

8.2 definice: skalarní součin nad \mathbb{R}

Bud V vektorový prostor nad \mathbb{R} .

Pak skalární součin je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$, splňující $\forall x, y, z \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

- $\langle x, y \rangle \geq 0$ a rovnost nastane pouze pro $x = 0$
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

8.3 definice: skalární součin nad \mathbb{C}

to same jako 8.2 se zmenou:

- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

8.8 definice: Norma indukovaná skalárním součinem

Norma indukovaná skalárním součinem je definováno pro $x \in V$ jako $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

8.9 definice: Kolmost

vektory $x, y \in V$ jsou kolmé pokud $\langle x, y \rangle = 0$

8.11 veta: Pythagorova

Pokud $x, y \in V$ jsou kolmé, tak $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

dukaz

$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle =$
dle definice 8.2 item 2.

$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle$

dle předpokladu kolmosti $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle = 0$

$\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ a $\langle y, y \rangle = \|y\|^2$

8.13 veta: Cauchyho-Schwarzova nerovnost

Pro každé $x, y \in V$ platí $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

8.15 definice: Norma

Bud V vektorový prostor nad \mathbb{R} resp. \mathbb{C}

Pak norma je zobrazení $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, splňující $\forall x, y \in V \forall \alpha \in \mathbb{R}$

- $\|x\| \geq 0$ a rovnost nastane pouze pro $x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Příklady norm v $x \in \mathbb{R}^n$:

- $p \geq 1$ p-norma
- $p = 2$ eukleidovská
- $p = 1$ součet
- $p = \infty$ maximová (čebyševova)

8.20 pozorovani: rovnobeznikove pravidlo

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

8.21 definice: metrika

$\forall x, y, z \in M$:

- $d(x, y) \geq 0$ a = nastane pouze pro $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

8.27 veta: Fourierovy koeficienty

Gramova–Schmidtova ortogonalizace

8.38 veta: Ortogonalni doplněk

8.29 veta: Vlastnosti ortogonálního doplňku množiny