Lineární Algebra 2 - NMAI058

LS 2019/2020

Mgr. Pavel Hubáček, Ph.D.

18. 2. 2020

https://iuuk.mff.cuni.cz/~hubacek/LA2

Lineární Algebra 2

- skalární součin
- determinanty
- vlastní čísla
- positivně (semi)definitiní matice
- kvadratické formy

Dnes

skalární součin

Definice 8.2 - Skalární součin nad $\mathbb{R}$

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Pak skalární součin je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V^2 \to \mathbb{R}$, splňující $\forall x, y, z \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ a rovnost nastane pouze pro $x = 0$,
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
4. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Definice 8.3 - Skalární součin nad $\mathbb{C}$

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$.

Pak skalární součin je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V^2 \to \mathbb{C}$, splňující $\forall x, y, z \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ a rovnost nastane pouze pro $x = 0$,
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
4. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Příklady skalárních součinů

- V prostoru $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

- V prostoru $\mathbb{C}^n$:

$$\langle x, y \rangle = x^T \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i \ .$$

- V prostoru $\mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \ .$$

- V prostoru $\mathcal{C}_{[a,b]}$:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx \ .$$

Definice 8.8 - Norma indukovaná skalárním součinem

Norma indukovaná skalárním součinem je definována pro $x \in V$ jako

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}\ .$$

Norma a skalární součin v $\mathbb{R}^n$

- Standardní skal. součin v $\mathbb{R}^n$ indukuje eukleidovskou normu

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ .$$

- Pro vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ svírající úhel φ platí

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cos(\varphi)\ .$$

Definice 8.9 - Kolmost

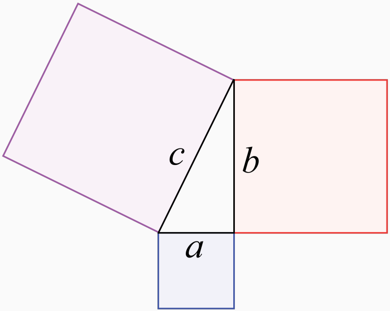
Vektory $x, y \in V$ jsou kolmé, pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Značení: $x \perp y$.

Příklady kolmých vektorů

- V prostoru $\mathbb{R}^3$: $(1, 2, 3) \perp (1, 1, -1)$.
- V prostoru $\mathcal{C}_{[-\pi,\pi]}$: $\sin x \perp \cos x \perp 1$.

Věta 8.11 - Pythagorova

Pokud $x, y \in V$ jsou kolmé, tak $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.



Věta 8.13 - Cauchyho-Schwarzova nerovnost

Pro každé $x, y \in V$ platí

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \ .$$

Konkrétní nerovnosti pro specifické skalární součiny

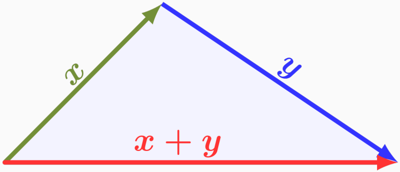
V $\mathbb{R}^n$ pro standardní skalární součin dostáváme:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Důsledek 8.14 - Trojúhelníková nerovnost

Pro každé $x, y \in V$ platí

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ .$$



Definice 8.15 - Norma

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$.

Pak norma je zobrazení $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$, splňující $\forall x, y \in V$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ resp. $\forall \alpha \in \mathbb{C}$:

1. $\|x\| \geq 0$ a rovnost nastane pouze pro $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tvrzení 8.16 - Norma indukovaná skalárním součinem

Norma indukovaná skalárním součinem je normou.

Příklady norem v $\mathbb{R}^n$

Pro $p = 1, 2, \ldots$ definujeme p-normu vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ jako

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

- pro $p = 2$: eukleidovská norma

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} ,$$

- pro $p = 1$: součtová norma

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| ,$$

- pro $p = \infty$: maximová (Čebyševova) norma

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| .$$

Pozorování 8.20 - Rovnoběžníkové pravidlo

Pro normu indukovanou skalárním součinem platí:

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \ .$$

Důsledek pro součtovou a maximovou normu

- Součtová a maximová norma nejsou indukovány žádným skalárním součinem.
- Nesplňují rovnoběžníkové pravidlo například pro $(1, 0)^T$ a $(0, 1)^T$.

Definice 8.21 - Metrika

Metrika na množině M je zobrazení $d\colon M^2 \to \mathbb{R}$, splňující pro všechna $x, y, z \in M$:

1. $d(x, y) \geq 0$ a rovnost nastane pouze pro $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Metrika indukovaná normou

- Každá norma indukuje metriku $d(x, y) := \|x - y\|$.
- Naopak tato diskrétní metrika není indukována žádnou normou:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \neq y, \\ 0, & \text{pro } x = y. \end{cases}$$

1. přednáška - shrnutí

- skalární součin
  - kolmost
  - norma
  - metrika

Příští přednáška

ortonormální báze