NTIN090 — Základy složitosti a vyčíslitelnosti
Dodatečné úkoly

Petr Kučera

2. ledna 2023

1. (10 bodů) Ukažte, že následující problém není algoritmicky rozhodnutelný:

   Problém 1: Použití druhé pásky

   Instance: Dvoupáskový Turingův stroj M (daný svým kódem).

   Otázka: Existuje vstup x takový, že M zapíše nějaký znak na druhou pásku při výpočtu nad vstupem x?

   Rozhodněte, zda je tento problém částečně rozhodnutelný. Své rozhodnutní zdůvodněte.

2. (10 bodů) Ukažte, že následující problém není algoritmicky rozhodnutelný:

   Problém 2: Pomalejší TS

   Instance: Dva Turingovy stroje M_1 a M_2 zadané svými kódy.

   Otázka: Platí pro každé $x \in \Sigma^*$, že M_1 vykoná při práci nad vstupem x alespoň tolik kroků, kolik jich se vstupem x vykoná M_2? *Pokud se výpočty $M_1(x)$ ani $M_2(x)$ nezastaví, berou se jako shodně dlouhé.*

   Rozhodněte (a zdůvodněte), zda tento problém nebo jeho doplněk je částečně rozhodnutelný.

3. (10 bodů) Ukažte, že následující problém není algoritmicky rozhodnutelný:

   Problém 3: Inkluze jazyků TS

   Instance: Dva Turingovy stroje M_1 a M_2 zadané svými kódy.

   Otázka: Platí, že $L(M_1) \subseteq L(M_2)$?

4. (10 bodů) Ukažte, že následující problém je algoritmicky nerozhodnutelný:

   Problém 4: Prodlužující TS

   Instance: Turingův stroj M daný svým kódem

   Otázka: Platí pro každý řetězec x, že pokud se výpočet $M(x)$ zastaví, pak na pásce zůstane slovo y, které je delší než x?

   Rozhodněte (a zdůvodněte), zda tento problém nebo jeho doplněk je částečně rozhodnutelný. *Turingův stroj, který se nezastaví nad žádným vstupem je prodlužující.*

5. (10 bodů) Předpokládejte, že máte k dispozici funkci/černou skříňku `sat`(φ), která pro danou formuli φ v KNF odpoví, zda je φ splnitelná, či nikoli. Odpověď vrací jako booleovskou hodnotu. Popište algoritmus, který nalezne splňující ohodnocení pro danou formuli φ v KNF. Algoritmus může volat černou skříňku `sat`(), přičemž požadujeme, aby algoritmus pracoval v polynomiálním čase, považujeme-li čas volání funkce `sat`() za konstantní.

6. (10 bodů) S pomocí problému 3-Splnitelnost ukažte, že následující problém je NP-úplný.

Problém 5: Dělení množiny (Set Splitting)	
Instance:	Konečná množina S a kolekce C podmnožin množiny S, tedy $C \subseteq \mathcal{P}(S)$.
Otázka:	Lze rozdělit množinu S do dvou podmnožin $S_1, S_2 \subseteq S$ (tj. $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ a $S_1 \cup S_2 = S$), tak aby platilo, že každá množina $D \in C$ obsahuje prvek z S_1 i S_2 (tj. $D \cap S_1 \neq \emptyset$ a $D \cap S_2 \neq \emptyset$)?

7. (10 bodů) S pomocí některého z problémů SAT, 3-SAT, Vrcholové pokrytí, Klika, Trojrozměrné párování, Hamiltonovská kružnice, Obchodní cestující nebo Loupežníci ukažte, že následující problém je NP-úplný:

Problém 6: Poloviční klika	
Instance:	Graf $G = (V, E)$ s $n = \|V\|$ vrcholy.
Otázka:	Obsahuje G kliku (=úplný podgraf) s alespoň $\frac{n}{2}$ vrcholy?

8. (10 bodů) S pomocí některého z problémů Splnitelnost, 3-Splnitelnost, Vrcholové pokrytí, Trojrozměrné párování, Hamiltonovská kružnice, Obchodní cestující nebo Loupežníci ukažte, že následující problém je NP-úplný:

Problém 7: Set Packing	
Instance:	Systém konečných množin C množiny prvků S, tj. $C \subseteq \mathcal{P}(()S)$, přirozené číslo $k \geq 0$
Otázka:	Obsahuje C alespoň k po dvou disjunktních množin?

9. (10 bodů) S pomocí některého z problémů Splnitelnost, 3-Splnitelnost, Vrcholové pokrytí, Trojrozměrné párování, Hamiltonovská kružnice, Obchodní cestující nebo Loupežníci ukažte, že následující problém je NP-úplný:

Problém 8: Hitting set	
Instance:	Množina S a množina C podmnožin množiny S, přirozené číslo $k > 0$.
Otázka:	Existuje $S' \subseteq S$, $\|S'\| \leq k$ taková, že S' obsahuje nejméně jeden prvek z každé množiny v C?

10. (10 bodů) S pomocí některého z problémů Splnitelnost, 3-Splnitelnost, Vrcholové pokrytí, Trojrozměrné párování, Hamiltonovská kružnice, Obchodní cestující nebo Loupežníci ukažte, že následující problém je NP-úplný:

Problém 9: Čtyřlistá kostra grafu

Instance: Neorientovaný graf $G = (V,E)$.

Otázka: Existuje kostra grafu G, která má právě čtyři listy?

11. (10 bodů) S pomocí některého z problémů Splnitelnost, 3-Splnitelnost, Vrcholové pokrytí, Trojrozměrné párování, Hamiltonovská kružnice, Obchodní cestující nebo Loupežníci ukažte, že následující problém je NP-úplný:

Problém 10: Přesné pokrytí 4-prvkovými množinami

Instance: Konečná množina X s $|X| = 4q$, kde $q \in \mathbb{N}$, a soubor C čtyřprvkových podmnožin X (tj. pro každou množinu $A \in C$ platí, že $A \subseteq X$ a $|A| = 4$).

Otázka: Lze z C vybrat množiny $C' \subseteq C$ tak, aby se každý prvek X vyskytoval v právě jedné množině C'? Jinými slovy platí $\bigcup_{A\in C'} A = X$ a jsou-li $A, B \in C'$ dvě různé množiny, pak $A \cap B = \emptyset$.

12. (10 bodů) S pomocí některého z problémů Splnitelnost, 3-Splnitelnost, Vrcholové pokrytí, Trojrozměrné párování, Hamiltonovská kružnice, Obchodní cestující nebo Loupežníci ukažte, že následující problém je NP-úplný:

Problém 11: Kostra s omezeným stupněm

Instance: Graf $G = (V, E)$ a přirozené číslo $k \geq 0$.

Otázka: Obsahuje graf G kostru, v níž všechny vrcholy jsou stupně nejvýš k?

13. (10 bodů) Převodem z problému Loupežníci ukažte, že následující problém je NP-úplný:

Problém 12: Minimální součet čtverců

Instance: Množina prvků A a s každým prvkem $a \in A$ asociovaná váha $s(a) \in \mathbb{N}$, přirozená čísla K a J.

Otázka: Je možné prvky z A rozdělit do K množin $A_1, \ldots, A_K \subseteq A$ (které jsou po dvou disjunktní a dohromady obsahují všechny prvky A) tak, aby platilo

$$\sum_{i=1}^{K}\left(\sum_{a\in A_i} s(a)\right)^2 \leq J?$$

14. (10 bodů) S pomocí některého z problémů Splnitelnost, 3-Splnitelnost, Vrcholové pokrytí, Trojrozměrné párování, Hamiltonovská kružnice, Obchodní cestující nebo Loupežníci ukažte, že následující problém je NP-úplný:

Problém 13: Obchodní cestující s krátkými přejezdy

Instance: Množina měst $C = \{c_1, \dots, c_m\}$, vzdálenosti mezi každými dvěma městy $d(c_i, c_j) \in \mathbb{N}$, přirozené číslo B.

Otázka: Existuje pořadí (permutace) měst $c_{\pi(1)}, c_{\pi(2)}, \dots, c_{\pi(m)}$ taková, že $d(c_{\pi(i)}, c_{\pi(i+1)}) \leq B$ platí pro každé $i \in \{1, \dots, m-1\}$ a navíc $d(c_{\pi(m)}, c_{\pi(1)}) \leq B$? *Tj. otázka je, zda existuje pořadí měst takové, v němž objede obchodní cestující všechna města, každé navštíví právě jednou, nakonec se vrátí do domovského města a mezi dvěma následujícími městy najede vždy vzdálenost nejvýš B.*