

Vety

Cauchy-Schwarzova nerovnost

Pro každé $x, y \in V$ platí $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Důkaz

Pro $y = 0$ triviálně, pro $y \neq 0$:

Uvažme reálnou funkci $f(t) = \langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \langle x, x \rangle + t\langle x, y \rangle + t\langle y, x \rangle + t^2\langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle$$

Ma kladný diskriminant

$$4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle\langle y, y \rangle \leq 0$$

$$\text{z toho dostáváme } \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle\langle y, y \rangle$$

Gram-Schmidtova ortogonalizace (alg. + důkaz správnost)

Bud $x_1, \dots, x_n \in V$ nezávislé

1. for $k = 1$ to n do
2. $y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j$ // kolmice
3. $z_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$ // normalizace
4. end for

Vystup: z_1, \dots, z_n ortonormalní báze prostoru $\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$

Důkaz

Matematickou indukci podle n

Pro $n = 1$ je $y_1 = x_1 \neq 0$ a $z_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ je dobře zdefinováno a $\text{span}\{x_1\} = \text{span}\{z_1\}$

indukční krok $n \leftarrow n - 1$

...

Ortogonální projekce

Bud V vektorový prostor a U jeho podprostor. Pak projekci vektoru $x \in V$ rozumíme takový vektor $x_U \in U$, který splňuje $\|x - x_U\| = \min_{y \in U} \|x - y\|$

Řádková linearita determinantu

Bud $A \in T^{n \times n}$ a $b \in T^n$

Pak pro libovolné $i = 1, \dots, n$ platí:

$$\det(A + e_i b^T) = \det(A) + \det(A + e_i(b^T - A_{i*}))$$

Determinant součinu matic / Multiplikativnost determinantu

Pro každé $A, B \in T^{n \times n}$ platí $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Laplaceův rozvoj podle řádku/sloupce

Bud $A \in T^{n \times n}$, $n \geq 2$

Pak pro každé $i = 1, \dots, n$ platí

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$$

kde A^{ij} je matice vzniklá z A vyškrtnutím i -tého řádku a j -tého sloupce

Vlastnosti vlastních čísel

Nechť $A \in C^{n \times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory x_1, \dots, x_n . Pak:

1. A je regulární právě tehdy, když 0 není její vlastní číslo
2. je-li A regulární, pak A^{-1} má vlastní čísla $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ a vlastní vektory x_1, \dots, x_n
3. A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory x_1, \dots, x_n

4. αA má vlastní číslo $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory x_1, \dots, x_n
5. $A + \alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$ a vlastní vektory x_1, \dots, x_n
6. A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné

Vlastní čísla podobných matic

Podobné matice mají stejná vlastní čísla

Diagonalizovatelnost a báze vlastních vektorů

Matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je diagonalizovatelná právě tehdy, když má n lineárně nezávislých vlastních vektorů

Vlastní čísla symetrických (Hermitovských) matic

Vlastní čísla reálných symetrických (resp. obecněji komplexních hermitovských) jsou reálná

Spektrální rozklad symetrických matic

Pro každou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existuje ortogonální $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a diagonální $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tak, že $A = QVQ^T$

Ekvivalentní charakteristiky pozitivně (semi-)definitních matic

Bud $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická.

Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. A je pozitivně (semi)definitní
2. vlastní čísla A jsou kladná (nezaporná)
3. existuje matice $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti n taková, že $A = U^T U$

Rekurentní test pozitivní definitnosti

Choleského rozklad

Sylvestrovo kritérium pos. definitnosti

Skalární součin a pos. definitnost

Sylvestrův zákon setrvačnosti