第 1 章

第一节

1. (1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 0$；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} = 0$； (4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$；

(5) $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ -1 & x-1 & -1 \\ -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & x-1 & -1 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$

$= x^2(x-3)$

2. (1) $\sigma(31452) = 4$，偶； (2) $\sigma(34152) = 5$，奇；

(3) $\sigma(1\ 3\ 5\ \cdots\ 2n-1\ 2\ 4\ 6\ \cdots\ 2n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$，

当 $n = 4k,\ 4k+1$ 时，偶；当 $n = 4k+2,\ 4k+3$ 时，奇；

(4) $\sigma(2\ 4\ 6\ \cdots\ 2n\ 1\ 3\ 5\ \cdots\ 2n-1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$，

当 $n = 4k,\ 4k+3$ 时，偶；当 $n = 4k+1,\ 4k+2$ 时，奇；

3. $\sigma(132645) = 3$， $\sigma(314256) = 3$，符号为正.

4. $\sigma(13254) = 2$，为使符号为正，$\sigma(i4j31)$ 要为偶数，

因为 $\sigma(54231) = 7$，$\sigma(24531) = 6$，故 $i = 2$，$j = 5$.

5. (1) $D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = (-1)^{\sigma(1324)} abcd = -abcd$.

(2) $$D=\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}=(-1)^{\sigma(n\ 1\ 2\ \cdots\ n-1)}n!=(-1)^{n-1}n!$$

(3) $$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&0&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&0&0\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&0&0\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&1&1\end{vmatrix}=0$$

第二节

1. (1) $$\begin{vmatrix}1+x_1y_1&1+x_1y_2&1+x_1y_3&1+x_1y_4\\1+x_2y_1&1+x_2y_2&1+x_2y_3&1+x_2y_4\\1+x_3y_1&1+x_3y_2&1+x_3y_3&1+x_3y_4\\1+x_4y_1&1+x_4y_2&1+x_4y_3&1+x_4y_4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+x_1y_1&x_1(y_2-y_1)&x_1(y_3-y_1)&1+x_1y_4\\1+x_2y_1&x_2(y_2-y_1)&x_2(y_3-y_1)&1+x_2y_4\\1+x_3y_1&x_3(y_2-y_1)&x_3(y_3-y_1)&1+x_3y_4\\1+x_4y_1&x_4(y_2-y_1)&x_4(y_3-y_1)&1+x_4y_4\end{vmatrix}=0$$

(2) $$\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2&(a+3)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2&(b+3)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2&(c+3)^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2&(d+3)^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a^2&2a+1&4a+4&6a+9\\b^2&2b+1&4b+4&6b+9\\c^2&2c+1&4c+4&6c+9\\d^2&2d+1&4d+4&6d+9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a^2&2a+1&2&6\\b^2&2b+1&2&6\\c^2&2c+1&2&6\\d^2&2d+1&2&6\end{vmatrix}=0$$

(3) $\begin{vmatrix} by+az & bz+ax & bx+ay \\ bx+ay & by+az & bz+ax \\ bz+ax & bx+ay & by+az \end{vmatrix}$

$$=b\begin{vmatrix} y & bz+ax & bx+ay \\ x & by+az & bz+ax \\ z & bx+ay & by+az \end{vmatrix}+a\begin{vmatrix} z & bz+ax & bx+ay \\ y & by+az & bz+ax \\ x & bx+ay & by+az \end{vmatrix}$$

$$=b^2\begin{vmatrix} y & z & bx+ay \\ x & y & bz+ax \\ z & x & by+az \end{vmatrix}+ba\begin{vmatrix} y & x & bx+ay \\ x & z & bz+ax \\ z & y & by+az \end{vmatrix}+ab\begin{vmatrix} z & z & bx+ay \\ y & y & bz+ax \\ x & x & by+az \end{vmatrix}+a^2\begin{vmatrix} z & x & bx+ay \\ y & z & bz+ax \\ x & y & by+az \end{vmatrix}$$

$$=b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^2a\begin{vmatrix} y & z & y \\ x & y & x \\ z & x & z \end{vmatrix}+b^2a\begin{vmatrix} y & x & x \\ x & z & z \\ z & y & y \end{vmatrix}+ba^2\begin{vmatrix} y & x & y \\ x & z & x \\ z & y & z \end{vmatrix}$$

$$+ab^2\begin{vmatrix} z & z & x \\ y & y & z \\ x & x & y \end{vmatrix}+a^2b\begin{vmatrix} z & z & y \\ y & y & x \\ x & x & z \end{vmatrix}+a^2b\begin{vmatrix} z & x & x \\ y & z & z \\ x & y & y \end{vmatrix}+a^3\begin{vmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

2. 已知 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a,$

(1) $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix}=3a;$ (2) $D_2=\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix}=27a;$

(3) $D_3=\begin{vmatrix} 3a_{11} & a_{13}-2a_{11} & a_{12} \\ 3a_{21} & a_{23}-2a_{21} & a_{22} \\ 3a_{31} & a_{33}-2a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-3a.$

(4) $$\begin{vmatrix} a-3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & a-3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-3 & 0 & a-3 & 0 \\ 0 & a-3 & 0 & a-3 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a-3 \end{vmatrix}$$

$$=(a-3)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a-3 \end{vmatrix} = (a-3)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & a-3 \end{vmatrix}$$

$$=(a-3)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a-3 & -2 \\ -2 & a-3 \end{vmatrix}$$

$$= (a-3)^2\,(a-1)(a-5)$$

3. 求以下行列式的值.

(1) $$D=\begin{vmatrix}1&2&\cdots&2&2\\2&2&\cdots&2&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\2&2&\cdots&n-1&2\\2&2&\cdots&2&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2&\cdots&2&2\\2&2&\cdots&2&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\2&2&\cdots&n-1&2\\2&2&\cdots&2&n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&2&\cdots&2&2\\0&2&\cdots&2&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&2&\cdots&n-1&2\\0&2&\cdots&2&n\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}2&2&\cdots&2&2\\2&3&\cdots&2&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\2&2&\cdots&n-1&2\\2&2&\cdots&2&n\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&2&\cdots&2&2\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n-3&0\\0&0&\cdots&0&n-2\end{vmatrix}=-2(n-2)!$$

(2)(3)教材例题.

(4) $$D=\begin{vmatrix}a_1+x_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2+x_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n+x_n\end{vmatrix},\ 其中\ x_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

解：$$D=\begin{vmatrix}a_1+x_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2+x_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n+x_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^n a_i+x_1&a_2&\cdots&a_n\\\sum_{i=1}^n a_i+x_2&a_2+x_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\sum_{i=1}^n a_i+x_n&a_2&\cdots&a_n+x_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\begin{vmatrix}1&a_2&\cdots&a_n\\1&a_2+x_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_2&\cdots&a_n+x_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1&a_2&\cdots&a_n\\x_2&a_2+x_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_n&a_2&\cdots&a_n+x_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & x_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ x_2-x_1 & x_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n-x_1 & 0 & \cdots & x_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\cdot\prod_{i=2}^{n}x_i+\left(x_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{x_i-x_1}{x_i}a_i\right)\cdot\prod_{i=2}^{n}x_i$$

$$=\prod_{i=2}^{n}x_i\cdot\left(x_1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{x_1}{x_i}a_i\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}x_i\cdot\left(1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{x_i}\right)$$

第三节

1. (1) $$D=\begin{vmatrix}a & b & & & \\ & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & b\\ b & & & & a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}a & b & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & b\\ & & & a\end{vmatrix}+b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}b & & & \\ a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & b\end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n$$

(2) $$D_{2n}=\begin{vmatrix}a & & & & & b\\ & a & & & b & \\ & & \ddots & \iddots & & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & & \iddots & \ddots & & \\ & b & & & a & \\ b & & & & & a\end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & b & a & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ b & & & & & a & 0 \\ 0 & & & & & 0 & a \end{vmatrix}+b(-1)^{2n+1}\begin{vmatrix} 0 & & & & & 0 & b \\ a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & b & a & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ b & & & & & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$=a^2D_{2n-2}+b^2(-1)^{2n+1}(-1)^{2n-1+1}D_{2n-2}$$

$$=\left(a^2-b^2\right)D_{2n-2}=\cdots\left(a^2-b^2\right)^{n-1}D_2$$

又因为$D_2=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=a^2-b^2$，$\Rightarrow D_{2n}=\left(a^2-b^2\right)^n$

(3) $$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \ldots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n+1}\left(x_i-x_j\right)=(-1)^n n!(-1)^{n-1}(n-1)!\cdots(-1)1!$$

$$=n!(n-1)!\cdots1!(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\prod_{i=0}^{n-1}(n-i)!(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$(4)\ D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \cdots & n^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & n & n & \cdots & n \\ 2n & 2n & 2n & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \cdots & n^2 \end{vmatrix}=0,\ 当\ n\geq 3.$$

当$n=2$时, $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2;$

当$n=1$时, $D=1.$

$$(5)\ D_k=\begin{vmatrix} x & -1 & & & & \\ & x & -1 & & & \\ & & x & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & x & -1 \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

解：按第一列展开：

$$\begin{aligned} D_k &= x\cdot D_{k-1}+a_k(-1)^{k+1}(-1)^{k-1}=xD_{k-1}+a_k \\ &= x\left(xD_{k-2}+a_{k-1}\right)+a_k=x^2D_{k-2}+xa_{k-1}+a_k=\cdots= \\ &= x^{k-2}D_2+x^{k-3}a_3+\cdots+xa_{k-1}+a_k \\ &= x^k+\sum_{i=1}^{k}a_i x^{k-i},\ \left(k\geq 2\right) \end{aligned}$$

其中$D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^2+xa_1+a_2.$

(6) $D=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & \\ x & 1+x^2 & x & & \\ & x & 1+x^2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & x \\ & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$

$D_n=(1+x^2)D_{n-1}-x^2D_{n-2}$,

$\Rightarrow\ D_n-D_{n-1}=x^2(D_{n-1}-D_{n-2})=\cdots=x^{2(n-3)}(D_3-D_2)$,

其中$D_3=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \\ x & 1+x^2 & x \\ & x & 1+x^2 \end{vmatrix}=(1+x^2)^3-2x^2(1+x^2)$,

$D_2=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix}=(1+x^2)^2-x^2$,

$\Rightarrow\ D_n-D_{n-1}=x^{2n}$,

$$\begin{aligned}\Rightarrow D_n&=D_{n-1}+x^{2n}=D_{n-2}+x^{2n-2}+x^{2n}\\ &=\cdots=x^{2n}+x^{2n-2}+\cdots+x^6+D_2\\ &=\sum_{k=0}^{n}x^{2k}.\ (n\geq 2)\end{aligned}$$

2. 证明略.

第四节

1. (1)例题.

(2) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ ax+by+cz=a, \\ bcx+cay+abz=a^2, \end{cases}$ $\qquad a,b,c$互不相同.

解：$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\bc&ca&ab\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)\neq 0,$

故由Cramer法则存在唯一解，则

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&ca&ab\end{vmatrix}=a(b-c)(b+c-2a),\ \Rightarrow\ x=\frac{a(2a-b-c)}{(c-a)(b-a)},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&a&c\\bc&a^2&ab\end{vmatrix}=(a-c)(a^2-bc),\ \Rightarrow\ y=\frac{bc-a^2}{(c-b)(b-a)},$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&a\\bc&ca&a^2\end{vmatrix}=(b-a)(a^2-bc),\ \Rightarrow\ z=\frac{a^2-bc}{(c-a)(c-b)}.$$

2. $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+ax_4=0,\\x_1+2x_2+x_3+ax_4=0,\\x_1+x_2-3x_3+x_4=0,\\x_1+x_2+ax_3+bx_4=0,\end{cases}$

解：当系数行列式$D\neq 0$时，只有全零解.

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&a\\1&2&1&a\\1&1&-3&1\\1&1&a&b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&a\\0&1&0&0\\0&0&-4&1-a\\0&0&a-1&b-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4&1-a\\a-1&b-a\end{vmatrix}$$

$=(a-1)^2-4(b-a)$

$=(a+1)^2-4b\neq 0.$

第五节

1．（1）无解.

（2）$x_1=-8,\ x_2=3,\ x_3=6,\ x_4=0.$

（3）选取 x_3 和 x_4 为自由变量，则

$$x_3=a\,,\ x_4=b\,,\ x_1=\frac{1}{14}(-13a+b)\,,\ x_2=\frac{1}{14}(5a+5b)\,.$$

（4）选取 x_3 和 x_4 为自由变量，则

$$x_3=a\,,\ x_4=b\,,\ x_2=3a+3b-2\,,\ x_1=-2a-2b+3\,.$$

2．当 $a=0$，$b=2$ 时，线性方程组有解，转化为：

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \end{cases}$ 取 $x_3=a$，$x_4=b$，$x_5=c$ 为自由变量，

解得 $x_3=a$， $x_4=b$， $x_5=c$，

$$x_2=3-2a-2b-6c\,,\quad x_1=a+b+5c-2\,.$$

3．当 $\lambda\neq 0$ 和 1 时，无解.

当 $\lambda=0$ 或 1 时，有解.

取 $x_3=a$，$x_4=b$，则 $x_2=\lambda+b-2a$， $x_1=4a-4b-\lambda$.

第 2 章

1. $A=\begin{bmatrix}1&3\\2&-1\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}3&0\\1&2\end{bmatrix}$，

计算得$2A-3B=\begin{bmatrix}-7&6\\1&-8\end{bmatrix}$， $AB-BA=\begin{bmatrix}3&-3\\0&-3\end{bmatrix}$， $A^2+B^2=\begin{bmatrix}16&0\\5&11\end{bmatrix}$.

2. $AB-BA=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&0&0\\4&-4&-2\end{bmatrix}$， $(AB)^T=\begin{bmatrix}6&6&8\\2&1&-1\\-2&0&2\end{bmatrix}$， $A^TB^T=\begin{bmatrix}4&4&4\\0&1&3\\0&0&4\end{bmatrix}$.

3. (1) $\begin{bmatrix}3&-2\\0&1\\2&4\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&5&1\\0&-1&-2\\4&-2&-10\\-2&-1&1\end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&1&0\\1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&-1\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3\\-3&-7\\8&15\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}2&3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=-2$;

(4) $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&-1\\-2&-3&1\\2&3&-1\end{bmatrix}$;

(5) $\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1a_{11}&\lambda_1a_{12}&\lambda_1a_{13}\\\lambda_2a_{21}&\lambda_2a_{22}&\lambda_2a_{23}\\\lambda_3a_{31}&\lambda_3a_{32}&\lambda_3a_{33}\end{bmatrix}$;

(6) $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1a_{11}&\lambda_2a_{12}&\lambda_3a_{13}\\\lambda_1a_{21}&\lambda_2a_{22}&\lambda_3a_{23}\\\lambda_1a_{31}&\lambda_2a_{32}&\lambda_3a_{33}\\\lambda_1a_{41}&\lambda_2a_{42}&\lambda_3a_{43}\end{bmatrix}$;

(7) $\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_1(a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3)$

$+x_2(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3)+x_3(a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)$.

4. 解：因为A与B可交换，所以$AB=BA$，又因为A是对角矩阵，所以

可得$\begin{bmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1n} \\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n b_{n1} & \lambda_n b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \cdots & \lambda_n b_{1n} \\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_n b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 b_{n1} & \lambda_2 b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{bmatrix}$，其中主对角线元素都相等，对于非主对角元，应有$(\lambda_i-\lambda_j)b_{ij}=0, i\neq j$又因为$\lambda_i \neq \lambda_j$，所以只能有$b_{ij}=0$，当$i\neq j$时。即$B$也是对角矩阵。

5. (1) $f(A)=\begin{bmatrix} 15 & -16 \\ -8 & 23 \end{bmatrix}$;

(2) $f(A)=\begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 6 & -1 & 10 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(3) $f(A)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

6. $(A+A^T)^T=A^T+A=A+A^T$,

$(A-A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$.

7. $(C^TAC)^T=C^TA^TC=C^TAC$

8. 必要性. 若AB对称，则$AB=(AB)^T=B^TA^T=BA$，即AB可交换.

充分性. 若AB可交换，即$AB=BA$，则$AB=BA=B^TA^T=(AB)^T$，即AB对称.

7. $(C^T AC)^T = C^T A^T C = C^T AC$

8. 必要性. 若 AB 对称，则 $AB=(AB)^T = B^T A^T = BA$，即 AB 可交换.

充分性. 若 AB 可交换，即 $AB=BA$，则 $AB=BA=B^T A^T=(AB)^T$，

即 AB 对称.

第 3 节

1. (1) $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}=-\dfrac{1}{12}\begin{bmatrix}-3 & & \\ & 12 & \\ & & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/4 & & \\ & -1 & \\ & & 1/3\end{bmatrix}$;

(2) $|A|=5+1=6$, $A^*=\begin{bmatrix}5 & 1 & 1\\ 13 & 5 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$,所以 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}=\begin{bmatrix}5/6 & 1/6 & 1/6\\ 13/6 & 5/6 & -1/6\\ -1/6 & 1/6 & 1/6\end{bmatrix}$.

3. (1) 略.

(2) 因为 $Ax=b$，所以 $x=A^{-1}b=\begin{bmatrix}-3\\ 22\\ -31\end{bmatrix}$.

4. (1) 因为 $A^2+3A=A(A+3E)=-2E$，则 $A\left(-\dfrac{1}{2}A-\dfrac{3}{2}E\right)=E$，所以

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}E.$$

(2) 因为 $A^2-E-2A-2E=E$，则

$(A+E)(A-E)-2(A+E)=(A+E)(A-3E)=E$，

所以 $A+E$ 和 $A-3E$ 均可逆，且互逆.

6. 证：$A(A-E)=0$，两边取行列式可以得到 $|A|=0$，或者 $|A-E|=0$，

此时一定有 $|A|\neq 0$，则 A 可逆，故原式两边左乘 A^{-1} 即得 $A=E$.

第 4 节

1. (1) 因为$A=\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}$，且$A_1=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$，

可知A_1和A_2都可逆，

且$A_1^{-1}=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，$A_2^{-1}=-\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$，则$A$可逆，

且$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & \\ & A_2^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -4 & & \\ -1 & 1 & & \\ & & -5 & 4 \\ & & 4 & -3 \end{bmatrix}$.

(2) 因为$A=\begin{bmatrix} B & \\ C & D \end{bmatrix}$，其中$B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$，

且$B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$，$D^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，则$A$可逆且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5/3 & 16/3 & -3 & -4 \\ 2/3 & -4/3 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

2. 因为$\begin{bmatrix} O & A_1 & E & O \\ A_2 & O & O & E \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} O & E & A_1^{-1} & O \\ E & O & O & A_2^{-1} \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} E & O & O & A_2^{-1} \\ O & E & A_1^{-1} & O \end{bmatrix}$，

所以$A^{-1}=\begin{bmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{bmatrix}$.

3. 记 $A=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$，则 $A^T=[\alpha_1{}^T,\alpha_2{}^T,\cdots,\alpha_s{}^T]$，则由 $(AB)^T=B^TA^T=O$, 得

$B^T[\alpha_1{}^T,\alpha_2{}^T,\cdots\alpha_s{}^T]=[B^T\alpha_1{}^T,B^T\alpha_2{}^T,\cdots,B^T\alpha_s{}^T]=O$,

即 $B^T\alpha_1{}^T$=$B^T\alpha_2{}^T$=$\cdots$=$B^T\alpha_s{}^T$=0，故 $\alpha_1{}^T$，$\alpha_2{}^T$,$\cdots$，$\alpha_s{}^T$ 都是 $B^Tx=0$ 的解.

4. 令$H=\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$，取$P=\begin{bmatrix} E & E \\ & E \end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix} E & -E \\ & E \end{bmatrix}$，则有

$PHQ=\begin{bmatrix} A+B & \\ B & A-B \end{bmatrix}$，又因为$|P|=|Q|=1$，

故$|H|=|PHQ|=|A+B||A-B|$.

第 5 节

1. (1) $[A|E]=\begin{bmatrix}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1&0\\2&2&3&1&0&0\\-1&2&1&0&0&1\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&4&3&1&-2&0\\0&1&1&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&4&3&1&-2&0\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-4r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&-1&1&-6&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_3}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&1&-1&6&4\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{bmatrix}$,

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}$.

(2) $[A|E]=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&0\\1&-1&1&0&0&0&1&0\\1&-1&-1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&-1&1&0&-1&0&1&0\\0&-1&-1&1&-1&0&0&1\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&-2&1&1&0\\0&0&-1&1&-2&1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&-2&1&1&0\\0&0&0&1&-4&2&1&1\end{bmatrix}$,

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-2&1&1&0\\-4&2&1&1\end{bmatrix}$.

2. 解:因为 $AX = B + X$，则 $(A - E_3)X = B$， $X = (A - E_3)^{-1}B$，

$$\begin{bmatrix} A - E_3 & \vdots B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

则 $X = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ -1 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

或者 $(A - E_3)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，所以

$$X = (A - E_3)^{-1}B = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ -1 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

第 6 节

1. (1) $rank(A) = 2$, (2) $rank(A) = 3$

2. (1) 若 $AB = O$，则由推论 2.4 知 $rank(A) + rank(B) \le s$，又已知 $rank(B) = s$，则 $rank(A) \le 0$，则只能 $rank(A) = 0$，因此只能 $A = O$.

(2) 若 $AB=B$，则 $(A-E)B=O$，同上推出 $A-E=O$，故 $A=E$.

3. 必要性.若 $AB=O$，则由推论 2.4 知 $rank(A)+rank(B)\le n$，又因为 B 为非零矩阵，则一定有 $rank(B)>0$，故 $rank(A)<n$.

充分性. 若 $rank(A)<n$，如果存在一个 $n\times m$ 矩阵 B，使得 $AB=O$，则有 $rank(A)+rank(B)\le n$，则一定 $rank(B)>0$，故 B 为非零矩阵.

4. (1) 若 $rank(A)=n$，$|A|\ne 0$，则 $|A^*|\ne 0$，故 $rank(A^*)=n$；

若 $rank(A)=n-1$，由于 $AA^*=|A|E=0$，则 $rank(A)+rank(A^*)\le n$，故 $rank(A^*)\le n-rank(A)=n-(n-1)=1$.另一方面，$rank(A)=n-1$，则存在 $n-1$ 阶子式不为 0，则 $rank(A^*)\ge 1$，故 $rank(A^*)=1$.

若 $rank(A)<n-1$，则 A 的所有 $n-1$ 阶子式都为 0，故 $rank(A^*)=0$.

5. 已知 $A(A-E)=O$，其中 A 和 $A-E$ 都是 n 方阵，则

由推论 2.4 知 $rank(A)+rank(A-E)\le n$.另一方面，

$$rank(A)+rank(A-E)=rank(A)+rank(E-A)\ge rank(A+E-A)$$

$=rank(E)=n$，则得到 $rank(A)+rank(A-E)=n$.

6. 已知 $(A+E)(A-E)=O$，其中 $A+E$ 和 $A-E$ 都是 n 方阵，则

由推论 2.4 知 $rank(A+E)+rank(A-E)\le n$.另一方面，

$$rank(A+E)+rank(A-E)=rank(A+E)+rank(E-A)\ge rank(A+E+E-A)$$

$=rank(2E)=n$，则得到 $rank(A+E)+rank(A-E)=n$.

第 3 章

1. $\gamma = 3\alpha - 4\beta = (30, -10, -20, -16)$.

第 2 节

1. （1）能，唯一一种表示：$\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3$.

   （2）不能.

2. 唯一表达式为：$\beta = (b_1 - b_2)\alpha_1 + (b_2 - b_3)\alpha_2 + (b_3 - b_4)\alpha_3 + b_4\alpha_4$.

3. （1）线性无关.

   （2）线性相关.

   （3）线性相关，因为 4 个向量，每个向量维数 3 维.

   （4）若 a，b，c 均不相等，线性无关，否则线性相关.

4. （1）线性无关（2）线性相关.

5. 解：设 $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_4) + k_4(\alpha_4 + \alpha_1) = 0$，

   整理可得 $(k_1 + k_4)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 + (k_3 + k_4)\alpha_4 = 0$，因为已知

   $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性无关的，故有 $\begin{cases} k_1 + k_4 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0, \\ k_3 + k_4 = 0, \end{cases}$

   系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $r(A) = 3$.

   故 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 是线性相关的.

6. 证：因为任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关，故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$ 线性相关，存在不全为零的 $n+1$ 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}$，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n + k_{n+1}\beta = 0$.

   若 $k_{n+1} = 0$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关，矛盾. 所以 $k_{n+1} \neq 0$，β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出. 表达式唯一，类似于定理 3.5 的证明.

7. 证：（反证法即得）. 假设 k_1,k_2,k_3,k_4 不全为零，其中某个为零，其他的不为零. 不妨假设 $k_1=0$，则 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$，其中 k_2,k_3,k_4 均不为零，则可推出 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是线性相关的，这与已知任意三个向量都线性无关矛盾，故假设不成立. 由假设的任意性可知 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$，其中 k_1,k_2,k_3,k_4 全不为零.

第 3 节

1. （1） $A=\begin{bmatrix}1&1&3\\2&2&6\\0&3&0\\0&4&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，故 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，

$\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3$

故一个极大线性无关组是 α_1，α_2.

(2) $A=\begin{bmatrix}2&1&3&5\\1&2&0&1\\-3&-1&-5&-8\\1&4&-2&-1\\4&4&5&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&-3&3&3\\0&5&-5&-5\\0&2&-2&-2\\0&-4&5&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&-1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，

故 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，一个极大线性无关组是 α_1，α_2，α_3.

2. 证：由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性相关，故一定存在 k_1,k_2,k_3 不全为零，

使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4=0$，则一定有 $k_3\neq 0$，设 $\alpha_4=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2$，

类似的，$\alpha_4=b_1\alpha_1+b_2\alpha_3$，$\alpha_4=c_1\alpha_2+c_2\alpha_3$，

由这几个等式可推出所以系数均为 0，故 $\alpha_4=0$.

3. 证：因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r_1，则其有一个极大线性无关组，设为 $c_1,c_2,\cdots,c_{r_1}$. 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的秩为 r_2，则其有一个极大线性无关组，设

为 $d_1,d_2,\cdots,d_{r_2}$. 则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$ 可以由 $c_1,c_2,\cdots,c_{r_1}$ 和 $d_1,d_2,\cdots,d_{r_2}$ 线性表出，故 $r_3\le r\left(c_1,c_2,\cdots,c_{r_1},d_1,d_2,\cdots,d_{r_2}\right)\le r_1+r_2$.

4. （例题）$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$，且 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 为其中 r 个线性无关的向量. 设 α_k 是向量组中任意一个向量，则 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\alpha_k$ 线性相关，否则向量组的秩会大于 r. 所以，由定理 3.5，α_k 可由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出，故 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 为向量组的一个极大线性无关组.

第 4 节

1. （1）$A=\begin{bmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 于是得阶梯形方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2+5x_3-x_4=0,\\ 2x_2-7x_3+4x_4=0,\end{cases}$$

方程组的一般解为: $X=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}x_3-x_4\\ \frac{7}{2}x_3-2x_4\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$.

可得方程组的一个基础解系为：

$\eta_1=\left[-\frac{3}{2},\frac{7}{2},1,0\right]^T$，$\eta_2=[-1,-2,0,1]^T$.

通解为 $X=k_1\eta_1+k_2\eta_2$，k_1，k_2 为常数.

（2）$A=\begin{bmatrix}-3&9&-3&6&3\\1&-3&1&-2&-1\\2&-6&2&-4&-2\\5&-15&5&-10&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&1&-2&-1\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$,

于是得阶梯形方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - x_5 = 0, \end{cases}$$

方程组的一般解为: $X = \begin{bmatrix} 3x_2 - x_3 + 2x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix},.$

可得方程组的一个基础解系为:

$\eta_1 = \begin{bmatrix} 3, & 1, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T$，$\eta_2 = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T$，$\eta_3 = \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0, & 1, & 0 \end{bmatrix}^T$

通解为 $X = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$， k_1，k_2，k_3 为常数.

2. 证：先证 $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 + \eta_1$ 线性无关. 设存在 k_1, k_2, k_3，使得

$k_1(\eta_1 + \eta_2) + k_2(\eta_2 + \eta_3) + k_3(\eta_3 + \eta_1) = 0$，即

$(k_1 + k_3)\eta_1 + (k_1 + k_2)\eta_2 + (k_2 + k_3)\eta_3 = 0$，又因为 η_1, η_2, η_3 线性无关，

则 $\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0, \end{cases}$ 可得唯一解 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$，

即 $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 + \eta_1$ 线性无关.

由于 $X = k_1(\eta_1 + \eta_2) + k_2(\eta_2 + \eta_3) + k_3(\eta_3 + \eta_1)$

$\qquad = (k_1 + k_3)\eta_1 + (k_1 + k_2)\eta_2 + (k_2 + k_3)\eta_3$，

可知任意一个向量都可由 $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 + \eta_1$ 线性表出，

即 $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 + \eta_1$ 也是 $AX = O$ 的一个基础解系.

第 5 节

1.（1） $[A\beta]=\begin{bmatrix}1&-5&2&-3&11\\-3&1&-4&2&-5\\-1&-9&0&-1&17\\5&3&6&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-5&2&-3&11\\0&-2&-1&1&3\\0&0&9&-14&7\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$,

于是得阶梯形方程组： $\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11,\\ -2x_2-x_3+x_4=3,\\ 9x_3-14x_4=7,\end{cases}$

取 x_4 为自由变量，可得方程组一般解为：

$X=\left[-\frac{3}{2}x_4,-\frac{17}{9}-\frac{5}{18}x_4,\frac{1}{9}(7+14x_4),x_4\right]^T$，

可得一个特解为： $\eta_0=\left[0,-\frac{17}{9},\frac{7}{9},0\right]^T$，

一个基础解系为： $\eta_1=\left[-\frac{3}{2},-\frac{5}{18},\frac{14}{9},1\right]^T$.

则方程组的通解为： $X=\eta_0+k_1\eta_1$，其中 k_1 为常数.

（2） $[A\beta]=\begin{bmatrix}2&1&-1&3&3\\5&-1&0&-10&4\\-3&2&-1&-2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&3&-2&1&2\\0&7&-5&5&7\\0&0&0&-15&0\end{bmatrix}$,

于是得阶梯形方程组： $\begin{cases}-x_1+3x_2-2x_3+x_4=2,\\ 7x_2-5x_3+5x_4=7,\\ -15x_4=0,\end{cases}$

取 x_3 为自由变量，可得方程组一般解为：

$X=\left[1+\frac{1}{7}x_3,\ 1+\frac{5}{7}x_3,\ x_3,\ 0\right]^T$，

可得一个特解为： $\eta_0=[1,\ 1,\ 0,\ 0]^T$，

一个基础解系为： $\eta_1=\left[\frac{1}{7},\ \frac{5}{7}\ ,1,\ 0\right]^T$.

则方程组的通解为： $X=\eta_0+k_1\eta_1$，其中 k_1 为常数.

2. 解：自由变量的个数=$4-r(A)=2$,

$\eta_1=\alpha_2-\alpha_1=\left[1,\ 2,\ 0,\ 1\right]^T$，$\eta_2=\alpha_2-\alpha_3=\left[3,\ 3,\ 1,\ 2\right]^T$，

显然η_1和η_2线性无关，故齐次线性方程组的一个基础解系为η_1，η_2.

取特解$\eta_0=\alpha_1=\left[3,\ 0,\ 1,\ 1\right]^T$，则非齐次线性方程组的通解为

$$x=\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2$$

$$=\begin{bmatrix}3\\0\\1\\1\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}3\\3\\1\\2\end{bmatrix}.$$

3. 解: $\left[A\beta\right]=\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\2&3&-2&5&\lambda\\1&2&0&2&\lambda^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&-1&\lambda\\0&0&0&0&\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}$,

当$\lambda^2-\lambda=0$，即$\lambda=0$或$\lambda=1$时有解.

当$\lambda^2-\lambda\neq0$，即$\lambda\neq0$且$\lambda\neq1$时无解.

若有解，得阶梯形方程组：$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\ x_2+2x_3-x_4=\lambda,\end{cases}$

取x_3，x_4为自由变量，则方程组一般解为：

$$X=\left[-\lambda+4x_3-4x_4,\lambda-2x_3+x_4,x_3,x_4\right]^T,$$

可得一个特解为：$\eta_0=\left[-\lambda,\lambda,0,0\right]^T$，

一个基础解系为：$\eta_1=\left[4,-2,1,0\right]^T$，$\eta_2=\left[-4,1,0,1\right]^T$.

则方程组的通解为：

$X=\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2$，其中$k_1$，$k_2$为常数，$\lambda=0$或$\lambda=1$.

4. 证法 1：

单位矩阵E的每一列都是$AX=O$的解，故$A=AE=O$.

证法 2：

假设$A\neq O$，则$r(A)=r\neq0$，所以$AX=O$只有$n-r$个线性无关的解，

显然矛盾.

第 4 章 第 1 节

1.（1）不是；（2）是，零元素是 1，a 的负元素是 $\dfrac{1}{a}$.

2.（1）是；（2）是；（3）否；（4）否.

第 2 节

1. 证：设 $k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4=O$，则有

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3-k_4=0, \\ k_1-k_2+k_3+k_4=0, \\ k_1+k_2-k_3+k_4=0, \\ k_1-k_2-k_3-k_4=0, \end{cases}$$

系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，则 $r(A)=4$，

故 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$，即 A_1,A_2,A_3,A_4 线性无关.

又对任意一个 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，若 $k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4=A$，

则可得 $\begin{cases} k_1+k_2+k_3-k_4=a_{11}, \\ k_1-k_2+k_3+k_4=a_{12}, \\ k_1+k_2-k_3+k_4=a_{21}, \\ k_1-k_2-k_3-k_4=a_{22}, \end{cases}$

解得唯一的一组解为：$\begin{cases} k_1=\dfrac{1}{4}(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}), \\ k_2=\dfrac{1}{4}(a_{11}-a_{12}+a_{21}-a_{22}), \\ k_3=\dfrac{1}{4}(a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22}), \\ k_4=\dfrac{1}{4}(-a_{11}+a_{12}+a_{21}-a_{22}), \end{cases}$

即任意一个 A 都可以由这组矩阵线性表出，且表达式唯一，则 $\dim(R^{2\times 2})=4$，

且 A_1,A_2,A_3,A_4 构成 $R^{2\times 2}$ 的一组基.

2．解：令 $A_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},A_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$，则由 $k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3=O$ 可解得 $k_1=k_2=k_3=0$，即 A_1,A_2,A_3 线性无关．又对任意一个 $A\in V$，

$A=\begin{bmatrix}a&a+b\\c&c\end{bmatrix}$，若 $k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3=A$，可解得唯一一组解为：

$k_1=a,k_2=b,k_3=c$，即任意一个 A 都可以由 A_1,A_2,A_3 线性表出，且表达式唯一，

则 $\dim(V)=3$，且 A_1,A_2,A_3 构成 V 的一组基.

3．解：过渡矩阵为：$C=\begin{bmatrix}2&0&5\\1&3&3\\-1&-1&-3\end{bmatrix}$，若有一非零向量 $w=\left[x,y,z\right]^T$，满足 $w=Cw$，

则可得方程组 $\begin{cases}x=2x+5z,\\y=x+3y+3z,\\z=-x-y-3z,\end{cases}$ 对系数矩阵经初等行变换后得阶梯形方程组

$\begin{cases}x+5z=0,\\y-z=0,\end{cases}$ 可解得一般解为：

$w=[-5c,c,c]$，c 为任一非零常数.

第 3 节

1．解：（1）$|\alpha_1|=\sqrt{7}$，$|\alpha_2|=\sqrt{15}$，$|\alpha_3|=\sqrt{10}$．

因为 $\cos\theta=\dfrac{(\alpha_2,\alpha_3)}{|\alpha_2||\alpha_3|}=-\dfrac{3\sqrt{6}}{10}$，故 $\theta=\arccos\left(-\dfrac{3\sqrt{6}}{10}\right)$.

（2）设与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都正交的向量为 $\beta=\left(b_1,b_2,b_3,b_4\right)$，则可得

$\begin{cases}b_1+2b_2-b_3+b_4=0,\\2b_1+3b_2+b_3-b_4=0,\\-b_1-b_2-2b_3+3b_4=0,\end{cases}$ 经过初等行变换可得阶梯形矩阵：

$\begin{cases}b_1+2b_2-b_3+b_4=0,\\-b_2+3b_3-3b_4=0,\end{cases}$ 解得一般解为 $\beta=\left(-5b_3+5b_4,3b_3-3b_4,b_3,b_4\right)^T$，其中

b_3,b_4 为自由变量.

2．解：$\beta_1=\alpha_1=\left(1,\ 0,\ 1,\ 1\right)^T$，$\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1,\ 0,\ 1,\ 1\right)^T$．

$\beta_2=\alpha_2-\left(\alpha_2,\gamma_1\right)\gamma_1=\left(-\dfrac{1}{3},\ 1,\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)^T$，$\gamma_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}\left(-1,\ 3,\ 2,\ -1\right)^T$．

$\beta_3=\alpha_3-\left(\alpha_3,\gamma_1\right)\gamma_1-\left(\alpha_3,\gamma_2\right)\gamma_2=\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{1}{5},\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)^T$，

$\gamma_3=\dfrac{\beta_3}{|\beta_3|}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}\left(-3,\ -1,\ 1,\ 2\right)^T$．

3. 解：$A=\begin{bmatrix}2&1&-1&1\\1&1&-1&-1\\1&2&2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\0&-1&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,

取 x_3，x_4 为自由变量，解得$x=\begin{bmatrix}-2x_4\\x_3+3x_4\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$,

一个基础解系为$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$,　$\alpha_2=\begin{bmatrix}-2\\3\\0\\1\end{bmatrix}$，将它们标准正交化，

$\beta_1=\alpha_1$，$\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[0,\ 1,\ 1,\ 0\right]^T$，

$\beta_2=\begin{bmatrix}-2\\3\\0\\1\end{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\\dfrac{3}{2}\\-\dfrac{3}{2}\\1\end{bmatrix}$, $\left|\beta_2\right|=\sqrt{\dfrac{19}{2}}$,

$\gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt{38}}\left[-4,\ 3,\ -3,\ 2\right]^T$.

4．证：（1）$(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=B^TEB=B^TB=E$.

（2）A 正交，则$|A|=\pm1$，$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}=\pm A^*$，

则$(A^*)^TA^*=(A^{-1})^TA^{-1}=(AA^T)^{-1}=E^{-1}=E$.

5．解：$Q=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}7a & -3 & 2\\ 7b & 7c & -3\\ -3 & 2 & -6\end{bmatrix}$，通过$Q^TQ=E$ 得

$\begin{cases}-21a+49bc-6=0,\\ 14a-21b+18=0,\\ -6-21c-12=0,\end{cases}$　　解得 $a=-\dfrac{6}{7},b=\dfrac{2}{7},c=-\dfrac{6}{7}$.

6．证：因为$Q^TQ=E$，故对任意 $X\in R^n$，有

$|QX|^2=(QX,QX)=(QX)^T(QX)=X^TQ^TQX=X^TX=|X|^2$，则一定有

$|QX|=|X|$.

第 4 节

1. 解：（1）$\mathscr{A}\varepsilon_1=(1,1,0)^T=\varepsilon_1+\varepsilon_2$，

$\mathscr{A}\varepsilon_2=(1,-1,0)^T=\varepsilon_1-\varepsilon_2$，

$\mathscr{A}\varepsilon_3=(0,0,1)^T=\varepsilon_3$，

所求矩阵为：$D=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

(2) $\mathscr{A}\eta_1=(1,1,0)^T=\eta_2$，

$\mathscr{A}\eta_2=(2,0,0)^T=2\eta_1$，

$\mathscr{A}\eta_3=(2,0,1)^T=2\eta_1-\eta_2+\eta_3$，

故所求的矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 解：（1）$\mathscr{A}\varepsilon_1=(2,3,5)^T=2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+5\varepsilon_3$,

$$\mathscr{A}\varepsilon_2=\mathscr{A}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\mathscr{A}\varepsilon_1=(-1,-3,-5)^T=-\varepsilon_1-3\varepsilon_2-5\varepsilon_3,$$

$$\mathscr{A}\varepsilon_3=\mathscr{A}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\mathscr{A}\varepsilon_2-\mathscr{A}\varepsilon_1=(-1,1,-1)^T=-\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3,$$

故所求的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

（2）已知$\alpha=2\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3$，则

$$y=AX=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\10\\14\end{pmatrix}.$$

第 5 章 第 1 节

1. （1）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda-5 & 2 \\ 2 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-1)^2$，所以$A$的特征值为

$\lambda_1=3,\ \lambda_2=1$（二重）. 对$\lambda_1=3$，解方程组

$$(3E-A)X=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=[0,1,1]^T$，则$X=k_1\xi_1=k_1[0,1,1]^T\ (k_1\neq 0)$是$A$的属于$\lambda_1=3$的全部特征向量. 对于$\lambda_2=1$，解方程组

$$(E-A)X=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&-4&2\\2&-4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=[2,1,0]^T,\xi_3=[-1,0,1]^T$，则

$X=k_2\xi_2+k_3\xi_3=k_2[2,1,0]^T+k_3[-1,0,1]^T\ (k_2,k_3\neq 0)$ 是 A 的属于 $\lambda_2=1$ 的全部特征向量.

（2）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&-1\\-2&\lambda&-1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$（二重）. 对 $\lambda_1=1$，解方程组

$$(E-A)X=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\-2&1&-1\\-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=[0,1,1]^T$，则 $X=k_1\xi_1=k_1[0,1,1]^T\ (k_1\neq 0)$ 是 A 的属于 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量. 对于 $\lambda_2=2$，解方程组

$$(2E-A)X=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-2&2&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=[1,1,0]^T$,，则

$X=k_2\xi_2=k_2[1,1,0]^T\ (k_2\neq 0)$ 是 A 的属于 $\lambda_2=2$ 的全部特征向量.

（3）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&5&-2\\-5&\lambda+7&-3\\-6&9&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)\lambda^2$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=0$（二重）. 对 $\lambda_1=1$，解方程组

$$(E-A)X=\begin{bmatrix}-3&5&-2\\-5&8&-3\\-6&9&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=\left[1,1,1\right]^T$，则 $X=k_1\xi_1=k_1\left[1,1,1\right]^T\ (k_1\neq 0)$ 是 A 的属于 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量. 对于 $\lambda_2=0$，解方程组

$$\left(-A\right)X=\begin{bmatrix}-4&5&-2\\-5&7&-3\\-6&9&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right]^T$，则

$X=k_2\xi_2=k_2\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right]^T\ (k_2\neq 0)$ 是 A 的属于 $\lambda_2=0$ 的全部特征向量.

2．解：B 的特征值为 $-4,-6,-12$.

因为 $A-5E$ 的特征值为 $-4,-6,-3$，则 $|A-5E|=(-4)(-6)(-3)=-72$.

3．解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-7&-4&1\\-4&\lambda-7&1\\4&4&\lambda-x\end{vmatrix}\underline{\underline{r_2-r_1}}\begin{vmatrix}\lambda-7&-4&1\\3-\lambda&\lambda-3&0\\4&4&\lambda-x\end{vmatrix}$

$$\underline{\underline{c_2+c_1}}\begin{vmatrix}\lambda-7&\lambda-11&1\\3-\lambda&0&0\\4&8&\lambda-x\end{vmatrix}=(\lambda-3)\left[(\lambda-11)(\lambda-x)-8\right],$$

由于 $\lambda_1=3$ 是 A 的一个二重特征值，则 $\lambda_1=3$ 一定是 $(\lambda-11)(\lambda-x)-8=0$ 的一个根，代入解得 $x=4$，则 $(\lambda-3)\left[(\lambda-11)(\lambda-x)-8\right]=(\lambda-3)^2(\lambda-12)$，即另一个特征值为 $\lambda_2=12$. 对于 $\lambda_1=3$，解方程组

$$\left(3E-A\right)X=\begin{bmatrix}-4&-4&1\\-4&-4&1\\4&4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

解得 $\xi_1=\left[1,0,4\right]^T,\xi_2=\left[0,1,4\right]^T$ 是 $\lambda_1=3$ 对应的特征子空间 V_{λ_1} 的基. 对于 $\lambda_2=12$，解方程组

$$(12E-A)X=\begin{bmatrix}5&-4&1\\-4&5&1\\4&4&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

解得$\xi_3=[-1,-1,1]^T$是$\lambda_2=12$对应的特征子空间V_{λ_2}的基.

4．证:（1）设λ_i是A的任一特征根，则λ_i^n是A^n的特征根，因为$A^n=O$，有$\lambda_i^n=0$，则一定有$\lambda_i=0$，即A的特征根全为0.

（2）类似的，知$\lambda_i^2-\lambda_i$是A^2-A的特征根，因为$A^2-A=O$，有$\lambda_i^2-\lambda_i=0$，则一定有$\lambda_i=0$，或者$\lambda_i=1$，即A的特征根为0或1.

（3）类似的，知λ_i^2-1是A^2-E的特征根，因为$A^2-E=O$，有$\lambda_i^2-1=0$，则一定有$\lambda_i=-1$，或者$\lambda_i=1$，即A的特征根为-1或1.

第 2 节

1．证：若A可逆，则$BA=E_nBA=(A^{-1}A)BA=A^{-1}(AB)A$，即$AB\sim BA$.

2．由条件知$A_1=C_1^{-1}B_1C_1$，$A_2=C_2^{-1}B_2C_2$，C_1,C_2可逆.

于是$\begin{pmatrix}C_1&0\\0&C_2\end{pmatrix}$可逆，且

$$\begin{pmatrix}C_1&0\\0&C_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}B_1&0\\0&B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1&0\\0&C_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}C_1^{-1}&0\\0&C_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1&0\\0&B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1&0\\0&C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix},$$

则$\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}B_1&0\\0&B_2\end{pmatrix}$.

第 3 节

1．（1）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & -1\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ 2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$，所以 A 的特征值为

$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2$，可对角化. 解方程组

$$\left(-E-A\right)X=\begin{bmatrix}-4 & 2 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=\left[-1,\ -\dfrac{3}{2},\ 1\right]^T$. 对于 $\lambda_2=1$，解方程组

$$\left(E-A\right)X=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[0,\ 1,\ 2\right]^T$. 对于 $\lambda_3=2$，解方程组

$$\left(2E-A\right)X=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_3=\left[-1,\ 0,\ 1\right]^T$. 显然 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是线性无关的，

令 $P=\left[\xi_1,\xi_2,\xi_3\right]=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ -\dfrac{3}{2} & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$.

（2）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-7 & 12 & -6\\ -10 & \lambda+19 & -10\\ -12 & 24 & \lambda-13\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$，所以 A 的特征值为

$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$（二重）. 对 $\lambda_1=-1$，解方程组

$$\left(-E-A\right)X=\begin{bmatrix}-8 & 12 & -6\\ -10 & 18 & -10\\ -12 & 24 & -14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=\left[\frac{1}{2},\ \frac{5}{6},\ 1\right]^T$.对于$\lambda_2=1$，解方程组

$$(E-A)X=\begin{bmatrix}-6 & 12 & -6\\ -10 & 20 & -10\\ -12 & 24 & -12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[2,\ 1,\ 0\right]^T$，$\xi_3=\left[-1,\ 0,\ 1\right]^T$. 显然$\xi_1,\xi_2,\xi_3$是线性无关的，

故A可对角化，令$P=\left[\xi_1,\xi_2,\xi_3\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 2 & -1\\ \frac{5}{6} & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$.

（3）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -3 & -2\\ -1 & \lambda-4 & -2\\ -1 & 3 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$，则$A$的特征值为$\lambda_1=1,\ \lambda_2=3$（二重）. 由于$rank(\lambda_2E-A)=2,$ 所以$\lambda_2=3$的几何重数为$3-rank(\lambda_2E-A)=1<2$，故A不能对角化.

2. 解：由于$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-a\end{vmatrix}\underline{\underline{c_1-c_2}}\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -1\\ 2-\lambda & \lambda-4 & 2\\ 0 & 3 & \lambda-a\end{vmatrix}$

$$\underline{\underline{r_2+r_1}}\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -1\\ 0 & \lambda-3 & 1\\ 0 & 3 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-2)\left[(\lambda-3)(\lambda-a)-3\right],$$

由B可知$\lambda_1=2$是A的一个二重特征值,则$\lambda_1=2$是$(\lambda-3)(\lambda-a)-3=0$的一个根，代入解得$a=5$，则$(\lambda-2)\left[(\lambda-3)(\lambda-a)-3\right]=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$. 又因为$\lambda_2=b$是另一个特征值，故$b=6$. 对$\lambda_2=6$，解方程组

$$(6E-A)X=\begin{bmatrix}5 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=[1,-2,3]^T$. 对于 $\lambda_1=2$，解方程组

$$(2E-A)X=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=[-1,1,0]^T,\xi_3=[1,0,1]^T$.

可令 $P=[\xi_2,\xi_1,\xi_3]=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=B$. 又因为 $P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$,

$$A=PBP^{-1},\text{则 } A^n=\left[PBP^{-1}\right]^n=PB^nP^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^n & & \\ & 6^n & \\ & & 2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}5\cdot 2^n-6^n & 2^n-6^n & -2^n+6^n\\ -2\cdot 2^n+2\cdot 6^n & 2\cdot 2^n+2\cdot 6^n & 2\cdot 2^n-2\cdot 6^n\\ 3\cdot 2^n-3\cdot 6^n & 3\cdot 2^n-3\cdot 6^n & 2^n+3\cdot 6^n\end{bmatrix}.$$

第 4 节

1.（1）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=5$. 对 $\lambda_1=-1$，解方程组

$$(-E-A)X=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=[1,\ 2,\ 2]^T$，标准化得 $q_1=\frac{1}{3}[1,\ 2,\ 2]^T$.对于 $\lambda_2=2$，解方程组

$$\left(2E-A\right)X=\begin{bmatrix}-1&2&0\\2&0&2\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[2,\ 1,\ -2\right]^T$，标准化得$q_2=\frac{1}{3}\left[2,\ 1,\ -2\right]^T$.对于$\lambda_3=5$，

解方程组

$$\left(5E-A\right)X=\begin{bmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_3=\left[2,\ -2,\ 1\right]^T$，标准化得$q_3=\frac{1}{3}\left[2,\ -2,\ 1\right]^T$.

取正交矩阵$T=\left[q_1,q_2,q_3\right]=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}$，使得$T^{-1}AT=\Lambda=\begin{bmatrix}-1&&\\&2&\\&&5\end{bmatrix}$.

（2）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-4\\-2&\lambda+2&-2\\-4&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda+3)^2$，所以$A$的特征值为

$\lambda_1=6,\ \lambda_2=-3$（二重）. 对$\lambda_1=6$，解方程组

$$\left(6E-A\right)X=\begin{bmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=\left[2,\ 1,\ 2\right]^T$，标准化得$q_1=\frac{1}{3}\left[2,\ 1,\ 2\right]^T$.对于$\lambda_2=-3$，解

方程组

$$\left(-3E-A\right)X=\begin{bmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[1,-2,0\right]^T$，$\xi_3=\left[0,-2,1\right]^T$，对其标准正交化可得

$q_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[1,-2,0\right]^T$，$q_3=\frac{1}{3\sqrt{5}}\left[-4,-2,5\right]^T$.

取正交矩阵$T=\left[q_1,q_2,q_3\right]=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{4}{3\sqrt5}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{3\sqrt5}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt5}{3}\end{bmatrix}$，使得$T^{-1}AT=\Lambda=\begin{bmatrix}6 & & \\ & -3 & \\ & & -3\end{bmatrix}$.

（3）解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & -2\\ 2 & \lambda+3 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+8)(\lambda-1)^2$，所以 A 的特征值为

$\lambda_1=-8,\ \lambda_2=1$（二重）. 对$\lambda_1=-8$，解方程组

$$\left(-8E-A\right)X=\begin{bmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=\left[-\frac{1}{2},\ -1,\ 1\right]^T$，标准化得$q_1=\frac{1}{3}\left[-1,\ -2,\ 2\right]^T$.对于$\lambda_2=1$，解方程组

$$\left(E-A\right)X=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[-2,1,0\right]^T$，$\xi_3=\left[2,0,1\right]^T$，对其标准正交化可得 $q_2=\frac{1}{\sqrt5}\left[-2,1,0\right]^T$，$q_3=\frac{1}{3\sqrt5}\left[2,4,5\right]^T$.

取正交矩阵$T=\left[q_1,q_2,q_3\right]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{2}{3\sqrt5}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{3\sqrt5}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt5}{3}\end{bmatrix}$，使得$T^{-1}AT=\Lambda=\begin{bmatrix}-8 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$.

3. 解：首先由ξ_1,ξ_2正交得$\xi_1^T\xi_2=a-1=0$，解得$a=1$. 因为ξ_1是$\lambda_1=-1$的一个特征向量，ξ_2是$\lambda_2=1$的一个特征向量，假设$\lambda_2=1$的另外一个特征向量是

$\xi_3=[x_1,x_2,x_3]^T$，则 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_2+x_3=0,\end{cases}$ 解得 $\xi_3=[2,-1,1]^T$，则存在可逆矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix},$$

解得 $A=P\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

或者：

首先由 ξ_1,ξ_2 正交得 $\xi_1^T\xi_2=a-1=0$，解得 $a=1$. 因为 ξ_1 是 $\lambda_1=-1$ 的一个特征向量，ξ_2 是 $\lambda_2=1$ 的一个特征向量，分别将它们标准化得 $q_1=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,-1]^T$，$q_2=\frac{1}{\sqrt{2}}[0,1,1]^T$，假设由 $\lambda_2=1$ 的另外一个特征向量标准正交化得到的单位向量是 $q_3=[x_1,x_2,x_3]^T$，则由正交关系得方程组

$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\\ x_1+x_2-x_3=0,\\ x_2+x_3=0,\end{cases}$$

解得 $x_3=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$，若 $x_3=\frac{1}{\sqrt{6}}$，此时 $q_3=\frac{1}{\sqrt{6}}[2,-1,1]^T$，则得正交矩阵

$U=[q_1,q_2,q_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$，此时对角矩阵为 $\Lambda=\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$，则

$$A=U\Lambda U^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

若 $x_3=-\frac{1}{\sqrt{6}}$，此时 $q_3=\frac{1}{\sqrt{6}}[-2,1,-1]^T$，此时正交矩阵为

$$U=[q_1,q_2,q_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}，$$ 最后求得的 A 也是一样的.

第 6 章 第 2 节

1. 解： $A=\begin{bmatrix}1&-1&0&3\\-1&0&0&0\\0&0&3&-1\\3&0&-1&1\end{bmatrix}$, $r(A)=4$.

2.（1）解： $A=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$,

则 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-10)(\lambda-1)^2$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=10,\ \lambda_2=1$ (二重). 对 $\lambda_1=10$，解方程组

$$\left(10E-A\right)X=\begin{bmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=\left[-\frac{1}{2},-1,1\right]^T$，标准化得到 $q_1=\frac{1}{3}\left[-1,-2,2\right]^T$. 对于 $\lambda_2=1$，解方程组

$$\left(E-A\right)X=\begin{bmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系： $\xi_2=\left[-2,1,0\right]^T$, $\xi_3=\left[2,0,1\right]^T$ ，标准化得到 $q_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[-2,1,0\right]^T$，$q_3=\frac{1}{3\sqrt{5}}\left[2,4,5\right]^T$.

取 $T=\left[q_1,q_2,q_3\right]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{2}{3}&0&\frac{\sqrt{5}}{3}\end{bmatrix}$，则 T 为正交矩阵，且 $X=TY$，可得二次型的标准形为： $f=10y_1^2+y_2^2+y_3^2$，规范形为： $f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$.

（2）解：$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，

则 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$（二重）．对 $\lambda_1=-1$，解方程组

$$\left(-E-A\right)X=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=\left[-1,0,1\right]^T$，标准化得到 $q_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-1,0,1\right]^T$．对于 $\lambda_2=1$，解方程组

$$\left(E-A\right)X=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=\left[0,1,0\right]^T,\ \xi_3=\left[1,0,1\right]^T$，标准化得到 $q_2=\left[0,1,0\right]^T$，$q_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1,0,1\right]^T$．

取 $T=\left[q_1,q_2,q_3\right]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，则 T 为正交矩阵，且 $X=TY$，可得二次型的标准形为：$f=-y_1^2+y_2^2+y_3^2$，规范形为：$f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$．

3.（1）解：$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+5x_1x_2-3x_2x_3$

$$=\left(x_1+\frac{5}{2}x_2\right)^2-\frac{25}{4}x_2^2-3x_2x_3$$

$$=\left(x_1+\frac{5}{2}x_2\right)^2-\frac{25}{4}\left(x_2+\frac{6}{25}x_3\right)^2-\frac{9}{25}x_3^2,$$

则$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{5}{2}x_2, \\ y_2 = x_2 + \dfrac{6}{25}x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$ 即$Y = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{25} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$，有标准形 $f = y_1^2 - \dfrac{25}{4}y_2^2 - \dfrac{9}{25}y_3^2$，可逆线性变换为：$X = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{25} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y$

（2）解：$f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3) + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_2x_3$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 2(x_2 - x_3)^2,$$

则$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = x_2 - x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$ 即$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$，有标准形 $f = 2y_1^2 + 2y_2^2$，可逆线性变换为：$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y$.

第 3 节

4. （1）解：$f(x_1, x_2, x_3) = 5\left(x_1^2 - \dfrac{4}{5}x_1x_2\right) + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2x_3$

$$= 5\left(x_1 - \frac{2}{5}x_2\right)^2 + \frac{26}{5}x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= 5\left(x_1 - \frac{2}{5}x_2\right)^2 + \frac{26}{5}\left(x_2 - \frac{5}{13}x_3\right)^2 + \frac{42}{13}x_3^2,$$

则有标准形 $f = 5y_1^2 + \dfrac{26}{5}y_2^2 + \dfrac{42}{13}y_3^2$，故此二次型是正定的.

（2）解：$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=10\left(x_1^2+\frac{4}{5}x_1x_2+\frac{12}{5}x_1x_3\right)+2x_2^2+x_3^2-28x_2x_3$

$$=10\left(x_1+\frac{2}{5}x_2+\frac{6}{5}x_3\right)^2+\frac{2}{5}x_2^2-\frac{67}{5}x_3^2-28x_2x_3$$

$$=10\left(x_1+\frac{2}{5}x_2+\frac{6}{5}x_3\right)^2+\frac{2}{5}\left(x_2-35x_3\right)^2+\left(490-\frac{67}{5}\right)x_3^2,$$

则有标准形 $f=10y_1^2+\frac{2}{5}y_2^2+\left(490-\frac{67}{5}\right)y_3^2$，故此二次型是正定的.

2. 证：$A+B$ 显然是对称矩阵，又因为若存在可逆矩阵 X，有 $X^T(A+B)X=X^TAX+X^TBX$，由于 A 和 B 都是正定的，则 X^TAX 和 X^TBX 正定，故 $X^T(A+B)X$ 正定，可得 $A+B$ 正定.

3. 证：不妨设 A 是 n 阶方阵，则设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征根，因为 A 是正定的，故有 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\cdots,\lambda_n>0$. 又因为 $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$ 是 A^{-1} 的全部特征根，显然也有 $\frac{1}{\lambda_1}>0,\frac{1}{\lambda_2}>0,\cdots,\frac{1}{\lambda_n}>0$，则 A^{-1} 是正定的. 又因为 $A^*=A^{-1}|A|$，故 A^* 的所有特征根为 $\frac{|A|}{\lambda_1},\frac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}$，由于 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n>0$，故有 $\frac{|A|}{\lambda_1}>0,\frac{|A|}{\lambda_2}>0,\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}>0$，即 A^* 也正定.