

# Definice

## 2.2 Matice

Rálná matice typu  $m \times n$  je obdélníkové schema (tabulka)

## 2.3 Vektor

Reálný  $n$ -rozměrný aritmetický sloupcový vektor je matice typu  $m \times 1$

## 2.4 \* notace

$i$ -tý řádek matice  $A$  se značí:  $A_{i*} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$

## 2.5 Soustava lineárních rovnic

## 2.6 Matice soustavy

## 2.8 Elementární řádkové úpravy

### 2.12 Odstupňovaný tvar matice

### 2.13 Hodnost matice

### 2.18 Redukovaný odstupňovaný tvar matice

## 3.1 Rovnost

## 3.2 Součet

## 3.3 Násobek

## 3.7 Součin

### 3.11 Transpozice

### 3.14 Symetrická matice

### 3.23 Regulární matice

### 3.30 Inverzní matice

## 4.1 Grupa

### 4.5 Podgrupa

### 4.8 Permutace

### 4.9 Inverzní permutace

### 4.1 Skládání permutací

### 4.13 Znaménko permutace

### 4.22 Těleso

### 4.35 Charakteristika tělesa

## 5.1 Vektorový prostor

### 5.4 Podprostor

### 5.8 Lineární obal

### 5.11 Lineární kombinace

### 5.21 Lineární nezávislost

### 5.22 Lineární nezávislost nekonečné množiny

5.29 Báze

5.32 Souřadnice

5.42 Dimenze

5.49 Spojení podprostorů

5.55 Maticové prostory

6.1 Lineární zobrazení

6.6 Obraz a jádro

6.14 Matice lineárního zobrazení

6.20 Matice přechodu

6.29 Isomorfismus

6.41 Prostor lineárních zobrazení

7.1 Afinní podprostor

7.7 Dimenze afinního podprostoru

7.10 Afinní nezávislost

# Věty

## 1.1 Základní věta algebry

Každý polynom s komplexními koeficienty má alespoň jeden komplexní kořen.

### dukaz

pres kruznici a její zmensovani v rovine komplexnich cisel. Snizujeme stupen polynomu az na nulu delenim keremem.

## 2.22 Frobeniova věta

Soustava  $(A|b)$  má (aspoň jedno) řešení právě tehdy, když  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$

## 3.28 o regularni matici

Buď  $A \in R^{m \times n}$ . Pak  $RREF(A) = QA$  pro nějakou regulární matici  $Q \in R^{m \times m}$

### dukaz

$RREF(A)$  získáme aplikací konečně mnoha elementárních řádkových úprav. Necht' jdou reprezentovat maticemi  $E_1, E_2, \dots, E_k$ . Pak  $RREF(A) = E_k \dots E_2 E_1 A = QA$ , kde  $Q = E_k \dots E_2 E_1$ . Protože matice  $E_1, E_2, \dots, E_k$  jsou regulární, i jejich součin  $Q$  je regulární

## 3.31 O existenci inverzní matice

Buď  $A \in R^{n \times n}$ . Je-li  $A$  regulární, pak k ní existuje inverzní matice, a je určená jednoznačně. Naopak, existuje-li k  $A$  inverzní, pak  $A$  musí být regulární

### dukaz

Existence - Vytvořme matici  $A^{-1}$  tak, aby její sloupce byly vektory  $x_1, \dots, x_n$ , to jest,  $A^{-1} = (x_1|x_2|\dots|x_n)$   
Druhá rovnost -  $A(A^{-1}A - I) = AA^{-1}A - A = IA - A = 0$   
Jednoznačnost -  $B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$

## 3.33 Jedna rovnost stačí

Buďte  $A, B \in R^{n \times n}$ . Je-li  $BA = I$ , pak obě matice  $A, B$  jsou regulární a navzájem k sobě inverzní, to jest  $B = A^{-1}$  a  $A = B^{-1}$

### dukaz

vime ze  $I$  je regularni,  $B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$  a obracene

## 3.34 Výpočet inverzní matice

Buď  $A, B \in R^{n \times n}$ . Necht' matice  $(A|I_n)$  typu  $n \times 2n$  má RREF tvar  $(I_n|B)$ . Pak  $B = A^{-1}$ . Netvoří-li první část RREF tvaru jednotkovou matici, pak  $A$  je singulární

### dukaz

Je-li  $RREF(A|I_n) = (I_n|B)$ , potom existuje regulární matice  $Q$  taková, že  $(I_n|B) = Q(A|I_n)$ , neboli po roztržení na dvě části  $I_n = QA$  a  $B = QI_n$ . První rovnost říká  $Q = A^{-1}$  a druhá  $B = Q = A^{-1}$ .  
Netvoří-li první část RREF tvaru jednotkovou matici, pak  $RREF(A) \neq I_n$  a tudíž  $A$  není regulární.

## 3.37 Soustava rovnic a inverzní matice

Buď  $A \in R^{n \times n}$  regulární. Pak řešení soustavy  $Ax = b$  je dáno vzorcem  $x = A^{-1}b$ .

### dukaz

Protože  $A$  je regulární, má soustava jediné řešení  $x$ . Platí  $x = Ix = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$

### 3.41 Shermanova–Morrisonova formule

Buď  $A \in R^{n \times n}$  regulární a  $b, c \in R^n$ . Pokud  $c^T A^{-1} b = -1$ , tak  $A + bc^T$  je singulární, jinak

$$(A + bc^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + c^T A^{-1} b} A^{-1} bc^T A^{-1}$$

**dukaz**

V případě  $c^T A^{-1} b = -1$  máme  $(A + bc^T)A^{-1}b = AA^{-1}b + bc^T A^{-1}b = b(1 + c^T A^{-1}b) = 0$ . Protože  $b \neq 0$  a vzhledem k regularitě  $A$  je  $A^{-1}b \neq 0$ , musí matice  $(A + bc^T)$  být singulární

### 3.43 Jednoznačnost RREF

RREF tvar matice je jednoznačně určen

**dukaz**

$$A = Q_1^{-1} A_1 = Q_2^{-1} A_2, \text{ a tedy } A_1 = Q_1 Q_2^{-1} A_2 \Rightarrow A_1 = A_2$$

### 4.15 O znaménku složení permutace a transpozice

Buď  $p \in S_n$  a buď  $t = (i, j)$  transpozice. Pak  $\text{sgn}(p) = -\text{sgn}(t \circ p) = -\text{sgn}(p \circ t)$

### 4.16 Každou permutaci lze rozložit na složení transpozic

### 4.27 $Z_n$ je těleso právě tehdy, když $n$ je prvočíslo

**dukaz**

Je-li  $n$  složené, pak  $n = pq$ , kde  $1 < p, q < n$ . Kdyby  $Z_n$  bylo těleso, pak  $pq = 0$  implikuje podle tvrzení 4.25 buď  $p = 0$  nebo  $q = 0$ , ale ani jedno neplatí

### 4.33 O velikosti konečných těles

Existují konečná tělesa právě o velikostech  $p^n$ , kde  $p$  je prvočíslo a  $n \geq 1$

### 4.38 Malá Fermatova věta

Buď  $p$  prvočíslo a buď  $0 \neq a \in Z_p$ . Pak  $a^{p-1} = 1$  v tělese  $Z_p$

### 5.15 o vektorovém prostoru a obalu

Buď  $V$  vektorový prostor nad  $T$ , a mějme  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Pak  $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \{\sum_{i=1}^n a_i v_i; a_1, \dots, a_n \in T\}$

### 5.26 vektor nad T ...

### 5.31 o bazi

### 5.38 O existenci báze

- 5.40 Steinitzova věta o výměně
- 5.44 Vztah počtu prvků systému k dimenzi
- 5.45 Rozšíření lineárně nezávislého systému na bázi
- 5.46 Dimenze podprostoru
- 5.50 Spojení podprostorů
- 5.52 Dimenze spojení a průniku
- 5.62 Maticové prostory a RREF
- 5.63 Pro každou matici  $A \in T^{m \times n}$  platí  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$
- 5.66 O dimenzi jádra a hodnotě matice
- 6.10 Prosté lineární zobrazení
- 6.12 Lineární zobrazení a jednoznačnost vzhledem k obrazům báze
- 6.16 Maticová reprezentace lineárního zobrazení
- 6.18 Jednoznačnost matice lineárního zobrazení
- 6.24 Matice složeného lineárního zobrazení
- 6.35 Isomorfismus n-dimenzionálních prosto
- 6.37 O dimenzi jádra a obrazu

#### 7.4 Charakterizace afinního podprostoru

#### 7.5 o Množina řešení soustavy rovni