Predmet: Linearni algebra 2
Ukol: 7.
Verze: 1.
Autor: David Napravnik
Prezdivka: DN

zadani

Spoctete Choleskeho rozklad matice A a pouzijte ho k reseni soustavy $Ax = b$ pro vektor $b = (8, -10, 30)^T$

reseni

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 26 \end{bmatrix} = U^T U$
$= \begin{bmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \cdot & 0 \\ 4 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$U^T y = b$
$y = [8, -1, 1]^T$
$Ux = y$
$\underline{\underline{x = [2, -2, 1]^T}}$

zadani

Pomoci Choleskeho rozkladu invertujte matici

reseni

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 13 & -8 \\ -4 & -8 & 20 \end{bmatrix} = U^T U$
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
$B^{-1} = U^{-1} U^{-T}$
$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
$U^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{49}{9} & \frac{-2}{9} & 1 \\ \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

zadani

Mejme $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivne semidefinitni a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrickou. Ukazte, ze AB je diagonalizovatelna.

reseni

$A = LL^T$
$B = B^T$
$ABB^T A^T = LL^T BB^T L^T L$
$ABB^T A^T = LL^T BBL^T L$
$ABBA = LL^T BBL^T L$
$ABAB = LL^T BBL^T L$
$ABAB = PBBP^{-1}$
$(AB)^2 = PBBP^{-1}$
$(AB)^2 = PS^2 P^{-1}$
$AB = PSP^{-1}$

zadani

Bud V realny vektorovy prostor se skalnim soucinem a $w_1, ..., w_n \in V$. Gramova matice $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je definovana jako $G_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle$. Ukazte:
1. Pokud jsou vektory $w_1, ..., w_n$ linearne nezavisle, pak G je pozitivne definitni
2. $rank(G) = dim(span(w_1, ..., w_n))$

reseni

1.) Dane vektory jsou linearne nezavisle prave kdyz je determinant Gramovy matice nenulovy. Nenulovy determinant znaci, ze matice ma n nenulovych vlastnich cisel (kde n je rad matice). Coz znaci, ze matice G je pozitivne definitni.

2.) Pokud jsou vektory linearne nezavisle, je matice regularni.
Pokud jeden vektor udelame linearne zavisly na jinem, Dimenze se nam musi snizit o jedna, nebot dimenze kernelu o jedna stoupla prave tim, ze je jeden vektor nahraditelny.