4. cvičení k předmětu NMAI058 Lineární Algebra 2 (LS 19/20)

Úloha 1: *V prostoru* $\mathbb{R}^4$ *se standardním skalárním součinem* $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ *nalezněte pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi* $Z = \{z_1, \dots, z_r\}$ *řádkového prostoru následující matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nápověda:

Odečtením projekce x_i do $\operatorname{span}\{z_1, \dots, z_{i-1}\}$ od x_i spočteme nejprve kolmý vektor $y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, z_j\rangle z_j$ a ten pak normalizujeme na $z_i = \frac{y_i}{||y_i||}$.

Řešení:

Normalizujeme $y_1 = x_1$: $||y_1|| = \sqrt{4} = 2$ a odtud $z_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

$\langle x_2, z_1\rangle = 5$ a proto $y_2 = (4, 1, 4, 1)^T - 5(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})^T$.

Normalizujeme y_2: $||y_2|| = 3$ a dostaneme $z_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.

$\langle x_3, z_1\rangle = 5$, $\langle x_3, z_2\rangle = -1$ a tedy $y_3 = (-1, -1, 1, 1)^T$.

Normalizujeme y_3: $||y_3|| = 2$ a máme $z_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

Výsledek:

$Z = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T\}$.

Úloha 2: *Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi* $\mathbb{R}^4$*.*

Nápověda:

Nejprve rozšíříme bázi řádkového prostoru matice A na bázi $\mathbb{R}^4$. Matici převedeme do odstupňovaného tvaru a poté bázi Z rozšíříme např. o vektory z kanonické báze odpovídající všem nebázickým sloupcům.

Všimněte si, že jádro A je ortogonálním doplňkem řádkového prostoru, t.j. zvolené rozšíření báze Z tvoří ortonormální bázi jádra A.

Řešení:

Odstupňovaný tvar matice A je $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Nebázický je pouze poslední sloupec, a tak lze vzít např. $x_4 = (0, 0, 0, 1)^T$ abychom dostali rozšíření na bázi $\mathbb{R}^4$. Na vektory z_1, z_2, z_3, x_4 nyní aplikujeme Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci a získáme hledané rozšíření na ortonormální bázi.

Jelikož jsme rozšířili ortonormální bázi $Z = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T\}$ řádkového prostoru A, stačí upravit pouze vektor x_4.

$\langle x_4, z_1\rangle = \frac{1}{2}$, $\langle x_4, z_2\rangle = -\frac{1}{2}$, $\langle x_4, z_3\rangle = \frac{1}{2}$, a tudíž $y_4 = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T$,

Normalizujeme y_4: $||y_4|| = \frac{1}{2}$ a získáme $z_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

Výsledek:

$z_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

Úloha 3: *Pro matici A z úlohy 1 určete ortogonální projekci p vektoru $a = (2, 2, 1, 5)^T$ do řádkového prostoru matice A a souřadnice této projekce $[p]_Z$ vzhledem k bázi Z.*

Řešení:

Protože Z je ortonormální bází řádkového prostoru A, můžeme postupovat přímo podle věty o projekci. Souřadnice vzhledem k $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ odpovídají Fourierovým koeficientům:

$\langle a, z_1\rangle = 5$, $\langle a, z_2\rangle = -2$, $\langle a, z_3\rangle = 1$ a tedy $[p]_Z = (5, -2, 1)^T$

Hledanou projekci potom získáme jako součet projekcí vektoru a na jednotlivé vektory dané ortonormální báze: $p = \langle a, z_1\rangle z_1 + \langle a, z_2\rangle z_2 + \langle a, z_3\rangle z_3 = (1, 3, 2, 4)^T$

Výsledek:

$[p]_Z = (5, -2, 1)^T$, $p = (1, 3, 2, 4)^T$.

Úloha 4: *Určete vzdálenost bodu $A = [5, 5, 3, 3]$ od roviny procházející počátkem a body $B = [8, -1, 1, -2]$ a $C = [4, -2, 2, -1]$.*

Nápověda:

Můžeme postupovat Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací aplikovanou na vektory odpovídající bodům B, C a A, tj. na vektory $x_1 = (8, -1, 1, -2)^T, x_2 = (4, -2, 2, -1)^T$ a $x_3 = (5, 5, 3, 3)^T$. Hledaná vzdálenost je rovna právě normě vektoru y_3 z třetího kroku Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace, který získáme odečtením projekce x_3 do $\text{span}\{x_1, x_2\}$ od x_3 (geometrická představa viz. strana 177 ve skriptech M. Hladíka – "nakolmení 3. vektoru").

Řešení:

Zde se vyplatí malý předvýpočet. Vektory $x_1 = (8, -1, 1, -2)^T$, $x_2 = (4, -2, 2, -1)^T$ jsou lineárně nezávislé, a navíc

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 & -2 \\ 8 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde řádky x_1' a x_2' poslední matice jsou vzájemně kolmé a generují stejnou rovinu jako vektory x_1 a x_2.

Nyní můžeme spočítat projekci vektoru $x_3 = (5, 5, 3, 3)^T$ do roviny generované x_1' a x_2':

$$p = \frac{\langle x_3, x_1'\rangle}{||x_1'||^2} x_1' + \frac{\langle x_3, x_2'\rangle}{||x_2'||^2} x_2' = \frac{17}{17}(4, 0, 0, -1)^T + \frac{2}{2}(0, 1, -1, 0)^T = (4, 1, -1, -1)^T.$$

(Protože x'_1 a x'_2 nemají jednotkovou normu, musíme při hledání projekce pracovat s ortonormálními vektory $\frac{x'_1}{||x'_1||}$ a $\frac{x'_2}{||x'_2||}$. Proto se ve výraze pro p objevuje ve jmenovatelích $||x'_1||^2$ resp. $||x'_2||^2$.)

V třetím kroku G.-S. ortogonalizace dostáváme

$$y_3 = x_3 - p = (5,5,3,3)^T - (4,1,-1,-1)^T = (1,4,4,4).$$

Vzdálenost bodu A od roviny obsahující B a C je $||x_3 - p|| = ||y_3|| = \sqrt{1+16+16+16} = 7$.

Úloha 5: *Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení x' soustavy $Ax = b$, kde*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = (10,5,13,9)^T$$

Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé.

Určete také velikost chyby $||Ax' - b||$.

Vyjdou stejná řešení jako řešení soustavy $A^T Ax = A^T b$?

Řešení: Přibližné řešení dané soustavy nalezneme jako souřadnice projekce b do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ matice A. Protože sloupce a_1, a_2 a a_3 matice A jsou vzájemně kolmé, je projekce vektoru b do sloupcového prostoru A přímo dána předpisem

$$b_{\mathcal{S}(A)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle b, a_i \rangle}{||a_i||^2} a_i,$$

tedy $b_{\mathcal{S}(A)} = (4,8,13,9)^T$ s koeficienty $x' = (3,-2,1)^T$. Protože sloupce A jsou navzájem ortogonální (a tedy lineárně nezávislé), je nalezené x' určené jednoznačně.

Úloha 6: *Hookův zákon vyjadřuje lineární úměrnost pružné deformace materiálu na použité síle. Následující tabulka obsahuje hodnoty průtahu pružiny (v palcích) v závislosti na síle/hmotnosti (v librách). Odhadněte koeficient úměrnosti.*

síla F	*5*	*7*	*8*	*10*	*12*
průtah ℓ	*11,1*	*15,4*	*17,5*	*22*	*26,3*

Řešení:

Použijeme metodu nejmenších čtverců pro přibližné řešení soustavy $Ax = b$. Hledáme takové x', které minimalizuje chybu nalezeného přibližného řešení, tj. x', které minimalizujeme výraz $||Ax' - b||_2$. Jinými slovy hledáme x' pro které je Ax' rovno projekci vektoru

$b \in \mathbb{R}^m$ do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matice projekce z $\mathbb{R}^m$ do $\mathcal{S}(A)$ je $A(A^TA)^{-1}A^T$, a proto projekce b do $\mathcal{S}(A)$ je vektor $A(A^TA)^{-1}A^Tb$. Pro požadované x' dostáváme vztah $A(A^TA)^{-1}A^Tb = Ax'$, tedy $x' = (A^TA)^{-1}A^Tb$ a hledané x' je právě řešením soustavy normálních rovnic $A^TAx' = A^Tb$.

Pro zadané hodnoty síly F a průtahu ℓ hledáme koeficienty c a d, pro které platí $cF+d=\ell$ (např. pro první sloupec tabulky $c5+d=11,1$). Chceme tedy řešit soustavu $Ax=b$ tvaru

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \\ 10 & 1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11,1 \\ 15,4 \\ 17,5 \\ 22 \\ 26,3 \end{pmatrix}.$$

Pro tuto soustavu dostáváme normální soustavu rovnic $A^TAx' = A^Tb$ s maticí

$$A^TA = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \\ 10 & 1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 382 & 42 \\ 42 & 5 \end{pmatrix}$$

a vektorem pravých stran

$$A^Tb = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11,1 \\ 15,4 \\ 17,5 \\ 22 \\ 26,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 838,9 \\ 92,3 \end{pmatrix}.$$

Přibližné řešení x' dává $c \approx 2,1774$ - směrnice přímky = koeficient úměrnosti a $d \approx 0,16986$ - absolutní člen přímky.

Úloha 7:

Rakovinné buňky se množí exponenciálně rychle v čase. Určete konkrétní vztah ve tvaru $y = ce^{dt}$ při následujících datech.

t čas	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
y (počet buněk)	*16*	*27*	*45*	*74*	*122*

Řešení:

Po odlogaritmování soustavy dostaneme:

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln 16 \\ \ln 27 \\ \ln 45 \\ \ln 74 \\ \ln 122 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln 861412331516175761716224000 \approx 62.02062 \\ \ln 175504320 \approx 18{,}9832 \end{pmatrix}$$

Řešení: $d \approx 0{,}507; \ln c \approx 2{,}2753; c \approx 9{,}731.$

Úloha 8: *Buď $H(a) = I_n - \frac{2}{a^T a} a a^T, a \neq 0$, Householderova matice. Dokažte, že $H(a)$ je ortogonální.*

Nápověda: Householderova matice je matice zrcadlení podle nadroviny s normálou a (viz. Příklad 8.75 ve skriptech M. Hladíka).

Řešení: Jelikož zrcadlení dle nadroviny je samo k sobě inverzní zobrazení (taková zobrazení se nazývají *involuce*), stačí ukázat, že $H(a)$ je symetrická matice a dostaneme $H(a)^T H(a) = H(a)H(a) = I_n$, jak bylo třeba ukázat. Symetrie plyne z toho, že $H(a)$ je součtem jednotkové matice a násobku matice projekce, které jsou obě symetrické. Formálně:

$$H(a)^T = \left(I_n - \frac{2}{a^T a} a a^T \right)^T = I_n^T - \frac{2}{a^T a} (a a^T)^T = I_n - \frac{2}{a^T a} (a^T)^T a^T = I_n - \frac{2}{a^T a} a a^T = H(a).$$

Další příklady k procvičení

Úloha 9: *V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ nalezněte pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi $Z = \{z_1, \ldots, z_r\}$ řádkového prostoru následujících matic.*

a) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledek: $Z = \{(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T, (0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0)^T, (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T\}$.

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledek: $Z = \{(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T, (0, 1, 0, 0)^T, (-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T\}$.

c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Výsledek: $Z = \{(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})^T, (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})^T, (0, 0, -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})^T\}$.

Úloha 10: *Rozšiřte ortonormální báze z předchozího příkladu na ortonormální bázi* $\mathbb{R}^4$.

a) *viz matice* $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledek: $z_4 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

b) *viz matice* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledek: $z_4 = (-\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$.

c) *viz matice* $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Výsledek: $z_4 = (-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0, 0)^T$.

Úloha 11: *Pro matice z předchozího příkladu určete ortogonální projekci p vektoru $a = (2, 2, 1, 5)^T$ do řádkového prostoru a souřadnice této projekce $[p]_Z$ vzhledem k bázi Z.*

a) *viz matice* $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledek: $[p]_Z = (2, -1, \frac{7\sqrt{2}}{2})^T$, $p = (\frac{7}{2}, 2, 1, \frac{7}{2})^T$.

b) *viz matice* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledek: $[p]_Z = (5, 2, 1)^T$, $p = (\frac{8}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{11}{3})^T$.

c) *viz matice* $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Výsledek: $[p]_Z = (\frac{19}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{9\sqrt{5}}{5})^T$, $p = (\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, 1, 5)^T$.

Úloha 12: *Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení x' soustavy $Ax = b$, kde*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad b = (26, 5, 34, -18, -30, -13)^T.$$

Určete také velikost chyby $||Ax' - b||$.

Všimněte si, že sloupce matice A *jsou vzájemně kolmé.*

Výsledek: $x' = (4, 2, 0, -3, 1)^T$, $||Ax' - b|| = 2$

Úloha 13: *Nechť jsou* $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *Householderovy matice.*

a) *Je bloková matice* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *také Householderova matice?*

Řešení: Ne.

b) *Je bloková matice* $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ *Householderova matice?*

Řešení: Ano.

Úloha 14: *Ukažte, že pokud jsou vektory* $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}^n$ *navzájem na sebe kolmé, pak matice* $I - q_1 q_1^T, \ldots, I - q_n q_n^T$ *navzájem komutují.*