NTIN090 — Základy složitosti a vyčíslitelnosti
5. cvičení

Petr Kučera

15. prosince 2022

1. Ukažte, že tyto problémy Klika, Nezávislá množina a Vrcholové pokrytí jsou na sebe vzájemně polynomiálně převoditelné.

Problém 1: Klika

Instance: Graf $G = (V, E)$ a přirozené číslo $k \geq 0$.

Otázka: Obsahuje G jako podgraf úplný graf (kliku) s alespoň k vrcholy?

Problém 2: Nezávislá množina

Instance: Graf $G = (V, E)$ a přirozené číslo k.

Otázka: Existuje v grafu G nezávislá množina velikosti alespoň k? Tj. existuje množina vrcholů $S \subseteq V$, pro kterou platí, že $|S| \geq k$ a žádné dva vrcholy v S nejsou spojeny hranou?

Problém 3: Vrcholové pokrytí

Instance: Graf $G = (V,E)$ a přirozené číslo $k \geq 0$.

Otázka: Existuje množina vrcholů $S \subseteq V$ velikosti nejvýš k, která obsahuje alespoň jeden vrchol z každé hrany (tj. pokrývá hrany G)?

Řešení:

(a) Klika $\leq_m^P$ Nezávislá množina funkcí $f(\langle G, k\rangle) = \langle G', k\rangle$, kde graf $G' = (V, E')$ s množinou hran $E' = \binom{V}{2} \setminus E$. Jinými slovy pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V$ platí, že $\{u, v\} \in E'$, právě když $\{u, v\} \notin E$.

(b) Nezávislá množina $\leq_m^P$ Klika týmž převodem jako v bodu a.

(c) Nezávislá množina $\leq_m^P$ Vrcholové pokrytí funkcí $f(\langle G, k\rangle) = f(\langle G, n - k\rangle)$, kde $n = |V|$. Toto platí proto, že množina $S \subseteq V$ je vrcholové pokrytí G, právě když $S \setminus V$ je nezávislá množina v G.

(d) Vrcholové pokrytí $\leq_m^P$ Nezávislá množina týmž převodem jako v bodu c.

2. Ukažte, že následující problém je NP-úplný (například převodem z problému Vrcholového pokrytí, nezapomeňte zdůvodnit, že tento problém patří do NP).

Problém 4: Pokrytí orientovaných cyklů

Instance: Orientovaný graf $G = (V, E)$ a přirozené číslo k.

Otázka: Existuje množina vrcholů $S \subseteq V$ velikosti nejvýš k, která obsahuje alespoň jeden vrchol z každého orientovaného cyklu v G?

Řešení: Polynomiální verifikátor problému Pokrytí orientovaných cyklů očekává jako certifikát seznam vrcholů S a otestuje (například pomocí DFS), zda graf G', který vznikne z G odstraněním vrcholů v S, je acyklický.

Vrcholové pokrytí $\leq_m^P$ Pokrytí orientovaných cyklů funkcí $f(\langle G, k\rangle) = (G', k)$, kde $G' = (V, E')$ je orientovaný graf, který vznikne z G tím, že každou neorientovanou hranu $\{u, v\} \in E$ nahradíme dvojicí orienovaných hran $(u, v), (v, u) \in E'$. Potom pro každou množinu $S \subseteq V$ platí, že jde o vrcholové pokrytí G, právě když je současně pokrytím orientovaných cyklů G'.

3. Definujme problém Hamiltonovská kružnice následovně:

Problém 5: Hamiltonovská kružnice (HK)

Instance: Neorientovaný graf $G = (V, E)$.

Otázka: Existuje v grafu G hamiltonovská kružnice, tj. kružnice procházející všemi vrcholy?

O tomto problému je známo, že je NP-úplný. Ukažte s pomocí problému Hamiltonovské kružnice, že následující problémy jsou NP-úplné:

Problém 6: Orientovaná Hamiltonovská kružnice (OHK)

Instance: Orientovaný graf $G = (V, E)$.

Otázka: Existuje v grafu G hamiltonovská kružnice, tj. kružnice procházející všemi vrcholy?

Problém 7: Hamiltonovská cesta z s do t (HC(s, t))

Instance: Neorientovaný graf $G = (V, E)$ a vrcholy s a t.

Otázka: Existuje v grafu G hamiltonovská cesta z vrcholu s do vrcholu t? Tj. existuje v grafu G cesta z vrcholu s do t, která prochází každým vrcholem grafu G právě jednou?

Problém 8: Hamiltonovská cesta (HC)

Instance: Neorientovaný graf $G = (V, E)$.

Otázka: Existuje v grafu G hamiltonovská cesta? Tj. existuje v grafu G cesta, která prochází každým vrcholem grafu G právě jednou?

Řešení: Všechny tři problémy patří do třídy NP, protože pro danou posloupnost vrcholů lze ověřit v polynomiálním čase, zda jde o hamiltonovskou kružnici či cestu a případně zda začíná a končí v zadaných vrcholech s a t.

(a) HK $\leq_m^P$ OHK funkcí $f(\langle G\rangle) = \langle G'\rangle$, kde $G' = (V, E')$ je orientovaný graf, který vznikne z G tím, že každou neorientovanou hranu $\{u, v\} \in E$ nahradíme dvojicí orienovaných hran $(u, v), (v, u) \in E'$.

(b) HK $\leq_m^P$ HC(s, t) funkcí $f(\langle G\rangle) = \langle G', s, t\rangle$, kde $G' = (V', E')$ je neorientovaný graf zkonstruovaný následujícím způsobem. Budeme předpokládat, že G je souvislý graf, který obsahuje alespoň dva vrcholy (v opačném případě můžeme namapovat G na triviální instanci s nebo bez hamiltonovské cesty podle toho, jaká má být správná odpověď). Vybereme si vrchol $v \in V$ a položíme $s = v$. Přidáme nový vrchol t, tedy $V' = V \cup \{t\}$. Vrchol t spojíme hranami se všemi sousedy v, tedy $E' = E \cup \{\{t, u\} \mid \{v, u\} \in E\}$.

(c) HC$(s, t) \leq_m^P$ HS funkcí $f(\langle G, s, t\rangle) = \langle G'\rangle$, kde $G' = (V', E')$ vznikne z G následujícím způsobem. Přidáme dva nové vrcholy s' a t', které připojíme hranou k s, respektive t. Tedy $V' = V \cup \{s', t'\}$ a $E' = E \cup \{\{s, s'\}, \{t, t'\}\}$.

4. Ukažte, že problém HK je polynomiálně převoditelný na problém SAT.

Problém 9: Splnitelnost (SAT)

Instance: Formule φ v KNF

Otázka: Je formule φ splnitelná?

Řešení: Popíšeme, jak ke grafu G sestrojit formuli φ takovou, že φ je splnitelná, právě když G má hamiltonovskou kružnici. Předpokládejme, že $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Vytvoříme proměnné $x_{i,j}$ pro $i, j = 1, \ldots, n$. Proměnná $x_{i,j} = 1$ ve splňujícím ohodnocení znamená, že v_i je j-tý vrchol pořadí určujícího hamiltonovskou kružnici. Dále přidáme klauzule

1. $(x_{i,1} \vee \cdots \vee x_{i,n})$ pro $i = 1, \ldots n$
2. $(x_{1,j} \vee \cdots \vee x_{1,j})$ pro $j = 1, \ldots n$
3. $(\neg x_{i,j_1} \vee \neg x_{i,j_2})$ pro $i = 1, \ldots, n$, $1 \leq j_1 < j_2 \leq n$
4. $(\neg x_{i_1,j} \vee \neg x_{i_1,j})$ pro $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$, $j = 1, \ldots, n$
5. $(\neg x_{i_1,j} \vee \neg x_{i_2,(j \bmod n)+1})$ pro každou dvojici vrcholů $\{v_{i_1}, v_{i_2}\} \notin E$ a $j = 1, \ldots, n$.

5. Ukažte, že problém HK je polynomiálně převoditelný na problém Obchodního cestujícího.

Problém 10: Obchodní cestující (OC, Traveling salesperson)

Instance: Množina měst $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$, hodnoty $d(c_i, c_j) \in \mathbb{N}$ přiřazující každé dvojici měst vzdálenost a přirozené číslo D.

Otázka: Existuje permutace měst $c_{\pi(1)}, c_{\pi(2)}, \ldots, c_{\pi(n)}$, pro kterou platí, že

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} d(c_{\pi(i)}, c_{\pi(i+1)})\right) + d(c_{\pi(n)}, c_{\pi(1)}) \leq D?$$

Řešení: Ke grafu $G = (V, E)$ zkonstruujeme instanci OC takto. Množinu měst položíme rovnou množine vrcholů, $C = V$. Vzdálenost mezi městy určíme

$$d(c_i, c_j) = \begin{cases} 0 & \{c_i, c_j\} \in E \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

Položíme $D = 0$.

6. Ukažte, že následující problémy jsou NP-těžké. K důkazu můžete použít převodu z některého z následujících problémů: Splnitelnost, Klika, Nezávislá množina nebo Vrcholové pokrytí.

Problém 11: Celočíselné programování (IP)

Instance:	Matice nad celými čísly A typu $m \times n$ a vektor celých čísel b délky m.
Otázka:	Existuje celočíselný vektor x délky n, pro který platí $Ax \geq b$?

Problém 12: Binární celočíselné programování (BIP)

Instance:	Matice nad celými čísly A typu $m \times n$ a vektor celých čísel b délky m.
Otázka:	Existuje vektor $x \in \{0,1\}^n$, pro který platí $Ax \geq b$?

Ukažte, že problém Binárního celočíselného programování patří do NP a je tedy NP-úplný. Rozmyslete si, proč není tak snadné zdůvodnit, že i problém celočíselného programování bez omezení hodnot patří do třídy NP (byť to platí).

Řešení: Převod Splnitelnosti na BIP zkonstruuje k KNF formuli $\varphi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ na proměnných $x_1, \ldots, x_n$ instanci BIP na proměnných $x_1, \ldots, x_n$ s podmínkami

$$\sum_{x_i \in C_j} x_i + \sum_{\neg x_i \in C_j} (1 - x_i) \geq 1$$

pro každou klauzuli C_j.

Při převodu BIP na IP je potřeba přidat podmínky $0 \leq x_i \leq 1$ pro každou proměnnou x_i.

BIP patří do NP protože polynomiální verifikátor může u daného binárního vektoru ověřit, zda jde o přípustné řešení soustavy nerovností dané maticí A. U IP je to složitější v tom, že přípustné řešení může obsahovat velká čísla. Platí však, že pokud A má přípustné celočíselné řešení, pak má i přípustné řešení polynomiální velikosti, proto i IP patří do třídy NP.

Domácí úkoly

7. (10 bodů) Ukažte, že problém Vrcholové pokrytí je polynomiálně převoditelný na problém Dominující množina

Problém 13: Dominující množina

Instance:	Graf $G = (V, E)$ a přirozené číslo k.
Otázka:	Existuje v G množina vrcholů $S \subseteq V$ velikosti nejvýš k, pro kterou platí, že každý vrchol $v \in V \setminus S$ má souseda v S?

8. (20 bodů) Problém Loupežníci definujeme následujícím způsobem:

Problém 14: Loupežníci

Instance: Množina prvků A a s každým prvkem $a \in A$ asociovaná cena (váha, velikost, ...) $s(a) \in \mathbb{N}$.

Otázka: Lze rozdělit prvky z A na dvě části s toutéž celkovou cenou? Přesněji, existuje množina $A' \subseteq A$ taková, že

$$\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A \setminus A'} s(a)?$$

(a) (10 bodů) Ukažte, že problém Loupežníci je polynomiálně převoditelný na problém Batoh

Problém 15: Batoh

Instance: Množina předmětů A, pro každý předmět a přirozené číslo $s(a)$ udávající jeho velikost a přirozené číslo $v(a)$ udávající jeho cenu, přirozená čísla B a K.

Otázka: Existuje množina předmětů A', pro kterou platí, že $\sum_{a \in A'} s(a) \leq B$ a $\sum_{a \in A'} v(a) \geq K$?

(b) (10 bodů) Ukažte, že problém Loupežníci je polynomiálně převoditelný na problém Rozvrhování.

Problém 16: Rozvrhování

Instance: Počet procesorů m, množina úloh U, pro každou úlohu u přirozené číslo $d(u)$ a přirozené číslo D.

Otázka: Existuje rozdělení množiny předmětů U na m po dvou disjunktních podmnožin $U_1, \ldots, U_m$ tak, aby pro každou z nich, tedy pro každé $1 \leq i \leq m$ platilo, že $\sum_{u \in U_i} d(u) \leq D$?