1 Číselné obory a jejich vlastnosti

Známe následující číselné obory:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} && \text{přirozená čísla}\\
&\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} && \\
&\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} && \text{celá čísla}\\
&\mathbb{Q} = \{\frac{k}{n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} && \text{racionální čísla}
\end{aligned}
$$

A víme, že $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Můžeme říci, že množina $\mathbb{Q}$ je „větší“ než množina $\mathbb{N}$? Obě mají nekonečně mnoho prvků. *Mohutnost množiny* je pojem pro velikost množiny. V případě konečných množin je to počet prvků.

Definice 1.1. Dvě množiny M a N mají stejnou *mohutnost*, pokud existuje bijekce z A do B. Množina M je *spočetná* pokud má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$.

Snadno nahlédneme, že množina celých čísel je spočetná, stačí ji přeuspořádat: $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$. Množina racionálních čísel je také spočetná, potřebnou bijekci lze zkonstruovat seřazením zlomků v základním tvaru v pořadí, v jakém je prochází šipka na Obrázku 1.1.

Alternativně můžeme každé racionální číslo reprezentovat *desetinným rozvojem*. Tento desetinný rozvoj bude vždy konečný nebo periodický.

Definice 1.2. *Množina reálných čísel* $\mathbb{R}$ je tvořena všemi desetinnými rozvoji

$$\pm d_0, d_1 d_2 d_3 \dots$$

kde $d_0 \in \mathbb{N}_0$ a $d_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ pro $i \in \mathbb{N}$.

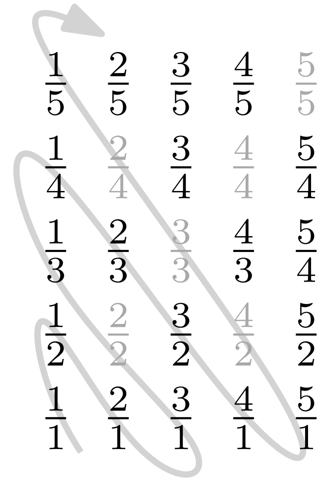
Pozor: Jednomu reálnému číslu může odpovídat více než jeden desetinný rozvoj. Konkrétně: $+0,000\dots = -0,000\dots$ a $1,000\dots = 0,999\dots$.

Čísla v $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nazýváme *iracionální*.

Věta 1.3 (Iracionalita $\sqrt{2}$)**.** *$\sqrt{2}$ je iracionální.*

Věta 1.4 (Hustota racionálních čísel.)**.** *Pro každá dvě reálná čísla a a b, taková že $a < b$ existuje racionální číslo q takové, že $a < q < b$.*

Důkaz. Cvičení. □



Obrázek 1.1: Bijekce mezi přirozenými čísly a kladnými zlomky v základním tvaru.

Této vlastnosti se říká, že racionální čísla jsou *hustá podmnožina* reálných čísel. Podobně i iracionální čísla jsou hustá podmnožina reálných čísel.

Věta 1.5 (Nespočetnost reálných čísel.)**.** *Množina reálných čísel není spočetná.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje posloupnost reálných čísel $(a_1, a_2, \dots)$ taková, že zobrazení $f(n) = a_n$ je bijekce z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ si jako $a_n(m)$ označíme m-tou cifru za desetinnou čárkou v dekadickém rozvoji čísla a_n; má-li rozvoj jen konečně mnoho cifer za desetinnou čárkou, doplníme je nekonečně mnoho nulami, a v případě dvojznačného dekadického rozvoje (například $134{,}300684999999\dots$ a $134{,}300685000000\dots$ je totéž reálné číslo) volíme rozvoj s konečně mnoha devítkami. Číslo α pak definujeme dekadickým rozvojem

$$\alpha = 0, b_1 b_2 b_3 \dots,$$

kde n-tá cifra b_n je dána vztahem

$$b_n = \begin{cases} a_n(n) + 1 & \text{pro } 0 \le a_n(n) < 8 \text{ a} \\ a_n(n) - 1 & \text{pro } a_n(n) = 8 \text{ nebo } 9. \end{cases}$$

V tomto rozvoji se za desetinnou čárkou nevyskytuje ani jedna devítka a je tedy jednoznačný. Dále $b_n \neq a_n(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tudíž $\alpha \neq a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zobrazení f tedy není na (surjektivní), což je spor s předpokladem, že je to bijekce. □

Dále ještě máme obor komplexních čísel $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, zabývat se jimi budeme pouze okrajově. Množiny $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ jsou (algebraická) *tělesa*.

Relace $\geq$ definuje *uspořádání* na reálných (a tedy i racionálních) číslech, které se navíc „hezky chová“ vůči aritmetickým operacím; pokud $a < b$, $a +$

$c < b + c$ pro libovolné c a $ac < bc$ pokud $c > 0$. Říkáme proto, že $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$ jsou *uspořádaná* tělesa. Naopak $\mathbb{C}$ uspořádané není - prvky $\mathbb{C}$ sice lze nějak uspořádat, ale neexistuje uspořádání, které by mělo výše popsané vlastnosti vůči aritmetickým operacím.

Definice 1.6. Nechť M je množina s uspořádáním $\succeq$ a $A \subset M$.

- Množina A je *shora omezená* pokud existuje $m \in M$ takové, že $m \succeq a$ pro každý prvek $a \in A$. Takovému m říkáme *horní závora množiny* A.
- Prvek $m \in M$ je *supremum množiny* A, pokud m je nejmenší horní závora A. Zapisujeme $m = \sup A$.
- Prvek $m \in A$ je *maximum množiny* A, pokud pro každé $a \in A$ platí, že $m \succeq a$. Zapisujeme $m = \max A$.
- Množina A je *zdola omezená* pokud existuje $m \in M$ takové, že $a \succeq m$ pro každý prvek $a \in A$. Takovému m říkáme *dolní zavora množiny* A.
- Prvek $m \in M$ je *infimum množiny* A, pokud m je největší dolní závora A. Zapisujeme $m = \inf A$.
- Prvek $m \in A$ je *minimum množiny* A, pokud pro každé $a \in A$ platí, že $a \succeq m$. Zapisujeme $m = \min A$.
- Množina A je *omezená* pokud je shora a zdola omezená.

Pokud množina není shora omezená, nemá podle výše uvedené definice supremum ani maximum, množina, která není zdola omezená naopak nemá minimum ani infimum. Pro množiny čísel se obvykle dodefinuje, že supremem shora neomezené množiny je $+\infty$ a infimem zdola neomezené množiny je $-\infty$. V případě prázdné množiny pak definujeme její supremum jako $-\infty$ a infimum jako $+\infty$. Maximum, respektive minimum ale neexistuje.

Obecně neplatí, že shora omezená množina musí mít maximum a supremum. Pokud maximum existuje, existuje i supremum a jsou si rovny. Totéž platí pro infimum a minimum.

Příklad 1.7. Nechť $M = \mathbb{R}$ a A je otevřený interval $(0, 1)$. Pak A je shora omezená množina - například 1 je její horní závora, ale nemá maximum.

Příklad 1.8. Nechť $M = \mathbb{R}$ a $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ splňuje $\sup A = \max A = 1$ a $\inf A = 0$ a nemá minimum. Protože $1 \in A$ a všechny prvky A jsou zjevně menší nebo rovny 1, je 1 maximem a zároveň supremem A. Všechny prvky A jsou kladné, 0 je tedy dolní závorou A. Sporem ukážeme, že nemůže existovat žádná větší dolní závora a 0 je tedy infimem množiny A. Předpokládejme, že $\varepsilon > 0$ je dolní závorou A. Uvažme přirozené číslo n splňující $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (takové číslo vždy existuje, například $n = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$). Pak $\frac{1}{n} < \varepsilon$ a zároveň $\frac{1}{n} \in A$, což je spor s tím, že je ε dolní závorou A. Dokázali jsme tedy, že $\inf A = 0$. Protože $0 \notin A$, A nemá minimum.

Příklad 1.9. Nechť $M = \mathbb{Q}$ a A je množina racionálních čísel q splňujících $q^2 < 2$. Tato množina je rovněž shora omezená, každé racionální číslo větší než $\sqrt{2}$ (například 2) je její horní závora, ale nemá dokonce ani supremum v $\mathbb{Q}$ - neexistuje nejmenší horní závora.

Věta 1.10 (Úplnost reálných čísel)**.** *Každá neprázdná shora omezená podmnožina* $\mathbb{R}$ *má supremum.*

Větu nebudeme dokazovat. Rozmyslete si, že z ní plyne, že každá neprázdná zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum. Této vlastnosti reálných čísel se říká *úplnost*. Je to klíčová vlastnost pro mnoho dalších věcí, které považujeme za samozřejmé, například umožňuje smysluplnou definici funkcí e^x a $\sin x$. Z Příkladu 1.9 naopak plyne, že těleso racionálních čísel úplné není.

Věta 1.11 (Jedinečnost $\mathbb{R}$)**.** *Těleso reálných čísel je jediné úplné uspořádané těleso.*

Definice 1.12. Absolutní hodnota reálného čísla $a \in \mathbb{R}$ je definována

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Absolutní hodnota vyjadřuje vzdálenost daného reálného čísla od nuly. Obecně, pro dvě reálná čísla x a y odpovídá hodnota $|x-y|$ vzdálenosti mezi x a y na reálné ose. Reálná čísla s absolutní hodnotou jsou prvním příkladem *metrického prostoru*, který potkáváme.

Definice 1.13. *Metrický prostor* je dvojice (M, d), kde M je množina a $d : M \times M \to [0, \infty)$ je funkce splňující následující podmnínky. Pro každé $x, y \in M$ platí, že

(*i*) $d(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$,

(*ii*) $d(x, y) = d(y, x)$ a

(*iii*) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pro každé $z \in M$.

Funkci d nazýváme *metrika na* M.

Funkce $d(x, y) = |x-y|$ (pro $x, y \in \mathbb{R}$) zřejmě splňuje první dvě podmínky. Poslední podmínka se nazývá *trojúhelníková nerovnost*. Z následující věty plyne, že funkce $|x-y|$ splňuje i třetí podmínku (dosazením $a = x - z$ a $b = z - y$).

Věta 1.14 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Pro každé* $a, b \in \mathbb{R}$ *platí, že* $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Důkaz. Cvičení. □

Zobecněním této metriky je *Eukleidovská metrika ve vícerozměrném prostoru* $\mathbb{R}^d$. Vzdálenost mezi dvěma body $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{d}}$, kde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ a $\mathbf{y} = (y_1, \ldots y_d)$ je definována jako

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}.$$

2 Posloupnosti a jejich limity

Nejprve ještě doplníme dvě užitečné nerovnosti.

Věta 2.1 (Bernoulliova nerovnost)**.** *Pro každé reálné číslo $x \geq -1$ a celé číslo $n \geq 0$ platí, že*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Důkaz. Pro $n = 0, 1$ zjevně platí. Platí-li pro n, vynásobíme obě její strany nezáporným číslem $1 + x$ a dostaneme, že

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x,$$

což je Bernoulliova nerovnost pro $n + 1$. □

Věta 2.2 (Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.)**.** *Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a nezáporná reálná čísla $x_1, \ldots, x_n \in [0, \infty)$ platí nerovnost*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Definice 2.3. Nechť M je množina. *Posloupnost s hodnotami v M* je zobrazení z $\mathbb{N}$ do M.

Každé přirozené číslo n je tedy zobrazeno na nějaký prvek a_n množiny M. Tomuto prvku říkáme *n-tý prvek posloupnosti.* Posloupnost $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ obvykle značíme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, nebo jen (a_n). Zápis $(a_n) \subset M$ znamená, ze jde o posloupnost s hodnotami v M.

Pokud nebude uvedeno jinak, budeme se zabývat posloupnostmi reálných čísel. Některé poznatky také zobecníme pro posloupnosti s hodnotami v $\mathbb{R}^d$.

Definice 2.4. Posloupnost reálných čísel (a_n) je

- *shora omezená* pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n < K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *zdola omezená* pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n > K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *omezená* pokud je shora i zdola omezená,
- *rostoucí* pokud $a_n < a_m$ pro každé $n < m$,
- *neklesající* pokud $a_n \leq a_m$ pro každé $n < m$,
- *klesající* pokud $a_n > a_m$ pro každé $n < m$,
- *nerostoucí* pokud $a_n \geq a_m$ pro každé $n < m$,
- *monotónní* pokud je neklesající nebo nerostoucí.

Definice 2.5 (Vlastní limita)**.** Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}$ je *(vlastní) limita* posloupnost (a_n), pokud pro každé reálné číslo $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $|a_n - A| < \varepsilon$. Pokud posloupnost má vlastní limitu, říkáme, že *konverguje*, případně, že je *konvergentní* a píšeme

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A.$$

Definice 2.6 (Nevlastní limita)**.** Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Řekneme, (a_n) má *(nevlastní) limitu* ∞, píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, pokud pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $a_n > K$. Řekneme, (a_n) má *(nevlastní) limitu* $-\infty$, píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ pokud pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $a_n < K$.

Limitu lze definovat i pro posloupnosti s hodnotami v $\mathbb{R}^d$ a obecně v libovolném metrickém prostoru. Pro metrický prostor (M, d) řekneme, že $a \in M$ je limitou posloupnosti $(a_n) \subset M$ pokud vzdálenost posloupnosti od bodu a konverguje k nule. Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, pokud $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$.

Věta 2.7 (Jednoznačnost limity)**.** *Každá posloupnost reálných čísel* (a_n) *má nejvýše jednu limitu (vlastní či nevlastní).*

Důkaz. Pro spor budeme předpokládat, že (a_n) má dvě limity $K < L$. Vezmeme $\varepsilon > 0$ tak malé, že $\varepsilon < (L - K)/2$. Protože K i L je limita posloupnosti, existují čísla $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že $n > n_1 \Rightarrow |a_n - K| < \varepsilon$ a $n > n_2 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. Pak ale pro n větší než $\max(n_1, n_2)$ platí obě nerovnosti současně: $|a_n - K| < \varepsilon$ & $|a_n - L| < \varepsilon$. Pomocí trojúhelníkové nerovnosti odtud získáme spor:

$$L - K = |L - K| \leq |L - a_n| + |a_n - K| < 2\varepsilon < L - K.$$

□

Věta 2.8 (O limitě monotónní posloupnosti)**.** *Je-li posloupnost reálných čísel* (a_n) *neklesající a shora omezená, pak konverguje.*

Důkaz. Supremum

$$a = \sup(\{a_1, a_2, \ldots\})$$

je dobře definované díky omezenosti (a_n) shora. Podle definice suprema pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a \ ,$$

(jinak by $a - \varepsilon$ bylo horní závorou menší než supremum, což nelze). Díky monotonii (a_n) a vlastnosti suprema tyto nerovnosti platí i pro každé a_n s $n > n_0$. Ukázali jsme tedy, že $\lim a_n = a$. □

Totéž platí, je-li (a_n) nerostoucí a zdola omezená. Snadno se podobně dokáže, že je-li a_n neklesající a shora neomezená, je $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Je-li a_n nerostoucí a zdola neomezená, je $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Monotonii (a_n) stačí vždy předpokládat jen pro každé $n > n_0$.

Definice 2.9 (Podposloupnost)**.** Posloupnost (b_n) je *podposloupností* posloupnosti (a_n), když existuje takové rostoucí zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, že $b_n = a_{f(n)}$. Jinými slovy, existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < \ldots$, že

$$b_n = a_{k_n}, \ n = 1, 2, \ldots \ .$$

Je jasné, že pak $k_n \geq n$ pro každé n. Relace „být podposloupností“ je tranzitivní a reflexivní, ale ne antisymetrická.

Věta 2.10 (O limitě podposloupnosti)**.** *Je-li* (b_n) *podposloupnost* (a_n) *a* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, *pak i* $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Důkaz. Cvičení. □

Nalezneme-li tedy v posloupnosti (a_n) dvě podposloupnosti s různými limitami, $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje.

Příklad 2.11. Konstantní posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$ a $(-1, -1, -1, \ldots)$ s limitami 1 a -1 jsou podposloupnostmi v $(a_n) = ((-1)^n)$, takže $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ neexistuje.

Pro výpočty nevlastních limit zavedeme *rozšířenou reálnou osu* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, která vznikne přidáním obou nekonečen k reálným číslům. Porovnávání a aritmetické operace na $\mathbb{R}^*$ definujeme následovně:

$$\begin{aligned}
&\forall a \in \mathbb{R}:\ -\infty < a < +\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq -\infty:\ a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq +\infty:\ a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a > 0:\ a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \pm\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0:\ a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \mp\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}:\ \frac{a}{\pm\infty} = 0\ .
\end{aligned}$$

Zbylé výrazy

$$(+\infty) + (-\infty),\ (-\infty) + (+\infty),\ 0 \cdot (\pm\infty),\ (\pm\infty) \cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{a}{0} \quad \text{pro} \quad a \in \mathbb{R}^*$$

— součet dvou nekonečen s opačnými znaménky, součin nuly a nekonečna, podíl dvou nekonečen a každý podíl s nulou ve jmenovateli — ponecháváme nedefinované, jsou to tzv. *neurčité výrazy.*

Následující výsledek je základem pro výpočty konkrétních limit.

Věta 2.12 (Aritmetika limit)**.** *Nechť* $(a_n), (b_n)$ *jsou posloupnosti reálných čísel s* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}^*$. *Pak*

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$, *je-li výraz na pravé straně definován,*

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$, *je-li výraz na pravé straně definován,*

(iii) *pokud* $b_n \neq 0$ *pro každé* $n > n_0$, *pak* $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b$, *je-li výraz na pravé straně definován.*

Důležité je, že aritmetika limit funguje jen jednosměrně. Není obecně pravda, že když $(a_n + b_n)$ konverguje k a, pak konvergují i (a_n) a (b_n) a $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a$ (například posloupnosti $a_n = (-1)^n$ a $b_n = -(-1)^n$ nekonvergují, ale jejich součet ano). Totéž platí pro součin a podíl.

V jednom případě limity součinu postačují slabší předpoklady — limita jedné z posloupností nemusí existovat:

Věta 2.13 (Násobení limitní nulou)**.** *Nechť (a_n) je omezená a (b_n) konverguje k 0. Pak $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$.*

Důkaz. Cvičení. □

Věta 2.14 (O limitě a uspořádání))**.** *Nechť posloupnosti $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ mají vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$.*

(i) *Když $a < b$, tak existuje n_0, že $n > n_0 \Rightarrow a_n < b_n$.*

(ii) *Když $a_n \le b_n$ pro každé $n > n_0$, pak $a \le b$.*

Toto tvrzení platí beze změny i pro nevlastní limity (kde bereme $-\infty < a < +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$). Je třeba nezapomínat, že ostrá nerovnost může v limitě přejít v rovnost: $a_n = 1 - 1/n < b_n = 1$ pro každé n, ale $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

3 Posloupnosti - pokračování

Minule jsme skončili formulací následující věty:

Věta (O limitě a uspořádání)**.** *Nechť posloupnosti* $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ *mají vlastní limity* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$.

(i) *Když* $a < b$*, tak existuje* n_0*, že* $n > n_0 \Rightarrow a_n < b_n$.

(ii) *Když* $a_n \leq b_n$ *pro každé* $n > n_0$*, pak* $a \leq b$.

Důkaz. (Ponechán jako samostatné cvičení.)

(i) Pro ε, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$, existuje n_0, že pro $n > n_0$ je $a_n < a + \varepsilon < (a+b)/2 < b - \varepsilon < b_n$, takže $a_n < b_n$.

(ii) Kdyby bylo $a > b$, pro velké n by podle (i) platilo $a_n > b_n$, což je ve sporu s předpokladem.

□

Toto tvrzení platí beze změny i pro nevlastní limity (kde bereme $-\infty < a < +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$). Je třeba nezapomínat, že ostrá nerovnost může v limitě přejít v rovnost: $a_n = 1 - 1/n < b_n = 1$ pro každé n, ale $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

Věta 3.1 (O dvou policajtech)**.** *Nechť posloupnosti* $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ *splňují, že* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a \in \mathbb{R}$ *a pro každé* $n > n_0$ *je* $a_n \leq c_n \leq b_n$*. Pak* (c_n) *konverguje a* $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Z (ii) předchozí věty plyne, že pokud (c_n) má limitu, pak je rovna a. Potřebujeme ale dokázat, že limita (c_n) existuje.

Důkaz. Z definice limity pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje n_a takové, že $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ pro každé $n \geq n_a$. Podobně existuje n_b takové, že $b_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ pro každé $n \geq n_b$. Vezmeme-li tedy $n_0 = \max(n_a, n_b)$, v kombinaci s předpokladem věty máme, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a - \varepsilon < a_n < c_n < b_n < a + \varepsilon$, tedy $c_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

□

I toto tvrzení se snadno rozšíří na nevlastní limity: pro $a = +\infty$ stačí pouze jeden policajt a_n a pro $a = -\infty$ stačí pouze policajt b_n.

Definice 3.2 (Hromadný bod.)**.** Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Rozšířené reálné číslo $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je jejím *hromadným bodem*, pokud je limitou nějaké podposloupnosti (a_n).

Z Věty 2.10 plyne, že pokud má posloupnost (a_n) limitu a, a je jediným hromadným bodem (a_n). Nyní dokážeme, že každá posloupnost má jeden nebo více hromadných bodů.

Věta 3.3 (O monotónní podposloupnosti)**.** *Každá posloupnost* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *má monotónní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je libovolná posloupnost. Řekneme, že v indexu $k \in \mathbb{N}$ začíná *dobrá posloupnost*, existují-li takové indexy $k = k_1 < k_2 < \ldots$, že $a_{k_1} \le a_{k_2} \le \ldots$, a že v k začíná *špatná posloupnost*, existují-li takové indexy $k = k_1 < k_2 < \ldots < k_j$, že $a_{k_1} \le a_{k_2} \le \ldots \le a_{k_j} > a_n$ pro každé $n > k_j$. V prvním případě tedy členem a_k začíná nekonečná neklesající podposloupnost, a ve druhém taková konečná neklesající podposloupnost, že už ji nelze prodloužit. Zřejmě v každém indexu $k \in \mathbb{N}$ začíná dobrá posloupnost nebo v něm začíná špatná posloupnost. (Vystartujeme z k a libovolně budujeme neklesající podposloupnost. Když se nikdy nezastavíme, máme dobrou posloupnost, a když nastane krok, kdy už nemůžeme nijak pokračovat, máme špatnou posloupnost.)

Pokud v indexu 1 začíná dobrá posloupnost, jsme hotovi. Když ne, začíná v 1 špatná posloupnost a jako $k_1 > 0$ definujeme její poslední index. Pokud v indexu $k_1 + 1$ začíná dobrá posloupnost, jsme hotovi. Když ne, začíná v $k_1 + 1$ špatná posloupnost a jako $k_2 > k_1$ definujeme její poslední index. Takto pokračujeme dále. Pokud někdy dostaneme dobrou posloupnost, jsme hotovi, protože (a_n) má neklesající podposloupnost. Pokud ji nikdy nedostaneme a máme stále špatné posloupnosti, vezmeme jejich poslední indexy $1 \le k_1 < k_2 < \ldots$. Podle definice špatné posloupnosti tvoří klesající podposloupnost $a_{k_1} > a_{k_2} > \ldots$ a jsme zase hotovi. □

Věta 3.4 (Bolzanova–Weierstrassova)**.** *Každá omezená posloupnost* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *má konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je omezená. Podle předchozí věty má (a_n) monotónní podposloupnost (b_n), jež je zjevně omezená. Podle Věty 2.8 je (b_n) konvergentní. □

Podle Věty 3.4 má každá omezená posloupnost hromadný bod. Pro neomezenou posloupnost je hromadným bodem ∞ nebo $-\infty$.

Označíme

$$\mathbb{R}^* \supset H = \{\text{hromadné body posloupnosti } (a_n)\}\ .$$

Nahlédneme, že H má největší i nejmenší prvek. Když (a_n) není shora omezená, pak je $+\infty \in H$ největším prvkem. Je-li (a_n) shora omezená číslem $c \in \mathbb{R}$, je c zřejmě i horní závorou pro H. Nechť $\alpha = \sup(H) \in \mathbb{R}$. Podle vlastnosti suprema a definice množiny H pro každé $k \in \mathbb{N}$ má (a_n) podposloupnost s limitou v intervalu $[\alpha - 1/k, \alpha]$. Z těchto podposloupností pro $k = 1, 2, \ldots$ vybereme vhodné členy $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$, že $n_1 < n_2 < \ldots$ a pro každé k je $a_{n_k} \in [\alpha - 2/k, \alpha]$.

Tím jsme vyrobili podposloupnost, jejíž limita je α. Tedy $\alpha = \sup(H) \in H$ a H má největší prvek. Podobně se ukáže, že H má nejmenší prvek.

Definice 3.5 (Limes superior a limes inferior.)**.** Definujeme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \min(H) \quad \text{a} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n := \max(H)\ .$$

Tyto zkratky znamenají *limes inferior*, nejmenší limita (podposloupnosti), a *limes superior*, největší limita (podposloupnosti). Na rozdíl od limity $\liminf$ a $\limsup$ vždy existují.

Řady reálných čísel

Definice 3.6 (Řada a její součet)**.** *Nekonečná řada (reálných čísel)* je výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\ ,$$

kde $(a_n)_{n\geq 1}$ je posloupnost reálných čísel. Budeme se snažit přidržovat tohoto značení, ale pochopitelně se používá mnoho variant zápisů nekonečných řad, pro sčítací index se například může použít jiné písmeno, sčítá se od jiné hodnoty než od 1, apod.; zápisy pro nekonečné řady jsou tedy třeba také

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \cdots\ ,\ \sum_{i=m}^{\infty} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots\ , \sum_{k\geq 8} c_k = c_8 + c_9 + \cdots\ .$$

Částečný součet řady, přesněji její n-tý částečný součet s_n, je součet jejích prvních n členů. Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedy $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a pro řadu $\sum_{k\geq 8} c_k$ je $s_n = c_8 + c_9 + \cdots + c_{n+7}$.

Pokud existuje vlastní limita posloupnosti (s_n) částečných součtů dané řady, mluvíme o *konvergentní řadě* a limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ je jejím *součtem*. Pokud $\lim s_n$ neexistuje nebo je nevlastní, je daná řada *divergentní*.

Příklad 3.7. Řada $\sum_{n\geq 0}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ je divergentní, protože $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$.

Příklad 3.8. Důležitým příkladem řady je *geometrická řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots\ ,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je parametr zvaný *kvocient*. Pro součet geometrické řady platí, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \dots \quad -1 < q < 1 \\ +\infty & \dots \quad q \geq 1 \\ \text{neexistuje} & \dots \quad q \leq -1. \end{cases}$$

To vyplývá to ze vzorce pro částečný součet ($q \neq 1$):

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Pro $|q| < 1$ je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ a podle aritmetiky limit $\lim_{n\to\infty} s_n = (0 - 1)/(q-1) = 1/(1-q)$. Pro $q > 1$ jako limita vyjde $(+\infty - 1)/(q-1) = +\infty$ a pro $q = 1$ také (tehdy $s_n = n$). Pro $q \leq -1$ limita $\lim_{n\to\infty} q^n$ neexistuje a neexistuje tedy ani limita $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(q^n - 1)/(q-1)$.

Příklad 3.9. Dalším častým příkladem jsou řady typu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots,$$

kde $s \in \mathbb{R}$. Pro jejich konvergenci platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konverguje pro } s > 1 \\ \text{diverguje pro } s \leq 1. \end{cases}$$

Pro $s = 1$ se tato řada nazývá *harmonická řada*. Je to důležitý příklad řady, která diverguje, ačkoli její prvky konvergují k nule.

Pro některé hodnoty s jsou pro součty této řady známy explicitní vzorce, například

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

4 Funkce

Definice 4.1. Řekneme, že funce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ je

- *shora omezená* pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) < K$ pro každé $x \in M$,
- *zdola omezená* pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) > K$ pro každé $x \in M$,
- *omezená* pokud je shora i zdola omezená,
- *rostoucí* pokud $f(x) < f(y)$ pro každé $x, y \in M$ splňující $x < y$,
- *neklesající* pokud $f(x) \leq f(y)$ pro každé $x, y \in M$ splňující $x < y$,
- *klesající* pokud $f(x) > f(y)$ pro každé $x, y \in M$ splňující $x < y$,
- *nerostoucí* pokud $f(x) \geq f(y)$ pro každé $x, y \in M$ splňující $x < y$,
- *monotónní* pokud je neklesající nebo nerostoucí
- *periodická* funkce s periodou $p \in \mathbb{R}, p > 0$, když pro každé $x \in M$ je i $x \pm p \in M$ a $f(x) = f(x \pm p)$,
- *prostá* pokud $x \neq y$ implikuje $f(x) \neq f(y)$,

Narozdíl od posloupností mohou být monotónní funkce neomezené shora i zdola, příkladem je například $f(x) = x$.

Doporučuji prohlédnout si grafy všech funkcí zmíněných tomto textu v nějaké aplikaci na kreslení grafů, např. na `https://www.geogebra.org/graphing?lang=en`.

Definice 4.2. Nechť $f : M \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$ je prostá funkce. Funkce $f^{<-1>}$ je *inverzní funkce k funkci* f, pokud $f^{<-1>}(y) = x$ právě tehdy, když $f(x) = y$.

Příklad 4.3. Funkce $f(x) = x^2$ je prostá na intervalu $[0, \infty)$. Funkce inverzní k f na tomto intervalu je $\sqrt{x}$. Na intervalu $(-\infty, 0]$ je funkce $f(x) = x^2$ také prostá, její inverzní funkcí je ale $-\sqrt{x}$.

4.1 Elementární funkce

Definice 4.4 (Eulerovo číslo, exponenciální funkce)**.** Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ definujeme *exponenciální funkci* jako součet řady

$$e^x = \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots .$$

Eulerovo číslo e definujeme jako $exp(1)$, je tedy rovno $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Je to iracionální číslo, jeho číselná hodnota je asi $2,7$.

Řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, takže exponenciální funkce je všude definovaná. Zřejmě $e^0 = 1$ a $e^x \geq 1$ pro $x \geq 0$ a e^x je pro $x \geq 0$ rostoucí funkce.

Poznámka. Alternativně lze $exp(x)$ definovat jako limitu $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Z časových důvodů nebudeme dokazovat ekvivalenci těchto definic.

Věta 4.5 (Funkce exp převádí součet na součin)**.** *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ je*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)\ .$$

Tuto větu nebudeme dokazovat. Odvodíme z ní ale několik důležitých vlastností exponenciální funkce.

- $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ (protože $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$),
- $\exp(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- $\exp(x) < 1$ pro $x < 0$,
- $\exp(x)$ je rostoucí funkce na $\mathbb{R}$, protože pokud $x < y$, $\exp(y) = \exp(x)\exp(y-x)$ a $\exp(y-x) > 1$,
- $\lim_{n\to\infty}\exp(n) = +\infty$, a
- $\lim_{n\to\infty}\exp(-n) = 0$.

Věta 4.6 (Logaritmus)**.** *Pro každé kladné $y \in \mathbb{R}$ má rovnice*

$$e^x = y$$

právě jedno řešení $x \in \mathbb{R}$, které označíme jako $\ln y := x$ *(přirozený logaritmus čísla y).*

Přirozený logaritmus je tedy inverzní funkcí k $exp(x)$. Nyní můžeme definovat exponenciální funkci a logaritmus s obecným základem.

Definice 4.7. Pro kladné reálné číslo b a reálné číslo x definujeme $b^x := exp(x\ln b)$. Pro kladné reálné číslo $b \neq 1$, definujeme *logaritmus o základu b*, píšeme $\log_b x$, jako inverzní funkci k b^x.

Logaritmus o dané bázi lze z přirozeného logaritmu spočíst jako $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Definice 4.8 (Goniometrické funkce)**.** Funkce *sinus a cosinus* definujeme jako součet následujících řad

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

a

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\ .$$

Funkce tangens a cotangens jsou definovány jako $\tan x$ (nebo $\operatorname{tg} x$) $= \frac{\sin x}{\cos x}$ pro $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ a $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ pro $x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Definice 4.9 (Cyklometrické funkce)**.** Funkce *arkus sinus* $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ je definována jako inverzní funkce k funkci sinus na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Funkce *arkus cosinus* $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ je definována jako inverzní funkce k funkci sinus na intervalu $[0,\pi]$.

Funkce *arkus tangens* $\arctan : (-\infty,\infty) \to (-\pi/2, \pi/2)$ je definována jako inverzní funkce k funkci tangens na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$.

Limity funkcí

Definice 4.10 (Okolí bodu)**.** *Okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$, přesněji δ-okolí bodu a, kde $\delta \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$, je interval $U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta)$. Jinak zapsáno,

$$U(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x-a| < \delta\}.$$

Okolí nekonečen definujeme jako $U(+\infty,\delta) = (1/\delta, +\infty)$ a $U(-\infty,\delta) = (-\infty, -1/\delta)$. *Pravé okolí,* resp. *levé okolí*, bodu $a \in \mathbb{R}$ je interval $U^+(a,\delta) = [a, a+\delta)$, resp. $U^-(a,\delta) = (a-\delta, a]$.

Prstencová okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ jsou obyčejná okolí s vyjmutým bodem a: $P(a,\delta) = U(a,\delta)\backslash\{a\}$, $P^+(a,\delta) = U^+(a,\delta)\backslash\{a\}$ a $P^-(a,\delta) = U^-(a,\delta)\backslash\{a\}$. Prstencová okolí nekonečen jsou stejná jako jejich obyčejná okolí.

Definice 4.11 (Limita funkce)**.** Řekneme, že funkce f *má v bodě* $a \in \mathbb{R}^*$ *limitu* $A \in \mathbb{R}^*$, když

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ x \in P(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(A,\varepsilon).$$

Zapisujeme

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Poznámka. Limita funkce f v bodě a nezávisí na její hodnotě v a, f ani nemusí být v a definovaná.

Příklad 4.12. Pokud $f(x) = x$ a $a \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x\to a} f(x) = a$. Pokud změníme hodnotu funkce v nule a definujeme f jako

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

pak stále $\lim_{x\to a} f(x) = a$ pro každé $a \in \mathbb{R}$, i pro $a = 0$.

Příklad 4.13. Funkce *signum* (znaménko), která je definovaná předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

má limitu $\lim_{x\to a} \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(a)$ pro $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, a $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ neexistuje.

Předchozí příklad ukazuje, že někdy je vhodné uvažovat levé a pravé prstencové okolí bodu zvlášť.

Definice 4.14 (Jednostranné limity)**.** Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $a \in R$ *limitu zprava* rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, zapisujeme

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = A,$$

pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; x \in P^+(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon).$$

Analogicky se definujeme *limitu zleva*, $P^+(a, \delta)$ se nahradí levým prstencovým okolím $P^-(a, \delta)$.

Jestliže $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = A$, pak $\lim_{x \to a} f(x) = A$. Naopak, pokud jsou limity zprava a zleva různé, limita neexistuje.

Podobně jako u posloupnosti, limita funkce, pokud existuje, je jednoznačně určena.

Věta 4.15 (Jednoznačnost limity funkce)**.** *Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. $A, B \in \mathbb{R}^*$ buďte dvě různé limity funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Protože $A \neq B$, lze zvolit tak malé $\varepsilon > 0$, že $U(A, \varepsilon) \cap U(B, \varepsilon) = \emptyset$. Mají existovat $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že $x \in P(a, \delta_1) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon)$ a $x \in P(a, \delta_2) \Rightarrow f(x) \in U(B, \varepsilon)$. Pro $0 < \delta < \min(\delta_1, \delta_2)$ máme, že $x \in P(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon) \cap U(B, \varepsilon)$. To je ale spor, tato dvě okolí jsou disjunktní a současně v jejich průniku má ležet nějaké $f(x)$ (které existuje, neboť předpokládáme, že funkce je definována na prstencovém okolí bodu a). □

Limitu funkce je možno definovat ekvivalentním způsobem pomocí limity posloupnosti.

Věta 4.16 (Heineho definice limity funkce)**.** *Nechť f je definovaná na prstencovém okolí $P(a, \delta)$ bodu a pro nějaké $\delta > 0$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $\lim_{x \to a} f(x) = A$;
2. *pro každou posloupnost $(x_n) \subset P(a, \delta)$ takovou, že $x_n \neq a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, platí, že $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$.*

Důkaz. Nechť platí bod 1 a posloupnost $(x_n) \subset P(a, \delta)$ splňuje, že $x_n \neq a$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$ a $x_n \to a$ pro $n \to \infty$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že $f(P(a, \delta) \subset U(A, \varepsilon)$. Existuje též $n_0 \in \mathbb{N}$, že $n > n_0 \Rightarrow x_n \in U(a, \delta)$. Pro $n > n_0$ tak máme, že $f(x_n) \in U(A, \varepsilon)$. Proto $f(x_n) \to A$ pro $n \to \infty$.

Nechť bod 1 neplatí, $\lim_{x \to a} f(x)$ neexistuje nebo se nerovná A. To jest existuje takové $\varepsilon > 0$, že pro každé $\delta > 0$ existuje $x \in P(a, \delta)$ s vlastností

$f(x) \notin U(A, \varepsilon)$. Pro každé $\delta = 1/n$, kde $n = 1, 2, 3, \ldots$, vezmeme takové x a označíme ho x_n. Patrně $x_n \to a$ pro $n \to \infty$, vždy $x_n \neq a$, ale $f(x_n) \notin U(A, \varepsilon)$, takže $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ není A. Bod 2 tedy také neplatí; není splněn pro posloupnost (x_n). $\square$

Příklad 4.17. Pomocí předchozí věty ukážeme, že funkce $f(x) = \sin(1/x)$, která je definovaná na množině $M = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, nemá limitu v nule. Uvažme dvě posloupnosti (x_n) a (y_n), kde

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \quad \text{a} \quad y_n = \frac{1}{(2n + 1/2)\pi}, n \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě $\lim x_n = \lim y_n = 0$, ale $f(x_n) = \sin(1/x_n) = 0$ a $f(y_n) = \sin(1/y_n) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Proto $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ neexistuje.

5 Limity funkcí a spojitost

Zaveďme si následující značení: pro funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subseteq \mathbb{R}$ nechť $f(M)$ označuje množinu $\{f(x);\ x \in M\}$. S tímto značením můžeme například výrok $\forall x \in P(b,\delta)\colon f(x) \in U(L,\varepsilon)$, vyskytující se v definici limity funkce, zapsat úsporněji jako $f(P(b,\delta)) \subseteq U(L,\varepsilon)$.

Pro ty, kdo na čtvrté přednášce nestihli probrat důkaz věty o Heineho definici limity, si tuto větu zopakujme a dokažme.

Věta 5.1 (Heineho definice limity funkce)**.** *Nechť f je funkce definovaná na prstencovém okolí $P(b,\Delta)$ bodu $b \in \mathbb{R}^*$ pro nějaké $\Delta > 0$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $\lim_{x\to b} f(x) = L$;
2. *pro každou posloupnost $(x_n) \subseteq P(b,\Delta)$, pro níž platí $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, platí také $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.*

Opět zdůrazněme, že v bodu 2 předchozí věty se uvažují pouze ty posloupnosti (x_n), jejichž prvky jsou obsažené v prstencovém okolí $P(b,\Delta)$, a tedy speciálně samotné číslo b se v těchto posloupnostech nemůže vyskytnout.

Důkaz Věty 5.1. Nechť platí bod 1. Mějme posloupnost $(x_n) \subseteq P(a,\Delta)$ s limitou b a dokažme, že posloupnost $(f(x_n))$ má limitu L. Nechť je tedy dáno $\varepsilon > 0$. Díky bodu 1 víme, že existuje $\delta > 0$ splňující $f(P(b,\delta)) \subseteq U(L,\varepsilon)$. Protože (x_n) má limitu b a zároveň $x_n \neq b$ pro každé n, tak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n > n_0$ platí $x_n \in P(b,\delta)$. Pro $n > n_0$ tudíž platí $f(x_n) \in U(L,\varepsilon)$. Proto $f(x_n) \to L$ pro $n \to \infty$, a tedy platí bod 2.

Nyní předpokládejme, že bod 1 neplatí, tj. $\lim_{x\to b} f(x)$ neexistuje nebo se nerovná L. To znamená, že existuje takové $\varepsilon > 0$, že pro každé $\delta > 0$ existuje $x \in P(b,\delta)$ s vlastností $f(x) \notin U(L,\varepsilon)$. Pro každé $\delta = \min\{1/n, \Delta\}$, kde $n = 1, 2, 3, \ldots$, vezmeme takové x a označíme ho x_n. Zjevně $(x_n) \to b$ pro $n \to \infty$ a $(x_n) \subseteq P(b,\Delta)$, ale $f(x_n) \notin U(L,\varepsilon)$, takže $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ není L. Bod 2 tedy také neplatí; není splněn pro posloupnost (x_n). □

Díky Heineho definici limity můžeme snadno ukázat, že pro limity funkcí platí analogie mnoha vět pro limity posloupností. Konkrétně uvedeme větu, že monotónní funkce má limitu, větu o aritmetice limit funkcí, a analogii věty o dvou policajtech.

Věta 5.2 (Aritmetika limit funkcí)**.** *Nechť $a, A, B \in \mathbb{R}^*$, nechť f a g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí $P(a,\Delta)$ bodu a, a nechť platí $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Potom*

(a) $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$, *je-li tento součet definován.*

(b) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$*, je-li tento součin definován.*

(c) Nechť je navíc $g(x)$ *nenulová na nějakém prstencovém okolí bodu* a*. Pak* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B$*, je-li tento podíl definován.*

Důkaz. Pomocí Heineho definice limity (Věta 5.1) tyto výsledky snadno převedeme na výsledky o aritmetice limit posloupností, které známe z druhé přednášky.

Dokažme třeba bod (a). Ověřme, že funkce $f+g$ splňuje bod 2 Věty 5.1. Nechť $(x_n) \subseteq P(a,\Delta)$ je posloupnost s limitou a. Protože $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$, podle Věty 5.1 (implikace $1 \Rightarrow 2$) máme, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ a $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = B$. Podle věty o aritmetice limit posloupností pak i $\lim_{n\to\infty} f(x_n) + g(x_n) = A + B$. Tedy $f+g$ splňuje bod 2 Věty 5.1 a to podle Věty 5.1 (implikace $2 \Rightarrow 1$) znamená, že $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$.

Body (b) a (c) se dokazují analogicky. $\square$

Věta 5.3 (Limity funkcí a uspořádání)**.** *Nechť* $c \in \mathbb{R}^*$ *a funkce* f*,* g *a* h *jsou definované na nějakém prstencovém okolí bodu* c*.*

1. *Mají-li funkce* f *a* g *v bodě* c *limitu a* $\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x)$*, pak existuje* $\delta > 0$ *takové, že* $f(x) > g(x)$ *pro každé* $x \in P(c,\delta)$*.*

2. *Existuje-li* $\delta > 0$ *takové, že* $f(x) \geq g(x)$ *pro každé* $x \in P(c,\delta)$*, a mají-li funkce* f *a* g *limitu v bodě* c*, potom* $\lim_{x\to c} f(x) \geq \lim_{x\to c} g(x)$*.*

3. *Existuje-li* $\delta > 0$ *takové, že* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in P(c,\delta)$ *a* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$*, potom i* $\lim_{x\to c} h(x) = A$*.*

Důkaz. 1. Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = A > \lim_{x\to c} g(x) = B$. Protože $A > B$, existuje takové $\varepsilon > 0$, že $U(A,\varepsilon) \cap U(B,\varepsilon) = \emptyset$. Dokonce platí, že $a > b$ pro každé $a \in U(A,\varepsilon)$ a $b \in U(B,\varepsilon)$. Pro toto ε existuje $\delta > 0$ splňující $f(P(c,\delta)) \subseteq U(A,\varepsilon)$ a $g(P(c,\delta)) \subseteq U(B,\varepsilon)$. Tedy $f(x) > g(x)$ pro každé $x \in P(c,\delta)$.

2. Kdyby platila opačná nerovnost, tj. $\lim_{x\to c} f(x) < \lim_{x\to c} g(x)$, tak na nějakém $P(c,\delta_0)$ by podle bodu 1 platila nerovnost $f(x) < g(x)$, což je ve sporu s předpokladem.

3. Toto tvrzení lze pomocí Heineho definice limity odvodit z věty o dvou policajtech pro posloupnosti, analogickou úvahou jako v důkazu Věty 5.2. $\square$

Věta 5.4 (Limita monotónní funkce)**.** *Nechť* $a < b$ *jsou reálná čísla a funkce* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *je na intervalu* (a,b) *monotónní. Potom existují (případně nevlastní) jednostranné limity*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad a \quad \lim_{x\to b^-} f(x).$$

Důkaz. Budeme předpokládat, že f je neklesající a dokážeme existenci limity f v bodě a zprava, ostatní případy jsou analogické. Položme

$$\alpha = \inf\{f(x);\ x \in (a,b)\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

a dokažme, že $\lim_{x\to a+} f(x) = \alpha$. Volme $\varepsilon > 0$. Z definice infima plyne, že pro každé $x \in (a,b)$ platí $f(x) \geq \alpha$ a také že existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že $f(x_0) \in U(\alpha,\varepsilon)$. Díky monotonii pak víme, že pro každé $x \in (a,x_0)$ máme $f(x) \in U(\alpha,\varepsilon)$. Zvolme $\delta > 0$ dost malé na to, aby platilo $P^+(a,\delta) \subseteq (a,x_0)$. Potom platí $f(P^+(a,\delta)) \subseteq U(\alpha,\varepsilon)$, tudíž $\lim_{x\to a+} f(x) = \alpha$. □

Poznamenejme, že předchozí větu lze rozšířit i na případ, kdy $b = +\infty$ nebo $a = -\infty$. Jediná změna ve znění věty pak bude ta, že limity v nekonečnech nebudeme označovat jako jednostranné limity, a podobně v důkazu nebudeme okolí nekonečen označovat jako jednostranná.

Nyní zformulujme definici jednoho z klíčových pojmů matematické analýzy.

Definice 5.5 (Spojitost funkce)**.** Řekneme, že funkce f je v bodě $a \in \mathbb{R}$ *spojitá*, pokud

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Funkce $f(x)$ je v bodě *a spojitá zprava*, pokud $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$. Podobně se definuje spojitost zleva.

Zjevně platí, že funkce je v daném bodě $a \in \mathbb{R}$ spojitá právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zleva i zprava.

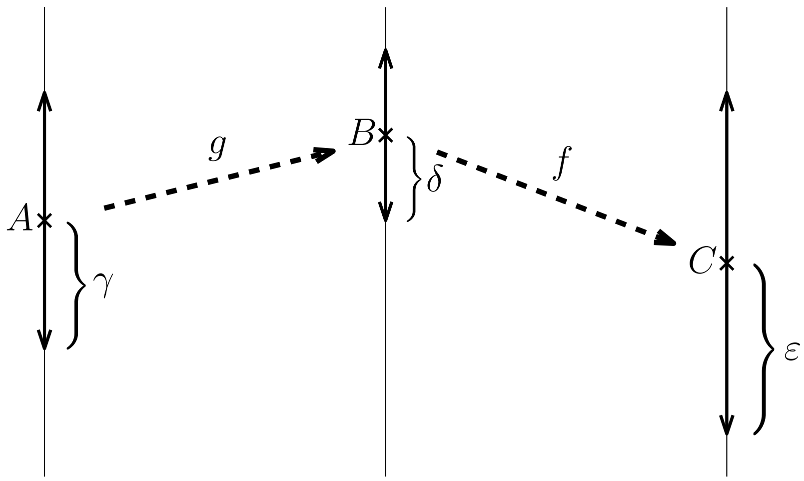
Například pro funkci $\operatorname{sgn}(x)$ se snadno přesvědčíme, že je spojitá v libovolném bodě $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, neboť je na dostatečně malém okolí takového bodu konstantní. Naopak v bodě $a = 0$ není spojitá, protože v tomto bodě nemá limitu. Navíc v bodě $a = 0$ není ani jednostranně spojitá, protože $\operatorname{sgn}(0) = 0$, zatímco obě jednostranné limity jsou nenulové.

Pro funkci f definované jednoduchým vzorečkem lze obvykle spojitost v bodě $a \in \mathbb{R}$ 'vykoukat' z grafu f: pokud graf v okolí a vypadá jako nepřerušená čára, je možno soudit, že tam je funkce spojitá. Ovšem ve složitějších případech se na takovouto neformální intuici nelze spoléhat. Podívejme se na jeden takový příklad.

Příklad 5.6 (Riemannova funkce). Definujme funkci $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ následovně:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \text{ iracionální} \\ \frac{1}{q} & \text{pro } x = \frac{p}{q} \text{ racionální a } p,q \in \mathbb{N} \text{ nesoudělná} \end{cases}$$

Vyšetřeme, kde je tato funkce spojitá. Dokažme nejprve, že pro každé $b \in (0,1)$ platí $\lim_{x\to b} f(x) = 0$. Zvolme tedy $\varepsilon > 0$. Všimněme si, že je jen konečně mnoho bodů $x \in (0,1)$, pro něž platí $f(x) \geq \varepsilon$, konkrétně jsou to racionální body tvaru $x = \frac{p}{q}$ pro $0 < p < q \leq 1/\varepsilon$, kde $p,q \in \mathbb{N}$. Zvolme tedy $\delta \in (0,b)$ dost malé na to, aby žádný z těchto konečně mnoha problematických bodů nepatřil do $P(b,\delta)$. Potom platí $f(P(b,\delta)) \subseteq U(0,\varepsilon)$, což dokazuje, že $\lim_{x\to b} f(x) = 0$, jak jsme tvrdili. Z toho pak vyplývá, že funkce f je spojitá v bodě $b \in (0,1)$ právě tehdy, když b je iracionální číslo.



Obrázek 5.1: Ilustrace k důkazu věty o limitě složené funkce

Vlastnostem spojitých funkcí se budeme podrobněji věnovat na příští přednášce. Nyní dokážeme důležitou větu pro výpočet limit funkcí, v níž spojitost figuruje jako jeden z předpokladů.

Věta 5.7 (Limita složené funkce)**.** *Nechť $A, B, C \in \mathbb{R}^*$, nechť $g(x)$ je funkce splňující $\lim_{x\to A} g(x) = B$ a $f(x)$ je funkce splňující $\lim_{x\to B} f(x) = C$. Navíc nechť je splněna aspoň jedna z podmínek P1 a P2:*

P1. *Funkce $f(x)$ je spojitá v B (jinými slovy, $f(B) = \lim_{x\to B} f(x) = C$).*

P2. *Na nějakém prstencovém okolí $P(A, \eta)$ funkce $g(x)$ nenabývá hodnotu B, tj. $B \notin g(P(A, \eta))$.*

Potom

$$\lim_{x\to A} f(g(x)) = C.$$

Důkaz. (Viz Obrázek 5.1.) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože $\lim_{x\to B} f(x) = C$, existuje $\delta > 0$ takové, že

$$f(P(B, \delta)) \subseteq U(C, \varepsilon). \tag{5.1}$$

Protože $\lim_{x\to A} g(x) = B$, tak pro toto δ existuje $\gamma > 0$ takové, že

$$g(P(A, \gamma)) \subseteq U(B, \delta). \tag{5.2}$$

Jediná obtíž nyní je ta, že okolí $U(B, \delta)$ není obsaženo v okolí $P(B, \delta)$, má navíc bod B. Nyní musíme využít toho, že platí jedna z podmínek P1 a P2.

Pokud je splněna podmínka P1, tj. pokud platí $f(B) = C$, tak inkluze (5.1) se dá zesílit na

$$f(U(B, \delta)) \subseteq U(C, \varepsilon). \tag{5.3}$$

Pak obtíž mizí a pomocí (5.2) a (5.3) dostaneme

$$f(g(P(A, \gamma))) \subseteq f(U(B, \delta)) \subseteq U(C, \varepsilon),$$

tedy $\lim_{x\to A} f(g(x)) = C$.

Pokud je splněna podmínka P2, můžeme $\gamma > 0$ zvolit tak, aby navíc platilo $\gamma < \eta$, a potom lze inkluzi (5.2) zesílit na

$$g(P(A,\gamma)) \subseteq P(B,\delta). \tag{5.4}$$

Obtíž opět mizí a pomocí (5.4) a (5.1) dostaneme

$$f(g(P(A,\gamma))) \subseteq f(P(B,\delta)) \subseteq U(C,\varepsilon)$$

a $\lim_{x\to A} f(g(x)) = C$. □

Poznámka (Asymptotické symboly o a O). Limity se hodí pro srovnávání asymptotického růstu funkcí. Při analýze algoritmů už jste se setkali s O-notací, která je obecně definována takto. Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\delta > 0$, a funkce f, g jsou definované na prstencovém okolí $P(a,\delta)$, přičemž g je na něm kladná. Říkáme, že *funkce f je velké O funkce g pro x jdoucí k a* a píšeme, že $f = O(g)$ pro $x \to a$, pokud existuje $c > 0$ tak, že

$$\forall x \in P(a,\delta)\colon |f(x)| < cg(x).$$

Pokud
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$
píšeme, že $f = o(g)$ pro $x \to a$, a říkáme, že *funkce f je malé o funkce g pro x jdoucí k a*. Všimněte si, že $f = o(g)$ pro $x \to a$ implikuje $f = O(g)$ pro $x \to a$.

Neformálně řečeno, pokud $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, pak výraz $f = O(g)$ znamená, že funkce f neroste rychleji než g pro $x \to a$, zatímco výraz $f = o(g)$ znamená, že funkce f roste podstatně pomaleji než g pro $x \to a$. Pokud $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, pak $f = O(g)$ říká, že f klesá k nule aspoň tak rychle jako g, zatímco $f = o(g)$ znamená, že funkce f klesá k nule podstatně rychleji než g.

Uvědomme si, že výrazy $f = O(g)$ a $f = o(g)$ nejsou rovnosti, $f = O(g)$ i $f = o(g)$ platí pro mnoho různých funkcí f. Správnější (ale zřídka používaný) zápis by byl $f \in O(g)$ nebo $f \in o(g)$.

Příklad 5.8. Asymptotické porovnávání často využíváme při výpočtu limity podílu:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + o(x^3)}{x^3} = 2 + 0.$$

6 Spojitost

Připomeňme z předchozí přednášky, že funkce f je *spojitá* v bodě $b \in \mathbb{R}$, pokud platí $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$. Explicitněji to znamená, že f je spojitá v b, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta > 0$ splňující $f(U(b, \delta)) \subseteq U(f(b), \varepsilon)$. Hlavním obsahem dnešní přednášky bude seznámení s některými netriviálními vlastnostmi spojitých funkcí.

Vnitřní bod nějakého intervalu I je bod, který v I leží i s nějakým svým okolím. *Krajní bod* intervalu je bod, který není vnitřní. Například $(-\infty, 5)$ nemá krajní body, jen vnitřní, ale $(-\infty, 5]$ má právě jeden krajní bod a to 5.

Definice 6.1 (Spojitost na intervalu)**.** Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f \colon I \to \mathbb{R}$ je funkce na něm definovaná. Řekneme, že f *je na intervalu I spojitá*, je-li spojitá v každém vnitřním bodu I a v každém krajním bodu I je odpovídajícím způsobem jednostranně spojitá.

Příklad 6.2. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na intervalu $(0, 1)$ i na intervalu $(0, 1]$. Není však spojitá na intervalu $[0, 1)$ (bez ohledu na to zda a jak je definovaná v nule), protože $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Věta 6.3 (Darbouxova, o nabývání mezihodnot)**.** *Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a nechť funkce $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je na intervalu $[a, b]$ spojitá. Označme $m = \min\{f(a), f(b)\}$ a $M = \max\{f(a), f(b)\}$. Pak každé reálné číslo z intervalu $[m, M]$ je hodnotou funkce f, to jest pro každé $y \in [m, M]$ existuje $\alpha \in [a, b]$, že $f(\alpha) = y$.*

Důkaz. Budeme předpokládat, že $m = f(a)$ a $M = f(b)$, v opačném případě je důkaz analogický. Pokud $y = f(a)$, popřípadě $y = f(b)$, máme $\alpha = a$, popřípadě $\alpha = b$. Můžeme proto předpokládat, že $f(a) < y < f(b)$. Uvažme množinu

$$A = \{z \in [a, b] \colon f(z) < y\}.$$

A je neprázdná množina (například $a \in A$), která je obsažená v intervalu $[a, b]$. Její supremum je proto reálné číslo z intervalu $[a, b]$. Položíme

$$\alpha = \sup(A).$$

Ukážeme, že $f(\alpha) = y$. Z jednostranné spojitosti f v bodech a a b a z $f(a) < y < f(b)$ plyne, že existuje takové $\delta > 0$, že pro každé $x \in [a, a + \delta)$ platí $f(x) < y$ a pro každé $x \in (b - \delta, b]$ platí $f(x) > y$. Tedy $[a, a + \delta) \subseteq A$ a $(b - \delta, b] \cap A = \emptyset$. Z toho plyne, že $a < \alpha < b$.

Kdyby bylo $f(\alpha) < y$, tato nerovnost by vzhledem ke spojitosti f v α platila v nějakém okolí α a v A by byly prvky větší než α, což nelze (α je horní mez A). Podobně kdyby bylo $f(\alpha) > y$, tato nerovnost by zase platila v nějakém okolí α a pro nějaké $\delta' > 0$ bychom měli, že $(\alpha - \delta', \alpha + \delta') \cap A = \emptyset$. Což je opět spor ($\alpha$ je nejmenší horní mez A). □

Aplikací této věty je metoda půlení intervalů pro přibližný výpočet kořenů spojité funkce.

Příklad 6.4. Polynom $f(x) = x^2 - 2$ je spojitá funkce. Protože $f(1) = -1$ a $f(2) = 2$, z předchozí věty plyne, že f má kořen x (tj. $f(x) = 0$) z intervalu $(1, 2)$. Postupným půlením intervalu můžeme tento kořen přibližně numericky spočítat, tedy aproximovat hodnotu $\sqrt{2}$:

$$f(1,5) = 0,25 > 0 \text{ tedy } x \in (1, 1,5)$$
$$f(1,25) = -0.4375 < 0 \text{ tedy } x \in (1,25, 1,5)$$
$$f(1,375) = -0.109375 < 0 \text{ tedy } x \in (1,375, 1,5)$$

A tak dále.

Důsledek 6.5 (Obraz spojité funkce)**.** *Spojitá funkce zobrazuje interval na interval. To jest, je-li $J \subseteq \mathbb{R}$ interval a $f\colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, je množina $f(J) = \{f(x)\colon x \in J\}$ opět interval.*

Připomeňme, že inverzní funkce k f existuje, pouze pokud je f prostá. Z Darbouxovy věty plyne, že je-li spojitá funkce prostá na intervalu J, je na J buď rostoucí, nebo klesající (rozmyslete!). Dokážeme, že inverzní funkce spojité funkce je rovněž spojitá.

Věta 6.6 (Spojitost inverzní funkce)**.** *Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f\colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá a rostoucí (klesající) funkce. Potom inverzní funkce $f^{<-1>}\colon K \to J$, kde K je interval $f(J)$, je rovněž spojitá a rostoucí (klesající).*

Důkaz. Předpokládejme, že f je rostoucí, případ klesající f je velmi podobný. Pro jednoduchost označme $g = f^{<-1>}$. Všimněme si, že pokud f je rostoucí, je g také rostoucí. Z Důsledku 6.5 víme, že $f(J) = K$ je interval, funkce g je tedy definována na intervalu K a jejím obrazem je interval J.

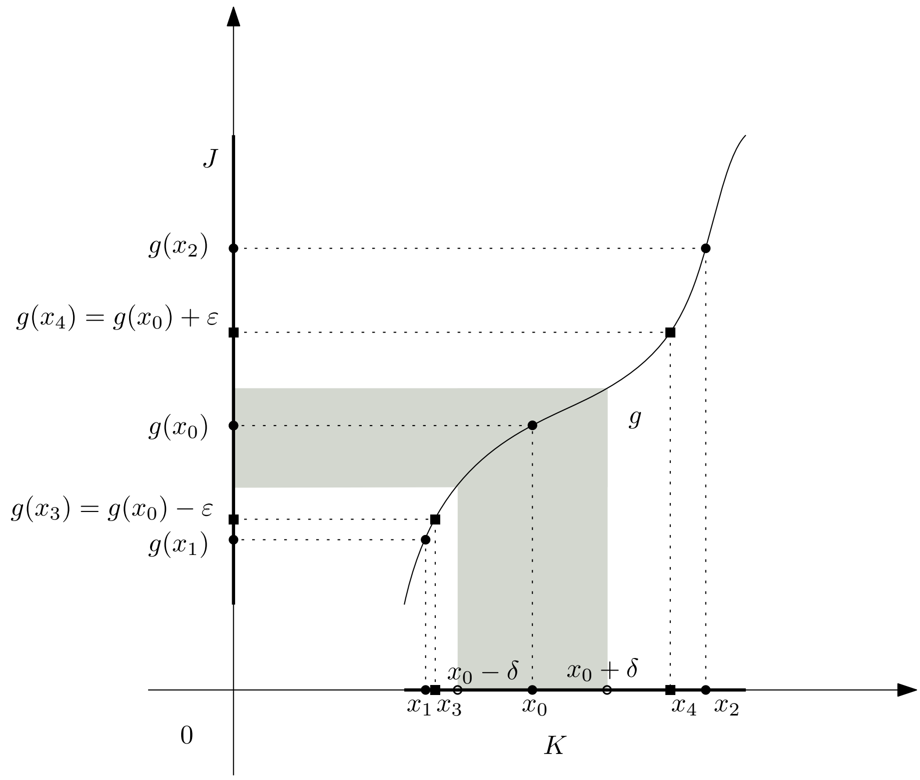
Nechť x_0 je vnitřní bod K. Dokážeme spojitost g v x_0 (viz Obrázek 6.1). Můžeme vzít x_1, x_2 z K, že $x_1 < x_0 < x_2$. Pak $g(x_1) < g(x_0) < g(x_2)$ a všechny body z intervalu $[g(x_1), g(x_2)]$ jsou funkční hodnoty g (protože $g(K)$ je interval). Buď dáno $\varepsilon > 0$ tak malé, že

$$[g(x_0) - \varepsilon, g(x_0) + \varepsilon] \subseteq [g(x_1), g(x_2)].$$

V K tedy existují x_3, x_4, že $x_1 \leq x_3 < x_0 < x_4 \leq x_2$ a $g(x_3) = g(x_0) - \varepsilon$ a $g(x_4) = g(x_0) + \varepsilon$. Vezmeme $\delta > 0$ menší než $\min\{x_0 - x_3, x_4 - x_0\}$. Pak pro každé $x \in U(x_0, \delta)$ platí, že $g(x) \in U(g(x_0), \varepsilon)$.

Tudíž $g = f^{<-1>}$ je na K spojitá. □

Funkce x, $|x|$, e^x, $\sin x$ a $\cos x$ jsou spojité na celém svém definičním oboru. (Nebudeme dokazovat.) Z Věty 6.6 tudíž plyne spojitost logaritmu a cyklometrických funkcí.



Obrázek 6.1: Pro každé dost malé $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta > 0$ vyhovující definici limity. Body x_1 a x_2 omezují, jak velké ε můžeme uvažovat, abychom zůstali v rámci intervalů J a K. Toto omezení na ε nám ale nevadí, protože pokud najdeme δ pro malé ε, tato hodnota δ funguje i pro všechna větší ε.

Spojitost dalších funkcí (například $\tan(x)$ nebo $\sqrt{x}$) lze odvodit následujícími úvahami. Z Věty 5.2 o aritmetice limit funkcí plyne, že funkce definovaná jako součet, rozdíl, součin a podíl spojitých funkcí je opět spojitá (pokud je definována). Podobně, z Věty 5.7 o limitě složené funkce plyne, že pokud je funkce g spojitá v bodě a a funkce f je spojitá v bodě $g(a)$, pak je funkce $h = f \circ g$ (tj. $h(x) = f(g(x))$) spojitá v bodě a.

Definice 6.7 (Extrémy funkce)**.** Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f v bodě $a \in M$ nabývá (na množině M) svého

- *minima*, když $\forall x \in M: \ f(x) \geq f(a)$;
- *maxima*, když $\forall x \in M: \ f(x) \leq f(a)$;
- *ostrého minima*, když $\forall x \in M, x \neq a: \ f(x) > f(a)$;
- *ostrého maxima*, když $\forall x \in M, x \neq a: \ f(x) < f(a)$;
- *lokálního minima*, když $\exists \delta > 0 \ \forall x \in M \cap U(a, \delta): \ f(x) \geq f(a)$;
- *lokálního maxima*, když $\exists \delta > 0 \ \forall x \in M \cap U(a, \delta): \ f(x) \leq f(a)$.

Ostré lokální extrémy jsou definovány analogicky.

Věta 6.8 (Princip maxima pro spojité funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom f nabývá na intervalu $[a, b]$ svého ma-*

xima i minima.

Důkaz. Dokážeme nabývání maxima, případ minima je velmi podobný. Položíme

$$\alpha = \sup(f([a,b])).$$

Naším cílem bude dokázat, že existuje bod $\beta \in [a,b]$, v němž nabývá f hodnotu α, a tím pádem v β nabývá f svého maxima.

Podle definice suprema pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $y \in f([a,b])$, že $\alpha - \varepsilon < y \leq \alpha$ (pro $\alpha \in \mathbb{R}$), resp. $1/\varepsilon < y$ (pro $\alpha = +\infty$). Existuje tedy posloupnost funkčních hodnot konvergující k α: existuje $(x_n) \subseteq [a,b]$, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$. Podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty má (x_n) konvergentní podposloupnost (x_{k_n}) a můžeme definovat $\beta = \lim_{n\to\infty} x_{k_n}$. Protože $a \leq x_{k_n} \leq b$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, z věty o limitě a uspořádání plyne, že $a \leq \beta \leq b$, tedy $\beta \in [a,b]$ (v tomto okamžiku by důkaz selhal na jiném než uzavřeném intervalu, např. na intervalu $[a,b)$ by mohlo nastat $\beta = b$). S využitím Heineho definice limity a (případně jednostranné) spojitosti f v bodě β máme

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{k_n}) = f(\beta).$$

Funkce f tedy nabývá v bodě β intervalu $[a,b]$ své maximum α. □

Intervaly tvaru $[a,b]$, kde $a \leq b$ jsou reálná čísla, tj. intervaly, které jsou uzavřené a omezené, nazýváme *kompaktní* intervaly. Z předchozí věty mimo jiné plyne, že spojitá funkce je na kompaktním intervalu omezená.

Pokud $f\colon J \to \mathbb{R}$ definovaná na intervalu J není spojitá nebo J není kompaktní, potom f nemusí na J nabývat maximum ani minimum a nemusí ani být omezená. Například funkce $f(x) = x$ je na intervalu $J = (0,1)$ spojitá, ale nenabývá na něm ani maximum ani minimum. Totéž platí pro funkci $f(x) = 1/x$, která na J navíc ani není omezená. Na intervalu $J = [-1,1]$ funkce

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{pro } x \in [-1,0) \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ x-1 & \text{pro } x \in (0,1] \end{cases}$$

nenabývá ani maximum ani minimum, protože na J není spojitá (je nespojitá v nule). Funkce $f(x) = x$ je na $J = (-\infty,1]$ spojitá, ale není omezená (a nenabývá minimum) atd.

Princip maxima je důležitá vlastnost spojitých funkcí (a kompaktních intervalů), která má aplikace například v optimalizaci, kde zaručuje existenci optimálních řešení některých úloh. Výše uvedený princip maxima (Věta 6.8) lze zformulovat obecněji pro zobrazení z libovolného metrického prostoru do $\mathbb{R}$, je však potřeba zobecnit pojmy kompaktnosti a spojitosti.

Zobecnění pojmu limity a tedy i spojitosti na libovolné metrické prostory je poměrně přímočaré:

Definice 6.9 (Limita a spojitost v metrických prostorech)**.** Pro metrický prostor (M, d) definujeme okolí a prstencové δ-okolí bodu $\mathbf{a} \in M$ pro $\delta > 0$ jako

$$U_M(\mathbf{a}, \delta) = \{\mathbf{x} \in M|\ d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < \delta\} \text{ a}$$

$$P_M(\mathbf{a}, \delta) = U_M(\mathbf{a}, \delta) \setminus \{\mathbf{a}\}.$$

Nechť (M, d) a (N, e) jsou dva metrické prostory. Řekneme, že funkce $f\colon M \to N$ *má v bodě* $\mathbf{a} \in M$ *limitu* $A \in N$, platí-li

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon f(P_M(\mathbf{a}, \delta)) \subseteq U_N(A, \varepsilon),$$

což zapisujeme

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A.$$

Funkce f je v bodě $\mathbf{a}$ *spojitá*, pokud

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

Funkce f je *spojitá*, pokud je spojitá v každém bodě M.

My se nyní omezme jen na reálné funkce více proměnných, tj. na funkce tvaru $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožina nějakého eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ (a tudíž M je sama o sobě metrický prostor s eukleidovskou metrikou). Definice minima a maxima je pro takovéto funkce identická jako pro funkci jedné proměnné. Potřebujeme však definovat následující zobecnění kompaktního intervalu.

Definice 6.10 (Kompaktní množiny v $\mathbb{R}^n$)**.** Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *omezená*, pokud existuje bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$ takové, že $M \subseteq U(\mathbf{a}, r)$. Jinými slovy, M je obsaženo v r-okolí bodu $\mathbf{a}$ (okolí zde uvažujeme v prostoru $\mathbb{R}^n$). Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *otevřená*, pokud pro každý bod $\mathbf{a} \in M$ existuje $\delta > 0$ takové, že $U(\mathbf{a}, \delta) \subseteq M$ (zde opět bereme okolí v $\mathbb{R}^n$). Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *uzavřená*, pokud $\mathbb{R}^n \setminus M$ je otevřená množina. Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *kompaktní*, pokud je omezená a uzavřená.

Zjevně každý kompaktní interval v $\mathbb{R}$ je i kompaktní množina podle předchozí definice. Ovšem i v $\mathbb{R}$ existují kompaktní množiny, které nejsou intervaly, např. sjednocení dvou kompaktních intervalů je též kompaktní množina.

Poznamenejme, že zatímco omezenost a otevřenost množiny se definuje v libovolném metrickém prostoru analogicky jako v Definici 6.10, kompaktní množiny se obecně definují jinak, přičemž v neeukleidovských prostorech nemusí být každá omezená a uzavřená množina nutně kompaktní. Obecnou definici kompaktní množiny si na této přednášce uvádět nebudeme, neboť nepatří do našeho sylabu, ovšem zájemci si ji mohou najít např. na wikipedii.

Slíbené zobecnění Věty 6.8 na funkce více proměnných vypadá takto.

Věta 6.11. *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom f nabývá na množině M svého maxima i minima.*

7 | Derivace

Části studijního textu v rámečku jsou volitelné. Nebudeme vás z nich zkoušet, ale možná vám pomohou lépe pochopit ostatní látku.

Derivace patří k nejdůležitějším pojmům matematické analýzy. Umožňuje mimo jiné danou funkci aproximovat pomocí jednoduchých funkcí, například lineárních.

Definice 7.1. Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$, $b \in M$ a $U(b,\delta) \subseteq M$ pro nějaké $\delta > 0$. *Derivace funkce f v bodě b* je limita

$$f'(b) := \lim_{h\to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim_{x\to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Derivace funkce f v bodě a zprava (zleva) je příslušná jednostranná limita pro $h \to 0^+$ ($h \to 0^-$), resp. $x \to a^+$ ($x \to a^-$). Tyto jednostranné derivace značíme $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.

Poznámka. Derivace buď existuje vlastní ($f'(b) \in \mathbb{R}$) nebo nevlastní ($f'(b) = \pm\infty$) nebo neexistuje. Stejně jako v případně limity, derivace existuje právě tehdy, když obě jednostranné derivace existují a jsou si rovny. Jestliže má f v bodě b vlastní derivaci, říkáme, že f je v b *diferencovatelná*.

Derivaci funkce f v bodě b můžeme kromě $f'(b)$ značit i poněkud obšírnějším zápisem $(f(x))'\,|_{x=b}$. To je praktické u derivování složitějších výrazů, jako např. $(x^2\cos(x^2 - x))'\,|_{x=0}$.

Abychom si přiblížili geometrický význam derivace, uvažme následující situaci: máme dánu funkci f definovanou na okolí bodu $b \in \mathbb{R}$, a chceme tuto funkci na okolí b co nejpřesněji aproximovat pomocí vhodné lineární funkce $\ell(x) = \alpha x + \beta$. Jinými slovy, hledáme konstanty α a β takové, aby se rozdíl $f(x) - \ell(x)$ co nejrychleji blížil k nule když se x blíží k b. Speciálně tedy chceme, aby $f(b) = \ell(b)$, z čehož plyne $\beta = f(b) - \alpha \cdot b$, a tedy $\ell(x) = \alpha(x - b) + f(b)$.

Zbýva ještě zvolit koeficient α, který se v geometrii označuje jako *směrnice* přímky určené rovnicí $y = \alpha x + \beta$. Protože aproximujeme f pomocí lineární funkce, je přirozené chtít, aby chyba této aproximace byla menší než jakákoliv lineární funkce. Chceme tedy, aby platilo $f(x) - \ell(x) = o(x - b)$ pro $x \to b$, neboli explicitněji, aby platilo $\lim_{x\to b} \frac{f(x)-\ell(x)}{x-b} = 0$. Tento vztah je po přímočaré úpravě ekvivalentní rovnosti $\alpha = \lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$, tj. $\alpha = f'(b)$. Přímka, která nejlépe aproximuje graf f v okolí b, má tedy za směrnici právě derivaci funkce f v b, pokud tato derivace existuje a je konečná. Tato přímka se označuje jako *tečna* ke grafu f v bodě $(b, f(b))$.

Všimněte si, že výraz $\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ v definici derivace je roven směrnici přímky procházející dvojicí bodů $(x, f(x))$ a $(b, f(b))$. Je tedy přirozené, že když se x blíží k b, tak se tato směrnice blíží ke směrnici tečny v bodě $(b, f(b))$.

Pro funkce více proměnných existuje zobecnění pojmu derivace s analogickým geometrickým významem. Rychlosti růstu funkce ve směru určené souřadnicové osy odpovídají *parciální derivace*.

Hlavním obsahem této kapitoly budou různé metody výpočtu derivací. Někdy můžeme spočítat derivaci přímo z definice:

Příklad 7.2. Funkce $f(x) = x$ má derivaci rovnou 1 v každém bodě, protože

$$f'(b) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{x\to b} \frac{x - b}{x - b} = 1.$$

Příklad 7.3. Funkce $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, má v b derivaci rovnou nb^{n-1}, protože

$$\lim_{h\to 0} \frac{(b+h)^n - b^n}{h} = \lim_{h\to 0} \left(b^{n-1}\binom{n}{1} + b^{n-2}h\binom{n}{2} + \cdots + h^{n-1}\binom{n}{n} \right) = nb^{n-1}.$$

Příklad 7.4. Funkce signum, $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ ($= 1$ pro $x > 0$, $= 0$ pro $x = 0$ a $= -1$ pro $x < 0$), má v nule jednostranné derivace

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$$

a

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

takže $\operatorname{sgn}'(0) = +\infty$.

Příklad 7.5. Funkce absolutní hodnoty, $f(x) = |x|$, v nule nemá vůbec derivaci, protože $f'_-(0) = -1$ a $f'_+(0) = 1$.

Příklad 7.6. Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná jako $f(x) = x^{1/3}$ pro $x \geq 0$ a jako $f(x) = -(-x)^{1/3}$ pro $x < 0$ je v 0 spojitá a má tam (jak se snadno spočte) nevlastní derivaci $+\infty$.

Předchozí příklady ukazují, že spojitá funkce může mít nevlastní derivaci nebo nemusí mít derivaci, a naopak, funkce může mít (nevlastní) derivaci i v bodě, kde není spojitá. Pokud je ovšem funkce v nějakém bodě diferencovatelná, musí tam být i spojitá:

Věta 7.7 (Diferencovatelnost $\Rightarrow$ spojitost)**.** *Má-li $f\colon U(b,\delta) \to \mathbb{R}$ v bodě b vlastní derivaci, je v b spojitá.*

Důkaz. Máme

$$\lim_{x\to b}(f(x) - f(b)) = \lim_{x\to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \lim_{x\to b}(x - b) = f'(b) \cdot 0 = 0.$$

Tedy $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$ a f je spojitá v b. □

Z Věty 5.2 o aritmetice limit funkcí lze odvodit následující větu o aritmetice derivací.

Věta 7.8 (Aritmetika derivací). *Nechť $f, g\colon U(b,\delta) \to \mathbb{R}$ jsou funkce, které mají v bodě b derivaci (vlastní či nevlastní). Pak*

1. *Platí, že $(f+g)'(b) = f'(b) + g'(b)$, je-li pravá strana definovaná.*
2. *Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $(\alpha f)'(b) = \alpha(f'(b))$, je-li pravá strana definovaná.*
3. *Platí* Leibnizova formule: $(fg)'(b) = f'(b)g(b) + f(b)g'(b)$, *je-li pravá strana definovaná a f nebo g je spojitá v b.*
4. *Je-li g spojitá v b, $g(b) \neq 0$ a je-li pravá strana následující rovnosti definovaná, pak*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(b) = \frac{f'(b)g(b) - f(b)g'(b)}{g(b)^2}.$$

Důkaz. První dvě tvrzení jsou okamžitým důsledkem věty o aritmetice limit. Ze zbylých dvou tvrzení dokažme jen Leibnizovu formuli. Výraz $\frac{f(x)g(x)-f(b)g(b)}{x-b}$ je symetrický v f a g a můžeme proto předpokládat, že například g je spojitá v b. Pak máme

$$\begin{aligned}(fg)'(b) &= \lim_{x\to b} \frac{f(x)g(x) - f(b)g(b)}{x-b}\\ &= \lim_{x\to b} \frac{(f(x)-f(b))g(x) + f(b)(g(x)-g(b))}{x-b}\\ &= \lim_{x\to b} \frac{(f(x)-f(b))}{x-b} \lim_{x\to b} g(x) + f(b) \lim_{x\to b} \frac{g(x)-g(b)}{x-b}\\ &= f'(b)g(b) + f(b)g'(b).\end{aligned}$$

□

Tak jako u vět o aritmetice limit, i zde platí, že příslušný vzorec lze použít jen tehdy, když pravá strana má smysl. Pokud pravá strana obsahuje neurčitý výraz, nelze o existenci a hodnotě derivace na levé straně nic usuzovat. Vezměme například funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ a $g(x) = 0$. Při výpočtu $(fg)'(0)$ Leibnizovou formulí dostaneme $f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = (+\infty)\cdot 0 + 0 \cdot 0$, což obsahuje neurčitý výraz. Ovšem fg je identicky rovná nule, a tedy zjevně $(fg)'(0) = 0$.

Zdůrazněme také, že i když při výpočtu pomocí vzorečků pro aritmetiku derivací nevznikne neurčitý výraz, nesmíme zapomenout ověřit předpoklady na spojitost, jinak můžeme dostat chybný výsledek. Pro $f(x) = g(x) = \frac{1}{10} + \operatorname{sgn}(x)$ například Leibnizova formule zdánlivě dává

$$(fg)'(0) \overset{??}{=} f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = (+\infty)\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\cdot(+\infty) = +\infty,$$

ve skutečnosti ovšem fg v nule derivaci nemá, jak se můžeme snadno přesvědčit. Není zde splněn předpoklad, že aspoň jedna z funkcí f a g je spojitá, tedy Leibnizovu formuli nelze použít.

Poznamenejme, že předpoklad spojitosti v Leibnizově formuli je splněn např. tehdy, když aspoň jedna z derivací $f'(b)$ a $g'(b)$ je vlastní, díky Větě 7.7.

Podívejme se nyní na derivace elementárních funkcí $\exp(x)$, $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Připomeňme, že jsme si tyto funkce definovali pomocí součtů řad:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Nabízí se myšlenka derivovat nekonečný součet ‘člen po členu’, podobně jako v části 1 Věty 7.8. Pro obecné nekonečné řady funkcí takový postup ovšem nemusí být vždy korektní. Naštěstí výše uvedené řady jsou speciálního typu: jsou to takzvané *mocninné řady*, tj. řady tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde (a_n) je nějaká posloupnost reálných čísel. Bez důkazu si uveďme, že pro mocninné řady je derivování člen po členu přípustné.

Věta 7.9 (Derivování mocninných řad)**.** *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada. Předpokládejme, že existuje otevřený interval I takový, že pro každé $x \in I$ tato řada konverguje, a označme její součet $f(x)$. Potom pro každé $x \in I$ má funkce f v bodě x vlastní derivaci, a ta splňuje*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

S využitím Věty 7.9 snadno určíme derivace elementárních funkcí:

$$\begin{aligned}
\exp'(x) &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)' \\
&= 0 + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
&= \exp(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)' \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
&= \cos(x),
\end{aligned}$$

a podobně $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Platí tedy $\exp'(x) = \exp(x)$, $\sin'(x) = \cos(x)$ a $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Nyní si ukážeme další obecné vzorečky užitečné při výpočtu derivací. Symbolem $f \circ g$ označme funkci vzniklou složením funkcí f a g, tj. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Věta 7.10 (Derivace složené funkce)**.** *Nechť funkce f má derivaci v bodě b, funkce g má derivaci v bodě a, $b = g(a)$ a g je spojitá v a. Pak*

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Rozlišíme dva případy: buď platí $g'(a) \neq 0$, nebo $g'(a) = 0$. Předpokládejme nejprve, že $g'(a) \neq 0$. To znamená, že existuje prstencové okolí $P(a, \delta)$ bodu a, na němž je výraz $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ nenulový, a speciálně na tomto prstencovém okolí platí $g(x) \neq g(a)$. Počítejme nyní $(f \circ g)'(a)$ podle definice:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x)-g(a)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} && (7.1) \\
&= \underbrace{\lim_{x\to a} \frac{f(g(x)) - f(b)}{g(x)-b}}_{A} \underbrace{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{B} \quad (\text{protože } g(a) = b), && (7.2)
\end{aligned}$$

kde rovnost (7.2) je platná pouze za podmínky, že součin limit na pravé straně je definován. Limita výrazu B je rovna $g'(a)$ dle definice derivace. Ukážeme nyní, že limita A je rovna $f'(b)$. Všimněme si, že výraz A je dobře definován na $P(a, \delta)$, neboť jeho jmenovatel je tam dle předpokladu nenulový. Všimněme si také, že A lze interpretovat jako složenou funkci $H(g(x))$, kde $H(y) = \frac{f(y)-f(b)}{y-b}$. Protože $g(x)$ má v a limitu b a $H(y)$ má v b limitu $f'(b)$, a protože navíc g má na prstencovém okolí a hodnoty různé od b, lze použít Větu o limitě složené funkce (Věta 5.7) s předpokladem P2, z níž plyne, že limita výrazu A je $f'(b)$. Tedy vskutku platí $(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a)$.

Nyní vyřešme případ, kdy $g'(x) = 0$. Zde můžeme předpokládat, že derivace $f'(b)$ je vlastní, jinak součin $f'(b) \cdot g'(a)$ není definován a věta nic netvrdí. Na druhou stranu ale nemůžeme rovnou použít úpravu jako v rovnicích (7.1) a (7.2), protože výraz $A = H(g(x))$ není definován v bodech, kde $g(x) = b$, a takové body teď mohou existovat v každém prstencovém okolí a. Problém obejdeme tím, že funkci H spojitě dodefinujeme, tj. definujeme funkci $\tilde{H}$ takto:

$$\tilde{H}(y) = \begin{cases} H(y) \text{ pro } y \neq b \\ f'(b) \text{ pro } y = b \end{cases}$$

Všimněte si, že zde využíváme, že $f'(b)$ je vlastní. Všimněte si také, že $\tilde{H}$ je v bodě b spojitá, protože $\tilde{H}(b) = f'(b) = \lim_{y\to b} \tilde{H}(y)$. Nyní pro x na prstencovém okolí a platí

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \tilde{H}(g(x))\frac{g(x) - g(a)}{x - a},$$

protože pokud $g(x) = b$, jsou obě strany nulové, a pokud $g(x) \neq b$, je rovnost obdobou (7.1). Nyní podobně jako v (7.2) máme

$$(f \circ g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \lim_{x\to a} \underbrace{\tilde{H}(g(x))}_{\tilde{A}} \lim_{x\to a} \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{B},$$

kde B má opět limitu $g'(a)$. Limita $\tilde{A}$ je rovna $f'(b)$, což plyne z Věty o limitě složené funkce, kde ovšem tentokrát použijeme předpoklad P1, neboť $\tilde{H}$ je spojitá v b. □

Věta 7.11 (Derivace inverzní funkce)**.** *Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $a \in J$ jeho vnitřní bod, $f\colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá a ryze monotónní funkce (tj. rostoucí nebo klesající) a $f(a) = b$. Pak*

1. *Když má f v a nenulovou derivaci $f'(a)$, potom inverzní funkce $f^{<-1>}$ má v b derivaci*

$$\left(f^{<-1>}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

2. *Když $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající), potom $\left(f^{<-1>}\right)'(b) = +\infty$ (resp. $-\infty$).*

Důkaz. Nechť je f rostoucí, pro f klesající je důkaz obdobný. Definujme pomocnou funkci $G(x) = \frac{x-a}{f(x)-f(a)}$ na $J \setminus \{a\}$, a všimněme si, že pro $y \neq b$ platí

$$G(f^{<-1>}(y)) = \frac{f^{<-1>}(y) - f^{<-1>}(b)}{y - b}.$$

Spočítejme derivaci $f^{<-1>}$ v bodě $b = f(a)$ dle definice:

$$(f^{<-1>})'(b) = \lim_{y\to b} \frac{f^{<-1>}(y) - f^{<-1>}(b)}{y - b} = \lim_{y\to b} G(f^{<-1>}(y)) = \lim_{x\to a} G(x),$$

kde v posledním kroku jsme využili Větu 5.7 o limitě složené funkce s předpokladem P2, který je splněn díky tomu, že $f^{<-1>}$ je rostoucí.

Zbývá tedy spočítat $\lim_{x\to a} G(x)$. Pokud $f'(a) \neq 0$, tak $\lim_{x\to a} G(x) = \frac{1}{f'(a)}$ dle aritmetiky limit. Pokud $f'(a) = 0$, tak si nejprve všimněme, že $G(x) > 0$ na $J \setminus \{a\}$ díky tomu, že f je rostoucí. Z toho pak snadno odvodíme, že $\lim_{x\to a} G(x) = +\infty$. □

Příklad 7.12. Pomocí Věty 7.11 spočítejme derivaci logaritmu. Pro $b = \exp(a)$ máme

$$\ln'(b) = \frac{1}{\exp'(a)} = \frac{1}{\exp(a)} = \frac{1}{b}.$$

Na závěr si ukažme, že derivace někdy pomohou při výpočtu limit:

Příklad 7.13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0}=\exp'(0)=\exp(0)=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\sin'(0)=\cos(0)=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos(x)-1}{x}}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=\frac{\cos'(0)}{(\ln(x+1))'|_{x=0}}=\frac{-\sin(0)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)|_{x=0}}=\frac{0}{1}=0,\ \text{atd.}$$

8 Aplikace derivací

L'Hospitalovo pravidlo (někdy psáno l'Hôpitalovo, v obou případech vyslovujeme [lopitalovo]) je populární nástroj pro výpočet limit neurčitých výrazů $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$.

Věta 8.1 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, nechť funkce $f, g \colon P(a,\delta) \to \mathbb{R}$ mají na $P(a,\delta)$ vlastní derivaci a nechť $g'(x) \neq 0$ na $P(a,\delta)$.*

1. *Pokud $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak i $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.*
2. *Pokud $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak i $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.*

Totéž platí pro jednostranné limity $x \to a^-$ a $x \to a^+$.

Tuto větu nebudeme dokazovat. Uvedeme několik příkladů demonstrujících správného a chybného použití l'Hospitalova pravidla.

Příklad 8.2. V následujícím výpočtu je užití l'Hospitalova pravidla správné a prospěšné:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6},$$

kde jsme v poslední rovnosti použili základní limitu pro sinus (nebo jsme mohli ještě jednou l'Hospitalovat).

Příklad 8.3. Výpočet

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{3x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x+1)'}{(3x+1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

podle l'Hospitalova pravidla je chybný. Není splněn předpoklad, že čitatel a jmenovatel jdou k nule nebo absolutní hodnota jmenovatele jde do nekonečna. Správná limita je 1.

Příklad 8.4. Argument, podle něhož

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x + \sin x}$$

neexistuje, protože

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(x^2)'}{(x+\sin x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{1+\cos x}$$

a tato poslední limita (zcela správně) neexistuje, je chybný. O případu, kdy limita podílu derivací neexistuje, l'Hospitalovo pravidlo neříká nic. Správná limita je $+\infty$.

Příklad 8.5. Limitu
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-1/x)}{x}$$
nemá smysl počítat l'Hospitalovým pravidlem, alespoň ne přímo, protože derivováním čitatele a jmenovatele se situace nezjednoduší, ale zkomplikuje:
$$\frac{(\exp(-1/x))'}{(x)'} = \frac{\exp(-1/x)/x^2}{1} = \frac{\exp(-1/x)}{x^2}$$
a dalším derivováním se zlomek dále komplikuje. Lepší je výpočet pomocí věty o limitě složené funkce $f(g(x))$ kde $y := g(x) = 1/x$, a $f(y) = y\exp(-y)$. Porovnáním růstu exponenciály a polynomiální funkce nebo použitím l'Hospitalova pravidla, dostaneme, že
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-1/x)}{x} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{\exp(y)} = 0.$$

Nyní se budeme zabývat vyšetřováním průběhu funkce. Budou nás zajímat zejména následující informace, které pak můžeme využít pro náčrt grafu funkce: definiční obor, obor hodnot, spojitost, limity v krajních bodech a limity v bodech nespojitosti, vlastnosti jako sudost, lichost nebo periodicita, intervaly monotonie a extrémy (lokální i globální), konvexita a konkávnost. Derivace jsou klíčovým nástrojem pro určování posledně jmenovaných vlastností.

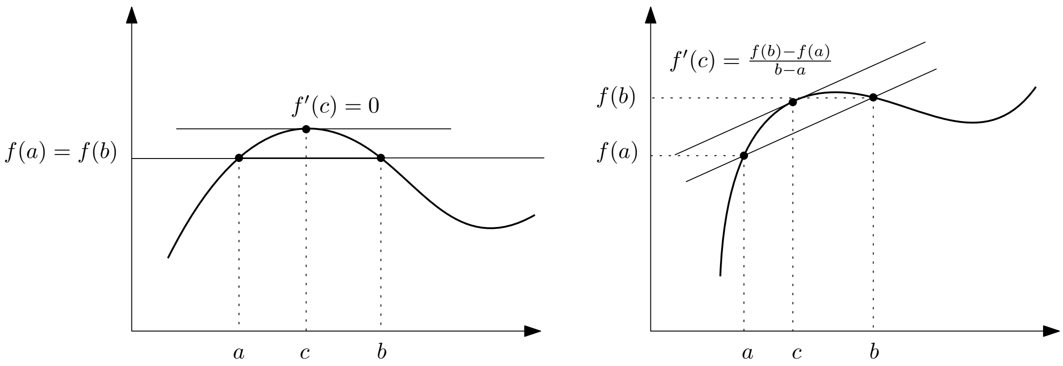
Věta 8.6 (Nutná podmínka pro lokální extrém)**.** *Nechť má $f\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ v bodě a nenulovou derivaci $f'(a) \neq 0$. Potom f nenabývá v a lokální extrém, to jest pro každé δ_1, $0 < \delta_1 < \delta$, existují body $b, c \in P(a,\delta_1)$ takové, že $f(b) < f(a) < f(c)$.*

Důkaz. Nechť např. $f'(a) > 0$. Existuje tedy $\delta_2 > 0$, že pro každé $x \in P(a,\delta_2)$ platí
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$
Pro $x \in P^-(a,\delta_2)$ máme $x - a < 0$, a tedy musí platit, že $f(x) < f(a)$, aby byl podíl $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ kladný. Podobně pro $x \in P^+(a,\delta_2)$ musí platit, že $f(x) > f(a)$. $\square$

Jinými slovy, pokud funkce f má lokální extrém v bodě a, buď $f'(a) = 0$, nebo $f'(a)$ neexistuje. Opačná implikace ale neplatí – nulová, nebo neexistující derivace lokální extrém neimplikuje.

Předchozí věta je užitečná také při hledání globálních extrémů, protože globální extrém musí být i lokálním extrémem. Je ovšem důležité uvědomit si, že definujeme-li funkci na uzavřeném intervalu, v jejích krajních bodech není definována derivace. Krajní body tedy mohou být lokálními extrémy.

Příklad 8.7. Funkce $f(x) = |x|$ má lokální minimum v bodě 0, kde derivace neexistuje.



Obrázek 8.1: Dle Rolleovy (vlevo) a Lagrangeovy (vpravo) věty existuje bod c, kde je tečna grafu rovnoběžná se zadanou sečnou.

Příklad 8.8. Funkce $f(x) = x^3$ má v bodě 0 nulovou derivaci, ale nemá tam lokální extrém.

Příklad 8.9. Funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1, 1]$ má lokální maxima v bodech 1 a -1, zatímco v bodě 0 má lokální minimum. V bodech 1 a -1 derivace není definována, v bodě 0 má f nulovou derivaci.

Následující dvě věty se společně označují jako *věty o střední hodnotě*. První z nich, známá jako Rolleova věta, říká (za jistých předpokladů), že pokud funkce nabývá stejné hodnoty v bodě a a b, tak někde mezi nimi má graf funkce vodorovnou tečnu. Druhá věta, označovaná jako Lagrangeova, je zobecněním té první a říká (opět za daných předpokladů), že graf funkce f má někde mezi body a a b tečnu, která je rovnoběžná s přímkou procházející body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$.

Věta 8.10 (Rolleova věta). *Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je na $[a, b]$ spojitá, má na intervalu (a, b) derivaci (i nevlastní) a $f(a) = f(b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.*

Důkaz. Pokud je funkce f na intervalu $[a, b]$ konstantní, věta pro ni zřejmě platí, protože pak $f'(c) = 0$ pro každé $c \in (a, b)$. Pokud není konstantní, existuje $d \in (a, b)$, že třeba $f(d) \neq f(a) = f(b)$. Budeme přepokládat, že $f(d) > f(a) = f(b)$, případ $f(d) < f(a) = f(b)$ je podobný. Nechť $c \in [a, b]$ je bod, v němž f nabývá na $[a, b]$ své maximum – ten existuje dle principu maxima pro spojité funkce (Věta 6.8). Protože $f(c) \geq f(d) > f(a) = f(b)$, maximum nemůže být v krajních bodech a tedy máme $c \in (a, b)$. Bod c je bodem lokálního maxima, a tak $f'(c) = 0$ podle Věty 8.6. □

Věta 8.11 (Lagrangeova věta o střední hodnotě). *Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je na $[a, b]$ spojitá a má na intervalu (a, b) derivaci (i nevlastní). Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Zaveďme pomocnou funkci

$$p(x) := f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Všimněte si, že graf této funkce je přímka procházející body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. Naším cílem je tedy najít bod $c \in (a, b)$, v němž je tečna ke grafu f rovnoběžná s touto přímkou.

Definujme funkci $h(x) := f(x) - p(x)$. Ta je na $[a, b]$ spojitá (je to rozdíl dvou spojitých funkcí) a na (a, b) má derivaci

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Dále $h(a) = h(b) = 0$. Podle Věty 8.10 existuje $c \in (a, b)$, že $h'(c) = 0$, čili

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

což jsme chtěli dokázat. □

> Lagrangeova věta má i přirozenou fyzikální interpretaci: popišme například jízdu autem pomocí funkce f, kde $f(x)$ označuje vzdálenost, do jaké auto dojelo v čase x. Potom $f'(c)$ je okamžitá rychlost auta v čase c a podíl $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ je jeho průměrná rychlost v časovém intervalu od a do b. Lagrangeova věta tedy říká, že v nějakém okamžiku $c \in (a, b)$ byla okamžitá rychlost stejná, jako průměrná rychlost za celý interval $[a, b]$.

Z Lagrangeovy věty odvodíme vztah mezi derivací a monotonií funkce.

Věta 8.12 (Derivace a monotonie)**.** *Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (s kladnou délkou), funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je na J spojitá a má v každém vnitřním bodě intervalu J derivaci. Pokud na vnitřku J platí $f' > 0$ (resp. $f' \geq 0$), je f na J rostoucí (resp. neklesající). Pokud na vnitřku J platí $f' < 0$ (resp. $f' \leq 0$), je f na J klesající (resp. nerostoucí).*

Důkaz. Probereme jen případ $f' > 0$, ostatní případy jsou velmi podobné. Pro každá dvě čísla $a < b$ z J podle Věty 8.11 existuje číslo c takové, že $a < c < b$ a

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) > 0.$$

Z $b - a > 0$ proto plyne, že i $f(b) - f(a) > 0$, tedy f je na J rostoucí. □

Příklad 8.13. Má-li f nulovou derivaci v každém vnitřním bodě intervalu J, je na J současně nerostoucí a neklesající, tedy konstantní.

Protože derivace funkce na nějakém intervalu je sama o sobě funkce (je-li všude definována a vlastní), můžeme ji zderivovat.

Definice 8.14. Pokud funkce $f\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ má na $U(a,\delta)$ vlastní derivaci $f'(x)$ a existuje limita

$$f''(a) := \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a},$$

nazveme ji *druhou derivací f v a*. Analogicky definujeme derivace vyšších řádů: Má-li $f\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ na $U(a,\delta)$ derivaci $f^{(n-1)}(x)$ řádu $n-1$, *derivace řádu n v a* je limita

$$f^{(n)}(a) := \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a},$$

když existuje.

Z definice plyne, že existence derivací nižšího řádu je nutná pro existenci derivací vyššího řádu, např. pokud existuje třetí derivace funkce, musí existovat také její první a druhá derivace.

Příklad 8.15. Například pro $f(x) = x^2 - x$ máme

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 1 \\ f''(x) &= 2 \\ f^{(3)}(x) &= f^{(4)}(x) = \cdots = 0 \end{aligned}$$

Definice 8.16. Nechť I je interval. Řekneme, že funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ je na intervalu I

- *konvexní*, pokud pro každá $a, x, b \in I$ taková, že $a < x < b$, platí

$$f(x) \le f(a) + (x-a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \tag{8.1}$$

- *ryze konvexní*, pokud je předchozí nerovnost ostrá,
- *konkávní*, pokud pro každá $a, x, b \in I$ taková, že $a < x < b$, platí

$$f(x) \ge f(a) + (x-a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \tag{8.2}$$

- *ryze konkávní*, pokud je předchozí nerovnost ostrá.

Výraz na pravé straně nerovností (8.1) a (8.2) je rovnice přímky procházející body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. Tyto nerovnosti lze tedy geometricky interpretovat tak, že pro konvexní funkci leží graf funkce f na intervalu (a,b) pod úsečkou spojující body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$, zatímco pro konkávní funkci naopak leží nad touto úsečkou.

Příklad 8.17. Lineární funkce $f(x) = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, je konvexní a konkávní zároveň na $\mathbb{R}$ (ale ne ryze), protože pro každé $a < x < b$ platí

$$\alpha a + (x-a)\frac{\alpha b - \alpha a}{b-a} = \alpha x.$$

Příklad 8.18. Rozmyslete si, že $f(x) = |x|$ je konvexní na $\mathbb{R}$, ale ne ryze.

Splňuje-li funkce podmínky následující věty, můžeme na vyšetření její konvexity a konkavity použít druhou derivaci.

Věta 8.19 (Konvexita, konkavita a druhá derivace)**.** *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval, nechť funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ má na I druhou derivaci $f''(x)$. Pokud je f'' na I kladná (resp. nezáporná), je f na I ryze konvexní (resp. konvexní). Pokud je f'' na I záporná (resp. nekladná), je f na I ryze konkávní (resp. konkávní).*

Nebudeme dokazovat. Jak ovšem vidíme na příkladu funkce $|x|$, funkce může být konvexní (nebo konkávní), i když druhou derivaci v některých bodech nemá ($|x|$ nemá v bodě 0 ani první derivaci).

Příklad 8.20. Funkce x^3 je na intervalu $(0, \infty)$ ryze konvexní, protože $(x^3)'' = 6x > 0$, a naopak na intervalu $(-\infty, 0)$ je ryze konkávní.

Jak vidíme na předchozím příkladu, funkce x^3 se v bodě 0 mění z konkávní na konvexní—její graf přechází z jedné strany tečny $y = 0$ na druhou. Takovým bodům říkáme *inflexní.*

Definice 8.21. Bod $a \in \mathbb{R}$ je *inflexním bodem* funkce $f\colon U(a, \delta) \to \mathbb{R}$, pokud f má vlastní derivaci $f'(a)$ a existuje takové δ_1, že $0 < \delta_1 < \delta$ a

$$\begin{aligned} x \in (a - \delta_1, a) \quad &\Rightarrow \quad f(x) < f(a) + f'(a)(x - a) \qquad \text{a} \\ x \in (a, a + \delta_1) \quad &\Rightarrow \quad f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) \end{aligned}$$

nebo jsou obě nerovnosti prohozené—pro x nalevo od a leží $(x, f(x))$ pod tečnou a pro x napravo od a nad ní nebo naopak. Jinými slovy, fukce má v a inflexní bod, má-li její graf v bodě $(a, f(a))$ tečnu, která není svislá, a přechází-li graf f v okolí tohoto bodu z jedné strany tečny na druhou.

Konvexita funkce se někdy místo nerovnosti (8.1) definuje následujícím ekvivalentním způsobem.

Věta 8.22 (Jensenova nerovnost)**.** *Funkce f je konvexní na intervalu I, právě když pro každé $a, b \in I$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí*

$$f\big(\lambda a + (1 - \lambda)b\big) \le \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \tag{8.3}$$

Důkaz spočívá v substituci $\lambda = \frac{b-x}{b-a}$, neboli $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$, čímž se převede (8.1) na (8.3) a naopak. Podobně f je konkávní, právě když splní (8.3) s opačnou nerovností.

Indukcí podle k lze z Jensenovy nerovnosti odvodit následující obecnější verzi.

Věta 8.23 (obecná Jensenova nerovnost)**.** *Funkce f je konvexní na intervalu I, právě když pro každé $k \in \mathbb{N}$, pro každou k-tici bodů $a_1, a_2, \dots, a_k \in I$ a pro každou k-tici nezáporných koeficientů $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ splňujících $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$ platí*

$$f\big(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k\big) \leq \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \cdots + \lambda_k f(a_k).$$

Pro konkávní funkce se opět nerovnost otočí. Z Věty 8.23 lze odvodit pro konkrétní konvexní či konkávní f mnoho užitečných důsledků. Vezměme např. $f(x) = \ln(x)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \frac{1}{k}$ a $a_1, a_2, \dots, a_k > 0$ libovolná. Víme, že $f'(x) = \frac{1}{x}$, tedy $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, tj. f je konkávní na $(0, +\infty)$. Jensenova nerovnost (ve verzi pro konkávní funkce) pak dává

$$\ln\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}\right) \geq \frac{\ln(a_1) + \cdots + \ln(a_k)}{k}.$$

Dosadíme-li obě strany do funkce exp, která je rostoucí a tedy zachovává nerovnosti, dostaneme (po několika jednoduchých úpravách) vztah

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k},$$

jehož levá strana je aritmetický průměr $a_1, \dots, a_k$, pravá strana je tzv. geometrický průměr $a_1, \dots, a_k$ a celý vztah je známý jako *AG nerovnost.*

Na závěr uvedeme větu, která nám dává návod, jak počítat jednostranné derivace.

Věta 8.24 (Spojitost derivace v krajním bodě)**.** *Nechť $I = [a, b)$ je interval, nechť funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá zprava v bodě a a nechť má na (a, b) vlastní derivaci, pro níž platí $\lim_{x\to a^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Potom má f v bodě a derivaci zprava, pro níž platí*

$$f'_+(a) = A.$$

Důkaz. Funkce f je zřejmě spojitá na I (v a zprava to předpokládáme a jinde to plyne z toho, že f má vlastní derivaci, viz Věta 7.7). Pro každé $x \in (a, b)$ můžeme tedy použít Větu 8.11 pro interval $[a, x]$.

Cílem je dokázat $f'_+(a) = A$, tj. pro dané $\varepsilon > 0$ najít $\delta > 0$ splňující

$$\forall x \in P^+(a, \delta)\colon \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in U(A, \varepsilon). \tag{8.4}$$

Zvolme $\delta > 0$ tak, aby platilo jednak, že $P^+(a, \delta) \subseteq I$, a jednak, že $f'(x) \in U(A, \varepsilon)$ pro každé $x \in P^+(a, \delta)$. Taková volba δ je možná díky tomu, že $f'(x) \to A$ pro $x \to a+$.

Teď ukážeme, že toto δ splní i vlastnost (8.4). Zvolme $x \in P^+(a, \delta)$.

Z Lagrangeovy věty (Věta 8.11) použité na interval $[a, x]$ plyne, že existuje $c \in (a, x)$ takové, že $f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Protože $c \in (a, x) \subseteq P^+(a, \delta)$, máme $f'(c) \in U(A, \varepsilon)$ a tedy i $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in U(A, \varepsilon)$. Tím je vlastnost (8.4) ověřena a Věta 8.24 dokázána. □

Všimněte si, že ve Větě 8.24 nelze opomenout předpoklad, že f je v bodě a spojitá zprava. Například pro funkci $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ máme

$$+\infty = f'_+(0) \neq \lim_{x \to 0+} f'(x) = 0.$$

Větu 8.24 zde nelze použít, protože f není spojitá zprava v 0.

Příklad 8.25. Dle Věty 8.24 například můžeme pro funkci $f(x) = |\sin(x)|$ spočítat

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} (\sin(x))' = \lim_{x \to 0^+} \cos x = 1,$$

protože víme, že na pravém okolí bodu 0 je $|\sin x| = \sin x$.

9 | Taylorův polynom

Jak už víme ze sedmé přednášky, pokud má funkce f definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ v bodě a vlastní první derivaci $f'(a) \in \mathbb{R}$, má graf f v bodě a (přesněji v bodě $(a, f(a))$) tečnu s rovnicí $t(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$. Toto $t(x)$ je pak jediný polynom stupně nejvýš 1, pro nějž platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0$$

a v tomto smyslu je $t(x)$ nejlepší aproximace f pomocí lineární funkce v okolí bodu a.

Nyní budeme aproximovat fukci f pomocí polynomů vyššího stupně. Ukážeme, že pro funkci f s vlastní n-tou derivací v a existuje právě jeden polynom $P(x)$ stupně nejvýše n, pro který

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Definice 9.1 (Taylorův polynom)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, nechť $n \in \mathbb{N}_0$ a nechť f je funkce definovaná na okolí a, která má v a vlastní n-tou derivaci $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pokud $n = 0$, předpokládejme i spojitost f v a. *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a* rozumíme polynom

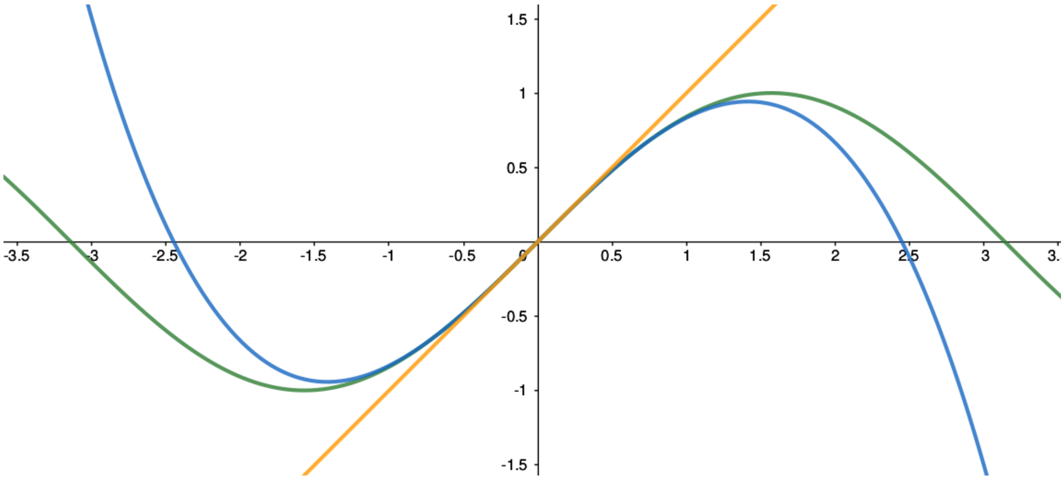
$$\begin{aligned} T_n^{f,a}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x - a)^i \\ &= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n. \end{aligned}$$

Ačkoli 0^0 je obecně nedefinovaný výraz, v kontextu polynomů či mocninných řad budeme vždy interpretovat $(x - a)^0$ jako konstantní funkci rovnou 1 pro všechna x. Taylorův polynom je tedy definován i pro $x = a$. Bez této konvence bychom museli konstantní člen psát zvlášť, mimo sumu. Používáme také konvenci $f^{(0)} = f$, tj. f je svou vlastní 'nultou derivací'.

Všimněte si, že pro Taylorův polynom $T(x) = T_n^{f,a}(x)$ platí $T(a) = f(a)$, $T'(a) = f'(a), \ldots, T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$. Všimněte si také, že pro $n \geq 1$ platí $(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a}$ (pro $n = 1$ je nutno předpokládat spojitost f' v a).

Věta 9.2 (Charakterizace Taylorova polynomu)**.** *Nechť funkce f má Taylorův polynom řádu $n \in \mathbb{N}_0$ v bodě $a \in \mathbb{R}$. Potom $T(x) = T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n s vlastností*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T(x)}{(x - a)^n} = 0. \tag{9.1}$$



Obrázek 9.1: Aproximace funkce $\sin x$ na okolí nuly polynomem prvního a třetího stupně.

Vlastnost (9.1) lze též zapsat jako $f(x) = T(x) + o(|x-a|^n)$ pro $x \to a$.
Před důkazem Věty 9.2 si dokážeme následující pomocné lemma.

Lemma 9.3. *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a Q je polynom stupně nejvýše n takový, že*

$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Pak je Q identicky nulový polynom.

Důkaz. Postupujme indukcí podle n. Pro $n = 0$ tvrzení platí, ve jmenovateli máme konstantní jedničku a Q musí být identicky nulový. Nechť $n \geq 1$. Jmenovatel jde k nule a tedy i čitatel: $Q(a) = \lim_{x\to a} Q(x) = 0$. Takže a je kořen Q a $Q(x) = (x-a)R(x)$ pro polynom R stupně nejvýše $n-1$. Máme

$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0$$

a podle indukčního předpokladu je R identicky nulový. Tedy i $Q = (x-a)R$ je identicky nulový. □

V důkazu předchozího lemmatu jsme použili tvrzení, že každý polynom $Q(x)$ splňující $Q(a) = 0$ lze zapsat jako součin $Q(x) = (x-a)R(x)$, kde $R(x)$ je polynom stupně o 1 menšího než $Q(x)$. Rozmyslete si sami, proč (a zda vůbec) je toto tvrzení pravdivé.

Nyní dokážeme slíbenou větu.

Důkaz Věty 9.2. Nejprve indukcí podle n ukážeme, že $T(x) := T_n^{f,a}(x)$ splní rovnost (9.1). Pro $n = 0$ to je pravda: $T_0^{f,a}(x) = f(a)$ a $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))/1 = 0$ podle spojitosti f v a.

Pro $n = 1$ platí $T_1^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, a tedy

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}(x)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0.$$

Pro $n > 1$ s využitím l'Hospitalova pravidla (Věta 8.1) a indukce máme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x - a)^n} &= \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - (T_n^{f,a})'(x)}{n(x - a)^{n-1}} \\
&= \frac{1}{n} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x - a)^{n-1}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Teď ukážeme, že $T(x)$ je jediný polynom stupně nejvýš n splňující (9.1). Pro spor, nechť $\check{T}(x)$ je jiný takový polynom. Potom

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{\check{T}(x) - T(x)}{(x - a)^n} &= \lim_{x\to a} \frac{\check{T}(x) - f(x)}{(x - a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T(x)}{(x - a)^n} \\
&= 0 + 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

podle předpokladu o $\check{T}$ a podle již dokázané vlastnosti Taylorova polynomu. Podle Lemmatu 9.3 tak máme, že $\check{T}(x) - T(x)$ je identicky nulový a $\check{T}(x) = T(x)$. □

Poznamenejme, že může nastat situace, kdy pro funkci f existuje polynom $T(x)$ stupně nejvýš n, který splňuje rovnost (9.1), ale přesto $T(x)$ není Taylorův polynom řádu n funkce f, protože f Taylorův polynom řádu n nemá. Uvažme třeba funkci f definovanou vztahy $f(x) = 0$ pro x racionální a $f(x) = x^3$ pro x iracionální. Snadno nahlédneme, že platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0,$$

je tedy splněno (9.1) pro $a = 0$, $n = 2$ a $T(x) = 0$. Ovšem f nemá v nule Taylorův polynom řádu 2 (ani žádného vyššího řádu), protože f' je definovaná jen v bodě 0 a f'' tedy není definována v žádném bodě.

Zbytkem Taylorova polynomu rozumíme rozdíl $R_n^{f,a}(x)$ mezi hodnotou funkce a hodnotou Taylorova polynomu:

$$R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x).$$

Funkce $R_n^{f,a}(x)$ tedy říká, jak dobře aproximuje Taylorův polynom funkci f v bodě x, nebo přesněji řečeno, jak velké chyby se dopustíme, nahradíme-li funkci f jejím Taylorovým polynomem. Cílem je přirozeně najít co nejlepší horní odhad na absolutní hodnotu této chyby. Věta 9.2 dává odhad $R_n^{f,a}(x) = o(|x - a|^n)$ pro $x \to a$. Ukážeme však, že za mírných předpokladů (zejména na omezenost $f^{(n+1)}$ v okolí a) se dá získat silnější odhad $R_n^{f,a}(x) = O(|x - a|^{n+1})$, navíc s explicitním odhadem na konstanty skryté uvnitř O-notace.

Věta 9.4 (Lagrangeův odhad zbytku)**.** *Nechť f je funkce, která má na otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ vlastní derivaci řádu $n+1$ (a tím pádem i spojité vlastní derivace všech nižších řádů). Volme $a, b \in I$, kde $a \neq b$. Potom existuje bod c ostře mezi a a b takový, že platí*

$$R_n^{f,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \tag{9.2}$$

Speciálně pro $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in I$ ležící ostře mezi body a a b platí $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, máme odhad

$$|R_n^{f,a}(b)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|b-a|^{n+1}. \tag{9.3}$$

Důkaz. Pro jednoduchost předpokládejme, že $a < b$, opačný případ je analogický. Hledejme funkci $g\colon I \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnostmi:

- $f(b) = g(b)$,
- pro každé $k = 0, \ldots, n$ platí $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$,
- $g^{(n+1)}$ je na I rovna nějaké konstantě, kterou označme K.

Jak taková funkce g bude vypadat? Z toho, že její derivace řádu $n+1$ je konstantní, lze vydedukovat, že g je polynom stupně nejvýš $n+1$, a každý takový polynom lze zapsat ve tvaru

$$g(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_{n+1}(x-a)^{n+1}$$

pro vhodně zvolené koeficienty $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1}$. Všimněte si, že pro $k \leq n+1$ platí $g^{(k)}(a) = k!\alpha_k$. Protože pro $k \leq n$ má být $g^{(k)}(a)$ rovno $f^{(k)}(a)$, musí pro tato k platit $\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Protože $g^{(n+1)}$ je identicky rovna K, tak $\alpha_{n+1} = \frac{K}{(n+1)!}$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} g(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{K}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\ &= T_n^{f,a}(x) + \frac{K}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Hodnota konstanty K je pak jednoznačně určena požadavkem $f(b) = g(b)$. Všimněte si, že z rovnosti (9.4) plyne

$$R_n^{f,a}(b) = f(b) - T_n^{f,a}(b) = g(b) - T_n^{f,a}(b) = \frac{K}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

K dokončení důkazu rovnosti (9.2) tedy stačí najít $c \in (a, b)$, pro něž platí $K = f^{(n+1)}(c)$. Definujme funkci $h(x) := g(x) - f(x)$ a všimněme si, že $h(a) = h'(a) = h''(a) = \cdots = h^{(n)}(a) = 0$. Všimněme si také, že $h^{(n+1)}(x) = K - f^{(n+1)}(x)$. Chceme tedy najít $c \in (a, b)$ splňující $h^{(n+1)}(c) = 0$.

Dokážeme indukcí, že pro každé $k \in \{1, \dots, n+1\}$ lze najít $c_k \in (a, b)$ splňující $h^{(k)}(c_k) = 0$. Protože $h(a) = h(b) = 0$, Rolleova věta (Věta 8.10) říká, že existuje $c_1 \in (a, b)$ splňující $h'(c_1) = 0$.

Nechť máme pro $k \leq n$ nalezeno $c_k \in (a, b)$ splňující $h^{(k)}(c_k) = 0$ a hledejme c_{k+1}. Protože $h^{(k)}(a) = h^{(k)}(c_k) = 0$, můžeme užít Rolleovu větu na interval (a, c_k) a funkci $h^{(k)}$, čímž dostaneme hledané c_{k+1} splňující $h^{(k+1)}(c_{k+1}) = 0$. Teď stačí vzít $c := c_{n+1}$, aby platila rovnost (9.2), z níž pak přímo plyne odhad (9.3). □

Lagrangeův tvar zbytku je ve většině praktických aplikací dostačující, ovšem někdy je potřeba volit jiné způsoby, jak odhadnout zbytek Taylorova polynomu. Jedna taková alternativa je tzv. Cauchyův tvar zbytku.

Věta 9.5 (Cauchyův tvar zbytku)**.** *Za stejných předpokladů jako ve Větě 9.4 platí, že ostře mezi body a a b existuje bod d splňující*

$$R_n^{f,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(d) \cdot (b-d)^n (b-a)}{n!}.$$

Tuto větu nebudeme dokazovat.

Všimněte si, že pokud má funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů a pokud pro nějaké x platí $\lim_{n\to\infty} R_n^{f,a}(x) = 0$, plyne z toho, že posloupnost $(T_n^{f,a}(x))_{n=0}^{\infty}$ konverguje k $f(x)$. To ekvivalentně znamená, že $f(x)$ je součet nekonečné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, neboť posloupnost $(T_n^{f,a}(x))_{n=0}^{\infty}$ je právě posloupnost částečných součtů této řady. Toto pozorování motivuje následující definici.

Definice 9.6 (Taylorova řada)**.** Má-li funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů, rozumíme pro $x \in \mathbb{R}$ její *Taylorovou řadou se středem v a* řadu

$$T^{f,a}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Pro několik elementárních funkcí teď odvodíme jejich rozvoje do Taylorovy řady (Taylorův polynom je několik prvních členů řady). Pro jednoduchost budeme pracovat jen s Taylorovými řadami se středem v nule, to jest s $a = 0$. Těmto řadám se někdy říká *Maclaurinovy řady.*

Pokud je f v bodě x definovaná, bylo by pěkné, aby její Taylorova řada, pokud existuje, konvergovala a její součet se rovnal $f(x)$. Jak si ale ukážeme, není to vždy pravda.

Příklad 9.7 (Taylorův rozvoj mocniny). Pro $m \in \mathbb{N}$ uvažme funkci $f(x) = (1+x)^m$. Její n-tá derivace je rovna $m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$, tj. speciálně pro $n \geq m$ je n-tá derivace identicky nulová. Maclaurinova řada funkce f má tedy jen konečně mnoho nenulových členů, konkrétně

$$T^{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n.$$

Jak víme z binomické věty, je tato řada rovna funkci $(1+x)^m$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. I bez znalosti binomické věty můžeme snadno nahlédnout, že tato řada má součet $f(x)$, neboť z Věty 9.4 plyne, že $R_n^{f,0}(x) = 0$ pro každé $n \geq m$ a $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 9.8 (Taylorův rozvoj exponenciály). Opakovaným derivováním exponenciály dostaneme, že

$$T^{\exp(x),0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots .$$

To je řada, pomocí které jsme exponenciálu definovali. V tomto případě jsme si tedy už dříve bez důkazu řekli, že $\exp(x) = T^{\exp(x),0}(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, tedy součet Taylorovy řady je všude roven exponenciále. Pomocí Věty 9.4 nyní odhadněme příslušné Taylorovy zbytky $R_n^{\exp,0}(x)$. Omezme se na $x > 0$ (ostatní případy jsou ještě jednodušší). Máme odhad $|R_n^{\exp,0}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} x^{n+1}$ pro $M := \sup_{y \leq x} |\exp(y)| = \exp(x)$. Snadno ověříme, např. pomocí odhadu $(n+1)! \geq n^{n/2}$, že $|R_n^{\exp,0}(x)| \to 0$ pro $n \to \infty$ a x pevné.

Podobně i pro funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$ lze snadno ověřit, že jejich Maclaurinova řada odpovídá mocninné řadě, pomocí níž jsme je definovali.

Příklad 9.9 (Taylorův rozvoj logaritmu). Funkce $\ln(x)$ nemá Maclaurinovu řadu, protože není definovaná v nule, je však možné uvažovat Maclaurinovu řadu funkce $f(x) = \ln(1+x)$. Snadno ověříme, že pro $n \geq 1$ a $x \in (-1, +\infty)$ platí

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},$$

z čehož plyne

$$T^{\ln(1+x),0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots .$$

Pro $x \in [0,1]$ můžeme využít odhad $|f^{(n)}(x)| \leq (n-1)!$ a pomocí Věty 9.4 získat $|R_n^{f,0}(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0$, řada tam tedy konverguje k $\ln(1+x)$. Tím například pro $x = 1$ dostaneme $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$.

Pro $x > 1$ není těžké nahlédnout, že řada nekonverguje, absolutní hodnoty jejích sčítanců se totiž blíží $+\infty$.

Pro $x \in (-1, 0)$ je situace zajímavější: Věta 9.4 umožňuje dokázat, že

$|R_n^{f,0}(x)| \to 0$ pro $x \in [-\frac{1}{2}, 0)$, ale pro $x \in (-1, -\frac{1}{2})$ je její odhad příliš slabý. Nicméně i pro $x \in (-1, -\frac{1}{2})$ řada $T^{f,0}(x)$ konverguje k $\ln(1+x)$, což lze dokázat například použitím Cauchyho tvaru zbytku. Zkuste si to sami přepočítat.

Taylorův polynom lze někdy využít při výpočtu limit tvaru $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ pro $a \in \mathbb{R}$, kde f i g mají limitu 0 pro $x \to a$. Postup spočívá v tom, že se čitatel i jmenovatel aproximují Taylorovými polynomy v bodě a dostatečně vysokého řádu, aby v čitateli i jmenovateli byl aspoň jeden nenulový monom. Takové využití Taylorova polynomu ukazuje následující příklad.

Příklad 9.10. Chtějme spočítat $\lim_{x\to 0} h(x)$, kde

$$h(x) = \frac{\sin(x) - x}{(\cos(x) - 1)(\exp(x) - 1)}.$$

Pomocí aproximací $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(|x|^3)$, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(|x|^2)$ a $\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + o(|x|)$ dostaneme

$$h(x) = \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(|x|^3)}{(-\frac{x^2}{2} + o(|x|^2))(x + o(|x|))} = \frac{-\frac{1}{3!}x^3(1 + o(1))}{-\frac{1}{2}x^3(1 + o(1))(1 + o(1))},$$

z čehož plyne $\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{1}{3}$.

Každý příklad řešitelný výše uvedenou metodou lze v principu také vyřešit opakovanou aplikací l'Hospitalova pravidla, protože koeficienty Taylorova polynomu odpovídají derivacím příslušných řádů. Často je ovšem použití Taylorových polynomů méně pracné než opakovaná l'Hospitalizace.

10 | Primitivní funkce

V předchozích kapitolách jsme se naučili spočítat derivaci dané funkce a vysvětlili, že derivace udává lokální rychlost růstu funkce. Nyní se budeme zabývat opačným problémem, a sice jak ze zadané derivace zrekonstruovat funkci.

Kupříkladu si představme těleso padající volným pádem. Víme, že jeho rychlost se (při dostatečném zjednodušení) neustále zvětšuje konstantním tempem - je to tedy lineární funkce v závislosti na čase. Jak na základě toho určit funkci jeho polohy v závislosti na čase?

Primitivní funkce nebo také *neurčitý integrál* je funkce, která řeší tento problém.

Definice 10.1. Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je daná funkce. Pokud má funkce $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ na (a,b) derivaci a ta se rovná $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a,b)$, řekneme, že F *je na intervalu* (a,b) *primitivní funkcí k funkci* f.

Věta 10.2 (Primitivní funkce je jednoznačná až na konstantu)**.** *Je-li* $F(x)$ *primitivní funkcí k* $f(x)$ *na* (a,b)*, je pro každé* $c \in \mathbb{R}$ *funkce* $F(x) + c$ *také primitivní k* $f(x)$ *na* (a,b)*. Naopak, jsou-li* $F(x)$ *a* $G(x)$ *primitivní k* $f(x)$ *na* (a,b)*, existuje konstanta* $c \in \mathbb{R}$ *taková, že* $F(x) - G(x) = c$ *pro každé* $x \in (a,b)$*.*

Narozdíl od derivace tedy primitivní funkce není určena jednoznačně. Proto také nedává smysl mluvit o primitivní funkci v bodě.

Důkaz. Jestliže $F'(x) = f(x)$ na (a,b), pak také $(F(x) + c)' = f(x) + 0 = f(x)$ na (a,b). Naopak, jestliže $F'(x) = G'(x) = f(x)$ na (a,b), pak $(F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$ na (a,b), což podle Věty 8.12 dává na (a,b) rovnost $F(x) - G(x) = c$ pro nějakou konstantu c. □

Množina funkcí primitivních k $f(x)$ se označuje symbolem integrálu

$$\int f(x)\, dx.$$

Fakt, že $F(x)$ je primitivní funkcí k $f(x)$ značíme jako

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c,$$

kde c je libovolná reálná konstanta. Například $\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + c$ na $\mathbb{R}$.

Pokud existuje, je primitivní funkce vždy spojitá (na odpovídajícím intervalu) podle Věty 7.7. Ne vždy ale primitivní funkce existuje:

Příklad 10.3. Funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ je definovaná na $\mathbb{R}$, ale nemá na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Pro spor předpokládejme, že F je primitivní k $\operatorname{sgn}(x)$ na $\mathbb{R}$. Funkce F je tedy spojitá zprava v nule a $F'(x) = \operatorname{sgn}(x) = 1$ pro $x > 0$. Tedy $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1$ a podle Věty 8.24 máme $F'_+(0) = 1$. To je ale ve sporu s $F'_+(0) = F'(0) = \operatorname{sgn}(0) = 0$.

Problémem funkce signum není nespojitost v nule jako taková, ale to, že tam má jednostrannou limitu odlišnou od funkční hodnoty. Nyní sestrojíme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která bude rovněž nespojitá v nule, ale bude přesto mít na $\mathbb{R}$ primitivní funkci $F(x)$.

Příklad 10.4. Položíme

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x^2) & \dots\ x \neq 0 \\ 0 & \dots\ x = 0. \end{cases}$$

Viz Obrázek 10.1. Pak, pro $x \neq 0$,

$$F'(x) = 2x\sin(1/x^2) - \tfrac{2}{x}\cos(1/x^2).$$

Dále

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\sin(1/x^2) = 0,$$

takže $F'(0) = 0$. Funkce $F(x)$ je tedy na $\mathbb{R}$ primitivní k funkci

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x^2) - \tfrac{2}{x}\cos(1/x^2) & \dots\ x \neq 0 \\ 0 & \dots\ x = 0. \end{cases}$$

Ale $f(x)$ není spojitá v nule, jednostranné limity $\lim_{x\to 0^\pm} f(x)$ neexistují.

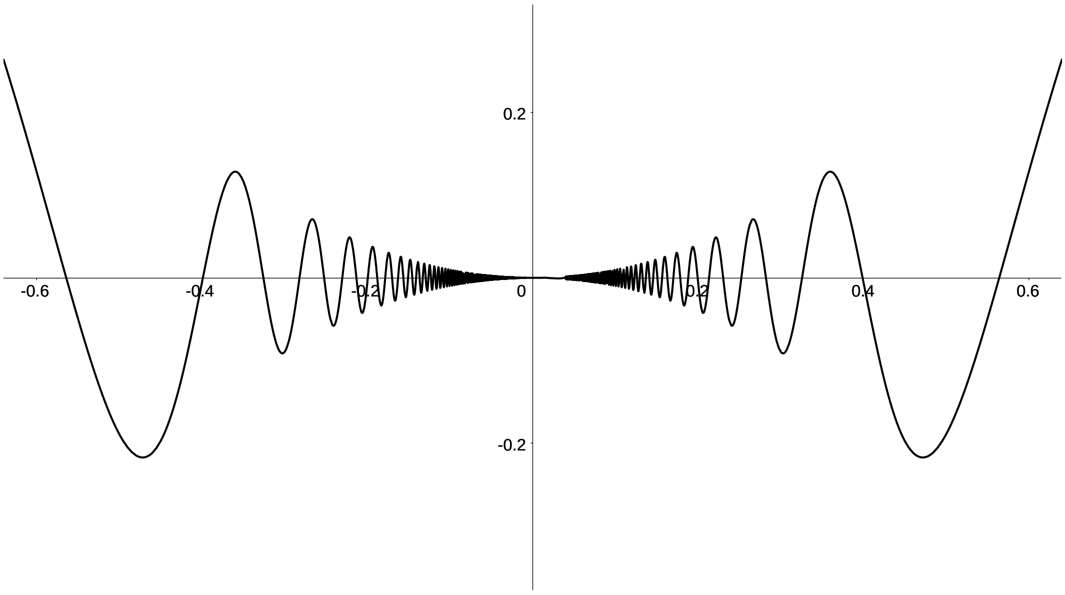
Spojitost tedy není nutnou podmínkou pro existenci primitivní funkce. Je ovšem podmínkou postačující.

Věta 10.5 (Spojitá funkce má primitivní funkci)**.** *Je-li I neprázdný otevřený interval a funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ je na I spojitá, pak má f na I primitivní funkci.*

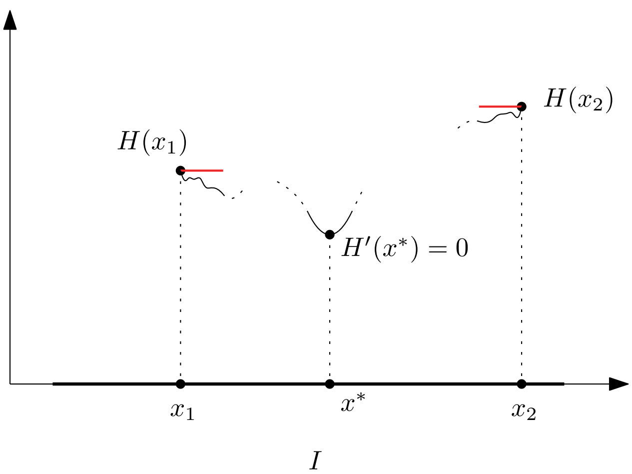
Důkaz. Dokážeme později pomocí Riemannova integrálu. □

Ukážeme, že nutnou podmínkou pro existenci primitivní funkce je Darbouxova vlastnost(t.j. nabývání všech mezihodnot). Připomeňme, že každá spojitá funkce má Darbouxovu vlastnost. Jak je ovšem vidět na Příkladu 10.4, funkce může mít Darbouxovu vlastnost, aniž by byla spojitá.

Věta 10.6 (Funkce s primitivní funkcí má Darbouxovu vlastnost)**.** *Má-li funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$, kde $I = (a, b)$ je otevřený interval, na I primitivní funkci, je obraz $f(I)$ též interval. Funkce f má tedy Darbouxovu vlastnost.*



Obrázek 10.1: Detail grafu funkce $F(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, která má vlastní derivaci v každém bodě, ale její derivace není spojitá v nule. Viz Příklad 10.4.



Obrázek 10.2: Funkce H na intervalu $[x_1, x_2]$ nemůže nabývat minimum v krajních bodech, musí tedy mít v nějakém vnitřním bodně nulovou derivaci.

Důkaz. Nechť F je primitivní funkcí k f na intervalu I a $c \in \mathbb{R}$ je číslo ležící mezi dvěma hodnotami funkce f, to jest $f(x_1) < c < f(x_2)$, kde x_1, x_2 jsou dva různé body z I. Budeme předpokládat, že $x_1 < x_2$, pro $x_1 > x_2$ se následující argument jednoduchým způsobem upraví (místo minima uvážíme maximum). Uvažme minimum funkce

$$H(x) = F(x) - cx$$

na intervalu $[x_1, x_2]$. Jelikož F je spojitá na intervalu I (protože je to primitivní funkce), je funkce H na I, a tedy i na intervalu $[x_1, x_2]$ rovněž spojitá. Navíc je $[x_1, x_2]$ kompaktní interval, takže dle Věty 6.8 na něm H nabývá minima v nějakém bodě $x^* \in [x_1, x_2]$.

H má na I derivaci

$$H'(x) = f(x) - c,$$

takže $H'(x_1) = f(x_1) - c < 0$ a $H'(x_2) = f(x_2) - c > 0$. To znamená, že pro malé $\delta > 0$ platí, že každé $x \in (x_1, x_1 + \delta)$ splňuje $H(x) < H(x_1)$ a každé $x \in (x_2 - \delta, x_2)$ splňuje $H(x) < H(x_2)$. Krajní body x_1 a x_2 tedy nejsou body minima a $x^* \in (x_1, x_2)$. Pak (Věty 8.6) nutně $H'(x^*) = 0$, čili

$$f(x^*) - c = 0$$

a $f(x^*) = c$. Číslo c je tedy také hodnotou funkce f a proto f zobrazuje I opět na interval. □

Počítání primitivních funkcí

Na rozdíl od derivací neexistují univerzální vzorečky pro výpočet primitivních funkcí pro všechny aritmetické operace. Pouze pro sčítání (odčítání) a násobení konstantou.

Věta 10.7. *Nechť F je primitivní funkcí k f a G je primitivní ke g na intervalu I a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak je funkce $\alpha F + \beta G$ na intervalu I primitivní k $\alpha f + \beta g$.*

Důkaz. Tvrzení snadno ověříme zderivováním: $(\alpha F + \beta G)' = \alpha f + \beta g$. □

Žádná univerzální technika pro výpočet primitivní funkce neexistuje (viz následující flowchart). Naopak, existují funkce, které sice primitivní funkci mají, ale nelze ji ani vyjádřit obvyklými prostředky.

Poznámka (Neelementární primitivní funkce). Existuje mnoho funkcí jejichž primitivní funkce existuje, ale *není elementární*, tj. nelze vyjádřit pomocí dosud zavedených funkcí (jako konečnou kombinaci polynomů, exponenciály, goniometrických funkcí a funkcí k nim inverzních). Příklady takových funkcí zahrnují například $\frac{1}{\ln x}$, $e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\sqrt{1 - x^4}$, $\sin(x^2)$. Tyto funkce jsou spojité, takže dle Věty 10.5 jejich primitivní funkce existuje.

Uvedeme dvě základní početní techniky pro určení primitivní funkce. První z nich je odvozena ze vzorce pro derivaci složené funkce a druhá ze vzorce pro derivaci součinu.

Věta 10.8 (O substituci)**.** *Buďte dány funkce* $\varphi\colon(\alpha,\beta)\to(a,b)$ *a* $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$*, přičemž* φ *má na* (α,β) *vlastní derivaci. Nechť je funkce* $F\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ *na intervalu* (a,b) *primitivní k funkci* f*. Pak na intervalu* (α,β) *platí, že*

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + c.$$

Důkaz. Stačí zpětně přečíst vzorec pro derivaci složené funkce:

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),$$

takže funkce $F(\varphi(t))$ je na (α,β) primitivní k $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$. □

Vzorec pro derivaci složené funkce lze pro výpočet primitivní funkce použít i v opačném směru.

Věta 10.9. *Nechť je funkce* $G\colon(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ *na intervalu* (α,β) *primitivní k funkci* $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ *a navíc platí, že* $\varphi((\alpha,\beta))=(a,b)$ *a* φ *má na* (α,β) *nenulovou vlastní derivaci. Pak na intervalu* (a,b) *platí, že*

$$\int f(x)\,dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c.$$

Přidaný předpoklad o derivaci φ zajistí, že φ' nemění na celém (α,β) znaménko (protože dle Věty 10.6 má φ' Darbouxovu vlastnost), a tudíž je φ prostá (rostoucí nebo klesající) na (α,β) a má tedy inverzní funkci.

Typickým příkladem využití tohoto typu substituce je využití substituce $x=\sin t$ pro při výpočtu $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$. Z Věty 10.9 plyne, že stačí spočíst primitivní funkci

$$\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int\cos^2 t\,dt\ldots$$

(zbytek výpočtu ponecháváme jako cvičení) a do nalezené funkce dosadit $t=\arcsin x$.

Příklad 10.10. Nechť

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$

na intervalu I a $a,b\in\mathbb{R}$, kde $a\neq 0$. Pak, podle předchozí věty,

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot(ax+b)'\,dx = \frac{F(ax+b)}{a}+c.$$

Věta 10.11 (Integrace per partes)**.** *Nechť jsou funkce* f *a* g *spojité na intervalu* (a,b) *a funkce* F *a* G *jsou k nim na* (a,b) *primitivní. Potom i funkce* fG *a* Fg *mají na* (a,b) *primitivní funkce a na* (a,b) *platí identita*

$$\int f(x)G(x)\,dx + \int F(x)g(x)\,dx = F(x)G(x)+c,$$

tj. součet funkce primitivní k fG a funkce primitivní k Fg je až na aditivní konstantu roven funkci FG.

Důkaz. Funkce fG a Fg jsou na (a, b) spojité a existence funkcí k nim primitivních plyne z Věty 10.5. Identita vyplývá z Leibnizovy formule pro derivaci součinu: z

$$(FG)' = fG + Fg$$

plyne, že FG je na (a, b) primitivní k $fG + Fg$, takže

$$\begin{aligned}\int f(x)G(x)\,dx + \int F(x)g(x)\,dx &= \int (f(x)G(x) + F(x)g(x))\,dx \\ &= F(x)G(x) + c.\end{aligned}$$

□

Pokud tedy známe primitivní funkci $\int F(x)g(x)\,dx$, můžeme vypočítat i primitivní funkci $\int f(x)G(x)\,dx$:

$$\int f(x)G(x)\,dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\,dx.$$

Uvedeme dva příklady integrace per partes (neboli „po částech“). V obou pracujeme na celém $\mathbb{R}$.

Příklad 10.12. Abychom spočetli

$$\int \mathrm{e}^x \sin x\,dx,$$

opakovaně píšeme e^x jako $(\mathrm{e}^x)'$. Tedy

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \sin x\,dx &= \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x\,dx \\ &= \mathrm{e}^x \sin x - \left(\mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x(-\sin x)\,dx\right).\end{aligned}$$

Odtud dostáváme rovnici

$$2\int \mathrm{e}^x \sin x\,dx = \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + c,$$

takže

$$\int \mathrm{e}^x \sin x\,dx = \frac{\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x)}{2} + c.$$

(Protože c je libovolná konstanta, vydělením dvěma dostaneme opět libovolnou konstantu. Není tedy nutné ani účelné psát $c/2$.)

Příklad 10.13. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Protože $\frac{1}{1+x^2}$ je derivace funkce $\arctan x$, máme $I_1 = \arctan x + c$. Odvodíme rekurentní vzorec pro primitivní funkce I_n. Funkci $(1+x^2)^{-n}$ napíšeme jako $x' \cdot (1+x^2)^{-n}$. Takže

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int x \cdot \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \left(\frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \right) dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}). \end{aligned}$$

Dostáváme rekurenci

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n(1+x^2)^n} + (1 - 1/2n) I_n.$$

Odtud máme $I_1 = \arctan x + c$, $I_2 = \frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + c$ atd.

Širokou třídou funkcí, pro které umíme vždy spočíst primitivní funkci jsou *racionální funkce.*

Definice 10.14 (Racionální funkce)**.** *Racionální funkce* je funkce, kterou lze vyjádřit jako podíl dvou polynomů (přičemž polynom ve jmenovateli není identicky nulový).

Věta 10.15. *Primitivní funkci každé racionální funkce lze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, konkrétně racionálních funkcí, logaritmu a arkustangens.*

Lze ukázat, že primitivní funkci lze vždy rozložit na takzvané *parciální zlomky*, a tím hledání primitivní funkce racionální funkce víceméně zredukovat na výpočet primitivních funkcí racionálních funkcí v následujícím tvaru:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{1}{(x-c)^k} & k \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R} \qquad \text{a} \\ \dfrac{1}{(x^2+1)^k} & k \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Primitivní funkce druhého typu jsme odvodili v Příkladě 10.13. Primitivní funkcí prvního typu je logaritmus (pro $k = 1$), nebo racionální funkce.

Metodu rozkladu na parciální zlomky nebudeme dokazovat a uvádět ve vší obecnosti, ale na cvičení se naučíte, jak funguje v jednoduchých případech.

11 | Určitý integrál

Nejpodstatnějším využitím primitivních funkcí je výpočet *určitého integrálu*. Ten slouží k počítání ploch, objemů, energie a práce a dalších fyzikálních veličin, pro odhadování konečných i nekonečných součtů atd.

My si představíme dvě metody výpočtu určitého integrálu: Newtonův integrál a Riemannův integrál. Začneme s Newtonovým integrálem, jehož výpočet je založen na nám už známém pojmu primitivní funkce.

Definice 11.1. Předpokládejme, že máme dáno $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$. Funkce $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ má na intervalu (a,b) *Newtonův integrál*, když má na (a,b) primitivní funkci F a ta má vlastní jednostranné limity

$$F(a^+) = \lim_{x\to a^+} F(x) \quad \text{a} \quad F(b^-) = \lim_{x\to b^-} F(x).$$

Symbolem $[F]_a^b$ označme rozdíl $F(b^-) - F(a^+)$. *Newtonův integrál* funkce f na intervalu (a,b) pak definujeme jako

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx := [F]_a^b = F(b^-) - F(a^+) = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Protože každé dvě funkce primitivní k f na (a,b) se liší jen o aditivní konstantu, rozdíl limit $F(b^-) - F(a^+)$ na volbě F nezávisí a definice Newtonova integrálu je korektní.

Třídu newtonovsky integrovatelných funkcí značíme

$$\mathcal{N}(a,b) = \{f\colon f \text{ má na } (a,b) \text{ Newtonův integrál}\}.$$

Pokud je integrační proměnná jasná z kontextu, často místo $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ píšeme jen $(N)\int_a^b f$.

> Někdy je vhodné uvažovat i hodnoty $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ pro $a = -\infty$ nebo $b = +\infty$. Výše uvedená definice se dá na tyto případy aplikovat beze změny, ovšem my se pro jednoduchost v tomto textu omezíme na případy, kdy (a,b) je omezený interval. Také je možné uvažovat nevlastní hodnoty integrálu, kdy připustíme možnost, že $F(b^-)$ nebo $F(a^+)$ mají hodnoty $\pm\infty$, za předpokladu, že rozdíl $F(b^-)-F(a^+)$ je definován. Ani této situaci se zde ovšem nebudeme podrobněji věnovat.

Tvrzení 11.2. *Je-li funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá, pak $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ existuje.*

Důkaz. Připomeňme (stále ještě nedokázanou) Větu 10.5 z minulé přednášky, která říká, že pokud je funkce spojitá na otevřeném intervalu I, tak tam má primitivní funkci. Funkci f, která je zatím definovaná pouze na intervalu $[a, b]$, můžeme spojitě dodefinovat na celé $\mathbb{R}$, například tak, že pro každé $x < a$ položíme $f(x) := f(a)$ a pro každé $x > b$ položíme $f(x) := f(b)$. Takto rozšířená funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ a dle výše uvedené věty má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci F. Tato funkce F je nutně spojitá (viz Věta 7.7), platí tedy pro ni $F(a^+) = F(a)$ a $F(b^-) = F(b)$, a tudíž $(N) \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. □

V předchozím tvrzení je potřeba předpokládat spojitost f na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Pouhá spojitost f na (a, b) nezaručuje existenci určitého integrálu, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 11.3. Nechť $f(x) = 1/x$ a uvažujme $(N) \int_0^1 f(x)\,dx$. Funkce f má primitivní funkci $F(x) = \ln(x)$, která má v nule zprava limitu $-\infty$, neexistuje tedy (vlastní) určitý integrál $(N) \int_0^1 f(x)\,dx$.

Spojitost f na $[a, b]$ je postačující k existenci $(N) \int_a^b f$, není však nutná. Dokonce ani omezenost f na (a, b) není pro existenci Newtonova integrálu nutná, jak ukazuje další příklad.

Příklad 11.4. Funkce $f(x) = 1/\sqrt{x}$ má na $(0, 1)$ primitivní funkci $F(x) = 2\sqrt{x}$. Máme tedy $(N) \int_0^1 f(x)\,dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$.

Protože výpočet Newtonova integrálu je založen na znalosti primitivní funkce, můžeme metody pro výpočet primitivních funkcí, jako např. per partes nebo substituce, upravit na metody pro výpočet Newtonova integrálu. Pro konkrétnost si zformulujeme, jak se pomocí těchto metod dá Newtonův integrál spočítat.

Věta 11.5 (Per partes pro určitý integrál)**.** *Nechť f a g jsou dvě funkce spojité na $[a, b]$. Nechť mají f a g na (a, b) primitivní funkce F a G, které lze spojitě rozšířit na $[a, b]$. Potom existují oba určité integrály $(N) \int_a^b fG$ a $(N) \int_a^b Fg$ a platí*

$$(N) \int_a^b fG = [FG]_a^b - (N) \int_a^b Fg.$$

Důkaz. Existence $(N) \int_a^b fG$ a $(N) \int_a^b Fg$ plyne z Tvrzení 11.2. Označme $L(x)$ primitivní funci k fG a $P(x)$ primitivní funkci k Fg na intervalu (a, b). Pravidlo per partes pro neurčitý inegrál (Věta 10.11) dává vztah $L(x) = F(x)G(x) - P(x)$ na (a, b). Z něj ihned plyne

$$(N) \int_a^b fG = [L]_a^b = [FG - P]_a^b = [FG]_a^b - [P]_a^b = [FG]_a^b - (N) \int_a^b Fg. \quad \square$$

Pro formulaci následující věty je dobré zavést následující konvenci: pokud $a < b$, tak výraz $(N) \int_b^a f$ definujeme jako $-(N) \int_a^b f$ a podobně $[F]_b^a$ položíme rovno $-[F]_a^b$. Dále definujeme $(N) \int_b^b f := 0$ pro libovolné b a f. Pro interval $J \subseteq \mathbb{R}$ označujeme pojmem *vnitřek* J množinu vnitřních bodů J, tj. otevřený interval vzniklý odstraněním případných krajních bodů J.

Věta 11.6 (Substituce pro určitý integrál). *Nechť* $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkce, která má ve všech bodech otevřeného intervalu* (α,β) *vlastní derivaci. Označme* $J := \varphi((\alpha,\beta)) = \{\varphi(t);\ t \in (\alpha,\beta)\}$. *Ze spojitosti* φ *na* $[\alpha,\beta]$ *plyne, že* J *je omezený interval*[1]. *Nechť* f *je funkce spojitá na* J *a newtonovsky integrovatelná na vnitřku* J. *Potom*

$$(N)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = (N)\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx, \tag{11.1}$$

speciálně tedy levá i pravá strana existuje.

Všimněte si, že na pravé straně rovnosti (11.1) nemusí integrační meze splňovat nerovnost $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$ – může se stát, že dolní mez bude větší než horní, případně že se meze budou rovnat. V takových případech uplatníme konvenci zmíněnou před zněním věty.

Interval J ve Větě 11.6 může být otevřený, uzavřený, nebo polootevřený. Například funkce $\sin(t)$ zobrazí otevřený interval $(0,\pi)$ na polootevřený interval $(0,1]$.

Zdůrazněme, že ve Větě 11.6 je nutno ověřit předpoklady pro f na celém intervalu J, který může být větší než interval ohraničený hodnotami $\varphi(\alpha)$ a $\varphi(\beta)$. Nestačí tedy kontrolovat předpoklady pro f jen na intervalu ohraničeném integračními mezemi na pravé straně (11.1).

Pro výpočet integrálu pomocí Věty 11.6 není vždy nutné přesně spočítat krajní body J, stačí předpoklady f ověřit na nějakém intervalu, který obsahuje J: například pokud je f spojitá na celém $\mathbb{R}$, tak je automaticky spojitá na J a dle Tvrzení 11.2 je i integrovatelná na vnitřku J.

Všimněte si, že Věta 11.6 připouští i možnost, že $\varphi(\alpha)$ nebo $\varphi(\beta)$ nepatří do J, větu lze tedy využít např. i v situaci, kdy f není definovaná v bodě $\varphi(\alpha)$ nebo $\varphi(\beta)$. Například pomocí substituce $x = \varphi(t) := \sin(t)$ lze odvodit rovnost

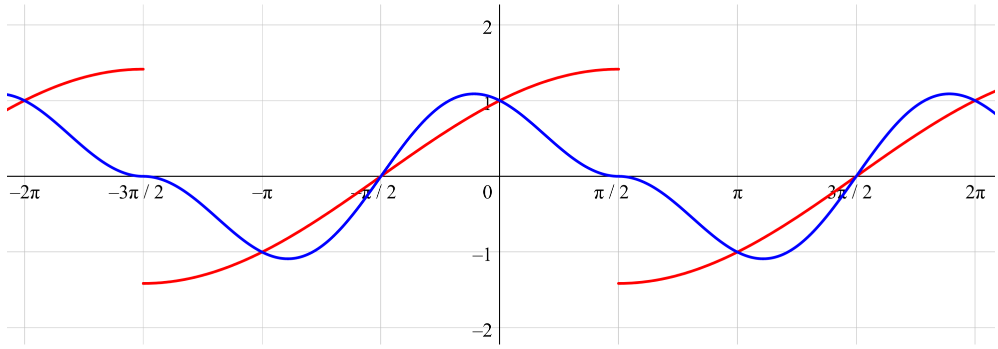
$$(N)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin(t)}}\,dt = (N)\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx,$$

přestože integrované funkce nejsou definované v bodě $t = \pi/2$ resp. $x = 1$. Pro ověření předpokladů stačí nahlédnout, že $\varphi(t) = \sin(t)$ je spojitá na $[\alpha,\beta] = [-\pi/2,\pi/2]$ a diferencovatelná na $(-\pi/2,\pi/2)$, a pak zkontrolovat, že $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ je spojitá a integrovatelná na $J = \sin((-\pi/2,\pi/2)) = (-1,1)$ (zkontrolujte sami!).

Na druhou stranu, pokud $\varphi(\alpha)$ nebo $\varphi(\beta)$ patří do J, nebo obecněji pokud J obsahuje krajní body, nesmíme při použití Věty 11.6 zapomenout ověřit (jednostrannou) spojitost f v krajních bodech J. Předchozí příklad nelze např. modifikovat takto:

$$(N)\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin(t)}}\,dt \overset{??}{=} (N)\int_0^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 0, \tag{11.2}$$

[1] Pro připomenutí: spojitá funkce zobrazí interval na interval podle Důsledku 6.5 a spojitá funkce je na kompaktním intervalu omezená podle Věty 6.8.



Obrázek 11.1: Grafy funkcí $\frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin(t)}}$ (červeně) a $\cos(t)\sqrt{1-\sin(t)}$ (modře).

protože $\sin(t)$ zobrazí interval $(-\pi, \pi)$ na $J = [-1, 1]$ a funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ není spojitá (ani definovaná) v bodě $x = 1$. Ve skutečnosti integrál na levé straně (11.2) není definován: dá se ukázat, že integrovaná funkce není na $(-\pi, \pi)$ darbouxovská a nemá tam tedy primitivní funkci (viz Obrázek 11.1).

Naopak zcela korektní je následující výpočet, založený na stejné substituci $x = \sin(t)$:

$$(N)\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\sqrt{1-\sin(t)}\,dt = (N)\int_{0}^{0} \sqrt{1-x}\,dx = 0. \tag{11.3}$$

Tentokrát, na rozdíl od předchozího příkladu, uvažujeme funkci $f(x) = \sqrt{1-x}$, která je spojitá na celém intervalu $J = [-1, 1]$ včetně krajních bodů (a tudíž je i integrovatelná na $(-1, 1)$, viz. Tvrzení 11.2), všechny předpoklady Věty 11.6 jsou tedy splněny.

Důkaz Věty 11.6. Označme (a, b) vnitřek intervalu J. Dle předpokladů je funkce f newtonovsky integrovatelná na (a, b), tj. f má na (a, b) primitivní funkci F, která má navíc v a i v b vlastní jednostranné limity. Dodefinujme F v bodech a a b pomocí těchto limit tak, že F bude spojitá na $[a, b]$, tj. $F(a) := \lim_{x\to a+} F(x)$ a $F(b) := \lim_{x\to b-} F(x)$.

Ze spojitosti F na $[a, b]$ plyne, že pravá strana (11.1) je rovna $F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$. Ukážeme nyní, že stejnou hodnotu má i levá strana. Nejprve ukažme, že funkce $F(\varphi(t))$ je na intervalu (α, β) primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, tj. že pro $t \in (\alpha, \beta)$ platí $F(\varphi(t))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Pokud $\varphi(t) \in (a, b)$, plyne tento vztah z toho, že F je primitivní funkce k f na (a, b), a z věty o derivaci složené funkce.

Složitější je situace, když $\varphi(t)$ nepatří do (a, b). V tom případě je $\varphi(t)$ krajní bod J, tj. buď $\varphi(t) = a$, nebo $\varphi(t) = b$. Předpokládejme například, že $\varphi(t) = a$, druhý případ je obdobný. J je tedy rovno buď $[a, b)$, nebo $[a, b]$.

Protože $a \in J$, předpoklady věty zaručují, že f je spojitá zprava v a. Rozmysleme nejprve, že F má v bodě a derivaci zprava rovnou $f(a)$: to plyne ze spojitosti F na $[a,b]$ a ze spojitosti f na J, použitím Věty 8.24:

$$F'_+(a) = \lim_{x \to a+} F'(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = f(a).$$

Kdyby F měla v bodě $a = \varphi(t)$ derivaci rovnou $f(a) = f(\varphi(t))$, mohli bychom ihned odvodit, že $F(\varphi(t))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ podle věty o limitě složené funkce. Derivace F je ovšem jen jednostranná (zprava), na což naše věta o limitě složené funkce nepamatuje. Neformálně řečeno, jednostrannost derivace F tu nemůže nijak vadit, protože φ má na okolí t jen hodnoty z pravého okolí bodu a (protože a je levý krajní bod J), takže chování F na levém okolí a nemůže hodnotu $F(\varphi(t))'$ nijak ovlivnit. Abychom formálně obešli technický problém s jednostranností derivace F, dodefinujme tedy funkci F na levém okolí bodu a libovolně tak, aby i derivace F v bodě a zleva byla rovna $f(a)$. Po tomto dodefinování, které nemá žádný vliv na hodnotu $F(\varphi(t))'$, už můžeme použít větu o derivaci složené funkce a dostaneme očekávaný výsledek $F(\varphi(t))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Dokázali jsme tedy, že $F(\varphi(t))$ je na intervalu (α, β) primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Levá strana (11.1) je tedy rovna $[F(\varphi(t))]_\alpha^\beta$. Ze spojitosti F na $[a,b]$ a ze spojitosti φ na $[\alpha,\beta]$ plyne, že $[F(\varphi(t))]_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

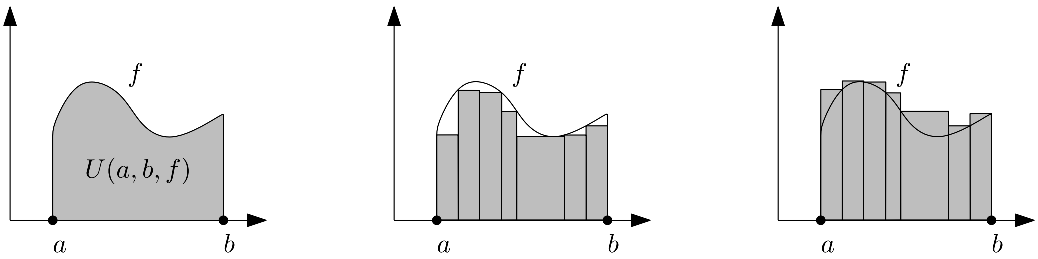
Nyní zavedeme jiný druh integrálu, takzvaný Riemannův integrál, jehož definice je motivována snahou formálně zadefinovat plošný obsah oblasti ohraničené grafem funkce f a osou x. Pro nezápornou spojitou funkci $f\colon [a,b] \to [0,+\infty)$ definujme následující rovinný útvar (viz Obrázek 11.2):

$$U(a,b,f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}.$$

Riemannova definice plošného obsahu $U(a,b,f)$ je založena na následující úvaze: kdyby funkce f byla po částech konstantní, tj. kdyby $[a,b]$ bylo možné rozdělit na konečně mnoho intervalů tak, aby f byla na každém z nich konstantní, tak $U(a,b,f)$ bude vypadat jako sjednocení konečně mnoha obdélníků přiléhajících stranami. Pro takovou oblast lze obsah snadno spočítat jako součet obsahů jejích obdélníků.

Co když f není po částech konstantní? Pak můžeme uvážit libovolnou dvojici po částech konstantních funkcí $g^-, g^+ \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ splňujících $g^- \le f \le g^+$ na $[a,b]$. Protože $U(a,b,g^-) \subseteq U(a,b,f) \subseteq U(a,b,g^+)$, je obsah $U(a,b,f)$ aspoň tak velký jako obsah $U(a,b,g^-)$ a zároveň nejvýš tak velký jako obsah $U(a,b,g^+)$, viz Obrázek 11.2.

Nyní můžeme vzít supremum obsahů $U(a,b,g^-)$ přes možné volby g^-, čímž získáme dolní odhad na obsah $U(a,b,f)$, a podobně vezmeme-li infimum přes možné volby g^+, získáme horní odhad. Pokud se horní a dolní odhad rovnají, můžeme jejich společnou hodnotu definovat jako obsah $U(a,b,f)$.



Obrázek 11.2: Oblast $U(a,b,f)$ pod grafem funkce f (vlevo), a Riemannova metoda odhadu jejího plošného obsahu zdola (uprostřed) a shora (vpravo).

Popišme si nyní celý tento postup přesněji. Pro účely následující definice uvažujme f jako libovolnou (tedy ne nutně nezápornou) funkci definovanou na intervalu $[a,b]$. Tam, kde graf funkce f leží pod osou x, budeme na oblast mezi grafem a osou x pohlížet, jako by měla záporný obsah.

Definice 11.7 (Riemannův integrál)**.** Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ jsou dvě reálná čísla. Konečná $(k+1)$-tice bodů $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ z intervalu $[a,b]$ je jeho *dělením*, pokud

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b.$$

Tyto body dělí interval $[a,b]$ na intervaly $I_i = [a_i, a_{i+1}]$. Délku intervalu označíme pomocí absolutní hodnoty: $|I_i| = a_{i+1} - a_i$ a $|[a,b]| = b - a$. Pro funkci $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a dělení $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ intervalu $[a,b]$ definujeme *dolní*, respektive *horní, Riemannovu sumu* jako

$$s(f,D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| m_i, \quad \text{respektive} \quad S(f,D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| M_i,$$

kde $m_i = \inf\{f(x);\ x \in I_i\}$ a $M_i = \sup\{f(x);\ x \in I_i\}$.

Tyto součty jsou vždy definované, $s(f,D) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ a $S(f,D) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Dolní*, respektive *horní, Riemannův integrál* funkce f na intervalu $[a,b]$ definujeme jako

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\{s(f,D)\colon D \text{ je dělení } [a,b]\},$$

respektive

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf\{S(f,D)\colon D \text{ je dělení } [a,b]\}.$$

Tyto výrazy jsou opět vždy definované a máme $\underline{\int_a^b} f, \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Řekneme, že funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ má na intervalu $[a,b]$ *Riemannův integrál*, případně že je *riemannovsky integrovatelná*, pokud

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \in \mathbb{R}.$$

Tuto společnou konečnou hodnotu, když existuje, značíme

$$\int_a^b f(x)\;dx = \int_a^b f$$

a nazýváme Riemannovým integrálem funkce f na intervalu $[a,b]$. Třídu všech riemannovsky integrovatelných funkcí označujeme

$$\mathcal{R}[a,b] := \{f\colon f \text{ je definovaná a riemannovsky integrovatelná na } [a,b]\}.$$

12 | Vlastnosti Newtonova a Riemannova integrálu

V této kapitole se nejprve podrobněji podíváme na vlastnosti Riemannova integrálu a poté na jeho souvislost s Newtonovým integrálem.

Když funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ není omezená, potom nemá na $[a,b]$ Riemannův integrál, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 12.1. Uvažme funkci $f(x) = 1/x$, pro kterou dodefinujeme $f(0) = 0$, a zkoumejme její Riemannův integrál na intervalu $[0,1]$. Protože f není shora omezená, tak v každém dělení D intervalu $[0,1]$ bude aspoň jeden interval I_i na němž je $\sup\{f(x);\ x \in I_i\} = +\infty$ (konkrétně v našem případě tam bude právě jeden takový interval, a to ten nejlevější). To znamená, že horní Riemannova suma $S(f,D)$ je rovna $+\infty$ pro každé dělení D, a tedy $\overline{\int_0^1} 1/x\,dx = +\infty$. Z toho plyne, že Riemannuv integrál neexistuje.

Pro zajímavost najděme ještě dolní Riemannův integrál funkce $1/x$. Definujme dělení $D_n = (0, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)$, které dělí interval $[0,1]$ na podintervaly $I_0 = [0, \frac{1}{2^n}]$, $I_1 = [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$, $\ldots, I_i = [\frac{1}{2^{n-i+1}}, \frac{1}{2^{n-i}}], \ldots, I_n = [\frac{1}{2}, 1]$. Platí $|I_0| = \frac{1}{2^n}$ a pro $i \geq 1$ máme $|I_i| = \frac{1}{2^{n-i+1}}$. Protože funkce $f(x) = 1/x$ je klesající, nabývá na intervalu I_i svého minima v pravém krajním bodě, v němž má hodnotu $m_i = 2^{n-i}$. Příslušná dolní Riemannova suma je tedy

$$s(f, D_n) = \sum_{i=0}^{n} |I_i| m_i = \frac{1}{2^n} 2^n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{n-i+1}} 2^{n-i} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Máme tedy $\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = +\infty$, a tedy dolní Riemannovy sumy jsou shora neomezené. Tudíž $\underline{\int_0^1} 1/x\,dx = +\infty$.

Argument z předchozího příkladu ukazuje, že pokud je funkce f na nějakém intervalu $[a,b]$ neomezená, nemůže tam být riemannovsky integrovatelná. Existují ovšem i funkce, které jsou omezené a přitom nejsou riemannovsky integrovatelné, jak ukazuje další příklad.

Příklad 12.2. *Dirichletova funkce* $f\colon [0,1] \to \{0,1\}$ definovaná

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha \in \mathbb{Q} \\ 0 & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

je zjevně omezená. Nemá ale Riemannův integrál, protože každý interval nenulové délky obsahuje jak racionální, tak iracionální číslo. Pro libovolné dělení D tedy máme $s(f,D)=0$ a $S(f,D)=1$. Tudíž

$$\underline{\int_0^1} f = 0 < \overline{\int_0^1} f = 1.$$

Přímo z definice Riemannových sum plyne, že dolní Riemannova suma je menší nebo rovna horní Riemannově sumě téhož dělení. Totéž platí i pro horní a dolní Riemannův integrál.

Věta 12.3. *Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkce, D' a D jsou dělení intervalu $[a,b]$. Pak platí*

$$s(f,D) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le S(f,D').$$

Nástin důkazu. Pro dvě dělení D a D' uvažme jejich společné zjemnění D'', což je dělení, jehož množina dělicích bodů je sjednocení množin dělicích bodů D a D'. Tím pádem libovolný interval dělení D, jakož i libovolný interval dělení D', lze vyjádřit jako sjednocení jednoho nebo více intervalů D''. Snadno pak nahlédneme, že platí

$$s(f,D) \le s(f,D'') \le S(f,D'') \le S(f,D'),$$

z čehož vyplývá dokazovaná věta. □

Příklad 12.4. Z definice Riemannova integrálu spočteme, že

$$\int_0^1 x\,dx = 1/2.$$

Pro $n = 1,2,\dots$ uvažujme dělení $D_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1)$. Pak

$$s(f,D_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right) = n^{-2}(0+1+2+\dots+(n-1))$$

a podobně

$$S(f,D_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right) = n^{-2}(1+2+\dots+n).$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} s(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} = 1/2$$

a zároveň

$$\lim_{n\to\infty} S(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} = 1/2,$$

z nerovnosti v předchozí větě dostáváme, že $\underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f = 1/2$, a tedy $\int_0^1 x\,dx = 1/2$.

Nyní uvedeme charakterizaci riemannovsky integrovatelných funkcí.

Věta 12.5 (Kritérium integrovatelnosti)**.** *Nechť* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. *Potom*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists D\colon 0 \le S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$$

Jinými slovy, f *má Riemannův integrál, právě když pro každé* $\varepsilon > 0$ *je pro nějaké dělení* D *intervalu* $[a,b]$ *odpovídající horní suma o méně než* ε *větší než odpovídající dolní suma.*

Nástin důkazu Věty 12.5. Pokud $f \in \mathcal{R}[a,b]$, tak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D splňující $s(f,D) > \int_a^b f - \varepsilon/2$ a dělení D' splňující $S(f,D') < \int_a^b f + \varepsilon/2$. Jejich společné zjemnění D'' definované jako v důkazu Věty 12.3 pak splní $0 \le S(f,D'') - s(f,D'') < \varepsilon$.

Naopak, pokud $f \notin \mathcal{R}[a,b]$, tak dolní integrál f se od horního integrálu f liší o nějakou kladnou konstantu ε, a pak pro libovolné dělení D platí $S(f,D) - s(f,D) \ge \varepsilon$. □

Z tohoto kritéria lze odvodit riemannovskou integrovatelnost dvou důležitých tříd funkcí — spojitých a monotónních.

Věta 12.6 (Monotonie $\Rightarrow$ integrovatelnost)**.** *Je-li funkce* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *na intervalu* $[a,b]$ *nerostoucí nebo neklesající, potom má Riemannův integrál.*

Důkaz. Nechť f neklesá (pro nerostoucí f se argumentuje podobně). Pro každý podinterval $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$ pak máme $\inf_{[\alpha,\beta]} f = f(\alpha)$ a $\sup_{[\alpha,\beta]} f = f(\beta)$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme libovolné dělení $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ intervalu $[a,b]$ s $a_{i+1} - a_i < \varepsilon$ pro každé $i = 0, \ldots, k-1$ a máme

$$\begin{aligned}
S(f,D) - s(f,D) &= \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i)(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i)(f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\
&\le \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} (f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\
&= \varepsilon(f(a_k) - f(a_0)) = \varepsilon(f(b) - f(a)) \,.
\end{aligned}$$

Tuto mez lze zmenšováním ε učinit libovolně malou. Podle kritéria integrovatelnosti tedy $f \in \mathcal{R}[a,b]$. □

Věta 12.7 (Spojitost $\Rightarrow$ integrovatelnost)**.** *Je-li funkce* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *na intervalu* $[a,b]$ *spojitá, potom má Riemannův integrál.*

Tuto větu nebudeme dokazovat, protože na ni neznáme potřebné ingredience.

Touto chybějící ingrediencí je silnější podoba spojitosti. Pro připomenutí, funkce f je spojitá na intervalu I, pokud je spojitá v každém bodě I (případně jednostranně v krajním bodě). To lze formálně zapsat takto:

$$\forall x \in I \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x' \in I \cap U(x, \delta)\colon |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

Řekneme, že funkce f je *stejnoměrně spojitá na intervalu* I, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in I \; \forall x' \in I \cap U(x, \delta)\colon |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

U stejnoměrné spojitosti se tedy požaduje, aby pro dané $\varepsilon > 0$ jediné $\delta > 0$ fungovalo pro všechny volby x z I, zatímco u obyčejné spojitosti může δ záviset na ε i na x.

Stejnoměrná spojitost implikuje triviálně spojitost, ale naopak to neplatí. Například funkce $f(x) = 1/x$ je na intervalu $I = (0, 1)$ spojitá, ale není stejnoměrně spojitá: máme-li dáno například $\varepsilon = 1$, tak pro libovolné $\delta > 0$ můžeme uvážit $x := \delta$ a vidíme, že f není na $U(x, \delta) = (0, 2\delta)$ omezená, a tedy existuje $x' \in U(x, \delta)$, pro nějž $|f(x') - f(x)| \geq 1 = \varepsilon$.

Na kompaktním intervalu I (tj. intervalu typu $[a, b]$ s $-\infty < a \leq b < +\infty$) však naštěstí oba typy spojitosti splývají.

Věta 12.8 (Na kompaktu: spojitost $\Rightarrow$ stejnoměrná spojitost)**.** *Je-li funkce f na kompaktním intervalu $I = [a, b]$ spojitá, je na něm stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu I, ale že není na I stejnoměrně spojitá. Negace stejnoměrné spojitosti znamená, že

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x \in I \; \exists x' \in I \cap U(x, \delta)\colon |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon.$$

To znamená, že pro $\delta = 1/n$ a $n = 1, 2, \ldots$ existují body $x_n, x'_n \in I$, že $|x_n - x'_n| < 1/n$, ale $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$. Díky Bolzanově–Weierstrassově větě víme, že posloupnost (x_n) má konvergentní podposloupnost $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ s limitou $\alpha \in I$. Pro usnadnění zápisu bez újmy na obecnosti předpokládejme, že už původní posloupnost (x_n) byla zvolena tak, aby měla limitu α.

Protože zároveň platí

$$x_n - \frac{1}{n} < x'_n < x_n + \frac{1}{n},$$

tak z Věty o dvou policajtech plyne, že i (x'_n) má limitu α. Ze spojitosti f v bodě $\alpha \in I$ (případně jednostranné, pokud je α krajní bod I) plyne

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = f(\alpha),$$

a speciálně tedy $|f(x_n) - f(x'_n)| \to 0$ pro $n \to \infty$. To je ale spor s tím, že $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$ pro každé n. □

S touto znalostí je už důkaz Věty 12.7 velmi podobný důkazu Věty 12.6.

Důkaz Věty 12.7. Nechť je f na $[a, b]$ spojitá, a tedy podle Věty 12.8 i stejnoměrně spojitá. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Ze stejnoměrné spojitosti plyne, že existuje $\delta > 0$ takové, že jakmile jsou $x, x' \in [a, b]$ blíže než δ, tak platí $|f(x) - f(x)'| < \varepsilon$. Jinými slovy, pro každý podinterval $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ délky menší než δ platí

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f - \inf_{[\alpha,\beta]} f \leq \varepsilon.$$

Pro jakékoli dělení $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ intervalu $[a, b]$ splňující $a_{i+1} - a_i < \delta$ pro každé $i = 0, \ldots, k-1$ tedy platí

$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i)(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i)\varepsilon \\ &= \varepsilon(a_k - a_0) = \varepsilon(b - a) \ . \end{aligned}$$

Tuto mez lze zmenšováním ε učinit libovolně malou. Podle kritéria integrovatelnosti (Věta 12.5) tedy $f \in \mathcal{R}[a, b]$. □

Dvě základní věty analýzy dávají Riemannův integrál do souvislosti s primitivní funkcí a Newtonovým integrálem. Neformálně řečeno, první věta říká, že primitivní funkci lze (za určitých podmínek) spočítat pomocí Riemannova integrálu.

Věta 12.9 (1. základní věta analýzy)**.** *Nechť $f \in \mathcal{R}[a, b]$ a funkce $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ nechť je definována předpisem*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Potom

1. *F je na $[a, b]$ spojitá a*
2. *v každém bodě spojitosti $x_0 \in [a, b]$ funkce f existuje vlastní $F'(x_0)$ a $F'(x_0) = f(x_0)$ (platí to jednostranně, pokud $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$).*

Důkaz. Nechť $c > 0$ je horní mez pro hodnoty $|f(x)|$, $a \leq x \leq b$ (f je integrovatelná a tedy omezená). Pro každé dva body $x, x_0 \in [a, b]$ máme

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^x f \right| \leq |x - x_0| c ,$$

podle definice F, linearity $\int$ v integračních mezích a odhadu $\int$ horní sumou pro dělení (x_0, x) či (x, x_0) intervÃ¡lku s krajními body x a x_0. Pro $x \to x_0$ máme $F(x) \to F(x_0)$ a F je v x_0 spojitá.

Nechť $x_0 \in [a, b]$ je bod spojitosti f. Pro dané $\varepsilon > 0$ máme $\delta > 0$, že $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, jakmile $|x - x_0| < \delta$. Pro $0 < x - x_0 < \delta$ tedy

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon ,$$

podle triviálního odhadu $\int_{x_0}^x f$ dolní a horní sumou pro dělení (x_0, x). Pro $-\delta < x - x_0 < 0$ platí tytéž nerovnosti (v čitateli i jmenovateli zlomku se změní znaménko). Pro $x \to x_0$, $x \neq x_0$, tak máme $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \to f(x_0)$, čili $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Obdobným argumentem jako u předchozí věty lze dokázat, že pokud f je spojitá na $[a, b]$, tak funkce $F(x) = -\int_x^b f(t)\,dt$ je primitivní funkcí f na $[a, b]$.

Věta 12.9 nám umožňuje konečně splatit dluh z desáté přednášky a dokázat Větu 10.5, která říká, že spojitá funkce na otevřeném intervalu I má na I primitivní funkci. Tím se dokáže i Tvrzení 11.2 z minulé přednášky, jehož důkaz se odvolával na Větu 10.5.

Důkaz Věty 10.5. Zvolme libovolné $c \in I$ a definujme funkci $F\colon I \to \mathbb{R}$ následovně:

$$F(x) = \begin{cases} \int_c^x f(t)\,dt & \text{pro } x \geq c \\ -\int_x^c f(t)\,dt & \text{pro } x < c. \end{cases}$$

Všimněte si, že $F(x)$ je pro každé x dobře definována, protože f je spojitá a tedy riemannovsky integrovatelná na každém kompaktním podintervalu I. Z Věty 12.9 pak plyne, že F je primitivní funkce k f na I. $\square$

Následující věta říká, že pokud Riemannův a Newtonův integrál existují, jsou si rovny. Z tohoto důvodu zpravidla píšeme určitý integrál, aniž bychom specifikovali, zda jde o Newtonův nebo Riemannův.

Věta 12.10 (2. základní věta analýzy)**.** *Pokud* $f \in \mathcal{R}[a, b] \cap \mathcal{N}(a, b)$*, pak*

$$\int_a^b f = (N) \int_a^b f .$$

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a,b) spojitě dodefinovaná v bodech a a b, tj., $F(a) = F(a^+)$ a $F(b) = F(b^-)$. Existence takové F plyne z toho, že f je newtonovsky integrovatelná na (a,b). Navíc $(N)\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Nechť $D = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ je libovolné dělení intervalu $[a,b]$. Na každý interval $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ a funkci F použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě (Věta 8.11), která říká, že existuje $b_i \in (a_i, a_{i+1})$ splňující

$$f(b_i) = F'(b_i) = \frac{F(a_{i+1}) - F(a_i)}{a_{i+1} - a_i}.$$

Tím dostaneme

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{k-1} (F(a_{i+1}) - F(a_i)) = \sum_{i=0}^{k-1} f(b_i)(a_{i+1} - a_i).$$

Tedy (neboť $\inf_{I_i} f \le f(b_i) \le \sup_{I_i} f$)

$$s(f,D) \le F(b) - F(a) \le S(f,D)\,.$$

Z riemannovské integrovatelnosti f a Věty 12.5 pak plyne, že $F(b) - F(a) = \int_a^b f$. □

Označme $C[a,b]$ množinu funkcí spojitých na $[a,b]$. Předchozí poznatky o vztahu mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem pro přehlednost shrneme v následující větě.

Věta 12.11 (Porovnání Newtonova a Riemannova $\int$)**.** *Máme*

$$C[a,b] \subseteq \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{R}[a,b]\,.$$

Pokud $f \in \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{R}[a,b]$, *pak*

$$(N)\int_a^b f = \int_a^b f\,.$$

Množina $\mathcal{N}(a,b) \backslash \mathcal{R}[a,b]$ *i* $\mathcal{R}[a,b] \backslash \mathcal{N}(a,b)$ *je neprázdná: existují funkce, které mají Newtonův integrál, ale ne Riemannův, i naopak.*

Důkaz. Je-li f na $[a,b]$ spojitá, je $f \in \mathcal{R}[a,b]$ podle Věty 12.7. Dále pak podle 1. ZVA (Věta 12.9) je funkce $F(x) = \int_a^x f$ na (a,b) primitivní k f a spojitá na $[a,b]$, takže $F(a^+) = F(a) = 0$ a $F(b^-) = F(b) = \int_a^b f$, a tedy $f \in \mathcal{N}(a,b)$.

Rovnost Riemannova a Newtonova integrálu plyne z 2. ZVA (Věta 12.10).

Funkce $f(x) = x^{-1/2}\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, má na $(0,1)$ Newtonův integrál: $F(x) = 2x^{1/2}$ je tam k ní primitivní, $F(0^+) = 0$ a $F(1^-) = 2$, takže $(N)\int_0^1 f = 2$ jak jsme viděli v Příkladu 11.4. Tato funkce ale není na $[0,1]$ omezená, a proto $f \notin \mathcal{R}[0,1]$. Funkce znaménka $\mathrm{sgn}(x)$ je na $[-1,1]$ neklesající a tedy má na $[-1,1]$ Riemanův integrál. Na $(-1,1)$ ale nemá Newtonův integrál — jak jsme ukázali v Příkladu 10.3, nemá na $(-1,1)$ primitivní funkci. □

13 | Aplikace integrálů

Vztah mezi integrálem a Riemannovými sumami dává návod, jak pomocí integrálu odhadovat konečné součty. Ukažme si tento přístup nejprve na následujícím jednoduchém tvrzení.

Věta 13.1. *Nechť n je přirozené číslo a nechť f je neklesající funkce na intervalu $[1, n]$. Potom platí*

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \int_1^n f \leq \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

Důkaz. Jelikož je f neklesající, je riemanovsky integrovatelná dle Věty 12.6. Plyne z toho také, že na libovolném intervalu $[\alpha, \beta] \subseteq [1, n]$ nabývá f minima v bodě α a maxima v bodě β.

Nyní stačí na intervalu $[1, n]$ uvážit dělení $D = (1, 2, \dots, n)$ a všimnout si, že jeho dolní Riemannova suma $s(f, D)$ je přesně $\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$, zatímco jeho horní Riemannova suma $S(f, D)$ je $\sum_{k=2}^{n} f(k)$. Dokazované nerovnosti pak plynou z toho, že dolní a horní Riemannova suma odhadují zdola a shora příslušný integrál. □

Předchozí věta se dá snadno adaptovat na situaci, kdy f je nerostoucí: stačí prohodit směr obou nerovností.

Odhady konečných sum se nám mohou hodit i při vyšetřování konvergence nekonečných řad, neboť součet řady je definován jako limita posloupnosti jejích částečných součtů. V mnoha případech tak lze vyšetřování konvergence převést na výpočet integrálu, jak ukazuje následující věta.

Věta 13.2 (Integrální kritérium konvergence)**.** *Nechť $f\colon [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ je nerostoucí nezáporná funkce. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje právě tehdy, když platí*

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b f < +\infty.$$

Důkaz. Všimněme si nejprve, že jelikož je f monotónní, tak podle Věty 12.6 integrál $\int_1^b f$ existuje pro libovolné $b \geq 1$. Všimněme si také, že jelikož je f nezáporná, je $\int_1^b f$ neklesající funkce proměnné b, tedy musí mít v $+\infty$ limitu náležící do $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Označme tuto limitu L.

Označme $s_n := \sum_{k=1}^{n} f(k)$ n-tý částečný součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$. Protože má tato řada jen nezáporné sčítance, je posloupnost (s_n) neklesající, a tedy má pro $n \to \infty$ limitu $L' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. L' je tedy součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$.

Dokazovaná věta říká, že L je konečná právě tehdy, když L' je konečná. To lze snadno odvodit z Věty 13.1: pokud $L < +\infty$, tak použijeme odhad

$$s_n - f(1) = \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f \leq L,$$

z něhož plyne, že (s_n) je shora omezená a má tedy konečnou limitu. Naopak, pokud $L' < +\infty$, tak platí

$$\int_1^n f \leq s_{n-1} \leq L',$$

tedy hodnoty $\int_1^b f$ jsou shora omezené a jejich limita L je konečná.

Všimněte si, že z našeho důkazu plyne explicitní odhad $L \leq L' \leq L + f(1)$. To nám umožňuje aproximovat i nekonečné součty pomocí integrálů. $\square$

Příklad 13.3 (Odhad harmonických čísel). Odhadněme tzv. *harmonická čísla* H_n, definovaná jako

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\,.$$

Pro funkci $f(x) = 1/x\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ Věta 13.1 dává

$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n f \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_n - \frac{1}{n}.$$

Jak víme, má $f(x)$ na $(0, +\infty)$ primitivní funkci $\ln x$, s jejíž pomocí se předchozí nerovnosti převedou do podoby

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

Protože $\ln x$ má limitu $+\infty$ pro $x \to +\infty$, plyne z Věty 13.2, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ diverguje.

Příklad 13.4 (Odhad součtu konvergentní řady). Uvažujme teď řadu $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^s$, kde $s > 1$ je reálná konstanta. Funkce $f(x) = 1/x^s = x^{-s}$ je nerostoucí a nezáporná na $(0, +\infty)$ a má primitivní funkci $F(x) = \frac{1}{1-s} x^{1-s}$. Odtud snadno spočítáme, že

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b x^{-s}\, dx = \frac{1}{s-1} < +\infty.$$

Z Věty 13.2 plyne, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^s$ je konvergentní pro každé $s > 1$.

Příklad 13.5 (Odhad faktoriálu). Integrál lze využít i pro odhad *faktoriálu* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, i když jde o součin a nikoli o součet. Místo $n!$ budeme odhadovat $\ln(n!)$, který lze zapsat jako součet $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k$. Použitím Věty 13.1 na funkci $f(x) = \ln x$ dostaneme

$$\ln(n!) - \ln n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln k \leq \int_1^n f \leq \sum_{k=2}^{n} \ln k = \ln(n!).$$

Funkce $f(x)$ má na $(0, +\infty)$ primitivní funkci $x \ln x - x$, tedy máme $\int_1^n f = n \ln n - n + 1$ a z předchozích nerovností plyne

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq n \ln n - n + 1 + \ln n,$$

a tedy

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Věta 13.1 nám poskytuje způsob, jak odhadnout součet $\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ pomocí integrálu $\int_1^n f$ v případě, že f je monotónní. Ovšem tato věta nám nic neříká o velikosti chyby, které se tímto odhadem dopustíme, ani nic neříká o situaci, kdy f není monotónní. Podívejme se nyní podrobněji na rozdíl mezi sumou a příslušným integrálem.

V následující úvaze nepředpokládáme, že f je monotónní, ale zato předpokládáme, že má spojitou první derivaci na $[1, n]$. Bude se nám hodit značení $\lfloor x \rfloor$ pro dolní celou část čísla x a $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ pro zlomkovou část x.

Rozdíl mezi sumou a integrálem můžeme odhadnout takto:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} (f(k) - f(x))\, dx. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Nyní použijeme trik: integrovanou funkci $f(k) - f(x)$ zapíšeme jako součin $1 \cdot (f(k) - f(x))$ a zintegrujeme ji pomocí per partes, kdy ke konstantní funkci 1 zvolíme primitivní funkci $x - k - 1/2$. Proč zrovna tuto primitivní funkci? Protože má mezi všemi primitivními funkcemi tu specifickou vlastnost, že integrál z ní je na intervalu $(k, k+1)$ nulový, což se posléze ukáže jako výhodné.

Počítejme dále integrál z pravé strany (13.1). Použitím per partes a využitím toho, že pro $x \in (k, k+1)$ máme $x - k = \{x\}$, dostáváme:

$$\begin{aligned}&\int_k^{k+1} (f(k) - f(x))\, dx = \\ &\quad = [(x - k - 1/2) \cdot (f(k) - f(x))]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} (x - k - 1/2)(-f'(x))\, dx \\ &\quad = \frac{1}{2}(f(k) - f(k+1)) + \int_k^{k+1} (\{x\} - 1/2) f'(x)\, dx.\end{aligned}$$

Sečteme-li předchozí rovnost pro $k = 1, \ldots, n-1$ a dosadíme do (13.1), získáme vztah

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f = \frac{1}{2}(f(1) - f(n)) + \int_1^n (\{x\} - 1/2) f'(x)\, dx. \tag{13.2}$$

Vzorec (13.2) je speciální případ vztahu známého jako *Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec* (obecnou verzi najdete například na Wikipedii). Všimněte si, že integrál na pravé straně (13.2) by byl nulový, pokud by $f'(x)$ byla konstantní – to proto, že funkce $(\{x\} - 1/2)$ má nulový integrál na každém intervalu celočíselné délky. Můžeme tedy doufat, že když $f'(x)$ nebude „příliš oscilovat", bude integrál na pravé straně blízký nule, a náš odhad sumy pomocí integrálu bude poměrně přesný.

Vzorec (13.2) skrývá i určitou geometrickou intuici, která vynikne, když se člen $\frac{1}{2}(f(1) - f(n))$ převede na levou stranu a přidá do sumy. Vzniklá suma pak jde upravit takto:

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} f(k)\right) - \frac{1}{2}(f(1) - f(n)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2}.$$

Tato suma je přesně integrál od 1 do n z funkce, která v bodech $1, 2, \ldots, n$ má stejné hodnoty jako f, a mezi dvěma sousedními celočíselnými body je její graf úsečka. Oblast pod grafem této funkce je tedy sjednocení lichoběžníků. Integrál na pravé straně (13.2) tedy říká, jak moc se obsah této lichoběžníkovité oblasti liší od obsahu oblasti pod grafem f.

Důležitou aplikací integrálů jsou výpočty ploch, délky křivek a objemů a povrchů tělesa.

Plochu rovinného útvaru $U(a, b, f)$ (jsou to body (x, y) v rovině splňující $a \le x \le b$ a $0 \le y \le f(x)$) pod grafem funkce f jsme víceméně definovali jako $\int_a^b f$.

Pro funkci $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ můžeme délku jejího grafu $G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b\}$ jakožto oblouku křivky definovat jako limitu délek lomených čar L spojujících konce G a s body zlomu na G, když délka nejdelší úsečky v L jde k 0. Když je f pěkná funkce, například f' je spojitá, tato limita existuje a můžeme ji spočítat R. integrálem. Úsečka v L spojující body $(x, f(x))$ a $(x + \Delta, f(x + \Delta))$ má podle Pythagorovy věty délku

$$\sqrt{\Delta^2 + (f(x + \Delta) - f(x))^2} = \Delta \sqrt{1 + \left(\frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}\right)^2},$$

a hodnota zlomku je podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě rovna $f'(\alpha)$ v nějakém mezibodě α (ležícím mezi x a $x + \Delta$). Délka lomené čáry L tak je vlastně přímo Riemannova suma pro jisté dělení intervalu $[a, b]$ s body a funkci $\sqrt{1 + (f'(t))^2}$. Dostáváme následující vzorec.

Věta 13.6 (Délka křivky)**.** *Nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ má na $[a, b]$ spojitou derivaci f' (takže $\sqrt{1 + (f')^2} \in \mathcal{R}(a, b)$). Pak*

$$\text{délka}(\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b\}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt\,.$$

Pro podmnožinu $M \subseteq \mathbb{R}^3$ trojrozměrného prostoru můžeme její objem definovat jako limitu, pro $n \to \infty$, součtu objemů $1/n^3$ krychliček K v množině

$$\{K = [\tfrac{a}{n}, \tfrac{a+1}{n}] \times [\tfrac{b}{n}, \tfrac{b+1}{n}] \times [\tfrac{c}{n}, \tfrac{c+1}{n}] \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\ \&\ K \subseteq M\}\,.$$

Je-li M hezká, tato limita existuje a můžeme ji spočítat integrálem. Pro obecná tělesa je k výpočtu potřeba *vícerozměrný integrál*, který jsme nezaváděli, proto se omezíme na speciální případ *rotačních těles*, tj. osově souměrných těles.

Věta 13.7 (Objem a povrch rotačního tělesa). *Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$ a $f \geq 0$ na $[a,b]$. Pro objem rotačního tělesa*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b \;\&\; \sqrt{y^2+z^2} \leq f(x)\}$$

vzniklého rotací (v $\mathbb{R}^3$) rovinného útvaru $U(a,b,f)$ pod grafem funkce f kolem osy x platí vztah

$$\mathrm{objem}(V) = \pi \int_a^b f(t)^2 \, dt \; .$$

$$\mathrm{povrch}(V) = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1+(f'(t))^2} \, dt \; .$$

Vzorec se dostane rozřezáním V rovinami kolmými na osu symetrie tělesa x na plátky tloušťky $\Delta > 0$ a sečtením jejich objemů. Objem plátku mezi rovinami kolmými v bodech $(x,0,0)$ a $(x+\Delta,0,0)$ je přibližně $\pi f(x)^2\Delta$, neboť to je zhruba válec s (kruhovou) podstavou o poloměru $f(x)$ a výškou Δ.

Pro výpočet povrchu rotačního tělesa zkombinujeme metody pro výpočet délky křivky a objemu. Povrch aproximujeme jako součet povrchů plášťů komolých kuželů výšky $\Delta > 0$ se základnami poloměru $f(x)$ a $f(x+\Delta)$. Povrch jednoho pláště je

$$\pi(f(x)+f(x+\Delta))\sqrt{\Delta^2+(f(x+\Delta)-f(x))^2}.$$