Vety

Cauchy-Schwarzova nerovnost

Pro kazde $x, y \in V$ platí $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$
Dukaz
Pro $y = 0$ trivialne, pro $y \neq 0$:
Uvazme realnou funkci $f(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle \geq 0$ promene $t \in \mathbb{R}$
$f(t) = \langle x, x\rangle + t\langle x, y\rangle + t\langle y, x\rangle + t^2\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle$
Ma kladny diskriminant
$4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$
z toho dostavame $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$

Gram-Schmidtova ortogonalizace (alg. + důkaz spravnost)

Bud $x_1, ..., x_n \in V$ nezavisle

1. for $k = 1$ to n do
2. $y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1}\langle x_k, z_j\rangle z_j$ // kolmice
3. $z_k = \frac{y_k}{||y_k}$ // normalizace
4. end for

Vystup: $z_1, ..., z_n$ ortonormalni baze prostoru $span\{x_1, ..., x_n\}$
Dukaz
Matematickou indukci podle n
Pro $n = 1$ je $y_1 = x_1 \neq 0$ a $z_1 = \frac{x_1}{||x_1||}$ je dobre zadefinovane a $span\{x_1\} = span\{z_1\}$
indukcni krok $n \leftarrow n - 1$
...

Ortogonalni projekce

Bud V vektorovy prostor a U jeho podprostor. Pak projekci vektoru $x \in V$ rozumime takovy vektor $x_U \in U$, který splnuje $||x - x_U|| = min_{y \in U}||x - y||$

radkova linearita determinantu

Bud $A \in T^{n \times n}$ a $b \in T^n$
Pak pro libovolne $i = 1, ..., n$ plati:
$det(A + e_i b^T) = det(A) + det(A + e_i(b^T - A_{i*}))$

Determinant soucinu matic / Multiplikativnost determinantu

Pro kazde $A, B \in T^{n \times n}$ plati $det(AB) = det(A)det(B)$

Laplaceův rozvoj podle radku/sloupce

Bud $A \in T^{n \times n}$, $n \geq 2$
Pak pro kazde $i = 1, ..., n$ plati
$det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A^{ij})$
kde A^{ij} je matice vznikla z A vyskrtnutim i-teho radku a j-teho sloupce

Vlastnosti vlastnich cisel

Necht $A \in C^{n \times n}$ ma vlastni cisla $\lambda_1, ..., \lambda_n$ a jim odpovidajici vlastni vektory $x_1, ..., x_n$. Pak:

1. A je regularni prave tehdy, kdyz 0 neni jeji vlastni cislo
2. je-li A regularni, pak A^{-1} ma vlastni cisla $\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n^{-1}$ a vlastni vektory $x_1, ..., x_n$
3. A^2 ma vlastni cisla $\lambda_1^2, ..., \lambda_n^2$ a vlastni vektory $x_1, ..., x_n$

4. αA ma vlastni cislo $\alpha\lambda_1, ..., \alpha\lambda_n$ a vlastni vektory $x_1, ..., x_n$
5. $A + \alpha I_n$ ma vlastni cisla $\lambda_1 + \alpha, ..., \lambda_n + \alpha$ a vlastni vektory $x_1, ..., x_n$
6. A^T ma vlastni cisla $\lambda_1, ..., \lambda_n$, ale vlastni vektory obecne jine

Vlastni cisla podobných matic

Podobne matice maji stejna vlastnii cisla

Diagonalizovatelnost a baze vlastnich vektorů

Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je diagonalizovatelna prave tehdy, kdyz ma n linearne nezavislych vlastnich vektoru

Vlastni cisla symetrických (Hermitovských) matic

Vlastni cisla realnych symetrickych (resp. obecneji komplexnich hermitovskych)jsou realna

Spektralni rozklad symetrických matic

Pro kazdou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje ortogonalni $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a diagonalni $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, ze $A = QVQ^T$

Ekvivalentni charakteristiky positivne (semi-)definitnich matic

Bud $A \in R^{n\times n}$ symetricka.
Pak nasledujici podminky jsou ekvivalentni:

1. A je positivne (semi)definitni
2. vlastni cisla A jsou kladna(nezaporna)
3. existuje matice $U \in R^{m\times n}$ hodnosti n takova, ze $A = U^T U$

Rekuretni test positivni definitnosti

Symetricka matice $A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, je positivne definitni prave tehdy, kdyz $\alpha > 0$ a $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} aa^T$ je positivne definitni.

Choleskeho rozklad

Pro kazdou positivne definitni matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje jedina dolni trojuhelnikova matice $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s kladnou diagonalou takova, ze $A = LL^T$

Sylvestrovo kriterium pos. definitnosti

Symetricka matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je positivne definitni prave tehdy, kdyz ji Gaussova eliminace prevede do odstupňovaneho tvaru s kladnou diagonalou za pouziti pouze elementarni upravy pricteni nasobku radku s pivotem k jinemu radku pod nim.

Skalarni soucin a pos. definitnost

Operace $\langle x, y\rangle$ je skalarnim soucinem v $\mathbb{R}^n$ prave tehdy, kdyz ma tvar $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ pro nějakou positivne definitni matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Sylvestrův zakon setrvacnosti

Bud $f(x) = x^T Ax$ kvadraticka forma. Pak existuje baze, vuci niz ma f diagonalni matici s prvky $1, -1, 0$. Navic, tato matice je az na poradi prvku jednoznacna