Predmet: Mataliza 1
Ukol: 4.
Verze: 1.
Autor: David Napravnik
Prezdivka: DN

zadani

Spoctete $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1}$

reseni

Zacneme, ze si rovnici upravime na tvar $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1^2+2n}$

rovnici pote zjednodusime na $lim_{n\to\infty}(n+1)^{2/n}$ coz muzeme, nebot odmocnina nemohla byt zaporna

Jelikoz polynom roste radove rychleji nez obycejne n, pak muzeme 1. zahodit dvojku ve zlomku a ponechat pouze $\frac{1}{n}$ a 2. prohlasit, ze cokoliv na nultou je jedna.
nebo vyuzit lemma $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Pote upravime rovnici na tvar $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1^2-2n}$

rovnici pote zjednodusime na $lim_{n\to\infty}(n-1)^{2/n}$ a postupujeme jako u rovnice vyse.

Dale podle vety o Policajtech:
$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1^2-2n} \leq lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1^2} \leq lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1^2+2n}$
$\underline{\underline{lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1^2} = 1}}$

zadani

Spoctete limitu posloupnosti zadane $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{4} + 1$

reseni

Nejdrive zkusme najit a takove ze $a_{n+1} = a_n$
$a = \frac{a^2}{4} + 1$; $a = 2$
z toho vime, ze pokud posloupnost konverguje, tak to bude k dvojce.

Dale snadno vidime, ze $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$ . . . posloupnost je neklesajici

Dale snadno vidime ze $\forall a_n < 2; n \in \mathbb{N} : \frac{a_n^2}{4} + 1 < 2$ . . . "nepreskocime dvojku az se k ni budeme priblizovat"

Jelikoz $a_1 < 2$, posloupnost je neklesajici a 2 nijak nepreskocime, pak
$\underline{\underline{\text{posloupnost konverguje k 2}}}$