Predmet: Kombinatorika a grafy 1
Ukol: 1.
Verze: 1.
Autor: David Napravnik

Prvni ukol

$(n!)^3$
$>$ po roznasobeni porovnavame jeden prvek z $(n!)^3$ s dvemi z $(2n)!$, takze dostaneme $n^3 > 2n * 2n - 1$ a to plati pro vsechny cleny vyjma $n = 1$, ale to je pouze konstanta, tak ji muzeme zanedbat
$(2n)!$
$>$ trivialne
$n!$
$> n! \geq (\frac{n}{e})^n > \log^n(n) \sim \frac{n}{e} > \log(n)$, pro $n > e$
$\log^n(n)$
$> \binom{2n}{n} < 2^{2n} = 4^n < \log^n(n)$
$\binom{2n}{n}$
$>$ trivialne
$\binom{2n}{n-1}$
$>$ podle $2^n < \frac{2^{2n}}{2n+1} \leq \binom{2n}{n}$
2^n
$>$ rovnost nastane pro $n = 4$ a $n = 16$ a pro $n > 16$ uz roste rychleji
$n^{\sqrt{n}}$
$> \sqrt{n} > \log(n)$
$n^{\log(n)}$
$> \log(n) > 15 \ldots$ pro hooodne velka n
n^{15}
$>$ pocitejme rozklad a pouze nejvyssi mocniny (zbytek prohlasme za konstanty) a mame $(\binom{2n}{10} \sim n^{10} < n^{15})$
$\binom{2n}{10}$
$> \binom{2n}{10} > n > \log(n^n)$
$\log(n^n)$

pouzite definice a vety:
$e(\frac{n}{e})^n \leq n! \leq en(\frac{n}{e})^n$
$\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq 2^n$

Druhy ukol

odpovida Katalanovu cislu, takze
$\#$ triangulaci konvexniho $(n+2)-$uhelniku je $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Treti ukol

1	−1	2	−2	3	−3	4	−4	...	$\sim$
1	0	2	0	3	0	4	0	...	$\frac{1}{(1-x^2)^2}$
0	−1	0	−2	0	−3	0	−4	...	$\frac{-x}{(1-x^2)^2}$

$\frac{1}{(1-x^2)^2} + \frac{-x}{(1-x^2)^2} = \underline{\underline{\frac{1-x}{(1-x^2)^2}}}$

nedokazu urcit posloupnost podle prvnich prvku, tak se budu ridit zadanym vzorem (stridani i a 2^i) viz prvni radek

1	2^1	2	2^2	3	2^3	4	2^4	... i 2^i	
1	2	2	4	3	8	4	16	...	$\sim$
1	·	2	·	3	·	4	·	...	$\frac{1}{(1-x^2)^2}$
·	2	·	4	·	8	·	16	...	$\frac{2x}{1-2x^2}$

$\underline{\underline{\frac{1}{(1-x^2)^2} + \frac{2x}{1-2x^2}}}$

Ctvrty ukol

Mejme $a_k = k * 2^k$ a $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$
Vytvorujici funkci ziskame z vytvorujici funkce posloupnosti (1,2...), kterou posuneme doprava dosazenim $2x$ a zdvojnasobenim hodnot vynasobenim cislem 2
$a(x) = \frac{2x}{(1-2x)^2}$
$s(x) = \frac{2x}{(1-2x)^2(1-x)}$
Abychom $s(x)$ dostali v lepsim tvaru pouzijeme rozklad na parcialni zlomky.
$s(x) = \frac{2x}{(1-2x)^2(1-x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{(2x-1)^2} = \frac{4}{2x-1} + \frac{2}{(2x-1)^2} - \frac{2}{x-1}$
pak prevedeme na sumy
$= 4\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}(2x)^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
$= \sum_{n=0}^{\infty}((n-1)2^{n+1} + 2)x^n$
Soucet rady je $\underline{\underline{(n-1)2^{n+1} + 2}}$