Predmet: Linearni algebra 2
Ukol: 8.
Verze: 1.
Autor: David Napravnik
Prezdivka: DN

1. zadani

Zduvodnete proc jsou nasledujici formy bilinearni a naleznete jejich maticovou reprezentaci

reseni

C nasobeni realnych cisel
$c : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dana $c(x, y) = xy$,
coz je nasobeni realnych cisel a
maticova reprezentace je podle vzorce $xy = xAy$ rovna $\underline{\underline{A = [1]}}$

A $a : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou $a(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$
nalezneme A takove, ze $xAy = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}}$$

je bilinearni, nebot pro ni existuje maticova reprezentace

B $b : \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}$ danou $b(x, y) = (\sum_{i=1}^n ix_i) \cdot \left(\sum_{j=1}^n jy_j\right)$
jelikoz se pohybujeme nad binarni soustavou tak sumy budou bud pricitat x_i a nebo nulu.
vysledkem nasobeni bude operace AND, u ktereho plati: $\sum_{i=1}^n (x_i \& y_i) = \sum_{i=1}^n (x_i) \& \sum_{i=1}^n (y_i)$ pro $x, y \in 0, 1$
tudiz muzeme aplikovat matici s diagonalou stridajicich se nul a jednicek

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}}}$$

2. zadani

Uvazte kvadratickou formu $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou predpisem $c(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$. Urcete jeji maticovou reprezentaci vuci kanonicke bazi a bazi $B = \{(1, 2)^T, (1, 1)^T\}$.

reseni

$b(x, x) = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$
Snadno vidime, ze $b_{11} = 1$, $b_{12} = b_{21} = -3$, $b_{22} = 9$

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}}}$$

pro bazi B mejme prechodovou funkci S z kanonicke baze do baze B

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_b = S^T AS$

$$\underline{\underline{A_b = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}}$$

3. zadani

Bud $\mathbb{R}^{n\times n}$ vektorovy prostor realnych matic dimenze $n \times n$. Definujme formu $d : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ predpisem $d(A, B) = trace(A^T B)$, kde $trace(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii}$ je stopa matice. Ukazte, ze d je bilinearni forma. Je d symetricka?

reseni

$d(AB) = trace(A^T B)$
overime podminky linearity na obou slozkach:
$d(\alpha u + \beta v, B) = \alpha d(u, B) + \beta d(v, B)$
$trace((\alpha u + \beta v)^T B) = \alpha\ trace(u^T B) + \beta\ trace(v^T B)$

$d(A, \alpha u + \beta v) = \alpha d(A, u) + \beta d(A, v)$
$trace(A^T(\alpha u + \beta v)) = \alpha\ trace(A^T u) + \beta\ trace(A^T v)$
obe slozky jsou linearni, tudiz forma je bilinearni

symetricka je, protoze je splnena podminka
$b(u, v) = b(v, u)\ \forall v, u \in V$ jelikoz
$tr(A^T B) = tr(B^T A)$

4. zadani

Necht f je bilinearni forma a dale A jeji maticova reprezentace vuci nejake bazi B. Dokazte, nebo vyvratte, ze vlastni cisla matice A jsou nezavisle na volbe baze B.

reseni

vlastni cisla matice A jsou zavisle na volbe baze B
mejme baze B a B' a matici prechodu $S = {}_B[id]_{B'}$
$b(u, v) = [u]_B^T A [v]_B = ({}_B[id]_{B'} \cdot [u]_{B'})^T\ A\ ({}_B[id]_{B'}) = [u]_{B'}^T S^T A S [v]_{B'}$
tudiz se nam z matice A stava matice $S^T AS$ a tyto dve matice nebudou mit (vetsinou) stejna vlastni cisla