NTIN090 — Základy složitosti a vyčíslitelnosti
1. cvičení

Petr Kučera

6. října 2022

Pomocí w^R označujeme zrcadlové otočení řetězce w.

1. Uvažme následující dva jazyky

$$S_1 = \{\langle M\rangle^R \mid \langle M\rangle^R \notin L(M)\}$$
$$S_2 = \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle^R \notin L(M)\}$$

   (a) Ukažte, že S_1 není částečně rozhodnutelný (*je možné postupovat podobně jako u jazyka* DIAG).
   (b) Ukažte, že S_2 není částečně rozhodnutelný (*můžete využít toho, že S_1 není částečně rozhodnutelný*).
   (c) Ukažte, že $\overline{S_1}$ i $\overline{S_2}$ jsou částečně rozhodnutelné jazyky, které nejsou rozhodnutelné.

Řešení:

(a) Předpokládejme sporem, že $S_1 = L(M_1)$ pro nějaký Turingův stroj M_1. Z definice S_1 platí, že

$$\langle M_1\rangle^R \in S_1 \iff \langle M_1\rangle^R \notin L(M_1) \tag{1}$$

Z toho, že $S_1 = L(M_1)$ dostáváme, že

$$\langle M_1\rangle^R \in S_1 \iff \langle M_1\rangle^R \in L(M_1) \tag{2}$$

Kombinací (1) a (2) dostáváme

$$\langle M_1\rangle^R \notin L(M_1) \iff \langle M_1\rangle^R \in L(M_1),$$

což je spor.

(b) Předpokládejme sporem, že $S_2 = L(M_2)$ pro nějaký Turingův stroj M_2. Uvažme Turingův stroj M_1, který se vstupem $\langle M\rangle$ pustí stroj $M_2(\langle M\rangle^R)$ (a ponechá jeho výsledek práce). Platí, že $S_1 = L(M_1)$, což je spor s tím, že S_1 není částečně rozhodnutelný jazyk.

(c) Toto plyne z existence univerzálního Turingova stroje, lze tedy simulovat výpočty $M(\langle M\rangle^R)$.

2. Uvažme následující problém

Problém 1: Použití stavu se vstupem (PSx)

Instance: Kód Turingova stroje $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, stav $q \in Q$ a vstup x.
Otázka: Použije M při výpočtu nad x stav q?

   (a) Zformulujte tento problém jako jazyk PSx
   (b) Ukažte, že jazyk PSx je částečně rozhodnutelný
   (c) Ukažte, že jazyk PSx není rozhodnutelný. *Nápověda: šel by pomocí rozhodovací procedury pro* PSx *rozhodnout univerzální jazyk?*

Řešení:

(a) PSx = $\{\langle M, x, q\rangle \mid M$ při výpočtu nad vstupem x použije stav $q\}$

(b) Turingův stroj N přijímající jazyk PSx postupuje následujícím způsobem. Podobně jako univerzální TS simuluje $M(x)$. Pokud M přejmde do stavu q, N přijme. Pokud M skončí výpočet bez toho, aby přešel do stavu q, N odmítne. Simulace ovšem nemusí skončit.

(c) Víme, že $L_u = \{\langle M, x\rangle \mid x \in L(M)\}$ je nerozhodnutelný. Předpokládejme sporem, že máme TS N, který rozhoduje PSx.

Uvažme Turingův stroj M_u, který se vstupem $\langle M, x\rangle$ pracuje takto: Pokud $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F = \{q_1\})$ obsahuje instrukce umožňující přechod z jediného přijímajícího stavu q_1, pak N upraví M takto:

1. Přejmenuje stav q_1 na jiný stav q_k, který dosud nebyl v množině stavů M.
2. Přidá nový stav q_1, který bude přijímajícím stavem.
3. Pro každý znak $a \in \Sigma$, pro který je $\delta(q_k, a) = \perp$, definuje $\delta(q_k, a) = (q_1, a, N)$.

Po této úpravě platí, že po přechodu do přijímajícího stavu výpočet $M(x)$ končí. Následně M_u zavolá $N(\langle M, q_1, x\rangle)$.

Takto definovaný M_u rozhoduje L_u, což je ve sporu s nerozhodnutelností L_u. Platí tedy, že i PSx je nerozhodnutelný.

3. Uvažme následující variantu problému z předchozí otázky

Problém 2: Použití stavu (PS)

Instance: Kód Turingova stroje $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a stav q.

Otázka: Existuje vstup x takový, že M při výpočtu nad x použije stav q?

(a) Zformulujte tento problém jako jazyk PS

(b) Ukažte, že jazyk PS je částečně rozhodnutelný

(*c) Ukažte, že jazyk PS není rozhodnutelný

Řešení:

(a) PS = $\{\langle M, q\rangle \mid (\exists x \in \Sigma^*)[\langle M, q, x\rangle \in \text{PSx}]\}$

(b) Stroj N přijímající PS může se vstupem $\langle M, q\rangle$ postupovat takto:

Připomeňme, že uvažujeme lexikografické pořadí, v němž se nejprve porovnává délka a teprve u řetězců téže délky se porovnávají znaky (přesnější definici najdete ve slajdech k přednášce).

```
Inicializuj prázdný seznam probíhajících výpočtů 𝒮
forall x ∈ Σ* v lexikografickém pořadí do
    Přidej do 𝒮 nový výpočet M(x)
    Vykonej 1 krok každého výpočtu v 𝒮
    if v nějakém výpočtu v 𝒮 přešel M do stavu q then
        přijmi
    end
end
```

(c) Předpokládejme sporem, že N je TS rozhodující PS. Uvažme TS M_u, který se vstupem $\langle M, x\rangle$ pracuje následujícím způsobem:

1 Uprav M nejprve tak, aby přijetí bylo rovno přechodu do jediného přijímajícího stavu q_1, toto bylo popsáno v řešení otázky 2c
2 Vytvoř TS M', který ignoruje svůj vstup a jen pustí výpočet $M(x)$. Přijímající stav M' je roven přijímajícímu stavu q_1 TS M
3 Zavolej $N(\langle M', q_1\rangle)$

Lze nahlédnout, že M_u rozhoduje univerzální jazyk L_u, což je ve sporu s jeho nerozhodnutelností. Tedy i jazyk PS je nerozhodnutelný.

4. Dokažte následující ekvivalenci: Jazyk A je rozhodnutelný, právě když existují rozhodnutelné jazyky B_1 a B_2 takové, že

$$A = \{x \in \Sigma^* \mid (\exists y \in \Sigma^*)[\langle x, y\rangle \in B_1]\} \quad \text{a} \tag{3}$$
$$A = \{x \in \Sigma^* \mid (\forall y \in \Sigma^*)[\langle x, y\rangle \in B_2]\} \tag{4}$$

Řešení: Předpokládejme nejprve, že A je rozhodnutelný jazyk, pak stačí definovat $B_1 = B_2 = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A\}$.

Předpokládejme nyní, že existují rozhodnutelné jazyky B_1 a B_2 splňující (3) a (4). Na přednášce jsme si ukazovali, že platí následující ekvivalence: Jazyk S je částečně rozhodnutelný, právě když existuje rozhodnutelný jazyk B, pro který platí, že $S = \{x \in \Sigma^* \mid (\exists y \in \Sigma^*)[\langle x, y\rangle \in B]\}$. Na základě tohoto tvrzení dovodíme, že A je částečně rozhodnutelný (položíme-li $B = B_1$) i jeho doplněk $\overline{A}$ je částečně rozhodnutelný (položíme-li $B = \overline{B_2}$ a rovnosti $\overline{A} = \{x \in \Sigma^* \mid (\exists y \in \Sigma^*)[\langle x, y\rangle \notin B_2]\}$). Z Postovy věty plyne, že A je rozhodnutelný jazyk.

5. Ukažte, že následující jazyky jsou částečně rozhodnutelné.
   (a) $S_1 = \{\langle M\rangle \mid (\exists w \in L(M))[w = w^R]\}$
   (b) $S_2 = \{\langle M_1, M_2, x\rangle \mid x \in L(M_1) \cap L(M_2)\}$
   (c) $S_3 = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid L(M_1) \cap L(M_2) \neq \emptyset\}$
   (d) $S_4 = \{\langle M, k\rangle \mid |L(M)| \geq k\}$

Řešení: Připomeňme si, následující tvrzení, jež jsme si ukazovali na přednášce. Je-li A částečně rozhodnutelný jazyk, pak jazyk

$$B = \{x \in \Sigma^* \mid (\exists y \in \Sigma^*)[\langle x, y\rangle \in A]\}$$

je také částečně rozhodnutelný.

(a) Uvažme jazyk $S_1' = \{\langle M, w\rangle \mid w = w^R \wedge w \in L(M)\}$, potom S_1' je částečně rozhodnutelný díky tomu, že test $w = w^R$ lze provést algoritmicky a otázka $w \in L(M)$ je částečně rozhodnutelná díky existenci univerzálního TS. Na základě výše uvedeného tvrzení pak S_1 je částečně rozhodnutelný jazyk.

Je možné postupovat i jinak. Stroj, který přijímá S_1 se vstupem $\langle M\rangle$ sestaví enumerátor pro $L(M)$, pustí tento enumerátor a čeká, jestli vypíše palindrom.

(b) TS M_2, který přijímá S_2 se vstupem $\langle M_1, M_2, x\rangle$ provede simulaci $M_1(x)$ a $M_2(x)$ a pokud jedna ze simulací skončí přijetím, pak M_2 přijme.

(c) $S_3 = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid (\exists x \in \Sigma^*)[\langle M_1, M_2, x\rangle \in S_2]\}$. Jelikož S_2 je částečně rozhodnutelný, je částečně rozhodnutelný i S_3 na základě výše uvedeného tvrzení.

(d) TS M_4 pustí enumerátor pro jazyk $L(M)$ (který lze efektivně zkonstruovat ke stroji M). Ve chvíli, kdy enumerátor vypíše k různých řetězců, přijme.

6. Ukažte, že funkce $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ je algoritmicky vyčíslitelná, právě když její *graf* $F = \{\langle x, f(x)\rangle \mid f(x)\downarrow\}$ je částečně rozhodnutelný jazyk.

Řešení: Je-li funkce f algoritmicky vyčíslitelná, pak algoritmus přijímající jazyk F s dvojicí $\langle x, y\rangle$ na vstupu vyhodnotí $f(x)$ a ověří, zda $y = f(x)$.

Je-li F částečně rozhodnutelný jazyk, pak algoritmus vyčíslující funkci f pustí enumerátor F a počká, až tento enumerátor vypíše dvojici $\langle x, y\rangle$ pro nějakou hodnotu y. Pak $f(x) = y$.

Domácí úkoly

7. (20 bodů) Následující dva problémy zformulujte jako jazyky a ukažte, že jsou částečně rozhodnutelné.
   (a) (10 bodů)

Problém 3: Prázdná páska se vstupem (PP)

Instance:	Kód Turingova stroje $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a vstup x.
Otázka:	Ukončí M se vstupem x výpočet a bude na konci výpočtu páska M prázdná?

   (b) (10 bodů)

Problém 4: Prázdná páska (PPE)

Instance:	Kód Turingova stroje $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
Otázka:	Existuje takový řetězec x, že M se vstupem x ukončí výpočet jeho páska bude po ukončení výpočtu prázdná?

8. (10 bodů) Ukažte, že jazyk PP není rozhodnutelný (*popište, jak by bylo možné rozhodovací proceduru pro* PP *použít pro rozhodnutí univerzálního jazyka L_u*).