Predmet: Linearni algebra 2
Ukol: 1.
Verze: 1.
Autor: David Napravnik
Prezdivka: DN

zadani

$det[-4]$ (pochopeno jako matice $\mathbb{R}^{1\times 1}$)

reseni

$det\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -4\end{bmatrix} = (1*(-4)) - (0*0) = -4$
$det\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -4\end{bmatrix} = 1*det\begin{bmatrix}-4\end{bmatrix} - 0*det\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$
$det\begin{bmatrix}-4\end{bmatrix} = -4$

zadani

$det(-2I_n)$

reseni

jelikoz mame cisla jen na diagonale a dolni trojuhelnik je tvoren nulami, staci je vynasobit
$det(-2I_n) = (-2)^n$

zadani

$det\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\3 & 2 & 4\\2 & 3 & 2\end{bmatrix}$

reseni

$= (2*2*2) + (4*4*2) + (1*3*3) - (1*2*2) - (4*3*2) - (2*4*3)$
$= -3$

zadani

$det\begin{bmatrix}0 & 0 & a & b\\c & 0 & 0 & 0\\0 & d & 0 & 0\\0 & 0 & e & f\end{bmatrix}$

reseni

udelame REF (bez pravidla pro nasobeni radku konstantou)
$\begin{bmatrix}c & 0 & 0 & 0\\0 & d & 0 & 0\\0 & 0 & a & b\\0 & 0 & e & f\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}c & 0 & 0 & 0\\0 & d & 0 & 0\\0 & 0 & a & b\\0 & 0 & 0 & \frac{fa-eb}{a}\end{bmatrix}$
vynasobime prvky na diagonale a jsme hotovi
$= c*d*a*\frac{fa-eb}{a} = cd(fa-eb)$

zadani

$$det\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

reseni

stejne jako v predchozim pripade dostaneme matici do REF,
s tim ze budeme pouze prehazovat radky, neboli otocime ji zrcadlove.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tim ze mame spodni trojuhlenikovou matici nulovou,
staci vynasobit prvky diagonaly.
tudiz determinant je jedna

zadani

Bud $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokazte ze $det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = det(A)det(B)$

reseni

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = det[B]$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = det[A]$$

$$det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = det[A] * det[B]$$

zadani

Vyreste Cramerovym pravidlem nastedujici soustavu dvou rovnic v $\mathbb{Z}_5$
$x + y = 4$
$2x + 4y = 4$

reseni

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{det(A+(b-A_{*i})e_i^T)}{det(A)}, i = 1, \dots, n$$

$$det(A) = 2$$

$$x_1 = \frac{det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) e_i^T\right)}{det(A)}$$

$$x_1 = \frac{det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right)}{det(A)}$$

$x_1 = \frac{2}{2} = 2 * 2^{-1} = 1$
$x_2 = \frac{det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right) e_i^T\right)}{det(A)}$
$x_2 = \frac{det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)}{det(A)}$
$x_2 = \frac{1}{2} = 1 * 2^{-1} = 3$
$x = 1, y = 3$

zadani

Pomocí adjungované matice určete matici inverzní k matici $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

reseni

$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$
$det(A) = ad - cb$
$adj(A) = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$
$A^{-1} = \frac{1}{ad-cb} \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-cb} & \frac{c}{ad-cb} \\ \frac{b}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{bmatrix}$