Automaty a gramatiky

TIN071

Marta Vomlelová

marta@ktiml.mff.cuni.cz
http://ktiml.mff.cuni.cz/~marta

March 11, 2021

Organizační záležitosti

- Přednáška:
  - moodle https://dl1.cuni.cz/course/index.php?categoryid=337
    - login jako do SIS
  - video nahrávky přednášek z roku 2019 https://is.mff.cuni.cz/prednasky/prednaska/NTIN071/1
    - login jako do SIS
  - zoom meet v době přednášky
    - Meeting ID: 966 6219 3151
    - heslo a link v Moodle
- Cvičení:
  - vyzkoušíte si prakticky sestrojit automaty a gramatiky
  - zažijete příklady, což je něco jiného, než je přečíst,
  - potřebujete zápočet, který udělují **výhradně** cvičící.
- Zkouška:
  - **Zápočet je nutnou podmínkou účasti na zkoušce**.
  - Moodle test i ústní část
  - Porozumění látce + schopnost formalizace
    - Orientace v Chomského hierarchii, automatech, gramatikách, (ne)determinizmu,
    - Napište definici, formulujte větu, popište ideu důkazu, algoritmus,
    - zařaďte jazyk do Chomského hierarchie a svou odpověď dokažte.

Požadavky ke zkoušce

- **Zápočet je nutnou podmínkou účasti na zkoušce**.
- Zkouška sestává z moodle testu a ústní části. Moodle test předchází části ústní, její nesplnění znamená, že celá zkouška je hodnocena známkou nevyhověl(a) a ústní částí se již nepokračuje.
  - K moodle testu můžete být vyzváni k instalaci Safe Exam Browser včetně Zoom připojení kamery.
- Nesložení ústní části znamená, že při příštím termínu je nutno opakovat obě části zkoušky, písemnou i ústní. Známka ze zkoušky se stanoví na základě bodového hodnocení moodle i ústní části.
- **Moodle test** bude sestávat z dvanácti otázek, které korespondují sylabu přednášky, ověřují schopnosti získané na cvičení a znalost definic, vět a algoritmů z přednášky.
- **Požadavky ústní části** odpovídají sylabu předmětu v rozsahu, který byl prezentován na přednášce. Zpravidla se jedná o detailnější rozbor zadaného problému, např. zdůvodnění zařazení daného jazyka do Chomského hierarchie či důkaz klíčových vět.

Zdroje a literatura

- J.E. Hopcroft, R. Motwani, J.D. Ullman: *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computations*, Addison–Wesley
- M. Chytil: *Automaty a gramatiky, SNTL Praha, 1984*
- moodle https://dl1.cuni.cz/course/index.php?categoryid=337
- cvičení.

Pohled do historie

- Počátky
  - první formalizace pojmu algoritmus Ada, Countess of Lovelace 1852
  - intenzivněji až s rozvojem počítačů ve druhé čtvrtině 20. století
  - co stroje umí a co ne?
  - Church, Turing, Kleene, Post, Markov
- Polovina 20. století
  - neuronové sítě (1943)
  - konečné automaty (Finite Automata) (Kleene 1956 neuronové sítě $\approx$ FA)
- 60. léta 20. století
  - gramatiky (Chomsky)
  - zásobníkové automaty
  - formální teorie konečných automatů.

Cíl přednášky

- Osvojit si abstraktní model výpočetních zařízení,
- vnímat, jak drobné změny v definici vedou k velmi odlišným třídám,
- zažít skutečnost algoritmicky nerozhodnutelných problémů,
- příprava na přednášku o složitosti a NP-úplnosti.

Automaty a gramatiky – dva způsoby popisu

Turingovy stroje Vícepáskové, nedeterministické	$\longleftrightarrow$	gramatiky Typu 0
lineárně omezené automaty	$\longleftrightarrow$	kontextové gramatiky monotónní gramatiky
zásobníkové automaty	$\longleftrightarrow$	bezkontextové gramatiky
konečné automaty DFA, NFA, λNFA	$\longleftrightarrow$	regulární gramatiky

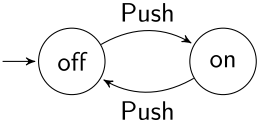
Praktické využití

- Zamyšlení nad korektností programu, algoritmu, překladače,
- zpracování přirozeného jazyka,
- překladače:
  - lexikální analýza,
  - syntaktická analýza,
- návrh, popis, verifikace hardware
  - integrované obvody
  - stroje
  - automaty
- realizace pomocí software
  - hledání výskytu slova v textu (grep)
  - verifikace systémů s konečně stavy.

Jednoduché příklady konečných automatů

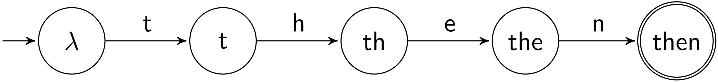
- Návrh a verifikace integrovaných obvodů.

Konečný automat modelující spínač on/off .



- Lexikální analýza

Konečný automat rozpoznávající slovo `then`.



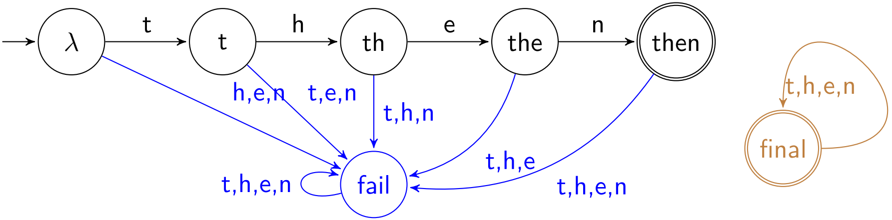
Definition 1.1 (Deterministický konečný automat)

Deterministický konečný automat (DFA) $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sestává z:

- konečné množiny **stavů**, zpravidla značíme Q
- konečné neprázdné množiny **vstupních symbolů (abecedy)**, značíme Σ
- **přechodové funkce**, zobrazení $Q \times \Sigma \rightarrow Q$, značíme δ, která bude reprezentovaná hranami grafu
- **počátečního stavu** $q_0 \in Q$, vede do něj šipka 'odnikud',
- a neprázdné **množiny koncových (přijímajících) stavů** (final states) $F \subseteq Q$, označených dvojitým kruhem či šipkou 'ven'.

Úmluva: Pokud pro některou dvojici stavu a písmene není definovaný přechod, přidáme nový stav *fail* a přechodovou funkci doplníme na totální přidáním šipek do *fail*.

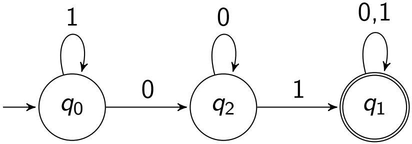
Pokud je množina F prázdná, přidáme do ní i Q nový stav *final* do kterého vedou jen přechody z něj samého $\forall s \in \Sigma$: $\delta(final, s) = final$.



Example 1.1

Automat A přijímající $L = \{x01y : x, y \in \{0,1\}^*\}$.

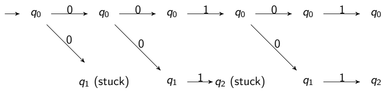
- Stavový diagram (graf) Automat $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$.



- tabulka
  - řádky: stavy + přechody
  - sloupce: písmena vstupní abecedy

δ	0	1
$\rightarrow q_0$	q_2	q_0
$*q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

- Stavový strom
  - vrcholy=stavy
  - hrany=přechody
  - *pouze dosažitelné stavy*
  - použijeme až u nedeterministických FA.



Abeceda, slova, jazyky

Definition 1.2 (Slovo, λ,ϵ,Σ^*,Σ^+,jazyk)

Mějme neprázdnou množinu symbolů Σ.

- **Slovo** je konečná (i prázdná) posloupnost symbolů $s \in \Sigma$, **prázdné slovo** se značí λ nebo ϵ.
- **Množinu všech slov v abecedě Σ** značíme Σ^*,
- množinu všech neprázdných slov v značíme Σ^+.
- **jazyk** $L \subseteq \Sigma^*$ je množina slov v abecedě Σ.

Definition 1.3 (operace zřetězení, mocnina, délka slova)

Nad slovy Σ^* definujeme operace:

- **zřetězení slov** $u.v$ nebo uv
- **mocnina** (počet opakování) u^n ($u^0 = \lambda$, $u^1 = u$, $u^{n+1} = u^n.u$)
- **délka slova** $|u|$ ($|\lambda| = 0$, $|auto| = 4$).
- **počet výskytů** $s \in \Sigma$ ve slově u značíme $|u|_s$ ($|zmrzlina|_z = 2$).

Rozšířená přechodová funkce

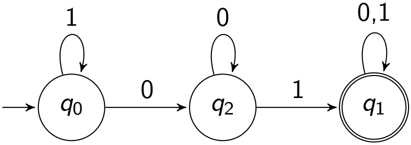
Definition 1.4 (rozšířená přechodová funkce)

Mějme přechodovou funkci $\delta : Q \times \Sigma \to Q$.
Rozšířenou přechodovou funkci δ^*: $Q \times \Sigma^* \to Q$ (tranzitivní uzávěr δ) definujeme induktivně:

- $\delta^*(q, \lambda) = q$
- $\delta^*(q, wx) = \delta(\delta^*(q, w), x)$ pro $x \in \Sigma, w \in \Sigma^*$.

Pozn. Pokud se v textu objeví δ aplikované na slova, míní se tím δ^*.

$\delta^*(q_0, 1100) = q_2$, $\delta^*(q_0, 1100111111111001) = q_1$



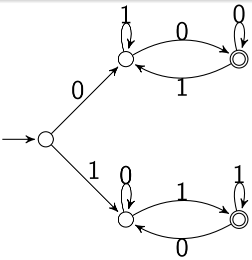
Jazyky rozpoznatelné konečnými automaty

Definition 1.5 (jazyky rozpoznatelné konečnými automaty, regulární jazyky)

- **Jazykem rozpoznávaným (akceptovaným, přijímaným)** konečným automatem $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme jazyk $L(A) = \{w \mid w \in \Sigma^* \ \& \ \delta^*(q_0, w) \in F\}$.
- Slovo w je **přijímáno** automatem A, právě když $w \in L(A)$.
- Jazyk L je **rozpoznatelný** konečným automatem, jestliže existuje konečný automat A takový, že $L = L(A)$.
- Třídu jazyků rozpoznatelných konečnými automaty označíme $\mathcal{F}$, nazveme **regulární jazyky**.

Example 1.2 (regulární jazyky)

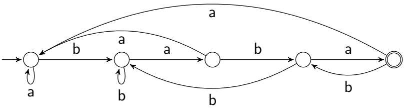
- $L = \{w \mid w = xux, w \in \{0,1\}^*, x \in \{0,1\}, u \in \{0,1\}^*\}$.



Příklady regulárních jazyků

Example 1.3 (regulární jazyk)

- $L = \{w \mid w = ubaba, w \in \{a,b\}^*, u \in \{a,b\}^*\}$.

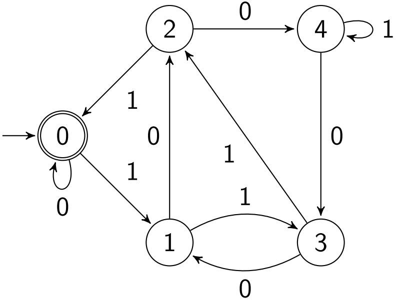


Example 1.4 (regulární jazyk)

- $L = \{w | w \in \{0,1\}^* \& w$ je binární zápis čísla dělitelného 5$\}$.

Example 1.5 (!NEregulární jazyk)

- $L = \{0^n 1^n | w \in \{0,1\}^*, n \in \mathbb{N}\}$ NENÍ regulání jazyk.



Iterační (pumping) lemma pro regulární jazyky

Theorem 1.1 (!Iterační (pumping) lemma pro regulární jazyky)

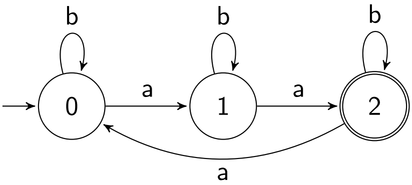
Mějme regulární jazyk L. Pak existuje konstanta $n \in \mathbb{N}$ (závislá na L) tak že každé $w \in L; |w| \geq n$ můžeme rozdělit na tři části, $w = xyz$, že:

- $y \neq \lambda$
- $|xy| \leq n$
- $\forall k \in \mathbb{N}_0$, *slovo* xy^kz *je také v* L.

Example 1.6

- Lemma řeklo: $n = 3$.
- $abbbba = a(b)bbba$;
  $\forall i \geq 0; a(b)^i bbba \in L(A)$.
- $aaaaba = (aaa)aba$;
  $\forall i \geq 0; (aaa)^i aba \in L(A)$.
- aa nelze pumpovat, ale $|aa| < n$.

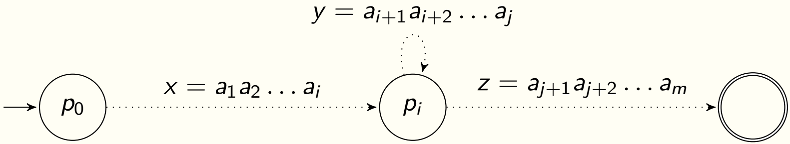
Automat A



Důkaz iteračního lematu pro regulární jazyky

Proof: iteračního lematu pro regulární jazyky

- Mějme regulární jazyk L, pak existuje DFA A s n stavy, že $L = L(A)$.
- Vezměme libovolné slovo $a_1 a_2 \dots a_m = w \in L$ délky $m \geq n$, $a_i \in \Sigma$.
- Definujme: $\forall i \; p_i = \delta^*(q_0, a_1 a_2 \dots a_i)$. Platí $p_0 = q_0$.
- Máme $n + 1$ p_i a n stavů, některý se opakuje, vezměme první takový, tj. $(\exists i, j)(0 \leq i < j \leq n \;\&\; p_i = p_j)$.
- Definujme: $x = a_1 a_2 \dots a_i$, $y = a_{i+1} a_{i+2} \dots a_j$, $z = a_{j+1} a_{j+2} \dots a_m$, tj. $w = xyz$, $y \neq \lambda$, $|xy| \leq n$.



- Smyčka nad p_i se může opakovat libovolně krát a vstup je také akceptovaný.

□

Použití pumping lemmatu

Example 1.7 (Pumping lemma jako hra s oponentem)

Jazyk $L_{eq} = \{w; |w|_0 = |w|_1\}$ slov se stejným počtem 0 a 1 není regulární.

Proof: Jazyk L_{eq} není regulární.

- Předpokládejme že L_{eq} je regulární. Vezměme n z pumping lemmatu.
- Zvolme $w = 0^n 1^n \in L_{eq}$.
- Rozdělme $w = xyz$ dle pumping lemmatu, $y \neq \lambda$, $|xy| \leq n$.
- Protože $|xy| \leq n$ je na začátku w, obsahuje jen 0.
- Z pumping lemmatu: $xz \in L_{eq}$ (pro $k = 0$). To má ale méně 0 než 1, takže nemůže být v L_{eq}.

□

Example 1.8

Jazyk $L = \{0^i 1^i; i \geq 0\}$ není regulární.

Aplikace pumping lemmatu 2

Example 1.9

Jazyk L_{pr} slov 1^p kde p je prvočíslo není regulární.

Proof: L_{pr} slov 1^p kde p je prvočíslo není regulární.

- Předpokládejme že L_{pr} je regulární. Vezměme n z pumping lemmatu. Zvolme prvočíslo $p \geq n + 2$, označme $w = 1^p$.
- Rozložme $w = xyz$ dle pumping lemmatu, nechť $|y| = m$. Pak $|xz| = p - m$.
- $xy^{p-m}z \in L_{pr}$ z pumping lemmatu, ale $|xy^{p-m}z| = |xz| + (p - m)|y| = p - m + (p - m)m = (m + 1)(p - m)$ není prvočíslo (žádný z činitelů není 1). $\square$

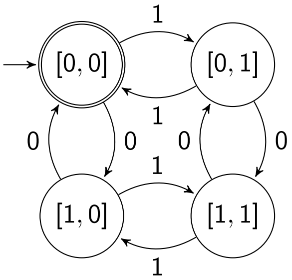
Dnes jsme probrali

- definice
  - deterministického konečného automatu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - jazyka $L \subseteq \Sigma^*$
  - jazyka rozpoznávaného konečným automatem
    $L(A) = \{w \mid w \in \Sigma^* \ \& \ \delta^*(q_0, w) \in F\}$
- iterační (pumping) lemma pro regulární jazyky
- příklad důkazu ne–regulárnosti jazyka $0^i 1^i$
- příklady regulárních jazyků.

Příklad - 'součin' automatů

Example 1.10

$L = \{w \mid w \in \{0,1\}^*, |w|_0 = 2k \& |w|_1 = 2\ell, k, \ell \in \mathbb{N}_0\}$, tj. sudý počet 0 a zároveň sudý počet 1.



δ	0	1
$* \rightarrow [0,0]$	$[1,0]$	$[0,1]$
$[0,1]$	$[1,1]$	$[0,0]$
$[1,0]$	$[0,0]$	$[1,1]$
$[1,1]$	$[0,1]$	$[1,1]$

Příklad (špatného) protokolu pro elektronický převod peněz

- Tři zúčastnění: zákazník, obchod, banka.
- Pro jednoduchost jen jedna platba (soubor 'money').

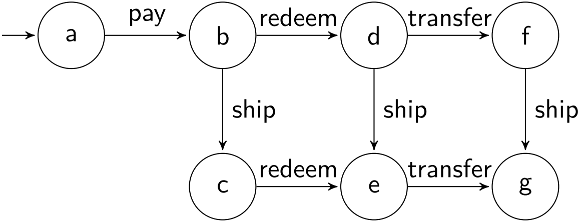
Example 1.11

Zákazník poskytne obchodu číslo kreditní karty, obchod si vyžádá peníze od banky a pošle zboží zákazníkovi. Zákazník má možnost zablokovat kartu a žádat zrušení transakce.

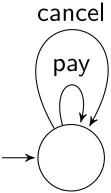
Pět událostí:

- Zákazník může zadat číslo karty **pay**.
- Zákazník může kartu zablokovat **cancel**.
- Obchod může poslat **ship** zboží zákazníkovi.
- Obchod může vyžádat **redeem** peníze od banky.
- Banka může převést **transfer** peníze obchodu.

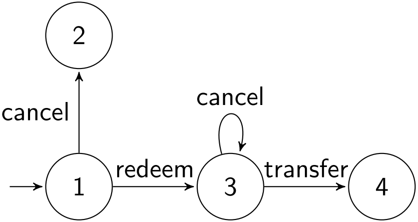
(Neúplný) konečný automat pro bankovní příklad



Obchod



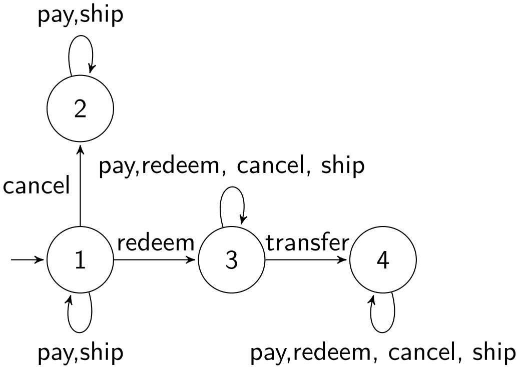
Zákazník



Banka

Hrana pro každý vstup

- Můžeme vyžadovat, aby automat provedl akci pro každý vstup. Obchod přidá hranu pro každý stav do sebe samého označenou *cancel*.
- Zákazník by neměl shodit bankovní automat opětovným zaplacením *pay*, proto přidáme smyčku *pay*. Podobně s ostatními akcemi.

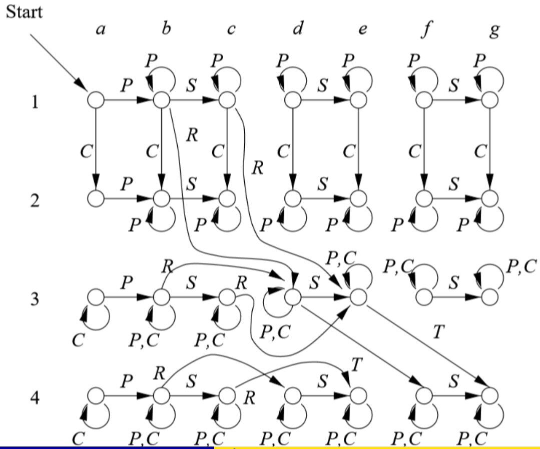


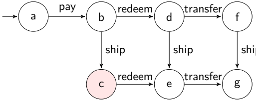
Úplnější automat pro banku.

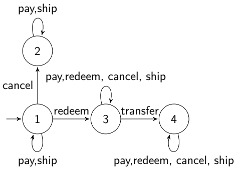
Součin automatů

- Součin automatů pro banku a obchod má stavy dvojice $B \times S$.
- Hrana v součinu automatů provádí paralelně akce v bance a obchodě. Pokud jednomu chybí akce, bude chybět i součinu automatů.

J.E. Hopcroft, R. Motwani, J.D. Ullman: *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computations*, Addison–Wesley

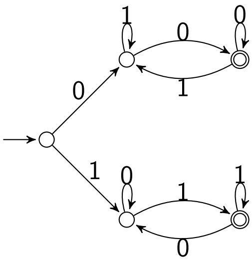






Konečné automaty, Regulární jazyky

- **Deterministický konečný automat (DFA)** $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- **Jazykem rozpoznávaným (akceptovaným, přijímaným)** konečným automatem $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme jazyk $L(A) = \{w | w \in \Sigma^* \& \delta^*(q_0, w) \in F\}$.
- Jazyk L je **rozpoznatelný** konečným automatem, jestliže existuje konečný automat A takový, že $L = L(A)$.
- Třídu jazyků rozpoznatelných deterministickými konečnými automaty označíme $\mathcal{F}$, nazveme **regulární jazyky**.



- Typická otázka na cvičeních i zaškrtávací části zkoušky: Je daný jazyk regulární (CFL, ...)?

ANO Setrojíte automat (deterministický či nedeterministický).

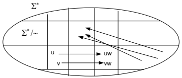
NE Najdete spor s Myhill–Nedorovou větou nebo s Pumping lemmatem.

Kongruence, Myhill–Nedorova věta

Definition 2.1 (kongruence)

Mějme konečnou abecedu Σ a relaci ekvivalence $\sim$ na Σ^* (reflexivní, symetrická, tranzitivní). Potom:

- $\sim$ je **pravá kongruence**, jestliže $(\forall u, v, w \in \Sigma^*) u \sim v \Rightarrow uw \sim vw$.
- je **konečného indexu**, jestliže rozklad $\Sigma^*/\sim$ má konečný počet tříd.
- Třídu kongruence $\sim$ obsahující slovo u značíme $[u]_\sim$, resp. $[u]$.

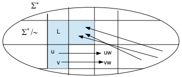


Theorem 2.1 (!Myhill–Nedorova věta)

Nechť L je jazyk nad konečnou abecedou Σ. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

a) *L je rozpoznatelný konečným automatem,*

b) *existuje pravá kongruence $\sim$ konečného indexu nad Σ^* tak, že L je sjednocením jistých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$.*

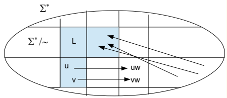


a)$\Rightarrow$b); tj. automat $\Rightarrow$ pravá kongruence konečného indexu

- definujeme $u \sim v \equiv \delta^*(q_0, u) = \delta^*(q_0, v)$.
- je to ekvivalence (reflexivní, symetrická, transitivní)
- je to pravá kongruence (z definice δ^*)
- má konečný index (konečně mnoho stavů)

$$L = \{w|\delta^*(q_0, w) \in F\} = \bigcup_{q\in F}\{w|\delta^*(q_0, w) = q\} = \bigcup_{q\in F}[w|\delta^*(q_0, w) = q]_\sim.$$

b)$\Rightarrow$a); tj. pravá kongruence konečného indexu $\Rightarrow$ automat



- abeceda automatu vezmeme Σ
- za stavy Q volíme třídy rozkladu $\Sigma^*/\sim$
- počáteční stav $q_0 \equiv [\lambda]$
- koncové stavy $F = \{c_1, \ldots, c_n\}$, kde $L = \bigcup_{i=1,\ldots,n} c_i$
- přechodová funkce $\delta([u], x) = [ux]$ (je korektní z def. pravé kongruence).
- $L(A) = L$

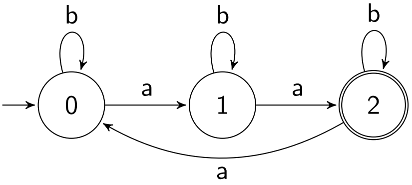
$w \in L \Leftrightarrow w \in \bigcup_{i=1,\ldots,n} c_i \Leftrightarrow w \in c_1 \vee \ldots w \in c_n \Leftrightarrow [w] = c_1 \vee \ldots [w] = c_n \Leftrightarrow [w] \in F \Leftrightarrow w \in L(A)$

Použití Myhill–Nedorovy věty: Konstrukce automatů

Example 2.1

Sestrojte automat přijímající jazyk
$L = \{w | w \in \{a, b\}^* \& \ |w|_a = 3k + 2\}$, tj. obsahuje $3k + 2$ symbolů a.

- $|u|_x$ značí počet symbolů x ve slově u
- definujme $u \sim v \equiv (|u|_a mod\ 3 = |v|_a mod\ 3)$
- třídy ekvivalence 0,1,2
- L odpovídá třídě 2
- a – přechody do následující třídy
- b – přechody zachovávají třídu.



'Pumpovatelný' ne-regulární jazyk

Example 2.2 (Ne–regulární jazyk, který lze pumpovat)

Jazyk $L = \{u | u = a^+ b^i c^i \vee u = b^i c^j\}$ není regulární (Myhill–Nedorova věta), ale vždy lze pumpovat první písmeno.

- Předpokládejme, že L je regulární

$\Rightarrow$ pak existuje pravá kongruence $\sim_L$ konečného indexu m, L je sjednocení některých tříd $\Sigma^* / \sim_L$

- vezmeme množinu slov $S = \{ab, abb, abbb, \ldots, ab^{m+1}\}$
- existují dvě slova $i \neq j$, která padnou do stejné třídy

$i \neq j$	$ab^i \sim ab^j$	
přidáme c^i	$ab^i c^i \sim ab^j c^i$	$\sim$ je kongruence
spor	$ab^i c^i \in L$ & $ab^j c^i \notin L$	s 'L je sjednocení některých tříd $\Sigma^* / \sim_L$

Iterační (pumping) lemma pro regulární jazyky

Theorem (Iterační (pumping) lemma pro regulární jazyky)

Mějme regulární jazyk L. Pak existuje konstanta $n \in \mathbb{N}$ (závislá na L) tak že každé $w \in L; |w| \geq n$ můžeme rozdělit na tři části, $w = xyz$, že:

- $y \neq \lambda$
- $|xy| \leq n$
- $\forall k \in \mathbb{N}_0$, *slovo* $xy^k z$ *je také v* L.

Iterační lemma a nekonečnost jazyků

Theorem 2.2

Regulární jazyk L je nekonečný právě když existuje $u \in L; n \leq |u| < 2n$, kde n je číslo z iteračního lemmatu.

Proof:

$\Leftarrow$ Pokud $\exists u \in L; n \leq |u| < 2n$, potom lze slovo u pumovat, čímž dostaneme nekonečně mnoho slov z jazyka L.

$\Rightarrow$ Jazyk L je nekonečný, obsahuje slovo w takové, že $n \leq |w|$.

- Pokud $|w| < 2n$, máme hledané slovo.
- Jinak, z iteračního lemmatu $w = xyz$ a $xz \in L$, tj. zkrácení.
- Pokud $2n \leq |xz|$, zkracujeme dál xz.
- Zkracujeme maximálně o n písmen, tedy interval $[n, 2n)$ nelze přeskočit. $\square$

Pro určení nekonečnosti regulárního jazyka stačí prozkoumat všechna slova u taková, že $n \leq |u| < 2 * n$, tj. konečně mnoho slov.

Definition 2.2 (Dosažitelné stavy)

Mějme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a $q \in Q$. Řekneme, že stav q je **dosažitelný**, jestliže existuje $w \in \Sigma^*$ takové, že $\delta^*(q_0, w) = q$.

Algorithm: Hledání dosažitelných stavů

Dosažitelné stavy hledáme iterativně.

- Začátek: $M_0 = \{q_0\}$.
- Opakuj: $M_{i+1} = M_i \cup \{q | q \in Q, (\exists p \in M_i,\ \exists x \in \Sigma)\ \delta(p, x) = q\}$
- opakuj dokud $M_{i+1} \neq M_i$.

Proof: Korektnost a úplnost

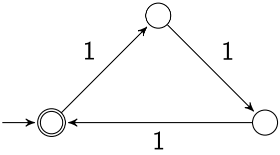
- Korektnost: $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq Q$ a každé M_i obsahuje pouze dosažitelné stavy.
- Úplnost:
  - nechť q je dosažitelný, tj. $(\exists w \in \Sigma^*)\delta^*(q_0, w) = q$
  - vezměme nejkratší takové $w = x_1 \ldots x_n$ tž. $\delta^*(q_0, x_1 \ldots x_n) = q$
  - zřejmě $\delta^*(q_0, x_1 \ldots x_i) \in M_i$ (dokonce $M_i \setminus M_{i-1}$)
  - tedy $\delta^*(q_0, x_1 \ldots x_n) \in M_n$, tedy $q \in M_n$.

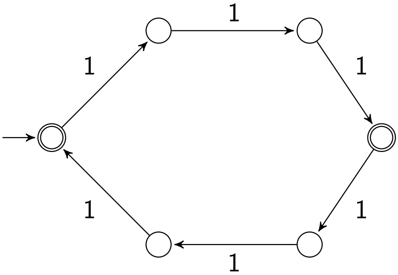
$\square$

Nejednoznačnost

Automat přijímající daný jazyk není určen jednoznačně.

- Jazyk $L = \{w | w \in \{1\}^* \& |w| = 3k\}$.





Definition 2.3 (automatový homomorfismus)

Nechť A_1, A_2 jsou DFA. Řekneme, že zobrazení $h : Q_1 \to Q_2$ Q_1 na Q_2 je **(automatovým) homomorfismem**, jestliže:

$h(q_{0_1}) = q_{0_2}$	'stejné' počáteční stavy
$h(\delta_1(q, x)) = \delta_2(h(q), x)$	'stejné' přechodové funkce
$q \in F_1 \Leftrightarrow h(q) \in F_2$	'stejné' koncové stavy.

Homomorfismus prostý a na nazýváme **isomorfismus**.

Ekvivalence automatů a homomorfismus

Definition 2.4 (Ekvivalence automatů!)

Dva konečné automaty A, B nad stejnou abecedou Σ jsou **ekvivalentní**, jestli že rozpoznávají stejný jazyk, tj. $L(A) = L(B)$.

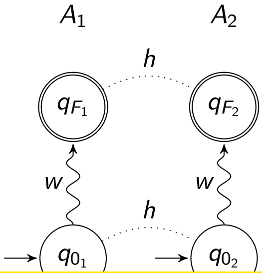
Theorem 2.3 (Věta o ekvivalenci automatů)

Existuje-li homomorfismus konečných automatů A_1 do A_2, pak jsou A_1 a A_2 ekvivalentní.

Proof:

- Pro libovolné slovo $w \in \Sigma^*$ konečnou iterací
  - $h(\delta_1^*(q, w)) = \delta_2^*(h(q), w)$
- dále:

$$\begin{aligned} w \in L(A_1) &\Leftrightarrow \delta_1^*(q_{0_1}, w) \in F_1 \\ &\Leftrightarrow h(\delta_1^*(q_{0_1}, w)) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow \delta_2^*(h(q_{0_1}), w) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow \delta_2^*(q_{0_2}, w) \in F_2 \end{aligned}$$



Redukce a ekvivalence automatů, Tranzitivita

Definition 2.5 (Ekvivalence stavů)

Říkáme, že stavy $p, q \in Q$ konečného automatu A jsou **ekvivalentní** pokud:

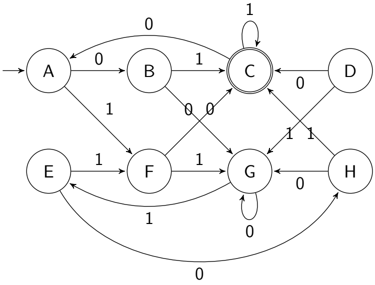
- Pro všechna vstupní slova w; $\delta^*(p, w) \in F$ iff $\delta^*(q, w) \in F$.

Pokud dva stavy nejsou ekvivalentní, říkáme, že jsou **rozlišitelné**.

Example 2.3

Automat na obrázku:

- C a G nejsou ekvivalentní, $\delta^*(C, \lambda) \in F$ a $\delta^*(G, \lambda) \notin F$.
- A,G: $\delta^*(A, 01) = C$ je přijímající, $\delta^*(G, 01) = E$ není.
- A,E jsou ekvivalentní – λ, $1*$ zřejmé, 0 vede do ne–přijímajících stavů, 01 a 00 se sejdou ve stejném stavu.



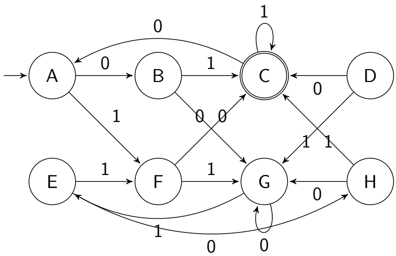
Lemma

Ekvivalence na stavech je tranzitivní.

Algorithm: !Algoritmus hledání rozlišitelných stavů v DFA

Následující algoritmus nalezne rozlišitelné stavy:

- Základ: Pokud $p \in F$ (přijímající) a $q \notin F$, pak je dvojice $\{p, q\}$ rozlišitelná.
- Indukce: Nechť $p, q \in Q$, $a \in \Sigma$ a o dvojici r, s; $r = \delta(p, a)$ a $s = \delta(q, a)$ víme, že jsou rozlišitelné. Pak i $\{p, q\}$ jsou rozlišitelné.
    - opakuj dokud existuje nová trojice $p, q \in Q$, $a \in \Sigma$.



	A	B	C	D	E	F	G
B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x

Křížek značí rozlišitelné dvojice. C je rozlišitelné hned, ostatní kromě $\{A, G\}, \{E, G\}$ také. Vidíme tři ekvivalentní dvojice stavů.

Algoritmus hledání rozlišitelných stavů

Přijímající vs. nepřijímající stavy

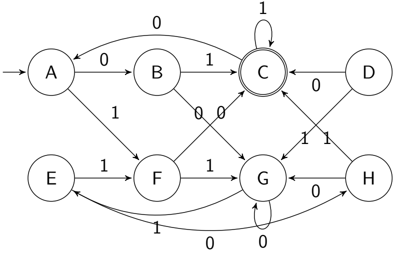
	A	B	C	D	E	F	G
B							
C	x	x					
D			x				
E			x				
F			x				
G			x				
H			x				

1.krok1: $\delta(q,1) \in F$ pro $q \in \{B, C, H\}$

	A	B	C	D	E	F	G
B	x						
C	x	x					
D		x	x				
E		x	x				
F		x	x				
G		x	x				
H	x		x	x	x	x	x

1.krok0: $\delta(q,0) \in F$ pro $q \in \{D, F\}$

	A	B	C	D	E	F	G
B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G		x	x	x		x	
H	x		x	x	x	x	x



B a G jsou rozlišitelné, $\delta(A,0) = B$, $\delta(G,0) = H$, tj. A,G jsou rozlišitelné.
Obdobně pro E,G vedoucí $\delta(*,0)$ do rozlišitelných stavů H,G.

	A	B	C	D	E	F	G
B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x

Zůstávají tři ekvivalentní dvojice stavů.

Theorem 2.4

Pokud dva stavy nejsou odlišeny předchozím algoritmem, pak jsou tyto stavy ekvivalentní.

Proof: Koreknost algoritmu

- Uvažujme špatné páry stavů, které jsou rozlišitelné a algoritmus je nerozlišil.
- Vezměme z nich pár p, q rozlišitelný nejkratším slovem $w = a_1 \dots a_n$.
- Stavy $r = \delta(p, a_1)$ a $s = \delta(q, a_1)$ jsou rozlišitelné kratším slovem $a_2 \dots a_n$ takže pár není mezi špatnými.
  Tedy jsou 'vykřížkované' algoritmem.
- Tedy v příštím kroku algoritmus rozliší i p, q. $\square$

Čas výpočtu je polynomiální vzhledem k počtu stavů.

- V jednom kole uvažujeme všechny páry, tj. $O(n^2)$.
- Kol je maximálně $O(n^2)$, protože pokud nepřidáme křížek, končíme.
- Dohromady $O(n^4)$.

Algoritmus lze zrychlit na $O(n^2)$ pamatováním stavů, které závisí na páru $\{r, s\}$ a následováním těchto seznamů 'zpátky'.

Testování ekvivalence regulárních jazyků

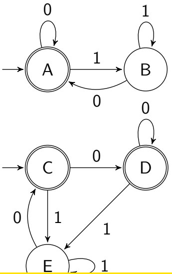
Algorithm: Testování ekvivalence regulárních jazyků

Ekvivalenci regulárních jazyků L, M testujeme následovně:

- Najdeme DFA A_L, A_M rozpoznávající $L(A_L) = L, L(A_M) = M$, $Q_L \cap Q_M = \emptyset$.
- Vytvoříme DFA sjednocením stavů a přechodů $(Q_L \cup Q_M, \Sigma, \delta_L \cup \delta_M, q_L, F_L \cup F_M)$; zvolíme jeden z počátečních stavů.
- Jazyky jsou ekvivalentní právě když počáteční stavy původních DFA jsou ekvivalentní.

Example 2.4

Uvažujme jazyk $\{\lambda\} \cup \{0,1\}^*0$ přijímající prázdné slovo a slova končící 0. Vpravo obrázek dvou DFA a tabulku rozlišitelných stavů.



B	x			
C		x		
D		x		
E	x		x	x
	A	B	C	D

Minimalizace DFA

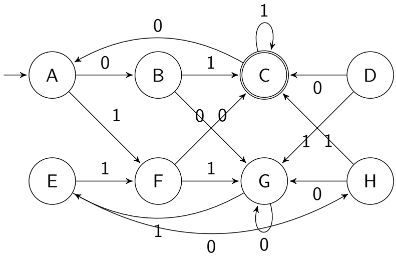
Definition 2.6 (redukovaný DFA, redukt)

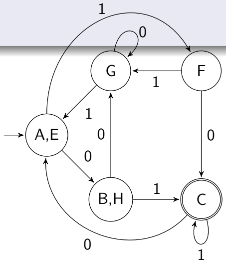
Deterministický konečný automat je **redukovaný**, pokud

- nemá nedosažitelné stavy a
- žádné dva stavy nejsou ekvivalentní.

Konečný automat B je **reduktem** automatu A, jestliže:

- B je redukovaný a
- A a B jsou ekvivalentní.

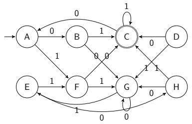


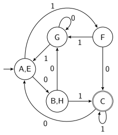


Algoritmus nalezení reduktu DFA A

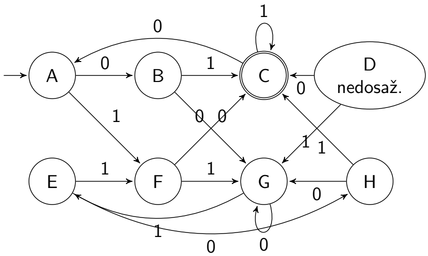
Algorithm: !Algoritmus nalezení reduktu DFA A

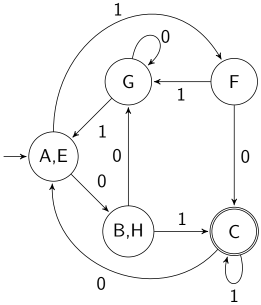
- Ze vstupního DFA A eliminujeme stavy nedosažitelné z počátečního stavu.
- Najdeme rozklad zbylých stavů na třídy ekvivalence.
- Konstruujeme DFA B na třídách ekvivalence jakožto stavech. Přechodovou funkci B označíme γ, mějme $S \in Q_B$. Pro libovolné $q \in S$, označíme T třídu ekvivalence $\delta(q, a)$ a definujeme $\gamma(S, a) = T$. Tato třída musí být stejná pro všechna $a \in S$.
- Počáteční stav B je třída obsahující počáteční stav A.
- Množina přijímajících stavů B jsou bloky odpovídající přijímajícím stavům A.





Příklad redukovaného DFA





B	x					
C	x	x				
E		x	x			
F	x	x	x	x		
G	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x
	A	B	C	E	F	G

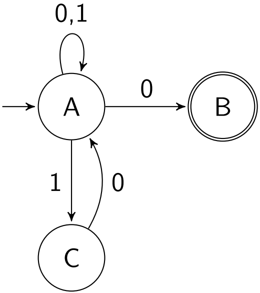
Třídy ekvivalence:

$$\{A, E\}, \{B, H\}, \{C\}, \{F\}, \{G\}$$

Pro nedeterministické FA to tak snadné není

Example 2.5

Nedeterministický FA na obrázku můžeme redukovat vypuštěním stavu C.
Stavy $\{A, C\}$ jsou rozlišitelné vstupem 0, takže algoritmus pro DFA redukci nenajde.
Mohli bychom hledat exhauzivním výpočtem.



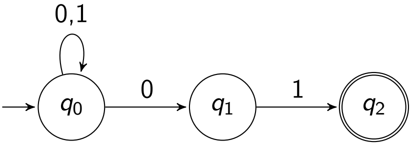
Nedeterministické konečné automaty (NFA)

- Obecnější modely, které přijímají stále jen regulární jazyky:
  - nedeterministické konečné automaty NFA
  - NFA s λ přechody
  - dvousměrné konečné automaty (nepíší na pásku + prostor omezený vstupem)
- usnadní nám návrh automatu, zjednoduší zápis
- umíme převést na DFA.

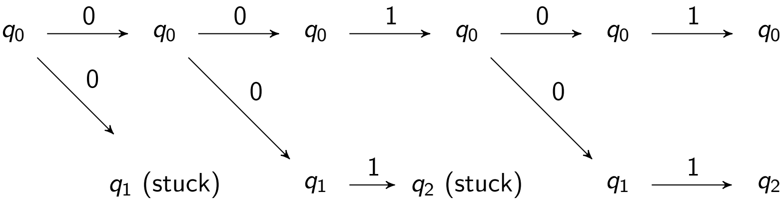
Nedeterministické konečné automaty (NFA)

Nedeterministický automat může být ve více stavech paralelně. Má schopnost 'uhodnout' něco o vstupu.

NFA přijímající všechna slova končící 01.



NFA zpracovává vstup 00101.



Nedeterministický konečný automat

Definition 2.7 (Nedeterministický konečný automat)

Nedeterministický konečný automat (NFA) $A = (Q, \Sigma, \delta, S_0, F)$ sestává z:

- konečné množiny **stavů**, zpravidla značíme Q
- konečné množiny **vstupních symbolů**, značíme Σ
- **přechodové funkce**, zobrazení $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ vracející podmnožinu Q.
- **množiny počátečních stavů**[a] $S_0 \subseteq Q$,
- a **množiny koncových (přijímajících) stavů** $F \subseteq Q$.

[a] alternativa: počátečního stavu $q_0 \in Q$

Example 2.6

Tabulka pro NFA z předchozího slajdu $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, \{q_0\}, \{q_2\})$ je:

δ	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

.

Rozšířená přechodová funkce

Definition 2.8 (Rozšířená přechodová funkce)

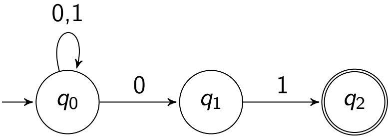
Pro přechodovou funkci δ NFA je **rozšířená přechodová funkce** δ^*, $\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ definovaná indukcí:

start $\delta^*(q, \lambda) = \{q\}$.

ind. Indukční krok:

$$\delta^*(q, wx) = \bigcup_{p \in \delta^*(q,w)} \delta(p, x)$$

Tj. množina stavů, do kterých se mohu dostat posloupností 'správně označených' hran.



$\delta^*(q_0, \lambda)$	$=$		$=\{q_0\}$
$\delta^*(q_0, 0)$	$=$	$\delta(q_0, 0)$	$=\{q_0, q_1\}$
$\delta^*(q_0, 00)$	$=$	$\delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0)$	$=\{q_0, q_1\}$
$\delta^*(q_0, 001)$	$=$	$\delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1)$	$=\{q_0, q_2\}$
$\delta^*(q_0, 0010)$	$=$	$\delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0)$	$=\{q_0, q_1\}$
$\delta^*(q_0, 00101)$	$=$	$\delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1)$	$=\{q_0, q_2\}$

Jazyk přijímaný NFA

Definition 2.9 (Jazyk přijímaný nedeterministickým konečným automatem)

Mějme NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, S_0, F)$, pak

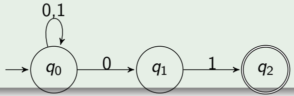
$$L(A) = \{w | (\exists q_0 \in S_0)\ \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

je jazyk přijímaný automatem A.
Tedy $L(A)$ je množina slov $w \in \Sigma^*$ takových, že $\delta^*(q_0, w)$ obsahuje alespoň jeden přijímající stav.

Example 2.7

Automat z předchozího slajdu přijímá jazyk $L = \{w | w \text{ končí na } 01, w \in \{0,1\}^*\}$.
Důkaz indukcí konjunkce tvrzení:

- $\delta^*(q_0, w)$ obsahuje q_0 pro každé slovo w.
- $\delta^*(q_0, w)$ obsahuje q_1 iff w končí 0.
- $\delta^*(q_0, w)$ obsahuje q_2 iff w končí 01.



Ekvivalence nedeterministických a deterministických konečných automatů

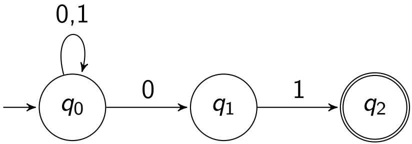
Algorithm: !Podmnožinová konstrukce

Podmnožinová konstrukce začíná s NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, S_0, F_N)$. Cílem je popis deterministického DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, S_0, F_D)$, pro který $L(N) = L(D)$.

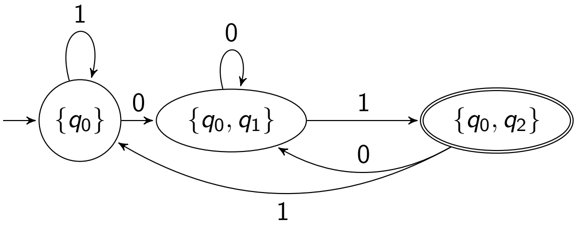
- Q_D je množina podmnožin Q_N, $Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$ (potenční množina).
  Nedosažitelné stavy můžeme vynechat.
- Počáteční stav DFA je stav označený S_0, tj. prvek Q_D.
- $F_D = \{S : S \in \mathcal{P}(Q_N) \ \& \ S \cap F_N \neq \emptyset\}$, tedy S obsahuje alespoň jeden přijímající stav N.
- Pro každé $S \subseteq Q_N$ a každý vstupní symbol $a \in \Sigma$,

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a).$$

Příklad podmnožinové konstrukce pro $\{w.01 | w \in \{0,1\}\}$



	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$



Theorem 2.5 (Převod NFA na DFA)

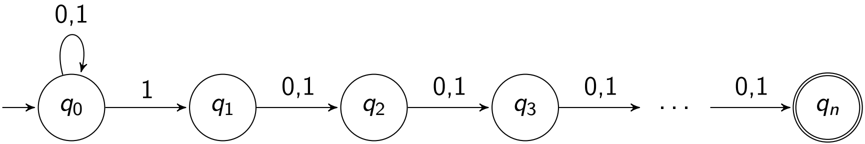
Pro DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, S_0, F_D)$ vytvořený podmnožinovou konstrukcí z NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ platí $L(N) = L(D)$.

Proof.

Indukcí dokážeme: $\delta_D^*(S_0, w) = \delta_N^*(q_0, w)$. □

Example 2.8 ('Těžký' případ pro podmnožinovou konstrukci)

Jazyk $L(N)$ slov 0's a 1's takových, že n–tý symbol od konce je 1. Intuitivně si DFA musí pamatovat n posledních přečtených symbolů.



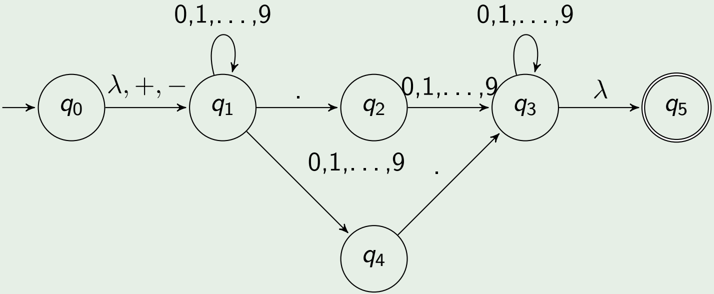
- Aplikace hledání v textu

Konečné automaty s λ přechody

- Nově dovolíme přechody na λ, prázdné slovo, tj. bez přečtení vstupního symbolu.

Example 2.9 (NFA s λ přechody)

(1) Volitelně znaménko + nebo - ,
(2) řetězec číslic,
(3) desetinná tečka a
(4) další řetězec číslic. Nejméně jeden z řetězců (2) a (4) musí být neprázdný.



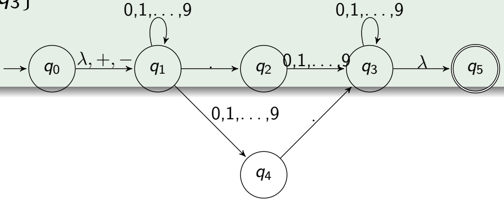
Definition 2.10 (λ-NFA)

λ-NFA je $E = (Q, \Sigma, \delta, \{q_0\}, F)$, kde jsou všechny komponenty stejné jako pro NFA, jen δ je definovaná pro $Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\})$.
Požadujeme $\lambda \notin \Sigma$ (resp. volíme nový znak pro prázdné slovo).

Example 2.10

Předešlý λ-NFA je: $E = (\{q_0, q_1, \ldots, q_5\}, \{., +, -, 0, 1, \ldots, 9\}, \delta, \{q_0\}, \{q_5\})$ s δ:

δ	λ	+,-	.	0,1,...,9
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$*q_5$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



λ–uzávěr

Definition 2.11 (λ–uzávěr)

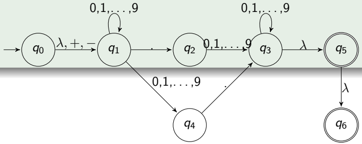
Pro $q \in Q$ definujeme **λ–uzávěr** $\lambda CLOSE(q)$ rekurzivně:

- Stav q je v $\lambda CLOSE(q)$.
- Je–li $p \in \lambda CLOSE(q)$ a $r \in \delta(p, \lambda)$ pak i $r \in \lambda CLOSE(q)$.

Pro $S \subseteq Q$ definujeme $\lambda CLOSE(S) = \bigcup_{q \in S} \lambda CLOSE(q)$.

Example 2.11 (λ uzávěr)

- $\lambda CLOSE(q_0) = \{q_0, q_1\}$
- $\lambda CLOSE(q_1) = \{q_1\}$
- $\lambda CLOSE(q_3) = \{q_3, q_5, q_6\}$
- $\lambda CLOSE(\{q_3, q_4\}) = \{q_3, q_4, q_5, q_6\}$



Rozšířená přechodová funkce a jazyk přijímaný λ-NFA

Definition 2.12

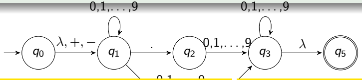
Nechť $E = (Q, \Sigma, \delta, S_0, F)$ je λ–NFA. Rozšířenou přechodovou funkci δ^* definujeme následovně:

- $\delta^*(q, \lambda) = \lambda CLOSE(q)$.
- Indukční krok: $v = wa$, kde $w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$.

$$\delta^*(q, wa) = \lambda CLOSE\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q,w)} \delta(p, a)\right)$$

Example 2.12

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, \lambda) &= \lambda CLOSE(q_0) &&= \{q_0, q_1\} \\
\delta^*(q_0, 5) &= \lambda CLOSE(\textstyle\bigcup_{q \in \delta^*(q_0,\lambda)} \delta(q, 5)) = \lambda CLOSE(\delta(q_0, 5) \cup \delta(q_1, 5)) &&= \{q_1, q_4\} \\
\delta^*(q_0, 5.) &= \lambda CLOSE(\delta(q_1, .) \cup \delta(q_4, .)) &&= \{q_2, q_3, q_5\} \\
\delta^*(q_0, 5.6) &= \lambda CLOSE(\delta(q_2, 6) \cup \delta(q_3, 6) \cup \delta(q_5, 6)) &&= \{q_3, q_5\}
\end{aligned}$$



Eliminace λ–přechodů

Theorem 2.6 (Eliminace λ–přechodů)

Jazyk L je rozpoznatelný λ-NFA právě když je L regulární.

Algorithm: Eliminace λ–přechodů

Pro libovolný λ-NFA $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, S_0, F_E)$ zkonstruujeme DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ přijímající stejný jazyk jako E.

- $Q_D \subseteq \mathcal{P}(Q_E)$, $\forall S \subseteq Q_E : \lambda CLOSE(S) \in Q_D$. V Q_D může být i $\emptyset$.
- $q_D = \lambda CLOSE(S_0)$.
- $F_D = \{S | S \in Q_D \ \& \ S \cap F_E \neq \emptyset\}$.
- Pro $S \in Q_D, a \in \Sigma$ definujeme $\delta_D(S, a) = \lambda CLOSE(\bigcup_{p \in S} \delta(p, a))$.

Eliminace λ–přechodů

Proof.

(IF) Stačí přidat $\delta(q,\lambda) = \emptyset$ pro každé $q \in Q$.
(Only-if) Vezmeme D z předchozí definice a indukcí dle délky w dokážeme $L(D) = L(E)$.

- $|w| = 0$, pak $w = \lambda$, víme $\delta_E^*(S_0,\lambda) = \lambda CLOSE(\cup_{q_0\in S_0}\delta^*(q_0,\lambda)) = \lambda CLOSE(\cup_{q_0\in S_0}\lambda CLOSE(q_0)) = \lambda CLOSE(S_0) = q_D$,
- Předpokládejme $w = va$, $a \in \Sigma, v \in \Sigma^*$, $\delta_E^*(S_0,v) = \delta_D^*(q_D,v)$. Rekurzivní krok je stejný jako v definici δ^* a při eliminaci λ–přechodů.

$\square$

Shrnutí

- **Mihyll–Nedorova věta**
  - užití pro důkaz ne–regulárnosti jazyka
  - příklad ne–regulárního jazyka, který lze pumpovat
  - nekonečnost regulárního jazyka lze rozpoznat analýzou konečného množství slov
- **dosažitelné stavy**, algoritmus nalezení
- **ekvivalentní automaty, stavy**
- **rozlišitelné stavy**, algoritmus nalezení
- **redukovaný DFA**, redukt, **algoritmus nalezení reduktu**.
- **Nedeterministický FA**, **podmnožinová konstrukce**.
- λ **nedeterministický FA**, λ **uzávěr**.

Množinové operace nad jazyky

Definition 3.1 (Množinové operace nad jazyky)

Mějme dva jazyky L, M. Definujme následující operace:

(1) binární **sjednocení** $L \cup M = \{w | w \in L \vee w \in M\}$
- Příklad: jazyk obsahuje slova začínající a^i nebo tvaru $b^j c^j$.

(2) **průnik** $L \cap M = \{w | w \in L \;\&\; w \in M\}$
- Příklad: jazyk obsahuje slova sudé délky končící na 'baa'.

(3) **rozdíl** $L - M = \{w | w \in L \& w \notin M\}$
- Příklad: jazyk obsahuje slova sudé délky nekončící na 'baa'.

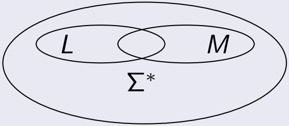
(4) **doplněk (komplement)** $\overline{L} = -L = \{w | w \notin L\} = \Sigma^* - L$
- Příklad: jazyk obsahuje slova nekončící na 'a'

Theorem (de Morganova pravidla)

Platí:

$$L \cap M = \overline{\overline{L} \cup \overline{M}}$$
$$L \cup M = \overline{\overline{L} \cap \overline{M}}$$
$$L - M = L \cap \overline{M}.$$

Důkaz ze vztahů $\&, \vee, \neg$.



□

Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

Theorem 3.1 (Uzavřenost na množinové operace)

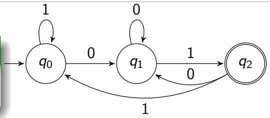
Mějme regulární jazyky L, M. Pak jsou následující jazyky také regulární:
(1) sjednocení $L \cup M$
(2) průnik $L \cap M$
(3) rozdíl $L - M$
(4) doplněk $\overline{L} = \Sigma^* - L$.

Proof: Uzavřenost RJ na doplněk

- Pokud δ není pro některé dvojice q, a definovaná, přidáme nový nepřijímající stav q_n a do něj přechod pro vše dříve nedefinované plus $\forall a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$: $\delta(q_n, x) = q_n$.
- Pak stačí prohodit koncové a nekoncové stavy přijímajícího deterministického FA $F = Q_A - F_A$. □

Example 3.1

Jazyk $\{w;\ w \in \{0,1\}^* 01\}$

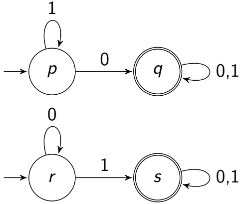


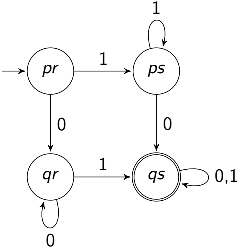
Konstrukce součinu automatů

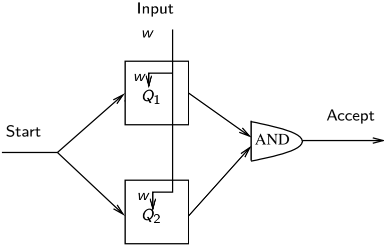
Proof: Průnik, sjednocení, rozdíl

- Pro rozdíl doplníme funkci δ na totální.
- Zkonstruujeme součinový automat,
  $Q = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta((p_1, p_2), x) = (\delta_1(p_1, x), \delta_2(p_2, x)), (q_{0_1}, q_{0_2}), F)$
- průnik: $F = F_1 \times F_2$
- sjednocení: $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$
- rozdíl: $F = F_1 \times (Q_2 - F_2)$. $\square$

Příklad součinu automatů (průnik jazyků). Slova obsahující 0,1, oboje.







Příklady na uzávěrové vlastnosti

Example 3.2

Konstruujeme konečný automat přijímající slova, která obsahují $3k+2$ symbolů 1 a neobsahují posloupnost 11.

- Přímá konstrukce je komplikovaná.
- $L_1 = \{w | w \in \{0,1\}^* \& |w|_1 = 3k+2\}$
- $L_2 = \{w | u, v \in \{0,1\}^* \& w = u11v\}$
- $L = L_1 - L_2$.

Example 3.3

Jazyk M slov s různým počtem 0 a 1 není regulární.

- Je–li M regulární, $\overline{M} = \Sigma^* - M$ je také regulární.
- O $\overline{M}$ víme, že regulární není (pumping lemma).

Ještě jeden příklad

Example 3.4

Jazyk $L_{0\neq 1} = \{0^i 1^j : i \neq j, i, j \in \mathbb{N}_0\}$ není regulární.

- Jazyk $L_{01} = \{0^i 1^j ; i, j \in \mathbb{N}_0\}$ je regulární, umíme sestrojit konečný automat.
- $L_{01} - L_{0\neq 1} = \{0^i 1^i : i \in \mathbb{N}_0\}$
- Z uzávěrových vlastností víme, že rozdíl regulárních jazyků je regulární.
- Jazyk L_{01} regulární je.
- Předpokládejme, že $L_{0\neq 1}$ je regulární. Pak by i $\{0^i 1^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ musel být regulární, což není - SPOR.

Řetězcové operace nad jazyky

Definition 3.2 (Řetězcové operace nad jazyky)

Nad jazyky L, M definujeme následující operace:

zřetězení jazyků	$L.M = \{uv \mid u \in L \& v \in M\}$
	$L.x = L.\{x\}$ a $x.L = \{x\}.L$ pro $x \in \Sigma$
mocniny jazyka	$L^0 = \{\lambda\}$
	$L^{i+1} = L^i.L$
pozitivní iterace	$L^+ = L^1 \cup L^2 \ldots = \bigcup_{i \geq 1} L^i$
obecná iterace	$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \ldots = \bigcup_{i \geq 0} L^i$
	tedy $L^* = L^+ \cup \{\lambda\}$
otočení jazyka	$L^R = \{u^R \mid u \in L\}$
(=zrcadlový obraz,reverze)	$(x_1 x_2 \ldots x_n)^R = x_n x \ldots x_2 x_1$
levý kvocient L podle M	$M \setminus L = \{v \mid uv \in L \& u \in M\}$
levá derivace L podle w	$\partial_w L = \{w\} \setminus L$ (pozn. derivace bude i v jiném významu
pravý kvocient L podle M	$L/M = \{u \mid uv \in L \& v \in M\}$
pravá derivace L podle w	$\partial_w^R L = L/\{w\}$.

Theorem 3.2 (Uzavřenost reg. jazyků na řetězcové operace)

Jsou–li L, M regulární jazyky, je regulární i $L.M$, L^*, L^+, L^R, $M \setminus L$ a L/M.

Lemma ($L.M$)

Jsou–li L, M regulární jazyky, je regulární i $L.M$.

Proof:

Vezmeme DFA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, pak $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ tak že $L = L(A_1)$ a $M = L(A_2)$.

Definujeme nedeterministický automat $B = (Q \cup \{q_0\}, \Sigma, \delta, q_0, F_2)$ kde:

$Q = Q_1 \cup Q_2$ předpokládáme různá jména stavů, jinak přejmenujeme
končíme až po přečtení slova z L_2

$\delta(q_0, \lambda) = \{q_1, q_2\}$	pro $q_1 \in F_1$	tj. $\lambda \in L(A_1)$
$\delta(q_0, \lambda) = \{q_1\}$	pro $q_1 \notin F_1$	tj. $\lambda \notin L(A_1)$
$\delta(q_0, x) = \emptyset$	pro $x \in \Sigma$	
$\delta(q, x) = \{\delta_1(q, x)\}$	pro $q \in Q_1$ & $\delta_1(q, x) \notin F_1$	počítáme v A_1
$= \{\delta_1(q, x), q_2\}$	pro $q \in Q_1$ & $\delta_1(q, x) \in F_1$	nedet. přechod z A_1
$= \{\delta_2(q, x)\}$	pro $q \in Q_2$	počítáme v A_2.

Pak $L(B) = L(A_1).L(A_2)$. □

Lemma (L^*, L^+)

Je–li L regulární jazyk, je regulární i L^*, L^+.

- Idea: opakovaný výpočet automatu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- realizace: nedeterministické rozhodnutí, zda pokračovat nebo restart
- speciální stav pro příjem $\lambda \in L^0$ (pro L^+ vynecháme či $\notin F$).

Proof: Důkaz pro L^*

Vezmeme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, tak že $L = L(A)$.
Definujeme nedeterministický automat $B = (Q \cup \{q_B\}, \Sigma, \delta_B, q_B, F \cup \{q_B\})$
kde:

$\delta_B(q_B, \lambda) = \{q_0\}$ nový stav q_B pro příjem λ, přejdeme do q_0

$\delta_B(q_B, x) = \emptyset$ pro $x \in \Sigma$

$\delta_B(q, x) = \{\delta(q, x)\}$ pokud $q \in Q$ & $\delta(q, x) \notin F$ uvnitř A

$\quad = \{\delta(q, x), q_0\}$ pokud $q \in Q$ & $\delta(q, x) \in F$ možný restart

Pak $L(B) = L(A)^*$ ($q_B \in F_B$), $L(B) = L(A)^+$ ($q_B \notin F_B$). □

Uzavřenost reverze

Lemma (L^R)

Je–li L regulární jazyk, je regulární i L^R.

- Zřejmě $(L^R)^R = L$ a tedy stačí ukázat jeden směr.
- idea: obrátíme šipky ve stavovém diagramu; nederministický FA

Proof:

Vezmeme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, tak že $L = L(A)$.
Definujeme nedeterministický automat $B = (Q \cup \{q_B\}, \Sigma, \delta_B, q_B, \{q_0\})$ kde:

- $\delta_B(q, x) = \{p | \delta(p, x) = q\}$ pro $q \in Q$
- $\delta_B(q_B, \lambda) = F$, $\delta_B(q_B, x) = \emptyset$.
- Pro libovolné slovo $w = x_1 x_2 \ldots x_n$
  - $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$ je přijímající výpočet pro w v A

  $\Leftrightarrow$
  - $q_B, q_n, q_{n-1}, \ldots, , q_2, q_1, q_0$ je přijímající výpočet pro w^R v B. $\square$

Pozn. Někdy L nebo L^R má výrazně jednodušší přijímající automat.

Uzavřenost kvocientu

Lemma ($M \setminus L$ a L/M)

Jsou–li L, M regulární jazyky, je regulární i $M \setminus L$ a L/M.

- Idea: A_L, budeme startovat ve stavech, do kterých se lze dostat slovem z M

Proof:

Vezmeme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, tak že $L = L(A)$.
Definujeme nedeterministický NFA $B = (Q, \Sigma, \delta, S_0, F)$ kde:

- definujeme $S_0 = \{q | q \in Q \ \& \ (\exists u \in M) \ q = \delta(q_0, u)\}$
  - lze nalézt algoritmicky
    $(\{q;\ L(A_q) \cap M \neq \emptyset$ kde $A_q = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q\})\})$
- $v \in M \setminus L$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\exists u \in M) \ uv \in L \\
&\Leftrightarrow (\exists u \in M, \exists q \in Q) \ \delta(q_0, u) = q \ \& \ \delta(q, v) \in F \\
&\Leftrightarrow \exists q \in S \ \& \ \delta(q, v) \in F \\
&\Leftrightarrow v \in L(B)
\end{aligned}$$

$L/M = (M^R \setminus L^R)^R$ □

Regulární výrazy (RV) jsou

- algebraickým popisem jazyků
- deklarativním způsobem, jak vyjádřit slova, která chceme přijímat.
- Schopné definovat všechny a pouze regulární jazyky.
- Můžeme je brát jako programovací jazyk, uživatelsky přívětivý popis konečného automatu.

Example 3.5

- UNIX grep příkaz.
- Lexikální analyzátory jako Lex a Flex (popis pomocí 'token'ů je vzásadě regulární výraz).
- Python knihovna re .

- Syntaktická analýza potřebuje silnější nástroj, bezkontextové gramatiky, budou následovat.

Regulární výrazy (RegE)

Definition 3.3 (Regulární výrazy (Regular Expression) (RegE), hodnota RegE $L(\alpha)$)

Regulární výrazy $\alpha, \beta \in RegE(\Sigma)$ nad konečnou neprázdnou abecedou $\Sigma = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a jejich hodnota $L(\alpha)$ jsou definovány induktivně:

- Základ:

výraz α	pro	hodnota $L(\alpha) \equiv [\alpha]$
λ	prázdný řetězec	$L(\lambda) = \{\lambda\}$
$\emptyset$	prázdný výraz	$L(\emptyset) = \{\} \equiv \emptyset$
$\mathbf{a}$	$a \in \Sigma$	$L(\mathbf{a}) = \{a\}$.

- Indukce:

výraz	hodnota	poznámka
$\alpha + \beta$	$L(\alpha + \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$	
$\alpha\beta$	$L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$	můžeme značit ., ale plete se s UNIX grep.
α^*	$L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$	
(α)	$L((\alpha)) = L(\alpha)$	závorky nemění hodnotu.

Každý regulární výraz dostaneme indukcí výše, tj. třída $RegE(\Sigma)$ je nejmenší třída uzavřená na uvedené operace.

Lemma 3.1

Jazyk $L(\lambda) = \{\lambda\} = \emptyset^*$, v definici jen pro význam symbolu $L(\lambda)$.

Příklady reguláních výrazů, priorita

Example 3.6 (Regulární výrazy)

Jazyk střídajících se nul a jedniček lze zapsat:

- $(\mathbf{01})^* + (\mathbf{10})^* + \mathbf{1}(\mathbf{01})^* + \mathbf{0}(\mathbf{10})^*$
- $(\lambda + \mathbf{1})(\mathbf{01})^*(\lambda + \mathbf{0})$.

Jazyk $L((\mathbf{0}^*\mathbf{1}\mathbf{0}^*\mathbf{1}\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*\mathbf{0}^*) = \{w|w \in \{0,1\}^*, |w|_1 = 3k, k \geq 0\}$.

Definition 3.4 (priorita)

Nejvyšší prioritu má iterace $*$, nižší konkatenace (zřetězení), nejnižší sjednocení $+$.

Theorem 3.3 (!varianta Kleeneho věty)

Každý jazyk reprezentovaný konečným automatem lze zapsat jako regulární výraz.
Každý jazyk popsaný regulárním výrazem můžeme zapsat jako λ-NFA (a tedy i DFA).

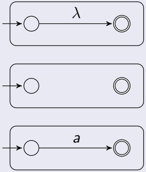
Převod RegE výrazu na λ–NFA automat

Převod RegE výrazu na λ–NFA automat.

Důkaz indukcí dle struktury R. V každém kroku zkonstruujeme λ-NFA E rozpoznávající stejný jazyk $L(R) = L(E)$ se třemi dalšími vlastnostmi:

- Právě jeden přijímající stav.
- Žádné hrany do počátečního stavu.
- Žádné hrany z koncového stavu.

Základ:



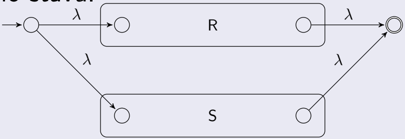
Prázdný řetězec λ

Prázdná množina $\emptyset$

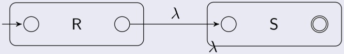
$a \in \Sigma$: výraz **a**

INDUKCE:

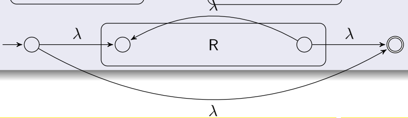
Součet $R + S$:



Zřetězení RS:

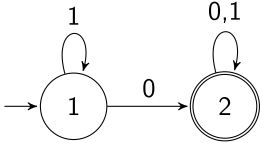


Uzávěr R^*:



□

Příklad: Od konečného automatu k RegE



$$R_{12}^{(2)} = \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$$

$$R_{ij}^{(k+1)} = R_{ij}^{(k)} + R_{i(k+1)}^{(k)}(R_{(k+1)(k+1)}^{(k)})^* R_{(k+1)j}^{(k)}$$

$R_{11}^{(0)}$	$\lambda+\mathbf{1}$	$=$
$R_{12}^{(0)}$	$\mathbf{0}$	$=$
$R_{21}^{(0)}$	$\emptyset$	$=$
$R_{22}^{(0)}$	$(\lambda+\mathbf{0}+\mathbf{1})$	$=$
$R_{11}^{(1)}$	$\lambda+\mathbf{1}+(\lambda+\mathbf{1})(\lambda+\mathbf{1})^*(\lambda+\mathbf{1})$	$=\mathbf{1}^*$
$R_{12}^{(1)}$	$\mathbf{0}+(\lambda+\mathbf{1})(\lambda+\mathbf{1})^*\mathbf{0}$	$=\mathbf{1}^*\mathbf{0}$
$R_{21}^{(1)}$	$\emptyset+\emptyset(\lambda+\mathbf{1})^*(\lambda+\mathbf{1})$	$=\emptyset$
$R_{22}^{(1)}$	$\lambda+\mathbf{0}+\mathbf{1}+\emptyset(\lambda+\mathbf{1})^*\mathbf{0}$	$=\lambda+\mathbf{0}+\mathbf{1}$
$R_{11}^{(2)}$	$\mathbf{1}^*+\mathbf{1}^*\mathbf{0}(\lambda+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\emptyset$	$=\mathbf{1}^*$
$R_{12}^{(2)}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0}+\mathbf{1}^*\mathbf{0}(\lambda+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*(\lambda+\mathbf{0}+\mathbf{1})$	$=\mathbf{1}^*\mathbf{0}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$
$R_{21}^{(2)}$	$\emptyset+(\lambda+\mathbf{0}+\mathbf{1})(\lambda+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\emptyset$	$=\emptyset$
$R_{22}^{(2)}$	$\lambda+\mathbf{0}+\mathbf{1}+(\lambda+\mathbf{0}+\mathbf{1})(\lambda+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*(\lambda+\mathbf{0}+\mathbf{1})$	$=(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$

Od DFA k regulárním výrazům

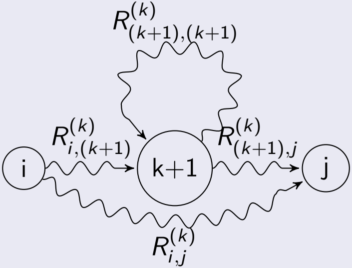
Regulární výraz z DFA

Mějme DFA A, $Q_A = \{1, \dots, n\}$ o n stavech.
Nechť $R_{ij}^{(k)}$ je regulární výraz, $L(R_{ij}^{(k)}) = \{w | \delta^*_{\leq k}(i, w) = j\}$ množina slov převádějících stav i do stavu j v A cestou, která neobsahuje stav s vyšším indexem než k.
Budeme rekruzivně konstruovat $R_{ij}^{(k)}$ pro $k = 0, \dots, n$.

$k = 0$, $i \neq j$: $R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \dots + \mathbf{a_m}$ kde $a_1, a_2, \dots, a_m$ jsou symboly označující hrany i do j (nebo $R_{ij}^{(0)} = \emptyset$ nebo $R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a}$ pro $m = 0, 1$).

$k = 0$, $i = j$: smyčky, $R_{ii}^{(0)} = \lambda + \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \dots + \mathbf{a_m}$ kde $a_1, a_2, \dots, a_m$ jsou symboly na smyčkách v i.

INDUKCE. Mějme $\forall i, j \in Q\ R_{ij}^{(k)}$. Konstruujeme $R_{ij}^{(k+1)}$.



$$R_{ij}^{(k+1)} = R_{ij}^{(k)} + R_{i(k+1)}^{(k)}(R_{(k+1)(k+1)}^{(k)})^* R_{(k+1)j}^{(k)}$$

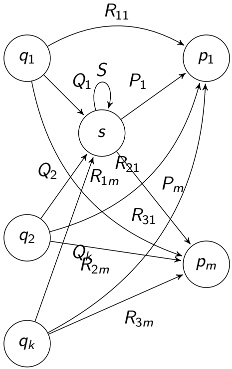
- Cesty z i do j neprocházející uzlem $(k+1)$ jsou již v $R_{ij}^{(k)}$.
- Cesty z i do j přes $(k+1)$ s případnými smyčkami můžeme zapsat $R_{i(k+1)}^{(k)}(R_{(k+1)(k+1)}^{(k)})^* R_{(k+1)j}^{(k)}$.
- regulární výrazy jsou uzavřené na sčítání (sjednocení), zřetězení i iteraci, tj. $R_{ij}^{k+1} \in RegE(\Sigma)$

Nakonec, $RegE = \oplus_{j \in F_A} R_{1j}^{(n)}$ sjedncení přes přijímající stavy j.

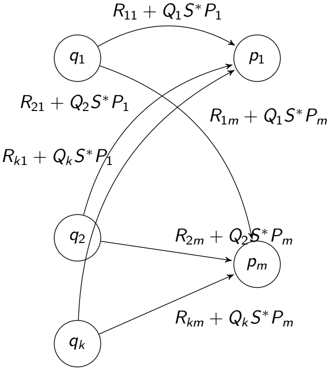
Konverze DFA na RegE eliminací stavů

- Předchozí metoda může obsahovat až 4^n symbolů.
- Následující algoritmus se občas vyhne duplicitě.
- Dovolíme regulární výrazy jako popisky na hranách grafu (transformovaného automatu).

Stav s vybrán k eliminaci



Výsledek eliminace s z předchozího grafu.

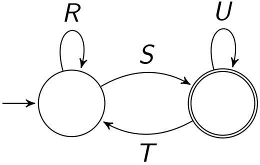


Konstrukce regulárního výrazu RegE z NFA

Pro každý cílový stav $q \in F$ aplikujeme předchozí redukci na všechny $p \in Q \setminus \{q, q_0\}$.

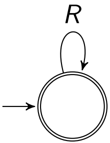
Pro $q \neq q_0$ vezmeme

$$RegE(q) = (R + SU^*T)^*SU^*.$$



Pro $q = q_0$ vezmeme

$$RegE(q) = R^*.$$

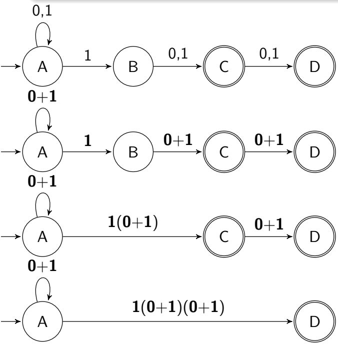


Sečteme výrazy (jazyky sjednotíme) přes všechny přijímající stavy; $RegE(NFA) = \oplus_{q \in F} RegE(q)$.

Příklad

Example 3.7

NFA přijímající slova s 1 na 2. nebo 3. pozici od konce.



původní automat

Řetězce nahradíme RegE.

Eliminujeme B.

Eliminujeme C.

A máme RegE výraz: $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1}) + (\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{0}+\mathbf{1})$.

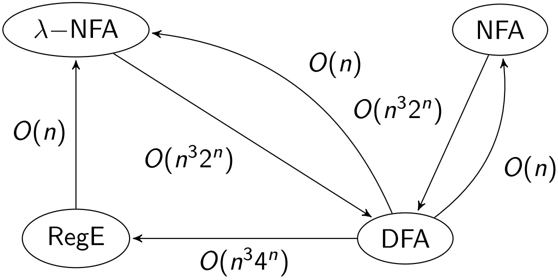
[Pořadí eliminace]

Nejdřív eliminujeme uzly ne–cílové a ne–startovní $q \notin F, q \neq q_0$.

Shrnutí převodů mezi reprezentacemi regulárních jazyků

Převod NFA na DFA

- λ uzávěr v $O(n^3)$ – prohledává n stavů násobeno n^2 hran pro λ přechody.
- Podmnožinová konstrukce, DFA s až 2^n stavy. Pro každý stav, $O(n^3)$ času na výpočet přechodové funkce.



Převod DFA na NFA

- Přidat množinové závorky k přechodové funkci a přechody pro λ u $\lambda-$NFA.

Převod automatu DFA an RegE regulární výraz

- $O(n^3 4^n)$

RegE výraz na automat

- V čase $O(n)$ vytvoříme $\lambda-$NFA.

Shrnutí

- Regulární výrazy
- Kleeneho věta
  - Jazyk je přijímaný konečným automatem právě když lze napsat jako regulární výraz,
  - tj. z $\emptyset$ a $\{\mathbf{a}\}$ pro $a \in \Sigma$
  - a konečného počtu aplikací iterace, zřetězení a sjednocení.
- Uzávěrové vlastnosti
  - dnes jen 'regulární' sloupec

jazyk	regulární (RL)	bezkontextové	deterministické CFL
sjednocení	ANO	ANO	NE
průnik	ANO	NE	NE
$\cap$ s RL	ANO	ANO	ANO
doplněk	ANO	NE	ANO
homomorfismus	ANO	ANO	NE
inverzní hom.	ANO	ANO	ANO

Poznámky k uzávěrovým vlastnostem

Lemma (Další vlastnosti bez důkazu)

- *Zjednodušení návrhu automatů*

$$
\begin{aligned}
L.\emptyset = \emptyset.L &= \emptyset \\
\{\lambda\}.L = L.\{\lambda\} &= L \\
(L^*)^* &= L^* \\
(L_1 \cup L_2)^* &= L_1^*(L_2.L_1^*)^* = L_2^*(L_1.L_2^*)^* \\
(L_1.L_2)^R &= L_2^R.L_1^R \\
\partial_w(L_1 \cup L_2) &= \partial_w(L_1) \cup \partial_w(L_2) \\
\partial_w(\Sigma^* - L) &= \Sigma^* - \partial_w L
\end{aligned}
$$

Substituce jazyků

Definition 4.1 (Substituce jazyků)

Mějme konečnou abecedu Σ. Pro každé $x \in \Sigma$ budiž $\sigma(x)$ jazyk v nějaké abecedě Y_x. Dále položme

$$\sigma(\lambda) = \{\lambda\}$$
$$\sigma(u.v) = \sigma(u).\sigma(v)$$

- Zobrazení $\sigma : \Sigma^* \to P(Y^*)$, kde $Y = \bigcup_{x \in \Sigma} Y_x$ se nazývá **substituce**.
- $\sigma(L) = \bigcup_{w \in L} \sigma(w)$
- **nevypouštějící substituce** je substituce, kde žádné $\sigma(x)$ neobstahuje λ.

Example 4.1 (substituce)

1) $\Sigma = \{k, p, m, c, t\}$, $L = (kmp)(ckmp)^* t$,
   k slovník křestních jmen, p slovník příjmení, m mezera, c čárka, t tečka.
2) Pokud $\sigma(0) = \{a^i b^j, i, j \geq 0\}, \sigma(1) = \{cd\}$
   tak $\sigma(010) = \{a^i b^j cda^k b^l, i, j, k, l \geq 0\}$.

Homomorfizmus a inverzní homomorfizmus jazyků

Definition 4.2 (homomorfizmus (jazyků), inverzní homomorfizmus)

homomorfizmus h je speciální případ substituce, kde obraz je vždy jen jednoslovný jazyk (vynecháváme u něj závorky), tj. $(\forall x \in \Sigma)\ h(x) = w_x$.
Pokud $\forall x : w_x \neq \lambda$, jde o **nevypouštějící homomorfizmus**.
Inverzní homomorfizmus $h^{-1}(L) = \{w | h(w) \in L\}$.

Example 4.2 (homomorfizmus)

homomorfizmus h definujeme: $h(0) = ab$, a $h(1) = \lambda$. Pak $h(0011) = abab$.
Pro $L = \mathbf{10}^*\mathbf{1}$ je $h(L) = (ab)^*$.

Theorem 4.1 (uzavřenost na homomorfizmus)

Je–li jazyk L i $\forall x \in \Sigma$ jazyk $\sigma(x), h(x)$ regulární, pak je regulární i $\sigma(L), h(L)$.

Proof.

Strukturální indukcí 'probubláváním' algebraickým popisem jazyka základních, sjednocení, zřetězení a iterace. Tvrzení: $\sigma(L(E)) = L(\underline{\sigma}(E))$. $\sigma(\{\lambda\}) = \lambda$, $\sigma(\emptyset) = \emptyset$, $\sigma(\{x\}) = \underline{\sigma}(x)$, $\sigma(L(\alpha + \beta)) = L(\underline{\sigma}(\alpha) + \underline{\sigma}(\beta))$ atd. $\square$

Přehled definic k 'probublání' substituce

Regulární výrazy:

- Základ:

výraz α	hodnota $L(\alpha) \equiv [\alpha]$
λ	$L(\lambda) = \{\lambda\}$
$\emptyset$	$L(\emptyset) = \{\} \equiv \emptyset$
$\mathbf{a}$	$L(\mathbf{a}) = \{a\}$.
$\alpha + \beta$	$L(\alpha + \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
$\alpha\beta$	$L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$
α^*	$L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$
(α)	$L((\alpha)) = L(\alpha)$

Substituce

$$\sigma(\lambda) = \{\lambda\}$$
$$\sigma(u.v) = \sigma(u).\sigma(v)$$
$$\sigma(L) = \bigcup_{w \in L} \sigma(w)$$

Proof.

$$\begin{aligned} \sigma(L(\alpha)^*) &= \sigma(L(\alpha)^0) \cup \sigma(L(\alpha)^1) \cup \sigma(L(\alpha)^n) \cup \ldots \\ &= L(\underline{\sigma}(\alpha)^0) \cup L(\underline{\sigma}(\alpha)^1) \cup L(\underline{\sigma}(\alpha)^n) \cup \ldots \\ &= L(\underline{\sigma}(\alpha)^*) \end{aligned}$$

Inverzní homomorfizmus

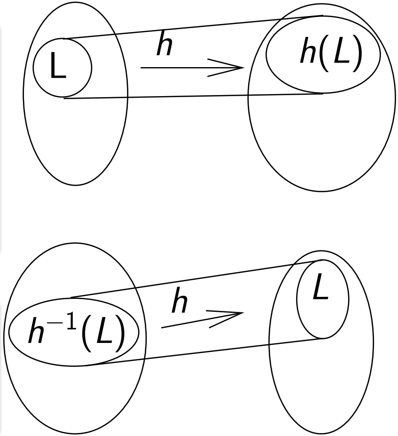
Definition ((4.2) Inverzní homomorfizmus)

Nechť h je homomorfizmus abecedy Σ do slov nad abecedou T. Pak $h^{-1}(L)$ *'h inverze L'* je množina řetězců $h^{-1}(L) = \{w | w \in \Sigma^*;\ h(w) \in L\}$.

Example 4.3

Nechť $L = (\{00\} \cup \{1\})^*$, $h(a) = 01$ a $h(b) = 10$.
Pak $h^{-1}(L) = (\{ba\})^*$.

Důkaz: $h((\{ba\})^*) \in L$ snadno. Ostatní w generují izolované 0 (rozbor případů).



Homomorfizmus aplikovaný dopředně a zpětně.

Inverzní homomorfizmus DFA

Theorem 4.2

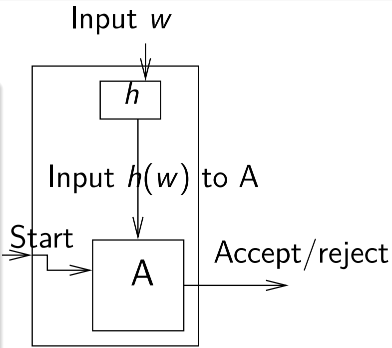
Je–li h homomorfizmus abecedy Σ do abecedy T a L je regulární jazyk abecedy T, pak $h^{-1}(L)$ je také regulární jazyk.

Proof.

Mějme DFA $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ pro L. Konstruujeme DFA pro $h^{-1}(L)$.

- Definujeme $B(Q, \Sigma, \gamma, q_0, F)$ kde $\gamma(q, a) = \delta^*(q, h(a))$ (δ^* operace na řetězcích).
- Indukcí dle $|w|$, $\gamma^*(q_0, w) = \delta^*(q_0, h(w))$.
- Proto B přijímá právě řetězce $w \in h^{-1}(L)$.

□



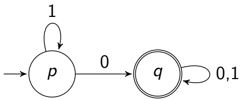
DFA pro $h^{-1}(L)$ aplikuje h na svůj vstup a simuluje DFA pro L

Příklad: Navštiv všechny stavy

Example 4.4

Nechť $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je DFA. Definujme jazyk $L = \{w \in \Sigma^*;\ \delta^*(q_0, w) \in F$ a pro každý stav $q \in Q$ existuje prefix x_q slova w tak, že $\delta^*(q_0, x_q) = q\}$.
Tento jazyk L je regulání.

- M Označme $M = L(A)$.
- T Definujeme novou abecedu T trojic $\{[paq]; p, q \in Q, a \in \Sigma, \delta(p, a) = q\}$.
- h Definujeme homomorfizmus $(\forall\ p, q, a)\ h([paq]) = a$.
- L_1 Jazyk $L_1 = h^{-1}(M)$ je regulární, protože M je regulární (DFA inverzní homomorfizmus).
- $h^{-1}(101)$ obsahuje $2^3 = 8$ řetězců, např. $[p1p][q0q][p1p] \in \{[p1p], [q1q]\}\{[p0q], [q0q]\}\{[p1p], [q1q]\}$.
- Dále zkonstruujeme L z L_1 (další slide).



- L_2 Vynutíme začátek q_0. Definujeme $E_1 = \bigcup_{a\in\Sigma, q\in Q}\{[q_0 a q]\} =$ $E_1 = \{[q_0 a_1 q_0], [q_0 a_2 q_1], \ldots, [q_0 a_m q_n]\}$. Pak $L_2 = L_1 \cap L(E_1.T^*)$.
- L_3 Vynutíme stejné sousedící stavy. Definujeme ne–odpovídající dvojice $E_2 = \bigcup_{q\neq r, p,q,r,s\in Q, a,b\in\Sigma}\{[paq][rbs]\}$. Definujeme $L_3 = L_2 - L(T^*.E_2.T^*)$,
- Končí v přijímajícím stavu, protože jsme začali z jazyku M přijímaném DFA A.
- L_4 Všechny stavy. $\forall\ q \in Q$ definujeme E_q jako regulární výraz sjednocení všech symbolů T takových, že q není ani na první, ani na poslední pozici. Odečteme $L(E_q^*)$ od L_3. $L_4 = L_3 - \bigcup_{q\in Q}\{E_q^*\}$.
- L Odstraníme stavy, necháme symboly. $L = h(L_4)$. Tedy L je regulární.

Přehled:

- M $= L(A)$
  Inverzní homom.
- L_1 $h^{-1}(M) \subseteq \{[qap]\}^*$
  průnik RJ
- L_2 $+\ q_0$
  rozdíl RJ
- L_3 $+$ sousední stavy rovny
  rozdíl RJ
- L_4 $+$ všechny stavy
  homomorfismus
- L $h([qap]) = a$

Rozhodovací problémy pro regulární jazyky

Lemma (Test ne–prázdnosti regulárního jazyka)

Lze algoritmicky rozhodnout, zda jazyk přijímaný DFA, NFA, λ je prázdný.

Jazyk je prázdný právě když žádný z koncových stavů není dosažitelný. Dosažitelnost lze testovat $O(n^2)$.

Lemma (Test náležení do regulárního jazyka)

Pro daný řetězec w; $|w| = n$ a regulární jazyk L. Lze algoritmicky rozhodnout, zda je $w \in L$.

- DFA: Spusť automat; pokud $|w| = n$, při dobré reprezentaci a konstatním čase přechodu $O(n)$.
- NFA o s stavech: čas $O(ns^2)$. Každý vstupní symbol aplikujeme na všechny stavy předchozího kroku, kterých je nejvýš s.
- $\lambda-$NFA - nejdříve určíme λ–uzávěr. Pak aplikujeme přechodovou funkci a λ–uzávěr na výsledek.

Shrnutí 4

Definition (3.3 RJ – algebraický popis jazyků)

Pro konečnou neprázdnou abecedu Σ označme $RJ(\Sigma)$ nejmenší třídu jazyků, která:

- obsahuje prázdný jazyk $\emptyset$
- pro každé písmeno $x \in \Sigma$ obsahuje jazyk $\{x\}$
- je uzavřená na sjednocení $A, B \in RJ(\Sigma) \Rightarrow A \cup B \in RJ(\Sigma)$
- je uzavřená na zřetězení $A, B \in RJ(\Sigma) \Rightarrow A.B \in RJ(\Sigma)$
- je uzavřená na iteraci $A \in RJ(\Sigma) \Rightarrow A^* \in RJ(\Sigma)$.

Theorem (3.3 Kleene)

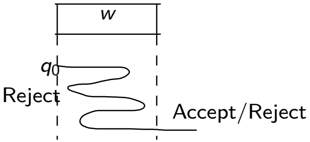
Libovolný jazyk je rozpoznatelný konečným automatem právě když je ve třídě RJ.

Třída regulárních jazyků je uzavřená na

- sjednocení, průnik, doplněk
- zřetězení, iteraci, substituci, homomorfizmus, inverzní homomorfizmus
- reverzi, levý i pravý kvocient.

Dvousměrné (dvoucestné) konečné automaty

- Konečný automat provádí následující činnosti:
  - přečte písmeno
  - změní stav vnitřní jednotky
  - posune čtecí hlavu doprava
- Čtecí hlava se nesmí vracet.



Definition 5.1 (Dvousměrné (dvoucestné) konečné automaty)

Dvousměrným (dvoucestným) konečným automatem nazýváme pětici $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde
- Q je konečná množina stavů,
- Σ je konečná množina vstupních symbolů
- přechodové funkce δ je zobrazení $Q \times \Sigma \to Q \times \{-1, 1\}$ rozšířené o pohyb hlavy
- $q_0 \in Q$ počáteční stav
- množina přijímajících stavů $F \subseteq Q$.

Pozn.: Je deterministický, nedeterministický zavádět nebudeme.
Pozn.2: Nulový pohyb hlavy lze, jen trochu zkomplikuje důkaz dále.

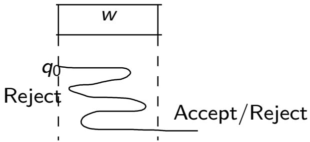
- Reprezentujeme opět stavovým diagramem, tabulkou.

Výpočet dvousměrného automatu

Definition 5.2 (Výpočet dvousměrného automatu)

Slovo w je **přijato dvousměrným konečným automatem**, pokud:

- výpočet začal na prvním písmenu slova w vlevo v počátečním stavu
- čtecí hlava poprvé opustila slovo w vpravo v některém přijímajícím stavu
- mimo čtené slovo není výpočet definován (výpočet zde končí a slovo není přijato).



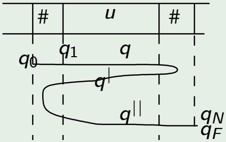
- Ke slovům si můžeme přidat speciální koncové znaky $\# \notin \Sigma$
- funkce $\partial_\#$ odstraní $\#$ zleva, $\partial_\#^R$ zprava.
- Je–li $L(A) = \{\#w\# | w \in L \subseteq \Sigma^*\}$ regulární, potom i L je regulární
- $L = \partial_\# \partial_\#^R (L(A) \cap \#\Sigma^*\#)$.

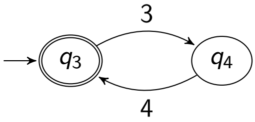
Příklad dvousměrného automatu

Example 5.1 (Příklad dvousměrného automatu)

Nechť $A = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$. Dvousměrný konečný automat $B = (Q \cup Q^{|} \cup Q^{||} \cup \{q_0, q_N, q_F\}, \Sigma \cup \{\#\}, \delta^{|}, q_0, \{q_F\})$ přijímající jazyk $L(B) = \{\#u\# | uu \in L(A)\}$ (toto NENÍ levý ani pravý kvocient!) definujeme následovně:

$\delta^{|}$	$x \in \Sigma$	$\#$	poznámka
q_0	$q_N, -1$	$q_1, +1$	q_1 je počátek A
q	$p, +1$	$q^{|}, -1$	$p = \delta(q, x)$
$q^{|}$	$q^{|}, -1$	$q^{||}, +1$	
$q^{||}$	$p^{||}, +1$	$q_F, +1$	$q \in F, p = \delta(q, x)$
$q^{||}$	$p^{||}, +1$	$q_N, +1$	$q \notin F, p = \delta(q, x)$
q_N	$q_N, +1$	$q_N, +1$	
q_F	$q_N, +1$	$q_N, +1$	





Dvousměrné a jednosměrné konečné automaty

Theorem 5.1

Jazyky přijímané dvousměrnými konečnými automaty jsou právě regulární jazyky.

Proof: konečný automat → dvousměrný automat

- Konečný automat předeveme na dvousměrný přidáním posunu hlavy vpravo
- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \rightarrow 2A = (Q, \Sigma, \delta^|, q_0, F)$, kde $\delta^|(q, x) = (\delta(q, x), +1)$. □

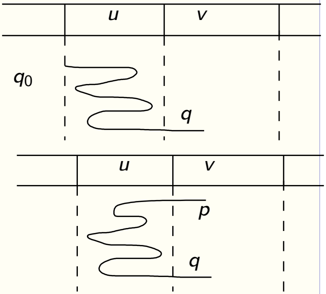
- Možnost pohybovat čtecí hlavou po pásce nezvětšila sílu konečného automatu (dokud na pásku nic nepíšeme!).
- Pro důkaz potřebujeme přípravu

Funkce f_u popisující výpočet 2DFA nad slovem u

Algorithm: Funkce f_u popisující výpočet 2DFA nad slovem u

Definujeme funkci $f_u : Q \cup \{q_0^{|}\} \to Q \cup \{0\}$

- $f_u(q_0^{|})$ popisuje v jakém stavu poprvé odejdeme vpravo, pokud začneme výpočet vlevo v počátečním stavu q_0,
- $f_u(p); p \in Q$ v jakém stavu opět odejdeme vpravo, pokud začneme výpočet vpravo v p
- symbol 0 značí, že daná situace nenastane (odejdeme vlevo nebo cyklus)



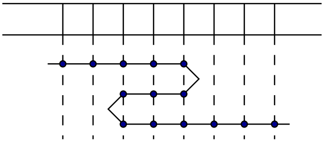
- Definujeme ekvivalenci slov následovně: $u \sim w \Leftrightarrow_{def} f_u = f_w$,
  - tj. slova jsou ekvivalentní pokud mají stejné 'výpočtové' funkce

Regulárnost 2DFA

Ekvivalence $\sim$ je ekvivalence, má konečný index, je to pravá kongruence, jazyk 2DFA odpovídá sjednocení tříd $f_w(q_0^{|}) \in F$.
Podle Myhill–Nerodovy věty je $L(A)$ regulární jazyk.

Konstruktivní důkaz věty o 2DFA

- Potřebujeme převést návraty na lineární výpočet.
- Zajímají nás jen přijímající výpočty
- Díváme se na řezy mezi symboly (v jakém stavu přechází na další políčko)



Pozorování:

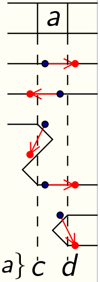
- stavy se v přechodu řezu střídají (doprava, doleva)
- první stav jde doprava, poslední také doprava
- v deterministických přijímajících výpočtech nejsou cykly
- první a poslední řez obsahují jediný stav

Algorithm: 2DFA → NFA

- Najdeme všechny možné řezy – posloupnosti stavů (je jich konečně mnoho).
- Mezi řezy definujeme nedeterministické přechody podle čteného symbolu.
- Rekonstruujeme výpočet skládáním řezů jako puzzle.

Algorithm: Formální převod 2DFA na NFA

Nechť $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je dvousměrný (deterministický) konečný automat. Definujeme ekvivalentní nedeterministický automat $B = (Q^|, \Sigma, \delta^|, (q_0), F^|)$ kde:



- $Q^|$ jsou všechny korektní přechodové posloupnosti
  - posloupnosti stavů $(q^1, \ldots, q^k)$; $q^i \in Q$
  - délka posloupnosti je lichá ($k = 2m + 1$)
  - žádný stav se neopakuje na liché ani na sudé pozici $(\forall i \neq j)\ (q^{2i} \neq q^{2j})$ & $(\forall i \neq j)(q^{2i+1} \neq q^{2j+1})$
- $F^| = \{(q) | q \in F\}$ posloupnosti délky 1
- $\delta^|(c, a) = \{d | d \in Q^| \& c \xrightarrow{a} d$ je lokálně konzistentní přechod pro $a\}$
  - existuje bijekce: $h : c_{odd} \cup d_{even} \to c_{even} \cup d_{odd}$, tak, že:
  - pro $h(q) \in c_{even}$ je $(h(q), -1) = \delta(q, a)$
  - pro $h(q) \in d_{odd}$ je $(h(q), +1) = \delta(q, a)$

$L(A) = L(B)$

Trajektorie 2DFA A odpovídá řezům v FA B, odtud $L(A) = L(B)$.

Příklad převodu 2DFA na NKA

- Mějme následující dvousměrný konečný automat:

	a	b
$\rightarrow p$	p,+1	q,+1
$*q$	q,+1	r,-1
r	p,+1	r,-1

Možné řezy a jejich přechody

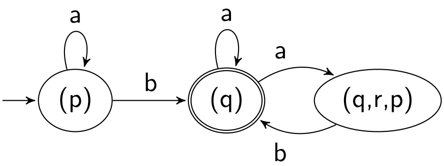
- Doleva jedině r – všechny sudé pozice r, tj. jediná sudá
- možné řezy: $(p), (q), (p, r, q), (q, r, p)$.

	a	b
$\rightarrow (p)$	(p)	(q)
$*(q)$	(q),(q,r,p)	
(p,r,q)		
(q,r,p)		(q)

Ukázka (zacykleného, nepřijímajícího) výpočtu:

a	a	b	a	a	b	a	a	b	b
p	p	p	q	q	q				
					r				
					p	q	q	q	
								r	
								p	q
								r	r
								p	q

Výsledný NFA:



Shrnutí 5

- Obecnější modely, které přijímají stále jen regulární jazyky:
  - nedeterministické konečné automaty NFA
  - NFA s λ přechody
  - dvousměrné konečné automaty (nepíší na pásku + prostor omezený vstupem)
- usnadní nám návrh automatu, zjednoduší zápis
- umíme převést na DFA.

Automaty s výstupem (motivace)

- Dosud jediná zpráva z automatu: 'Jsme v přijímajícím stavu'.
- Můžeme z FA získat více informací? Můžeme zaznamenat trasu výpočtu?

Moore: indikace stavů (všech, nejen koncových)

- v každé chvíli víme, kde se automat nachází
- Příklad: různé (regulární) čítače

Mealy: indikace přechodů

- po přečtení každého symbolu víme, co automat dělal
- Příklad: regulární překlad slov

Automat už není tak docela černá skříňka.

Mooreův stroj

Definition 5.3 (Mooreův stroj)

Mooreovým (sekvenčním) strojem nazýváme šestici $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \mu, q_0)$ resp. pětici $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \mu)$, kde

Q je konečná neprázdná množina stavů

Σ je konečná neprázdná množina symbolů (vstupní abeceda)

Y je konečná neprázdná množina symbolů (**výstupní abeceda**)

δ je zobrazení $Q \times \Sigma \to Q$ (přechodová funkce)

μ je zobrazení $Q \to Y$ (**značkovací funkce**)

$q_0 \in Q$ (počáteční stav)

- Někdy nás nezajímá počáteční stav, ale jen práce automatu
- značkovací funkce umožňuje suplovat roli koncových stavů
  - $F \subseteq Q$ nahradíme značkovací funkcí $\mu : Q \to \{0, 1\}$ takto:

    $\mu(q) = 0$ pokud $q \notin F$,
    $\mu(q) = 1$ pokud $q \in F$.

Příklad Mooreova stroje

Example 5.2 (Mooreův stroj pro tenis)

Mooreův stroj pro počítání tenisového skóre.

- Vstupní abeceda: ID hráče, který uhrál bod
- Výstupní abeceda & stavy: skóre (tj. $Q = Y$ a $\mu(q) = q$)

Stav/výstup	A	B
00:00	15:00	00:15
15:00	30:00	15:15
15:15	30:15	15:30
00:15	15:15	00:30
30:00	40:00	30:15
30:15	40:15	30:30
30:30	40:30	30:40
15:30	30:30	15:40
00:30	15:30	00:40
40:00	A	40:15
40:15	A	40:30
40:30	A	shoda
30:40	shoda	B
15:40	30:40	B
00:40	15:00	B
shoda	A:40	40:B
A:40	A	shoda
40:B	shoda	B
A	15:00	00:15
B	15:00	00:15

Mealyho stroj

Definition 5.4 (Mealyho stroj)

Mealyho (sekvenčním) strojem nazýváme šestici $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \lambda_M, q_0)$ resp. pětici $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \lambda_M)$, kde

- Q je konečná neprázdná množina stavů
- Σ je konečná neprázdná množina symbolů (vstupní abeceda)
- Y je konečná neprázdná množina symbolů (výstupní abeceda)
- δ je zobrazení $Q \times \Sigma \to Q$ (přechodová funkce)
- λ_M je zobrazení $Q \times \Sigma \to Y$ (**výstupní funkce**)
- $q_0 \in Q$ (počáteční stav)

- Výstup je určen stavem a vstupním symbolem
  - Mealyho stroj je obecnějším prostředkem než stroj Mooreův
  - Značkovací funkci $\mu : Q \to Y$ lze nahradit výstupní funkcí $\lambda_M : Q \times \Sigma \to Y$ například takto:

$$\forall x \in \Sigma\ \lambda_M(q, x) = \mu(q)$$

nebo $$\forall x \in \Sigma\ \lambda_M(q, x) = \mu(\delta(q, x))$$

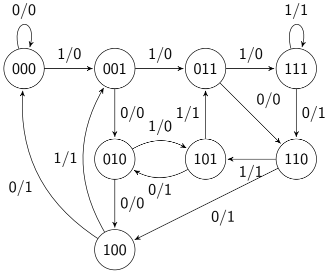
Příklad Mealyho stroje

Example 5.3 (Mealyho stroj)

Automat, který dělí vstupní slovo v bináním tvaru číslem 8 (celočíselně).

- Posun o tři bity doprava
- potřebujeme si pamatovat poslední trojici bitů
- vlastně tříbitová dynamická paměť

Stav\symbol	0	1
000	000/0	001/0
001	010/0	011/0
010	100/0	101/0
011	110/0	111/0
100	000/1	001/1
101	010/1	011/1
110	100/1	101/1
111	110/1	111/1

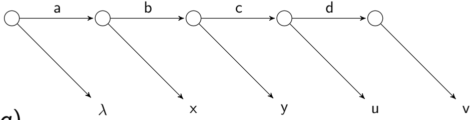


- I když nevíme, kde automat startuje, po třech symbolech začne počítat správně.

Výstup sekvenčních strojů

slovo ve vstupní abecedě $\rightarrow$ slovo ve výstupní abecedě

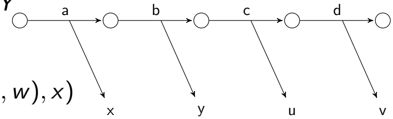
Mooreův stroj



značkovací funkce $\mu : Q \rightarrow Y$
$\mu^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Y^*$
$\mu^*(q, \lambda) = \lambda$ (někdy $\mu^*(q, \lambda) = q$)
$\mu^*(q, wx) = \mu^*(q, w).\mu(\delta^*(q, wx))$

Příklad: μ^*(00:00,AABA)=(00:00 .) 15:00 . 30:00 . 30:15 . 40:15

Mealyho stroj



výstupní funkce $\lambda_M : Q \times \Sigma \rightarrow Y$
$\lambda_M^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Y^*$
$\lambda_M^*(q, \lambda) = \lambda$
$\lambda_M^*(q, wx) = \lambda_M^*(q, w).\lambda_M(\delta^*(q, w), x)$

Příklad: λ_M^*(000,1101010)=0001101

Lemma (Převod Mooreova stroje na Mealyho)

Pro každý Moorův stroj existuje Mealyho stroj převádějící každé vstupní slovo na stejné výstupní slovo.

Proof.

- Nechť $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \mu, q_0)$ je Mooreův stroj.
- Definujeme Mealyho stroj $B = (Q, \Sigma, Y, \delta, \lambda_M, q_0)$, kde $\lambda_M(q, x) = \mu(\delta(q, x))$

  tj. λ_M vrací značku stavu, do kterého přejdeme.

□

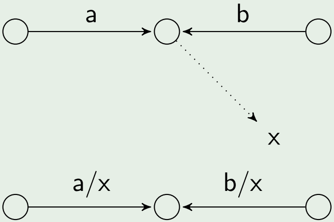
Example 5.4

Mooreův stroj

stav	0	1	výstup
a	a	b	0
b	b	c	1
c	c	a	2

Mealyho stroj
se stejným výstupem

stav	0	1
a	a/0	b/1
b	b/1	c/2
c	c/2	a/0



Převod Mealyho stroje na Mooreův

Lemma (Převod Mealyho stroje na Mooreův)

Pro každý Mealyho stroj existuje Mooreův stroj převádějící každé vstupní slovo na stejné výstupní slovo.

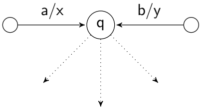
Nechť $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \lambda_M, q_0)$ je Mealyho stroj.
Sestrojme Mooreův stroj B tak, aby $\forall q, w\ \lambda_M^*(q, w) = \mu^*(q, w)$.

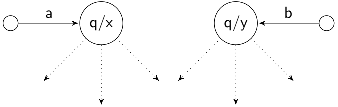
! Rozdělíme stav na více stavů, podle počtu výstupních symbolů.
$B = (Q \times (Y \cup \{\_\}), \Sigma, Y, \delta^{|}, \mu, (q_0, \_))$, kde
$\delta^{|}((q, y), x) = (\delta(q, x), \lambda_M(q, x))$ a
$\mu((q, y)) = y$

Příklad:

stav	0	1
a	a/0	b/0
b	a/1	b/1

stav	0	1	výstup
(a,0)	(a,0)	(b,0)	0
(a,1)	(a,0)	(b,0)	1
(b,0)	(a,1)	(b,1)	0
(b,1)	(a,1)	(b,1)	1





Dodatek - ekvivalence reduktů

Theorem

Každé dva ekvivalentní redukované automaty jsou isomorfní.

Proof.

- Každý stav $q \in Q_1$ je dosažitelný. Najdeme pro něj slovo $q = \delta_1^*(q_{0_1}, w)$
- a definujeme $h(q) = \delta_2^*(q_{0_2}, w)$.
- Lze dokázat, že je h korektně definovaná funkce, zachovává vlastnosti homomorfizmu (q_0, F, δ) a jde o bijekci, tj. je to isomorfzsmus.

$\square$

Konečné automaty – shrnutí

Konečný automat

- redukovaný deterministický automat (lze definovat i jednoznačný)
- nedeterminismus λ–NFA, 2^n, (dvousměrný FA n^n)

Regulární výrazy

Automaty a jazyky

- regulární jazyky
- uzavřenost na množinové operace
- uzavřenost na řetězcové operace
- uzavřenost na substituci, homomorfizmus a inverzní homomorfizmus,
- automaty výše i regulární výrazy popisují stejnou třídu jazyků.

Charakteristika regulárních jazyků

- Mihyll–Nerodova věta (kongruence)
- Kleeneova věta (elementární jazyky a operace)
- Iterační (pumping) lemma (iterace podslov, jen nutná podmínka).

(Automaty s výstupem)

- (Mooreův stroj)
- (Mealyho stroj)

Palindromy

Definition (palindrom)

Palindrom je řetězec w stejný při čtení zepředu i zedadu, tj. $w = w^R$.

- Příklady: `otto`, `Madam, I'm Adam`.

Example 6.1 (Bezkontextová gramatika pro palindromy)

1. $S \rightarrow \lambda$
2. $S \rightarrow 0$
3. $S \rightarrow 1$
4. $S \rightarrow 0S0$
5. $S \rightarrow 1S1$

Lemma

Jazyk $L_{pal} = \{w|w = w^R, w \in \Sigma^*\}$ *není regulární.*

Proof:

- Důkaz sporem. Předpokládejme L_{pal} je regulární, nechť n je konstanta z pumping lemma, uvažujme slovo: $w = 0^n 1 0^n$.
- z pumping lemmatu lze rozložit na $w = xyz$, y obsahuje jednu nebo více z prvních n nul. Tedy xz má být v L_{pal} ale není, tj. L_{pal} není regulární. □

Formální (generativní) gramatiky, Bezkontextové gramatiky

Definition 6.1 (Formální (generativní) gramatika)

Formální (generativní) gramatika je $G = (V, T, P, S)$ složena z

- konečné množiny **neterminálů** (variables) V
- neprázdné konečné množiny **terminálních symbolů** (**terminálů**) T
- **počáteční symbol** $S \in V$.
- konečné množiny **pravidel** (**produkcí**) P reprezentující rekurzivní definici jazyka. Každé pravidlo má tvar:
  - $\beta A \gamma \to \omega$, $A \in V, \beta, \gamma, \omega \in (V \cup T)^*$

    tj. levá strana obsahuje aspoň jeden neterminální symbol.

Definition (Bezkontextová gramatika CFG)

Bezkontextová gramatika (CFG) je $G = (V, T, P, S)$ gramatika, obsahující pouze pravidla tvaru

$$A \to \omega,\ A \in V, \omega \in (V \cup T)^*.$$

Chomského hierarchie

Definition 6.2 (Klasifikace gramatik podle tvaru přepisovacích pravidel)

- **gramatiky typu 0** (**rekurzivně spočetné jazyky** $\mathcal{L}_0$)

  pravidla v obecné formě $\alpha \to \omega$, $\alpha, \omega \in (V \cup T)^*, \alpha$ obsahuje neterminál
- **gramatiky typu 1** (**kontextové gramatiky**, jazyky $\mathcal{L}_1$)
  - pouze pravidla ve tvaru $\gamma A \beta \to \gamma \omega \beta$

    $A \in V, \gamma, \beta \in (V \cup T)^*, \omega \in (V \cup T)^+$**!**
  - jedinou výjimkou je pravidlo $S \to \lambda$, potom se ale S nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla
- **gramatiky typu 2** (**bezkontextové gramatiky**, jazyky $\mathcal{L}_2$)

  pouze pravidla ve tvaru $A \to \omega, A \in V, \omega \in (V \cup T)^*$
- **gramatiky typu 3** (regulární/**pravé lineární gramatiky**, regulární jazyky $\mathcal{L}_3$)

  pouze pravidla ve tvaru $A \to \omega B, A \to \omega, A, B \in V, \omega \in T^*$

Uspořádanost Chomského hierarchie

- Chomského hierarchie definuje uspořádání tříd jazyků

$$\mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_3$$

- dokonce vlastní podmnožiny (později)

$$\mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \supset \mathcal{L}_3$$

$\mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}_1$ rekurzivně spočetné jazyky zahrnují kontextové jazyky
  pravidla $\gamma A \beta \to \gamma \omega \beta$ obsahují vlevo neterminál A

$\mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_3$ bezkontextové jazyky zahrnují regulární jazyky
  pravidla $A \to \omega B, A \to \omega$ obsahují vpravo řetězec $(V \cup T)^*$

$\mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_2$ kontextové jazyky zahrnují bezkontextové jazyky
  problém je s pravidly typu $A \to \lambda$, ale ta umíme eliminovat.

Example 6.2 (Notace)

$a, b, c, 1, *, ($	terminály
A, B, C	neterminály, proměnné
w, z	řetězec terminálů
X, Y	buď terminál nebo neterminál
α, β, γ	řetězec $(T \cup V)^*$
$A \to \alpha \vert \beta$	$\{A \to \alpha, A \to \beta\}$, OR, kompaktní zápis více pravidel.

Derivace, Jazyk generovaný gramatikou G, neterminálem A

Definition 6.3 (Derivace $\Rightarrow^*$)

Mějme gramatiku $G = (V, T, P, S)$.

- Říkáme, že α se **přímo přepíše** na ω (píšeme $\alpha \Rightarrow_G \omega$ nebo $\alpha \Rightarrow \omega$) jestliže
  $\exists \beta, \gamma, \eta, \nu \in (V \cup T)^* : \alpha = \eta\beta\nu,\ \omega = \eta\gamma\nu$ a $(\beta \rightarrow \gamma) \in P$.
- Říkáme, že α se **přepíše** na ω (píšeme $\alpha \Rightarrow^* \omega$) jestliže
  $\exists \beta_1, \ldots, \beta_n \in (V \cup T)^* : \alpha = \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \beta_n = \omega$,
  tj. také $\alpha \Rightarrow^* \alpha$.
- Posloupnost $\beta_1, \ldots, \beta_n$ nazýváme **derivací (odvozením)**.
- Pokud $\forall i \neq j : \beta_i \neq \beta_j$, hovoříme o **minimálním odvození**.

Definition 6.4 (Jazyk generovaný gramatikou G)

Jazyk $L(G)$ generovaný gramatikou $G = (V, T, P, S)$ je množina terminálních řetězců, pro které existuje derivace ze startovního symbolu

$$L(G) = \{w \in T^* | S \Rightarrow^*_G w\}.$$

Jazyk neterminálu $A \in V$ definujeme $L(A) = \{w \in T^* | A \Rightarrow^*_G w\}$.

Gramatiky typu 3 a regulární jazyky

Definition (Gramatika typu 3, pravá lineární)

Gramatika G je **pravá lineární, tj. Typu 3**, pokud obsahuje pouze pravidla tvaru $A \rightarrow wB, A \rightarrow w, A, B \in V, w \in T^*$.

Example 6.3 (Příklad derivace gramatiky typu 3)

$$P = \{S \rightarrow 0S|1A|\lambda,\ A \rightarrow 0A|1B,\ B \rightarrow 0B|1S\}$$

$$S \Rightarrow 0S \Rightarrow 01A \Rightarrow 011B \Rightarrow 0110B \Rightarrow 01101S \Rightarrow 01101$$

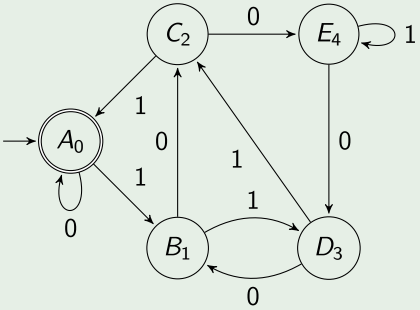
- Pozorování:
  - každé slovo derivace obsahuje právě jeden neterminál
  - tento neterminál je vždy umístěn zcela vpravo
  - aplikací pravidla $A \rightarrow w$ se derivace uzavírá
  - krok derivace generuje symboly a změní neterminál
- Idea vztahu gramatiky a konečného automatu
- neterminál = stav konečného automatu
- pravidla = přechodová funkce

Příklad převodu FA na gramatiku

Example 6.4 (G, FA binární zápis čísla dělitelného 5)

$L = \{w | w \in \{a, b\}^* \& w$ je binární zápis čísla dělitelného 5$\}$

$$\begin{aligned} A &\rightarrow 1B|0A|\lambda \\ B &\rightarrow 0C|1D \\ C &\rightarrow 0E|1A \\ D &\rightarrow 0B|1C \\ E &\rightarrow 0D|1E \end{aligned}$$



Příklady derivací

$$\begin{aligned} &A \Rightarrow 0A \Rightarrow 0 && (0) \\ &A \Rightarrow 1B \Rightarrow 10C \Rightarrow 101A \Rightarrow 101 && (5) \\ &A \Rightarrow 1B \Rightarrow 10C \Rightarrow 101A \Rightarrow 1010A \Rightarrow 1010 && (10) \\ &A \Rightarrow 1B \Rightarrow 11D \Rightarrow 111C \Rightarrow 1111A \Rightarrow 1111 && (15) \end{aligned}$$

Převod konečného automatu na gramatiku typu 3

Theorem 6.1 ($L \in RE \Rightarrow L \in \mathcal{L}_3$)

Pro každý jazyk rozpoznávaný konečným automatem existuje gramatika typu 3, která ho generuje.

Proof: Převod konečného automatu na gramatiku typu 3

- $L = L(A)$ pro deterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- definujme gramatiku $G = (Q, \Sigma, P, q_0)$, kde pravidla P mají tvar
  $p \to aq$, když $\delta(p, a) = q$
  $p \to \lambda$, když $p \in F$
- je $L(A) = L(G)$?
  - $\lambda \in L(A) \Leftrightarrow q_0 \in F \Leftrightarrow (q_0 \to \lambda) \in P \Leftrightarrow \lambda \in L(G)$
  - $a_1 \ldots a_n \in L(A) \Leftrightarrow \exists q_0, \ldots, q_n \in Q$ tž. $\delta(q_i, a_{i+1}) = q_{i+1}, q_n \in F$
    $\Leftrightarrow (q_0 \Rightarrow a_1 q_1 \Rightarrow \ldots a_1 \ldots a_n q_n \Rightarrow a_1 \ldots a_n)$ je derivace pro $a_1 \ldots a_n$
    $\Leftrightarrow a_1 \ldots a_n \in L(G)$

$\square$

Příprava převodu gramatiky typu 3 na FA

- Opačný směr
  - pravidla $A \rightarrow aB$ kódujeme do přechodové funkce
  - pravidla $A \rightarrow \lambda$ určují koncové stavy
  - pravidla $A \rightarrow a_1 \dots a_n B, A \rightarrow a_1 \dots a_n$ s více neterminály rozepíšeme
    - zavedeme nové neterminály $Y_2, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n$
    - vytvoříme pravidla $A \rightarrow a_1 Y_2$, $Y_2 \rightarrow a_2 Y_3, \dots, Y_n \rightarrow a_n B$
    - resp. $Z \rightarrow a_1 Z_1, Z_1 \rightarrow a_2 Z_2, \dots, Z_{n-1} \rightarrow a_n Z_n, Z_n \rightarrow \lambda$
  - pravidla $A \rightarrow B$ odpovídají λ přechodům
    - zbavíme se jich tranzitivním uzávěrem
    - nebo musíme tranzitivně uzavřít $S \rightarrow B$ pro hledání $S \rightarrow \lambda$.

Lemma

Ke každé gramatice typu 3 existuje gramatika typu 3, která generuje stejný jazyk a obsahuje pouze pravidla ve tvaru: $A \rightarrow aB, A \rightarrow \lambda$, $A, B \in V, a \in T$.

Standardizace gramatiky typu 3

Lemma

Ke každé gramatice typu 3 existuje gramatika typu 3, která generuje stejný jazyk a obsahuje pouze pravidla ve tvaru: $A \to aB, A \to \lambda$, $A, B \in V, a \in T$.

Proof.

Pro gramatiku $G = (V, T, S, P)$ definujeme $G^| = (V^|, T, S, P^|)$, kde pro každé pravidlo zavedeme dostatečný počet nových neterminálů $Y_2, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_n$ a definujeme

P	$P^\vert$
$A \to aB$ $A \to \lambda$ $A \to a_1 \ldots a_n B$ $Z \to a_1 \ldots a_n$	$A \to aB$ $A \to \lambda$ $A \to a_1 Y_2, Y_2 \to a_2 Y_3, \ldots Y_n \to a_n B$ $Z \to a_1 Z_1, Z_1 \to a_2 Z_2, \ldots, Z_{n-1} \to a_n Z_n, Z_n \to \lambda$
odstraníme i pravidla: $A \to B$	tranzitivní uzávěr $U(A) = \{B \vert B \in V \& A \Rightarrow^* B\}$ $A \to w$ pro všechna $Z \in U(A)$ a $(Z \to w) \in P^\vert$

$\square$

Pouze pravidla $A \to aB, A \to \lambda$

Example 6.5

P	$P^{|}$
$B \to a_1$	$B \to a_1 H_1, H_1 \to \lambda$
	$U(A) = \{A, B\}$, proto
$A \to B$ $A \to a_2$	$A \to a_1 H_2, H_2 \to \lambda$ $A \to a_2 H_3, H_3 \to \lambda$

Převod gramatiky typu 3 na konečný automat

Theorem 6.2 (λ–NFA pro gramatiku typu 3 rozpoznávající stejný jazyk)

Pro každý jazyk L generovaný gramatikou typu 3 existuje λ–NFA rozpoznávající L.

Proof: Převod gramatiky typu 3 na konečný automat

- Vezmeme $G = (V, T, P, S)$ obsahující jen pravidla tvaru $A \rightarrow aB$, $A \rightarrow \lambda$, $A, B \in V, a \in T$ generující L (předchozí lemma)
- definujeme nedeterministický λ–NFA $A = (V, T, \delta, S, F)$, kde:

  $F = \{A|(A \rightarrow \lambda) \in P\}$
  $\delta(A, a) = \{B|(A \rightarrow aB) \in P\}$
- $L(G) = L(A)$
  - $\lambda \in L(G) \Leftrightarrow (S \rightarrow \lambda) \in P \Leftrightarrow S \in F \Leftrightarrow \lambda \in L(A)$
  - $a_1 \dots a_n \in L(G) \Leftrightarrow$ existuje derivace $(S \Rightarrow a_1 H_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 \dots a_n H_n \Rightarrow a_1 \dots a_n)$

  $\Leftrightarrow$ $\exists H_0, \dots, H_n \in V$ tak že $H_0 = S, H_n \in F$
  $H_{i+1} \in \delta(H_i, a_k)$ pro krok $a_1 \dots a_{k-1} H_i \Rightarrow a_1 \dots a_{k-1} a_k H_{i+1}$

  $\Leftrightarrow$ $a_1 \dots a_n \in L(A)$

□

Levé (a pravé) lineání gramatiky

Definition 6.5 (Levé (a pravé) lineání gramatiky)

Gramatiky typu 3 nazýváme také **pravé lineární** (neterminál je vždy vpravo). Gramatika G je **levá lineání**, jestliže má pouze pravidla tvaru $A \rightarrow Bw, A \rightarrow w, A, B \in V, w \in T^*$.

Lemma

Jazyky generované levou lineání gramatikou jsou právě regulární jazyky.

Proof:

$\Rightarrow$ 'otočením' pravidel levé lineární gramatiky dostaneme pravou lineární $A \rightarrow Bw, A \rightarrow w$ převedeme na $A \rightarrow w^R B, A \rightarrow w^R$

- získaná gramatika generuje jazyk L^R, najdeme automat
- víme, že regulární jazyky jsou uzavřené na reverzi, L^R je regulární, tudíž i $L = (L^R)^R$ je regulární

$\Leftarrow$ takto lze získat všechny regulární jazyky

- (FA$\Rightarrow$reverse$\Rightarrow$ pravá lineární gramatika$\Rightarrow$ levá lineární gramatika) $\square$

Lineární gramatiky (a jazyky)

- Levá a pravá lineární pravidla dohromady jsou už silnější.

Definition 6.6 (lineární gramatika, jazyk)

Gramatika je lineární, jestliže má pouze pravidla tvaru
$A \to uBw, A \to w, A, B \in V, u, w \in T^*$ (na pravé straně vždy maximálně jeden neterminál).
Lineární jazyky jsou právě jazyky generované lineáními gramatikami.

- Zřejmě platí: regulární jazyky $\subseteq$ lineární jazyky.
- Jde o vlastní podmnožinu $\subsetneq$.

Example 6.6 (lineární, neregulární jazyk)

Jazyk $L = \{0^n 1^n | n \geq 1\}$ není regulární jazyk, ale je lineární, generovaný gramatikou s pravidly $S \to 0S1|01$.

Pozorování:

- lineární pravidla lze rozložit na levě a pravě lineání pravidla: $S \to 0A, A \to S1$.

Bezkontextová gramatika pro jednoduché výrazy

Definition (Bezkontextová gramatika)

Bezkontextová gramatika je gramatika, kde všechna pravidla jsou tvaru $A \to \omega, \omega \in (V \cup T)^*$.

Example 6.7 (CFG pro jednoduché výrazy)

Gramatika pro jednoduché výrazy $G = (\{E, I\}, \{+, *, (,), a, b, 0, 1\}, P, E)$, P jsou pravidla vypsaná vpravo.

- Pravidla 1–4 definují výraz.
- Pravidla 5–10 definují identifikátor I, odpovídající regulárnímu výrazu $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*$.

CFG pro jednoduché výrazy

1. $E \to I$
2. $E \to E + E$
3. $E \to E * E$
4. $E \to (E)$

5. $I \to a$
6. $I \to b$
7. $I \to Ia$
8. $I \to Ib$
9. $I \to I0$
10. $I \to I1$

Derivační strom

Definition 6.7 (Derivační strom)

Mějme gramatiku $G = (V, T, P, S)$. **Derivační strom** pro G je strom, kde:

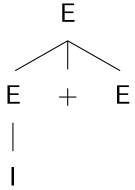
- Kořen (kreslíme nahoře) je ozančen startovním symbolem S,
- každý vnitřní uzel je ohodnocen neterminálem V.
- Každý uzel je ohodnocen prvkem $\in V \cup T \cup \{\lambda\}$.
- Je–li uzel ohodnocen λ, je jediným dítětem svého rodiče.
- Je–li A ohodnocení vrcholu a jeho děti zleva pořadě jsou ohodnoceny $X_1, \ldots, X_k$, pak $(A \rightarrow X_1, \ldots, X_k) \in P$ je pravidlo gramatiky.

Notation 1 (Terminologie stromů)

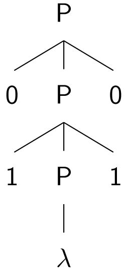
Uzly, rodiče, děti, kořen, vnitřní uzly, listy, následníci, předci.

- Stromová struktura reprezentuje zdrojový program v překladači. Struktura usnadňuje překlad do strojového kódu.

Derivační strom $E \Rightarrow^* I + E$.



Derivační strom $P \Rightarrow^* 0110$.



Definition 6.8 (Strom dává slovo (yield))

Říkáme, že **derivanční strom dává slovo** w **(yield)**, jestliže w je slovo složené z ohodnocení listů bráno zleva doprava.

Levá a pravá derivace

Definition 6.9 (Levá a pravá derivace)

Levá derivace (leftmost) $\Rightarrow_{lm}$, $\Rightarrow_{lm}^*$ v každém kroku přepisuje nejlevnější neterminál.
Pravá derivace (rightmost) $\Rightarrow_{rm}$, $\Rightarrow_{rm}^*$ v každém kroku přepisuje nejpravější neterminál.

Example 6.8 (levá derivace)

$E \Rightarrow_{lm} E * E \Rightarrow_{lm} I * E \Rightarrow_{lm} a * E \Rightarrow_{lm} a * (E) \Rightarrow_{lm} a * (E + E) \Rightarrow_{lm} a * (I + E) \Rightarrow_{lm}$
$\Rightarrow_{lm} a * (a + E) \Rightarrow_{lm} a * (a + I) \Rightarrow_{lm} a * (a + I0) \Rightarrow_{lm} a * (a + I00) \Rightarrow_{lm} a * (a + b00)$

Pravá derivace používá stejné přepisy, jen je provádí v jiném pořadí.

Example 6.9 (rightmost derivation)

$E \Rightarrow_{rm} E * E \Rightarrow_{rm} E * (E) \Rightarrow_{rm} E * (E + E) \Rightarrow_{rm} E * (E + I) \Rightarrow_{rm}$
$\Rightarrow_{rm} E * (E + I0) \Rightarrow_{rm} E * (E + I00) \Rightarrow_{rm} E * (E + b00) \Rightarrow_{rm}$
$\Rightarrow_{rm} E * (I + b00) \Rightarrow_{rm} E * (a + b00) \Rightarrow_{rm} I * (a + b00) \Rightarrow_{rm} a * (a + b00)$

Derivace a derivační stromy

Theorem 6.3

Pro danou gramatiku $G = (V, T, P, S)$ a $w \in T^*$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- $A \Rightarrow^* w$.
- $A \Rightarrow^*_{lm} w$.
- $A \Rightarrow^*_{rm} w$.
- *Existuje derivační strom s kořenem A dávající slovo w.*

Od stromů k derivaci

Lemma

Mějme CFG $G = (V, T, P, S)$ a derivační strom s kořenem A dávající slovo $w \in T^*$.
Pak existuje levá derivace $A \Rightarrow^*_{lm} w$ v G.

Příprava důkazu: 'obalení derivace'

Mějme následující derivaci:

$$E \Rightarrow I \Rightarrow Ib \rightarrow ab.$$

Pro libovolná slova $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$ je také derivace:

$$\alpha E \beta \Rightarrow \alpha I \beta \Rightarrow \alpha Ib \beta \Rightarrow \alpha ab \beta.$$

Proof: $\exists$ derivační strom pak existuje levá derivace $\Rightarrow_{lm}$

Indukcí podle výšky stomu.

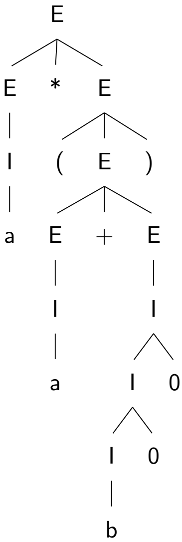
- Základ: výška 1: Kořen A s dětmi dávajícími w. Je to derivační strom, proto, $A \rightarrow w$ je pravidlo $\in P$, tedy $A \Rightarrow_{lm} w$ v jednom kroku.
- Indukce: výška $n > 1$. Kořen A s dětmi $X_1, X_2, \ldots, X_k$.
  - Je–li $X_i \in T$, definujeme $w_i \equiv X_i$.
  - Je–li $X_i \in V$, z indukčního předpokladu $X_i \Rightarrow^*_{lm} w_i$.

  Levou derivaci konstruujeme induktivně pro $i = 1, \ldots, k$ složíme $A \Rightarrow^*_{lm} w_1 w_2 \ldots w_i X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k$.
  - Pro $X_i \in T$ jen zvedneme čítač $i++$.
  - Pro $X_i \in V$ přepíšeme derivaci: $X_i \Rightarrow_{lm} \alpha_1 \Rightarrow_{lm} \alpha_2 \ldots \Rightarrow_{lm} w_i$ na

$$\begin{aligned} w_1 w_2 \ldots w_{i-1} X_i X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k &\Rightarrow_{lm} \\ w_1 w_2 \ldots w_{i-1} \alpha_1 X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k &\Rightarrow_{lm} \\ &\ldots \\ \Rightarrow_{lm} w_1 w_2 \ldots w_{i-1} w_i X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k&. \end{aligned}$$

  Pro $i = k$ dostaneme levou derivaci w z A. $\square$

Příklad levé derivace z derivačního stromu



Je příjemnější zachytit derivaci stromem.

- Kořen: $E \Rightarrow_{lm} E * E$
- Levé dítě kořene: $E \Rightarrow_{lm} I \Rightarrow_{lm} a$
- Kořen a levé dítě: $E \Rightarrow_{lm} E * E \Rightarrow_{lm} I * E \Rightarrow_{lm} a * E$
- Pravé dítě kořene:
  $E \Rightarrow_{lm} (E) \Rightarrow_{lm} (E + E) \Rightarrow_{lm} (I + E) \Rightarrow_{lm} (a + E)$
  $\Rightarrow_{lm} (a+I) \Rightarrow_{lm} (a+I0) \Rightarrow_{lm} (a+I00) \Rightarrow_{lm} (a+b00)$
- Plná derivace:
  $E \Rightarrow_{lm} E * E \Rightarrow_{lm} I * E \Rightarrow_{lm} a * E \Rightarrow_{lm}$
  $\Rightarrow_{lm} a * (E) \Rightarrow_{lm} a * (E + E) \Rightarrow_{lm} a * (I + E) \Rightarrow_{lm}$
  $\Rightarrow_{lm} a * (a + E) \Rightarrow_{lm} a * (a + I) \Rightarrow_{lm} a * (a + I0) \Rightarrow_{lm}$
  $\Rightarrow_{lm} a * (a + I00) \Rightarrow_{lm} a * (a + b00)$.

Ekvivalence gramatik

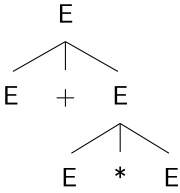
Definition 6.10 (ekvivalence gramatik)

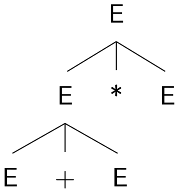
Gramatiky G_1, G_2 jsou **ekvivalentní**, jestliže $L(G_1) = L(G_2)$, tj. generují stejný jazyk.

Víceznačnost gramatik

Dvě derivace téhož výrazu:

$E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \quad E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E$





- Rozdíl je důležitý, vlevo $1 + (2 * 3) = 7$, vpravo $(1 + 2) * 3 = 9$.
- Tato gramatika může být modifikovaná na jednoznačnou.

Example 6.10

Různé derivace mohou reprezentovat stejný derivační strom, pak není problém.

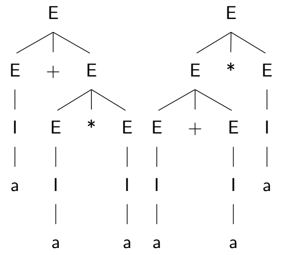
1. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow I + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + I \Rightarrow a + b$
2. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + I \Rightarrow I + I \Rightarrow I + b \Rightarrow a + b$.

Definition 6.11 (Jednoznačnost a víceznačnost CFG)

- Bezkontextová gramatika $G = (V, T, P, S)$ je **víceznačná** pokud existuje aspoň jeden řetězec $w \in T^*$ pro který můžeme najít dva různé derivační stromy, oba s kořenem S dávající slovo w.
- V opačném případě nazýváme gramatiku **jednoznačnou**.
- Bezkontextový jazyk L je **jednoznačný**, jestliže existuje jednoznačná CFG G tak, že $L = L(G)$.
- **Bezkontextový jazyk L je (podstatně) nejednoznačný**, jestliže každá CFG G taková, že $L = L(G)$, je nejednoznačná. Takovému jazyku říkáme i **víceznačný**.

Example 6.11 (nejednoznačnost CFG)

Dva derivační stromy dávající $a + a * a$ ukazující víceznačnost gramatiky.



Příklad víceznačného jazyka

Example 6.12 (Víceznačný jazyk)

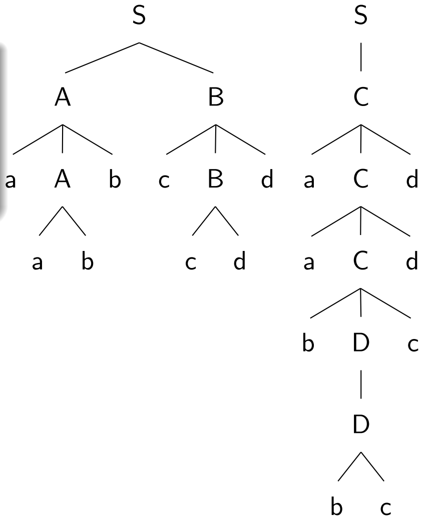
Příklad víceznačného jazyka:

$$L = \{a^n b^n c^m d^m | n \geq 1, m \geq 1\} \cup \cup \{a^n b^m c^m d^n | n \geq 1, m \geq 1\}.$$

1. $S \rightarrow AB|C$
2. $A \rightarrow aAb|ab$
3. $B \rightarrow cBd|cd$
4. $C \rightarrow aCd|aDd$
5. $D \rightarrow bDc|bc$.

Jakákoli gramatika pro daný jazyk bude generovat pro některá slova typu $a^n b^n c^n d^n$ dva různé derivační stromy.

Dva derivační stromy pro $aabbccdd$.



Odstanění víceznačnosti gramatiky

- Neexistuje algoritmus, který nám řekne, zda je daná gramatika víceznačná.
- Existují bezkontextové jazyky, pro které neexistuje jednoznačná bezkontextová gramatika, pouze víceznačné CFG.
- Existují určitá doporučení pro odstranění víceznačnosti.

Víceznačnost má různé příčiny:

- Není respektovaná priorita operátorů.
- Posloupnost identických operátorů lze shlukovat zleva i zprava.
- $S \rightarrow$ if then S else $S|$ if then $S|\lambda$

  slovo 'if then if then else' má dva významy

  'if then (if then else)' nebo 'if then (if then) else'

  Řešení:

  - syntaktická chyba (Algol 60)
  - else patří k bližšímu if (preference pořadí pavidel)
  - závorky begin-end,odsazení v Python (asi nejčistší řešení).

Vynucení priority

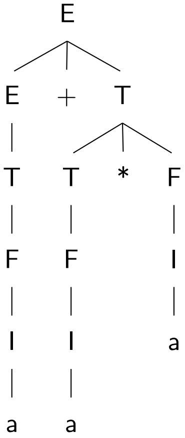
Řešením je zavést více různých proměnných, každou pro jednu úroveň 'priority'.
Konkrétně:

- **Faktor** je výraz který nesmí rozdělit žádný operátor.
  - identifikátory
  - výraz v závorkách
- **Term** je výraz, který nemůže rozdělit operátor $+$.
- **Výraz** může být rozdělen $*$ i $+$.

Jednoznačná gramatika pro výrazy:

1. $I \rightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1$
2. $F \rightarrow I|(E)$
3. $T \rightarrow F|T * F$
4. $E \rightarrow T|E + T$.

Jediný derivační strom pro $a + a * a$.



Jednoznačnost a kompilátory

Kompilace výrazu (zásobník na mezivýsledky + dva registry):

(1)	$E \rightarrow E + T$	... pop r1; pop r2; add r1,r2; push r2
(2)	$E \rightarrow T$	
(3)	$T \rightarrow T * F$	... pop r1; pop r2; mul r1,r2; push r2
(4)	$T \rightarrow F$	
(5)	$F \rightarrow (E)$	
(6)	$F \rightarrow a$	... push a

- 'a+a*a' získáme postupnou aplikací pravidel 1,2,4,6,3,4,6,6
- posloupnost obrátíme a vybereme pouze pravidla generující kód

  6,6,3,6,1
- nyní nahradíme pravidla příslušným kódem

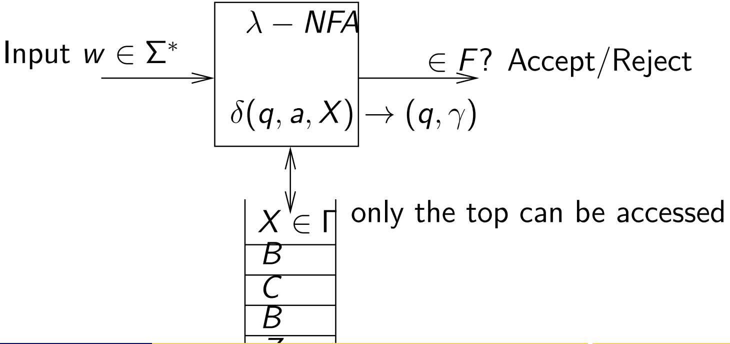
  push a; push a; pop r1; pop r2; mul r1,r2; push r2; push a; pop r1; pop r2; add r1,r2; push r2

Shrnutí

- Gramatiky
    - obecné
    - kontextové
    - bezkontextové
    - regulární, pravé lineární
- jazyk gramatiky, derivace, derivace dává slovo, derivační strom (pro bezkontextové gramatiky), ekvivalentní gramatiky
- ne každá lineární gramatika má ekvivalentní pravou lineární
- bezkontextové gramatiky
- jednoznačné a (podstatně) víceznačné gramatiky

Zásobníkové automaty

- Zásobníkové automaty jsou rozšířením $\lambda-$NFA nedeterministických konečných automatů s λ přechody.
- Přidanou věcí je **zásobník**. Ze zásobníku můžeme číst (read), přidávat na vrch (push), a odebírat z vrchu zásobníku (pop) znak $\in \Gamma$.
- Může si pamatovat neomezené množství informace.
- Zásobníkové automaty definují bezkontextové jazyky.
- Deterministické zásobníkové automaty přijímají jen vlastní podmnožinu bezkontextových jazyků.



Zásobníkový automat (PDA)

Definition 7.1 (Zásobníkový automat (PDA))

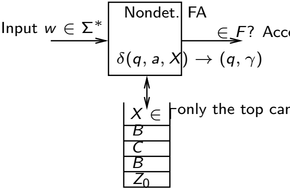
Zásobníkový automat (PDA) je $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde

- Q konečná množina stavů
- Σ neprázdná konečná množina vstupních symbolů
- Γ neprázdná konečná zásobníková abeceda
- δ přechodová funkce $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \to P(_{FIN}(Q \times \Gamma^*))$, $\delta(p, a, X) \ni (q, \gamma)$

  kde q je nový stav a γ je řetězec zásobníkových symbolů, který nahradí X na vrcholu zásobníku
- $q_0 \in Q$ počáteční stav
- $Z_0 \in \Gamma$ Počáteční zásobníkový symbol. Víc na začátku na zásobníku není.
- F Množina přijímajících (koncových) stavů; může být nedefinovaná.

V jednom časovém kroku zásobníkový automat:

- Přečte na vstupu žádný nebo jeden symbol. (λ přechody pro prázdný vstup.)
- Přejde do nového stavu.
- Nahradí symbol na vrchu zásobníku libovolným řetězcem (λ odpovídá samotnému pop, jinak následuje push jednoho nebo více symbolů).



Example 7.1

Zásobníkový automat pro jazyk: $L_{wwr} = \{ww^R | w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\}$.

PDA přijímající L_{wwr}:

- Start q_0 reprezentuje odhad, že ještě nejsme uprostřed.
- V každém kroku nedeterministicky hádáme;
  - Zůstat q_0 (ještě nejsme uprostřed).
  - Přejít λ přechodem do q_1 (už jsme viděli střed).
- V q_0, přečte vstupní symbol a dá (push) ho na zásobník
- V q_1, srovná vstupní symbol s vrcholem zásobníku

  pokud se shodují, přečte vstupní symbol a umaže (pop) vrchol zásobníku
- Když vyprázdníme zásobník, přijmeme vstup, který jsme doteď přečetli.

PDA pro L_{wwr}

Example 7.2 (PDA pro L_{wwr})

PDA pro L_{wwr} můžeme popsat
$P = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\}\})$ kde δ je definovaná:

$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\}$ $\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, 1Z_0)\}$	Ulož vstup na zásobník, startovní symbol tam nech
$\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\}$ $\delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\}$ $\delta(q_0, 1, 0) = \{(q_0, 10)\}$ $\delta(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11)\}$	Zůstaň v q_0, přečti vstup a dej ho na zásobník
$\delta(q_0, \lambda, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$ $\delta(q_0, \lambda, 0) = \{(q_1, 0)\}$ $\delta(q_0, \lambda, 1) = \{(q_1, 1)\}$	λ přechod q_1 bez změny zásobníku (a vstupu)
$\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \lambda)\}$ $\delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \lambda)\}$	stav q_1 srovná vstupní symbol a vrchol zásobníku
$\delta(q_1, \lambda, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$	našli jsme ww^R a jdeme do přijímajícího stavu

Grafická notace PDA's

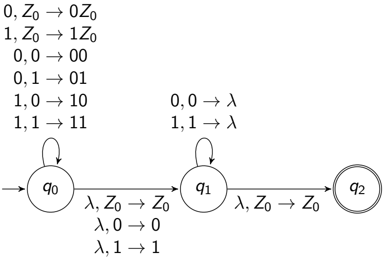
Definition 7.2 (Přechodový diagram pro zásobníkový automat)

Přechodový diagram pro zásobníkový automat obsahuje:

- Uzly, které odpovídají stavům PDA.
- Šipka 'odnikud' ukazuje počáteční stav, dvojité kruhy označují přijímající stavy.
- hrana odpovídá přechodu PDA. Hrana označená $a, X \rightarrow \alpha$ ze stavu p do q znamená $\delta(p, a, X) \ni (q, \alpha)$
- Konvence je, že počáteční symbol zásobníku značíme Z_0.

Labels:

input_symbol, stack_symbol $\rightarrow$ string_to_push



Notace zásobníkových automatů

$a, b, c, *, +, 1, (,)$	symboly vstupní abecedy
p, q, r	stavy
u, v, w, x, y, z	řetězce vstupní abecedy
X, Y, E, I, S	zásobníkové symboly
α, β, γ	řetězce zásobníkových symbolů

Definition 7.3 (Situace zásobníkového automatu)

Situaci zásobníkového automatu reprezentujeme trojicí (q, w, γ), kde

q je stav

w je zbývající vstup a

γ je obsah zásobníku (vrch zásobníku je vlevo).

Situaci značíme zkratkou **(ID)** z anglického **instantaneous description (ID)**.

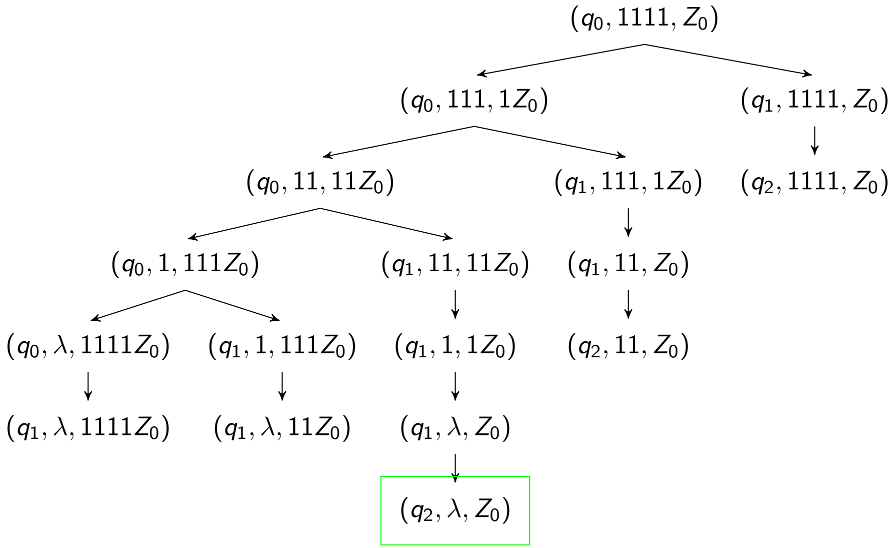
Definition 7.4 ($\vdash, \vdash^*$ posloupnosti situací)

Mějme PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$. Definujeme $\vdash_P$ nebo $\vdash$ následovně.

- Nechť $\delta(p, a, X) \ni (q, \alpha)$, $p, q \in Q, a \in (\Sigma \cup \{\lambda\}), X \in \Gamma, \alpha \in \Gamma^*$.

  $\forall w \in \Sigma^*,\ \beta \in \Gamma^* :\ (p, aw, X\beta) \vdash (q, w, \alpha\beta)$.
- Symboly $\vdash_P^*$ a $\vdash^*$ používáme na označení nuly a více kroků zásobníkového automatu, t.j.
  - $I \vdash^* I$ pro každou situaci I
  - $I \vdash^* J$ pokud existuje situace K tak že $I \vdash K$ a $K \vdash^* J$.
- Čteme $I \vdash^* J$ **situace I vede na situaci J**, $I \vdash J$ situace I **bezprostředně vede** na situaci J.

Situace zásobníkového automatu na vstup 1111



Jazyky zásobníkových automatů

Definition 7.5 (Jazyk přijímaný koncovým stavem, prázdným zásobníkem)

Mějme zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$. Pak $L(P)$, **jazyk akceptovaný koncovým stavem** je

$L(P) = \{w|(q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (q, \lambda, \alpha)$ pro nějaké $q \in F$ a libovolný řetězec $\alpha \in \Gamma^*; w \in \Sigma^*\}$.

jazyk akceptovaný prázdným zásobníkem $N(P)$ definujeme

$N(P) = \{w|(q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (q, \lambda, \lambda)$ pro libovolné $q \in Q; w \in \Sigma^*\}$.

- Protože je množina přijímajících stavů F nerelevantní, může se vynechat a PDA je šestice $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$.

Example 7.3

Zásobníkový automat z předchozího příkladu akceptuje L_{wwr} koncovným stavem.

Example 7.4

$P' \equiv P$ z předchozího příkladu, jen změníme instrukci, aby umazala poslední symbol $\delta(q_1, \lambda, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$ nahradíme $\delta(q_1, \lambda, Z_0) = \{(q_2, \lambda)\}$
Nyní $L(P') = N(P') = L_{wwr}$.

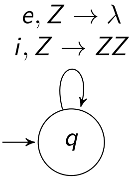
Příklad If-Else

Example 7.5 (If-else přijímané prázdným zásobníkem)

Následující zásobníkový automat zastaví při první chybě na if (i) a else (e), máme–li více else než if.

$P_N = (\{q\}, \{i, e\}, \{Z\}, \delta_N, q, Z)$ kde

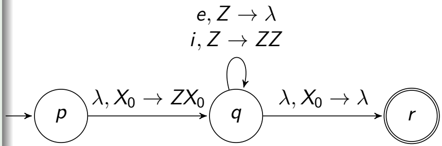
- $\delta_N(q, i, Z) = \{(q, ZZ)\}$ push
- $\delta_N(q, e, Z) = \{(q, \lambda)\}$ pop



Example 7.6 (Přijímání koncovým stavem)

$P_F = (\{p, q, r\}, \{i, e\}, \{Z, X_0\}, \delta_F, p, X_0, \{r\})$ kde

- $\delta_F(p, \lambda, X_0) = \{(q, ZX_0)\}$ start
- $\delta_F(q, i, Z) = \{(q, ZZ)\}$ push
- $\delta_F(q, e, Z) = \{(q, \lambda)\}$ pop
- $\delta_F(q, \lambda, X_0) = \{(r, \lambda)\}$ přijmi



Nečtený vstup a dno zásobníku P neovlivní výpočet

Lemma 7.1

Mějme PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ a $(p, x, \alpha) \vdash_P^* (q, y, \beta)$. Potom pro libovolné slovo $w \in \Sigma^*$ and $\gamma \in \Gamma^*$ platí: $(p, xw, \alpha\gamma) \vdash_P^* (q, yw, \beta\gamma)$. Specielně pro $\gamma = \lambda$ a/nebo $w = \lambda$.

Proof.

Indukcí podle počtu situací mezi $(p, xw, \alpha\gamma)$ a $(q, yw, \beta\gamma)$. Každý krok $(p, x, \alpha) \vdash_P^* (q, y, \beta)$ je určen bez w a/nebo γ. Proto je možný i se symboly na konci vstupu / dně zásobníku. □

Lemma 7.2

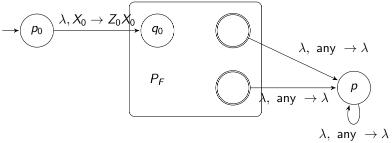
Pro PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ a $(p, xw, \alpha) \vdash_P^* (q, yw, \beta)$ platí $(p, x, \alpha) \vdash_P^* (q, y, \beta)$.

Remark Pro zásobník ale obdoba neplatí. PDA může zásobníkové symboly γ použít a zase je tam naskládat (push). $L = \{0^i 1^i 0^j 1^j\}$, situace $(p, 0^{i-j} 1^i 0^j 1^j, 0^j Z_0) \vdash^* (q, 1^j, 0^j Z_0)$, mezitím vyčištíme zásobník k Z_0.

Od přijímajícího stavu k prázdnému zásobníku

Lemma 7.3 (Od přijímajícího stavu k prázdnému zásobníku)

Mějme $L = L(P_F)$ pro nějaký PDA $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$. Pak existuje PDA P_N takový, že $L = L(P_N)$.



Proof:

Nechť $P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0)$, kde

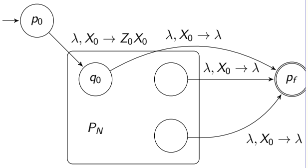
- $\delta_N(p_0, \lambda, X_0) = \{(q, Z_0 X_0)\}$ start
- $\forall(q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\lambda\}, Y \in \Gamma)$ $\delta_N(q, a, Y) = \delta_F(q, a, Y)$ simulujeme
- $\forall(q \in F, Y \in \Gamma \cup \{X_0\})$, $\delta_N(q, \lambda, Y) \ni (p, \lambda)$ přijmout pokud P_F přijímá,
- $\forall(Y \in \Gamma \cup \{X_0\})$, $\delta_N(p, \lambda, Y) = \{(p, \lambda)\}$ vyprázdnit zásobník.

Pak $w \in N(P_n)$ iff $w \in L(P_F)$. □

Od prázdného zásobníku ke koncovému stavu

Lemma 7.4 (Od prázdného zásobníku ke koncovému stavu)

Pokud $L = N(P_N)$ pro nějaký PDA $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0)$, pak existuje PDA P_F takový, že $L = L(P_F)$.



Proof:

$$P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$$

kde δ_F je

- $\delta_F(p_0, \lambda, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$ (start).
- $\forall (q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\lambda\}, Y \in \Gamma)$, $\delta_F(q, a, Y) = \delta_N(q, a, Y)$.
- Navíc, $\delta_F(q, \lambda, X_0) \ni (p_f, \lambda)$ pro každý $q \in Q$.

Chceme ukázat $w \in L(P_N)$ iff $w \in L(P_F)$.

- (If) P_F přijímá následovně: $(p_0, w, X_0) \vdash_{P_F} (q_0, w, Z_0X_0) \vdash^*_{P_F=N_F} (q, \lambda, X_0) \vdash_{P_F} (p_f, \lambda, \lambda)$.
- (Only if) Do p_f nelze dojít jinak než předchozím bodem. $\square$

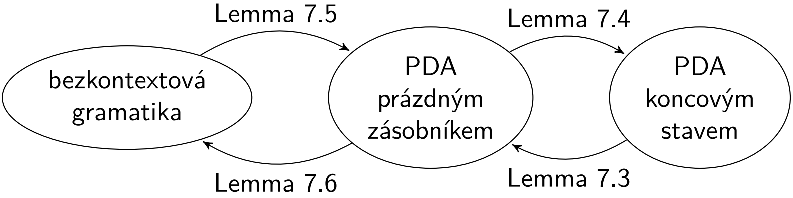
Ekvivalence jazyků rozpoznávaných zásobníkovými automaty a bezkontextových jazyků

Theorem 7.1 (!L(CFG), L(PDA), N(PDA))

Následující tvrzení jsou ekvivalentní

- *Jazyk L je bezkontextový, tj. generovaný CFG*
- *Jazyk L je přijímaný nějakým zásobníkovým automatem koncovým stavem.*
- *Jazyk L je přijímaný nějakým zásobníkovým automatem prázdným zásobníkem.*

Důkaz bude veden směry dle následujícího obrázku.



Od bezkontextové gramatiky k zásobníkovému automatu

Algorithm: Konstrukce PDA z CFG G

Mějme CFG gramatiku $G = (V, T, P, S)$.
Konstruujeme PDA $P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S)$.

(1) Pro neterminály $A \in V$, $\delta(q, \lambda, A) = \{(q, \beta) | A \to \beta$ je pravidlo $G\}$.

(2) pro každý terminál $a \in T$, $\delta(q, a, a) = \{(q, \lambda)\}$.

Example 7.7

Konvertujme gramatiku:
$I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1$
$E \to I|E * E|E + E|(E)$.
Množina vstupních symbolů PDA je $\Sigma = \{a, b, 0, 1, (,), +, *\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{I, E\}$, přechodová funkce δ:

- $\delta(q, \lambda, I) = \{(q, a), (q, b), (q, Ia), (q, Ib), (q, I0), (q, I1)\}$.
- $\delta(q, \lambda, E) = \{(q, I), (q, E * E), (q, E + E), (q, (E))\}$.
- $\forall s \in \Sigma$ je $\delta(q, s, s) = \{(q, \lambda)\}$, např. $\delta(q, +, +) = \{(q, \lambda)\}$.

Jinak je δ prázdná.

CFG a PDA

Lemma 7.5 (Přijímání prázdným zásobníkem ze CFG)

Pro PDA P konstruovaný z CFG G algoritmem výše je $N(P) = L(G)$.

- Levá derivace: $E \Rightarrow E * E \Rightarrow I * E \Rightarrow a * E \Rightarrow a * I \Rightarrow a * b$
- Posloupnost situací:
  $(q, a * b, E) \vdash (q, a * b, E * E) \vdash (q, a * b, I * E) \vdash (q, a * b, a * E)$
  $\vdash (q, *b, *E) \vdash (q, b, E) \vdash (q, b, I) \vdash (q, b, b) \vdash (q, \lambda, \lambda)$

Pozorování:

- Kroky derivace simuluje PDA λ přepisy zásobníku
- odmazávaný vstup u PDA v derivaci zůstává až do konce
- až PDA vymaže terminály, pokračuje v přepisech.

CFG a PDA

$w \in N(P) \Leftarrow w \in L(G)$.

Nechť $w \in L(G)$, w má levou derivaci $S = \gamma_1 \underset{lm}{\Rightarrow} \gamma_2 \underset{lm}{\Rightarrow} \ldots \underset{lm}{\Rightarrow} \gamma_n = w$.
Indukcí podle i dokážeme $(q, w, S) \underset{P}{\vdash}^* (q, v_i, \alpha_i)$, kde $\gamma_i = u_i\alpha_i$ je levá sentenciální forma a $u_i v_i = w$.

- Pokud γ_i obsahuje pouze terminály, $\gamma_i = w$, hotovo.
- Každá nekoncová sentenciální forma γ_i může být zapsaná $u_i A\alpha_i$,
  A nejlevější neterminál, u_i řetězec terminálů
- indukční předpoklad nás dovedl do situace $(q, v_i, A\alpha_i)$, $w = u_i v_i$
- Pro $\gamma_i \underset{lm}{\Rightarrow} \gamma_{i+1}$ bylo použilo pravilo $(A \rightarrow \beta) \in P$
- PDA nahradí A na zásobníku β, přejde na situaci $(q, v_i, \beta\alpha_i)$.
- odstraňme všechny terminály $v \in \Sigma^*$ zleva $\beta\alpha$ porovnáváním se vstupem
  - $v_i = vv_{i+1}$ a zároveň $\beta\alpha = v\alpha_{i+1}$
- přešli jsme do nové situace $(q, v_{i+1}, \alpha_{i+1})$ a iterujeme.

$\square$

$w \in N(P) \Rightarrow w \in L(G)$.

Dokazujeme: Pokud $(q, u, A) \vdash_P^* (q, \lambda, \lambda)$, tak $A \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} u$.

Indukcí podle počtu kroků P.

- $n = 1$ kroků:
  - $a \in \Sigma$, přechod $\delta(q, a, a) \ni (q, \lambda)$, v derivaci žádný krok,
  - $A \in \Gamma$, přechod $\delta(q, \lambda, A) \ni (q, \lambda)$ pro pravidlo gramatiky $(A \to \lambda) \in G$.
- $n > 1$ kroků;
  - První krok typu (2) – terminály, nerozšiřujeme derivaci.
  - První krok typu (1), A nahrazeno $Y_1 Y_2 \dots Y_k$ z pravidla $A \to Y_1 Y_2 \dots Y_k$.
    Rozdělíme $u = u_1 u_2 \dots u_k$:
    - čtením symbolu Y_i skončilo slovo u_{i-1} a začíná u_i.

    Použijeme indukční hypotézu na každé $i = 1, \dots, k$:
    $(q, u_i u_{i+1} \dots u_k, Y_i) \vdash^* (q, u_{i+1} \dots u_k, \lambda)$ a dostaneme $Y_i \Rightarrow^* u_i$.

Dohromady $A \Rightarrow Y_1 Y_2 \dots Y_k \Rightarrow^* u_1 Y_2 \dots Y_k \Rightarrow^* \dots \Rightarrow^* u_1 u_2 \dots u_k$.

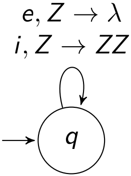
Příklad: Od zásobníkového automatu ke gramatice

Example 7.8

Převeďme PDA $P_N = (\{q\}, \{i, e\}, \{Z\}, \delta_N, q, Z)$ na obrázku na gramatiku.

- Neterminály gramatiky budou $V = \{S, [qZq]\}$ nový start a jediná trojice P_N.
- Pravidla:
  - $S \to [qZq]$.
  - $[qZq] \to i[qZq][qZq]$.
  - $[qZq] \to e$

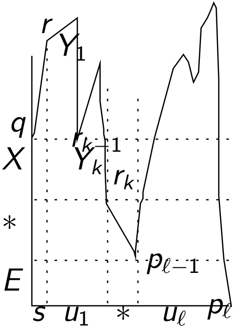
  Můžeme nahradit trojici $[qZq]$ symbolem A a dostaneme:
  $S \to A$
  $A \to iAA|e$.
  Protože A a S odvozují přesně stejné řetězce, můžeme je ztotožnit: $G = (\{S\}, \{i, e\}, \{S \to iSS|e\}, S)$.



Od zásobníkového automatu ke gramatice CFG

- Zásobní automat bere jeden symbol ze zásobníku. Stav před a po kroku může být různý.
- Neterminály gramatiky budou složené symboly $[qXr]$, PDA vyšel z q, vzal X a přešel do r;

  a zavedeme nový počáteční symbol S.



Lemma 7.6 (Gramatika pro PDA)

Mějme PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$. Pak existuje bezkontextová gramatika G taková, že $L(G) = N(P)$.

Pravidla definujeme:

- $\forall p \in Q$: $S \to [q_0 Z_0 p]$, tj. uhodni koncový stav a spusť PDA na $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \lambda, \lambda)$.
- Pro všechny dvojice $(r, Y_1 Y_2 \ldots Y_k) \in \delta(q, s, X), s \in \Sigma \cup \{\lambda\}, \forall r_1, \ldots, r_{k-1} \in Q$ vytvoř pravidlo

$$[qXr_k] \to s[rY_1r_1][r_1Y_2r_2]\ldots[r_{k-1}Y_kr_k]$$

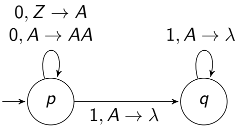
- spec. pro $(r, \lambda) \in \delta(q, a, A)$ vytvoř $[qAr] \to a$.

Proof.

Pro $w \in \Sigma^*$ dokazujeme
$[qXp] \Rightarrow^* w$ právě když $(q, w, X) \vdash^* (p, \lambda, \lambda)$
indukcí v obou směrech (počet kroků PDA, počet kroků derivace.) $\square$

Example 7.9 ($\{0^n1^n; n > 0\}$)

δ	Pravidla	
	$S \rightarrow [pZp] \| [pZq]$	(1)
$\delta(p, 0, Z) \ni (p, A)$	$[pZp] \rightarrow 0[pAp]$	(2)
	$[pZq] \rightarrow 0[pAq]$	(3)
$\delta(p, 0, A) \ni (p, AA)$	$[pAp] \rightarrow 0[pAp][pAp]$	(4)
	$[pAp] \rightarrow 0[pAq][qAp]$	(5)
	$[pAq] \rightarrow 0[pAp][pAq]$	(6)
	$[pAq] \rightarrow 0[pAq][qAq]$	(7)
$\delta(p, 1, A) \ni (q, \lambda)$	$[pAq] \rightarrow 1$	(8)
$\delta(q, 1, A) \ni (q, \lambda)$	$[qAq] \rightarrow 1$	(9)



Derivace 0011
$S \Rightarrow^{(1)} [pZq] \Rightarrow^{(3)} 0[pAq] \Rightarrow^{(7)} 00[pAq][qAq] \Rightarrow^{(8)} 001[qAq] \Rightarrow^{(9)} 0011$

Shrnutí

- Zásobníkový automat PDA je λ–NFA automat rozšířený o zásobník, potenciálně nekonečnou paměť
  - a zásobníkovou abecedu, počáteční zásobníkový symbol, přechodová funkce čte a píše na zásobník, píše i řetězec
- Přijímání koncovým stavem a prázdným zásobníkem, pro nedeterministiké PDA přijímají stejnou třídu jazyků
- a to bezkontextové jazyky, generované bezkontextovými gramatikami.

Chomského normální forma

- Chomského normální forma: všechna pravidla tvaru $A \rightarrow BC$ nebo $A \rightarrow a$, A, B, C jsou neterminály, a terminál
- Každý bezkontextový jazyk (kromě slova λ) je generovaný gramatikou v Chomského normálním tvaru

Postupně provedeme zjednodušení gramatiky, nejdřív:

- Eliminace *zbytečných symbolů*
- eliminace *λ–pravidel* $A \rightarrow \lambda$; $A \in V$
- eliminace *jednotkových pravidel* $A \rightarrow B$ pro $A, B \in V$.

Eliminace zbytečných symbolů

Definition 8.1 (zbytečný, užitečný, generující, dosažitelný symbol)

- Symbol X je **užitečný** v gramatice $G = (V, T, P, S)$ pokud existuje derivace tvaru $S \Rightarrow^* \alpha X \beta \Rightarrow^* w$ kde $w \in T^*, X \in (V \cup T)$, $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$.
- Pokud X není užitečný, říkáme, že je **zbytečný**.
- X je **generující** pokud $X \Rightarrow^* w$ pro nějaké slovo $w \in T^*$. Vždy $w \Rightarrow^* w$ v nula krocích.
- X je **dosažitelný** pokud $S \Rightarrow^* \alpha X \beta$ pro nějaká $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$.

Chceme eliminovat ne–generující a ne–dosažitelné symboly.

Example 8.1

Uvažujme gramatiku:
$S \to AB|a$
$A \to b$

Eliminujeme B (ne–generující):
$S \to a$
$A \to b$.

Eliminujeme A (nedosažitelný):
$S \to a$.

Lemma 8.1 (Eliminace zbytečných symbolů)

Nechť $G = (V, T, P, S)$ je CFG, předpokládejme $L(G) \neq \emptyset$. Zkonstruujeme $G_1 = (V_1, T_1, P_1, S)$ následovně:

- *Eliminujeme ne–generující symboly a pravidla je obsahující*
- *poté eliminujeme všechny nedosažitelné symboly*

Pak G_1 nemá zbytečné symboly a $L(G_1) = L(G)$.

Algorithm: Generující symboly

Základ Každý $a \in T$ je generující.

Indukce Pro každé pravidlo $A \to \alpha$, kde každý symbol v α je generující. Pak i A je generující. (Včetně $A \to \lambda$).

Algorithm: Dosažitelné symboly

Základ S je dosažitelný.

Indukce Je–li A dosažitelný, pro všechna pravidla $A \to \alpha$ jsou všechny symboly v α dosažitelné.

Lemma 8.2 (generující/dosažitelné symboly)

Výše uvedené algoritmy najdou právě všechny generující / dosažitelné symboly.

Eliminace λ pravidel

Definition 8.2 (nulovatelný neterminál)

Neterminál A je **nulovatelný** pokud $A \Rightarrow^* \lambda$.

Pro nulovatelné neterminály na pravé straně pravidla $B \rightarrow CAD$, vytvoříme dvě verze pravidla – s a bez nulovatelného neterminálu.

Algorithm: Nalezení nulovatelných symbolů v G

Základ Pokud $A \rightarrow \lambda$ je pravidlo G, pak A je nulovatelné.

Indukce Pokud $B \rightarrow C_1 \dots C_k$, kde jsou všechna C_i nulovatelná, je i B nulovatelné (terminály nejsou nulovatelné nikdy).

Algorithm: Konstrukce gramatiky bez λ–pravidel z G

- Najdi nulovatelné symboly
- Pro každé pravidlo $A \rightarrow X_1 \dots X_k \in P, k \geq 1$, nechť m z X_i je nulovatelných. Nová gramatika G_1 bude mít 2^m verzí tohoto pravidla s/bez každého nulovatelného symbolu kromě λ v případě $m = k$.

Příklad eliminace λ–pravidel

Example 8.2

Mějme gramatiku:
$S \rightarrow AB$
$A \rightarrow aAA|\lambda$
$B \rightarrow bBB|\lambda$

$S \rightarrow AB|A|B$
$A \rightarrow aAA|aA|aA|a$
$B \rightarrow bBB|bB|bB|b$

Výsledná gramatika:
$S \rightarrow AB|A|B$
$A \rightarrow aAA|aA|a$
$B \rightarrow bBB|bB|b$.

Eliminace jednotkových pravidel

Definition 8.3 (jednotkové pravidlo)

Jednotkové pravidlo je $A \rightarrow B \in P$ kde A, B jsou oba neterminály.

Example 8.3

$I \rightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1$
$F \rightarrow I|(E)$
$T \rightarrow F|T * F$
$E \rightarrow T|E + T$

Expanze T v $E \rightarrow T$
$E \rightarrow F|T * F$
Expanze $E \rightarrow F$
$E \rightarrow I|(E)$

Expanze $E \rightarrow I$
$E \rightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1$

Dohromady: $E \rightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1|(E)|T * F|E + T$.

Musíme se vyhnout možným cyklům.

Definition 8.4 (jednotkový pár)

Dvojici $A, B \in V$ takovou, že $A \Rightarrow^* B$ pouze jednotkovými pravidly nazýváme **jednotkový pár** (jednotková dvojice).

Algorithm: Nalezení jednotkových párů

Základ (A, A) pro každý $A \in V$ je jednotkový pár.

Indukce Je–li (A, B) jednotkový pár a $(B \to C) \in P$, pak (A, C) je jednotkový pár.

Example 8.4 (Jednotkové páry z předchozí gramatiky)

$(E, E), (T, T), (F, F), (I, I), (E, T), (E, F), (E, I), (T, F), (T, I), (F, I)$.

Algorithm: Eliminace jednotkových pravidel z G

- najdi všechny jednotkové páry v G
- pro každý jednotkový pár (A, B) dáme do nové gramatiky všechna pravidla $A \to \alpha$ kde $B \to \alpha \in P$ a $B \to \alpha$ není jednotkové pravidlo.

Example 8.5

$I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1$
$F \to I|(E)$
$T \to F|T * F$
$E \to T|E + T$

$I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1$
$F \to (E)|a|b|Ia|Ib|I0|I1$
$T \to T * F|(E)|a|b|Ia|Ib|I0|I1$
$E \to E + T|T * F|(E)|a|b|Ia|Ib|I0|I1$

Gramatiky v normálním tvaru

Lemma 8.3 (Gramatika v normálním tvaru, redukovaná)

Mějme bezkontextovou gramatiku G, $L(G) - \{\lambda\} \neq \emptyset$. pak existuje CFG G_1 taková že $L(G_1) = L(G) - \{\lambda\}$ a G_1 neobsahuje λ–pravidla, jednotková pravidla ani zbytečné symboly. Gramatika G_1 se nazývá **redukovaná**.

Proof.

Idea důkazu:

- Začneme eliminací λ–pravidel.
- Eliminujeme jednotková pravidla. Tím nepřidáme λ–pravidla.
- Eliminujeme zbytečné symboly. Tím nepřidáme žádná pravidla.

□

Definition 8.5 (Chomského normální tvar)

O bezkontextové gramatice $G = (V, T, P, S)$ bez zbytečných symbolů kde jsou všechna pravidla v jednom ze dvou tvarů

- $A \rightarrow BC$, $A, B, C \in V$,
- $A \rightarrow a$, $A \in V$, $a \in T$,

říkáme, že je v **Chomského normálním tvaru (ChNF)**.

Potřebujeme dva další kroky:

- pravé strany délky 2 a více předělat na samé neterminály
- rozdělit pravé strany délky 3 a více neterminálů na více pravidel

Algorithm: neterminály

- Pro každý terminál a vytvoříme nový neterminál, řekněme A,
- přidáme pravidlo $A \rightarrow a$,
- použijeme A místo a na pravé straně pravidel délky 2 a více

Algorithm: rozdělení pravidel

- Pro pravidlo $A \rightarrow B_1 \dots B_k$ zavedeme $k - 2$ neterminálů C_i
- Přidáme pravidla $A \rightarrow B_1 C_1, C_1 \rightarrow B_2 C_2, \dots, C_{k-2} \rightarrow B_{k-1} B_k$.

Theorem 8.1 (!ChNF)

Mějme bezkontextovou gramatiku G, $L(G) - \{\lambda\} \neq \emptyset$. Pak existuje CFG G_1 v Chomského normálním tvaru taková, že $L(G_1) = L(G) - \{\lambda\}$.

Example 8.6

$I \rightarrow a|b|IA|IB|IZ|IU$
$F \rightarrow LER|a|b|IA|IB|IZ|IU$
$T \rightarrow TMF|LER|a|b|IA|IB|IZ|IU$
$E \rightarrow EPT|TMF|LER|a|b|IA|IB|IZ|IU$
$A \rightarrow a$
$B \rightarrow b$
$Z \rightarrow 0$
$U \rightarrow 1$
$P \rightarrow +$
$M \rightarrow *$
$L \rightarrow ($
$R \rightarrow)$

$F \rightarrow LC_3|a|b|Ia|IB|IZ|IU$
$T \rightarrow TC_2|LC_3|a|b|IA|IB|IZ|IU$
$E \rightarrow EC_1|TC_2|LC_3|a|b|IA|IB|IZ|IU$
$C_1 \rightarrow PT$
$C_2 \rightarrow MF$
$C_3 \rightarrow ER$
$I, A, B, Z, U, P, M, L, R$ jako vlevo

Příprava na (pumping) lemma o vkládání

Lemma (Velikost derivačního stromu gramatiky v CNF)

Mějme derivační strom podle gramatiky $G = (V, T, P, S)$ v Chomského normálním tvaru, který dává slovo w. Je–li délka nejdelší cesty n, pak $|w| \leq 2^{n-1}$.

Proof.

Indukcí podle n,

Základ $|a| = 1 = 2^0$

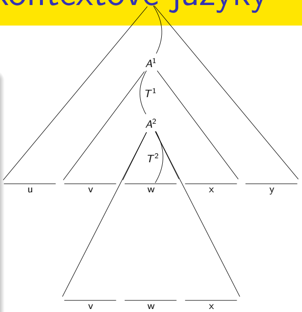
Indukce $2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1}$.

□

Lemma (Důsledek)

Mějme derivační strom podle gramatiky $G = (V, T, P, S)$ v Chomského normální formě, který dává slovo w, $|w| > p = 2^{n-1}$. Pak ve stromě existuje cesta delší než n.

Lemma o vkládání (pumping) pro bezkontextové jazyky



Theorem 8.2 (!!Lemma o vkládání (pumping) pro bezkontextové jazyky)

Mějme bezkontextový jazyk L. Pak existuje přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že každé $z \in L, |z| > n$ lze rozložit na $z = uvwxy$ kde:

- $|vwx| \leq n$
- $vx \neq \lambda$
- $\forall i \geq 0, uv^i wx^i y \in L.$

Idea důkazu:

- vezmeme derivační strom pro z
- najdeme nejdelší cestu
- na ní dva stejné neterminály
- tyto neterminály určí dva podstromy
- podstromy definují rozklad slova
- nyní můžeme větší podstrom posunout $(i > 1)$
- nebo nahradit menším podstromem $(i = 0)$

Proof: $|z| > n : z = uvwxy, |vwx| \le n, vx \ne \lambda, \forall i \ge 0 uv^iwx^iy \in L$

- vezmeme gramatiku v Chomského NF (pro $L = \{\lambda\}$ a $\emptyset$ dk jinak).
- Nechť $|V| = k$. Položíme $n = 2^k$.
- Pro $z \in L$,$|z| > 2^k$, má v derivačním stromu z cestu délky $> k$
- vezmeme nejdelší cestu; terminál kam vede označíme t
- Aspoň dva z posledních $(k+1)$ neterminálů na cestě do t jsou stejné
- vezmeme dvojici A^1, A^2 nejblíže k t (určuje podstromy T^1, T^2)
- cesta z A^1 do t je nejdelší v podstromu T^1 a má délku maximálně $(k+1)$

  tedy slovo dané stromem T^1 není delší než 2^k (tedy $|vwx| \le n$)
- z A^1 vedou dvě cesty (ChNF), jedna do T^2 druhá do zbytku vx

  ChNF je nevypouštějící, tedy $vx \ne \lambda$
- derivace slova $(A^1 \Rightarrow^* vA^2x, A^2 \Rightarrow^* w)$

  $S \Rightarrow^* uA^1y \Rightarrow^* uvA^2xy \Rightarrow^* uvwxy$
- posuneme–li A^2 do A^1 $(i = 0)$

  $S \Rightarrow^* uA^2y \Rightarrow^* uwy$
- posuneme–li A^1 do A^2 $(i = 2, 3, \ldots)$

  $S \Rightarrow^* uA^1y \Rightarrow^* uvA^1xy \Rightarrow^* uvvA^2xxy \Rightarrow^* uvvwxxy$.

□

Použití lemma o vkládání

Example 8.7 (ne–bezkontextový jazyk)

Následující jazyk není bezkontextový

- $\{0^i 1^i 2^i | n \geq 1\}$

- důkaz sporem: předpokládejme bezkontextovost
- z lemmatu o vkládání máme n
- zvolme $z = |0^n 1^n 2^n| > n$
- pumpovací slovo $|vwx| \leq n$
- tj. vždy lze pumpovat maximálně dva různé symboly
- poruší se rovnost počtu symbolů – SPOR

Example 8.8 (ne–bezkontextový jazyk)

Následující jazyk není bezkontextový

- $\{0^i 1^j 2^k | 0 \leq i \leq j \leq k\}$

- důkaz sporem: předpokládejme bezkontextovost
- z lemmatu o vkládání máme n
- zvolme $z = |0^n 1^n 2^n| > n$
- pumpovací slovo $|vwx| \leq n$
- tj. vždy lze pumpovat maximálně dva různé symboly
- pokud 0 (nebo 1), pumpujeme nahoru – SPOR $i \leq j$ (nebo $j \leq k$)
- pokud 2 (nebo 1), pumpujeme dolů – SPOR $j \leq k$ (nebo $i \leq j$)

Použití lemma o vkládání

Example 8.9 (ne–bezkontextový jazyk)

Následující jazyk není bezkontextový

- $\{0^i 1^j 2^i 3^j | i, j \geq 1\}$

- důkaz sporem: předpokládejme bezkontextovost
- z lemmatu o vkládání máme n
- zvolme $z = |0^n 1^n 2^n 3^n| > n$
- pumpovací slovo $|vwx| \leq n$
- tj. vždy lze pumpovat maximálně dva různé sousední symboly
- poruší se rovnost počtu symbolů 0 a 2 nebo 1 a 3 – SPOR

Example 8.10 (ne–bezkontextový jazyk)

Následující jazyk není bezkontextový

- $\{ww | w \in \{0, 1\}^*\}$

- důkaz sporem: předpokládejme bezkontextovost
- z lemmatu o vkládání máme n
- zvolme $z = |0^n 1^n 0^n 1^n| > n$
- pumpovací slovo $|vwx| \leq n$
- tj. vždy lze pumpovat maximálně dva různé sousední symboly
- poruší se buď rovnost nul či jedniček.

Kdy lemma o vkládání nezabere

- Lemma o vkládání je pouze implikace!

Example 8.11 (pumpovatelný, ne–bezkontextový jazyk)

$L = \{a^i b^j c^k d^l | i = 0 \vee j = k = l\}$ není bezkontextový jazyk, přesto lze pumpovat.

$i = 0 : b^j c^k d^l$	lze pumpovat v libovolném písmenu
$i > 0 : a^i b^n c^n d^n$	lze pumpovat v části obsahující a

Co s tím?

- zobecnění pumping lemmatu (Ogdenovo lemma)
  - pumpování vyznačených symbolů
- uzávěrové vlastnosti

Cocke-Younger-Kasami algorithm náležení slova do CFL

Exponenciálně k $|w|$: vyzkoušet všechny derivační stromy dostatečné délky pro L.

Algorithm: !CYK algoritmus, v čase $O(n^3)$

- Mějme gramatiku v ChNF $G = (V, T, P, S)$ pro jazyk L a slovo $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in T^*$.
- Vytvořme trohúhelníkovou tabulku (vpravo),
  - horizontální osa je w
  - X_{ij} jsou množiny neterminálů A takových, že $A \Rightarrow^* a_i a_{i+1} \ldots a_j$.

Základ: $X_{ii} = \{A; A \rightarrow a_i \in P\}$

Indukce: $X_{ij} = \{A \rightarrow BC; B \in X_{ik}, C \in X_{k+1,j}\}$

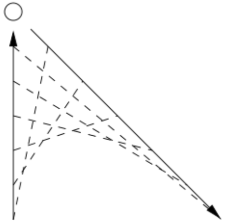
- Vyplňujeme tabulku zdola nahoru.
- Pokud $S \in X_{1,n}$, potom $w \in L(G)$.

X_{15}				
X_{14}	X_{25}			
X_{13}	X_{24}	X_{35}		
X_{12}	X_{23}	X_{34}	X_{45}	
X_{11}	X_{22}	X_{33}	X_{44}	X_{55}
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

Example 9.1 (CYK algoritmus)

Gramatika

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB|BC \\ A &\rightarrow BA|a \\ B &\rightarrow CC|b \\ C &\rightarrow AB|a \end{aligned}$$



Tabulku vyplňujeme odspodu:

$\{S, A, C\}$				
-	$\{S, A, C\}$			
-	$\{B\}$	$\{B\}$		
$\{S, A\}$	$\{B\}$	$\{S, C\}$	$\{S, A\}$	
$\{B\}$	$\{A, C\}$	$\{A, C\}$	$\{B\}$	$\{A, C\}$
b	a	a	b	a

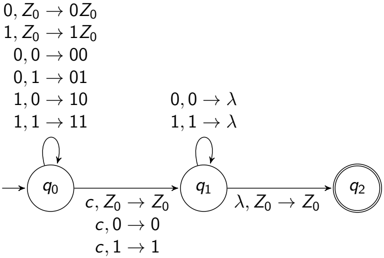
Definition 9.1 (Deterministický zásobníkový automat (DPDA))

Zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \gamma, \delta, q_0, z_0, F)$ je **deterministický** PDA právě když platí zároveň:

- $\delta(q, a, X)$ je nejvýše jednoprvková $\forall (q, a, X) \in Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma$.
- Je–li $\delta(q, a, X)$ neprázdná pro nějaké $a \in \Sigma$, pak $\delta(q, \lambda, X)$ musí být prázdná.

Example 9.2 (Det. PDA přijímající L_{wcwr})

- Jazyk L_{wwr} palindromů je bezkontextový, ale nemá přijímající deterministický zásobníkový automat.
- Druhá podmínka zaručuje, že nebude volba mezi λ přechodem a čtením vstupního symbolu.
- Vložením středové značky c do $L_{wcwr} = \{wcw^R | w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\}$ dostaneme jazyk rozpoznatelný DPDA.



Regulární jazyky, DPDA's

$$RL \subsetneq L(P_{DPDA}) \subsetneq CFL \supsetneq N(P_{DPDA}).$$

Theorem 9.1

Nechť L je regulární jazyk, pak $L = L(P)$ pro nějaký DPDA P.

Proof.

DPDA může simulovat deterministický konečný automat a ignorovat zásobník. (nechat tam Z_0). □

Lemma

Jazyk L_{wcwr} je přijímaný DPDA ale není regulární.

Důkaz neregularity z pumping lemmatu na slovo $0^n c 0^n$.

Example 9.3

Jazyk $L_{xyy} = \{x^i y^i | i \in \mathbb{N}_0\} \cup \{x^i y^{2i} | i \in \mathbb{N}_0\}$ je bezkontextový, ale není přijímaný žádným deterministickým zásobníkovým automatem.

Proof.

- SPOREM: Předokládejme, že existuje deterministický PDA M přijímající jazyk L_{xyy}.
- Vytvořme dvě kopie, M_1 a M_2, odpovídající si uzly budeme nazývat sourozenci.
- Zkonstuujeme nový automat:
  - Počátečním stavem bude počáteční stav M_1
  - koncovými stavy budou koncové stavy M_2
  - přechody z koncových stavů M_1 přesměrujeme do jejich sourozenců v M_2
  - v automatu M_2 hrany označené y přeznačíme na z.
- Výsledný automat přijímá $\{x^i y^i z^i | i \in \mathbb{N}_0\}$
- M je deterministický, nemá jinou cestu, tj. i ve slově $x^i y^{2i}$ musel jít začátek stejně a pak číst y^i, nyní z^i,
- o $\{x^i y^i z^i | i \in \mathbb{N}_0\}$ víme, že není bezkontextový, tj. deterministický M nemůže existovat.

Bezprefixové jazyky

Definition 9.2 (bezprefixové jazyky)

Říkáme, že jazyk L je **bezprefixový** pokud neexistují slova $x, y \in L$ taková, že x je prefix y.

Example 9.4

- Jazyk L_{wcwr} je bezprefixový.
- Jazyk $L = \{0\}^*$ není bezprefixový.

Theorem 9.2 ($L \in N(P_{DPDA})$ právě když L bezprefixový a $L \in L(P'_{DPDA})$)

Jazyk L je $N(P)$ pro nějaký DPDA P právě když L je bezprefixový a L je $L(P')$ pro nějaký DPDA P'.

Proof.

$\Rightarrow$ Prefix přijmeme prázdným zásobníkem, pro prázdný zásobník neexistuje instrukce, tj. žádné prodloužení není v $N(P)$.

$\Leftarrow$ Převod $P^|$ na P nepřidá nedeterminismus (první koncový -> smaž, přijmi).

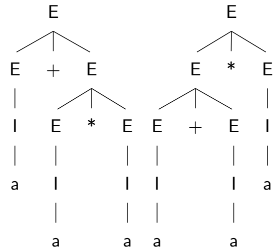
$\square$

Definition ((6.11) Jednoznačnost a víceznačnost CFG)

- Bezkontextová gramatika $G = (V, T, P, S)$ je **víceznačná** pokud existuje aspoň jeden řetězec $w \in T^*$ pro který můžeme najít dva různé derivační stromy, oba s kořenem S dávající slovo w.
- V opačném případě nazáváme gramatiku **jednoznačnou**.
- Bezkontextový jazyk L je **jednoznačný**, jestliže existuje jednoznačná CFG G tak, že $L = L(G)$.
- **Bezkontextový jazyk L je (podstatně) nejednoznačný**, jestliže každá CFG G taková, že $L = L(G)$, je nejednoznačná. Takovému jazyku říkáme i **víceznačný**.

Example 9.5 (nejednoznačnost CFG)

Dva derivační stromy dávající $a + a * a$ ukazující víceznačnost gramatiky.



Example 9.6 (nejednoznačný jazyk)

Jazyk $L = \{a^i b^j c^k | i = j \vee j = k\}$ je podstatně nejednoznačný, 'dost dlouhá' slova $a^i b^i c^i$ mají vždy dva způsoby odvození.

DPDA's a víceznačné gramatiky

Theorem 9.3 ($L = N(P_{DPDA}) \Rightarrow L$ má jednoznačnou CFG.)

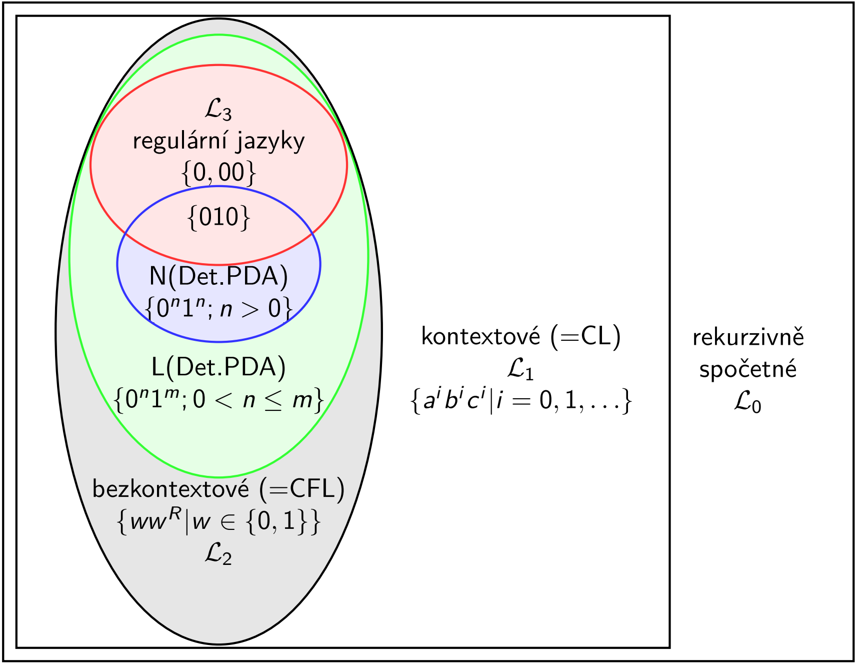
- *Nechť $L = N(P)$ pro nějaký DPDA P. Pak L má jednoznačnou CFG.*
- *Nechť $L = L(P)$ pro nějaký DPDA P. Pak L má jednoznačnou CFG.*

Jazyk L_{wwr} má jednoznačnou gramatiku $S \rightarrow 0S0|1S1|\lambda$ ale není přijímaný DPDA.

Proof.

- $N(P)$: konstrukce CFG z PDA přijímajícího prázdným zásobníkem aplikovaná na DPDA vydá jednoznačnou CFG G.
- $L(P)$:
  - Vytvoříme bezprefixový jazyk zavedením nového symbolu \$ na konec každého slova $w \in L$.
  - Zkonstruujeme DPDA P' kde $L' = N(P')$.
  - Vytvoříme gramatiku G' generující jazyk $N(P')$.
  - Vytvoříme G tak že $L(G) = L$. Nového znaku \$ se zbavíme tím, že ho vezmeme jako neterminál a přidáme pravidlo $\$ \rightarrow \lambda$. Ostatní pravidla zůstanou stejná jako v G'.
  - G je jednoznačná protože G' je jednoznačná a nepřidali jsme nejednoznačnost.

□


$\mathcal{L}_3$
regulární jazyky
$\{0, 00\}$
$\{010\}$
N(Det.PDA)
$\{0^n1^n; n > 0\}$
L(Det.PDA)
$\{0^n1^m; 0 < n \leq m\}$
bezkontextové (=CFL)
$\{ww^R | w \in \{0,1\}\}$
$\mathcal{L}_2$
kontextové (=CL)
$\mathcal{L}_1$
$\{a^ib^ic^i | i = 0, 1, \ldots\}$
rekurzivně
spočetné
$\mathcal{L}_0$

Uzávěrové vlastnosti

Theorem 10.1 (CFL uzavřené na sjednocení, konkatenaci, uzávěr, reverzi)

CFL jsou uzavřené na sjednocení, konkatenaci, uzávěr $(*)$*, positivní uzávěr* $(+)$*, homomorfismus, zrcadlový obraz* w^R*.*

Proof:

- Sjednocení:
  - pokud $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ přejmenujeme neterminály,
  - přidáme nový symbol S_{new} a pravidlo $S_{new} \rightarrow S_1 | S_2$
- zřetězení $L_1.L_2$

  $S_{new} \rightarrow S_1 S_2$ (pro $V_1 \cup V_2 = \emptyset$, jinak přejmenujeme)
- iterace $L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$

  $S_{new} \rightarrow S S_{new} | \lambda$
- pozitivní iterace $L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i$

  $S_{new} \rightarrow S S_{new} | S$
- zrcadlový obraz $L^R = \{w^R | w \in L\}$

  $X \rightarrow \omega^R$ obrátíme pravou stranu pravidel.

Průnik bezkontextových jazyků

Example 10.1 (CFL **nejsou** uzavřené na průnik)

- Jazyk $L = \{0^n 1^n 2^n | n \geq 1\} = \{0^n 1^n 2^i | n, i \geq 1\} \cap \{0^i 1^n 2^n | n, i \geq 1\}$

není CFL, i když oba členy průniku jsou bezkontextové, dokonce deterministické bezkontextové.

$\{0^n 1^n 2^i | n, i \geq 1\} \quad \{S \rightarrow AC, A \rightarrow 0A1|01, C \rightarrow 2C|2\}$

$\{0^i 1^n 2^n | n, i \geq 1\} \quad \{S \rightarrow AB, A \rightarrow 0A|0, B \rightarrow 1B2|12\}$

- průnik není CFL z pumping lemmatu

paralelní běh dvou zásobníkových automatů

- řídící jednotky umíme spojit (viz konečné automaty)
- čtení umíme spojit (jeden automat může čekat)
- bohužel dva zásobníky nelze obecně spojit do jednoho

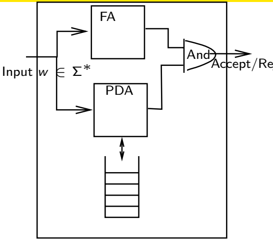
dva neomezené zásobníky $=$Turingův stroj

$=$rekurzivně spočetné jazyky $\mathcal{L}_0$

Průnik bezkontextového a regulárního jazyka

Theorem 10.2 (CFL i DCFL jsou uzavřené na průnik s regulárním jazykem)

- *Mějme L bezkontextový jazyk a R regulární jazyk. Pak $L \cap R$ je bezkontextový jazyk.*
- *Mějme L deterministický CFL a R regulární jazyk. Pak $L \cap R$ je deterministický CFL.*



Proof:

- zásobníkový a konečný automat můžeme spojit
  - FA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$
  - PDA přijímání stavem $M_1 = (Q_2, \Sigma, \Gamma, \delta_2, q_2, Z_0, F_2)$
- nový automat $M = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \Gamma, \delta, (q_1, q_2), Z_0, F_1 \times F_2)$
  - $((r, s), \alpha) \in \delta((p, q), a, Z)$ právě když
    - $a \neq \lambda$: $r = \delta_1(p, a) \& (s, \alpha) \in \delta_2(q, a, Z)$ ...automaty čtou vstup
    - $a = \lambda$: $(s, \alpha) \in \delta_2(q, \lambda, Z)$ PDA mění zásobník
    - $r = p$ FA stojí
- zřejmě $L(M) = L(A_1) \cap L(M_2)$
  - paralelní běh automatů.

Substituce a homomorfismus

- Opakování definice:

Definition ((5.1,5.2)substituce, homomorfismus, inverzní homomorfismus)

Mějme jazyk L nad abecedou Σ.
Substituce σ; $\forall a \in \Sigma : \sigma(a) = L_a$ jazyk abecedy Σ_a, tj. $\sigma(a) \subseteq \Sigma_a^*$
převádí slova na jazyky:

- $\sigma(\lambda) = \{\lambda\}$,
- $\sigma(a_1 \dots a_n) = \sigma(a_1). \dots .\sigma(a_n)$ (konkatenace), tj. $\sigma : \Sigma^* \to P((\bigcup_{a\in\Sigma} \Sigma_a)^*)$
- $\sigma(L) = \bigcup_{w\in L} \sigma(w)$.

homomorfismus h, $\forall a \in \Sigma : h(a) \in \Sigma_a^*$
převádí slova na slova

- $h(\lambda) = \lambda$,
- $h(a_1 \dots a_n) = h(a_1). \dots .h(a_n)$ (konkatenace) tj. $h : \Sigma^* \to (\bigcup_{a\in\Sigma} \Sigma_a)^*$
- $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$.

Inverzní homomorfismus převádí slova zpět

- $h^{-1}(L) = \{w | h(w) \in L\}$.

Příklad: Substituce

Example 10.2

Mějme gramatiku $G = (\{E\}, \{a, +, (,)\}, \{E \to E + E|(E)|a\}, E)$. Mějme substituci:

- $\sigma(a) = L(G_a)$, $G_a = (\{I\}, \{a, b, 0, 1\}, \{I \to I0|I1|Ia|Ib|a|b\}, I)$,
- $\sigma(+) = \{-, \times, :, div, mod\}$,
- $\sigma(() = \{(\}$,
- $\sigma()) = \{)\}$.

- $(a + a) + a \in L(G)$
- $(a001 - bba) * b1 \in \sigma((a + a) + a) \subset \sigma(L(G))$
- v $\sigma(a)$ chybí $+$ pro ukázku, že $(a + a) + a \notin \sigma(L(G))$.

Co se stane, když změníme definici:

- $\sigma(() = \{(, [\}$,
- $\sigma()) = \{),]\}$?

Příklad: Homomorfismus

Example 10.3

Mějme gramatiku
$G = (\{E\}, \{a, +, (,)\},$
$\{E \to E + E|(E)|a\}, E)$. Mějme homomorfimus:

- $h(a) = \lambda$
- $h(+) = \lambda,$
- $h(() = \mathit{left},$
- $h()) = \mathit{right}.$

- $h((a + a) + a) = \mathit{leftright},$
- $h^{-1}(\mathit{leftright}) \ni (a + +)a.$

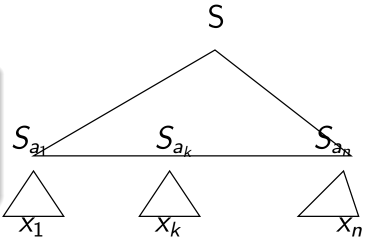
Example 10.4

Mějme gramatiku
$G = (\{E\}, \{a, +, (,)\},$
$\{E \to a + E|(E)|a\}, E)$. Mějme homomorfimus:

- $h_2(a) = a$
- $h_2(+) = +,$
- $h(() = \lambda,$
- $h()) = \lambda.$

1. Je jazyk $L(G)$ regulární?
2. Je jazyk $h(L(G))$ regulární?
3. Je jazyk $h^{-1}(h(L(G)))$ regulární?
4. Je $h^{-1}(h(L(G))) = L(G)$?

Uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků



Theorem 10.3 (CFL jsou uzavřené na substituci)

Mějme CFL jazyk L nad Σ a substituci σ na Σ takovou, že $\sigma(a)$ je CFL pro každé $a \in \Sigma$. Pak je i $\sigma(L)$ CFL (bezkontextový).

Proof:

- Idea: listy v derivačním stromu generují další stromy.
- Přejmenujeme neterminály na jednoznačné všude v $G = (V, \Sigma, P, S)$, $G_a = (V_a, T_a, P_a, S_a), a \in \Sigma$.
- Vytvoříme novou gramatiku $G = (V', T', P', S)$ pro $\sigma(L)$:
  - $V' = V \cup \bigcup_{a\in\Sigma} V_a$
  - $T' = \bigcup_{a\in\Sigma} T_a$
  - $P' = \bigcup_{a\in\Sigma} P_a \cup \{p \in P$ kde všechna $a \in \Sigma$ nahradíme $S_a\}$.

G' generuje jazyk $\sigma(L)$. □

Substituce bezkontextových jazyků

Example 10.5 (substituce)

$L = \{a^i b^j \mid 0 \leq i \leq j\}$	$S \rightarrow aSb \mid Sb \mid \lambda$
$\sigma(a) = L_1 = \{c^i d^i \mid i \geq 0\}$	$S_1 \rightarrow cS_1 d \mid \lambda$
$\sigma(b) = L_2 = \{c^i \mid i \geq 0\}$	$S_2 \rightarrow cS_2 \mid \lambda$
$\sigma(L)$:	$S \rightarrow S_1 S S_2 \mid S S_2 \mid \lambda$, $S_1 \rightarrow cS_1 d \mid \lambda$, $S_2 \rightarrow cS_2 \mid \lambda$

Theorem 10.4 (homomorfismus)

Bezkontextové jazyky jsou uzavřeny na homomorfismus.

Proof:

- Přímý důsledek předchozí věty.
- Terminál a v derivačním stromě nahradím slovem $h(a)$. $\square$

CFL jsou uzavřené na inverzní homomorfismus

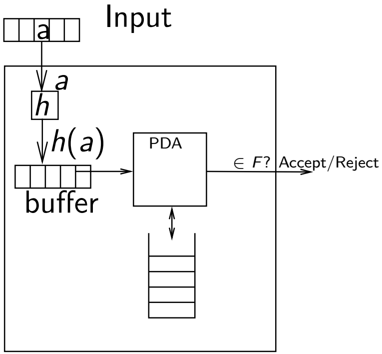
Theorem 10.5 (CFL jsou uzavřené na inverzní homomorfismus)

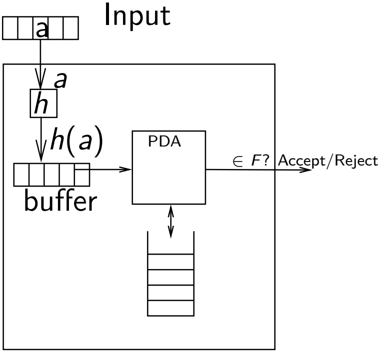
Mějme CFL jazyk L a homomorfismus h. Pak $h^{-1}(L)$ je bezkontextový jazyk. Je–li L deterministický CFL, je i $h^{-1}(L)$ deterministický CFL.

Idea

- přečteme písmeno a a do vnitřního bufferu dáme $h(a)$
- simulujeme výpočet M, kdy vstup bereme z bufferu
- po vyprázdnění bufferu načteme další písmeno ze vstupu
- slovo je přijato, když je buffer prázdný a M je v koncovém stavu

! buffer je konečný, můžeme ho tedy modelovat ve stavu





Proof:

- pro L máme PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ (koncovým stavem)
- $h : T \to \Sigma^*$
- definujeme PDA $M' = (Q', T, \Gamma, \delta', [q_0, \lambda], Z_0, F \times \{\lambda\})$ kde

$$
\begin{array}{lll}
Q' = \{[q,u] \,|\, q \in Q, u \in \Sigma^*, \exists (a \in T) \exists (v \in \Sigma^*) h(a) = vu\} & & u \text{ je buffer} \\
\delta'([q,u], \lambda, Z) & = \{([p,u], \gamma) | (p,\gamma) \in \delta(q, \lambda, Z)\} & \\
 & \cup \{([p,v], \gamma) | (p,\gamma) \in \delta(q, b, Z), u = bv\} & \text{čte buffer} \\
\delta'([q,\lambda], a, Z) & = \{([q, h(a)], Z)\} & \text{naplňuje buffer}
\end{array}
$$

Pro deterministický PDA M je i M' deterministický. □

Kvocienty s regulárním jazykem

$R \setminus L = \{w | \exists u \in R \; uw \in L\}$,
$L/R = \{u | \exists w \in R \; uw \in L\}$
Idea:

- PDA běží paralelně s FA, nečtou vstup
- je–li FA v koncovém stavu, můžeme začít číst vstup

Lemma

Bezkontextové jazyky jsou uzavřené na levý (pravý) kvocient s regulárním jazykem.

Proof:

- FA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$
- PDA $M_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma, \delta_2, q_2, Z_0, F_2)$
- definujeme PDA $M = (Q', \Sigma, \Gamma, \delta, (q_1, q_2), Z_0, F_2)$ kde
  $Q' = (Q_1 \times Q_2) \cup Q_2$ dvojice stavů pro paralelní běh
  $$\begin{aligned} \delta((p,q), \lambda, Z) &= \{((p', q'), \gamma) | \exists (a \in \Sigma) p' \in \delta_1(p, a) \& (q', \gamma) \in \delta_2(q, a, Z) \\ &\cup \{((p, q'), \gamma) | (q', \gamma) \in \delta_2(q, \lambda, Z)\} \\ &\cup \{(q, Z) | p \in F_1\} \\ \delta(q, a, Z) &= \delta_2(q, a, Z),\; a \in \Sigma \cup \{\lambda\},\; q \in Q_2, Z \in \Gamma \end{aligned}$$
  zřejmě $L(M) = L(A_1) \setminus L(M_2)$.
- Pravý kvocient z levého a uzavřenosti na reverzi $L/M = (M^R \setminus L^R)^R$ □

Použití uzavřenosti průniku CFL a RL

Example 10.6

Jazyk $L = \{0^i 1^j 2^k 3^l | i = 0 \vee j = k = l\}$ není bezkontextový.

Proof: Důkaz sporem:

- Nechť L je bezkontextový jazyk
- $L_1 = \{01^j 2^k 3^l | j, k, l \geq 0\}$ je regulární jazyk
  - $\{S \rightarrow 0B, B \rightarrow 1B|C, C \rightarrow 2C|D, D \rightarrow 3D|\lambda\}$
- $L \cap L_1 = \{01^i 2^i 3^i | i \geq 0\}$ není bezkontextový $\Rightarrow$ SPOR

$\square$

L je kontextový jazyk

$S \rightarrow B_1|0A$
$B_1 \rightarrow 1B_1|C_1,\ C_1 \rightarrow 2C_1|D_1,\ D_1 \rightarrow 3D_1|\lambda$
λ odstraníme jako u ChNF + nový poč. symbol
$A \rightarrow 0A|P$
$P \rightarrow 1PCD|1CD$
$DC \rightarrow CD$ přepíšeme $\{DC \rightarrow XC, XC \rightarrow XY, XY \rightarrow CY, CY \rightarrow CD\}$
$1C \rightarrow 12,\ 2C \rightarrow 22,\ 2D \rightarrow 23,\ 3D \rightarrow 33$

Rozdíl a doplněk

Theorem 10.6 (Rozdíl s regulárním jazykem)

Mějme bezkontextový jazyk L a regulární jazyk R. Pak:

- $L - R$ *je CFL.*

Proof.

$L - R = L \cap \overline{R}$, $\overline{R}$ je regulární. □

Theorem 10.7 (CFL nejsou uzavřené na doplněk ani rozdíl)

Třída bezkontextových jazyků není uzavřená na doplněk ani na rozdíl.

CFL nejsou uzavřené na doplněk ani rozdíl.

Mějme bezkontextové jazyky L, L_1, L_2, regulární jazyk R. Pak:

- $\overline{L}$ nemusí být CFL. $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.
- $L_1 - L_2$ nemusí být CFL. $\Sigma^* - L$ není vždy CFL.

□

- V PDA nestačí prohodit koncové a nekoncové stavy – nedeterminismus.

Uzávěrové vlastnosti deterministických CFL

- Rozumné programovací jazyky jsou deterministické CFL.
- Deterministické bezkontextové jazyky
  - nejsou uzavřené na průnik
  - jsou uzavřené na průnik s regulárním jazykem
  - jsou uzavřené na inverzní homomorfismus.

Lemma

Doplněk deterministického CFL je opět deterministický CFL.

Proof:

- idea: prohodíme koncové a nekoncové stavy
- nedefinované kroky ošetříme 'podložkou' na zásobníku
- cyklus odhalíme pomocí čítače
- až po přečtení slova prochází koncové a nekoncové stavy

  stačí si pamatovat, zda prošel koncovým stavem. □

Ne–uzavřenost deterministických CFL

Example 10.7 (DCFL nejsou uzavřené na sjednocení)

Jazyk $L = \{a^i b^j c^k | i \neq j \vee j \neq k \vee i \neq k\}$ je CFL, ale není DCFL.

Proof.

Vzhledem k uzavřenosti DCFL na doplněk by byl DCFL i $\overline{L} \cap a^* b^* c^* = \{a^i b^j c^k | i = j = k\}$, o kterém víme, že není CFL (pumping lemma) □

Example 10.8 (DCFL nejsou uzavřené na homomorfismus)

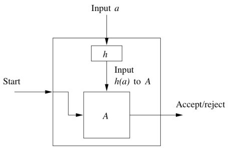
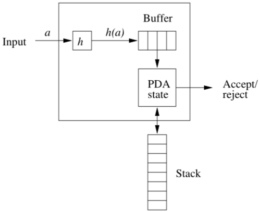
Jazyky $L_1 = \{a^i b^j c^k | i \neq j\}$, $L_2 = \{a^i b^j c^k | j \neq k\}$, $L_3 = \{a^i b^j c^k | i \neq k\}$ jsou deterministické bezkontextové.

- Jazyk $0L_1 \cup 1L_2 \cup 2L_3$ je deterministický bezkontextový
- Jazyk $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ není deterministický bezkontextový
  položme $h(0) = \lambda,\ h(1) = \lambda, ,\ h(2) = \lambda$
  $h(x) = x$ pro ostatní symboly
- $h(0L_1 \cup 1L_2 \cup 2L_3) = L_1 \cup L_2 \cup L_3$,
- doplněk $\overline{L_1 \cup L_2 \cup L_3} \cap a^* b^* c^* = \{a^i b^j c^k | i = j = k\}$.

Uzávěrové vlastnosti v kostce

jazyk	regulární (RL)	bezkontextové	deterministické CFL
sjednocení	ANO	ANO	NE
průnik	ANO	NE	NE
$\cap$ s RL	ANO	ANO	ANO
doplněk	ANO	NE	ANO
homomorfismus	ANO	ANO	NE
inverzní hom.	ANO	ANO	ANO

Uzávěrové vlastnosti v kostce

jazyk	regulární (RL)	bezkontextové	deterministické CFL
sjednocení	$F = F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2$	$S \to S_1 \mid S_2$	$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$
průnik	$F = F_1 \times F_2$	$L = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 1\} = \left\{ \begin{array}{c} \{0^n 1^n 2^i \mid n, i \geq 1\} \\ \cap \{0^i 1^n 2^n \mid n, i \geq 1\} \end{array} \right\}$	
$\cap$ s RL	$F = F_1 \times F_2$	$F = F_1 \times F_2$	$F = F_1 \times F_2$
doplněk	$F = Q_1 - F_1$, δ tot.	$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$	$F = Q_1 - F_1$, Z_0, cykly, tot.
homom.	Kleene + RegExp + uz.	a nahraď S_a	$h(0) = h(1) = 0$ cca. $\cup$
inverzní hom.			

Dyckovy jazyky

Definition 10.1 (Dyckův jazyk)

Dyckův jazyk D_n je definován nad abecedou $Z_n = \{a_1, a_1^|, \ldots, a_n, a_n^|\}$ následující gramatikou: $S \to \lambda|SS|a_1Sa_1^||\ldots|a_nSa_n^|$.

Úvodní pozorování:

- jedná se zřejmě o jazyk bezkontextový
- Dyckův jazyk D_n popisuje správně uzávorkované výrazy s n druhy závorek
- tímto jazykem lze popisovat výpočty libovolného zásobníkového automatu
- pomocí Dyckova jazyka lze popsat libovolný bezkontextový jazyk.

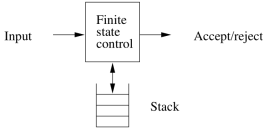
$$L = h(D \cap R)$$

homomorfismus; čistí pomocné symboly

Dyckův jazyk; vybírá pouze korektní výpočty

regulární jazyk; popisuje všechny kroky výpočtu

Jak charakterizovat bezkontextové jazyky?



- Pokud do zásobníku pouze přidáváme

  potom si stačí pamatovat poslední symbol

- stačí konečná paměť $\rightarrow$ konečný automat.

- potřebujeme ze zásobníku také odebírat (čtení symbolu)

  takový proces nelze zaznamenat v konečné struktuře

- přidávání a odebírání není zcela libovolné

  jedná se o zásobník, tj. LIFO (last in, first out) strukturu

- roztáhněme si výpočet se zásobníkem do lineární struktury

  X symbol přidán do zásobníku

  X^{-1} symbol odebrán do zásobníku

- přidávaný a odebíraný symbol tvoří pár $\underbrace{ZZ^{-1}}\underbrace{B\underbrace{AA^{-1}}\underbrace{CC^{-1}}B^{-1}}$

  který se v celé posloupnosti chová jako závorka

Theorem 10.8 (Dyckovy jazyky)

Pro každý bezkontextový jazyk L existuje regulární jazyk R tak, že $L = h(D \cap R)$ pro vhodný Dyckův jazyk D a homomorfismus h.

Proof:

- máme PDA přijímající L prázdným zásobníkem
- převedeme na instrukce tvaru $\delta(q, a, Z) \in (p, w), |w| \leq 2$
  - delší psaní na zásobník rozdělíme zavedením nových stavů
- nechť $R^{|}$ obsahuje všechny výrazy
  - $q^{-1}aa^{-1}Z^{-1}BAp$ pro instrukci $\delta(q, a, Z) \ni (p, AB)$
  - podobně pro instrukce $\delta(q, a, Z) \in (p, A), \delta(q, a, Z) \in (p, \lambda)$
  - je–li $a = \lambda$, potom dvojici aa^{-1} nezařazujeme
- definujeme R takto: $Z_0 q_0 (R^{|})^* Q^{-1}$
- Dyckův jazyk je definován nad abecedou $\Sigma \cup \Sigma^{-1} \cup Q \cup Q^{-1} \cup Y \cup Y^{-1}$
- $D \cap Z_0 q_0 (R^{|})^* Q^{-1}$ popisuje korektní výpočty

$$\underbrace{Z_0 \overbrace{q_0 q_0^{-1}} aa^{-1} Z_0^{-1}} \underbrace{B \underbrace{A \overbrace{pp^{-1}} bb^{-1} A^{-1}} \overbrace{qq^{-1}} cc^{-1} B^{-1}} \overbrace{rr^{-1}}$$

- homomorfismus h vydělí přečtené slovo, tj.

  $h(a) = a$ pro vstupní (čtené) symboly

  $h(y) = \lambda$ pro ostatní

Greibachové normální forma

- při analýze zhora (tvorbě levé derivace daného slova w) potřebujeme vědět, které pravidlo vybrat
- speciálně vadí pravidla tvaru $A \to A\alpha$ (levá rekurze)

Definition 10.2 (Greibachové normální forma CFG)

Říkáme, že gramatika je v **Greibachové normální formě**, jestliže všechna pravidla mají tvar $A \to a\beta$, kde $a \in T$, $\beta \in V^*$ (řetězec neterminálů).

- srovnání terminálu na pravé straně pravidel a čteného symbolu určí, které pravidlo použít
- pokud je ovšem takové pravidlo jediné.

Theorem 10.9 (Greibachové normální forma)

Ke každému bezkontextovému jazyku L existuje bezkontextová gramatika G v Greibachové normální formě taková, že $L(G) = L - \{\lambda\}$.

Spojení pravidel a odstranění levé rekurze

Lemma (spojení pravidel)

Nechť $A \to \alpha B \beta$ je pravidlo gramatiky G a $B \to \omega_1, \ldots, B \to \omega_k$ jsou všechna pravidla pro B. Potom nahrazením pravidla $A \to \alpha B \beta$ pravidly $A \to \alpha \omega_1 \beta, \ldots, A \to \alpha \omega_k \beta$ dostaneme ekvivalentní gramatiku.

Proof:

$A \Rightarrow \alpha B \beta \Rightarrow^* \alpha^| B \beta \Rightarrow \alpha^| \omega_i \beta$ v původní gramatice

$A \Rightarrow \alpha \omega_i \beta \Rightarrow^* \alpha^| \omega_i \beta$ v nové gramatice

$\square$

- Spojením pravidel se zbavíme některých neterminálů na začátku těla pravidla (tj. při $\alpha = \lambda$).
- Na začátku ω_i ale může být také neterminál.

Odstranění levé rekurze

Lemma (odstranění levé rekurze)

Nechť $A \to A\omega_1, \dots, A \to A\omega_k$ *jsou všechna levě rekurzivní pravidla gramatiky* G *pro* A *a* $A \to \alpha_1, \dots, A \to \alpha_m$ *všechna ostatní pravidla pro* A*,* Z *je nový neterminál. Potom nahrazení těchto pravidel pravidly:*
1. $A \to \alpha_i, A \to \alpha_i Z, Z \to \omega_j, Z \to \omega_j Z$*, nebo*
2. $A \to \alpha_i Z, Z \to \omega_j Z, Z \to \lambda$
dostaneme ekvivalentní gramatiku.

Proof:

$$\begin{array}{ll} A \Rightarrow A\omega_{i_n} \Rightarrow \dots \Rightarrow A\omega_{i_1} \dots \omega_{i_n} \Rightarrow \alpha_j \omega_{i_1} \dots \omega_{i_n} & (G) \\ A \Rightarrow \alpha_j Z \Rightarrow \alpha_j \omega_{i_1} Z \dots \Rightarrow \alpha_j \omega_{i_1} \dots \omega_{i_{n-1}} Z \Rightarrow \alpha_j \omega_{i_1} \dots \omega_{i_n} & (1) \\ A \Rightarrow \alpha_j Z \Rightarrow \alpha_j \omega_{i_1} Z \dots \Rightarrow \alpha_j \omega_{i_1} \dots \omega_{i_n} Z \Rightarrow \alpha_j \omega_{i_1} \dots \omega_{i_n} & (2) \end{array}$$

□

Theorem (10.9 Greibachové normální forma)

Ke každému bezkontextovému jazyku L existuje bezkontextová gramatika G v Greibachové normální formě taková, že $L(G) = L - \{\lambda\}$.

Proof: Greibachové normální forma

vezmeme gramatiku pro L v normálním tvaru (bez λ–pravidel)

- neterminály libovolně očíslujeme $\{A_1, \dots, A_n\}$
- povolíme rekurzivní pravidla pouze tvaru $A_i \to A_j\omega$, kde $i < j$

postupnou iterací od 1 do n

$A_i \to A_j\omega$ pro $j < i$ odstraníme spojováním pravidel
pro $j = i$ odstraníme levou rekurzi

získáme pravidla tvaru $A_i \to A_j\omega$ $(i < j)$, $A_i \to a\omega$ $(a \in T)$, $Z_i \to \omega$

- pravidla s A_i (původní neterminály) pouze tvaru $A_i \to a\omega$

postupným spojováním pravidel od n do 1 (pro n již platí)

- pravidla s Z_i (nové neterminály) pouze tvaru $Z_i \to a\omega$
  - žádné pravidlo pro Z_i nezačíná vpravo Z_j
  - buď je v požadovaném tvaru nebo se spojí s pravidlem $A_j \to a\omega$
- odstranění terminálů uvnitř pravidel

□

Příklad převodu na Greibachové NF

Odstranění levé rekurze

$E \rightarrow T|TE^{|}$

$E^{|} \rightarrow +T|+TE^{|}$

$T \rightarrow F|FT^{|}$

$T^{|} \rightarrow *F|*FT^{|}$

$F \rightarrow (E)|a$

Původní gramatika

$E \rightarrow E + T|T$

$T \rightarrow T * F|F$

$F \rightarrow (E)|a$

(téměř) Greibachové normální forma

$E \rightarrow (E)|a|(E)T^{|}|aT^{|}|(E)E^{|}|aE^{|}|(E)T^{|}E^{|}|aT^{|}E^{|}$

$E^{|} \rightarrow +T|+TE^{|}$

$T \rightarrow (E)|a|(E)T^{|}|aT^{|}$

$T^{|} \rightarrow *F|*FT^{|}$

$F \rightarrow (E)|a$

Greibachové normální forma

$E \rightarrow (EP|a|(EPT^{|}|aT^{|}|(EPE^{|}|aE^{|}|(EPT^{|}E^{|}|aT^{|}E^{|}$

$E^{|} \rightarrow +T|+TE^{|}$

$T \rightarrow (EP|a|(EPT^{|}|aT^{|}$

$T^{|} \rightarrow *F|*FT^{|}$

$F \rightarrow (EP|a$

$P \rightarrow)$

Nekonečnost bezkontextových jazyků

Lemma

Pro každý CFL L existuje přirozené číslo n takové, že L je nekonečný právě když $\exists z \in L : n < |z| \leq 2n$.

Proof:

Vezměme n z lemmatu o vkládání (pumping lemma) pro CFL

$\Leftarrow$ $n < |z|$, tedy z lze pumpovat $\Rightarrow$ jazyk je nekonečný

$\Rightarrow$ jazyk je nekonečný $\Rightarrow \exists z \in L : n < |z|$.

vezmeme nejkratší takové z a potom $|z| \leq 2n$

sporem nechť $2n < |z|$, lze pumpovat i dolů, tj. $|z^{|}| < |z|$
odstraňujeme část o max. velikosti n, tedy $p < |z^{|}|$ spor. □

Rychlejší algoritmus:

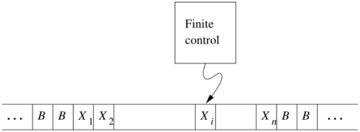
vezmeme <u>redukovanou</u> gramatiku G v ChNF tž. $L = L(G)$

uděláme orientovaný graf

- vrcholy = neterminály, hrany = $\{(A, B), (A, C) pro (A \rightarrow BC) \in P_G\}$
- hledáme orientovaný cyklus (existuje $\Rightarrow$ jazyk je nekonečný)

Turingovy stroje – historie a motivace

- 1931–1936 pokusy o formalizaci pojmu algoritmu
  Gödel, Kleene, Church, Turing
- **Turingův stroj**
  - zachycení práce matematika
    - nekonečná tabule
      lze z ní číst a lze na ni psát
    - mozek (řídící jednotka)
  - Formalizace TM:
    - místo tabule oboustranně nekonečná páska
    - místo křídy čtecí a zapisovací hlava, kterou lze posunovat
    - místo mozku konečná řídící jednotka (jako u PDA)
  - další formalizace:
    - λ–kalkul, částečně rekurzivní funkce, RAM
- Snažíme se definovat problémy nerozhodnutelné jakýmkoli počítačem.



Turingův stroj

Definition 11.1

Turingův stroj (TM) je sedmice $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ se složkami:

- Q konečná množina **stavů**
- Σ konečná neprázdná množina **vstupních symbolů**
- Γ konečná množina všech **symbolů pro pásku**. Vždy $\Gamma \supseteq \Sigma$, $Q \cap \Gamma = \emptyset$.
- δ (částečná) **přechodová funkce**. $(Q - F) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$, v $\delta(q, x) = (p, Y, D)$:
  - q $\in (Q - F)$ aktuální stav
  - X $\in \Gamma$ aktuální symbol na pásce
  - p nový stav, $p \in Q$.
  - Y $\in \Gamma$ symbol pro zapsání do aktuální buňky, přepíše aktuální obsah.
  - D $\in \{L, R\}$ je **směr** pohybu hlavy (doleva, doprava).
- q_0 $\in Q$ **počáteční stav**.
- B $\in \Gamma - \Sigma$. Blank. Symbol pro prázdné buňky, na začátku všude kromě konečného počtu buněk se vstupem.
- F $\subseteq Q$ množina **koncových** neboli **přijímajících** stavů.

Pozn: někdy se nerozlišuje Γ a Σ a neuvádí se prázdný symbol B, tj. pětice.

Definition 11.2 (Konfigurace Turingova stroje (Instantaneous Description ID))

Konfigurace Turingova stroje (Instantaneous Description ID) je řetězec $X_1X_2\dots X_{i-1}qX_iX_{i+1}\dots X_n$ kde

- q je stav Turingova stroje
- čtecí hlava je vlevo od i–tého symbolu
- $X_1\dots X_n$ je část pásky mezi nejlevějším a nejpravějším symbolem různým od prázdného (B). S výjimkou v případě, že je hlava na kraji – pak na tom kraji vkládáme jeden B navíc.

Definition 11.3 (Krok Turingova stroje)

Kroky Turingova stroje M značíme $\underset{M}{\vdash}, \underset{M}{\vdash}^*, \vdash^*$ jako u zásobníkových automatů.

Pro $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$

- $X_1X_2\dots X_{i-1}qX_iX_{i+1}\dots X_n \underset{M}{\vdash} X_1X_2\dots X_{i-2}pX_{i-1}\mathbf{Y}X_{i+1}\dots X_n$

Pro $\delta(q, X_i) = (p, Y, R)$

- $X_1X_2\dots X_{i-1}qX_iX_{i+1}\dots X_n \underset{M}{\vdash} X_1X_2\dots X_{i-1}\mathbf{Y}pX_{i+1}\dots X_n$.

Odvození v konečném počtu kroků $\underset{M}{\vdash}^*$ definuji rekurzivně pro $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ konfigurace

Základ: $\mathcal{I} \underset{M}{\vdash}^* \mathcal{I}$ Rekurze: Pokud $\mathcal{I} \underset{M}{\vdash} \mathcal{J}$ a $\mathcal{J} \underset{M}{\vdash}^* \mathcal{K}$, tak i $\mathcal{I} \underset{M}{\vdash}^* \mathcal{K}$.

A TM for $\{0^n1^n; n \geq 1\}$

Definition 11.4 (TM přijímá jazyk, rekurzivně spočetný jazyk)

Turingův stroj $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ **přijímá jazyk** $L(M) = \{w \in \Sigma^* : q_0 w \underset{M}{\vdash^*} \alpha p \beta, p \in F, \alpha, \beta \in \Gamma^*\}$, tj. množinu slov, po jejichž přečtení se dostane do koncového stavu. Pásku (u nás) nemusí uklízet.

Jazyk nazveme **rekurzivně spočetným**, pokud je přijímán nějakým Turingovým strojem T (tj. $L = L(T)$).

Example 11.1 (TM pro jazyk $\{0^n1^n; n \geq 1\}$)

Turingův stroj $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \{0, 1, X, Y, B\}, \delta, q_0, B, \{q_4\})$ s δ v tabulce přijímá jazyk $\{0^n1^n; n \geq 1\}$.

Stav	0	1	X	Y	B
q_0	(q_1, X, R)	–	–	(q_3, Y, R)	–
q_1	$(q_1, 0, R)$	(q_2, Y, L)	–	(q_1, Y, R)	–
q_2	$(q_2, 0, L)$	–	(q_0, X, R)	(q_2, Y, L)	–
q_3	–	–	–	(q_3, Y, R)	(q_4, B, R)
q_4	–	–	–	–	–

Rekurzivní jazyky

Definition (TM zastaví)

TM **zastaví** pokud vstoupí do stavu q, s čteným symbolem X, a není instrukce pro tuto situaci, t.j., $\delta(q, X)$ není definováno.

- Předpokládáme, že v přijímajícím stavu $q \in F$ TM zastaví,
- dokud nezastaví, nevíme, jestli přijme nebo nepřijme slovo.

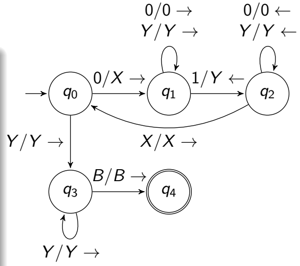
Definition (Rekurzivní jazyky)

Říkáme, že TM M **rozhoduje jazyk** L, pokud $L = L(M)$ a pro každé $w \in \Sigma^*$ stroj nad w zastaví.
Jazyky rozhodnutelné TM nazýváme **rekurzivní jazyky**.

Přechodový diagram pro Turingův stroj

Definition 11.5 (Přechodový diagram pro TM)

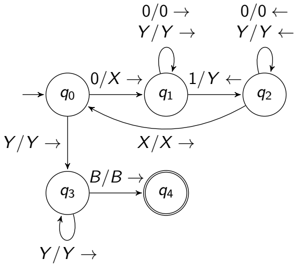
Přechodový diagram pro TM sestává z uzlů odpovídajícím stavům TM. Hrany $q \to p$ jsou označeny seznamem všech dvojic X/YD, kde $\delta(q, X) = (p, Y, D)$, $D \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$.
Pokud neuvedeme jinak, B značí blank – prázdný symbol.



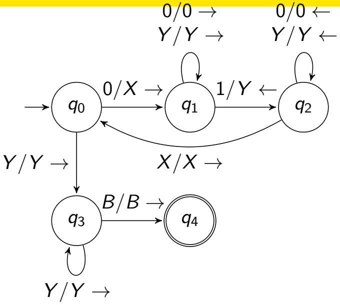
State	0	1	X	Y	B
q_0	(q_1, X, R)	–	–	(q_3, Y, R)	–
q_1	$(q_1, 0, R)$	(q_2, Y, L)	–	(q_1, Y, R)	–
q_2	$(q_2, 0, L)$	–	(q_0, X, R)	(q_2, Y, L)	–
q_3	–	–	–	(q_3, Y, R)	(q_4, B, R)
q_4	–	–	–	–	–

A TM for $\{0^n 1^n; n \geq 1\}$

- Na pásce vždy výraz typu $\mathbf{X}^*\mathbf{0}^*\mathbf{Y}^*\mathbf{1}^*$
  - postupně přepisujeme 0 na X a odpovídající 1 na Y
  - q_0 přepíše 0 na X a předá řízení q_1
  - q_1 najde první 1, přepíše na Y a předá řízení q_2
  - q_2 se vrátí k X, nechá ho být a předá řízení q_0
  - ...
  - pokud q_0 vidí Y, předá řízení q_3
  - q_3 dojde zkontrolovat, jestli na konci nezbyly 1
  - pokud q_3 našlo B, předá řízení q_4
  - q_4 skončí úspěchem (je přijímající)
  - ...
  - pokud q_3 narazilo na 1, tak skončí neúspěchem
    - nemá instrukci
    - není přijímající.



TM pro $\{0^n1^n; n \geq 1\}$



Slovo 0011

$$q_0 0011 \vdash Xq_1 011 \vdash X0q_1 11 \vdash Xq_2 0Y1 \vdash q_2 X0Y1 \vdash Xq_0 0Y1 \vdash XXq_1 Y1 \vdash$$

$$\vdash XXYq_1 1 \vdash XXq_2 YY \vdash Xq_2 XYY \vdash XXq_0 YY \vdash XXYq_3 Y \vdash XXYYq_3 B \vdash XXYYBq_4 B$$

Slovo 0010

$$q_0 0010 \vdash Xq_1 010 \vdash X0q_1 10 \vdash Xq_2 0Y0 \vdash q_2 X0Y0 \vdash Xq_0 0Y0 \vdash XXq_1 Y0 \vdash$$

$\vdash XXYq_1 0 \vdash XXY0q_1 B$ a skončí neúspěchem, protože nemá instrukci.

Ještě příklad, rekursivně spočetné jazyky

Example 11.2

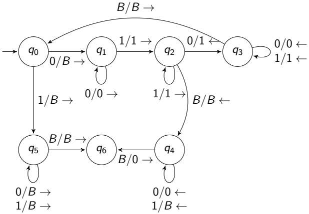
Jazyk $L = \{a^{2n} | n \geq 0\}$
přijímá Turingův stroj $M = (\{q_0, q_1, q_F\}, \{a\}, \{a, B\}, \delta, q_0, B, \{q_F\})$ s δ v tabulce:

δ	komentář
$\delta(q_0, B) = (q_F, B, R)$	prázdné slovo, konec výpočtu
$\delta(q_0, a) = (q_1, a, R)$	zvětší čítač ($2k + 1$ symbolů)
$\delta(q_1, a) = (q_0, a, R)$	nuluje čítač ($2k$ symbolů).

- Regulární jazyky:
  - simulujeme konečný automat, pohyb hlavy vždy vpravo,
  - vidím-li B, tj. konec vstupu, přejdu do nového přijímajícího stavu q_F.
  - (Z přijímajících stavů nemá TM instrukci.)
- Bezkontextové jazyky: nejsnáze s pomocnou páskou simulující zásobník, bude za chvíli.

Turingův stoj počítající **monus** $m \dot{-} n = max(m - n, 0)$.

- $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_0, B, \{q_6\})$
- Počáteční páska 0^m10^n.
- M zastaví s páskou $0^{m \dot{-} n}$ obklopenou prázdnem B.
- Najdi nejlevější 0, přepiš na B.
- Jdi doprava a najdi 1; pokračuj, najdi 0 a přepiš na 1.
- Vrať se doleva.
- Pokud nenajdeš 0 (ukliď):
    - vpravo: přepiš všechny 1 na B.
    - vlevo: $m < n$: přepiš všechny 1 a 0 na B, nech pásku prázdnou.

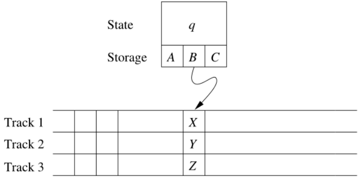


Paměť v řídící jednotce

- Příklad paměti ve stavu TM
- Stav je dvojice (obecně n–tice)
- $M = (\{q_0, q_1\} \times \{0, 1, B\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, [q_0, B], B, \{[q_1, B]\})$
- $L(M) = (01^* + 10^*)$,

δ	0	1	B
$\rightarrow [q_0, B]$	$([q_1, 0], 0, R)$	$([q_1, 1], 1, R)$	
$[q_1, 0]$		$([q_1, 0], 1, R)$	$([q_1, B], B, R)$
$[q_1, 1]$	$([q_1, 1], 0, R)$		$([q_1, B], B, R)$
$*[q_1, B]$			

Více stop na pásce



- $L_{wcw} = \{wcw | w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^+\}$,
- $M = (\{q_1, \dots, q_9\} \times \{0,1,B\}, \{[B,0],[B,1],[B,c]\}, \{B,*\} \times \{0,1,B,c\}, \delta, [q_1,B], [B,B], \{[q_9,B]\})$
- δ je definováno ($a, b \in \{0,1\}$):
  - $\delta([q_1,B],[B,a]) = ([q_2,a],[*,a],R)$ načti symbol a
  - $\delta([q_2,a],[B,b]) = ([q_2,a],[B,b],R)$ jdi vpravo, hledej střed c,
  - $\delta([q_2,a],[B,c]) = ([q_3,a],[B,c],R)$ pokračuj vpravo ve stavu q_3,
  - $\delta([q_3,a],[*,b]) = ([q_3,a],[*,b],R)$ pokračuj vpravo,
  - $\delta([q_3,a],[B,a]) = ([q_4,B],[*,a],L)$ zkontroluj shodu, vymaž paměť a jdi vlevo,
  - $\delta([q_4,B],[*,a]) = ([q_4,B],[*,a],L)$ jdi vlevo,
  - $\delta([q_4,B],[B,c]) = ([q_5,B],[B,c],L)$ c pokračuj za střed ve stavu q_5,
- rozeskok podle toho, jestli je ještě co kontrolovat
  - $\delta([q_5,B],[B,a]) = ([q_6,B],[B,a],L)$ ještě budeme kontolovat,
  - $\delta([q_6,B],[B,a]) = ([q_6,B],[B,a],L)$ jdi vlevo,
  - $\delta([q_6,B],[*,a]) = ([q_1,B],[*,a],R)$ znovu začni,
  - $\delta([q_5,B],[*,a]) = ([q_7,B],[*,a],R)$ už vše vlevo od c porovnáno, jdi vpravo,
  - $\delta([q_7,B],[B,c]) = ([q_8,B],[B,c],R)$ pokračuj vpravo,
  - $\delta([q_8,B],[*,a]) = ([q_8,B],[*,a],R)$ pokračuj vpravo,
  - $\delta([q_8,B],[B,B]) = ([q_9,B],[B,B],R)$ přijmi.

Theorem 11.1 (Rekurzivně spočetné jsou $\mathcal{L}_0$)

Každý rekurzivně spočetný jazyk je typu 0.

Proof: Od Turingova stroje ke gramatice

pro Turingův stroj T najdeme gramatiku G, $L(T) = L(G)$

- $G = (\{S, C, D, E\} \cup \{\underline{X}\}_{x \in \Sigma \cup \Gamma} \cup \{Q_i\}_{q_i \in Q}, \Sigma, P, S)$, P je:
- gramatika nejdříve vygeneruje pásku stroje a kopii slova
  $wB^n\underline{W}^R Q_0 B^m$, kde B^i představují volný prostor pro výpočet
- potom simuluje výpočet (stavy jsou součástí slova)
- v koncovém stavu smažeme pásku, necháme pouze kopii slova

1)	$S \to DQ_0E$	
	$D \to xD\underline{X}\vert E$	generuje slovo a jeho revizní kopii pro výpočet
	$E \to BE\vert\lambda$	generuje volný prostor pro výpočet
2)	$\underline{X}P\underline{Y} \to Q\underline{X'Y}$	pro $\delta(p, x) = (q, x', R)$
	$\underline{X}P\underline{Y} \to \underline{X'Y}Q$	pro $\delta(p, x) = (q, x', L)$
3)	$P \to C$	pro $p \in F$
	$C\underline{A} \to C, \underline{A}C \to C$	mazání pásky
	$C \to \lambda$	konec výpočtu

□

Ještě $L(T) = L(G)$?

- $w \in L(T)$
  - existuje konečný výpočet stroje T (konečný prostor)
  - gramatika vygeneruje dostatečně velký prostor pro výpočet
  - simuluje výpočet a smaže dvojníky
- $w \in L(G)$
  - pravidla v derivaci nemusí být v pořadí, jakém chceme
  - derivaci můžeme přeuspořádat tak, že pořadí je 1),2),3).
  - podtržené symboly smazány, tj. vygenerován koncový stav.

Example 11.3

Turingův stroj $M = (\{q_0, q_1, q_F\}, \{a\}, \{a, B\}, \delta, q_0, B, \{q_F\})$

$\delta(q_0, B) = (q_F, B, R)$

$\delta(q_0, a) = (q_1, a, R)$

$\delta(q_1, a) = (q_0, a, R)$

Gramatika po zjednodušení

$G = (\{S, C, D, E, a, \underline{a}, Q_0, Q_1\}, \{a\}, P, S)$

$S \rightarrow DQ_0$

$D \rightarrow aD\underline{a} | B$

$BQ_0 \rightarrow C$

$\underline{a}Q_0 \rightarrow Q_1\underline{a}$

$\underline{a}Q_1 \rightarrow Q_0\underline{a}$

$C\underline{a} \rightarrow C$

$C \rightarrow \lambda$

Od gramatik k Turingově stroji

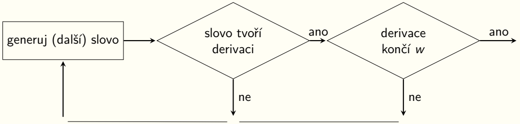
Theorem 11.2

Každý jazyk typu 0 je rekurzivně spočetný.

Proof:

idea: TM postupně generuje všechny derivace

- derivaci $S \Rightarrow \omega_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \omega_n = w$ kódujeme jako slovo $\#S\#\omega_1\#\ldots\#w\#$
- umíme udělat TM, který přijímá slova $\#\alpha\#\beta\#$, kde $\alpha \Rightarrow \beta$
- umíme udělat TM, který přijímá slova $\#\omega_1\#\ldots\#\omega_k\#$, kde $\omega_1 \Rightarrow^* \omega_k$
- umíme udělat TM postupně generující všechna slova.



TM rozšíření: Vícepáskový TM

Definition 11.6 (Vícepáskový Turingův stroj)

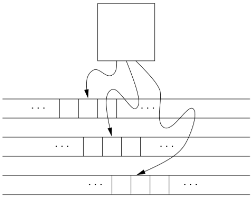
Počáteční pozice

- vstup na první pásce, ostatní zcela prázdné
- první hlava vlevo od vstupu, ostatní libovolně
- hlava v počátečním stavu

Jeden krok vícepáskového TM

- hlava přejde do nového stavu
- na každé pásce napíšeme nový symbol
- každá hlava se nezávisle posune vlevo, zůstane, vpravo.

Vícepáskový TM



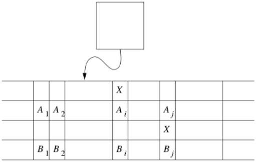
Theorem 11.3 (Vícepáskový TM)

Každý jazyk přijímaný vícepáskovým TM je přijímaný i nějakým (jednopáskovým) Turingovým strojem TM.

Proof: vícepáskový TM

- konstruujeme Turingův stroj M
- pásku si představíme, že má $2k$ stop
  - liché stopy: pozice k–té hlavy
  - sudé stopy: znak na k–té pásce
- pro simulaci jednoho kroku navštívíme všechny hlavy
- ve stavu si pamatujeme
  - počet hlav vlevo
  - $\forall k$ symbol pod k–tou hlavou
- pak už umíme provést jeden krok (znovu běhat) □

Simulace 2–páskového TM na jedné pásce



- Simulaci výpočtu k–páskového stroje o n krocích lze provést v čase $O(n^2)$ (simulace jednoho kroku z prvních n trvá $4n + 2k$, hlavy nejvýš $2n$ daleko, přečíst, zapsat, posunout značky).

Rozšíření: Nedeterministické Turingovy stroje

Definition 11.7 (Nedeterministický TM)

Nedeterministickým Turingovým strojem nazýváme sedmici $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, kde $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, B, F$ jsou jako u TM a $\delta : (Q - F) \times \Gamma \to P(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$.
Slovo $w \in \Sigma^*$ **je přijímáno nedeterministickým TM** M, pokud existuje nějaký výpočet $q_0 w \vdash^* \alpha p \beta$, $p \in F$.

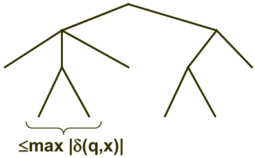
Theorem 11.4 (Nedeterministický TM)

Pro každý M_N nedeterministický TM existuje deterministický TM M_D takový, že $L(M_N) = L(M_D)$.

Velmi stručně (příprava)

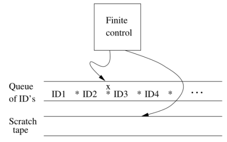
prohledáváme do šířky možné výpočty M_N

- odvozeno v k krocích
- maximálně m^k konfigurací
  - kde $m = max|\delta(q, x)|$ je max. počet voleb M_N



Proof: idea důkazu

- páska nekonečná – nelze použít podmnožinovou konstrukci
- prohledáváme do šířky všechny výpočty M_N
- modelujeme TM se dvěma páskami
  - první páska: posloupnost konfigurací
    - aktuální označena (křížkem na obrázku)
    - vlevo už prozkoumané, můžeme zapomenout
    - vpravo aktuální a pak další čekající
  - druhá páska: pomocný výpočet



- zpracování jedné konfigurace obnáší
  - přečti stav a symbol aktuální konfigurace ID
  - je–li stav přijímající $\in F$, přijmi a skonči
  - napiš ID na pomocnou pásku
  - pro každý možný krok δ (uložený v hlavě M_D)
    - proveď krok a napiš novou ID na konec první pásky
  - vrať se k označené ID, značku vymaž a posuň o 1 doprava
  - opakuj

□

Shrnutí

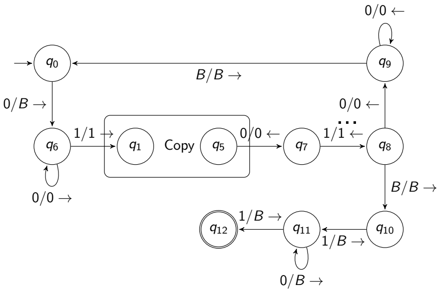
- **Turingův stroj**: nekonečná oboustranná páska, může číst, psát, pohybovat hlavou.
- **Přijímání TM**: Na začátku hlava a konečný řetězec na pásce, zbytek B. TM přijímá pokud vstoupí do koncového stavu.
- **Rekurzivně spočetné jazyky (RE)**: jazyky přijímané nějakým Turingovým strojem.
- **Konfigurace TM**: Všechny symboly pásky mezi nejlevějším a nejpravějším ne–B. Stav a pozice hlavy hned vlevo od právě čteného symbolu.
- modelovací triky
  - **Paměť v řídící jednotce**
  - **Více stop**
- Rozšíření TM bez rozšíření třídy přijímaných jazyků:
  - **Vícepáskové TM** Samostatný pohyb hlav na páskách (lze simulovat na přidaných stopách).
  - **Nedeterministický TM**: Má instrukce na výběr, na přijetí stačí jeden přijímající výpočet.
- Budou: **Lineárně omezené automaty LBA**
  - Vstupní slovo mezi levou a pravou značkou, hlava nesmí za tyto značky ani je přepsat.
  - LBA rozpoznávají právě kontextové jazyky.

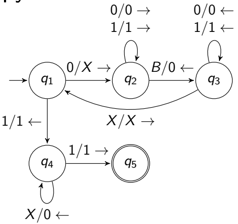
Subroutines

Multiplication: Input: 0^m10^n1, Output: 0^{mn}.

- Strategy: On the tape generally $0^i10^n10^{kn}$
- In one basic step, change a 0 in the first group to B and add n 0's to the last group, giving us the string of the form $0^{i-1}10^n10^{(k+1)n}$.
- When finished, change the leading 10^n1 to blanks.

Copy





Multiply

Restricted Turing Machines

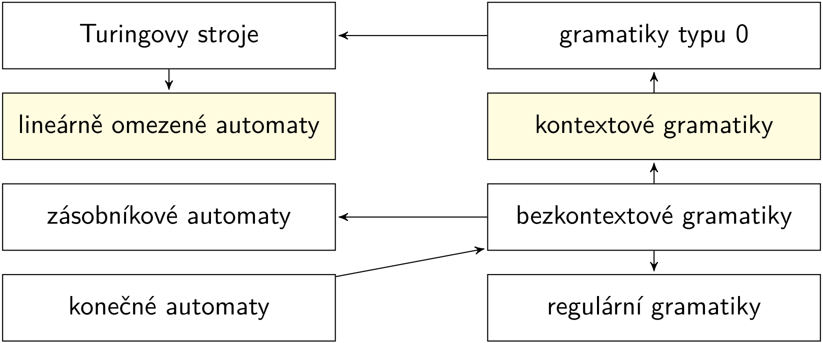
X_0	X_1	X_2	$\dots$
$*$	X_{-1}	X_{-2}	$\dots$

Theorem 11.5 (Semi–infinite Tape, Never Writes a Blank)

Every language accepted by a TM M_2 is also accepted by a TM M_1 with the following restrictions:

- *M_1's head never moves left of its initial position.*
- *M_1 never writes a blank.*

Automaty a gramatiky – Chomského hierarchie



- **gramatiky typu 1** (kontextové jazyky $\mathcal{L}_1$)
  - pouze pravidla ve tvaru $\alpha A \beta \to \alpha \omega \beta$

    $A \in V, \alpha, \beta \in (V \cup T)^*, \omega \in (V \cup T)^+$
  - jedinou výjimkou je pravidlo $S \to \lambda$, potom se ale S nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla

Chomského hierarchie

- **gramatiky typu 0** (rekurzivně spočetné jazyky $\mathcal{L}_0$)

  pravidla v obecné formě $\alpha \to \beta$, $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*, \alpha$ obsahuje neterminál

gramatiky typu 1 (kontextové jazyky $\mathcal{L}_1$)

- pouze pravidla ve tvaru $\alpha A \beta \to \alpha \omega \beta$

  $A \in V, \alpha, \beta \in (V \cup T)^*, \omega \in (V \cup T)^+$

  - jedinou výjimkou je pravidlo $S \to \lambda$, potom se ale S nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla

- **gramatiky typu 2** (bezkontextové jazyky $\mathcal{L}_2$)

  pouze pravidla ve tvaru $A \to \omega, A \in V, \omega \in (V \cup T)^*$

- **gramatiky typu 3** (regulární/pravé lineární jazyky $\mathcal{L}_3$)

  pouze pravidla ve tvaru $A \to \omega B, A \to \omega, A, B \in V, \omega \in T^*$

Kontextové gramatiky

- pouze pravidla ve tvaru $\alpha A \beta \to \alpha \omega \beta$

  $A \in V, \alpha, \beta \in (V \cup T)^*, \omega \in (V \cup T)^+$
- s jedinou výjimkou $S \to \lambda$,

  potom se ale S nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla
- neterminál A se přepisuje pouze v kontextu α, β
- $S \to \lambda$ slouží pouze pro přidání λ do jazyka

Example 12.1 (kontextový jazyk)

$L = \{a^n b^n c^n | n \geq 1\}$ je kontextový jazyk, není bezkontextový.

Gramatika:

$$
\begin{array}{ll}
S \to aSBC | abC & \\
CB \to BC & \text{není kontextové, nutno rozepsat!} \\
\hline
bB \to bb & \\
bC \to bc & \\
cC \to cc &
\end{array}
$$

Separované gramatiky

Definition 12.1 (Separovaná gramatika)

Gramatika je **separovaná**, pokud obsahuje pouze pravidla tvaru $\alpha \to \beta$, kde:

- buď $\alpha, \beta \in V^+$ (neprázdné posloupnosti neterminálů)
- nebo $\alpha \in V$ a $\beta \in T \cup \{\lambda\}$.

Lemma

Ke každé gramatice G lze sestrojit ekvivalentní separovanou gramatiku G'.

Proof:

- Nechť $G = (V, T, P, S)$
- pro každý terminál $a \in V$ zavedeme nový neterminál A'.
- v pravidlech z P
  - nahradíme terminály odpovídajícími neterminály
  - přidáme pravidla $A' \to a$
- Výsledná gramatika je separovaná a zřejmě $L(G) = L(G')$. $\square$

Od monotonie ke kontextovosti

Definition 12.2 (monotónní (nevypouštějící) gramatika)

Gramatika je **monotónní (nevypouštějící)**, jestliže pro každé pravidlo $(\alpha \to \beta) \in P$ platí $|\alpha| \leq |\beta|$. Monotónní gramatiky slovo v průběhu generování nezkracují.

Lemma

Ke každé monotónní gramatice lze nalézt ekvivalentní gramatiku kontextovou.

Proof:

- nejprve převedeme gramatiku na separovanou
  - tím se monotonie neporuší (a pravidla $A' \to a$ jsou kontextová)
- zbývající pravidla $A_1 \dots A_m \to B_1 \dots B_n$, $m \leq n$ převedeme na pravidla s novými neterminály C

$$
\begin{array}{llll}
A_1 A_2 \dots A_m & \to C_1 A_2 \dots A_m & C_1 C_2 \dots C_m & \to B_1 C_2 \dots C_m \\
C_1 A_2 \dots A_m & \to C_1 C_2 \dots A_m & B_1 C_2 \dots C_m & \to B_1 B_2 \dots C_m \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
C_1 \dots C_{m-1} A_m & \to C_1 \dots C_{m-1} C_m & B_1 \dots B_{m-1} C_m & \to B_1 \dots B_{m-1} B_m \dots B_n
\end{array}
$$

□

Příklad kontextového jazyka

Example 12.2

Jazyk $L = \{a^i b^j c^k | 1 \leq i \leq j \leq k\}$ je kontextový jazyk, není bezkontextový.

Proof:

$S \rightarrow aSBC \mid aBC$	generování symbolů a
$B \rightarrow BBC$	množení symbolů B
$C \rightarrow CC$	množení symbolů C
$CB \rightarrow BC$	uspořádání symbolů B a C
$aB \rightarrow ab$	začátek přepisu B na b
$bB \rightarrow bb$	pokračování přepisu B na b
$bC \rightarrow bc$	začátek přepisu C na c
$cC \rightarrow cc$	pokračování přepisu C na c

$CB \rightarrow BC$ není kontextové pravidlo, nahradíme ho

$CB \rightarrow XB$, $XB \rightarrow XY$, $XY \rightarrow BY$, $BY \rightarrow BC$ $\square$

Lineárně omezené automaty

- Ještě potřebujeme ekvivalent pro kontextové gramatiky
- kontextovou gramatiku dostaneme z libovolné monotónní gramatiky

Definition 12.3 (lineárně omezený automat (LBA))

Lineárně omezený automat LBA je nedeterministický TM, kde na pásce je označen levý a pravý konec $\underline{l}, \underline{r}$. Tyto symboly nelze při výpočtu přepsat a nesmí se jít nalevo od $\underline{l}$ a napravo od $\underline{r}$.
Slovo w **je přijímáno lineárně omezeným automatem**, pokud $q_0\underline{l}w\underline{r} \vdash^* \alpha p \beta$, $p \in F$.

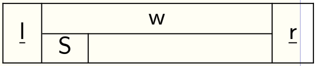
- Prostor výpočtu je definován vstupním slovem a automat při jeho přijímání nesmí překročit jeho délku
- u monotónních (kontextových) derivací to není problém – žádné slovo v derivaci není delší než vstupní slovo

Od kontextových jazyků k LBA

Theorem 12.1

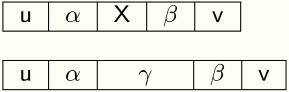
Každý kontextový jazyk lze přijímat pomocí LBA.

Proof: z kontextové gramatiky k LBA



Aplikace pravidla

$\alpha X\beta \to \alpha\gamma\beta$



- derivaci gramatiky budeme simulovat pomocí LBA
- použijeme pásku se dvěma stopami
- slovo *w* dáme nahoru, na začátek dolní stopy *S*
- přepisujeme slovo ve druhé stopě podle pravidel *G*
  - nedeterministicky vybereme část k přepsání
  - provedeme přepsání dle pravidla (pravá část se odsune)
- pokud jsou ve druhé stopě samé terminály, porovnáme ji s první stopou
  - slovo přijmeme nebo zamítneme

□

Od LBA ke kontextovým jazykům

Theorem 12.2

LBA přijímají pouze kontextové jazyky.

Proof: z LBA ke kontextovým gramatikám

- potřebujeme převést LBA na monotónní gramatiku
  - tj. gramatika nesmí generovat nic navíc
- výpočet ukryjeme do 'dvoustopých' neterminálů
- generuj slovo ve tvaru $(a_0, [q_0, \underline{l}, a_0]), (a_1, a_1), \ldots, (a_n, [a_n, \underline{r}])$

w		
$q_0, \underline{l}, a_0$		$a_n, \underline{r}$

- simuluj práci LBA ve 'druhé' stopě (stejně jako u TM)
  - pro $\delta(p, x) = (q, x', R)$: $P\underline{X} \rightarrow \underline{X'}Q$
  - pro $\delta(p, x) = (q, x', L)$: $\underline{Y}P\underline{X} \rightarrow Q\underline{Y}\underline{X'}$
- pokud je stav koncový, smaž 'druhou' stop
- speciálně je třeba ošetřit přijímání prázdného slova
  - pokud LBA přijímá λ, přidáme speciální startovací pravidlo

$\square$

Rekurzivní jazyky

Definition 12.4 (TM zastaví)

TM **zastaví** pokud vstoupí do stavu q, s čteným symbolem X, a není instrukce pro tuto situaci, t.j., $\delta(q, X)$ není definováno.

- Předpokládáme, že v přijímajícím stavu $q \in F$ TM zastaví,
- dokud nezastaví, nevíme, jestli přijme nebo nepřijme slovo.

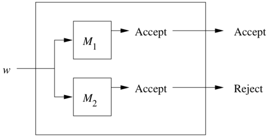
Definition 12.5 (Rekurzivní jazyky)

Říkáme, že TM M **rozhoduje jazyk** L, pokud $L = L(M)$ a pro každé $w \in \Sigma^*$ stroj nad w zastaví.
Jazyky rozhodnutelné TM nazýváme **rekurzivní jazyky**.

$L \& \overline{L} \in RE \Rightarrow L, \overline{L}$ je rekurzivní

Theorem 12.3 (Postova věta)

Jazyk L je rekurzivní, právě když L i $\overline{L}$ (doplněk) jsou rekurzivně spočetné.

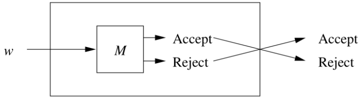


Proof:

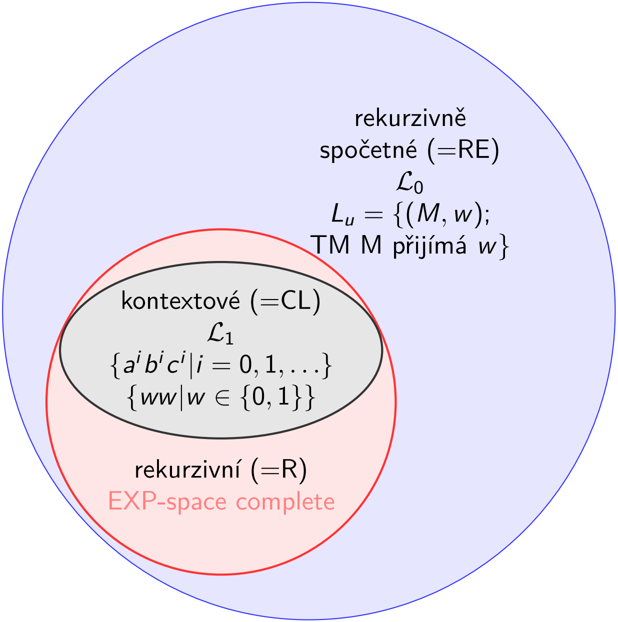
- Máme TM $L = L(M_1)$ a $\overline{L} = L(M_2)$.
- pro dané slovo w naráz simulujeme M_1 i M_2 (dvě pásky, stav se dvěma komponentami).
- Pokud jeden z M_i přijme, M zastaví a odpoví.
- Jazyky jsou komplementární, jeden z M_i vždy zastaví, L je rekurzivní. □

Theorem 12.4

Je–li L rekurzivní jazyk, je rekurzivní i $\overline{L}$.



Hierarchie jazyků (kontextové a výš)



$L_d = \{w;$ TM s kódem w nepřijímá vstup $w\}$

Jazyk který není rekurzivně spočetný

Směřujeme k důkazu nerozhodnutelnosti jazyka dvojic (M, w) takových, že:

- M je binárně kódovaný Turingův stroj s abecedou $\{0, 1\}$,
- $w \in \{0, 1\}^*$ a
- M nepřijímá vstup w.

Postup:

- Kódování TM binárním kódem pro libovolný počet stavů TM.
- Kód TM vezmeme TM jako binární řetězec.
- Pokud kód nedává smysl, reprezentuje TM bez transakcí. Tedy každý kód reprezentuje nějaký TM.
- **Diagonální jazyk L_d**;
  $L_d = \{w;$ TM reprezentovaný jako w takový, že **nepřijímá** $w\}$.
- Neexistuje TM přijímající jazyk L_d. Spuštění takového stroje na vlastním kódu by vedlo k paradoxu.

Jazyk L_d není rekurzivně spočetný. Proto $\overline{L_d}$ není rekurzivní. Lze dokázat, že $\overline{L_d}$ je rekurzivně spočetný.

Kódování

- Pro kódování TM $M = (Q, \{0,1\}, \Gamma, \delta, q_1, B, \{q_2\})$ očíslujeme stavy, symboly a směry L, R.
- Předpokládejme:
  - Počáteční stav je vždy q_1.
  - Stav q_2 je vždy jediný koncový stav (nepotřebujeme víc, TM zastaví).
  - První symbol je vždy 0, druhý 1, třetí B, prázdný symbol. Ostatní symboly pásky očíslujeme libovolně.
  - Směr L je 1, směr R je 2.
- Jeden krok $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$ kódujeme: $0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m$. Všechna $i, j, k, l, m \geq 1$ takže se dvě jedničky za sebou nevyskytují.
- Celý TM se skládá z kódů všech přechodů v nějakém pořadí oddělených dvojicemi jedniček 11: $C_1 11 C_2 11 \ldots C_{n-1} 11 C_n$.

Budeme potřebovat uspořádat řetězce do posloupnosti:

- Řetězce bereme uspořádané podle délky, stejně dlouhé uspořádáme lexikograficky.
- První je λ, druhý 0, třetí 1, čtvrtý 00 atd.
- i–tý řetězec označujeme w_i.

Příklad kódování TM

Turingův stroj

$M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_1, B, \{q_2\})$

δ	0	1	B
$\rightarrow q_1$		$(q_3, 0, R)$	
$*q_2$			
q_3	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, 0, R)$	$(q_3, 1, L)$.

- Kód pro transakce:

C_1	C_2	C_3	C_4
0100100010100	0001010100100	00010010010100	0001000100010010

- Kód celého TM:
  01001000101001100010101001001100010010010100110001000100010010.

Definition 12.6 (Diagonální jazyk)

Diagonální jazyk L_d je definovaný
$L_d = \{w; \text{TM reprezentovaný jako } w \text{ který nepřijímá slovo } w\}$.

$L_d = \{w; \text{na diagonále je } 0\}$.

Theorem 12.5

L_d není rekurzivně spočetný jazyk, tj. neexistuje TM přijímající L_d.

$j \longrightarrow$

$i \downarrow$		1	2	3	4	$\cdots$
	1	0	1	1	0	$\cdots$
	2	1	1	0	0	$\cdots$
	3	0	0	1	1	$\cdots$
	4	0	1	0	1	$\cdots$
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	

Diagonal

Proof.

- Předpokládejme L_d je RE, $L_d = L(M_d)$ pro nějaký TM M_d.
- Jeho jazyk je $\{0, 1\}$, tedy je v seznamu na obrázku: 'Přijímá TM M_i vstupní slovo w_j?'
- Alespoň jeden řetězec ho kóduje, řekněme $code(M_d) = w_d$.
- Je $w_d \in L_d$
  - Pokud 'ano', na diagonále má být 0, tj. $w_d \notin L(M_d) = L_d$, spor.
  - Pokud 'ne', na diagonále má být 1, $w_d \in L(M_d) = L_d$, spor.

Proto takový M neexistuje. Tedy L_d není rekurzivně spočetný.

□

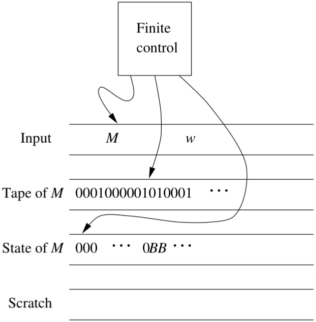
Univerzální Turingův stroj

Definition 12.7 (Univerzální jazyk)

Definujeme **univerzální jazyk** L_u jakožto množinu binárních řetězců které kódují pár (M, w), kde M je TM a $w \in L(M)$.
TM rozpoznávající L_u se nazývá **Univerzální Turingův stroj**.

Theorem 12.6 (Existence Univerzálního Turingova stroje)

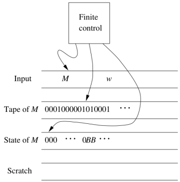
Existuje Turingův stroj U, pro který $L_u = L(U)$.



Popíšeme U jako vícepáskový Turingův stroj.

- Přechody M jsou napsány na první pásce spolu s řetězcem w.
- Na druhé pásce simulujeme výpočet M, používající formát jako kód M, tj. symboly 0^i oddělené jedničkou 1.
- Třetí páska obsahuje stav M reprezentovaný i nulami.

Operace univerzálního Turingova stroje



Operace U jsou následující:

- Otestuj, zda je kód M legitimní; pokud ne, U zastav bez přijetí.
- Inicializuj druhou pásku kódovaným slovem w: 10 pro 0 ve w, 100 pro 1; blank jsou nechané prázdné a nahrazeny 1000 pouze 'v případě potřeby'.
- Napiš 0, počáteční stav M, na třetí pásku. Posuň hlavu druhé pásky na první simulované políčko.
- Simuluj jednotlivé přechody M
  - Najdi na první pásce správnou transakci $0^i10^j10^k10^l10^m$, 0^i na pásce 3, 0^j na pásce 2.
  - Změň obsah pásky 3 na 0^k.
  - Nahraď 0^j na 2. pásce řetězcem 0^l. Použij čtvrtou 'scratch tape' pro správné mezery.
  - Posuň hlavu 2. pásky na pozici vedle 1 vlevo nebo vpravo, podle pohybu m.
- Pokud jsme nenašli instrukci pro M, zastavíme.
- Pokud M přejde do přijímajícího stavu, pak U také přijme. □

Nerozhodnutelnost univerzálního jazyka

Theorem 12.7 (Nerozhodnutelnost univerzálního jazyka)

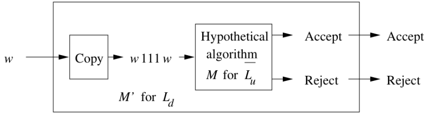
L_u je rekurzivně spočetný, ale není rekurzivní.

Proof.

- Máme TM přijímající L_u, tj. je RE.
- Předpokládejme, že je L_u rekurzivní.
- Pak $\overline{L_u}$ by byl také rekurzivní.
- Pro TM přijímající $\overline{L_u}$ můžeme zkonstruovat TM přijímající L_d (vpravo).
- Protože víme, že L_d není RE, $\overline{L_u}$ není RE a L_u není rekurzivní.

□

Modifikace TM pro $\overline{L_u}$ na TM pro L_d:



- Řetězec w přepiš na $w111w$ (2–páskový, převeď na 1–páskový).
- Simuluj M na novém vstupu. Přijmi iff M přijme.
- Zvol i tak že $w_i = w$. Předchozí krok přijímá $\overline{L_u}$, tj. případy kdy M_i nepřijímá w_i, tj. jazyk L_d.

Nerozhodnutelné problémy o Turingových strojích

Definition 13.1 (Rozhodnutelný problém)

Problémem P myslíme matematicky/informaticky definovanou množinu otázek kódovatelnou řetězci nad abecedou Σ s odpověďmi $\in \{ano, ne\}$.
Problém je (algoritmicky) rozhodnutelný, pokud existuje Turingův stroj TM takový, že pro každý vstup $w \in P$ zastaví a navíc přijme právě když $P(w) = ano$ (tj. pro $P(w) = ne$ zastaví v ne–přijímacím stavu).
Problém, který není algoritmicky rozhodnutelný nazýváme **nerozhodnutelný problém**.

Example 13.1 ('Problémy')

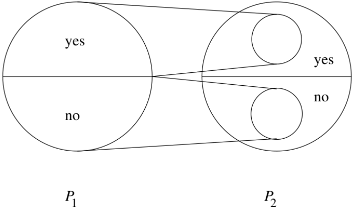
- Obsahuje vstupní slovo pět nul?
- Je vstupní slovo korektně definovaným kódem Turingova stroje v kódování výše?
- Zastaví TM kódu M nad slovem w?
- Zastaví TM kódu w nad slovem w?

Redukce

Definition 13.2 (Redukce)

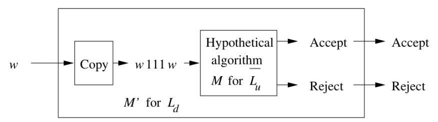
Redukcí problému P_1 na P_2, nazýváme algoritmus R, který pro každou instanci $w \in P_1$ zastaví a vydá $R(w) \in P_2$ tak, že

- $P_1(w) = \mathit{ano}$ právě když $P_2(R(w)) = \mathit{ano}$
- tj. i $P_1(w) = \mathit{ne}$ právě když $P_2(R(w)) = \mathit{ne}$.



Example 13.2

Redukce TM pro L_d na TM pro $\overline{L_u}$:



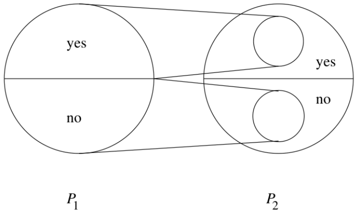
- P_1 = Nepřijímá TM reprezentovaný w vstupní slovo w?
- P_2 = Nepřijímá TM reprezentovaný M vstupní slovo w?

Redukce

Theorem 13.1 (Redukce)

Pokud existuje redukce problému P_1 na P_2, pak:

- *Pokud P_1 je nerozhodnutelný, pak je nerozhodnutelný i P_2.*
- *Pokud P_1 není rekurzivně spočetný, pak není RE ani P_2.*



Proof.

- Předpokládejme P_1 je nerozhodnutelný. Je–li možné rozhodnout P_2, pak můžeme zkombinovat redukci P_1 na P_2 s algoritmem rozhodujícím P_2 pro konstrukci algoritmu rozhodujícího P_1. Proto je P_2 nerozhodnutelný.
- Předpokládejme P_1 ne–RE, ale P_2 je RE. Podobně jako výše zkombinujeme redukci a výsledek P_2 k důkazu P_1 je RE; SPOR.

□

Problém zastavení

Theorem (Nerozhodnutelnost univerzálního jazyka)

L_u je rekurzivně spočetný, ale není rekurzivní.

Theorem (Problém zastavení)

Instancí problému zastavení je dvojice řetězců $M, w \in \{0,1\}^*$. Hledáme alogritmus $Halt(M, w)$, který vydá 1 právě když stroj M zastaví na vstupu w, jinak vydá 0.
Problém zastavení není rozhodnutelný.

Proof.

- Redukujeme L_d na $Halt$.
- Předpokládejme, že máme algoritmus (Turingův stroj) pro $Halt()$.
- Modifikujeme ho na stroj $Halt_{no}(w)$; $w \in \{0,1\}^*$:
  - Pokud $Halt(w, w)$, spustíme nekonečný cyklus
  - jinak zastavíme.
- Otázka $Halt(Halt_{no}, Halt_{no})$ není řešitelná, proto algoritmus $Halt()$ nemůže existovat.

TM přijímající prázdný jazyk (nic)

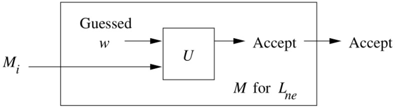
Definition 13.3

Slova w jazyků $L_e, L_{ne} \in \{0,1\}^*$ vnímáme jako kódy Turingových strojů. Definujeme:

- $L_e = \{w | L(w) = \emptyset\}$
- $L_{ne} = \{w | L(w) \neq \emptyset\}$.

Theorem 13.2

L_{ne} je rekurzivně spočetný (RE).

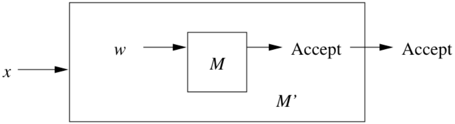


Theorem 13.3

L_e není rekurzivně spočetný, proto L_{ne} není rekurzivní.

Redukce: Pro $w \in L_d$ do M; $L(M) = L_e$.

- Obraz $R(w)$ je TM, který ignoruje svůj vstup x,
- na vstupní pásku napíše w a simuluje U na vstupu w.
- Jazyk je prázdný iff stroj w nepřijímá w, tj. přijímá diagonální jazyk.



Postův korespondenční problém

Definition 13.4 (Postův korespondenční problém)

Instance **Postova korespondenčního problému (PCP)** jsou dva seznamy slov nad abecedou Σ značené $A = w_1, w_2, \ldots, w_k$ a $B = x_1, x_2, \ldots, x_k$ stejné délky k. Pro každé i, dvojice (w_i, x_i) se nazývá **odpovídající** dvojice.
Instance PCP **má řešení**, pokud existuje posloupnost jednoho či více přirozených čísel $i_1, i_2, \ldots, i_m$ tak že $w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_m} = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$ tj. dostaneme stejné slovo. V tom případě říkáme, že posloupnost $i_1, i_2, \ldots, i_m$ **je řešení**.
Postův korespondenční problém je: Pro danou instanci PCP, rozhodněte, zda má řešení.

Example 13.3

	Seznam A	Seznam B
i	w_i	x_i
1	1	111
2	10111	10
3	10	0

- $\Sigma = \{0, 1\}$, seznamy A,B v tabulce.
- Řešení $2, 1, 1, 3$ vytvoří slovo 101111110.
- Jiné řešení: 2,1,1,3,2,1,1,3.

Částečná řešení

Example 13.4

$\Sigma = \{0,1\}$. Neexistuje řešení pro seznamy:

	List A	List B
i	w_i	x_i
1	10	101
2	011	11
3	101	011.

Definition 13.5 (Částečné řešení)

Částečným řešením nazýváme posloupnost indexů $i_1, i_2, \ldots, i_r$ taková že jeden z řetězců $w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_r}$ a $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ je prefix druhého (i v případě, že řetězce nejsou totožné).

Lemma

Je–li posloupnost čísel řešením, pak je každý prefix částečným řešením.

Zdůvodnění:

- $i_1 = 1$, jinak by první symbol neodpovídal.
- Máme částečné řešení:
  A: $10\cdots$
  B: $101\cdots$

- $i_2 = 1$, řetězce $\begin{matrix}1010\\101101\end{matrix}$ nesouhlasí na 4.pozici.
- $i_2 = 2$, $\begin{matrix}10011\\10111\end{matrix}$ nesouhlasí na 3.pozici.
- Je možné jen $i_2 = 3$.

A: $10101\cdots$
B: $101011\cdots$

- Jsme ve stejné pozici jako po volbě $i_1 = 1$.
- Nelze dostat oba řetězce na stejnou délku.

Modifikovaný Postův korespondenční probém MPCP

Definition 13.6 (Modifikovaný Postův korespondenční probém MPCP)

Mějme PCP, tj. seznamy $A = w_1, w_2, \ldots, w_k$ a $B = x_1, x_2, \ldots, x_k$. Hledáme seznam 0 nebo více přirozených čísel $i_1, i_2, \ldots, i_m$ tak že $\mathbf{w_1}, w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_m} = \mathbf{x_1}, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$. V tom případě říkáme, že PCP **má iniciální řešení**.

Modifikovaný Postův korespondenční problém: má PCP iniciální řešení?

Example 13.5

Tento PCP nemá iniciální řešení.

	seznam A	seznam B
i	w_i	x_i
1	1	111
2	10111	10
3	10	0

Proof:

- Částečné instance $\begin{matrix}1\\111\end{matrix}$, $\begin{matrix}11\\111111\end{matrix}$ se nikdy nesrovnají na stejnou délku.
- Jiné volby vedou k různým písmenům abecedy.

$\square$

MPCP redukce na PCP

Lemma 13.1 (Redukce MPCP na PCP)

$w \in MPCP$ má iniciální řešení, právě když má $R(w)$ řešení.

	List A	List B
i	w_i	x_i
1	1	111
2	10111	10
3	10	0

Example 13.6 (MPCP redukce na PCP.)

	List C	List D
i	y_i	z_i
0	*1*	*1*1*1
1	1*	*1*1*1
2	1*0*1*1*1*	*1*0
3	1*0*	*0
4	$	*$

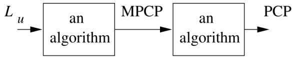
Proof:

- Vezměme nové symboly $*, \$ \notin \Sigma$.
- $\forall i = 1, \ldots, k$ definujeme y_i rozšířením w_i s $*$ za každým písmenem w_i.
- $\forall i = 1, \ldots, k$ def. z_i rozšířením x_i s $*$ **před** každým písmenem x_i.
- $y_0 = *y_1$, $z_0 = z_1$.
- $y_{k+1} = \$$, $z_{k+1} = *\$$.
- $i_1, i_2, \ldots, i_m$ je iniciální řešení, iff $0, i_1, i_2, \ldots, i_m, (k+1)$ je řešení PCP.

Nerozhodnutelnost PCP

- Chceme dokázat, že PCP je algoritmicky nerozhodnutelný.
- Redukovali jsme MPCP na PCP (minulý slajd)
- a redukujeme L_u na MPCP.

Algorithm: Redukce L_u na MPCP



Konstruujeme MPCP pro TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, který nikdy nepíše B a nejde hlavou doleva od počáteční pozice. Nechť $w \in \Sigma^*$ je vstupní slovo.

seznam A	seznam B	
$\#$	$\#q_0w\#$	
X	X	$\forall\ X \in \Gamma$
$\#$	$\#$	
qX	Yp	pro $\delta(q, X) = (p, Y, R)$
ZqX	pZY	pro $\delta(q, X) = (p, Y, L)$, $Z \in \Gamma$ symbol pásky
$q\#$	$Yp\#$	pro $\delta(q, B) = (p, Y, R)$
$Zq\#$	$pZY\#$	pro $\delta(q, B) = (p, Y, L)$, $Z \in \Gamma$ symbol pásky
XqY	q	$q \in F$, přijímající stav
Xq	q	$q \in F$
qY	q	$q \in F$
$q\#\#$	$q\#$	$q \in F$.

Example 13.7

Konvertujme TM
$M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, X, Y, B\}, \delta, q_1, B, \{q_3\})$

q_i	$\delta(q_i, 0)$	$\delta(q_i, 1)$	$\delta(q_i, B)$
q_1	$(q_2, 1, R)$	$(q_2, 0, L)$	$(q_2, 1, L)$
q_2	$(q_3, 0, L)$	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 0, R)$
q_3	–	–	–

a vstupní slovo $w = 01$ na instanci MPCP.

seznam A	seznam B	zdroj
$q_1 0$	$1 q_2$	z $\delta(q_1, 0) = (q_2, 1, R)$
$0 q_1 1$	$q_2 00$	z $\delta(q_1, 1) = (q_2, 0, L)$
$1 q_1 1$	$q_2 10$	z $\delta(q_1, 1) = (q_2, 0, L)$
$0 q_1 \#$	$q_2 01 \#$	z $\delta(q_1, B) = (q_2, 1, L)$
$1 q_1 \#$	$q_2 11 \#$	z $\delta(q_1, B) = (q_2, 1, L)$
$0 q_2 0$	$q_3 00$	z $\delta(q_2, 0) = (q_3, 0, L)$
$1 q_2 0$	$q_3 10$	z $\delta(q_2, 0) = (q_3, 0, L)$
$q_2 1$	$0 q_1$	z $\delta(q_2, 1) = (q_1, 0, R)$
$q_2 \#$	$0 q_2 \#$	z $\delta(q_2, B) = (q_2, 0, R)$

Seznam dvojic bez B symbolu (ve dvou tabulkách)

seznam A	seznam B
$\#$	$\# q_1 01 \#$
0	0
1	1
$\#$	$\#$
$0 q_3 0$	q_3
$0 q_3 1$	q_3
$1 q_3 0$	q_3
$1 q_3 1$	q_3
$0 q_3$	q_3
$1 q_3$	q_3
$q_3 0$	q_3
$q_3 1$	q_3
$q_3 \#\#$	$\#$

MPCP simulace TM

seznam A	seznam B	zdroj
$q_1 0$	$1 q_2$	z $\delta(q_1, 0) = (q_2, 1, R)$
$0 q_1 1$	$q_2 00$	z $\delta(q_1, 1) = (q_2, 0, L)$
$1 q_1 1$	$q_2 10$	z $\delta(q_1, 1) = (q_2, 0, L)$
$0 q_1 \#$	$q_2 01\#$	z $\delta(q_1, B) = (q_2, 1, L)$
$1 q_1 \#$	$q_2 11\#$	z $\delta(q_1, B) = (q_2, 1, L)$
$0 q_2 0$	$q_3 00$	z $\delta(q_2, 0) = (q_3, 0, L)$
$1 q_2 0$	$q_3 10$	z $\delta(q_2, 0) = (q_3, 0, L)$
$q_2 1$	$0 q_1$	z $\delta(q_2, 1) = (q_1, 0, R)$
$q_2 \#$	$0 q_2 \#$	z $\delta(q_2, B) = (q_2, 0, R)$

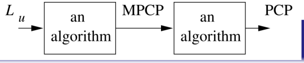
seznam A	seznam B
$\#$	$\# q_1 01\#$
0	0
1	1
$\#$	$\#$
$0 q_3 0$	q_3
$0 q_3 1$	q_3
$1 q_3 0$	q_3
$1 q_3 1$	q_3
$0 q_3$	q_3
$1 q_3$	q_3
$q_3 0$	q_3
$q_3 1$	q_3
$q_3 \#\#$	$\#$

- M přijímá posloupností $q_1 01 \vdash 1 q_2 1 \vdash 10 q_1 \vdash 1 q_2 01 \vdash q_3 101$.

$A: \quad \# q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 q_2 01 \# q_3 101 \# q_3 01 \# q_3 1 \# q_3 \#\#$

$B: \quad \# q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 q_2 01 \# q_3 101 \# q_3 01 \# q_3 1 \# q_3 \#\#.$

PCP je algoritmicky nerozhodnutelný



Theorem 13.4 (PCP je algoritmicky nerozhodnutelný)

Postův korespondenční problém PCP je algoritmicky nerozhodnutelný.

Proof.

Předchozí algoritmus redukuje L_u na MPCP. Chceme dokázat:

- M přijímá w právě když zkonstruovaný PCP má iniciální řešení.

$\Rightarrow$ Pokud $w \in L(M)$, začneme iniciálním párem a simulujeme výpočet M na w.

$\Leftarrow$ Máme–li iniciální řešení PCP, odpovídá přijímajícímu výpočtu M nad w.

- MPCP musí začít první dvojicí.
- Dokud $q \notin F$, mazací pravidla se nepoužijí.
- Pokud $q \notin F$, částečné řešení je tvaru: $\begin{array}{l}\text{A:}x\\ \text{B:}xy\end{array}$, t.j. B je delší než A
- tedy musel skončit v přijímajícím stavu.

$\square$

Algoritmická rozhodnutelnost u CFL

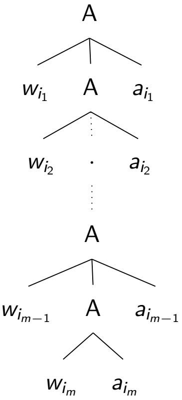
Pro bezkontextové jazyky je algoritmicky rozhodnutelné

- zda dané slovo patří či nepatří do jazyka
  - prázdné slovo zvlášť
  - pak algoritmus CYK
  - nebo otestovat všechny derivace s $2|w| - 1$ pravidly,
- zda je jazyk prázdný
  - algoritmus redukce gramatiky (ne–nenerujících a nedosažitelných), zjistíme, zda lze z S generovat terminální slovo

Nerozhodnutelnost víceznačnosti CFG

Theorem 13.5

Je algoritmicky nerozhodnutelné, zda je bezkontextová gramatika víceznačná.



Mějme instanci PCP $(A = w_1, w_2, \ldots, w_k, B = x_1, x_2, \ldots, x_k)$, množinu indexů $a_1, a_2, \ldots, a_k \in N$ a tři gramatiky G_A, G_B, G_{AB}:

$$\begin{array}{lll}
G_A & A \rightarrow & w_1 A a_1 | w_2 A a_2 | \ldots | w_k A a_k | \\
 & & w_1 a_1 | w_2 a_2 | \ldots | w_k a_k \\
G_B & B \rightarrow & x_1 B a_1 | x_2 B a_2 | \ldots | x_k B a_k | \\
 & & x_1 a_1 | x_2 a_2 | \ldots | x_k a_k \\
G_{AB} & \{S \rightarrow & A | B\} \cup G_A \cup G_B.
\end{array}$$

Gramatika G_{AB} je víceznačná právě když instance (A, B) PCP má řešení.

- Každé slovo v G_A má jednoznačnou derivaci (danou a_i vpravo). Podobně pro B.

Nerozhodnutelné problémy pro bezkontextové jazyky CFG

Theorem 13.6

Mějme G_1, G_2 bezkontextové gramatiky, R regulární výraz. Následující problémy jsou algoritmicky nerozhodnutelné:

1. *Je $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?*
2. *Je $L(G_1) = T^*$ pro nějakou abecedu T?*
3. *Je $L(G_1) = L(G_2)$?*
4. *Je $L(G_1) = L(R)$?*
5. *Je $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?*
6. *Je $L(R) \subseteq L(G_1)$?*

Průnik $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$

Proof: 1 $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$

Převedeme PKP na (1)

- zvolíme nové terminály $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ pro kódy indexů

$$\begin{array}{lll} G_1 & A \rightarrow & w_1 A a_1 | w_2 A a_2 | \ldots | w_k A a_k | \\ & & w_1 a_1 | w_2 a_2 | \ldots | w_k a_k \\ G_2 & B \rightarrow & x_1 B a_1 | x_2 B a_2 | \ldots | x_k B a_k | \\ & & x_1 a_1 | x_2 a_2 | \ldots | x_k a_k \end{array}$$

- PKP má řešení právě když $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$
- první část se musí rovnat, druhá (a_i) zajišťuje stejné pořadí. $\square$

Vše $L(G) = T^*$

Proof: 2 $L(G) = T^*$

Převedeme PKP na (2):

- zvolíme nové terminály $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ pro kódy indexů

$$\begin{array}{lll} G_1 & A \rightarrow & w_1 A a_1 | w_2 A a_2 | \ldots | w_k A a_k | \\ & & w_1 a_1 | w_2 a_2 | \ldots | w_k a_k \\ G_2 & B \rightarrow & x_1 B a_1 | x_2 B a_2 | \ldots | x_k B a_k | \\ & & x_1 a_1 | x_2 a_2 | \ldots | x_k a_k \end{array}$$

- jazyky $L(G_1), L(G_2)$ jsou deterministické,
- tedy $\overline{L(G_1)}, \overline{L(G_2)}$ jsou deterministické CFL a $\overline{L(G_1)} \cup \overline{L(G_2)}$ je CFL
- máme CFG G gramatiku s $L(G) = \overline{L(G_1)} \cup \overline{L(G_2)}$
- PKP má řešení $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G) = \overline{L(G_1)} \cup \overline{L(G_2)} \neq \Sigma^*$. $\square$

- Poznámka: $L(G) = \emptyset$ je algoritmicky rozhodnutelné.
- CFL nejsou uzavřené na doplněk, pouze deterministické CFL ano.

Proof: 3-6

Je $L(G_1) = L(G_2)$? Důkaz: ať G_1 generuje Σ^*
Je $L(G_1) = L(R)$? Důkaz: za R zvolíme Σ^*
Je $L(G_1) \subseteq L(G_2)$? Důkaz: ať G_1 generuje Σ^*
Je $L(R) \subseteq L(G_1)$? Důkaz: za R zvolíme Σ^* $\square$

- Poznámka: $L(G) \subseteq L(R)$ je algoritmicky rozhodnutelné
  $L(G) \subseteq L(R) \Leftrightarrow L(G) \cap \overline{L(R)} = \emptyset$ a zároveň $(L(G) \cap \overline{L(R)})$ je CFL (uzavřenost operací)

Shrnutí

Popis nekonečných objektů konečnými prostředky

- regulární jazyky
  - konečné automaty (NRA, 2FA)
  - Nerode (rozklad), Kleene (elementární operace), pumpování
- bezkontextové jazyky
  - zásobníkové automaty (DPDA$\neq$ PDA)
  - pumpování
- kontextové jazyky
  - lineárně omezené automaty
  - monotonie
- rekurzivně spočetné jazyky
  - Turingovy stroje
  - algoritmická nerozhodnutelnost

použití nejen pro práci s jazyky.