Lineární Algebra 2 - NMAI058

LS 2019/2020

Mgr. Pavel Hubáček, Ph.D.

25. 2. 2020

https://iuuk.mff.cuni.cz/~hubacek/LA2

1. přednáška

- skalární součin
- norma indukovaná skalárním součinem
- kolmost – Pythagorova věta
- Cauchyho-Schwarzova nerovnost
- trojúhelníková nerovnost
- norma

Dnes

ortonormální báze + ortogonální doplněk

Definice 8.15 - Norma

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$.

Pak norma je zobrazení $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$, splňující $\forall x, y \in V$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ resp. $\forall \alpha \in \mathbb{C}$:

1. $\|x\| \geq 0$ a rovnost nastane pouze pro $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tvrzení 8.16 - Norma indukovaná skalárním součinem

Norma indukovaná skalárním součinem je normou.

Příklady norem v $\mathbb{R}^n$

Pro $p = 1, 2, \dots$ definujeme p-normu vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ jako

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

- pro $p = 2$: eukleidovská norma

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \ ,$$

- pro $p = 1$: součtová norma

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \ ,$$

- pro $p = \infty$: maximová (Čebyševova) norma

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \ .$$

Pozorování 8.20 - Rovnoběžníkové pravidlo

Pro normu indukovanou skalárním součinem platí:

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \ .$$

Důsledek pro součtovou a maximovou normu

- Součtová a maximová norma nejsou indukovány žádným skalárním součinem.
- Nesplňují rovnoběžníkové pravidlo například pro $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$.

Definice 8.21 - Metrika

Metrika na množině M je zobrazení $d\colon M^2 \to \mathbb{R}$, splňující pro všechna $x, y, z \in M$:

1. $d(x, y) \geq 0$ a rovnost nastane pouze pro $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Metrika indukovaná normou

- Každá norma indukuje metriku $d(x, y) := \|x - y\|$.
- Naopak tato diskrétní metrika není indukována žádnou normou:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \neq y, \\ 0, & \text{pro } x = y. \end{cases}$$

Ortonormální báze

Definice 8.24 - Ortogonální a ortonormální systém

Systém vektorů $z_1, \dots, z_n$ je ortogonální, pokud $\langle z_i, z_j \rangle = 0$ pro všechna $i \neq j$.

Systém vektorů $z_1, \dots, z_n$ je ortonormální, pokud je ortogonální a $\|z_i\| = 1$ pro všechna $i = 1, \dots, n$.

Příklady

- Každý ortogonální systém lze znormalizovat.
- V $\mathbb{R}^n$ je ortonormální systém například kanonická báze.
- V $\mathbb{R}^2$ tvoří ortonormální systém vektory $\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)^T$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1)^T$.

Tvrzení 8.26 - Ortonormalita a lineární nezávislost

Je-li systém vektorů $z_1, \dots, z_n$ ortonormální, pak je lineárně nezávislý.

Tvrzení 8.27 - Fourierovy koeficienty

Buď $z_1, \ldots, z_n$ ortonormální báze prostoru V. Pak pro každé $x \in V$ platí

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i \ .$$

Poznámky

- Vyjádření $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i$ nazýváme Fourierův rozvoj x.
- Skaláry $\langle x, z_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n$ se nazývají Fourierovy koeficienty x.
- Vektor $\langle x, z_i \rangle z_i$ je kolmá projekce x na $\mathrm{span}\{z_i\}$.

Gramova-Schmidtova Ortogonalizace

Vstup: $x_1, \dots, x_n \in V$ lineárně nezávislé.

1. **for** $k := 1$ **to** n **do**
2. $\quad y_k := x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j,$ //nalezneme kolmici
3. $\quad z_k := \frac{1}{\|y_k\|} y_k,$ //normalizujeme délku na 1
4. **end for**

Výstup: $z_1, \dots, z_n$ ortonormální báze prostoru $\mathrm{span}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Důsledky Gramovy-Schmidtovy Ortogonalizace

Důsledek 8.32 - **Existence ortonormální báze**

Každý konečně generovaný prostor (se skalárním součinem) má ortonormální bázi.

Důsledek 8.33 - **Rozšíření ON systému na ON bázi**

Každý ortonormální systém vektorů v konečně generovaném prostoru lze rozšířit na ortonormální bázi.

Ortogonální doplněk

Definice 8.38 - Ortogonální doplněk

Buď V vektorový prostor a $M \subseteq V$. Pak ortogonální doplněk M je

$$M^{\perp} \coloneqq \{x \in V;\ \langle x, y\rangle = 0\ \forall y \in M\}\ .$$

Tvrzení 8.40 - Vlastnosti ortogonálního doplňku množiny

Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$. Pak

1. $M^\perp$ je podprostor V,
2. je-li $M \subseteq N$ pak $M^\perp \supseteq N^\perp$,
3. $M^\perp = \operatorname{span}(M)^\perp$.

Tvrzení 8.41 - Vlastnosti ortogonálního doplňku podprostoru

Buď U podprostor vektorového prostoru V. Potom platí:

1. Je-li $z_1, \ldots, z_m$ ortonormální báze U,
   a je-li $z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n$ její rozšíření na ortonormální bázi V,
   pak $z_{m+1}, \ldots, z_n$ je ortonormální báze $U^\perp$.
2. $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$,
3. $V = U + U^\perp$,
4. $(U^\perp)^\perp = U$,
5. $U \cap U^\perp = \{o\}$.

2. přednáška - shrnutí

- ortonormální báze
  - Fourierovy koeficienty
  - Gramova-Schmidtova ortogonalizace
- ortogonální doplněk

Příští přednáška

ortogonální projekce