Predmet: Linearni algebra 2
Ukol: 1.
Verze: 2.
Autor: David Napravnik
Prezdivka: DN

zadani

$det[-4]$ (pochopeno jako matice $\mathbb{R}^{1\times 1}$)

reseni

matici si rozsirim, abych to dostal do vzorecku pro matice 2x2
$det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = (1 * (-4)) - (0 * 0) = -4$
$det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = 1 * det \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix} - 0 * det \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
$det \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix} = -4$

zadani

$det(-2I_n)$

reseni

jelikoz mame cisla jen na diagonale a dolni trojuhelnik je tvoren nulami, staci je vynasobit
$det(-2I_n) = (-2)^n$

zadani

$det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

reseni

pouzijeme Sarrusovo pravidlo
$= (2 * 2 * 2) + (4 * 4 * 2) + (1 * 3 * 3) - (1 * 2 * 2) - (4 * 3 * 2) - (2 * 4 * 3)$
$= -3$

zadani

$det \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & b \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \end{bmatrix}$

reseni

udelame REF (bez pravidla pro nasobeni radku konstantou)
$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & e & f \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \frac{fa-eb}{a} \end{bmatrix}$
jelikoz dostaneme horni trojuhelnikovou matici staci vynasobit prvky na diagonale a dostaneme vysledek
$= c * d * a * \frac{fa-eb}{a} = cd(fa - eb)$

zadani

$$det \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

reseni

stejne jako v predchozim pripade dostaneme matici do REF,
s tim ze pokud nasobime radek konstantou, tak jej na konci od vysledku podelime.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tim ze mame spodni trojuhlenikovou matici nulovou,
staci vynasobit prvky diagonaly.
tudiz determinant je jedna

zadani

Bud $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dokazte ze $det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = det(A)det(B)$

reseni

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = det[B]$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = det[A]$$

$$det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = det[A] * det[B]$$

zadani

Vyreste Cramerovym pravidlem nastedujici soustavu dvou rovnic v $\mathbb{Z}_5$
$x + y = 4$
$2x + 4y = 4$

reseni

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{det(A + (b - A_{*i})e_i^T)}{det(A)}, i = 1, \dots, n$$

$$det(A) = 2$$

$$x_1 = \frac{det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) e_i^T\right)}{det(A)}$$

$$x_1 = \frac{det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right)}{det(A)}$$

$x_1 = \frac{2}{2} = 2 * 2^{-1} = 1$

$$x_2 = \frac{det\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix}4\\ 4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}\right)e_i^T\right)}{det(A)}$$

$$x_2 = \frac{det\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)}{det(A)}$$

$x_2 = \frac{1}{2} = 1 * 2^{-1} = 3$

$x = 1, y = 3$

zadani

Pomocí adjungované matice určete matici inverzní k matici $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

reseni

$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$

$det(A) = ad - cb$

$adj(A) = \begin{bmatrix}d & c\\ b & a\end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{d}{ad-cb} & \frac{-b}{ad-cb}\\ \frac{-c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb}\end{bmatrix}$