Predmet: Linearni algebra 2
Ukol: 6.
Verze: 1.
Autor: David Napravnik
Prezdivka: DN

zadani

U nasledujicich matic urcete minimalne 2 zpusoby, zda jsou positivne semi/definitni
$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

reseni

Pres rekurentni vzorec
$\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T =$
$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}[1,-1][1,-1]^T = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - \frac{1}{7}[5][5]^T = \frac{17}{7}$
jelikoz $\frac{17}{7}$ jse kladne tak $\underline{\underline{A \text{ je positivne definitni}}}$

Pres Sylvestrovo pravidlo
$\det A = 6$
$\det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 6$
$\det[4] = 4$
jelikoz jsou vsechny determinanty kladne je matice A positivne definitni

zadani

U nasledujicich matic urcete minimalne 2 zpusoby, zda jsou positivne semi/definitni
$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$
Vime, ze jedna z nich positivne definitni neni. Zmente jeden jeji prvek tak, aby positivne definitni byla

reseni

Pres rekurentni vzorec
$\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T =$
$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{1}[2,3][2,3]^T = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$
$[-7] - \frac{1}{-2}[-2][-2]^T = -5$
-5 neni positivne definitni tudiz $\underline{\underline{B \text{ neni positivne definitni}}}$

Pres Sylvestrovo pravidlo
$\det B = 10$
$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -2$
$\det[1] = 1$
jelikoz nejsou vsechny determinanty kladne, neni matice B positivne definitni

Predelani matice aby byla positivne definitni
matici nelze upravit na positivne definitni zmenou pouze jednoho prvku
Dukaz:

Puvodni matice neprosla pres Sylvestrovo pravidlo na velikosti 2×2
tudiz chceme najit v teto podmatici prvek a zmenit jej aby determinanty vsech hlavnich vedoucich podmatic matic byly kladne.
prvky muzeme menit pouze na diagonale, abychom neporusily symetrii
tudiz muzeme zmenit prvky b_{11} a b_{22}

prvek b_{11} by musel splnovat:
$b_{11} < \frac{11}{6}$ & $b_{11} > 2$ & $b_{11} > 0$, coz nelze, tudiz to neni hledany prvek

prvek b_{22} by musel splnovat:
$b_{22} < \frac{24}{7}$ & $b_{22} > 4$, coz nelze, tudiz to neni hledany prvek

zadny dalsi prvek nemuzeme zmenit, tudiz z teto matice positivne definitni vyrobit nelze, za predpokladu ze muzeme menit pouze jeden prvek

zadani

Urcete minimalne 2 zpusoby, zda je nasledujici matice radu n positivne definitni

reseni

pro **Sylvestrovo pravidlo** zjistime determinanty:
$\det C_n = n + 1$, kde n je rad matice
tudiz pro kazdy rad matice C je determinant kladny,
tudiz matice C je positivne definitni

Jako druhy zpusob pouzijeme **rekurentni vzorec**:
posledni cast rekurentniho vzorce bude:
$2 - \frac{n+1}{n}$, kde n je rad matice.
A jelikoz $2 - \frac{n+1}{n}$ je vzdy kladne, tak cela matice C je positivne definitni.

zadani

Urcete vsechny matice $D \in R^{n \times n}$, takove, ze D i $-D$ jsou positivne semidefinitni

reseni

Mejme vetu 11.8 (Charakterizace positivni semidefinitnosti), ta nam rika ze nasledujici podminky jsou ekvivalentni:

- A je positivne semidefinitni
- vlastni cisla A jsou nezaporna

dale mejme tvrzeni: $\lambda_{Dx} = -\lambda_{-Dx} \mid \lambda_{-Dx}$ mysleno jako $x$te vlastni cislo matice $-D$
tudiz matice $\underline{\underline{D \text{ musi byt nulova}}}$

zadani

Bud E positivne semidefinitni a $e_{ii} = 0$ pro jiste i. Ukazte, ze i-ty radek a i-ty sloupec matice E jsou nulove.

reseni

krasne je to videt jiz na male matici 2×2
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$[a, b] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a^2 + 2ab$

tim ze mame na diagonale nulu, nikde se nam neobjevi b^2, ale zaroven mame ve sloupcich a radcich nenulove hodnoty, tudiz se nam tam objevi b.
A za b pak lze dosadit cislo podle a takove, ze vysledek bude zaporny.