Predmet: Linearni algebra 2
Ukol: 4.
Verze: 1.
Autor: David Napravnik
Prezdivka: DN

zadani

Urcete 55. mocninu matice A

reseni

spocteme vlastni cisla:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$(2-\lambda)^2(1-\lambda) - 1 - 1 + \lambda + 2 - \lambda$
$4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3$
$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$
$(\lambda - 2)(-\lambda^2 + 3\lambda - 2)$
$-(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$
$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 2$
dopocteme vlastni vektory:

pro λ_1 $\begin{bmatrix} 2-1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1-1 \end{bmatrix} = [1, -1, 0]^T$

pro λ_2 $\begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2-2 & -1 \\ 1 & 1 & 1-2 \end{bmatrix} = [1, 0, 1]^T$

dopocteme posledni vektor z druheho:

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} * v_3 = [1, 0, 1]^T => v_3 = [0, 1, 0]^T$

$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$A^{55} = RJ^{55}R^{-1}$

$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$J^x = \begin{bmatrix} 1^x & 0 & 0 \\ 0 & 2^x & 2^{x-1}x \\ 0 & 0 & 2^x \end{bmatrix}$

$J^{55} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{55} & 55 * 2^{54} \\ 0 & 0 & 2^{55} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{55} & 55 * 2^{54} \\ 0 & 0 & 2^{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 2^{54} * 55 + 1 & 2^{54} * 55 & -2^{54} * 55 + 2^{55} - 1 \\ 2^{55} - 1 & 2^{55} & 1 - 2^{55} \\ 2^{54} * 55 & 2^{54} * 55 & 2^{55} - 2^{54} * 55 \end{bmatrix}}}$$

zadani

Ukazte, ze rozklad $B = QAQ^T$, kde A je diagonalni a Q ortogonalni, existuje pouze pro symetricke matice

reseni

z definice ortogonality: $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}; Q^T = Q^{-1}$
$B = QAQ^T$

transponovanim B se transponuje i jeji rozklad
$B^T = (QAQ^T)^T = Q^T A^T (Q^T)^T = Q^T A^T Q = Q^T AQ$

$Q^T A^T Q = Q^T AQ$ | nebot A je diagonalni, neboli $A = A^T$
$Q^T AQ = QAQ^T \Rightarrow B = B^T$ | matice B musi byt nutne symetricka, pro matice, ktere nejsou symetricke to zrejme neplati $\square$

zadani

Najdete matici 3. radu, ktera ma jediny vlastni vektor $v = [1, 2, 3]^T$

reseni

Abychom meli jen jeden vektor, pouzijeme libovolnou Jordanovu matici, ktera je tvorena jen jednou Jordanovou bunkou:
$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
pak sestavime matici S, aby obsahovala vektor $[1, 2, 3]^T$ a byla regularni:
$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
vyslednou matici M pak ziskame pomoci rovnosti $M = SJS^{-1}$, S^{-1} existuje, nebot je S regularni
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\underline{M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \end{bmatrix}}}$$

zadani

Dokazte: Vlastni cisla antisymticka matice jsou ryze imaginarni

reseni

necht A je antisymetricka matice a predpokladejme ze $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastni cislo s komplexnim vlastnim vektorem v
$Ax = \lambda x$
$\overline{x}^T Ax = \lambda \overline{x}^T x = \lambda ||x||^2$ |
$\overline{x}^T Ax = (Ax)^T \overline{x} = x^T A^T \overline{x}$
$x^T A^T \overline{x} = -x^T A\overline{x}$
$A\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}$
$-\overline{\lambda}||x^2|| = \lambda||x^2||$
$||x|| \neq 0$
$-\overline{\lambda} = \lambda$
$-\overline{\lambda} = -a + ib = a + ib = \lambda$
coz znamena ze λ je ryze imaginarni (nebo nula)

zadani

Dokazte: Pokud je matice D antisymetricka, pak $I + D$ je regularni (kde I je jednotkova matice)

reseni

Z predchozi ulohy vime, ze vlastni cisla antisymetricke matice jsou ryze imaginarni (nebo nulove)
tudiz pro kazde z nich plati: $\lambda_x + 1 \neq 0$
a matice radu n je regularni prave kdyz ma n vlastnich cisel a zadne z nich neni nulove