Predmet: Mataliza 1
Ukol: 4.
Verze: 2.
Autor: David Napravnik
Prezdivka: DN

zadani

Spoctete $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1}$

reseni

Budeme pouzivat vetu o dvou pocicajtech, tudiz si vytvorime limity vetsi a mensi nez je zadana.
$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n-1)^2} \leq lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} \leq lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)^2}$

vezmeme mensi limitu a vypocteme ji
$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n-1)^2} = lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n-1} * \sqrt[n]{n-1})$
pouzijeme VOAL
$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n-1} * lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n-1}$
pouzijeme lemma $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (-1 je konstanta, kterou vzhledem k tomu, ze n jde k nekonecnu muzeme vypustit)

to same provedeme pro vetsi limitu
jelikoz je to identicky postup, rovnou rekneme, ze je rovna jedne

doplnime do vety o dvou policajtech
$1 \leq lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} \leq 1$
$\underline{\underline{lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = 1}}$

zadani

Spoctete limitu posloupnosti zadane $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{4} + 1$

reseni

Nejdrive zkusme najit a takove ze $a_{n+1} = a_n$
$a = \frac{a^2}{4} + 1$; $a = 2$
z toho vime, ze pokud posloupnost konverguje, tak to bude k dvojce.

zjistime jak se posloupnost chova
$a > \frac{a^2}{4} + 1$; $a \in \emptyset$
$a = \frac{a^2}{4} + 1$; $a \in \{2\}$
$a < \frac{a^2}{4} + 1$; $a \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
z toho vyplyva ze $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1} \ldots$ posloupnost je neklesajici

overime ze nepreskocime dvojku az se k ni budeme priblizovat
$\frac{a_n^2}{4} + 1 < 2$; $a \in (2, \infty)$
coz nam rika, ze dokud bude $a_n \leq 2$, tak $a_{n+1} \leq 2$

Jelikoz $a_1 < 2$, posloupnost je neklesajici a 2 nijak nepreskocime, pak
<u>posloupnost konverguje k 2</u>