

# NTIN090 — Základy složitosti a vyčísitelnosti

## 1. cvičení

Petr Kučera

6. října 2022

1. Popište Turingův stroj, který rozhoduje jazyk  $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Popište i přechodovou funkci tohoto stroje.

**Řešení:** Turingův stroj  $M$  se vstupem  $w$  bude postupovat podle následujícího algoritmu.

```
1 if  $w$  je prázdný řetězec then
2   | accept
3 end
4 if první znak  $w$  není  $a$  then
5   | reject
6 end
7 Smaž první znak  $w$ 
8 Přesuň hlavu nad poslední znak  $w$ 
9 if poslední znak  $w$  není  $b$  then
10  | reject
11 end
12 Smaž poslední znak  $w$ 
13 Přesuň hlavu nad první znak  $w$ 
14 goto 1
```

Stroj  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  definujeme takto.

- Množina stavů  $Q = \{\text{INIT}, \text{ACCEPT}, \text{TO\_END}, \text{CHECK\_B}, \text{TO\_START}\}$
- Abeceda  $\Sigma = \{a, b, \lambda\}$ , kde  $\lambda$  reprezentuje prázdné políčko.
- Počáteční stav je  $q_0 = \text{INIT}$
- Jediný přijímající stav je  $\text{ACCEPT}$

Přechodová tabulka stroje  $M$  je popsána tabulkou 1.

Tabulka 1: Přechodová funkce  $\delta$  stroje  $M$ .

	$q, c$	$\rightarrow$	$q', c', Z$
1.	INIT, $\lambda$	$\rightarrow$	ACCEPT, $\lambda, N$
2.	INIT, $a$	$\rightarrow$	TO_END, $\lambda, R$
3.	TO_END, $a$	$\rightarrow$	TO_END, $a, R$
4.	TO_END, $b$	$\rightarrow$	TO_END, $b, R$
5.	TO_END, $\lambda$	$\rightarrow$	CHECK_B, $\lambda, L$
6.	CHECK_B, $b$	$\rightarrow$	TO_START, $\lambda, L$
7.	TO_START, $a$	$\rightarrow$	TO_START, $a, L$
8.	TO_START, $b$	$\rightarrow$	TO_START, $b, L$
9.	TO_START, $\lambda$	$\rightarrow$	INIT, $\lambda, R$

2. Popište Turingův stroj, který se vždy zastaví a přijímá jazyk  $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Rozmyslete si jednak jednopáskový, jednak vícepáskový Turingův pro tento jazyk. (Stačí popsat algoritmus, není třeba sepisovat instrukce.)

**Řešení:** Nejprve popíšeme jednopáskový Turingův stroj  $M$  rozhodující jazyk  $L$ . Se vstupem  $w$  bude postupovat podle následujícího algoritmu.

- 1 **if**  $w$  je prázdný řetězec **then**
- 2     **accept**
- 3 **end**
- 4 Jedním průchodem pásky ověř, zda  $w$  má formu  $a^*b^*c^*$ , tedy, zda jde o posloupnost znaků  $a$ , po níž následuje posloupnost znaků  $b$ , po níž následuje posloupnost znaků  $c$ . Pokud tomu tak není, odmítni.
- 5 Ověř, zda počet znaků  $a$  je shodný s počtem znaků  $b$ . Toto je možno provést postupem popsáním v řešení příkladu 1. Místo mazání znaků  $b$ , přepisujeme je na znaky  $d$ .
- 6 Ověř, zda počet znaků  $d$  je shodný s počtem znaků  $c$ . Toto je možno provést postupem popsáním v řešení příkladu 1.

Druhou možností je popsat dvoupáskový Turingův stroj, který nejprve okopíruje úvodní posloupnost znaků  $a$  na pracovní pásku. Poté zkontroluje, zda počet znaků  $a$  na pracovní pásce je shodná s počtem znaků  $b$  a pak i znaků  $c$ .

3. Popište, jak lze převést Turingův stroj s páskou, která je potenciálně nekonečná v obou směrech na Turingův stroj, jehož páska je potenciálně nekončená pouze ve směru doprava. Můžete předpokládat, že Turingův stroj s poloviční páskou má na prvním políčku zvláštní znak zarážky ( $\triangleright$ ).

**Řešení:** Popíšeme dva přístupy k řešení.

1. První možností je to, že  $M'$  bude pracovat stejně jako  $M$ , jenom ve chvíli, kdy hlavou vstoupí na zarážku na levém okraji pásky, tak posune řetězec na využitém kusu pásky o jedno políčko doprava, aby si udělal nalevo místo. K tomu účelu i  $M'$  bude udržovat ještě znak pravé zarážky  $\triangleleft$  na konci využité části pásky.
2. Pro druhý postup uvažujeme, že buňky pásky jsou očíslované celými čísly. Nejlevější buňka vstupu, nad níž je na začátku hlava  $M$  bude mít číslo 0, napravo pak jsou kladná čísla, nalevo záporná čísla. Levou a pravou část potom reprezentujeme na jedné poloviční pásce. To můžeme udělat buď tak, že zvětšíme abecedu a  $i$ -tá buňka poloviční pásky stroje  $M'$  bude obsahovat dvojici znaků na  $i$ -té a  $-(i+1)$ -té pásce stroje  $M$ . Druhou možností je naskládat políčka pásky  $M$  na pásku  $M'$  v pořadí indexů  $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots$  V obou případech je potřeba, aby si  $M'$  pamatoval ve stavu, na které části pásky  $M$  je a pokud je na levé části pásky, musí otočit směr pohybu v každé instrukci.

4. Jakou třídu jazyků rozpoznávají Turingovy stroje, u nichž povolíme pohyb hlavy pouze
- (a) vlevo (L) a vpravo (R),
  - (b) stát (N) a vpravo (R),
  - (c) stát (N) a vlevo (L).

**Řešení:**

- (a) Takto omezené Turingovy stroje jsou ekvivalentní našemu obvyklému Turingovu stroji. Pohyb N lze nahradit dvojicí pohybu L a R. Kromě toho pohyb N není potřeba proto, že je možné si předpočítat, kam se nakonec hlava pohne a co bude v té chvíli na pásce. Pokud by se při pohybu N měl stroj zacyklit, pak i to lze vyčíst z přechodové funkce a je možné to nahradit jiným způsobem zacyklení.

- (b) Takto omezené Turingovy stroje přijímají právě regulární jazyky, chovají se totiž jako konečný automat. Mohou si totiž něco poznamenat na pásce, ale poté, co políčko opustí, již se k této informaci nemohou vrátit, zůstává jim tak tedy jen informace ve stavu stejně jako u konečného automatu.
- (c) Vzhledem k tomu, že hlava je na začátku výpočtu na nejlevějším symbolu vstupu, tak omezené Turingovy stroje přijímají jen velmi triviální třídu jazyků, kde o tom, jestli slovo patří nebo nepatří do jazyka, rozhoduje jen jeho první znak.

5. Ukažte, že jednopáskový Turingův stroj, který na každé políčko na pásce může zapsat nejvýš jednou (tj. nejvýš jednou může přepsat políčko jiným znakem) je ekvivalentní obyčejnému jednopáskovému Turingovu stroji.

**Řešení:** Uvažme Turingův stroj  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  a popišme k němu konstrukci ekvivalentního TS  $M'$ , který každé políčko na pásce přepíše nejvýš jednou. TS  $M'$  simuluje provedení instrukce  $M$  posloupností instrukcí. Základní trik spočívá v tom, že pokud by  $M$  chtěl přepsat políčko na pásce jiným znakem, tak místo toho  $M'$  překopíruje využitou část pásky  $M$  na nový dosud nevyužitý kus pásky s tím, že při kopírování provede požadovanou změnu znaku. Pro účely kopírování si musí  $M'$  jednak umístit zarážky kolem řetězce, který reprezentuje využitou část pásky  $M$ . Navíc je potřeba, aby si mohl umístit značku vždy na okopírovaný znak. To není problém u vstupu, kde může každý znak přepsat znakem se značkou. Aby si mohl TS umístit značky i u znaků později ve výpočtu, je potřeba, aby si mezy znaky nechával vždy prázdnou buňku, na kterou si umístí později značku vztahující se k následujícímu znaku.

6. Jako třídu přijímají jednopáskové Turingovy stroje, které nesmí přepisovat políčka se vstupem?

**Řešení:** Takto omezené Turingovy stroje jsou ekvivalentní konečnému automatu, přijímají tedy právě regulární jazyky. Jelikož nemohou přepisovat políčka ve vstupu, nemohou si pamatovat, kam až ve vstupu dočetli, pokud tedy takový TS opustí řetězec se vstupem, aby si bokem něco poznamenal, musí opět začít číst vstup od začátku. Potom už nemůže TS nijak určit, k čemu se informace poznamenaná bokem vztahuje. Ve výsledku tedy jediná podstatná informace je ta uložená ve stavu, což je přesně to, co má k dispozici i konečný automat.

7. Ukažte, že třídy rozhodnutelných i částečně rozhodnutelných jazyků jsou uzavřené vzhledem k následujícím operacím:

- (a) Průnik ( $L_1 \cup L_2$ )  
 (b) Sjednocení ( $L_1 \cap L_2$ )  
 (c) Konkatenace ( $L_1 \cdot L_2 = \{uv \mid u \in L_1 \wedge v \in L_2\}$ )  
 (d) Kleeneho hvězdička ( $L^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i$ , kde  $L^0 = \emptyset$ ,  $L^1 = L$  a  $L^i = L^{i-1} \cdot L$  pro  $i > 1$ )

**Řešení:** Předpokládejme, že  $M_1$  a  $M_2$  jsou Turingovy stroje, pro něž platí, že  $L_1 = L(M_1)$  a  $L_2 = L(M_2)$ . Pro úvahy o rozhodnutelných jazycích navíc předpokládáme, že výpočty  $M_1$  a  $M_2$  s každým vstupem se zastaví.

- (a) Jazyk  $L_1 \cup L_2$  je přijímán (případně rozhodován) strojem  $M_U$ , jehož práce se vstupem  $x$  je popsána následujícím algoritmem.

```

1  Puť paralelně výpočty  $M_1(x)$  a  $M_2(x)$ 
2  if jeden z výpočtů přijal then
3    |   přijmi
4  end
5  if pokud oba výpočty odmítly then
6    |   odmítni
7  end
```

(b) Jazyk  $L_1 \cap L_2$  je přijímán (případně rozhodován) strojem  $M_{\cap}$ , jehož práce se vstupem  $x$  je popsána následujícím algoritmem.

```

1 Pust' paralelně výpočty  $M_1(x)$  a  $M_2(x)$ 
2 if jeden z výpočtů odmítne then
3   | odmítni
4 end
5 if pokud oba výpočty přijal then
6   | přijmi
7 end

```

(c) Jazyk  $L_1 \cdot L_2$  je přijímán (případně rozhodován) strojem  $M_{\bullet}$ , jehož práce se vstupem  $x$  délky  $n$  je popsána následujícím algoritmem. Pomocí  $x[i : j]$  označujeme podřetězec řetězce  $x$  od  $i$ -tého do  $j$ -tého znaku  $x$  (pokud  $i > j$ , jde o prázdný řetězec  $\varepsilon$ ). Poznámky o paralelním běhu jsou zde s ohledem na otázku .

```

1 for  $i = 0$  to  $n$  do // paralelně
2   | Pust' výpočty  $M_1(x[1 : i])$  a  $M_2(x[i + 1 : n])$  // paralelně
3   | if oba výpočty přijaly then
4   |   | přijmi
5   | end
6 end
7 odmítni

```

(d) Jazyk  $L_1^*$  je přijímán (případně rozhodován) strojem  $M_*$ , jehož práce se vstupem  $x$  délky  $n$  je popsána následujícím algoritmem.

```

1 for  $k = 1$  to  $n$  do // paralelně
2   | forall dělení slova  $x$  na  $k$  podslov  $x_1, \dots, x_k$  do // paralelně
3   |   | for  $i = 1$  to  $k$  do // paralelně
4   |   |   | Pust'  $M_1(x_i)$ 
5   |   |   | if  $M_1(x_i)$  odmítne then
6   |   |   |   | break
7   |   |   | end
8   |   | end
9   |   | if všech  $k$  výpočtů přijalo then
10  |   |   | přijmi
11  |   | end
12  | end
13 end
14 odmítni

```

8. Ukažte, že třída rozhodnutelných jazyků je uzavřena vzhledem operaci doplňku  $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$ , ale třída částečně rozhodnutelných jazyků není uzavřená vzhledem k operaci doplňku

**Řešení:** Je-li  $L$  rozhodován Turingovým strojem  $M$ , pak jazyk  $\bar{L}$  je přijímán (případně rozhodován) strojem  $M_c$ , jehož práce se vstupem  $x$  je popsána následujícím algoritmem.

```

1 Pust' výpočet  $M(x)$ 
2 Zneguj odpověď

```

Na přednášce jsme si ukázali (nebo si ukážeme), že jazyk univerzálního Turingova stroje  $L_u$  je částečně rozhodnutelný, ale není rozhodnutelný. Na základě Postovy věty tedy  $\bar{L}_u$  není částečně rozhodnutelný jazyk.

## Domácí úkoly

9. (10 bodů) Ukažte, jak lze libovolný jednopáskový Turingův stroj  $M$  převést na Turingův stroj  $M'$ , který v každém kroku provádí jen dvě ze tří možných akcí (tj. každá instrukce buď změni stav a pozici hlavy, změni stav a písmeno na pásce, nebo změni písmeno na pásce a pozici hlavy, ale neučiní všechny tyto akce najednou).
10. (20 bodů) Uvažme Turingův stroj s poloviční páskou, v němž se může hlava hýbat pouze vpravo  $R$ , nebo může vykonat pohyb RESTART, při němž se hlava vrátí na začátek pásky. Ukažte, jak převést jednopáskový Turingův stroj na tuto variantu Turingova stroje.