6. cvičení k předmětu NMAI058 Lineární Algebra 2 (LS 19/20)

(Řešená verze)

Úloha 1: *Geometrickou interpretací determinantu je objem. Přesněji absolutní hodnota determinantu určuje, jak moc lineární zobrazení $x \mapsto Ax$ určené maticí A zvětšuje/zmenšuje velikost objektů (doporučujeme zhlédnout 10-minutové video o determinantech od "Three blue, one brown" viz https://www.youtube.com/watch?v=Ip3X9LOh2dk). Tedy pokud máme matice 2×2, absolutní hodnota jejich determinantu představuje kolikrát se zvětší obsah rovinného geometrického útvaru (například jednotkového čtverce) po provedené transformaci. Absolutní hodnota determinantu matice velikosti 3×3, pak udává kolikrát se zvětší objem geometrického 3 dimenzionálního útvaru (například krychle) provedením lineární transformace dané příslušnou maticí.*

Zároveň lze na determinant nahlížet jako na obsah rovnoběžnostěnu daného sloupci matice. Pokud příslušnou lineární transformaci provedeme na čtverec jehož strany jsou dány vektory $(1, 0)^T$ a $(0, 1)^T$ – čtverec reprezentovaný I_2, bude tento čtverec zobrazen na rovnoběžnostěn daný sloupci matice.

Spočtěte determinanty a ověřte si intuici pro následující matice.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení: V tomto případě lineární zobrazení zobrazí každou plochu na sebe samu. Tedy plochy se nemění a očekáváme, že determinant bude 1.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(A) = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení: Toto lineární zobrazení vezme čtverec jehož strany jsou dány vektory $(1, 0)^T$ a $(0, 1)^T$ (obsah je 1) a zobrazí jej na obdélník jehož strany jsou $(2, 0)^T$ a $(0, 1)^T$ (obsah je 2). Tedy zobrazení "nafukuje" prostor 2-krát a očekáváme, že $\det(B) = 2$.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(B) = B_{1,1}B_{2,2} - B_{1,2}B_{2,1} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2.$$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Řešení: Toto lineární zobrazení vezme čtverec daný vektory $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$ (obsah je 1) a zobrazí jej na čtverec jehož strany jsou $(2,0)^T$ a $(0,2)^T$ (obsah je 4). Tedy zobrazení "nafukuje" prostor 4-krát a očekáváme, že $\det(C) = 4$.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(C) = C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}C_{2,1} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4.$$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení: Toto lineární zobrazení vezme čtverec daný vektory $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$ (obsah je 1) a zobrazí jej na rovnoběžník jehož strany jsou $(1,0)^T$ a $(2,1)^T$. Obsah rovnoběžníku je stále 1 (představte si, že vznikl tak, že vezmete stěnu vystavěnou z kostek a poté se opřete o její levou stranu, posunete jednotlivé kostky vůči sobě a stěnu zkosíte, ale obsah zůstane zachován).

Tedy zobrazení zachovává plochy a očekáváme, že $\det(D) = 1$.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(D) = D_{1,1}D_{2,2} - D_{1,2}D_{2,1} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1.$$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Řešení: Toto lineární zobrazení vezme čtverec daný vektory $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$ (obsah je 1) a zobrazí jej na úsečku danou vektorem $(1,0)^T$. Vzhledem k tomu, že jsme zobrazili na podprostor $\mathbb{R}^2$ je obsah roven 0. Očekáváme tedy, že determinant bude nulový.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(E) = E_{1,1}E_{2,2} - E_{1,2}E_{2,1} = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Řešení: Pro matice velikosti 3×3 platí podobná geometrická intuice, pouze místo obsahu udává determinant objem. Zdůrazníme poslední případ (lineární zobrazení na podprostor) i pro matice 3×3.

Toto lineární zobrazení vezme krychli danou vektory $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$ a $(0,0,1)^T$ (objem krychle je 1) a zobrazí ji na čtverec daný vektory $(1,0,0)^T$ a $(0,1,0)^T$. Vzhledem k tomu, že obraz zobrazení je podprostor $\mathbb{R}^3$, získáváme 2D útvar a jeho objem je tedy roven 0. Očekáváme tedy, že determinant bude nulový.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\begin{aligned}\det(F) &= F_{1,1}F_{2,2}F_{3,3} + F_{1,2}F_{2,3}F_{3,1} + F_{1,3}F_{2,1}F_{3,2} - F_{1,1}F_{2,3}F_{3,2} - F_{1,2}F_{2,1}F_{3,3} - F_{1,3}F_{2,2}F_{3,1} \\ &= 1\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot 1\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Úloha 2: *Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní (pokud existuje) k následující matici nad tělesem reálných čísel i nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Adjungovaná matice: $(\mathrm{adj}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j}|A^{j,i}|$, kde $A^{j,i}$ je matice vzniklá odstraněním j-tého řádku a i-tého sloupce z matice A (Pozor, všimněte si prohození indexů!).

Inverze se spočítá: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$.

Nad $\mathbb{R}$ počítáme adjungovanou matici následovně. Nejprve spočteme determinanty podmatic:

$$\det(A^{1,1}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det(A^{2,1}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\det(A^{3,1}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$\det(A^{1,2}) = \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$\det(A^{2,2}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det(A^{3,2}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\det(A^{1,3}) = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$\det(A^{2,3}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det(A^{3,3}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Dostáváme adjungovanou matici:

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & (-1)\cdot(-1) & -1 \\ (-1)\cdot(-2) & 1 & (-1)\cdot 2 \\ -2 & (-1)\cdot 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

Nyní spočteme determinant matice A. Využije rozvoje podle řádků a determinantů již spočtených výše. Dostáváme

$$\det(A) = 1 \cdot \det(A^{1,1}) + 0 \cdot \det(A^{1,2}) + 1 \cdot \det(A^{1,3}) = 1 - 2 = -1$$

Nyní adjungovanou matici vynásobíme $\frac{1}{\det(A)} = -1$ a získáme inverzní matici.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

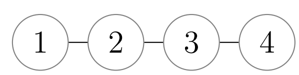
Obdobně můžeme počítat nad $\mathbb{Z}_5$, pouze všechny kroky provádíme modulo 5.

$$|A| = -1 = 4,\ \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Úloha 3: *Další aplikaci determinantu můžeme najít v kombinatorice. Pro neorientovaný graf $G = (V, E)$, kde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ si zavedeme Laplaceovu matici L grafu G následovně:*

$$\forall i, j \in V\colon \quad L_{i,j} = \begin{cases} deg(i) & i = j \\ -1 & i \neq j \ and \ (i,j) \in E \\ 0 & i \neq j \ and \ (i,j) \notin E. \end{cases}$$

Počet koster $\kappa(G)$ pak můžeme spočítat jako $\kappa(G) = \det(L^{1,1})$ (pokud by Vás zajímal důkaz, tak jej lze najít v knize Matoušek, Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky, kapitola Počet koster → Důkaz pracující s determinanty).

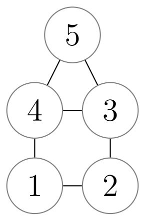
Spočtěte tímto způsobem počet koster následujících grafů a) $G =$ 

Řešení: Protože graf je cesta očekáváme, že determinant vyjde 1. Sestavíme Laplaceovu matici, ta bude velikosti 4×4 a vypadá následovně:

$$L_G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní spočteme determinant $L_G^{1,1}$.

$$\begin{aligned} \kappa(G) &= \det(L_G^{1,1}) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}(-1) \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\qquad \text{(Rozvojem dle 1. řádku)} \\ &= 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

$H =$ 

b)

Řešení: Sestavíme Laplaceovu matici, ta bude velikosti 5×5 a vypadá následovně:

$$L_H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nyní spočteme determinant $L_H^{1,1}$.

$$\begin{aligned} \kappa(H) &= \det(L_H^{1,1}) \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \cdot 2 \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ & \qquad \text{(Rozvoj dle 1. řádku)} \end{aligned}$$

Spočteme první determinant:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(Odečteme 3. řádek od 1.)} \\ &= (-1)^{2+2} \cdot 4 \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot (-3) \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ & \qquad \text{(Rozvoj dle 2.řádku.)} \\ &= 4 \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 4 \cdot 5 + 3 \cdot (-4) = 8. \end{aligned}$$

Spočteme druhý determinant:

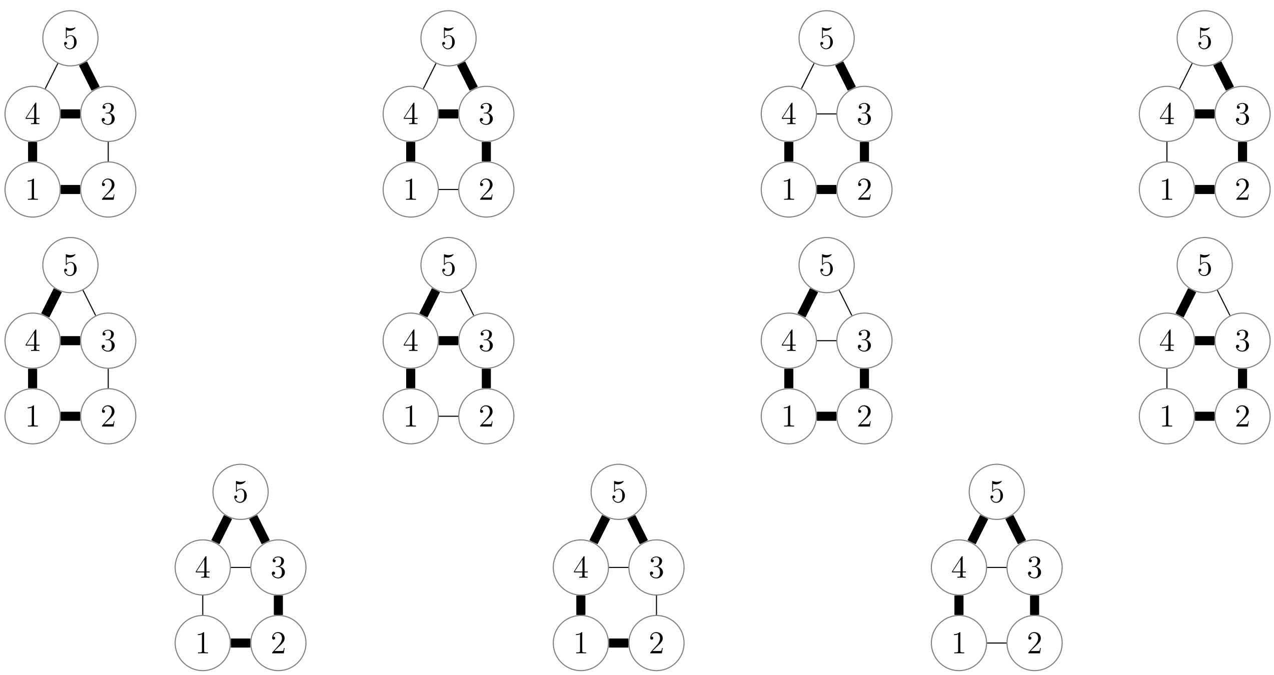
$$\det\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot(-1)\det\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix} \qquad \text{(Rozvoj dle 1. sloupce)}$$

$$= (-1)(3\cdot 2-(-1)\cdot(-1)) = -5 \qquad \text{(Z definice)}$$

Dosadíme spočtené determinanty do rovnice a dostáváme

$$\kappa(H) = 2\det\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix} = 2\cdot 8 - 5 = 11.$$

Všechny kostry pak vypadají takto:



Úloha 4: *Rozhodněte, pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je následující matice regulární:*

$$A = \begin{pmatrix}2a & 3 & -1\\ 5-a & -1 & -2\\ 2+3a & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Řešení: Využijeme Kritérium regularity (viz Věta 9.11, skripta z Lineární algebry od Milana Hladíka), které říká, že A je regulární právě tehdy, když $\det(A) \neq 0$. Spočteme determinant:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix} 2a & 3 & -1 \\ 5-a & -1 & -2 \\ 2+3a & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= 2a\det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 5-a & -2 \\ 2+3a & 4 \end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix} 5-a & -1 \\ 2+3a & 2 \end{pmatrix} \\
&= 2a(-4+4) - 3((5-a)4 - (-2)(2+3a)) - ((5-a)2 - (-1)(2+3a)) \\
&= 35a - 84.
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že A je singulární právě tehdy, když $a = \frac{84}{35} = \frac{12}{5}$.

Úloha 5: *Řešte následující soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla.*

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right).$$

Řešení: Nejprve pomocí Gaussovy eliminace spočteme determinant A.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\cdot(-1)\cdot 3\cdot(-7) = -7
\end{aligned}$$

Nyní spočteme determinanty matic, kde postupně nahrazujeme první, druhý a třetí sloupec pravou stranou rovnice.

Dopočítáme první složku výsledného vektoru (nahrazujeme první sloupec):

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & -2 \\ 10 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+2}\cdot 1\det\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 1\det\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot(-1)\det\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \\
&\hfill \text{(Rozvoj dle 2. sloupce)} \\
&= (-1)(-6\cdot 3 - (-2)\cdot 10) + (7\cdot 3 - 3\cdot 10) + (7\cdot(-2) - 3\cdot(-6)) \\
&= -(-18+20) + (21-30) + (-14+18) = -2 - 9 + 4 = -7
\end{aligned}$$

Dostáváme $x_1 = \frac{-7}{-7} = 1$.

Dopočítáme druhou složku výsledného vektoru (nahrazujeme druhý sloupec):

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 3 \end{pmatrix} = \det - \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 10 & 3 \end{pmatrix} = \det - \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \det \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 40 & 15 \end{pmatrix} = \det \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7$$

Dostáváme $x_2 = \frac{7}{-7} = -1$.

Dopočítáme třetí složku výsledného vektoru (nahrazujeme třetí sloupec):

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 6 & -24 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = -14$$

Dostáváme $x_3 = \frac{-14}{-7} = 2$.

Výsledek: Řešení je vektor $(1, -1, 2)^T$.

Další příklady k procvičení - početní

Úloha 6: *Pomocí determinantu spočtěte objem rovnoběžnostěnu se stranami* $(4, 2, 1)^T, (5, 1, 0)^T, (2, 1, 1)^T$.

Výsledek: Determinant vyjde -3, tedy objem je 3.

Úloha 7: *Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní (pokud existuje) k následující matici nad tělesem reálných čísel i nad tělesem* $\mathbb{Z}_5$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

Výsledek: Nad $\mathbb{R}$: $|A| = 4$, $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

Nad $\mathbb{Z}_5$: $|A| = 4$, $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Výsledek: Nad $\mathbb{R}$: $|A| = -5$, $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/5 & 3/5 & -7/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

Nad $\mathbb{Z}_5$: $|A| = 0$, tudíž A je singulární nad $\mathbb{Z}_5$ a A^{-1} neexistuje, $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Úloha 8: *Pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je následující matice regulární?*

$$A = \begin{pmatrix} 5-a & 2 & -1 \\ 2a+1 & a & 1 \\ a-4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledek: $a \neq -8$

Další příklady k procvičení - dokazovací

Úloha 9: *Říkáme, že matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je antisymetrická pokud $A^T = -A$. Ukažte, že pro lichá n je antisymetrická matice A singulární.*

Uvědomte si, kde se používá předpoklad, že n je liché.

Nápověda: Využijte vztahu mezi determinanty A a A^T a změny determinantu při elementárních řádkových úpravách.

Úloha 10: *Ukažte, že pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje matice D taková, že*

$$D_{i,j} = \begin{cases} \pm 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

a $A + D$ je regulární matice.

Nápověda: Postupujte matematickou indukcí, využijte kritérium regularity a řádkovou linearitu determinantu.

Úloha 11: *Rozhodněte, zda platí následující výroky. V případě, že neplatí, lze výraz upravit, aby platil?*

a) Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\mathrm{adj}(A^{-1}) = \mathrm{adj}(A)^{-1}$.

Výsledek: Ano. Nezapomeňte zdůvodnit, že obě strany mají smysl pro A regulární a obě strany nemají smysl pro A singulární. Použijeme Větu o adjungované matici (viz věta 9.21 ze skript Milana Hladíka).

b) $\mathrm{adj}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{adj}(A) & 0 \\ 0 & \mathrm{adj}(B) \end{pmatrix}$.

Výsledek: Ne. Protipříkladem jsou například matice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.