Kapitola 5

Vektorové prostory

Vektorové prostory zobecňují dobře známý prostor aritmetických vektorů $\mathbb{R}^n$. Stejně jako u grup a těles je zadefinujeme pomocí abstraktních axiomů.

První myšlenky na zavedení vektorů pochází od Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646–1716). Solidní teorii však vybudoval až německý učitel, lingvista a filosof Hermann Grassmann (1809–1877) poté, co jej roku 1845 o tomto problému (a o ceně za rozvinutí Leibnizových myšlenek) informoval August Ferdinand Möbius (1790–1868). Pojmy, se kterými se seznámíme, jako např. podprostor či lineární závislost, stejně jako axiomatizaci pomocí komutativity, asociativity a distributivity, zavedl právě Grassmann. Vybudovaná teorie však byla těžká na pochopení a ve své době se nesetkala moc s pochopením. S výjimkou Williama Rowana Hamiltona (1805–1865), který též přispěl k budování teorie vektorových prostorů a považoval Grassmanna za génia, upadl Grassmann trochu v pozapomění, než ho „znovuobjevil“ italský matematik Giuseppe Peano (1858–1932). Současná verze definice vektorových prostorů pochází od německého matematika Hermanna Weyla (1885–1955).

Poznamenejme, že v některých odvětvích se vektorové prostory označují také jako *lineární prostory.*

5.1 Základní pojmy

Definice 5.1 (Vektorový prostor)**.** Buď $\mathbb{T}$ těleso s neutrálními prvky 0 pro sčítání a 1 pro násobení. *Vektorovým prostorem nad tělesem* $\mathbb{T}$ rozumíme množinu V s operacemi sčítání vektorů $+\colon V^2 \to V$, a násobení vektoru skalárem $\cdot\colon \mathbb{T} \times V \to V$ splňující pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ a $u, v \in V$:

(1) $(V, +)$ je Abelova grupa, neutrální prvek značíme o a inverzní k v pak $-v$,

(2) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ (asociativita),

(3) $1v = v$,

(4) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ (distributivita),

(5) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (distributivita).

Prvkům vektorového prostoru V říkáme *vektory* a budeme je značit latinkou. Vektory píšeme bez šipek, tedy v a ne $\vec{v}$. Prvkům tělesa $\mathbb{T}$ pak říkáme *skaláry*, a pro odlišení je budeme značit řeckými písmeny.

Příklad 5.2. Příklady vektorových prostorů:

- Aritmetický prostor $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$, či obecněji $\mathbb{T}^n$ nad $\mathbb{T}$, kde $\mathbb{T}$ je libovolné těleso; n-tice prvků z tělesa $\mathbb{T}$ sčítáme a násobíme skalárem po složkách podobně jako u $\mathbb{R}^n$. Axiomy z definice vektorového prostoru pak vyplývají z vlastností tělesa.
- Prostor $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$, opět s analogicky definovanými operacemi.
- Prostor matic $\mathbb{R}^{m\times n}$ nad $\mathbb{R}$, či obecněji $\mathbb{T}^{m\times n}$ nad $\mathbb{T}$. Axiomy z definice vektorového prostoru se snadno nahlédnou z vlastností matic a těles.
- Prostor všech reálných polynomů proměnné x nad tělesem $\mathbb{R}$, značíme jej $\mathcal{P}$.
- Prostor všech reálných polynomů nad $\mathbb{R}$ proměnné x stupně nanejvýš n, který značíme $\mathcal{P}^n$. Operace jsou definovány známým způsobem.

– Sčítání:

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0) = \\ = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

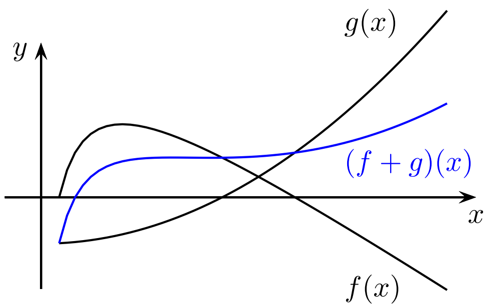
– Násobení skalárem $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = \\ = (\alpha a_n)x^n + (\alpha a_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0)$$

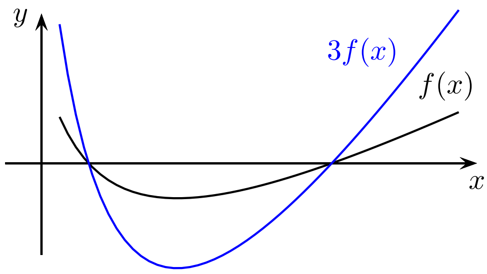
– Nulový vektor: 0.
– Opačný vektor:

$$-(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = \\ = (-a_n)x^n + (-a_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (-a_1)x + (-a_0).$$

- Prostor všech reálných funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, který značíme $\mathcal{F}$. Funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sčítáme tak, že sečteme příslušné funkční hodnoty, tedy $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Podobně funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ násobíme skalárem $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že vynásobíme všechny funkční hodnoty, tj. $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.



Součet vektorů.



Vynásobení vektoru skalárem.

- Prostor všech spojitých funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, který značíme $\mathcal{C}$. Prostor všech spojitých funkcí $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a,b]$ pak značíme $\mathcal{C}_{[a,b]}$. Operace jsou definovány analogicky jako pro $\mathcal{F}$.

Pokud neřekneme jinak, prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^{m\times n}$ budeme nadále implicitně uvažovat nad tělesem $\mathbb{R}$. □

Tvrzení 5.3 (Základní vlastnosti vektorů)**.** *V prostoru V nad tělesem $\mathbb{T}$ platí:*

(1) $\forall v \in V : 0v = o$,

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{T} : \alpha o = o$,

(3) $\forall v \in V\ \forall \alpha \in \mathbb{T} : \alpha v = o$ *implikuje, že* $\alpha = 0$ *nebo* $v = o$,

(4) $\forall v \in V : (-1)v = -v$.

Důkaz. Analogicky jako u vlastností v tělese. □

5.2 Podprostory a lineární kombinace

Definice 5.4 (Podprostor)**.** Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Pak $U \subseteq V$ je *podprostorem* prostoru V, pokud tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ se stejně definovanými operacemi. Značení: $U \Subset V$.

Jak ukazuje následující tvrzení, ekvivalentní definice podprostoru je, že musí obsahovat nulový vektor a být uzavřený na obě operace.

Tvrzení 5.5. *Buď U podmnožina vektorového prostoru V nad $\mathbb{T}$. Pak U je podprostorem V právě tehdy, když platí:*

(1) $o \in U$,

(2) $\forall u, v \in U : u + v \in U$,

(3) $\forall \alpha \in \mathbb{T}\ \forall u \in U : \alpha u \in U$.

Důkaz. Pokud je U podprostorem V, pak musí splňovat požadované tři vlastnosti z definice vektorového prostoru.

Předpokládejme naopak, že U splňuje zadané tři vlastnosti. Ostatní vlastnosti z definice vektorového prostoru (jako je komutativita, asociativita, distributivita) pak platí také, protože platí pro množinu V, a tudíž automaticky platí i pro každou její podmnožinu. To, že je množina U uzavřená na opačné vektory, vyplývá z uzavřenosti na násobky, neboť podle tvrzení 5.3 je $-v = (-1)v$. □

Příklad 5.6. Příklady vektorových podprostorů:

- Dva triviální podprostory prostoru V jsou: V a $\{o\}$.
- Libovolná přímka v rovině procházející počátkem je podprostorem $\mathbb{R}^2$, jiná ne.
- $\mathcal{P}^n \Subset \mathcal{P} \Subset \mathcal{C} \Subset \mathcal{F}$.
- Množina symetrických matic v $\mathbb{R}^{n\times n}$.
- $\mathbb{Q}^n$ nad $\mathbb{Q}$ je podprostorem prostoru $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$, ale není podprostorem prostoru $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$, protože pracuje nad jiným tělesem.
- Jsou-li U, V podprostory W a platí-li $U \subseteq V$, pak $U \Subset V$.
- Pro vlastnost „býti podprostorem“ platí transitivita, čili $U \Subset V \Subset W$ implikuje $U \Subset W$. □

Nyní ukážeme, že průnik libovolného systému (i nekonečného nespočetného) podprostorů je zase podprostor. Pro sjednocení tato vlastnost obecně neplatí (najděte protipříklad).

Tvrzení 5.7 (Průnik podprostorů)**.** *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$, a mějme V_i, $i \in I$, libovolný systém podprostorů V. Pak $\bigcap_{i\in I} V_i$ je opět podprostor V.*

Důkaz. Podle tvrzení 5.5 stačí ověřit tři vlastnosti: Protože $o \in V_i$ pro každé $i \in I$, musí být i v jejich průniku. Uzavřenost na sčítání: Buď $u, v \in \bigcap_{i\in I} V_i$, tj. pro každé $i \in I$ je $u, v \in V_i$, tedy i $u + v \in V_i$. Proto $u + v \in \bigcap_{i\in I} V_i$. Analogicky uzavřenost na násobky: Buď $\alpha \in \mathbb{T}$ a $v \in \bigcap_{i\in I} V_i$, tj. pro každé $i \in I$ je $v \in V_i$, tedy i $\alpha v \in V_i$. Proto $\alpha v \in \bigcap_{i\in I} V_i$. □

Tato vlastnost nás opravňuje k následující definici.

Definice 5.8 (Lineární obal)**.** Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$, a $W \subseteq V$. Pak *lineární obal* W, značený $\mathrm{span}(W)$, je průnik všech podprostorů V obsahujících W, to jest $\mathrm{span}(W) = \bigcap_{U: W\subseteq U \Subset V} U$.

Z jiného pohledu je lineární obal množiny W nejmenší prostor obsahující W v tom smyslu, že jakýkoli jiný prostor obsahující W je jeho nadmnožinou.

Ještě k terminologii: Nechť prostor U je lineárním obalem množiny vektorů W, tedy $U = \mathrm{span}(W)$. Pak říkáme, že W *generuje* prostor U, a prvky množiny W jsou *generátory* prostoru U. Prostor U se nazývá *konečně generovaný*, jestliže je generovaný nějakou konečnou množinou vektorů.

Příklad 5.9. Příklady lineárních obalů ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$:

- $\mathrm{span}\{(1,0)^T\}$ je přímka, konkrétně osa x_1. Je to tedy konečně generovaný podprostor $\mathbb{R}^2$.
- $\mathrm{span}\{(1,0)^T, (2,0)^T\}$ je totéž.
- $\mathrm{span}\{(1,1)^T, (1,2)^T\}$ je celá rovina $\mathbb{R}^2$.
- $\mathrm{span}\{\} = \{o\}$. □

Příklad 5.10. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ a jeho podprostor U reprezentovaný osou x_1. Tento podprostor lze vygenerovat vektorem $(1,0)^T$, nebo lze vygenerovat vektorem $(-3,0)^T$, anebo jakýmkoli jiným tvaru $(a,0)^T$, kde $a \neq 0$. Nicméně, U lze vygenerovat i množinou vektorů $\{(2,0)^T,(5,0)^T\}$. Vidíme, že tato množina není minimální – jeden vektor lze odstranit a zbylý vektor stále generuje podprostor U. Tato snaha o minimální reprezentaci a odstranění redundancí povede později k pojmu báze (sekce 5.4). □

Proč jsme označili obal jako lineární? Odpověď se nazývá vyjádření lineárního obalu pomocí lineárních kombinací.

Definice 5.11 (Lineární kombinace)**.** Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a $v_1,\dots,v_n \in V$. Pak *lineární kombinací* vektorů $v_1,\dots,v_n$ rozumíme výraz typu $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, kde $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{T}$.

Poznámka 5.12. Zde je potřeba zdůraznit, že uvažujeme pouze lineární kombinace konečně mnoha vektorů. To pro naše účely plně postačuje, protože vesměs budeme pracovat s konečně generovanými vektorovými prostory. Nekonečné lineární kombinace je možné také zavést, ale potřebovali bychom silnější aparát (limity, konvergenci, ...)

Poznámka 5.13. Lineární kombinaci lze chápat dvěma způsoby. První způsob je chápat ji jako výraz $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ a druhý způsob je uvažovat její konkrétní hodnotu, tedy výsledný vektor. Budeme používat oba tyto pohledy.

Poznámka 5.14. Označení typu $v_1,\dots,v_n$ jsme doposud používali výhradně pro jednotlivé složky aritmetického vektoru $v = (v_1,\dots,v_n)$. Nicméně, nyní ho budeme používat spíše pro n nějakých vektorů. Význam by však měl být vždy jasný z kontextu.

Pomocí lineárních kombinací můžeme vygenerovat celý lineární obal konečné množiny vektorů.

Věta 5.15. *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$, a mějme $v_1,\dots,v_n \in V$. Pak*

$$\operatorname{span}\{v_1,\dots,v_n\} = \{\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i;\ \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{T}\}. \tag{5.1}$$

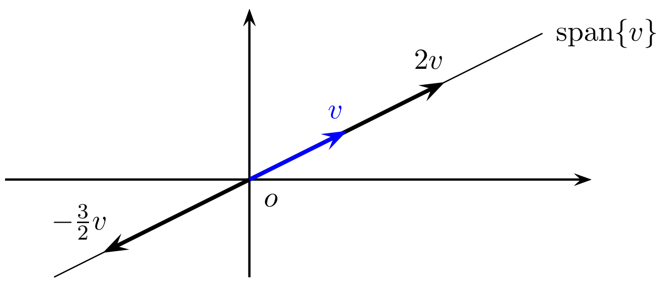
Důkaz. Inkluze „$\supseteq$“. Lineární obal $\operatorname{span}\{v_1,\dots,v_n\}$ je podprostor V obsahující vektory $v_1,\dots,v_n$, tedy musí být uzavřený na násobky a součty. Tudíž obsahuje i násobky $\alpha_i v_i$, $i = 1,\dots,n$, a také jejich součet $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$.

Inkluze „$\subseteq$“. Stačí ukázat, že množina lineárních kombinací

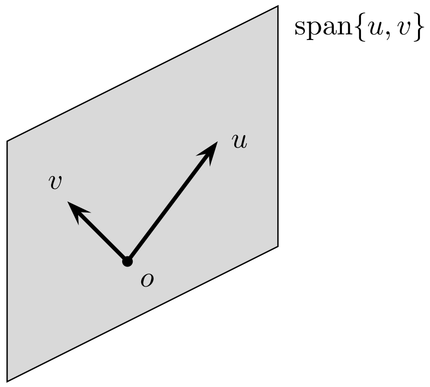
$$M \coloneqq \{\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i;\ \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{T}\}$$

je vektorový podprostor V obsahující vektory $v_1,\dots,v_n$, a proto je jednou z množin, jejichž průnikem $\operatorname{span}\{v_1,\dots,v_n\}$ vzniklo. Pro každé i je vektor v_i v množině M obsažen, stačí vzít lineární kombinaci s $\alpha_i = 1$ a $\alpha_j = 0$, $j \neq i$. Nulový vektor rovněž obsahuje, vezměme lineární kombinaci s nulovými koeficienty. Uzavřenost na součty: vezměme libovolné dva vektory $u = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$, $u' = \sum_{i=1}^n \beta'_i v_i$ z množiny M. Pak $u+u' = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i + \sum_{i=1}^n \beta'_i v_i = \sum_{i=1}^n (\beta_i + \beta'_i) v_i$, což je prvek množiny. Podobně pro násobky, buď $\alpha \in \mathbb{T}$, pak $\alpha u = \alpha \sum_{i=1}^n \beta_i v v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha\beta_i) v_i$, což opět náleží do množiny M. □

Příklad 5.16. Lineární obal jednoho vektoru v je dán množinou všech jeho lineárních kombinací, tedy jeho násobků:



Lineární obal dvou vektorů u, v (s různými směry) v prostoru $\mathbb{R}^3$ představuje rovinu:



□

Překvapivě můžeme pomocí (konečných) lineárních kombinací vygenerovat lineární obal i nekonečné množiny vektorů.

Tvrzení 5.17. *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a buď $M \subseteq V$. Pak* $\operatorname{span}(M)$ *je tvořen všemi lineárními kombinacemi každé konečné soustavy vektorů z M.*

Důkaz. Analogický důkazu věty 5.15, necháváme na cvičení. □

Poznámka 5.18 (Trochu jiný pohled na soustavu rovnic $Ax = b$)**.** Výraz $Ax = \sum_j x_j A_{*j}$ je vlastně lineární kombinace sloupců matice A (srov. poznámka 3.17), takže řešit soustavu $Ax = b$ znamená hledat lineární kombinaci sloupců, která se rovná b. Řešení tedy existuje právě tehdy, když b náleží do podprostoru generovaného sloupci matice A.

Poznámka 5.19 (Trochu jiný pohled na součin matic AB)**.** Předchozí úvahu můžeme použít i pro maticové násobení. Uvažujme $A \in \mathbb{T}^{m\times p}, B \in \mathbb{T}^{p\times n}$. Zaměříme se nejprve na sloupce výsledné matice AB. Libovolný j-tý sloupec vyjádříme $(AB)_{*j} = AB_{*j} = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} A_{*k}$, je tedy lineární kombinací sloupců matice A. Schematicky:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ \dots & b_{pj} & \dots \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} | & | & & | \\ A_{*1} & A_{*2} & \dots & A_{*p} \\ | & | & & | \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & | & \\ \dots & (AB)_{*j} & \dots \\ & | & \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Podobně lze interpretovat maticové násobení jako vytváření lineárních kombinací řádků. Libovolný i-tý řádek výsledné matice AB vyjádříme jako $(AB)_{i*} = A_{i*}B = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} B_{k*}$, a tedy představuje lineární kombinaci řádků matice B.

Poznámka 5.20 (Ještě jiný pohled na součin matic AB)**.** Součin $A \in \mathbb{T}^{m\times p}, B \in \mathbb{T}^{p\times n}$ lze vyjádřit ještě jiným způsobem jako $AB = \sum_{k=1}^{p} A_{*k} B_{k*}$. Každý člen sumy představuje vnější součin dvou vektorů, což vytvoří matici hodnosti nanejvýš 1. Tímto předpisem jsme tedy rozepsali matici na součet maximálně k matic hodnosti 1. Nahlédnout toto vyjádření součinu matic je snadné, neboť porovnáním prvků na pozici i, j máme

$$
\begin{aligned}
(AB)_{ij} &= \textstyle\sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}, \\
\left(\textstyle\sum_{k=1}^{p} A_{*k} B_{k*}\right)_{ij} &= \textstyle\sum_{k=1}^{p} (A_{*k} B_{k*})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}.
\end{aligned}
$$

Která z uvedených forem maticového součinu se používá v praktických implementacích?[1] Na to není jednoduchá odpověď. Pokud jsou matice A, B velké, rozdělují se na menší bloky a na nejvyšší úrovni se někdy používá forma součinu z této poznámky. Pro součin jednotlivých bloků se pak používá forma z poznámky 5.19. Oproti standardní definici 3.7 maticového součinu má výhodu v tom, že lépe hospodaří s načítáním hodnot matice do různých úrovní paměti. Více podrobností viz Goto and Geijn [2008].

5.3 Lineární nezávislost

Konečně generovaný prostor typicky může být generován různými množinami vektorů. Motivací pro tuto podkapitolu je snaha najít množinu generátorů, která bude minimální co do počtu i co do inkluze (tedy žádná ostrá podmnožina už prostor negeneruje), srov. příklad 5.10. To pak povede i k pojmům jako báze, souřadnice a dimenze.

Definice 5.21 (Lineární nezávislost)**.** Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a mějme vektory $v_1, \ldots, v_n \in V$. Pak vektory $v_1, \ldots, v_n$ se nazývají *lineárně nezávislé*, pokud rovnost $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = o$ nastane pouze pro $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. V opačném případě jsou vektory *lineárně závislé.*

Tedy vektory $v_1, \ldots, v_n$ jsou lineárně závislé, pokud existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T}$, ne všechna nulová a taková, že $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = o$.

Pojem lineární nezávislosti zobecníme i na nekonečné množiny vektorů, nicméně s nekonečny bývá trochu potíž (např. co by se myslelo nekonečnou lineární kombinací?), proto se to definuje takto:

Definice 5.22 (Lineární nezávislost nekonečné množiny)**.** Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a buď $M \subseteq V$ nekonečná množina vektorů. Pak M je *lineárně nezávislá*, pokud každá konečná podmnožina M je lineárně nezávislá. V opačném případě je M *lineárně závislá.*

Příklad 5.23. Příklady lineárně (ne)závislých vektorů v $\mathbb{R}^2$:

- $(1, 0)^T$ je lineárně nezávislý,
- $(1, 0)^T$, $(2, 0)^T$ jsou lineárně závislé,
- $(1, 1)^T$, $(1, 2)^T$ jsou lineárně nezávislé,
- $(1, 0)^T$, $(0, 1)^T$, $(1, 1)^T$ jsou lineárně závislé,
- $(0, 0)^T$ je lineárně závislý,
- prázdná množina je lineárně nezávislá. □

Příklad 5.24. Není těžké nahlédnout, že dva vektory tvoří lineárně závislý systém pokud jeden z nich je násobkem druhého. Pro více vektorů však lineární závislost není tak snadno vidět. Jak prakticky zjistit, zda dané aritmetické vektory, např. $(1, 3, 2)^T$, $(2, 5, 3)^T$, $(2, 3, 1)^T$, jsou lineárně závislé či nezávislé? Podle definice hledejme, kdy lineární kombinace vektorů dá nulový vektor:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Toto vyjádříme ekvivalentně jako soustavu rovnic s neznámými α, β, γ, kdy první rovnice odpovídá rovnosti vektorů v první složce, a podobně pro další dvě:

$$\begin{aligned} 1\alpha + 2\beta + 2\gamma &= 0, \\ 3\alpha + 5\beta + 3\gamma &= 0, \\ 2\alpha + 3\beta + 1\gamma &= 0. \end{aligned}$$

[1] Specifikace rozhraní pro základní maticové operace jsou dané v knihovně BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms). Konkrétních implementací je pak celá řada a používají vnitřně různé algoritmy mj. v závislosti na cílové architektuře.

Soustavu vyřešíme upravením matice soustavy na odstupňovaný tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení a určitě najdeme nějaké nenulové, např. $\alpha = 4$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$. To znamená, že dané vektory jsou lineárně závislé. (Ještě jiné postupy uvedeme později v sekci 5.6.) $\square$

Příklad 5.25. Definice lineární nezávislosti trochu připomíná definici regularity (definice 3.23). Není to náhoda, sloupce regulární matice (a potažmo i řádky) představují další příklad lineárně nezávislých vektorů. Podle definice je čtvercová matice A regulární, pokud rovnost $\sum_j A_{*j}x_j = o$ nastane pouze pro $x = o$, a toto přesně odpovídá lineární nezávislosti sloupců matice A. $\square$

Věta 5.26. *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$, a mějme $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $v_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$ pro nějaké $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T}$, to jest $v_k \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}$.*

Důkaz. Implikace „$\Rightarrow$“. Jsou-li vektory $v_1, \dots, v_n$ lineárně závislé, pak existuje jejich netriviální lineární kombinace rovna nule, tj. $\sum_{i=1}^n \beta_i v_i = o$ pro $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{T}$ a $\beta_k \neq 0$ pro nějaké $k \in \{1, \dots, n\}$. Zde můžeme zvolit libovolné k takové, že $\beta_k \neq 0$. Vyjádříme k-tý člen $\beta_k v_k = -\sum_{i \neq k} \beta_i v_i$ a po zkrácení dostáváme požadovaný předpis $v_k = \sum_{i \neq k} (-\beta_k^{-1} \beta_i) v_i$.

Implikace „$\Leftarrow$“. Je-li $v_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$, pak $v_k - \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i = o$, což je požadovaná netriviální kombinace rovna nule, neboť koeficient u v_k je $1 \neq 0$. $\square$

Důsledkem je ještě jiná charakterizace lineární závislosti. Ta mj. říká, že vektory jsou lineárně závislé právě tehdy, když odebráním nějakého (ale ne libovolného, viz příklad 5.28) z nich se jejich lineární obal nezmenší. Tudíž mezi nimi je nějaký nadbytečný. U lineárně nezávislého systému je tomu naopak: Odebráním libovolného z nich se jejich lineární obal ostře zmenší, není mezi nimi tedy žádný nadbytečný.

Důsledek 5.27. *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$, a mějme $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ takové, že*

$$\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}. \tag{5.2}$$

Důkaz. Implikace „$\Rightarrow$“. Jsou-li vektory $v_1, \dots, v_n$ lineárně závislé, pak podle věty 5.26 existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $v_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$ pro nějaké $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T}$. Inkluze $\supseteq$ v (5.2) je splněna triviálně, zaměříme se na tu opačnou. Libovolný vektor $u \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ se dá vyjádřit

$$u = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = \beta_k v_k + \sum_{i \neq k} \beta_i v_i = \beta_k \left(\sum_{i \neq k} \alpha_i v_i \right) + \sum_{i \neq k} \beta_i v_i = \sum_{i \neq k} (\beta_k \alpha_i + \beta_i) v_i.$$

Tedy $u \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ a máme dokázanou inkluzi „$\subseteq$“ v (5.2)

Implikace „$\Leftarrow$“. Pokud platí rovnost (5.2), tak

$$v_k \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

a podle věty 5.26 jsou vektory $v_1, \dots, v_n$ lineárně závislé. $\square$

Příklad 5.28. Vektory $(2,3)^T, (2,1)^T, (4,2)^T \in \mathbb{R}^2$ jsou lineárně závislé, tudíž jejich lineární obal lze vygenerovat i z vlastní podmnožiny těchto vektorů. Můžeme odstranit například druhý, anebo třetí vektor (ale ne oba zároveň) a výsledné dva vektory pořád budou generovat stejný prostor $\mathbb{R}^2$. Nicméně, první vektor odebrat nelze, zbylé dva vektory už $\mathbb{R}^2$ nevygenerují! $\square$

5.4 Báze

Definice 5.29 (Báze)**.** Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Pak *bází* rozumíme jakýkoli lineárně nezávislý systém generátorů V.

V definici pod pojmem systém rozumíme uspořádanou množinu, časem uvidíme, proč je uspořádání důležité (pro souřadnice atp.). Nicméně pro jednoduchost značení budeme bázi, skládající se z konečně mnoha vektorů $v_1, \ldots, v_n$, značit $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Báze je tedy podle definice takový systém generátorů prostoru V, který je minimální ve smyslu inkluze. Každý z generátorů má svůj smysl, nemůžeme žádný vynechat, jinak bychom nevygenerovali celý prostor V.

Příklad 5.30. Příklady bází:

- V $\mathbb{R}^2$ máme bázi např. $e_1 = (1,0)^T$, $e_2 = (0,1)^T$. Jiná báze je $(7,5)^T$, $(2,3)^T$.
- V $\mathbb{R}^n$ máme např. bázi $e_1, \ldots, e_n$, říká se jí *kanonická* a značí se kan.
- V $\mathcal{P}^n$ je bází např. $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Je to na první pohled nejjednodušší báze, nikoliv však jediná možná. Užitečná je i Bernsteinova báze skládající se z vektorů $\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$, používá se pro různé aproximace, např. ve výpočetní geometrii pro aproximaci křivek procházejících nebo kontrolovaných danými body (tzv. Bézierovy křivky, používají se třeba v typografických fontech). $\square$
- V $\mathcal{P}$ je bází např. nekonečný ale spočetný systém polynomů $1, x, x^2, \ldots$
- V prostoru $\mathcal{C}_{[a,b]}$ také existuje báze, ale není jednoduché žádnou explicitně vyjádřit.

Věta 5.31. *Nechť $v_1, \ldots, v_n$ je báze prostoru V. Pak pro každý vektor $u \in V$ existují jednoznačně určené koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T}$ takové, že $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$.*

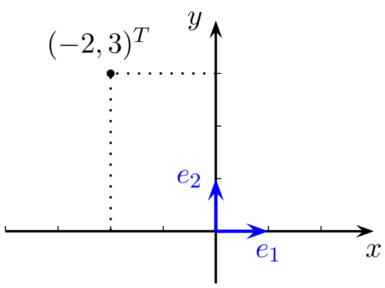
Důkaz. Vektory $v_1, \ldots, v_n$ tvoří bázi V, tedy každé $u \in V$ se dá vyjádřit jako $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ pro vhodné skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T}$. Jednoznačnost ukážeme sporem. Nechť existuje i jiné vyjádření $u = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$. Potom $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = u - u = o$, neboli $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) v_i = o$. Protože $v_1, \ldots, v_n$ jsou lineárně nezávislé, musí $\alpha_i = \beta_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. To je spor s tím, že vyjádření jsou různá. $\square$

Díky zmíněné jednoznačnosti můžeme zavést pojem souřadnice.

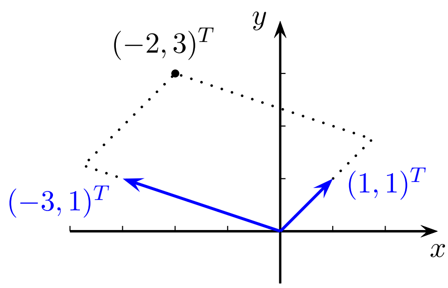
Definice 5.32 (Souřadnice)**.** Nechť $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je báze prostoru V a nechť vektor $u \in V$ má vyjádření $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Pak *souřadnicemi* vektoru $u \in V$ vzhledem k bázi B rozumíme koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ a vektor souřadnic značíme $[u]_B \coloneqq (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$.

Pojem souřadnic je důležitější, než se na první pohled zdá. Umožňuje totiž reprezentovat těžko uchopitelné vektory a (konečně generované) prostory pomocí souřadnic, tedy aritmetických vektorů. Každý vektor má určité souřadnice a naopak každá n-tice skalárů dává souřadnici nějakého vektoru. Existuje tedy vzájemně jednoznačný vztah mezi vektory a souřadnicemi, který později (sekce 6.3) využijeme k tomu, abychom řadu, např. početních, problémů z prostoru V převedli do aritmetického prostoru, kde se pracuje snadněji.

Příklad 5.33. Souřadnice vektoru vzhledem k bázi v prostoru $\mathbb{R}^2$.



Souřadnice vektoru $(-2,3)^T$ vzhledem ke kanonické bázi: $[(-2,3)^T]_{\text{kan}} = (-2,3)^T$.



Souřadnice vektoru $(-2,3)^T$ vzhledem k bázi $B = \{(-3,1^T),(1,1)^T\}$: $[(-2,3^T)]_B = (\frac{5}{4},\frac{7}{4})^T$.

□

Příklad 5.34. Pro každé $v \in \mathbb{R}^n$ je $[v]_{\mathrm{kan}} = v$. □

Příklad 5.35. Uvažujme bázi $B = \{1, x, x^2\}$ prostoru $\mathcal{P}^2$. Pak $[3x^2 - 5]_B = (-5, 0, 3)^T$. □

Příklad 5.36. Nahlédněte, že pro bázi B prostoru V nad $\mathbb{T}$, vektory $u, v \in V$ a skalár $\alpha \in \mathbb{T}$ platí

$$[u + v]_B = [u]_B + [v]_B,$$
$$[\alpha v]_B = \alpha [v]_B.$$

Později v kapitole 6 uvidíme, že díky této vlastnosti dokážeme efektivně vyjadřovat souřadnice. □

Příklad 5.37. Nahlédněte následující pozorování pro vektorový prostor V:

- Je-li $v_1, \ldots, v_n \in V$ systém generátorů V, pak každý vektor $u \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $v_1, \ldots, v_n$ alespoň jedním způsobem.
- Jsou-li $v_1, \ldots, v_n \in V$ lineárně nezávislé, pak každý vektor $u \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $v_1, \ldots, v_n$ nejvýše jedním způsobem.
- Je-li $v_1, \ldots, v_n \in V$ báze V, pak každý vektor $u \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $v_1, \ldots, v_n$ právě jedním způsobem. □

Věta 5.38 (O existenci báze)**.** *Každý vektorový prostor má bázi.*

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro konečně generovaný prostor V. Pro ty ostatní je důkaz složitější a je potřeba určité poznatky z teorie množin (tzv. Zornovo lemma).

Buď $v_1, \ldots, v_n$ systém generátorů V. Jsou-li lineárně nezávislé, tak už tvoří bázi. Jinak podle důsledku 5.27 existuje index k tak, že

$$\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_n\} = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}.$$

Tedy odstraněním v_k bude systém vektorů stále generovat V. Je-li nyní systém vektorů lineárně nezávislý, tvoří bázi. Jinak postup opakujeme dokud nenajdeme bázi. Postup je konečný, protože máme konečnou množinu generátorů, tudíž bázi najít musíme. □

Nyní směřujeme k tomu, že pro daný konečně generovaný prostor jsou všechny jeho báze stejně velké, což povede k zavedení pojmu dimenze. K tomuto účelu nejprve ukážeme pomocné tvrzení, které říká, kdy mohu v systému generátorů vektorového prostoru vyměnit nějaký z generátorů za úplně jiný vektor.

Lemma 5.39 (O výměně)**.** *Buď $y_1, \ldots, y_n$ systém generátorů vektorového prostoru V a nechť vektor $x \in V$ má vyjádření $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$. Pak pro libovolné k takové, že $\alpha_k \neq 0$, je $y_1, \ldots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, \ldots, y_n$ systém generátorů prostoru V.*

Důkaz. Ze vztahu $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ vyjádříme y_k

$$y_k = \frac{1}{\alpha_k}\Big(x - \sum_{i \neq k} \alpha_i y_i\Big).$$

Chceme dokázat, že vektory $y_1, \ldots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, \ldots, y_n$ generují prostor V. Vezměme libovolný vektor $z \in V$. Pro vhodné koeficienty β_i můžeme vektor z vyjádřit jako

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^n \beta_i y_i = \beta_k y_k + \sum_{i \neq k} \beta_i y_i = \frac{\beta_k}{\alpha_k}\Big(x - \sum_{i \neq k} \alpha_i y_i\Big) + \sum_{i \neq k} \beta_i y_i = \\ &= \frac{\beta_k}{\alpha_k} x + \sum_{i \neq k} \Big(\beta_i - \frac{\beta_k}{\alpha_k}\alpha_i\Big) y_i. \end{aligned}$$

□

Věta 5.40 (Steinitzova věta o výměně[2])**.** *Buď V vektorový prostor, buď $x_1, \ldots, x_m$ lineárně nezávislý systém ve V, a nechť $y_1, \ldots, y_n$ je systém generátorů V. Pak platí*

[2] V angličtině *replacement theorem*, autorem je matematik Ernst Steinitz (1871–1928) z dříve německého, dnes polského Slezska.

(1) $m \leq n$,

(2) *existují navzájem různé indexy* $k_1, \ldots, k_{n-m}$ *takové, že* $x_1, \ldots, x_m, y_{k_1}, \ldots, y_{k_{n-m}}$ *tvoří systém generátorů* V.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle m. Je-li $m = 0$, pak tvrzení platí triviálně. Přejděme k indukčnímu kroku. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $m - 1$ a ukážeme, že platí i pro m.

Uvažujme vektory $x_1, \ldots, x_{m-1}$. Ty jsou lineárně nezávislé, a podle indukčního předpokladu je $m-1 \leq n$ a existují navzájem různé indexy $\ell_1, \ldots, \ell_{n-m+1}$ takové, že $x_1, \ldots, x_{m-1}, y_{\ell_1}, \ldots, y_{\ell_{n-m+1}}$ generují V. Kdyby $m - 1 = n$, pak vektory $x_1, \ldots, x_{m-1}$ jsou generátory prostoru V, a dostáváme $x_m \in V = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{m-1}\}$, což je spor s lineární nezávislostí $x_1, \ldots, x_m$. Tudíž jsme dokázali první tvrzení $m \leq n$.

Pro důkaz druhé části uvažujme lineární kombinaci $x_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{n-m+1} \beta_j y_{\ell_j}$, což si můžeme dovolit díky tomu, že vektory v sumě generují V. Kdyby $\beta_1 = \ldots = \beta_{n-m+1} = 0$, pak dostáváme spor s lineární nezávislostí $x_1, \ldots, x_m$. Proto existuje k takové, že $\beta_k \neq 0$. Podle lemmatu 5.39 lze vyměnit y_{ℓ_k} za x_m a výsledné vektory $x_1, \ldots, x_m$, $y_{\ell_1}, \ldots, y_{\ell_{k-1}}$, $y_{\ell_{k+1}}, \ldots, y_{\ell_{n-m+1}}$ budou opět generovat prostor V. □

Důsledek 5.41. *Všechny báze konečně generovaného vektorového prostoru* V *jsou stejně velké.*

Důkaz. Buďte $x_1, \ldots, x_m$ a $y_1, \ldots, y_n$ dvě báze prostoru V. Speciálně, $x_1, \ldots, x_m$ jsou lineárně nezávislé a $y_1, \ldots, y_n$ jsou generátory V, tedy $m \leq n$. Analogicky naopak, $y_1, \ldots, y_n$ jsou lineárně nezávislé a $x_1, \ldots, x_m$ generují V, tedy $n \leq m$. Dohromady dostáváme $m = n$. □

Tvrzení se dá zobecnit na prostory, které nejsou konečně generované, s tím, že všechny báze mají stejnou mohutnost.

5.5 Dimenze

Každý konečně generovaný prostor má bázi (věta 5.38) a všechny báze jsou stejně velké (důsledek 5.41), což ospravedlňuje zavedení dimenze prostoru jako velikosti (libovolné) báze.

Definice 5.42 (Dimenze)**.** *Dimenze* konečně generovaného vektorového prostoru je velikost nějaké jeho báze. Dimenze prostoru, který není konečně generovaný, je ∞. Dimenzi prostoru V značíme $\dim V$.

Příklad 5.43. Příklady dimenzí:

- $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$, $\dim \{o\} = 0$, $\dim \mathcal{P}^n = n + 1$,
- reálné prostory $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$, a prostor $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ nejsou konečně generované, mají dimenzi ∞ (viz problém 5.1). □

Nadále budeme uvažovat pouze konečně generované vektorové prostory.

Věta 5.44 (Vztah počtu prvků systému k dimenzi)**.** *Pro vektorový prostor* V *platí*

(1) *Nechť* $x_1, \ldots, x_m$ *jsou lineárně nezávislé. Pak* $m \leq \dim V$. *Pokud* $m = \dim V$, *potom* $x_1, \ldots, x_m$ *je báze.*

(2) *Nechť* $y_1, \ldots, y_n$ *jsou generátory* V. *Pak* $n \geq \dim V$. *Pokud* $n = \dim V$, *potom* $y_1, \ldots, y_n$ *je báze.*

Důkaz. Označme $d = \dim V$ a nechť $z_1, \ldots, z_d$ je báze V.

(1) Protože $x_1, \ldots, x_m$ jsou lineárně nezávislé, podle Steinitzovy věty 5.40 je $m \leq d$. Pokud $m = d$, pak podle stejné věty lze systém $x_1, \ldots, x_m$ doplnit o $d - m = 0$ vektorů na systém generátorů prostoru V. Tedy jsou to nutně i generátory a tím i báze.

(2) Protože $y_1, \ldots, y_n$ jsou generátory V, podle Steinitzovy věty 5.40 je $n \geq d$. Nechť $n = d$. Jsou-li $y_1, \ldots, y_n$ lineárně nezávislé, pak tvoří bázi. Pokud jsou lineárně závislé, pak lze jeden vynechat a získat systém generátorů o velikosti $n - 1$ (důsledek 5.27). Podle Steinitzovy věty by pak ale platilo $d \leq n - 1$, což vede ke sporu. □

První část věty 5.44 mj. říká, že na bázi se dá nahlížet jako na maximální lineárně nezávislý systém. Druhá část věty pak říká, že báze je minimální systém generátorů (co do inkluze i co do počtu).

Věta 5.45 (Rozšíření lineárně nezávislého systému na bázi)**.** *Každý lineárně nezávislý systém vektorového prostoru V lze rozšířit na bázi V.*

Důkaz. Nechť $x_1, \dots, x_m$ jsou lineárně nezávislé a $z_1, \dots, z_d$ je báze prostoru V. Podle Steinitzovy věty 5.40 existují indexy $k_1, \dots, k_{d-m}$ takové, že $x_1, \dots, x_m, z_{k_1}, \dots, z_{k_{d-m}}$ jsou generátory V. Jejich počet je d, tedy podle věty 5.44 je to báze V. □

Věta 5.46 (Dimenze podprostoru)**.** *Je-li W podprostorem prostoru V, pak* $\dim W \leq \dim V$. *Pokud navíc* $\dim W = \dim V$*, tak $W = V$.*

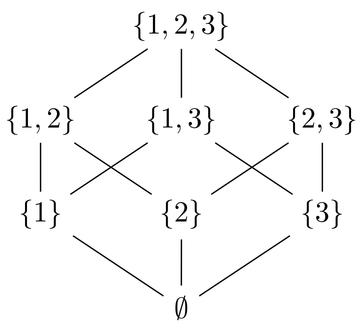
Důkaz. Definujme množinu $M \coloneqq \emptyset$. Pokud $\mathrm{span}(M) = W$, jsme hotovi. V opačném případě existuje vektor $v \in W \setminus \mathrm{span}(M)$. Přidáme vektor v do množiny M a celý postup opakujeme. Protože M je lineárně nezávislá množina vektorů, podle věty 5.44 je velikost M shora omezena dimenzí prostoru V. Proces je tedy konečný. Protože $\mathrm{span}(M) = W$, množina M tvoří bázi prostoru M, a proto $\dim W \leq \dim V$.

Pokud $\dim W = \dim V$, tak množina M musí podle věty 5.44 tvořit bázi V, a proto $W = V$. □

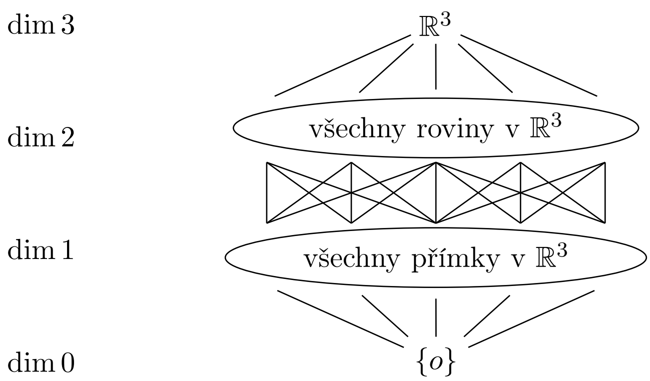
Příklad 5.47. Najděme všechny podprostory prostoru $\mathbb{R}^2$:

- dimenze 2: to je pouze $\mathbb{R}^2$ (z věty 5.46),
- dimenze 1: ty jsou generovány jedním vektorem, tedy jsou to všechny přímky procházející počátkem,
- dimenze 0: to je pouze $\{o\}$. □

Příklad 5.48 (Struktura podprostorů)**.** K tomu, abychom ilustrovali strukturu podprostorů, nejprve uvažujme všechny podmnožiny množiny $\{1, \dots, n\}$ a relaci „býti podmnožinou“, neboli inkluzi $\subseteq$. Některé podmnožiny jsou neporovnatelné co do inkluze a jiné zase jsou. Inkluze je tedy částečné uspořádání a můžeme ji znázornit tzv. *Hasseovým diagramem*, kde spojnice značí „sousední“ podmnožiny v inkluzi:



Podobným způsobem můžeme znázornit i strukturu podprostorů prostoru V dimenze n, protože relace „býti podprostorem“ je také částečné uspořádání. Diagram bude mít $n+1$ hladin, přičemž na i-té hladině budou podprostory dimenze i. Ty jsou mezi sebou neporovnatelné ve smyslu inkluze či ve smyslu „býti podprostorem“, nicméně některé vektory mohou sdílet. Mezi jednotlivými hladinami pak opět vede spojnice mezi podprostory, z nichž jeden je podprostorem druhého. Následující obrázek ilustruje strukturu podprostorů prostoru $\mathbb{R}^3$; narozdíl od předchozího případu se v prostředních hladinách vyskytuje nekonečně mnoho objektů.



□

Víme, že sjednocení podprostorů obecně podprostor netvoří. Nicméně můžeme sestrojit lineární obal sjednocení, tomu se říká spojení podprostorů a má následující ekvivalentní předpis.

Definice 5.49 (Spojení podprostorů)**.** Buďte U, V podprostory vektorového prostoru W. Pak *spojení podprostorů* U, V je definováno jako $U + V := \{u + v;\ u \in U, v \in V\}$.

Věta 5.50 (Spojení podprostorů)**.** *Buďte U, V podprostory vektorového prostoru W. Pak*

$$U + V = \operatorname{span}(U \cup V).$$

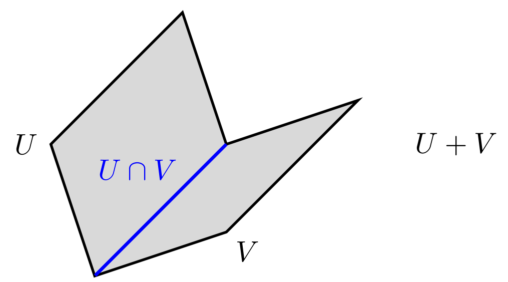
Důkaz. Inkluze „$\subseteq$“: je triviální, neboť prostor $\operatorname{span}(U \cup V)$ je uzavřený na součty.

Inkluze „$\supseteq$“: Stačí ukázat, že $U + V$ obsahuje prostory U, V a že je podprostorem W. První část je zřejmá, pro druhou uvažujme $x_1, x_2 \in U + V$. Vektory se dají vyjádřit jako $x_1 = u_1 + v_1$, $u_1 \in U$, $v_1 \in V$, a $x_2 = u_2 + v_2$, $u_2 \in U$, $v_2 \in V$. Potom $x_1 + x_2 = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \in U + V$, což dokazuje uzavřenost na sčítání. Pro uzavřenost na násobky uvažujme $x = u + v \in U + V$, $u \in U$, $v \in V$ a skalár α. Pak $\alpha x = \alpha(u + v) = (\alpha u) + (\alpha v) \in U + V$. □

Příklad 5.51.

- $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}\{e_1\} + \operatorname{span}\{e_2\}$,
- $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}\{e_1\} + \operatorname{span}\{e_2\} + \operatorname{span}\{e_3\}$,
- $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}\{e_1, e_2\} + \operatorname{span}\{e_3\}$,
- $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}\{(1,2)^T\} + \operatorname{span}\{(3,4)^T\}$,
- ale i $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}\{(1,2)^T\} + \operatorname{span}\{(3,4)^T\} + \operatorname{span}\{(5,6)^T\}$. □

Pro dimenzi podprostorů a jejich spojení a průniku platí podobný vztah jako známý vztah pro velikost konečných množin a jejich sjednocení a průniku (princip inkluze a exkluze).



Věta 5.52 (Dimenze spojení a průniku)**.** *Buďte U, V podprostory vektorového prostoru W. Pak platí*

$$\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V. \tag{5.3}$$

Důkaz. $U \cap V$ je podprostor prostoru W, tedy má konečnou bázi $z_1, \ldots, z_p$. Podle věty 5.45 ji můžeme rozšířit na bázi U tvaru $z_1, \ldots, z_p, x_1, \ldots, x_m$. Podobně ji můžeme rozšířit na bázi V tvaru $z_1, \ldots, z_p, y_1, \ldots, y_n$. Stačí, když ukážeme, že vektory $z_1, \ldots, z_p$, $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n$ dohromady tvoří bázi $U + V$, a rovnost (5.3) už bude platit. Nejprve ukážeme, že to jsou generátory, a pak, že jsou lineárně nezávislé.

„Generujícnost.“ Buď $z \in U + V$, pak $z = u + v$, kde $u \in U, v \in V$. Vektor u lze vyjádřit $u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j$ a podobně $v = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i z_i + \sum_{k=1}^{n} \delta_k y_k$. Potom $z = u + v = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + \gamma_i) z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \delta_k y_k$, tedy z je lineární kombinací našich vektorů.

„Lineární nezávislost.“ Buď $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k = o$, chceme ukázat, že všechny koeficienty musí být nulové. Označme $z := \sum_{i=1}^{p} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j = -\sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k$. Zřejmě $z \in U \cap V$, tedy lze vyjádřit $z = \sum_{i=1}^{p} \delta_i z_i$. Tím dostáváme $z = \sum_{i=1}^{p} \delta_i z_i = -\sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k$, neboli $\sum_{i=1}^{p} \delta_i z_i + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k = o$. Jediná lineární kombinace lineárně nezávislých vektorů, která dá nulový vektor, je triviální, proto $\delta_i = 0$ pro všechna i a $\gamma_k = 0$ pro všechna k. Dosazením do původní rovnosti dostaneme $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j = o$, a tudíž z lineární nezávislosti máme $\alpha_i = 0$ pro všechna i a $\beta_j = 0$ pro všechna j. □

Příklad 5.53. Uvažujme následující podprostory prostoru $\mathbb{R}^4$

$$U = \operatorname{span}\{(1,0,1,0)^T,\ (1,2,3,4)^T\},$$
$$V = \operatorname{span}\{(2,2,1,1,)^T,\ (3,2,1,0)^T\}.$$

Jaká je dimenze jejich průniku? Výsledek spočítáme snadno podle vzorečku (5.3). Protože generátory podprostoru U i podprostoru V jsou zřejmě lineárně nezávislé, tak $\dim U = \dim V = 2$. Dimenzi spojení $U + V$ spočítáme jako dimenzi prostoru generovaného generátory U i V dohromady, tedy jako hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem určíme, že hodnost je 3, tudíž dimenze průniku podprostorů je $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 2 + 2 - 3 = 1$. $\square$

Poznámka 5.54 (Direktní součet podprostorů)**.** Je-li $U \cap V = \{o\}$, pak spojení podprostorů $W = U + V$ se nazývá *direktní součet* podprostorů U, V a značí se $W = U \oplus V$. Podle věty 5.52 je $\dim(U \oplus V) = \dim U + \dim V$. Podmínka $U \cap V = \{o\}$ pak navíc způsobí, že každý vektor $w \in W$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru $w = u + v$, kde $u \in U$ a $v \in V$. Nyní jsou např. $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}\{e_1\} \oplus \operatorname{span}\{e_2\}$, $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}\{(1,2)^T\} \oplus \operatorname{span}\{(3,4)^T\}$ nebo $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}\{e_1\} \oplus \operatorname{span}\{e_2\} \oplus \operatorname{span}\{e_3\}$ direktními součty, ale $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}\{(1,2)^T\} \oplus \operatorname{span}\{(3,4)^T\} \oplus \operatorname{span}\{(5,6)^T\}$ není.

5.6 Maticové prostory

Nyní se vrátíme zpátky k tématu teorie matic, které jsme zdánlivě opustili, a skloubíme ji s vektorovými prostory. Oba obory se vzájemně obohatí: Vektorově prostorový pohled nám umožní jednoduše odvodit další vlastnosti matic, a naopak, postupy z maticové teorie nám poskytnou nástroje na testování lineární nezávislosti, určování dimenze atp.

Definice 5.55 (Maticové prostory)**.** Buď $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$. Pak definujeme

(1) sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) \coloneqq \operatorname{span}\{A_{*1}, \ldots, A_{*n}\}$,

(2) řádkový prostor $\mathcal{R}(A) \coloneqq \mathcal{S}(A^T)$,

(3) jádro $\operatorname{Ker}(A) \coloneqq \{x \in \mathbb{T}^n;\ Ax = o\}$.

Sloupcový prostor je tedy prostor generovaný sloupci matice A, a je to podprostor $\mathbb{T}^m$. Podobně, řádkový prostor je prostor generovaný řádky matice A, a je to podprostor $\mathbb{T}^n$. Jádro pak je tvořeno všemi řešeními soustavy $Ax = o$ a ponecháváme na rozmyšlení, že je také jedná o podprostor $\mathbb{T}^n$.

Příklad 5.56. Uvažme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak její sloupcový prostor je $\mathcal{S}(A) = \mathbb{T}^2$ a její řádkový prostor je $\mathcal{S}(A) = \operatorname{span}\{(1,1,1)^T, (0,1,0)^T\}$. Jádro matice A určíme vyřešením soustavy $Ax = o$. Matice A již je v odstupňovaném tvaru, proto pomocí volné proměnné x_3 popíšeme množinu řešení jako $\{(x_3, 0, x_3)^T;\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. Jádro má tedy tvar $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{span}\{(1,0,-1)^T\}$. $\square$

Díky větě 5.15 můžeme maticové prostory ekvivalentně charakterizovat pomocí lineárních kombinací, což vede na následující tvrzení.

Tvrzení 5.57. *Buď $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$. Pak*

(1) $\mathcal{S}(A) = \{Ax;\ x \in \mathbb{T}^n\}$,

(2) $\mathcal{R}(A) = \{A^T y;\ y \in \mathbb{T}^m\}$.

Důkaz. Zřejmý z toho, že $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{*j}$ představuje lineární kombinaci sloupců matice A. V druhé části analogicky $A^T y$ představuje lineární kombinaci řádků matice A. $\square$

Je užitečné si uvědomit, že maticově můžeme reprezentovat libovolný podprostor V prostoru $\mathbb{T}^n$. Stačí vzít nějaké jeho generátory $v_1, \ldots, v_m$ a sestavit matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$, jejíž řádky tvoří právě vektory $v_1, \ldots, v_m$. Pak $V = \mathcal{R}(A)$. Podobně V můžeme vyjádřit jako sloupcový prostor vhodné matice z $\mathbb{T}^{n\times m}$, a dokonce i jako jádro vhodné matice z $\mathbb{T}^{m\times n}$ (to již není zřejmé). Pokud tedy dokážeme dobře manipulovat s maticovými prostory, umožní nám to zacházet i s podprostory $\mathbb{T}^n$. Jak ukážeme později v sekci 6.3, můžeme takto pracovat s libovolnými konečně generovanými prostory.

Poznámka 5.58 (Geometrický pohled na maticové prostory)**.** Uvažujme zobrazení $x \mapsto Ax$ s maticí $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$. Jádro matice A je tedy tvořeno všemi vektory z $\mathbb{T}^n$, které se zobrazí na nulový vektor. Sloupcový prostor matice A pak zase představuje množinu všech obrazů, neboli obraz prostoru $\mathbb{T}^n$ při tomto zobrazení. Jak později ukážeme, tyto prostory hrají klíčovou roli pro analýzu geometrické struktury tohoto zobrazení.

Podívejme se, jak se mění maticové prostory, když matici násobíme zleva nějakou jinou maticí (to vlastně dělá Gaussova eliminace).

Tvrzení 5.59 (Prostory a násobení maticí zleva)**.** *Buď $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$, $Q \in \mathbb{T}^{p\times m}$. Pak*

(1) $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem $\mathcal{R}(A)$,

(2) Pokud $A_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaké $k \in \{1, \ldots, n\}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$, $j \neq k$, pak $(QA)_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

Důkaz.

(1) Stačí ukázat $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Buď $x \in \mathcal{R}(QA)$, pak existuje $y \in \mathbb{T}^p$ takové, že $x = (QA)^T y = A^T Q^T y = A^T(Q^T y) \in \mathcal{R}(A)$.

(2) $(QA)_{*k} = QA_{*k} = Q(\sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}) = \sum_{j\neq k} \alpha_j Q A_{*j} = \sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$, kde jsme využili tvrzení 3.16(3). $\square$

Věta říká, že řádkové prostory jsou porovnatelné přímo – po pronásobení libovolnou maticí zleva dostaneme podprostor. To se snadno nahlédne i z toho, že každý řádek matice QA je vlastně lineární kombinací řádků matice A (viz poznámka 5.19), a vybranými lineárními kombinacemi lze vygenerovat pouze podprostor. Konkrétně, i-tý řádek matice QA má vyjádření $(QA)_{i*} = \sum_{j=1}^{m} q_{ij} A_{j*}$, schematicky

$$
\begin{array}{c|c} & A \\ \hline Q & QA \end{array}
\qquad \text{odpovídá} \qquad
\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} \text{---} & A_{1*} & \text{---} \\ \text{---} & A_{2*} & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & A_{m*} & \text{---} \end{pmatrix} \\ \hline
\begin{pmatrix} \cdots & & & \cdots \\ q_{i1} & q_{i2} & \ldots & q_{im} \\ \cdots & & & \cdots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \text{---} & \sum_{j=1}^{m} q_{ij} A_{j*} & \text{---} \\ & \cdots & \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Sloupcové prostory z principu porovnávat nelze, protože jsou to podprostory různých prostorů ($\mathbb{T}^m$ a $\mathbb{T}^p$). Nicméně, jak říká bod (2) tvrzení 5.59, mezi sloupci se zachovává jakási lineárně závislostní vazba: Je-li i-tý sloupec matice A závislý na ostatních, potom i-tý sloupec matice QA je závislý na ostatních se stejnou lineární kombinací (pozor, lineární nezávislost se nemusí zachovávat). Tuto vlastnost můžeme nahlédnout i geometricky. Uvažujme lineární zobrazení $x \mapsto Qx$. Pak sloupce matice A se zobrazí na sloupce matice QA, neboť podle (3.1) je

$$
QA = \begin{pmatrix} | & & | \\ QA_{*1} & \ldots & QA_{*n} \\ | & & | \end{pmatrix}.
$$

Tudíž stejná geometrická transformace $x \mapsto Qx$ se aplikuje na všechny sloupce matice A, a proto závislosti mezi sloupci zůstanou zachovány i pro výslednou matici QA.

Jestliže násobíme zleva regulární maticí, což je typický případ, tak můžeme odvodit silnější tvrzení.

Tvrzení 5.60 (Prostory a násobení regulární maticí zleva). *Buď $Q \in \mathbb{T}^{m\times m}$ regulární a $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$. Pak*

(1) $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$,

(2) Rovnost $A_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}$ platí právě tehdy, když $(QA)_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$, kde $k \in \{1,\dots,n\}$ a $\alpha_j \in \mathbb{T}$, $j \neq k$.

Důkaz.

(1) Podle tvrzení 5.59 je $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Aplikujeme-li tvrzení 5.59 na matici (QA) násobenou zleva Q^{-1}, tak dostaneme $\mathcal{R}(Q^{-1}QA) \subseteq \mathcal{R}(QA)$, tedy $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(QA)$. Dohromady máme $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$.

(2) Implikaci zleva doprava dostaneme z tvrzení 5.59. Obrácenou implikaci dostaneme z tvrzení 5.59 aplikované na matici (QA) násobenou zleva Q^{-1}. □

Důsledkem předchozí věty je, že pokud sloupce matice A jsou lineárně nezávislé, tak zůstanou i po vynásobení regulární maticí zleva.

Příklad 5.61. Jak se změní prostory $\mathcal{R}(A)$ a $\mathcal{S}(A)$ pokud matici A násobíme maticí Q zprava namísto zleva? A jak se změní jádro matice? Konkrétně, pro matice $A \in \mathbb{T}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{T}^{p\times n}$, jaký je vztah prostorů $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(AB)$ a $\mathrm{Ker}(B)$? □

Tvrzení 5.60 nám také usnadní dokázat nejdůležitější výsledek o maticových prostorech.

Věta 5.62 (Maticové prostory a RREF). *Buď $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a buď A^R její RREF tvar s pivoty na pozicích $(1,p_1),\dots,(r,p_r)$, kde $r = \mathrm{rank}(A)$. Pak*

(1) nenulové řádky A^R, tedy vektory $A^R_{1*},\dots,A^R_{r*}$, tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,

(2) sloupce $A_{*p_1},\dots,A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$,

(3) $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = r$.

Důkaz. Víme z věty 3.28, že $A^R = QA$ pro nějakou regulární matici Q.

(1) Podle tvrzení 5.60 je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A^R)$. Nenulové řádky A^R jsou lineárně nezávislé, tedy tvoří bázi $\mathcal{R}(A^R)$ i $\mathcal{R}(A)$.

(2) Nejprve ukážeme, že sloupce $A^R_{*p_1},\dots,A^R_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A^R)$. Tyto vektory jsou jistě lineárně nezávislé (jsou to jednotkové vektory). Generují $\mathcal{S}(A^R)$, neboť libovolný nebázický sloupec se dá vyjádřit jako lineární kombinace těch bázických:

$$A^R_{*j} = \sum_{i=1}^{m} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} A^R_{*p_i}.$$

Nyní použijeme tvrzení 5.60, která zaručí, že i $A_{*p_1},\dots,A_{*p_r}$ jsou lineárně nezávislé a generují ostatní sloupce, tedy tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$.

(3) Hodnota $\dim \mathcal{R}(A)$ je velikost báze $\mathcal{R}(A)$, tedy r, a podobně $\dim \mathcal{S}(A)$ je velikost báze $\mathcal{S}(A)$, také r. Navíc $r = \mathrm{rank}(A)$. □

Třetí vlastnost věty 5.62 dává důležitý a netriviální důsledek pro hodnost matice a její transpozice, neboť

$$\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \dim \mathcal{R}(A^T) = \mathrm{rank}(A^T).$$

Dostáváme tedy následující větu.

Věta 5.63. *Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí* $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T)$.

Tuto větu jsme nezmiňovali v kapitole 3, protože k jejímu dokázání potřebujeme netriviální poznatky z vektorových prostorů. A naopak, řadu charakteristik vektorových prostorů jako je určování dimenze, hledání báze atp. můžeme testovat pomocí známých postupů teorie matic. Spojují se tady dvě teorie a společně produkují zajímavé výsledky.

Věta 5.62 rovněž nabízí ekvivalentní charakterizaci hodnosti matice jako dimenzi řádkového nebo sloupcového prostoru. Tím potvrzuje korektnost definice hodnosti z definice 2.13, alternativně k větě 3.43 o jednoznačnosti RREF tvaru matice.

Věta 5.62 dále dává návod, jak zjistit určité charakteristiky prostorů pomocí RREF tvaru matice. Stačí dát aritmetické vektory do matice, převést do RREF tvaru a z něj pak vyčíst danou informaci. Jestliže vektory nejsou z aritmetického prostoru $\mathbb{T}^n$, pak je potřeba na to jít oklikou, pomocí tzv. isomorfismu (sekce 6.3).

Příklad 5.64. Uvažujme prostor

$$V = \operatorname{span}\{(1,2,3,4,5)^T,\ (1,1,1,1,1)^T,\ (1,3,5,7,9)^T,\ (2,1,1,0,0)^T\} \Subset \mathbb{R}^5.$$

Nejprve sestavme matici, jejíž sloupce jsou rovny daným generátorům V, tedy $V = \mathcal{S}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & 9 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{RREF}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z RREF tvaru vidíme, že $\dim(V) = 3$ a báze V je například $(1,2,3,4,5)^T$, $(1,1,1,1,1)^T$, $(2,1,1,0,0)^T$. Třetí z generátorů je závislý na ostatních, konkrétně je roven dvojnásobku prvního minus druhý (koeficienty vidíme ve třetím sloupci matice v RREF tvaru).

Nyní dejme generující vektory do řádků matice, tedy $V = \mathcal{R}(A)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{RREF}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opět z RREF tvaru vyčteme, že $\dim(V) = 3$, dostaneme ale jinou bázi: $(1,0,0,-1,-1)^T$, $(0,1,0,1,0)^T$, $(0,0,1,1,2)^T$. □

Poznámka 5.65. Uvažujme soustavu lineárních rovnic $Ax = b$. Řešitelnost soustavy vlastně znamená, že vektor pravých stran b se dá vyjádřit jako lineární kombinace sloupců matice A (srov. poznámka 5.18). Tudíž soustava je řešitelná právě tehdy, když $b \in \mathcal{S}(A)$, neboli $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(A \mid b)$. Věta 5.62 pak přímo dává znění Frobeniovy věty z poznámky 2.23.

Věta 5.66 (O dimenzi jádra a hodnosti matice)**.** *Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí*

$$\dim \operatorname{Ker}(A) + \operatorname{rank}(A) = n. \tag{5.4}$$

Důkaz. Buď $\dim \operatorname{Ker}(A) = k$. Nechť vektory $v_1, \ldots, v_k$ tvoří bázi $\operatorname{Ker}(A)$, což mj. znamená, že $Av_1 = \ldots = Av_k = o$. Rozšiřme vektory $v_1, \ldots, v_k$ na bázi celého prostoru $\mathbb{T}^n$ doplněním o vektory $v_{k+1}, \ldots, v_n$. Stačí ukázat, že vektory $Av_{k+1}, \ldots, Av_n$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$, protože pak $\operatorname{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = n - k$ a rovnost z věty je splněna.

„Generujícnost.“ Buď $y \in \mathcal{S}(A)$, pak $y = Ax$ pro nějaké $x \in \mathbb{T}^n$. Toto x lze vyjádřit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Dosazením

$$y = Ax = A\Bigg(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\Bigg) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A v_i = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i (Av_i).$$

„Lineární nezávislost.“ Buď $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i A v_i = o$. Pak platí $A\big(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i\big) = o$, čili $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i$ patří do jádra matice A. Proto $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^k \beta_i v_i$ pro nějaké skaláry $\beta_1, \ldots, \beta_k$. Přepsáním rovnice dostáváme $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^k (-\beta_i) v_i = o$ a vzhledem k lineární nezávislosti $v_1, \ldots, v_n$ je $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$. □

Poznámka 5.67 (Geometrický pohled na větu 5.66)**.** Uvažujme zobrazení $x \mapsto Ax$ s maticí $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$. Prostor $\mathbb{T}^n$ se zobrazí na prostor $\mathcal{S}(A)$, jehož dimenze je $r = \operatorname{rank}(A)$. Tudíž zobrazení zobrazuje n-dimenzionální prostor na r-dimenzionální prostor. Právě ten deficit $n - r \geq 0$ je podle vzorečku (5.4) roven dimenzi jádra matice A. Pro regulární matici je jádro triviální ($\operatorname{Ker}(A) = \{o\}$), a proto zobrazuje $\mathbb{T}^n$ na celé $\mathbb{T}^n$. Čím je však jádro větší, tím menší je obraz prostoru $\mathbb{T}^n$. Dimenze jádra tedy popisuje míru „degenerace“ zobrazení. Nicméně i jádro samotné popisuje způsob této degenerace, protože $\operatorname{Ker}(A)$ obsahuje právě ty vektory, které se zobrazí na o.

Příklad 5.68. Uvažujme matici a její RREF tvar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{RREF}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy $\dim \operatorname{Ker}(A) = 4 - 2 = 2$. Prostor $\operatorname{Ker}(A)$ představuje všechna řešení soustavy $Ax = o$ a ta jsou tvaru

$$(6x_3 + 4x_4, -4x_3 - 3x_4, x_3, x_4)^T,\ \ x_3, x_4 \in \mathbb{R},$$

neboli

$$x_3(6, -4, 1, 0)^T + x_4(4, -3, 0, 1)^T,\ \ x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Tudíž vektory $(6, -4, 1, 0)$, $(4, -3, 0, 1)$ tvoří bázi $\operatorname{Ker}(A)$. Vektory získané tímto postupem představují vždy bázi $\operatorname{Ker}(A)$, protože jsou to generátory jádra a je jich stejný počet jako je $\dim \operatorname{Ker}(A)$, tedy $n - \operatorname{rank}(A)$ (srov. věta 5.44). ☐

Další vlastnosti maticových prostorů ukážeme v důsledku 8.42.

5.7 Aplikace

Příklad 5.69 (Ještě ke kódování)**.** Navažme na příklad 4.40 o Hammingově kódu $(7, 4, 3)$. Ke kódování jsme používali generující matici H rozměru 7×4 jednoduše tak, že vstupní úsek a délky 4 se zakóduje na úsek $b := Ha$ délky 7. Všechny zakódované úseky tak představují sloupcový prostor matice H. Protože H má lineárně nezávislé sloupce, jedná se o podprostor dimenze 4 v prostoru $\mathbb{Z}_2^7$.

Detekce chyb přijatého úseku b probíhá pomocí detekční matice D rozměru 3×7. Pokud $Db = o$, nenastala chyba (nebo nastaly alespoň dvě). Po detekční matici tedy chceme, aby (pouze) vektory ze sloupcového prostoru matice H zobrazovala na nulový vektor. Tudíž musí $\mathcal{S}(H) = \operatorname{Ker}(D)$. Nyní již vidíme, proč má matice D dané rozměry – aby její jádro byl čtyř-dimenzionální podprostor, musí mít podle věty 5.66 hodnost 3, a proto 3 lineárně nezávislé řádky postačují.

Příklad 5.70 (Rozpoznávání obličejů [Turk and Pentland, 1991])**.** Detekce a rozpoznávání obličejů z digitálního obrazu je moderní úloha počítačové grafiky. Je to příliš složitá úloha, abychom mohli vysvětlit všechny detaily úspěšných algoritmů, ale zkusíme objasnit jejich podstatu z hlediska vektorových prostorů.

Digitální obraz reprezentujeme jako matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, kde a_{ij} udává barvu pixelu na pozici i, j. Množinu obrázků s obličeji si můžeme s jistou mírou zjednodušení představit jako podprostor prostoru všech obrázků $\mathbb{R}^{m\times n}$. Báze tohoto podprostoru jsou tzv. *eigenfaces*, čili určité základní typy nebo rysy obličejů, ze kterých skládáme ostatní obličeje.

Pokud chceme rozhodnout, zda obrázek odpovídá obličeji, tak spočítáme, zda odpovídající vektor leží v podprostoru obličejů nebo v jejich blízkosti. Podobně postupujeme, pokud chceme rozpoznat zda daný obrázek odpovídá nějakému známému obličeji: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$ zjistíme, který z vektorů odpovídajících známým tvářím je nejblíže vektoru našeho obrázku.

Několikrát jsme použili pojem „vzdálenost“ vektorů. Eukleidovskou vzdálenost čtenář patrně zná, podrobněji a obecněji však tento termín rozebíráme v kapitole 8. ☐

Příklad 5.71 (Lagrangeův interpolační polynom)**.** Vraťme se nyní k problému interpolace bodů polynomem. Mějme v rovině $n+1$ bodů $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ v rovině, kde $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$. Úkolem je najít polynom $p(x)$ procházející těmito body. V příkladu 3.53 jsme ukázali, jak najít interpolační polynom v základním tvaru $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ vyřešením soustavy rovnic s Vandermondovou maticí. Na tento problém můžeme nahlížet pohledem vektorových prostorů. Polynomy $1, x, x^2, \ldots, x^n$ tvoří standardní bázi vektorového prostoru $\mathcal{P}^n$, a naším cílem vlastně je najít souřadnice $a_0, a_1, \ldots, a_n$ hledaného polynomu $p(x)$ vzhledem k této bázi.

Nyní se nabízí otázka, jestli bychom nenašli polynom snadněji, kdybychom zvolili jinou bázi prostoru $\mathcal{P}^n$? Odpověď zní „ano“. Zvolíme následující bázi prostoru $\mathcal{P}^n$. Pro $i = 0, 1, \ldots, n$ definujeme polynom

$$p_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}(x - x_j).$$

Tento polynom má v bodě x_i hodnotu 1 a v ostatních bodech x_j, $j \neq i$, hodnotu 0. Je snadné nahlédnout, že tyto polynomy jsou lineárně nezávislé: žádný polynom $p_i(x)$ není lineární kombinací ostatních, protože ostatní polynomy mají v bodě x_i hodnotu 0. Tudíž polynomy $p_0(x), \ldots, p_n(x)$ tvoří bázi prostoru $\mathcal{P}^n$. Interpolační polynom $p(x)$ se tak dá jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace těchto polynomů a souřadnice tvoří právě funkční hodnoty $y_0, \ldots, y_n$. Tím dostáváme explicitní vyjádření interpolačního polynomu v tzv. Lagrangeově tvaru

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_j p_i(x).$$

Tento výsledek dává rovněž alternativní zdůvodnění, že interpolační polynom je určen jednoznačně. □

Problémy

5.1. Ukažte, že prostor reálných polynomů $\mathcal{P}$, prostor reálných funkcí $\mathcal{F}$ a prostor $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ nejsou konečně generované.

5.2. Dokažte, že hodnost matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ se dá ekvivalentně definovat jako:

(a) velikost největší regulární podmatice (podmatice vznikne odstraněním určitého počtu řádků a sloupců, klidně i nulového).

(b) nejmenší z rozměrů matic B, C ze všech možných rozkladů $A = BC$.

5.3. Pro matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ zdůvodněte následující odhady pro hodnost jejich součinu

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n \leq \operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}.$$

Shrnutí ke kapitole 5. Vektorové prostory

Vektorové prostory představují další abstraktní pojem. Vektory v prostoru umíme sčítat a každý jednotlivě násobit skalárem (nikoli mezi sebou!). Aplikací obou operací na n vektorů získáme lineární kombinaci těchto vektorů. Množina všech lineárních kombinací zadaných vektorů vytvoří vektorový podprostor. Pokud stejný podprostor nevygeneruje žádná ostře menší podmnožina vektorů, jsou tyto vektory lineárně nezávislé, jinak jsou lineárně závislé. Alternativně, vektory jsou závislé pokud mezi nimi je aspoň jeden, který je lineární kombinací ostatních. Lineárně nezávislé generátory prostoru se nazývají báze tohoto prostoru. Každý prostor má nějakou bázi a pokud jich je více, tak mají všechny stejnou velikost (Steinitzova větě o výměně). To nás opravňuje zavést dimenzi prostoru jako počet vektorů v bázi. Báze prostoru pak představuje jakýsi souřadný systém v tomto prostoru, protože každý vektor prostoru se dá jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace bázických vektorů; příslušné koeficienty se nazývají souřadnice.

Prostory úzce souvisí s maticemi, a to dvojím způsobem. S každou maticí A je spjato několik vektorových prostorů: ten, generovaný sloupci, ten, generovaný řádky, a pak jádro, čili prostor řešení soustavy $Ax = o$. Tím, že jsme prozkoumali, jak elementární aj. maticové úpravy mění tyto prostory pak na druhou stranu dokážeme pomocí matic snadno řešit spoustu úloh: zjistit zda dané vektory jsou lineárně nezávislé, určit dimenzi prostoru, který generují, vybrat z nich vhodnou bázi, spočítat souřadnice vektoru v dané bázi atp.