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ , 故函数在点  $(0, 0)$  处连续... (2 分)

(2)  $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$ , 同理,  $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)} = 0$ , 故偏导

数存在..... (4 分)

(3)  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - \frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)} \Delta y}{\rho} = 0$ , 故函数在点  $(0, 0)$  处可微... (6 分)

$$(4) \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

偏导函数  $\frac{\partial f}{\partial x}$  在点  $(0,0)$  处不连续, 同理, 偏导函数  $\frac{\partial f}{\partial y}$  在点  $(0,0)$  处不

连续. ....(8 分)

8.证明: 由条件  $f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 0$ ,  $f_{xy}(x,y) \neq 0$  易得

对  $D$  内任意点  $(x,y)$ ,  $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$  是不定的, ....(5 分)

所以在  $D$  内不存在极值点, 故  $z = f(x,y)$  的最大值和最小值只能在

$D$  的边界上取得.....(8 分)

南航本科试卷+QQ



截至2022年1月，已有近3年本科试卷科目(后续会不断更新，具体可咨询)：

试卷科目（依据教务处或课表名称）	科目展示院系版
B:变分原理与有限元	全校热门：高数、线代、概率论、毛概、马原、航概、大物、创业基础、计算方法、理力、材力、电工电子技术、工程图学、数字电路、微机原理、复变函数、理工基础化学
C:测试技术、操作系统、测试信号分析与处理、材料力学、创业基础、冲压工艺学	院系热门(仅部分): (航空) 复合材力、飞行器结构力学、互换性、有限元、工数、控制系统工程、变分原理、塑性力学、流体力学、振动理论
D:电机学、电路、电子线路、电工与电子技术、电力工程、电磁场理论、电气测试技术、电力电子、大物、电离辐射探测学	(能动) 燃烧室、工热、互换性、机械设计、现控、自控、工程流体力学
F:复合材料力学、飞行器结构力学、复变函数	(自动化) 电机学、电路、电力电子、计硬、机械设计基础、模电、现控、自控、测试信号分析、电力工程、电气测试技术、功率变换器、数字信号处理、信号、系统可靠性
G:概率论、高数、工程热力学/基础、工程材料学、工数、工程图学、管理学、功率变换器计算机仿真与设计、工程经济学、工程流体力学	(电信) 电子线路、雷达原理、信号、微波技术、通信原理、电磁场、数据结构、数字信号处理、工程经济学、随机信号分析、数理方程、通信电子线路
H:航概、互换性与技术测量、宏观经济学	(机电) 测试技术、工热、机原、机械制造工艺、工材、互换性、控制系统工程、机床数控技术、冲压工艺学、计算机集成、机械制造技术、工程流体力学、机械设计
J:结构力学及有限元、计算方法、计算机组成原理、计算机硬件技术基础、计量经济学、机械原理、机械设计/基础、机械制造工艺与装备、机床数控技术、金属材料、计算机集成与柔性制造、机械制造技术、检测技术与传感原理	(材料) 金属材料、电离辐射探测学、数理方程
K:控制系统工程	(民航) 机械设计基础、模电、信号、运筹、自控、工程经济学、随机信号分析、民航机载电子设备、数据结构与数据库、工程流体力学、检测技术与传感原理、通信电子线路、项目管理、专业英语
L:理论力学、离散数学、雷达原理、流体力学、理工基础化学	(理) 计组、模电、数据库
M:模拟电子技术、马原、毛概、民航机载电子设备与系统、密码学	(经管) 管理学、计量、应统、运筹、操作系统、数据库、宏经、微经、工程经济学、项目管理、专业英语
R:燃烧室原理	(航天) 结构力学及有限元、电路、工材、机原、数字信号处理、通信原理、自控
S:数字电路/与逻辑设计、数据库原理、数据结构/与数据库、数字信号处理、塑性力学、随机信号分析、数理方程	(计科) 操作系统、工数、离散数学、计组、数据库、数据结构、密码学
T:通信原理、通信电子线路	(长空) 工热、工材、工数、计组、机原、数理方程
W:微机原理与应用/接口技术、微波技术、微观经济学	(国教) 计量、应统、运筹、宏经
X:线代、现代控制理论、信号与系统/线性系统、系统可靠性设计分析技术、项目管理	
Y:有限元、应用统计学、运筹学	
Z:自动控制原理、振动理论、专业英语	

资料使用tips

- (1) 名称相近的课程可能会因专业、年份、教学大纲等的不同在考试范围、题型、内容、难度上等出现细微差异，通常相互间都有借鉴价值，具体需自行判断试卷所考内容与自身所学是否大部分一致；
- (2) 试卷名称的数字是学年的后一年份，如22是指21-22学年，分第一(秋季)学期(9月-次年1月)和第二(春季)学期(2月-7月)，一门课程通常会出2套试卷即AB卷分别用于期末和补缓考，二者在范围、难度及题量上保持一致，由教务处随机抽取；
- (3) 图片形式的试卷可能在清晰度上会有所欠缺或者有少量缺漏，绝大部分基本可以辨认，同时缺漏的分值控制在一定限度；
- (4) 关于答案：大学学习不同于中学那样有浩如烟海的资料且基本配有参考答案，大学许多课程的资料不易获得，即使无答案的资源对复习也有较大参考价值，能帮助把握近年命题方向趋势、题型范围难度。试卷里手写形式的答案大多为人工制作，仅供参考，可能会存在某些题目答案正确性有待商榷的情况，欢迎能提供答案或者更正的同学予以分享；
- (5) 教材、课程设计、PPT、非试卷类复习资料、练习册或教材习题答案、网课或英语代做、四六级真题、研究生课程试卷、初复试专业课真题等均不是业务范围；
- (6) 试卷均来自同学分享，除为便利同学使用进行必要的整理外，不对试卷本身做其他操作，有问题可以协商处理，欢迎有近3年试卷资源的予以分享

守住及格底线，努力争取高分！  
祝您考试顺利，取得理想成绩！