

Predmet: Linearni algebra 2

Ukol: 2.

Verze: 1.

Autor: David Napravnik

Prezdivka: DN

1. zadani

Prevedte nasledujici matice do tvaru SDS^{-1} , kde D je diagonalni a S je regularni.

reseni A

$$\begin{bmatrix} 0-\lambda & -3 & -3 \\ -4 & -7-\lambda & -7 \\ 6 & 12 & 12-\lambda \end{bmatrix}$$

Vlastni cisla:

$$p_A(\lambda) = +(0-\lambda) * (-7-\lambda) * (12-\lambda) + (-3) * (-7) * (6) + (-3) * (-4) * (12) - (-3) * (-7-\lambda) * (6) - (-7) * (12) * (0-\lambda) - (-3) * (-4) * (12-\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = 3$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vlastni vektory:

$$\text{pro } \lambda_1: \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -4 & -7 & -7 \\ 6 & 12 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow [0, -1, 1]$$

$$\text{pro } \lambda_2: \begin{bmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -4 & -9 & -7 \\ 6 & 12 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow [-3, -1, 3]$$

$$\text{pro } \lambda_3: \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -4 & -10 & -7 \\ 6 & 12 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow [1, 1, -2]$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -4 & -7 & -7 \\ 6 & 12 & 12 \end{bmatrix}$$

reseni B

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\text{Vlastni cisla: } p_A(\lambda) = (-1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

$$\lambda_1 = -1 + i$$

$$\lambda_2 = -1 - i$$

Vlastni vektory:

$$\text{pro } \lambda_1: \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \Rightarrow [-i, 1]$$

$$\text{pro } \lambda_2: \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \Rightarrow [i, 1]$$

2. zadani

Rozhodnete o platnosti nasledujicich implikacich

reseni

1.) Platí

Mejme λ_{Ax} jsou vlastní čísla matice A ,
a λ_{Bx} jsou vlastní čísla matice A^2 ,
pak pro každé z nich platí: $\lambda_{Bx} = (\lambda_{Ax})^2$

2.) Neplatí

Mejme λ_{Ax} jsou vlastní čísla matice A ,
a λ_{Bx} jsou vlastní čísla matice A^2 ,
pak pro každé z nich musí platit: $\lambda_{Bx} = (\lambda_{Ax})^2$, ale
to neplatí pro $\lambda_{Ax} < 0$

3. zadání

Bud $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizovatelná. Ukážete $A \sim A^T$

reseni

4. zadání

Budte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ podobné. Ukážete, že maticová soustava $AX - XB = 0$ má řešení $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$

reseni

$A = SBS^{-1}$ | vzoreček podobnosti
 $SBS^{-1}X = XB$ | dokazovaná rovnice
 $SBS^{-1}XX^{-1} = XBX^{-1}$
 $SBS^{-1} = XBX^{-1}$ |
pak vidíme že $X = S$