Lineární Algebra 2 - NMAI058

LS 2019/2020

Mgr. Pavel Hubáček, Ph.D.

3. 3. 2020

https://iuuk.mff.cuni.cz/~hubacek/LA2

2. přednáška

- ortonormální báze
- Fourierovy koeficienty
- Gramova-Schmidtova ortogonalizace

Dnes

ortogonální doplněk + ortogonální projekce

Ortogonální doplněk

Definice 8.38 - Ortogonální doplněk

Buď V vektorový prostor a $M \subseteq V$. Pak ortogonální doplněk M je

$$M^{\perp} := \{x \in V;\ \langle x, y \rangle = 0\ \forall y \in M\}\ .$$

Tvrzení 8.40 - Vlastnosti ortogonálního doplňku množiny

Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$. Pak

1. $M^{\perp}$ je podprostor V,
2. je-li $M \subseteq N$ pak $M^{\perp} \supseteq N^{\perp}$,
3. $M^{\perp} = \operatorname{span}(M)^{\perp}$.

Tvrzení 8.41 - Vlastnosti ortogonálního doplňku podprostoru

Buď U podprostor vektorového prostoru V. Potom platí:

1. Je-li $z_1, \dots, z_m$ ortonormální báze U,
   a je-li $z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n$ její rozšíření na ortonormální bázi V,
   pak $z_{m+1}, \dots, z_n$ je ortonormální báze $U^\perp$.
2. $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$,
3. $V = U + U^\perp$,
4. $(U^\perp)^\perp = U$,
5. $U \cap U^\perp = \{o\}$.

Ortogonální projekce

Definice 8.43 - Ortogonální projekce

Buď V vektorový prostor a U jeho podprostor. Pak projekcí vektoru $x \in V$ rozumíme takový vektor $x_U \in U$, který splňuje

$$\|x - x_U\| = \min_{y \in U} \|x - y\| .$$

Tvrzení 8.44 - O kolmici

Buď U podprostor vektorového prostoru V.

Buď $x \in V$ a $y \in U$ takové, že $x - y \in U^{\perp}$. Pak

$$\|x - y\| < \|x - z\| \quad \forall z \in U \setminus \{y\} \ .$$

Tvrzení 8.45 - O ortogonální projekci

Buď U podprostor vektorového prostoru V. Pak pro každé $x \in V$ existuje právě jedna projekce $x_U \in U$ do podprostoru U.

Navíc, je-li $z_1, \ldots, z_m$ ON báze U, pak

$$x_U = \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Důsledek 8.46 - Charakterizace projekce

Vektor $y \in U$ je projekcí vektoru $x \in V$ do podprostoru U právě tehdy, když $x - y \in U^{\perp}$.

Gramova-Schmidtova Ortogonalizace

Vstup: $x_1, \ldots, x_n \in V$ lineárně nezávislé.

1. **for** $k := 1$ **to** n **do**
2. $\quad y_k := x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j,$ //nalezneme kolmici
3. $\quad z_k := \frac{1}{\|y_k\|} y_k,$ //normalizujeme délku na 1
4. **end for**

Výstup: $z_1, \ldots, z_n$ ortonormální báze prostoru $\mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Tvrzení 8.53 - Gramova matice

Buď U podprostor reálného vektorového prostoru V. Nechť U má bázi $B = \{w_1, \ldots, w_m\}$. Označme jako Gramovu matici $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matici s prvky $G_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle$.

Pak G je regulární a vektor souřadnic $s = [x_U]_B$ projekce x_U libovolného vektoru $x \in V$ do podprostoru U je řešením soustavy

$$Gs = (\langle w_1, x \rangle, \ldots, \langle w_m, x \rangle)^T.$$

Ortogonální projekce v $\mathbb{R}^m$

Tvrzení 8.54 - Ortogonální doplněk v $\mathbb{R}^n$

Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pak $\mathcal{R}(A)^\perp = \operatorname{Ker}(A)$.

Důsledek 8.57

Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pak

1. $\operatorname{Ker}(A^T A) = \operatorname{Ker}(A)$,
2. $\mathcal{R}(A^T A) = \mathcal{R}(A)$,
3. $\operatorname{rank}(A^T A) = \operatorname{rank}(A)$.

Tvrzení 8.59 - Ortogonální projekce v $\mathbb{R}^m$

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti n. Pak projekce vektoru $x \in \mathbb{R}^m$ do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ je $x' = A(A^T A)^{-1} A^T x$.

3. přednáška - shrnutí

- ortogonální doplněk
- ortogonální projekce
- projekce v $\mathbb{R}^n$

Příští přednáška

projekce a metoda nejmenších čtverů + ortogonální matice