Základy složitosti a vyčíslitelnosti

NTIN090

Petr Kučera

2022/23 (6. přednáška)

Základní vztahy
(2. část)

Model TS s menším než lineárním prostorem

Pro prostor menší než lineární uvažujeme vícepáskový TS:

Vstupní páska je jen pro čtení

Pracovní pásky jsou pro čtení i zápis

Výstupní páska je jen pro zápis a hlava se hýbe jen vpravo

- Do prostoru se počítá jen obsah pracovních pásek
- Součástí konfigurace je
  - stav
  - poloha hlavy na vstupní pásce
  - polohy hlav na pracovních páskách
  - obsah pracovních pásek
- Konfigurace neobsahuje vstupní slovo

Další prostorové třídy

- Třída problémů řešitelných v logaritmickém prostoru

$$\mathrm{L} = \mathrm{SPACE}(\log_2 n)$$

- Třída jazyků přijímaných NTS v logaritmickém prostoru

$$\mathrm{NL} = \mathrm{NSPACE}(\log_2 n)$$

- Třída jazyků přijímaných NTS v polynomiálním prostoru

$$\mathrm{NPSPACE} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{NSPACE}(n^k)$$

Vztah prostoru a času

Věta (Vztah prostoru a času)

Pro každou funkci $f(n) \geq \log_2 n$ a každý jazyk L platí, že

$$L \in \mathrm{NSPACE}(f(n)) \implies (\exists c_L \in \mathbb{N}) \left[L \in \mathrm{TIME}(2^{c_L f(n)}) \right].$$

Důsledek

Je-li $f(n)$ funkce, pro kterou platí $f(n) \geq \log_2 n$ a je-li $g(n)$ funkce, pro kterou platí $f(n) = o(g(n))$, pak

$$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{TIME}(2^{g(n)}).$$

Vztah prostoru a času

Věta (Vztah prostoru a času)

Pro každou funkci $f(n) \geq \log_2 n$ a každý jazyk L platí, že

$$L \in \mathrm{NSPACE}(f(n)) \implies (\exists c_L \in \mathbb{N}) \left[L \in \mathrm{TIME}(2^{c_L f(n)}) \right].$$

Idea důkazu

- L je přijímán nějakým NTS M v prostoru $O(f(n))$
- Pro vstup x, definujeme graf konfigurací $G_{M,x}$

  Vrcholy možné konfigurace výpočtu $M(x)$

  Hrany možné přechody mezi konfiguracemi
- Popíšeme TS M', který rozhoduje L
  - M' se vstupem x hledá v $G_{M,x}$ cestu z počáteční konfigurace do nějaké přijímající konfigurace

Graf konfigurací

M NTS pracující v prostoru $f(n)$

x vstupní řetězec

C_0^x počáteční konfigurace výpočtu $M(x)$

C_F přijímající konfigurace M

- *bez újmy na obecnosti je jediná*

Graf konfigurací výpočtů M nad x

Orientovaný graf $G_{M,x} = (V, E)$, kde

- Vrcholy V reprezentují možné konfigurace výpočtů $M(x)$
- $(C_1, C_2) \in E$ je-li možné z C_1 do C_2 přejít přechodem dle δ

$M(x) \iff G_{M,x}$ obsahuje cestu z C_0^x do C_F

Velikost grafu konfigurací

Lemma

- *Uvažme funkci* $f(n) \geq \log_2 n$
- *Uvažme NTS* $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, *který pracuje v prostoru* $f(n)$
- *Nechť* x *je vstup délky* $n = |x|$
- *Nechť* $G_{M,x} = (V, E)$ *je odpovídající graf konfigurací*

Pak $|V| \leq 2^{c_M f(n)}$ *pro nějakou konstantu* c_M

Předpoklad

M má jednu vstupní pásku jen pro čtení a jednu pracovní pásku.

Velikost $G_{M,x}$ (důkaz)

$$|V| \leq \overbrace{|Q|}^{\text{stav}} \cdot \overbrace{n}^{\substack{\text{hlava na}\\ \text{vstupní pásce}}} \cdot \overbrace{f(n)}^{\substack{\text{hlava na}\\ \text{pracovní pásce}}} \cdot \overbrace{|\Sigma|^{f(n)}}^{\substack{\text{slovo na}\\ \text{pracovní pásce}}}$$

Konfigurace se skládá z následujících prvků

- stav
  - $|Q|$ různých stavů
- poloha hlavy na vstupní pásce
  - n možných poloh
  - je-li označený první a poslední znak vstupu
- poloha hlavy na pracovní pásce
  - $f(n)$ možných poloh
- obsah pracovní pásky
  - slovo $w \in \Sigma^*$ na pásce má délku $|w| \leq f(n)$
  - $|\Sigma|^{f(n)}$ různých slov

Počet konfigurací

$$
\begin{aligned}
|V| &\leq |Q| \cdot n \cdot f(n) \cdot |\Sigma|^{f(n)} \\
&= 2^{\log_2 |Q|} \cdot 2^{\log_2 n} \cdot 2^{\log_2 f(n)} \cdot 2^{f(n) \log_2 |\Sigma|} \\
&= 2^{\log_2 |Q| + \log_2 n + \log_2 f(n) + f(n) \log_2 |\Sigma|} \\
&\leq 2^{f(n)(\log_2 |Q| + 1 + 1 + \log_2 |\Sigma|)} && (f(n) \geq \log_2 n)
\end{aligned}
$$

Položíme-li $c_M = \log_2 |Q| + 1 + 1 + \log_2 |\Sigma|$, pak

$$
\begin{aligned}
|V| &\leq 2^{c_M f(n)} \\
|E| &\leq |V|^2 \leq 2^{2 c_M f(n)}
\end{aligned}
$$

Vztah prostoru a času

Věta (Vztah prostoru a času)

Pro každou funkci $f(n) \geq \log_2 n$ a každý jazyk L platí, že

$$L \in \mathrm{NSPACE}(f(n)) \implies (\exists c_L \in \mathbb{N}) \left[L \in \mathrm{TIME}(2^{c_L f(n)}) \right].$$

Idea důkazu

- Předpokládejme, že L je přijímán nějakým M v prostoru $O(f(n))$
- Pro vstup x, definujeme graf konfigurací $G_{M,x}$

  Vrcholy možné konfigurace výpočtu $M(x)$

  Hrany možné přechody mezi konfiguracemi
- Popíšeme TS M', který rozhoduje L
  - M' se vstupem x hledá v $G_{M,x}$ cestu z počáteční konfigurace do nějaké přijímající konfigurace

Vztah prostoru a času (důkaz)

Výpočet M' se vstupem x

Sestav počáteční konfiguraci C_0^x výpočtu $M(x)$
Projdi graf $G_{M,x}$ prohledáváním do hloubky (DFS) počínaje ve vrcholu C_0^x
if DFS nalezne přijímající konfiguraci **then**
    přijmi
odmítni

- DFS nepotřebuje mít před spuštěním zkonstruovaný graf $G_{M,x}$
  - zná počáteční vrchol C_0^x
  - seznam sousedů $\Gamma(C)$ aktuálního vrcholu C lze zkonstruovat v každém kroku pomocí přechodové funkce δ stroje M

M' nepotřebuje znát hodnotu $f(|x|)$.

Vztah prostoru a času (důkaz)

- DFS lze provést v polynomiálním čase na RAMu i TS
- Turingův stroj M' pracuje v polynomiálním čase vzhledem k velikosti grafu $G_{M,x}$
- Pracuje v čase

$$O(|V|^k) = O(2^{kc_M f(n)}) = O(2^{c_L f(n)})$$

pro nějaké konstanty $k \geq 1$ a $c_L \geq kc_M$

Vztah prostoru a čase (poznámky)

Věta (Vztah prostoru a času)

Pro každou funkci $f(n) \geq \log_2 n$ a každý jazyk L platí, že

$$L \in \mathrm{NSPACE}(f(n)) \implies (\exists c_L \in \mathbb{N}) \left[L \in \mathrm{TIME}(2^{c_L f(n)}) \right].$$

- c_L závisí na jazyku L
- Různé jazyky mají různé konstanty

Z věty NEPLYNE

- $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{TIME}(2^{f(n)})$
- $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{TIME}(2^{cf(n)})$ pro nějakou konstantu c

$\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$

$\mathrm{NL} = \mathrm{NSPACE}(\log_2 n)$

$\mathrm{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(n^k)$

Důsledek

$\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$

- Předpokládejme, že $L \in \mathrm{NSPACE}(\log_2 n)$
- Podle věty o vztahu prostoru a času existuje konstanta $c_L \in \mathbb{N}$, pro kterou platí

$$L \in \mathrm{TIME}(2^{c_L \log_2 n}) = \mathrm{TIME}(n^{c_L}) \subseteq \mathrm{P}$$

NPSPACE $\subseteq$ EXPTIME

$$\mathrm{NPSPACE} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{NSPACE}(n^k)$$

$$\mathrm{EXPTIME} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(2^{n^k})$$

Důsledek

NPSPACE $\subseteq$ EXPTIME

- Předpokládejme, že $L \in \mathrm{NPSPACE}$

$\Longrightarrow$ $L \in \mathrm{NSPACE}(n^k)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$

- Podle věty o vztahu prostoru a času existuje konstanta $c_L \in \mathbb{N}$, pro kterou platí

$$L \in \mathrm{TIME}(2^{c_L n^k}) \subseteq \mathrm{TIME}(2^{n^{k+1}}) \subseteq \mathrm{EXPTIME}$$

Vztahy mezi třídami

Věta

Platí následující řetězec inkluzí:

$$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$$

- $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL}$, $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$, $\mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE}$ plyne z
  - Pro každou funkci $f(n)$
    - $\mathrm{TIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{NTIME}(f(n))$
    - $\mathrm{SPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{NSPACE}(f(n))$
- $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ plyne z
  - $\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f(n))$ pro každou funkci $f(n)$
- $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$, $\mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$ plyne ze vztahu prostoru a času

Vztahy mezi třídami

Věta

Platí následující řetězec inkluzí:

$$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$$

- $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL}$, $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$, $\mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE}$ plyne z
  - Pro každou funkci $f(n)$
    - $\mathrm{TIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{NTIME}(f(n))$
    - $\mathrm{SPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{NSPACE}(f(n))$
- $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ plyne z
  - $\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f(n))$ pro každou funkci $f(n)$
- $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$, $\mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$ plyne ze vztahu prostoru a času

Vztahy mezi třídami

Věta

Platí následující řetězec inkluzí:

$$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$$

- $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL}$, $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$, $\mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE}$ plyne z
  - Pro každou funkci $f(n)$
    - $\mathrm{TIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{NTIME}(f(n))$
    - $\mathrm{SPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{NSPACE}(f(n))$
- $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ plyne z
  - $\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f(n))$ pro každou funkci $f(n)$
- $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$, $\mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$ plyne ze vztahu prostoru a času

Vztahy mezi třídami

Věta

Platí následující řetězec inkluzí:

$$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$$

- $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL}$, $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$, $\mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE}$ plyne z
  - Pro každou funkci $f(n)$
    - $\mathrm{TIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{NTIME}(f(n))$
    - $\mathrm{SPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{NSPACE}(f(n))$
- $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ plyne z
  - $\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f(n))$ pro každou funkci $f(n)$
- $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$, $\mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$ plyne ze vztahu prostoru a času

Savičova věta

Savičova věta

Věta (Savičova věta)

Pro každou funkci $f(n) \geq \log_2 n$ *platí*

$$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$$

Důsledek

$$\mathrm{PSPACE} = \mathrm{NPSPACE}$$

Savičova věta (začátek důkazu)

- Předpokládejme, že $L \in \mathrm{NSPACE}(f(n))$
- Existuje NTS M, který přijímá L v prostoru $O(f(n))$
- Popíšeme deterministický TS M', který rozhoduje L v prostoru $O(f^2(n))$

Zjednodušující předpoklad

M pracuje v prostoru $f(n)$

- Pokud M pracuje v prostoru $g(n) = O(f(n))$, pak

$$O(g^2(n)) = O(f^2(n))$$

- Tedy $\mathrm{SPACE}(g^2(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$

Technické předpoklady

- M nepohne hlavou na pracovní pásce nalevo od počáteční pozice
- M má jednoznačnou přijímající konfiguraci C_{acc}
  - Jediný přijímající stav q_1
  - Hlava na vstupní pásce je nad nejlevějším symbolem vstupu
  - Hlava na pracovní pásce je nad nejlevější buňkou omezeného prostoru
  - Pracovní páska je prázdná
- C_0^x označuje počáteční konfiguraci výpočtů M se vstupem x
- $n = |x|$ označuje délku vstupu x

Prohledáváme graf

Idea

Se vstupem x, hledej cestu z C_0^x do C_{acc} v grafu konfigurací $G_{M,x} = (V, E)$

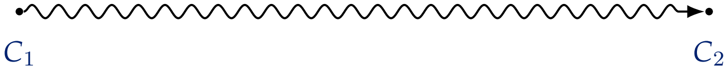
První návrh řešení: Použij DFS nebo BFS

- Oba algoritmy vyžadují paměť, která je přinejmenším lineární ve velikosti grafu
- $G_{M,x}$ může obsahovat až $2^{c_M f(n)}$ vrcholů pro nějakou konstantu c_M, která závisí na M
- DFS i BFS vyžadují prostor exponenciální v $f(n)$

Nemůžeme použít DFS ani BFS

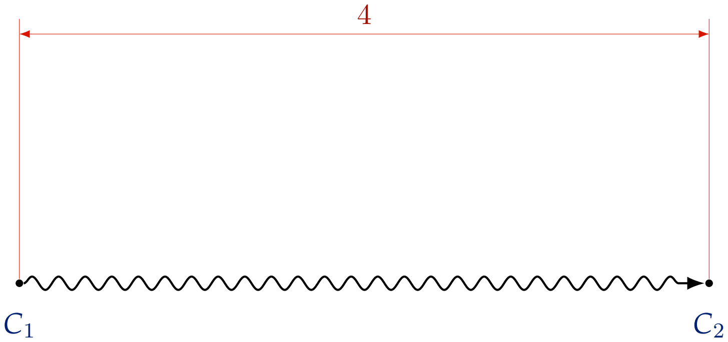
Rozděl a panuj

Existuje cesta z C_1 do C_2?



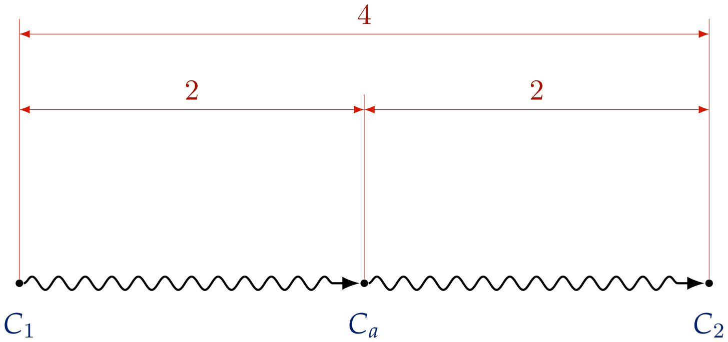
Rozděl a panuj

Existuje cesta z C_1 do C_2 délky nejvýš t?



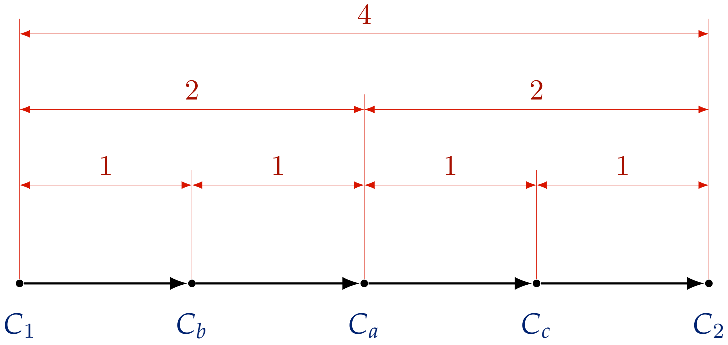
Rozděl a panuj

Existuje, pokud lze najít vrchol uprostřed



Rozděl a panuj

Půlení pokračuje dokud nedosáhneme délky nejvýš 1.



Hrany grafu, snadno ověřitelné

Prohledáváme graf s malou pamětí

- Předpokládejme (pro tuto chvíli), že M' může spočítat $f(n)$ pro vstup x
- Délka cesty z C_0^x do C_{acc} je nejvýš $2^{c_M f(n)}$

Rozděl a panuj

Cesta z C_1 do C_2 délky nejvýš 2^k existuje, právě když

1. $k = 0$ a $C_1 = C_2$ nebo $(C_1, C_2) \in E$, nebo
2. $k > 0$ a existuje prostřední vrchol C_m, pro který platí, že
   - existuje cesta z C_1 do C_m délky nejvýš 2^{k-1} a
   - existuje cesta z C_m do C_2 délky nejvýš 2^{k-1}

- Hloubka rekurze je $O(f(n))$
- Na každé úrovni rekurze je potřeba prostor $O(f(n))$ pro reprezentaci konfigurací C_1, C_2 a C_m
- Celkový prostor $O(f^2(n))$

Dosažitelnost

Funkce `Reachable`(C_1, C_2, k)

Vstup: Konfigurace C_1 a C_2, přirozené číslo k

Výstup: **true** pokud $G_{M,x}$ obsahuje cestu z C_1 do C_2 délky nejvýš 2^k, jinak **false**

```
if k = 0 then
    if C_1 = C_2 or (C_1, C_2) ∈ E then
        return true
    else
        return false
foreach konfiguraci C_m využívající prostor f(n) do
    if Reachable(C_1, C_m, k − 1) and Reachable(C_m, C_2, k − 1)
     then
        return true
return false
```

Volání `Reachable()`

- Pokud M' zná hodnotu $f(n)$, stačí mu zavolat

$$\texttt{Reachable}(C_0^x, C_{\mathrm{acc}}, c_M f(n))$$

- Jedna instance `Reachable()` používá prostor velikosti $O(f(n))$
  - konfigurace C_1, C_2, C_m používají prostor $f(n)$
  - $O(f(n))$ bitů stačí k reprezentaci těchto konfigurací
  - $O(f(n))$ bitů stačí k reprezentaci hodnoty k
- Hloubka rekurze je $O(f(n))$
- $O(f(n))$ instancí `Reachable()` je v každém okamžiku na zásobníku

Celkem je stačí prostor velikosti $O(f^2(n))$

Jsme tedy hotovi?

Jsme hotovi?

Co když M' nemůže spočítat hodnotu $f(n)$ pro vstup x?

- Funkce $f(n)$ nemusí být nutně algoritmicky vyčíslitelná
- $f(n)$ může být vyčíslitelná, ale k jejímu vyčíslení může být potřeba prostor $\omega(f^2(n))$
- I kdyby $f(n)$ byla vyčíslitelná v prostoru $O(f^2(n))$, funkce $f(n)$ může být neznámá, známe-li pouze M
- c_M je konstanta závisející na M
  - její hodnotu můžeme určit ze znalosti M

Je-li $f(n)$ neznámá

Idea

1. Zkoušej hodnoty $f(n) = 1, 2, 3, \ldots$
2. Zastav s hodnotou $f(n) = i$, pro niž
   - je nalezena cesta z C_0^x do C_{acc} nebo
   - z C_0^x není dosažitelná žádná konfigurace využívající prostor velikosti $i + 1$

Výpočet M'

Výpočet M' se vstupem x

```
i ← 1
// Volání Reachable() předpokládají, že f(n) = i
if Reachable(C_0^x, C_acc, c_M · i) then přijmi
foreach konfiguraci C využívající prostor i + 1 do
    if Reachable(C_0^x, C, c_M · i) then
        i ← i + 1
        goto 2
odmítni
```

M' rozhoduje L v prostoru $O(f^2(n))$.

Více zdrojů, více síly

Prostor

Deterministická prostorová složitost

Připomenutí

Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je funkce, která je definovaná pro každý vstup

- Deterministický Turingův stroj M pracuje v prostoru $f(n)$, pokud výpočet M nad libovolným vstupem x délky $|x| = n$ skončí a využije nejvýš $f(n)$ buněk pracovní pásky.
- $\mathrm{SPACE}(f(n))$ je třída jazyků přijímaných Turingovými stroji, které pracují v prostoru $O(f(n))$

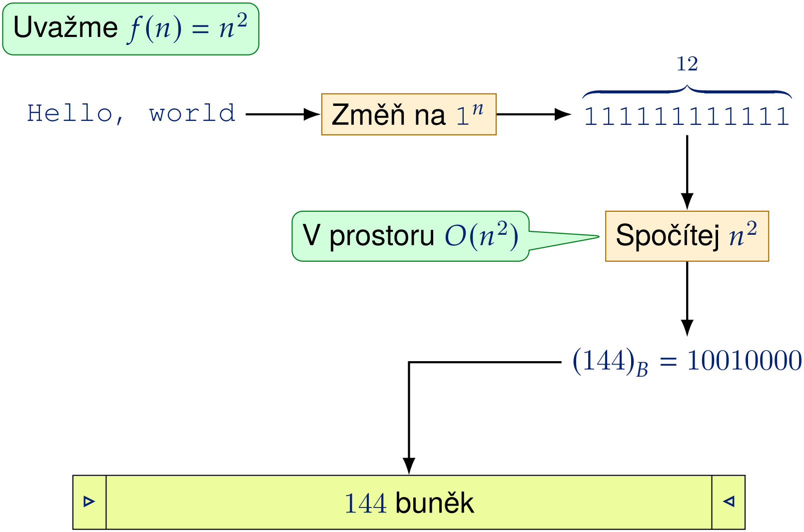
Prostorová konstruovatelnost

Definice

Funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $f(n) \geq \log n$, nazveme prostorově konstruovatelnou, je-li funkce, která zobrazuje 1^n na binární reprezentaci $f(n)$ vyčíslitelná v prostoru $O(f(n))$.

- Funkce obvykle používané pro měření prostorové složitosti jsou prostorově konstruovatelné, například
  - $\lceil \log_2 n \rceil$
  - $\lceil \sqrt{n} \rceil$
  - polynomy
  - $\lceil n \log_2 n \rceil$

Efektivní alokace paměti



Efektivní alokace paměti

Předpokládejme, že $f(n)$ je prostorově konstruovatelná strojem M_f

1. Se vstupem x délky $n = |x|$
2. Sestav řetězec $w = \mathtt{1}^n$
   - Každý znak x změň na $\mathtt{1}$
3. Vypočítej $k = f(n)$
   - Spusť $M_f(w)$
4. Vyznač k buněk na pásce

Využívá prostor $O(f(n))$, ne více, než potřebujeme alokovat.

Věta o deterministické prostorové hierarchii

Věta (o deterministické prostorové hierarchii)

Pro každou prostorově konstruovatelnou funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existuje jazyk A, který je rozhodnutelný v prostoru $O(f(n))$, nikoli však v prostoru $o(f(n))$.

Idea důkazu:

- A definujeme popsáním stroje D, který rozhoduje A
- Zajistíme, že
  - D pracuje v prostoru $O(f(n))$
  - Pro každý stroj M, který pracuje v prostoru $o(f(n))$ platí, že $L(M) \neq L(D)$
  - D toho dosahuje implementací diagonální metody

První nápad

První nápad konstrukce D

1. Se vstupem $x = \langle M \rangle$
2. Simuluj $M(\langle M \rangle)$ v prostoru $f(n)$
   - Pokud simulace potřebuje více prostoru, odmítni
3. Pokud M odmítl, přijmi, jinak odmítni

- Nechť M pracuje v prostoru $g(n) = o(f(n))$, pak

$$(\forall c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)[cg(n) \leq f(n)]$$

- Prostor $f(n)$ postačuje k simulaci $M(x)$ se vstupy x, které jsou „dost dlouhé“
- Nezáleží na chování se stroji M, které nepracují v prostoru $o(f(n))$

Problém s asymptotikou

Není-li řetězec $\langle M\rangle$ dost dlouhý, prostor $f(n)$ nemusí stačit k simulaci $M(\langle M\rangle)$.

Řešení

- Uvážíme řetězce tvaru $\langle M\rangle \mathtt{10}^*$
- $x = \langle M\rangle \mathtt{10}^{n_0}$ je dost dlouhý pro nějaké n_0
- Prostor $f(n)$ stačí k simulaci $M(x)$
- $D(x)$ přijme, právě když $M(x)$ odmítne
- Tedy $L(M) \neq L(D)$

$\langle M\rangle \mathtt{1}$
$\langle M\rangle \mathtt{10}$
$\langle M\rangle \mathtt{100}$
$\langle M\rangle \mathtt{1000}$
$\langle M\rangle \mathtt{10000}$
$\langle M\rangle \mathtt{100000}$
$\vdots$

Problém se zastavením

I je-li prostor $f(n)$ dostatečný pro simulaci $M(\langle M \rangle)$, výpočet se může zacyklit.

Řešení

Zastav, pokud simulace vyžaduje více než $2^{f(n)}$ kroků.

- Nechť M pracuje v prostoru $g(n) = o(f(n))$
- Uvažme vstup x délky $n = |x|$
- Je-li $M(x)\downarrow$, pak výpočet skončí do $2^{c_M g(n)}$ kroků pro nějakou konstantu c_M
- Je-li n dost velké, simulace $M(x)$ skončí do $2^{f(n)}$ kroků

Stroj D

Výpočet D se vstupem x

$n \leftarrow |x|$
Vypočti $f(n)$ pomocí prostorové konstruovatelnosti
Označ $f(n)$ buněk na pracovní pásce
if v následujících krocích hlava opustí vyznačený prostor **then**
    odmítni
if x nemá tvar $\langle M\rangle\mathtt{10}^*$ **then** odmítni
Simuluj $M(x)$ s počítáním kroků simulace
if počet simulovaných kroků překročí $2^{f(n)}$ **then** odmítni
if M přijal **then** odmítni **else** přijmi

Definujeme $A = L(D)$

Prostor použitý strojem D

- Výpočet $f(n)$ vystačí s prostorem $O(f(n))$ díky prostorové konstruovatelnosti
- Poté hlava D zůstane v rámci $f(n)$ vyznačených buněk
- D tedy pracuje v prostoru $O(f(n))$
- Čítač kroků lze reprezentovat pomocí $f(n)$ bitů
  - Může být na další stopě

A je rozhodnutelný v prostoru $O(f(n))$.

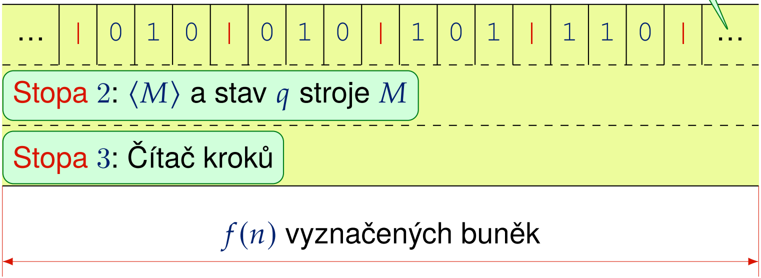
D simuluje M

Vstupní páska D (i M)

$\langle M\rangle$`1000000000000`

Stopa 1: páska M
každý znak zakódován
$b = \lceil \log_2 |\Sigma| \rceil$ bity

Pracovní páska D má tři stopy



Menší prostor nestačí

- Nechť $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je stroj, který pracuje v prostoru $g(n) = o(f(n))$
- Ukážeme, že $A \neq L(M)$

Pro nějakou konstantu c_M platí, že se vstupem x délky $n = |x|$

- $M(x)$ lze simulovat v prostoru $c_M g(n)$
- $M(x)$ skončí výpočet do $2^{c_M g(n)}$ kroků

- Připomeňme univerzální TS
- Existuje konstanta c_M taková, že M se vstupem x má nejvýš $2^{c_M g(n)}$ různých konfigurací
- Prostor $c_M g(n)$ stačí k reprezentaci jedné konfigurace
  - $\lceil \log_2 |\Sigma| \rceil$ bitů pro každé políčko pracovní pásky M
  - $\lceil \log_2 |Q| \rceil$ bitů pro reprezentaci stavu M

Menší prostor nestačí

$$g(n) = o(f(n)) \implies (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)[c_M g(n) \leq f(n)]$$

Existují konstanty c_M a n_0 takové, že se vstupem x délky $n \geq n_0$

- $M(x)$ lze simulovat v prostoru $c_M g(n) \leq f(n)$
- $M(x)$ skončí výpočet do $2^{c_M g(n)} \leq 2^{f(n)}$ kroků

- Simulace M se vstupem $x = \langle M \rangle \mathtt{1}\mathtt{0}^{n_0}$ skončí a
- $D(x)$ přijme právě když $M(x)$ odmítne

$$\boxed{L(D) \neq L(M)}$$

Prostorová hierarchie

Věta (o deterministické prostorové hierarchii)

Pro každou prostorově konstruovatelnou funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *existuje jazyk* A*, který je rozhodnutelný v prostoru* $O(f(n))$*, nikoli však v prostoru* $o(f(n))$*.*

Důsledek

Jsou-li $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkce, pro které platí, že* $f_1(n) \in o(f_2(n))$ *a* f_2 *je prostorově konstruovatelná, potom*

$$\mathrm{SPACE}(f_1(n)) \subsetneq \mathrm{SPACE}(f_2(n))$$

Polynomy a související funkce

Důsledek

Pro každá dvě reálná čísla $0 \leq \epsilon_1 < \epsilon_2$ *platí, že*

$$\mathrm{SPACE}(n^{\epsilon_1}) \subsetneq \mathrm{SPACE}(n^{\epsilon_2})$$

- Je-li ϵ_2 racionální číslo, pak
  - n^{ϵ_2} je prostorově konstruovatelná
    - Lze jednoduše ukázat pro přirozená čísla
    - Lze ukázat i pro racionální čísla
  - Ostrá inkluze plyne z prostorové hierarchie
- Je-li ϵ_2 iracionální číslo
  - Racionální čísla jsou hustá v reálných číslech
  - Existuje racionální číslo ϵ splňující $\epsilon_1 < \epsilon < \epsilon_2$
  - Z prostorové hierarchie a prostorové konstruovatelnosti n^{ϵ}

$$\mathrm{SPACE}(n^{\epsilon_1}) \subsetneq \mathrm{SPACE}(n^{\epsilon}) \subseteq \mathrm{SPACE}(n^{\epsilon_2})$$

Logaritmický,polynomiální a exponenciální prostor

Důsledek

$\mathrm{NL} \subsetneq \mathrm{PSPACE} \subsetneq \mathrm{EXPSPACE} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{SPACE}(2^{n^k})$.

Definice

Savičova věta

Prostorová hierarchie

$$\mathrm{NL} = \mathrm{NSPACE}(\log_2 n) \subseteq \mathrm{SPACE}((\log_2 n)^2) \subsetneq \mathrm{PSPACE} \subsetneq \mathrm{EXPSPACE}$$