

# NTIN090 — Základy složitosti a vyčísitelnosti

## 3. cvičení

Petr Kučera

3. listopadu 2022

Pomocí  $w^R$  označujeme zrcadlové otočení řetězce  $w$ .

1. Ukažte, že jazyk  $L_u$  je  $m$ -převoditelný na následující jazyky a tyto jazyky jsou tedy algoritmicky nerozhodnutelné.

- (a)  $S_1 = \{\langle M \rangle \mid (\exists w \in L(M))[w = w^R]\}$
- (b)  $S_2 = \{\langle M_1, M_2, x \rangle \mid x \in L(M_1) \cap L(M_2)\}$
- (c)  $S_3 = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) \cap L(M_2) \neq \emptyset\}$
- (d)  $S_4 = \{\langle M, k \rangle \mid |L(M)| \geq k\}$

2. Uvažme jazyk  $EQ = \{\langle M, N \rangle \mid L(M) = L(N)\}$ , ukažte, že

- 1.  $L_u \leq_m EQ$
- 2.  $\overline{L_u} \leq_m EQ$

3. Ukažte, že univerzální jazyk  $L_u$  je  $m$ -převoditelný na jazyky  $Fin$  a  $Inf$ , kde

$$\begin{aligned} Fin &= \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ je konečný jazyk} \} \\ Inf = \overline{Fin} &= \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ je nekonečný jazyk} \} \end{aligned}$$

4. Ukažte, že jsou-li  $A$  a  $B$  dva netriviální (tj.  $A, B \neq \emptyset, \Sigma^*$ ) rozhodnutelné jazyky, pak  $A \leq_m B$ .
5. Ukažte, že je-li  $A$  částečně rozhodnutelný jazyk a  $A \leq_m \overline{A}$ , pak  $A$  je ve skutečnosti rozhodnutelný jazyk.
6. Operaci disjunktčního sjednocení  $\oplus$  jazyků  $A$  a  $B$  nad abecedou  $\{0, 1\}$  definujeme jako

$$A \oplus B = \{a0 \mid a \in A\} \cup \{b1 \mid b \in B\}$$

Ukažte následující tvrzení

- (a)  $A \leq_m A \oplus B$  a  $B \leq_m A \oplus B$
  - (b) Předpokládejme, že  $C$  je jazyk nad abecedou  $\{0, 1\}$ , přičemž  $C \neq \{0, 1\}^*$ . Předpokládejme dále, že platí  $A \leq_m C$  i  $B \leq_m C$ . Pak rovněž  $A \oplus B \leq_m C$ .
7. Uvažme jazyk  $J = L_u \oplus \overline{L_u}$ . Ukažte, že  $J$  ani  $\overline{J}$  nejsou částečně rozhodnutelné jazyky.
8. Ukažte,  $J \leq_m \overline{J}$ .

## Domácí úkoly

9. (10 bodů) Rozhodněte, zda jazyk  $S = \{\langle M, x \rangle \mid (\forall y < x)[M(y) \downarrow]\}$  je rozhodnutelný. Pokud není rozhodnutelný, rozhodněte, zda  $S$  nebo  $\bar{S}$  je částečně rozhodnutelný jazyk.
10. (20 bodů) Uvažme jazyk

$$S = \{\langle M \rangle \mid (\forall x \in \Sigma^*) [x \in L(M) \Leftrightarrow x^R \in L(M)]\}.$$

- (a) (10 bodů) Ukažte, že  $L_u \leq_m S$
- (b) (10 bodů) Ukažte, že  $L_u \leq_m \bar{S}$ .

*Při řešení počítejte s tím, že řetězec  $x$  v instanci  $\langle M, x \rangle$  jazyka  $L_u$  může být palindrom.*