Kapitola 9

Determinanty

Determinanty byly vyvinuty pro účely řešení čtvercové soustavy lineárních rovnic a dávají explicitní vzorec pro jejich řešení (viz věta 9.13). Za autora determinantu se považuje Gottfried Wilhelm Leibniz a nezávisle na něm jej objevil stejného roku 1683 japonský matematik Seki Kōwa. Jejich přístup (v trochu jiné podobě než uvádíme v definici) upadl trochu v zapomnění a determinanty se staly populární pro řešení soustav rovnic až tak v letech 1750–1900, pak je vystřídaly jiné metody. Nicméně se ukázalo, že determinant sám o sobě je důležitá charakteristika čtvercové matice s řadou uplatnění. Samotný pojem „determinant“ pochází od Gausse (*Disquisitiones arithmeticae*, 1801), i když jej používal v trochu jiném smyslu. Významnou měrou do teorie determinantů přispěli také mj. A.L. Cauchy či C.G.J. Jacobi.

Připomeňme, že S_n značí množinu všech permutací na množině $\{1,\dots,n\}$, viz sekce 4.2.

Definice 9.1 (Determinant)**.** Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$. Pak *determinant* matice A je číslo

$$\det(A) = \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \dots a_{n,p(n)}.$$

Značení: $\det(A)$ nebo $|A|$.

Co vlastně říká vzoreček z definice determinantu? Každý sčítanec má tvar $\operatorname{sgn}(p)a_{1,p(1)}\dots a_{n,p(n)}$, což odpovídá tomu, že v matici A vybereme n prvků tak, že z každého řádku a sloupce máme právě jeden. Tyto prvky pak mezi sebou vynásobíme a ještě sčítanci přiřadíme kladné či záporné znaménko podle toho, jaké bylo znaménko permutace, která tyto prvky určovala.

Příklad 9.2 (Příklady determinantů)**.** Matice řádu 2 má determinant

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Matice řádu 3 má determinant

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}. \end{cases}$$

Počítat determinanty z definice pro větší matice je obecně značně neefektivní, protože vyžaduje zpracovat $n!$ sčítanců. Výpočet je jednodušší jen pro speciální matice. Například, determinant trojúhelníkové matice je součin diagonálních prvků, protože v definici determinantu je jediný potenciálně nenulový člen sumy pro permutaci $p = id$, která odpovídá výběru diagonálních prvků. Speciálně, $\det(I_n) = 1$. □

Tvrzení 9.3 (Determinant transpozice)**.** *Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$. Pak $\det(A^T) = \det(A)$.*

Důkaz.

$$\det(A^T) = \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} A^T_{i,p(i)} = \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{p(i),i} = \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p^{-1}) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p^{-1}(i)} =$$

$$= \sum_{p^{-1}\in S_n} \operatorname{sgn}(p^{-1}) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p^{-1}(i)} = \sum_{q\in S_n} \operatorname{sgn}(q) \prod_{i=1}^{n} a_{i,q(i)} = \det(A).$$ □

Pro determinanty obecně $\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)$, ani není znám jednoduchý vzoreček na determinant součtu matic. Výjimkou je následující speciální případ řádkové linearity.

Věta 9.4 (Řádková linearita determinantu)**.** *Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{T}^n$. Pak pro libovolné $i = 1,\dots,n$ platí:*

$$\det(A + e_i b^T) = \det(A) + \det(A + e_i(b^T - A_{i*})).$$

Jinými slovy,

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_1 & \dots & a_{in}+b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}\det(A + e_i b^T) &= \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \dots (a_{i,p(i)} + b_{p(i)}) \dots a_{n,p(n)} = \\ &= \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \dots a_{i,p(i)} \dots a_{n,p(n)} + \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \dots b_{p(i)} \dots a_{n,p(n)} = \\ &= \det(A) + \det(A + e_i(b^T - A_{i*}))\end{aligned}$$

□

Vzhledem k tvrzení 9.3 je determinant nejen řádkově, ale i sloupcově lineární.

9.1 Determinant a elementární úpravy

Naším plánem je k výpočtu determinantu využít Gaussovu eliminaci. K tomu musíme nejprve umět spočítat determinant matice v odstupňovaném tvaru, a vědět, jak hodnotu determinantu ovlivňují elementární řádkové úpravy. Na první otázku je jednoduchá odpověď, protože matice v odstupňovaném tvaru je zároveň horní trojúhelníková, a tudíž je její determinant roven součinu diagonálních prvků. Druhou otázku zodpovíme rozborem jednotlivých elementárních úprav. Nechť matice A' vznikne z A nějakou elementární úpravou:

1. Vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \in \mathbb{T}$: $\det(A') = \alpha\det(A)$.

   Důkaz.

   $$\begin{aligned}\det(A') &= \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) a'_{1,p(1)} \dots a'_{i,p(i)} \dots a'_{n,p(n)} = \\ &= \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \dots (\alpha a_{i,p(i)}) \dots a_{n,p(n)} = \\ &= \alpha \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \dots a_{i,p(i)} \dots a_{n,p(n)} = \alpha\det(A).\end{aligned}$$

   □

2. Výměna i-tého a j-tého řádku: $\det(A') = -\det(A)$.

   Důkaz. Označme transpozici $t = (i,j)$, pak

   $$\det(A') = \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) a'_{1,p(1)} \dots a'_{i,p(i)} \dots a'_{j,p(j)} \dots a'_{n,p(n)},$$

kde $a'_{1,p(1)} = a_{1,p(1)} = a_{1,p\circ t(1)}$, $a'_{i,p(i)} = a_{j,p(i)} = a_{j,p\circ t(j)}$, atd. Tedy

$$\begin{aligned}\det(A') &= \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p\circ t(1)} \dots a_{j,p\circ t(j)} \dots a_{i,p\circ t(i)} \dots a_{n,p\circ t(n)} = \\ &= \sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p\circ t(i)} = -\sum_{p\circ t\in S_n} \operatorname{sgn}(p\circ t) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p\circ t(i)} = \\ &= -\sum_{q\in S_n} \operatorname{sgn}(q) \prod_{i=1}^{n} a_{i,q(i)} = -\det(A).\end{aligned}$$ □

Důsledek 9.5. *Pokud má matice $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ dva stejné řádky, pak* $\det(A) = 0$.

Důkaz. Prohozením těchto dvou řádků dostaneme $\det(A) = -\det(A)$, a tedy $\det(A) = 0$. □

Poznamenejme, že toto tvrzení platí nad jakýmkoli tělesem, ale pro tělesa charakteristiky 2 se musí použít jiný důkaz, protože např. v $\mathbb{Z}_2$ je $-1 = 1$.

Důkaz č. 2. Definujme transpozici $t \coloneqq (i,j)$, kde i,j jsou indexy stejných řádků. Nechť S'_n je množina sudých permutací z S_n. Pak S_n lze disjunktně rozložit na sjednocení S'_n a $\{p\circ t;\ p \in S'_n\}$. Tudíž

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{p\in S'_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} + \sum_{p\in S'_n} \operatorname{sgn}(p\circ t) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p\circ t(i)} = \\ &= \sum_{p\in S'_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} - \sum_{p\in S'_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = 0.\end{aligned}$$ □

3. Přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému, přičemž $i \neq j$: $\det(A') = \det(A)$.

Důkaz. Z řádkové linearity determinantu, důsledku 9.5 a první elementární úpravy dostáváme

$$\det(A') = \det\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} + \alpha A_{j*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} = \det(A) + \det\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ \alpha A_{j*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} = \det(A) + \alpha 0 = \det(A).$$ □

Výše zmíněná pozorování mají několik důsledků: Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ je $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$. Dále, obsahuje-li A nulový řádek nebo sloupec, tak $\det(A) = 0$.

Hlavní význam vlivu elementárních úprav na determinant je, že determinanty můžeme počítat pomocí Gaussovy eliminace:

Algoritmus 9.6 (Výpočet determinantu pomocí *REF*)**.** Převeď matici A do odstupňovaného tvaru A' a pamatuj si případné změny determinantu v koeficientu c; pak $\det(A)$ je roven součinu c^{-1} a diagonálních prvků matice A'.

9.2 Další vlastnosti determinantu

Věta 9.7 (Kriterium regularity)**.** *Matice $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ je regulární právě tehdy, když* $\det(A) \neq 0$.

Důkaz. Převedeme matici A elementárními úpravami na odstupňovaný tvar A', ty mohou měnit hodnotu determinantu, ale nikoli jeho (ne)nulovost. Pak A je regulární právě tehdy, když A' má na diagonále nenulová čísla. □

Poznámka 9.8 (Míra regularity)**.** Věta 9.7 umožňuje zavést jakousi míru regularity. Čím je $\det(A)$ blíže k 0, tím je matice A blíž k nějaké singulární matici. Příkladem je Hilbertova matice H_n (viz příklad 3.46), která je špatně podmíněná, protože je „skoro“ singulární. Skutečně, jak ukazuje tabulka, determinant matice je velmi blízko nule.

n	$\det(H_n)$
4	$\approx 10^{-7}$
6	$\approx 10^{-18}$
8	$\approx 10^{-33}$
10	$\approx 10^{-53}$

Tato míra není ale ideální (lepší je např. pomocí vlastních nebo singulárních čísel, viz sekce 13.5), protože je hodně citlivá ke škálování. Uvažujme např. matici $0.1I_n$, pro níž $\det(0.1I_n) = 10^{-n}$. Přestože 10^{-n} může být libovolně malé číslo, samotná matice má k singulární relativně daleko.

Věta 9.9 (Multiplikativnost determinantu)**.** *Pro každé* $A, B \in \mathbb{T}^{n\times n}$ *platí* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Důkaz. (1) Nejprve uvažujme speciální případ, když A je matice elementární úpravy:

1. $A = E_i(\alpha)$, vynásobení i-tého řádku číslem α. Potom $\det(AB) = \alpha\det(B)$ a $\det(A)\det(B) = \alpha\det(B)$.
2. $A = E_{ij}$, prohození i-tého a j-tého řádku. Pak $\det(AB) = -\det(B)$ a $\det(A)\det(B) = -1\det(B)$.
3. $A = E_{ij}(\alpha)$, přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému. Pak $\det(AB) = \det(B)$ a $\det(A)\det(B) = 1\det(B)$.

Tedy rovnost platí ve všech případech.

(2) Nyní uvažme obecný případ. Je-li A singulární, pak i AB je singulární (tvrzení 3.27) a tedy podle věty 9.7 je $\det(AB) = 0 = 0\det(B) = \det(A)\det(B)$. Je-li A regulární, pak jde rozložit na součin elementárních matic $A = E_1 \dots E_k$. Nyní postupujme matematickou indukcí, případ $k = 1$ máme vyřešený v bodě (1), takže se věnujme indukčnímu kroku. Podle indukčního předpokladu a z bodu (1) dostáváme

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1(E_2 \dots E_k B)) = \det(E_1)\det((E_2 \dots E_k)B) = \\ &= \det(E_1)\det(E_2 \dots E_k)\det(B) = \det(E_1 E_2 \dots E_k)\det(B) = \\ &= \det(A)\det(B).\end{aligned}$$ □

Důsledek 9.10. *Buď* $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ *regulární, pak* $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Důkaz. $1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$. □

Nyní ukážeme rekurentní vzoreček na výpočet determinantu.

Věta 9.11 (Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku)**.** *Buď* $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$, $n \geq 2$. *Pak pro každé* $i = 1, \dots, n$ *platí*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij}),$$

kde A^{ij} *je matice vzniklá z* A *vyškrtnutím* i*-tého řádku a* j*-tého sloupce.*

Poznámka. Podobně jako podle řádku můžeme rozvíjet podle libovolného sloupce.

Důkaz. (1) Nejprve uvažujme případ $A_{i*} = e_j^T$, tj. i-tý řádek matice A je jednotkový vektor. Postupným vyměňováním řádků $(i, i+1)$, $(i+1, i+2)$, ..., $(n-1, n)$ převedeme jednotkový vektor do posledního řádku. Podobně postupujeme pro sloupce a j-tý sloupec převedeme na poslední. Výslednou matici označme

$$A' := \left(\begin{array}{ccc|c} & A^{ij} & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

a znaménko determinantu se změní koeficientem $(-1)^{(n-i)+(n-j)} = (-1)^{i+j}$. Nyní máme

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{i+j}\det(A') = (-1)^{i+j}\sum_{p\in S_n}\operatorname{sgn}(p)\prod_{i=1}^{n} a'_{i,p(i)} = \\ &= (-1)^{i+j}\sum_{p;\,p(n)=n}\operatorname{sgn}(p)\prod_{i=1}^{n-1} a'_{i,p(i)} = (-1)^{i+j}\det(A^{ij}).\end{aligned}$$

(2) Nyní uvažme obecný případ. Z řádkové linearity determinantu a z předchozího dostáváme

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\begin{pmatrix}\dots & & & \\ a_{i1} & 0 & \dots & 0\\ \dots & & & \end{pmatrix} + \dots + \det\begin{pmatrix}\dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{in}\\ \dots & & & \end{pmatrix} = \\ &= a_{i1}(-1)^{i+1}\det(A^{i1}) + \dots + a_{in}(-1)^{i+n}\det(A^{in}).\end{aligned}$$

□

Příklad 9.12 (Laplaceův rozvoj podle 4. řádku)**.**

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 5 & 5\\ 0 & 2 & -4 & -4\end{vmatrix} &= (-1)^{4+1}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 2\\ 5 & 5 & 5\end{vmatrix} + (-1)^{4+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 5\end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^{4+3}\cdot(-4)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 5 & 5\end{vmatrix} + (-1)^{4+4}\cdot(-4)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 5\end{vmatrix} = \\ &= 0 + 2\cdot 4 + 4\cdot 2 - 4\cdot 2 = 8\end{aligned}$$

□

Následující věta dává explicitní vzoreček na řešení soustavy s regulární maticí. Matice $A+(b-A_{*i})e_i^T$ ve výrazu představuje matici A, ve které nahradíme i-tý sloupec vektorem b.

Věta 9.13 (Cramerovo pravidlo)**.** *Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ regulární, $b \in \mathbb{T}^n$. Pak řešení soustavy $Ax = b$ je dáno vzorcem*

$$x_i = \frac{\det(A+(b-A_{*i})e_i^T)}{\det(A)}, \quad i = 1,\dots,n.$$

Důkaz. Buď x řešení soustavy $Ax = b$; díky regularitě A řešení existuje a je jednoznačné. Rovnost rozepíšeme $\sum_{j=1}^n A_{*j}x_j = b$. Ze sloupcové linearity determinantu dostaneme

$$\begin{aligned}\det(A+(b-A_{*i})e_i^T) &= \det(A_{*1}|\dots|b|\dots|A_{*n}) = \det(A_{*1}|\dots|\textstyle\sum_{j=1}^n A_{*j}x_j|\dots|A_{*n}) = \\ &= \sum_{j=1}^n \det(A_{*1}|\dots|A_{*j}|\dots|A_{*n})x_j = \\ &= \det(A_{*1}|\dots|A_{*i}|\dots|A_{*n})x_i = \det(A)x_i.\end{aligned}$$

Nyní stačí obě strany podělit číslem $\det(A) \neq 0$. □

Cramerovo pravidlo z roku 1750 (i když bylo známo už dříve) je pojmenováno po švýcarském matematikovi Gabrielu Cramerovi. Ve své době to byl populární nástroj na řešení soustav lineárních rovnic, ale dnes se pro praktické výpočty již nepoužívá, protože výpočet řešení soustavy pomocí $n+1$ determinantů není příliš efektivní. Význam determinantu je spíše teoretický, mimo jiné ukazuje a dává:

- Explicitní vyjádření řešení soustavy lineárních rovnic.
- Spojitost řešení vzhledem k prvkům matice A a vektoru b.

  Formálně, zobrazení $(A,b) \mapsto A^{-1}b$ je spojité na definičním oboru regulárních matic A. To je snadné nahlédnout, protože podle Cramerova pravidla počítáme jednotlivé složky řešení pouze pomocí aritmetických operací.

- Odhad velikosti popisu řešení z velikosti popisu vstupních hodnot.

  Potřebujeme-li k zápisu vstupních hodnot soustavy $Ax = b$ (tj., k zápisu a_{ij}, b_j) celkem K bitů, tak její řešení má zápis pomocí polynomiálně mnoha bitů vzhledem ke K. To dá trochu více práce nahlédnout, ale je to důležité pozorování, protože nám zaručuje omezenou velikost zápisu řešení.

Příklad 9.14 (Cramerovo pravidlo)**.** Řešení soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

spočítáme po složkách

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{4}{2} = 2, \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{2}{2} = 1, \; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{2} = -1,$$

□

9.3 Adjungovaná matice

Adjungovaná matice[1)] úzce souvisí s determinanty a maticovou inverzí. Využijeme ji při odvozování Cayleyho–Hamiltonovy věty (věta 10.18), ale čtenář se s ní může potkat např. v kryptografii nebo při odvozování vzorečku pro derivaci determinantu.

Definice 9.15 (Adjungovaná matice)**.** Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ a $n \geq 2$. Pak *adjungovaná matice* $\operatorname{adj}(A) \in \mathbb{T}^{n\times n}$ má složky

$$\operatorname{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{ji}), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

kde A^{ji} opět značí matici vzniklou z A vyškrtnutím j-tého řádku a i-tého sloupce.

Věta 9.16 (O adjungované matici)**.** *Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ platí $A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I_n$.*

Důkaz. Odvodíme

$$(A \operatorname{adj}(A))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \operatorname{adj}(A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (-1)^{k+j} \det(A^{jk}) = \begin{cases} \det(A), & \text{pro } i = j, \\ 0, & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

Zdůvodnění poslední rovnosti je, že pro $i = j$ se jedná o Laplaceův rozvoj $\det(A)$ podle j-tého řádku. Pro $i \neq j$ se zase jedná o rozvoj podle j-tého řádku matice A, v níž ale nejprve j-tý řádek nahradíme i-tým. Tato matice bude mít dva stejné řádky a tím pádem nulový determinant. □

Pro regulární matici A je $\det(A) \neq 0$ a vydělením $\det(A)$ dostaneme explicitní vzoreček pro inverzní matici A^{-1}.

Důsledek 9.17. *Je-li $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ regulární, pak $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$.*

Příklad 9.18 (Adjungovaná matice)**.** Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pak:

$$\operatorname{adj}(A)_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5, \; \dots$$

[1)] V angličtině *adjugate*, popř. *adjoint.*

Celkem:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 9.19. Uvažujme determinant jako funkci $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$. Problém nyní zní určit parciální derivaci $\det(A)$ podle a_{ij} a sestavit matici parciálních derivací.

Pro tento účel vyjdeme z Laplaceova rozvoje $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A^{ik})$ a jednoduše odvodíme $\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} \det(A^{ij})$. Tudíž matice parciálních derivací je $\partial \det(A) = \operatorname{adj}(A)^T$.

Použijeme-li konkrétně matici z příkladu 9.18, tak $\det(A) = 2$. Protože $\operatorname{adj}(A)_{33} = 0$, tak determinant matice A se nezmění při změně prvku a_{33}. Na druhou stranu, při malém zvětšení prvku a_{11} se determinant zvětší výrazně (protože $\operatorname{adj}(A)_{11} = 5$) a při zvětšení prvku a_{13} se determinant zvětší méně výrazně (protože $\operatorname{adj}(A)_{31} = 1$). Vyzkoušejte sami! □

9.4 Aplikace

Determinant se používá např. v teorii grafů pro vyjádření počtu koster grafu [Matoušek a Nešetřil, 2009]. Věta o adjungované matici zase dává následující charakterizaci celočíselnosti inverzní matice.

Tvrzení 9.20. *Buď $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Pak A^{-1} má celočíselné hodnoty právě tehdy, když* $\det(A) = \pm 1$.

Důkaz. Implikace „⇒“. Víme $1 = \det(A)\det(A^{-1})$. Jsou-li matice A, A^{-1} celočíselné, pak i jejich determinanty jsou celočíselné a tudíž musejí být rovny ± 1.

Implikace „⇐“. Víme $A^{-1}_{ij} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j} \det(A^{ji})$. To je celočíselná hodnota, jestliže $\det(A) = \pm 1$ a $\det(A^{ji})$ je celé číslo. □

Další ukázka použití determinantu je v polynomech. Determinant z následující věty se nazývá *rezultant* a používá se například k řešení nelineárních rovnic.

Tvrzení 9.21. *Polynomy $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ mají společný kořen právě tehdy, když*

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 & & & \\ & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \ldots & b_1 & b_0 & & \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & b_m & b_{m-1} & \ldots & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Důkaz. Polynomy $p(x)$, $q(x)$ mají společný kořen právě tehdy, když existují (ne oba triviální) polynomy $r(x)$, $s(x)$ stupňů nanejvýš $m-1, n-1$ takové, že $r(x)p(x) + s(x)q(x) = 0$. Pokud si neznámé polynomy vyjádříme jako $r(x) = c_{m-1}x^{m-1} + \ldots + c_1 x + c_0$, $s(x) = d_{n-1}x^{n-1} + \ldots + d_1 x + d_0$, tak rovnost $r(x)p(x) + s(x)q(x) = 0$ můžeme přepsat jako homogenní soustavu $m+n$ rovnic s $m+n$ neznámými $c_{m-1}, \ldots, c_0, d_{n-1}, \ldots, d_0$. Nenulové řešení existuje právě tehdy, když je matice singulární, neboli její determinant nulový. Ve větě je pak determinant transponované matice. □

Geometrická interpretace determinantu

Determinant má pěkný geometrický význam. Uvažujeme-li lineární zobrazení $x \mapsto Ax$ s maticí $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak geometrická tělesa mění v tomto zobrazení svůj objem s koeficientem $|\det(A)|$. Uvažujeme nejprve speciální případ rovnoběžnostěnu. *Rovnoběžnostěn* s lineárně nezávislými hranami $a_1,\dots,a_m$ definujeme jako množinu $\{x \in \mathbb{R}^n;\ x = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i,\ 0 \le \alpha_i \le 1\}$.

Věta 9.22 (Objem rovnoběžnostěnu)**.** *Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a uvažujme rovnoběžnostěn s hranami danými řádky matice A. Pak jeho objem je $\sqrt{\det(AA^T)}$. Speciálně, pro $m = n$ je objem $|\det(A)|$.*

Poznámka. Svou roli hraje nejen velikost determinantu A, ale také jeho znaménko; to souvisí s pořadím hran rovnoběžnostěnu jako řádků matice A. Speciálně, pro $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ je $\det(A) > 0$ pokud řádky A tvoří pravotočivou posloupnost vektorů (tzv. pravidlo palce), a $\det(A) < 0$ pokud tvoří levotočivou posloupnost.

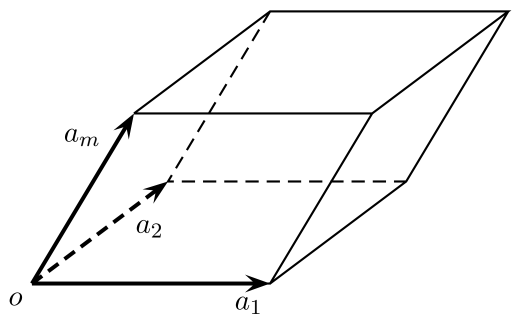
Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle m. Pro $m = 1$ je to zřejmé, postupme k indukčnímu kroku. Označme i-tý řádek matice A jako a_i a definujme matici

$$D := \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_{m-1}^T \end{pmatrix},$$

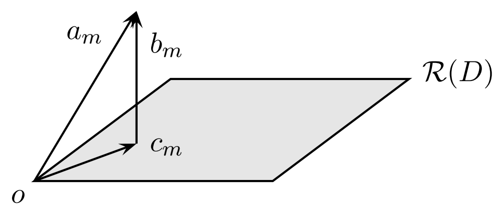
která vznikne z A odstraněním posledního řádku. Rozložme $a_m = b_m + c_m$, kde $c_m \in \mathcal{R}(D)$ a $b_m \in \mathcal{R}(D)^\perp$ podle poznámky 8.35. Označme

$$A' := \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_{m-1}^T \\ b_m^T \end{pmatrix}.$$

Nyní řádky matice D generují menší rovnoběžnostěn, jenž tvoří podstavu celkového rovnoběžnostěnu a nalézá se podprostoru $\mathcal{R}(D)$. Vektor b_m je kolmý na podstavu a jeho délka odpovídá výšce $\|b_m\|$ rovnoběžnostěnu.



Rovnoběžnostěn $a_1, a_2, \dots, a_m$.



Plocha základny: $\sqrt{\det(DD^T)}$, výška: $\|b_m\|$.

Od A' k A lze přejít pomocí elementárních řádkových úprav, neboť k poslednímu řádku stačí přičíst c_m, což je lineární kombinace $a_1,\dots,a_{m-1}$. Tedy existují elementární matice $E_1,\dots,E_k$ tak, že $A = E_1 \dots E_k A'$; navíc jejich determinant je 1 protože jen přičítají násobek řádku k jinému. Nyní

$$\begin{aligned} \det(AA^T) &= \det(E_1 \dots E_k A' A'^T E_k^T \dots E_1^T) = \\ &= \det(E_k) \dots \det(E_1) \det(A'A'^T) \det(E_k^T) \dots \det(E_1^T) = \det(A'A'^T). \end{aligned}$$

Dále,

$$A'A'^T = \begin{pmatrix} D \\ b_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^T & b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DD^T & Db_m \\ b_m^T D^T & b_m^T b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DD^T & o \\ o^T & b_m^T b_m \end{pmatrix}$$

Tedy $\det(A'A'^T) = b_m^T b_m \det(DD^T)$ a odmocněním dostaneme $\sqrt{\det(A'A'^T)} = \|b_m\| \sqrt{\det(DD^T)}$. To odpovídá intuitivní představě objemu jako velikosti výšky krát obsah základny. $\square$

Poznámka 9.23 (Objem rovnoběžnostěnu a elementární úpravy)**.** Platnost věty 9.22 lze nahlédnout geometricky rozborem vlivu elementárních úprav. V zásadě důkaz věty jen technicky zpracovává následující myšlenky:

Uvažujme rovnoběžnostěn generovaný řádky matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a chceme ukázat, že jeho objem je $|\det(A)|$. Víme, že determinant se nezmění pokud na matici provádíme třetí elementární úpravu (přičtení násobku jednoho řádku k jinému). Samotný rovnoběžnostěn se ale změní. Pochopit, proč objem zůstává zachován, je snadné z geometrického náhledu: Přičtením násobku řádku k jinému (například poslednímu) znamená, že se rovnoběžnostěn zkosí či narovná, ale jeho základna i výška zůstane stejná.

Představit si ostatní elementární úpravy je ještě snazší: prohození řádků matice A znamená překlopení rovnoběžnostěnu a jeho objem se proto nezmění, a vynásobení řádku matice A číslem α pak protáhne rovnoběžnostěn v jednom směru, a tudíž se objem změní α-krát.

Je-li matice A singulární, pak odpovídající rovnoběžnostěn leží v nějakém podprostoru dimenze menší než n, a tudíž je jeho objem nulový. Je-li matice A regulární, pak ji elementárními úpravami převedeme na jednotkovou matici – odpovídající rovnoběžnostěn je jednotková krychle, a ta má objem 1.

Poznámka 9.24 (Vysvětlení definice determinantu)**.** Předchozí poznámka umožňuje alternativní způsob zavedení determinantu a vysvětlení jeho definice. Kdybychom chtěli zavést determinant matice A jako objem odpovídajícího rovnoběžnostěnu, narazíme na problém znaménka, protože objem je vždy nezáporný. Zavedeme tedy něco jako orientovaný objem, a to pomocí základních vlastností, které by objem měl splňovat:

1. Determinant jednotkové matice I_n je roven 1, což odpovídá objemu jednotkové krychle.
2. Výměna řádků změní znaménko determinantu. To odpovídá vlastnosti, že objem rovnoběžnostěnu se nezmění změnou pořadí hran, tedy překlopením, nicméně změna znaménka zavede právě určitou orientaci do definice determinantu.
3. Vynásobení řádku matice A číslem $\alpha \in \mathbb{R}$ změní determinant s koeficientem α. To odpovídá protažení rovnoběžnostěnu ve směru dané hrany, a tím pádem odpovídající změnu objemu.
4. Řádková linearita determinantu ve smyslu věty 9.4. Důsledek této vlastnosti je například to, že zkosení nezmění objem rovnoběžnostěnu, a proto i determinant zůstane stejný.

Z těchto základních vlastností již jdou odvodit všechny ostatní vlastnosti determinantu a vysvětlit i původní definici

$$\det(A) = \textstyle\sum_{p\in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} \dots a_{n,p(n)}.$$

Z řádkové linearity determinantu můžeme podobně jako v Laplaceově rozvoji podle prvního řádku psát

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nyní každý z n determinantů napravo rozvineme podle druhého řádku a tak dále až podle posledního řádku. Tím nakonec dostaneme vyjádření $\det(A)$ pomocí součtu n^n determinantů jednoduchých matic:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

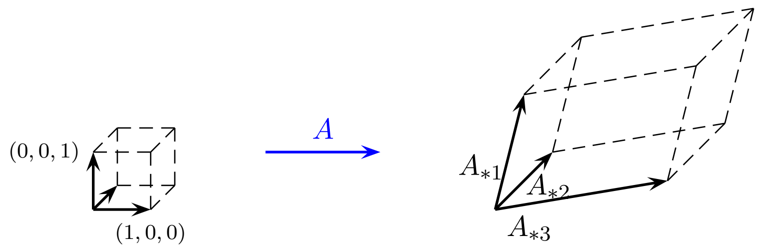
Každá z těchto jednoduchých matic má v každém řádku nanejvýš jedno nenulové číslo. Pokud tato čísla nejsou v navzájem různých sloupcích, je v matici nulový sloupec a její determinant je nula. Tím pádem z celkového počtu n^n determinantů jednoduchých matic zůstane jen $n!$ jednoduchých matic, jejichž potenciálně nenulové prvky jsou rozmístěny podle nějaké permutace:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \dots & 0 \\ a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{nn} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Determinant každé takovéto jednoduché matice je pak součin těch n prvků, a jeho znaménko odpovídá znaménku příslušné permutace p, podle které jsou rozmístěny dané prvky (protože to je parita počtu výměn sloupců, které potřebujeme, abychom matici dovedli na diagonální tvar). Tudíž determinant jednoduché matice je $\operatorname{sgn}(p)a_{1,p(1)} \dots a_{n,p(n)}$, a součtem jich všech dostaneme determinant matice A.

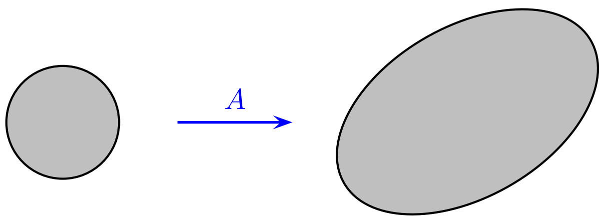
Poznámka 9.25 (Objem jiných geometrických těles)**.** Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Jak jsme již zmínili, objem geometrických těles se při zobrazení $x \mapsto Ax$ mění s koeficientem $|\det(A)|$. Krychle o hraně 1 se zobrazí na rovnoběžnostěn o hranách, které odpovídají sloupcům matice A, a jeho objem je proto $|\det(A^T)| = |\det(A)|$. Tuto vlastnost můžeme zobecnit na ostatní „rozumná“ geometrická tělesa, protože každé lze aproximovat krychličkami, a jejich obraz je tedy aproximován rovnoběžnostěny a změna objemu je přibližně $|\det(A)|$. Postupným zjemňováním aproximace dostaneme limitním přechodem výsledný poměr.

Příklad 9.26 (Geometrická interpretace determinantu)**.** Obraz jednotkové krychle při zobrazení $x \mapsto Ax$:



objem $= 1$ objem $= |\det(A)|$

Obraz geometrického tělesa při zobrazení $x \mapsto Ax$:



objem $= V$ objem $= |\det(A)| \cdot V$ □

Poznámka 9.27 (Substituce u vícerozměrných integrálů)**.** Geometrická interpretace determinantu rovněž umožňuje snadno nahlédnout platnost věty o substituci ve vícerozměrných integrálech. Věta za celkem obecných předpokladů říká, že

$$\int_{\varphi(M)} f(y)\, \mathrm{d}y = \int_M f(\varphi(x)) \cdot |\det(\nabla\varphi(x))|\, \mathrm{d}x,$$

kde $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^n$ je prostá funkce se spojitými parciálními derivacemi a $\nabla\varphi(x)$ je Jacobiho matice parciálních derivací funkce $\varphi(x)$ (viz poznámka 6.28), která musí být regulární pro všechna $x \in M$. Vysvětlení rovnosti je pak zřejmé z geometrického náhledu. Zobrazení $\varphi(x)$ sice není lineární, ale lokálně lze linearizovat právě Jacobiho maticí $\nabla\varphi(x)$. Zobrazení pak lokálně mění objemy s koeficientem, který odpovídá determinantu Jacobiho matice. Tudíž i integrál se mění se stejným faktorem.

Determinanty se používají při řešení ještě mnoha dalších geometrických problémů [Berger, 1987; Dattorro, 2011; Ratschek and Rokne, 2003]. Výpočtem determinantu tak například snadno rozhodneme, zda daný bod v rovině leží uvnitř či vně kružnice zadané svými třemi body, a podobně ve vyšších dimenzích.

Zmiňme úlohu, která souvisí s objemem rovnoběžnostěnu, a to určení objemu mnohostěnu s $n+1$ vrcholy v $\mathbb{R}^n$. Bez újmy na obecnosti nechť je jeden vrchol a_0 v počátku a ostatní mají pozice $a_1, \dots, a_n \in$

$\mathbb{R}^n$. Definujme matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že její sloupce jsou vektory $a_1, \ldots, a_n$. Pak objem mnohostěnu je $\frac{1}{n!}|\det(A)|$, čili tvoří jen část rovnoběžnostěnu danou faktorem $1 : n!$.

Předchozí způsob výpočtu objemu mnohostěnu předpokládal, že známe pozice jednotlivých vrcholů v prostoru $\mathbb{R}^n$. V některých případech (např. molekulární biologie) jsou ale známy pouze vzdálenosti $d_{ij} = \|a_i - a_j\|$ mezi jednotlivými vrcholy, tj. délky hran mnohostěnu. V tomto případě spočítáme objem pomocí tzv. Cayleyho–Mengerova determinantu jako

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^n(n!)^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & \ldots & d_{0n}^2 \\ 1 & d_{10}^2 & 0 & d_{12}^2 & \ldots & d_{1n}^2 \\ 1 & d_{20}^2 & d_{21}^2 & 0 & \ldots & d_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & d_{n0}^2 & d_{n1}^2 & d_{2n}^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Problémy

9.1. Dokažte multiplikativnost determinantu přímo ze sloupcové linearity determinantu.

9.2. Dokažte, že v každém kroku Gaussovy–Jordanovy eliminace se každý nenulový prvek matice dá vyjádřit buď jako determinant, nebo podíl dvou determinantů podmatic původní matice.

9.3. Pomocí Cramerova pravidla odvoďte vzorec pro inverzní matici a porovnejte jej s adjungovanou maticí.

9.4. Pomocí věty o adjungované matici odvoďte Cramerovo pravidlo.

9.5. Rozhodněte, zda $\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj}(BA)$ pro libovolné matice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Shrnutí ke kapitole 9. Determinanty

Determinant matice A je číselná charakteristika matice a lze spočítat efektivně pomocí Gaussovy eliminace – stačí jen určit, jak elementární úpravy mění determinant matice. Determinant mj. udává, zda matice je regulární či singulární, a pomocí determinantu můžeme také explicitně vyjádřit řešení soustavy $Ax = b$ s regulární maticí A. Podobně můžeme explicitně vyjádřit inverzi regulární matice, což vede na pojem adjungovaná matice. Geometricky pak determinant reprezentuje koeficient, se kterým se mění objem těles při lineárním zobrazení $x \mapsto Ax$; speciálně udává objem rovnoběžnostěnu jehož hrany jsou dané řádky matice A.