

NTIN090 — Základy složitosti a vyčísitelnosti

4. cvičení

Petr Kučera

1. prosince 2022

1 Věty použitelné v příkladech

Připomeňme si nejprve základní třídy složitosti definované k funkci $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

$\text{TIME}(f(n))$ jazyky přijímané deterministickými Turingovými stroji v čase $O(f(n))$.

$\text{SPACE}(f(n))$ jazyky přijímané deterministickými Turingovými stroji v prostoru $O(f(n))$.

$\text{NTIME}(f(n))$ jazyky přijímané nedeterministickými Turingovými stroji v čase $O(f(n))$.

$\text{NSPACE}(f(n))$ jazyky přijímané nedeterministickými Turingovými stroji v prostoru $O(f(n))$.

Dále si shrneme tvrzení z přednášky, jež se mohou hodit při řešení příkladů z tohoto cvičení.

Věta (Vztahy mezi třídami): Pro každou funkci $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ platí

- (i) $\text{TIME}(f(n)) \subseteq \text{SPACE}(f(n))$
- (ii) $\text{TIME}(f(n)) \subseteq \text{NTIME}(f(n))$
- (iii) $\text{SPACE}(f(n)) \subseteq \text{NSPACE}(f(n))$
- (iv) $\text{NTIME}(f(n)) \subseteq \text{SPACE}(f(n))$ □

Věta (Vztah prostoru a času): Pro každou funkci $f(n) \geq \log_2 n$ a každý jazyk L platí, že

$$L \in \text{NSPACE}(f(n)) \implies (\exists c_L \in \mathbb{N}) [L \in \text{TIME}(2^{c_L f(n)})]. \quad \square$$

Důsledek 3 Je-li $f(n)$ funkce, pro kterou platí $f(n) \geq \log_2 n$ a je-li $g(n)$ funkce, pro kterou platí $f(n) = o(g(n))$, pak

$$\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{TIME}(2^{g(n)}).$$

Věta (Savičova věta): Pro každou funkci $f(n) \geq \log_2 n$ platí

$$\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{SPACE}(f^2(n)). \quad \square$$

Věta (Deterministická prostorová hierarchie): Jsou-li $f_1, f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funkce, pro které platí, že $f_1(n) = o(f_2(n))$ a f_2 je prostorově konstruovatelná¹, potom

$$\text{SPACE}(f_1(n)) \subsetneq \text{SPACE}(f_2(n)). \quad \square$$

Věta (Deterministická časová hierarchie): Jsou-li $f_1, f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funkce, pro které platí, že $f_1(n) = o(f_2(n)/\log f_2(n))$ a f_2 je časově konstruovatelná², potom

$$\text{TIME}(f_1(n)) \subsetneq \text{TIME}(f_2(n)). \quad \square$$

¹Všechny funkce, které v následujících příkladech uvažujeme, jsou prostorově konstruovatelné a tento předpoklad tak není třeba ověřovat.

²Všechny funkce, které v následujících příkladech uvažujeme, jsou časově konstruovatelné a tento předpoklad tak není třeba ověřovat.

2 Příklady

1. Pro následující dvojice tříd rozhodněte, zda mezi nimi platí nějaká inkluze, pokud ano, tak zda je ostrá nebo ne. Vyznačte také dvojice, u nichž není možno (z našich znalostí) ukázat, zda mezi nimi je nějaký vztah. Přesněji, mezi danou dvojici tříd doplňte symbol \subseteq , \subset , $=$, \supseteq , \supset nebo „?“ . Své odpovědi zdůvodněte.

(1)	$\text{SPACE}(n \log n)$	$\text{TIME}(2^{n^2})$
(2)	$\text{TIME}(2^{n^2})$	$\text{TIME}(2^{n \log n})$
(3)	$\text{TIME}(2^{n \log n})$	$\text{NSPACE}(\log^2 n)$
(4)	$\text{NSPACE}(\log^2 n)$	$\text{NTIME}(n)$
(5)	$\text{NTIME}(n)$	$\text{SPACE}(n \log n)$
(6)	$\text{SPACE}(n \log n)$	$\text{TIME}(2^{n \log n})$
(7)	$\text{TIME}(2^{n^2})$	$\text{NSPACE}(\log^2 n)$
(8)	$\text{TIME}(2^{n \log n})$	$\text{NTIME}(n)$
(9)	$\text{NSPACE}(\log^2 n)$	$\text{SPACE}(n \log n)$
(10)	$\text{NTIME}(n)$	$\text{TIME}(2^{n^2})$

2. Pro následující dvojice tříd rozhodněte, zda mezi nimi platí nějaká inkluze, pokud ano, tak zda je ostrá nebo ne. Vyznačte také dvojice, u nichž není možno (z našich znalostí) ukázat, zda mezi nimi je nějaký vztah. Přesněji, mezi danou dvojici tříd doplňte symbol \subseteq , \subset , $=$, \supseteq , \supset nebo „?“ . Své odpovědi zdůvodněte.

(1)	$\text{SPACE}(n)$	$\text{TIME}(2^n)$
(2)	$\text{TIME}(2^n)$	$\text{TIME}(2^{n \log n})$
(3)	$\text{TIME}(2^{n \log n})$	$\text{NSPACE}((\log n)^3)$
(4)	$\text{NSPACE}((\log n)^3)$	$\text{NTIME}(2^n)$
(5)	$\text{NTIME}(2^n)$	$\text{SPACE}(n)$
(6)	$\text{SPACE}(n)$	$\text{TIME}(2^{n \log n})$
(7)	$\text{TIME}(2^n)$	$\text{NSPACE}((\log n)^3)$
(8)	$\text{TIME}(2^{n \log n})$	$\text{NTIME}(2^n)$
(9)	$\text{NSPACE}((\log n)^3)$	$\text{SPACE}(n)$
(10)	$\text{NTIME}(2^n)$	$\text{TIME}(2^n)$

3. Ukažte, že třída P je uzavřena na sjednocení, průnik a doplněk.
 4. Ukažte, že třída NP je uzavřena na sjednocení a průnik.
 5. Ukažte, že třída NP je uzavřena na operaci Kleeného hvězdičky. Tj. je-li $A \in \text{NP}$

$$A^* = \{w = w_1 w_2 \dots w_k \mid k \in \mathbb{N} \wedge (\forall i = 1, \dots, k)[w_i \in A]\}$$

je v NP.

6. Ukažte, že třída P je uzavřena na operaci Kleeného hvězdičky. Tj. je-li $A \in \text{P}$

$$A^* = \{w = w_1 w_2 \dots w_k \mid k \in \mathbb{N} \wedge (\forall i = 1, \dots, k)[w_i \in A]\}$$

je v P.

3 Domácí úkoly

7. (30 bodů) Pro následující dvojice tříd rozhodněte, zda mezi nimi platí nějaká inkluze, pokud ano, tak zda je ostrá nebo ne. Vyznačte také dvojice, u nichž není možno (z našich znalostí) ukázat, zda mezi nimi je nějaký vztah. Přesněji, mezi danou dvojici tříd doplňte symbol \subseteq , \subset , $=$, \supseteq , \supset nebo „?“ . Své odpovědi zdůvodněte.

- | | | |
|------|------------------------------|------------------------------|
| (1) | $\text{SPACE}(n)$ | $\text{TIME}(2^{\log^3 n})$ |
| (2) | $\text{TIME}(2^{\log^3 n})$ | $\text{NSPACE}(\log^2 n)$ |
| (3) | $\text{NSPACE}(\log^2 n)$ | $\text{NTIME}(2^{\log^3 n})$ |
| (4) | $\text{NTIME}(2^{\log^3 n})$ | $\text{NTIME}(2^{n \log n})$ |
| (5) | $\text{NTIME}(2^{n \log n})$ | $\text{SPACE}(n)$ |
| (6) | $\text{SPACE}(n)$ | $\text{NSPACE}(\log^2 n)$ |
| (7) | $\text{TIME}(2^{\log^3 n})$ | $\text{NTIME}(2^{\log^3 n})$ |
| (8) | $\text{NSPACE}(\log^2 n)$ | $\text{NTIME}(2^{n \log n})$ |
| (9) | $\text{NTIME}(2^{\log^3 n})$ | $\text{SPACE}(n)$ |
| (10) | $\text{NTIME}(2^{n \log n})$ | $\text{TIME}(2^{\log^3 n})$ |