5. cvičení k předmětu NMAI058 Lineární Algebra 2 (LS 19/20)

(Řešená verze)

Každou permutaci $\pi \in S_n$ (permutuje prvky množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$) můžeme přepsat pomocí cyklů následovně: Vezmeme nejmenší číslo, tedy 1 a za ním postupně vypisujeme celý jeho cyklus, dostáváme $(1, \pi(1), \pi(\pi(1)), \ldots, \pi^{-1}(1))$. Následně postup opakujeme: vezmeme další nejmenší číslo neobsažené v žádném z již zapsaných cyklů a jeho cyklus obdobně zapíšeme za předchozí.

Například permutaci $\pi(1) = 2, \pi(2) = 4, \pi(3) = 3, \pi(4) = 1, \pi(5) = 6$ a $\pi(6) = 5$ zapíšeme jako $\pi = (1, 2, 4)(3)(5, 6)$. Tento zápis permutace jako rozklad na cykly budeme používat níže.

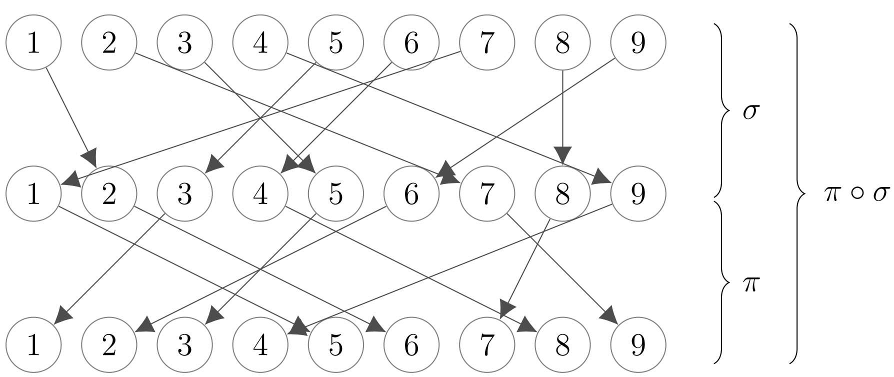
Úloha 1: *Uvažme následující dvě permutace z* S_9: $\pi = (1, 5, 3)(2, 6)(4, 8, 7, 9)$ *a* $\sigma = (1, 2, 7)(3, 5)(4, 9, 6)(8)$. *Spočtěte*

a) složení $\pi \circ \sigma$ *a složení* $\sigma \circ \pi$

Řešení: Připomeňme si definici skládání permutací (definice 4.11 ze skript M. Hladíka):

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : (\pi \circ \sigma)(i) = \pi(\sigma(i)).$$

Zakresleme si permutace π a σ schématicky.



Dostáváme $\pi \circ \sigma = (1, 6, 8, 7, 5)(2, 9)(3, 5)(4)$.

Obdobně můžeme spočítat i $\sigma \circ \pi = (1, 3, 2, 4, 8)(5)(6, 7)(9)$.

b) inverzní permutace π^{-1} *a* σ^{-1}.

Řešení: Nahlédneme, že pořadí prvků v cyklech inverzní permutace je otočené. Tedy získáváme $\pi^{-1} = (1, 3, 5)(2, 6)(4, 9, 7, 8)$ a $\sigma^{-1} = (1, 7, 2)(3, 5)(4, 6, 9)(8)$.

Úloha 2: *Jaké znaménko mají následující permutace?*

1. permutace $\pi \in S_3$ *definovaná předpisem* $\pi(1) = 2,\ \pi(2) = 3,\ \pi(3) = 1$

2. permutace $\sigma \in S_7$ *definovaná předpisem* $\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 3,\ \sigma(3) = 4,\ \sigma(4) = 1,\ \sigma(5) = 7,\ \sigma(6) = 5,\ \sigma(7) = 6$

3. identická permutace $\mathrm{id} \in S_n$*, pro kterou* $id(i) = i$ *pro každé* $i \in \{1, \dots, n\}$

4. transpozice $\tau \in S_n$ *(tj. permutace, která zamění právě dva prvky; např.* $\tau(1) = 3,\ \tau(3) = 1,\ \tau(i) = i$ *pro všechny* $i > 2$*)*

Řešení: Pro permutaci $\pi \in S_n$ definujeme *znaménko* jako $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{n-k}$, kde k je počet cyklů v permutaci π (definice 4.13 ve skriptech M. Hladíka).

1. Permutace obsahuje jeden cyklus $(1, 2, 3)$, tedy $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{3-1} = 1$.
2. Permutace je tvořena dvěma cykly $(1, 2, 3, 4)$ a $(5, 7, 6)$ tedy $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{7-2} = -1$.
3. Každé číslo tvoří samo o sobě cyklus a identickou permutaci tedy můžeme rozložit jako $(1)(2) \dots (n)$. Máme tedy n cyklů a znaménko permutace je $(-1)^{n-n} = 1$.
4. Dvě prohozená čísla tvoří cyklus délky dva a zbylá čísla tvoří každé triviální cyklus délky jedna. Uvedený příklad transpozice můžeme zapsat jako $(1, 3)(2)(4) \dots (n)$. Máme tedy $n - 1$ cyklů a znaménko permutace je $(-1)^{n-(n-1)} = -1$.

Úloha 3: *Nechť* $\pi = (1, 3)(2, 9, 7, 6)(4)(5, 8)$ *a* $\sigma = (1, 4, 5)(3, 6, 9, 8, 7)(2)$*. Určete:*

a) znaménka $\mathrm{sgn}(\pi)$ *a* $\mathrm{sgn}(\sigma)$

Řešení: Permutace π je na $n = 9$ prvcích a je složena ze 4 cyklů. Tedy $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{9-4} = -1$.

Obdobně $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{9-3} = 1$.

b) znaménka $\mathrm{sgn}(\pi \circ \sigma)$ *a* $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \pi)$

Řešení: Znaménko složené permutace je součin znamének jednotlivých permutací (viz důsledek o znaménku složené permutace ze skript - Důsledek 4.18). Proto dostáváme $\mathrm{sgn}(\pi \circ \sigma) = \mathrm{sgn}(\pi)\,\mathrm{sgn}(\sigma) = -1 \cdot 1 = -1$.

Obdobně $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \pi) = -1$.

c) znaménka $\mathrm{sgn}(\pi^{-1})$ *a* $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$

Řešení: Z definice složení permutací dostáváme $\pi \circ \pi^{-1} = \mathrm{id}$. Víme, že $\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = 1$. Dostáváme tedy, že $\mathrm{sgn}(\pi^{-1}) = \mathrm{sgn}(\pi) = -1$.

Obdobně $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = 1$.

Úloha 4: *Spočítejte determinanty následujících reálných matic.*

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *– použijte výpočet z definice.*

Řešení: Budeme počítat z definice:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2} - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2} - A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3} - A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1} \\
&= 4 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 \\
&= -9
\end{aligned}$$

Determinant matice je -9.

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *– použijte Gaussovu eliminaci.*

Řešení: Budeme řešit pomocí Gaussovy eliminace:

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && (1) \\
&= -1 \det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Výměna 1. a 2. řádku, det. se násobí -1)} \\
&= -2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Vydělíme 1. řádek 2, det. se zmenší 2-krát)} \\
&= -2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Přičteme 3-krát 1. řádek k 2., det. se nemění)} \\
&= -2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} && \text{(Přičteme 2-krát 1. řádek k 3., det. se nemění)} \\
&= 2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} && \text{(Výměna 2. a 3. řádku, det. se násobí -1)} \\
&= 2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}. && \text{(Odečteme 5-krát 2. řádek od 3., det. se nemění)}
\end{aligned}$$

Dostáváme horní trojúhelníkovou matici. Existuje jediná permutace σ taková, že

$$\Pi_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \neq 0$$

a to identita. Determinant vzniklé horní trojúhelníkové matice je $(-1)\cdot 1\cdot(-30)=30$. A tedy determinant původní matice je 60.

c) $C=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ *– použijte Laplaceův rozvoj podle řádku.*

Řešení: Použijeme Laplaceův rozvoj podle prvního řádku. Následný výpočet determinantů matic velikosti 2×2 provedeme z definice.

$$\begin{aligned}\det(C)&=\det\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\\&=(-1)^{1+1}\cdot 0\cdot\det\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\\&=(-1)\cdot 1\cdot(1\cdot 1\cdot 0+(-1)\cdot 1\cdot 1)+1\cdot 1\cdot(1\cdot 1\cdot 1+(-1)\cdot 0\cdot 1)\\&=2\end{aligned}$$

Determinant matice je 2.

d) $\begin{pmatrix}18&11&11\\11&11&11\\11&11&24\end{pmatrix}$

Řešení: Nejprve použijeme elementární řádkové úpravy a převedeme matici následovně. Využíváme pouze elementární úpravu "přičtení k-násobku i-tého řádku k j-tému". Tato úprava nemění determinant, a tak získáváme.

$$\begin{aligned}\det(D)&=\det\begin{pmatrix}18&11&11\\11&11&11\\11&11&24\end{pmatrix}\\&=\det\begin{pmatrix}7&0&0\\11&11&11\\11&11&24\end{pmatrix}\\&=\det\begin{pmatrix}7&0&0\\11&11&11\\0&0&13\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nyní si všimneme, že permutace $\sigma\in S_3$ přispívá k celkovému součtu v hledaném determinantu *nenulovou* hodnotou právě tehdy, když vybírá první sloupec v prvním řádku a třetí sloupec ve třetím řádku, tj. $\sigma(1)=1$ a $\sigma(3)=3$. Taková permutace v S_3 je však právě jedna – identická permutace. Tedy determinant výsledné matice je roven součinu jejích diagonálních prvků $7\cdot 11\cdot 13=1001$. Vzhledem k tomu, že provedené řádkové úpravy neměnily determinant, je determinant původní matice také 1001.

Úloha 5: *Spočtěte determinant následujících matic:*

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix},$$

Řešení: První řádek přičteme ke všem ostatním. Získáme horní trojúhelníkovou matici, jejíž diagonála je postupně tvořena čísly 1 až n. Determinant matice je $n!$.

$$b)\ B = \begin{pmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+x \end{pmatrix},$$

Řešení: Poslední řádek odečteme od všech předchozích (hodnoty a_i zůstanou pouze v posledním řádku). Dostáváme matici $B' = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & -x \\ 0 & x & 0 & \dots & -x \\ 0 & 0 & x & \dots & -x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+x \end{pmatrix}$. Poté využijeme rovnosti $\det(B) = \det(B^T)$, matici transponujeme, přičteme všechny řádky k poslednímu a znovu matici transponujeme. Jinými slovy jsme k poslednímu sloupci B přičetli všechny předchozí sloupce. Dostaneme $B'' = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_1+a_2+\dots+a_n+x \end{pmatrix}$.

Determinant je roven $(a_1 + \dots + a_n + x)x^{n-1}$.

Další příklady k procvičení

Úloha 6: *Nechť* $\pi = (1,3,2)(4,7)(5,6,9,8)$, $\sigma = (1,8,6)(2,3)(4,5,7,9)$, $\tau = (1,6,8)(2,3)(4,7,5,9)$ *jsou permutace na devíti prvcích. Spočtěte*

a) $\pi \circ \sigma$

Výsledek: $\pi \circ \sigma = (1,5,4,6,3)(2)(7,8,9)$

b) $\sigma \circ \tau$

Výsledek: $\sigma \circ \tau = (1)(2)(3)(4,9,5)(6)(7)(8)$

c) $\tau \circ \sigma$

Výsledek: $\tau \circ \sigma = (1)(2)(3)(4,9,7)(5)(6)(8)$

d) $\pi \circ \tau$

Výsledek: $\pi \circ \tau = (1,9,7,6,5,8,3)(2)(4)$

e) π^{-1}

Výsledek: $\pi^{-1} = (1,2,3)(5,8,9,6)(4,7)$

f) σ^{-1}

Výsledek: $\sigma^{-1} = (1,6,8)(2,3)(4,9,7,5)$

g) τ^{-1}

Výsledek: $\tau^{-1} = (1,8,6)(2,3)(4,9,5,7)$

h) $(\pi \circ \tau)^{-1}$

Výsledek: $(\pi \circ \tau)^{-1} = (1,3,8,5,6,7,9)(2)(4)$

Úloha 7: *Spočtěte znaménko pro následující permutace:*

a) $\pi(1) = 5, \pi(2) = 3, \pi(3) = 2, \pi(4) = 4, \pi(5) = 1$

Výsledek: 1

b) $\pi(1) = 2, \pi(2) = 1, \pi(3) = 4, \pi(4) = 3, \pi(5) = 7, \pi(6) = 6, \pi(7) = 5$

Výsledek: -1

c) $\pi(1) = 2, \pi(2) = 4, \pi(3) = 1, \pi(4) = 8, \pi(5) = 7, \pi(6) = 3, \pi(7) = 5, \pi(8) = 6$

Výsledek: 1

Úloha 8: *Nechť* $\pi = (1,9,6,4,2)(3,7,5)(8)(10)$, $\sigma = (1,10)(2,5,7,4)(3,6)(8,9)$, $\tau = (1)(2,3,8)(4,7,5,6,9,10)$. *Spočtěte znaménko pro následujících permutace:*

a) π, σ, τ

Výsledek: $\operatorname{sgn}(\pi) = 1, \operatorname{sgn}(\sigma) = 1, \operatorname{sgn}(\tau) = -1$

b) $\pi^{-1}, \sigma^{-1}, \tau^{-1}$

Výsledek: $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = 1, \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = 1, \operatorname{sgn}(\tau^{-1}) = -1$

c) $\pi \circ \sigma, \pi \circ \tau, \sigma \circ \tau$

Výsledek: $\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = 1, \operatorname{sgn}(\pi \circ \tau) = -1, \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = -1$

Úloha 9: *Spočtěte determinanty následujících matic. Vyzkoušejte si různé postupy (výpočet z definice, Laplaceův rozvoj podle řádku, pomocí Gaussovy eliminace).*

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Výsledek: -5

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Výsledek: 0, matice je singulární

c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Výsledek: 3

d) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Nápověda: Využijte vztah $\det(AB)$ s $\det(A), \det(B)$ a matici nenásobte.

Výsledek: -6

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 9 & 2 & -8 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

Nápověda: Využijte vztah $\det(A^{-1})$ s $\det(A)$ a matici neinvertujte.

Výsledek: $-\frac{1}{220}$

Úloha 10: *Spočítejte determinanty následujících matic nad $\mathbb{Z}_7$:*

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

Výsledek: 4

b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$

Výsledek: 5

c) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Výsledek: 1

Úloha 11: *Jaký je determinant ortogonální matice?*

Nápověda: Vyjděte z definice ortonormální matice. Jaký je determinant součinu matic? Jaký je determinant transpozice matice?

Výsledek: Determinant ortogonální matice je vždy z množiny $\{-1, 1\}$.

Úloha 12: *Buď* $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*. Jak se změní determinant matice* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$*, pokud každé* $a_{i,j}$ *vynásobíme číslem* c^{i-j}*.*

Nápověda: Stačí rozepsat z definice a vytknout konstanty c ze součinu (jakou vlastnost násobení jsme zde použili?).

Výsledek: Determinant se nezmění.

Úloha 13: *Zkuste si bez použití skript rozmyslet a dokázat jaký vliv na determinant mají jednotlivé elementární operace. Co by se stalo kdybychom je aplikovali na sloupce místo na řádky?*

Výsledek: Viz skripta Milana Hladíka strana 206. Při aplikaci na sloupce se determinant mění stejně, lze ukázat např. díky Tvrzení 9.4 ze skript Milana Hladíka nebo z definice stejně jako pro řádkové úpravy.