NTIN090 — Základy složitosti a vyčíslitelnosti
4. cvičení

Petr Kučera

1. prosince 2022

1 Věty použitelné v příkladech

Připomeňme si nejprve základní třídy složitosti definované k funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$\mathrm{TIME}(f(n))$ jazyky přijímané deterministickými Turingovými stroji v čase $O(f(n))$.

$\mathrm{SPACE}(f(n))$ jazyky přijímané deterministickými Turingovými stroji v prostoru $O(f(n))$.

$\mathrm{NTIME}(f(n))$ jazyky přijímané nedeterministickými Turingovými stroji v čase $O(f(n))$.

$\mathrm{NSPACE}(f(n))$ jazyky přijímané nedeterministickými Turingovými stroji v prostoru $O(f(n))$.

Dále si shrneme tvrzení z přednášky, jež se mohou hodit při řešení příkladů z tohoto cvičení.

Věta (Vztahy mezi třídami): Pro každou funkci $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ platí

(i) $\mathrm{TIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f(n))$

(ii) $\mathrm{TIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{NTIME}(f(n))$

(iii) $\mathrm{SPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{NSPACE}(f(n))$

(iv) $\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f(n))$ □

Věta (Vztah prostoru a času): Pro každou funkci $f(n) \geq \log_2 n$ a každý jazyk L platí, že

$$L \in \mathrm{NSPACE}(f(n)) \implies (\exists c_L \in \mathbb{N}) \left[L \in \mathrm{TIME}(2^{c_L f(n)}) \right].$$ □

Důsledek 3 *Je-li $f(n)$ funkce, pro kterou platí $f(n) \geq \log_2 n$ a je-li $g(n)$ funkce, pro kterou platí $f(n) = o(g(n))$, pak*

$$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{TIME}(2^{g(n)}).$$

Věta (Savičova věta): Pro každou funkci $f(n) \geq \log_2 n$ platí

$$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n)).$$ □

Věta (Deterministická prostorová hierarchie): Jsou-li $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkce, pro které platí, že $f_1(n) = o(f_2(n))$ a f_2 je prostorově konstruovatelná[1], potom

$$\mathrm{SPACE}(f_1(n)) \subsetneq \mathrm{SPACE}(f_2(n)).$$ □

Věta (Deterministická časová hierarchie): Jsou-li $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkce, pro které platí, že $f_1(n) = o(f_2(n)/\log f_2(n))$ a f_2 je časově konstruovatelná[2], potom

$$\mathrm{TIME}(f_1(n)) \subsetneq \mathrm{TIME}(f_2(n)).$$ □

[1] Všechny funkce, které v následujících příkladech uvažujeme, jsou prostorově konstruovatelné a tento předpoklad tak není třeba ověřovat.

[2] Všechny funkce, které v následujících příkladech uvažujeme, jsou časově konstruovatelné a tento předpoklad tak není třeba ověřovat.

2 Příklady

1. Pro následující dvojice tříd rozhodněte, zda mezi nimi platí nějaká inkluze, pokud ano, tak zda je ostrá nebo ne. Vyznačte také dvojice, u nichž není možno (z našich znalostí) ukázat, zda mezi nimi je nějaký vztah. Přesněji, mezi danou dvojici tříd doplňte symbol ⊆, ⊊, =, ⊇, ⊋ nebo „?“. Své odpovědi zdůvodněte.

(1)	$\mathrm{SPACE}(n \log n)$	$\mathrm{TIME}(2^{n^2})$
(2)	$\mathrm{TIME}(2^{n^2})$	$\mathrm{TIME}(2^{n \log n})$
(3)	$\mathrm{TIME}(2^{n \log n})$	$\mathrm{NSPACE}(\log^2 n)$
(4)	$\mathrm{NSPACE}(\log^2 n)$	$\mathrm{NTIME}(n)$
(5)	$\mathrm{NTIME}(n)$	$\mathrm{SPACE}(n \log n)$
(6)	$\mathrm{SPACE}(n \log n)$	$\mathrm{TIME}(2^{n \log n})$
(7)	$\mathrm{TIME}(2^{n^2})$	$\mathrm{NSPACE}(\log^2 n)$
(8)	$\mathrm{TIME}(2^{n \log n})$	$\mathrm{NTIME}(n)$
(9)	$\mathrm{NSPACE}(\log^2 n)$	$\mathrm{SPACE}(n \log n)$
(10)	$\mathrm{NTIME}(n)$	$\mathrm{TIME}(2^{n^2})$

Řešení:

(1) $\mathrm{SPACE}(n \log n) \overset{5}{\subsetneq} \mathrm{SPACE}(n \log^2 n) \overset{1(iii)}{\subseteq} \mathrm{NSPACE}(n \log^2 n) \overset{3}{\subseteq} \mathrm{TIME}(2^{n^2})$

(2) $\mathrm{TIME}(2^{n \log n}) \overset{6}{\subsetneq} \mathrm{TIME}(2^{n^2})$

(3) $\mathrm{NSPACE}(\log^2 n) \overset{3}{\subseteq} \mathrm{TIME}(2^n) \overset{6}{\subsetneq} \mathrm{TIME}(2^{n \log n})$

(4) ?

(5) $\mathrm{NTIME}(n) \overset{1(iv)}{\subseteq} \mathrm{SPACE}(n) \overset{5}{\subsetneq} \mathrm{SPACE}(n \log n)$

(6) ?

(7) $\mathrm{NSPACE}(\log^2 n) \overset{(3)}{\subsetneq} \mathrm{TIME}(2^{n \log n}) \overset{(2)}{\subsetneq} \mathrm{TIME}(2^{n^2})$

(8) $\mathrm{NTIME}(n) \overset{1(iv)}{\subseteq} \mathrm{SPACE}(n) \overset{5}{\subsetneq} \mathrm{SPACE}(n\sqrt{\log n}) \overset{1(iii)}{\subseteq} \mathrm{NSPACE}(n\sqrt{\log n}) \overset{3}{\subsetneq} \mathrm{TIME}(2^{n \log n})$

(9) $\mathrm{NSPACE}(\log^2 n) \overset{4}{\subseteq} \mathrm{SPACE}(\log^4 n) \overset{5}{\subsetneq} \mathrm{SPACE}(n \log n)$

(10) $\mathrm{NTIME}(n) \overset{(8)}{\subsetneq} \mathrm{TIME}(2^{n \log n}) \overset{(2)}{\subsetneq} \mathrm{TIME}(2^{n^2})$

2. Pro následující dvojice tříd rozhodněte, zda mezi nimi platí nějaká inkluze, pokud ano, tak zda je ostrá nebo ne. Vyznačte také dvojice, u nichž není možno (z našich znalostí) ukázat, zda mezi nimi je nějaký vztah. Přesněji, mezi danou dvojici tříd doplňte symbol ⊆, ⊊, =, ⊇, ⊋ nebo „?“. Své odpovědi zdůvodněte.

(1)	$\mathrm{SPACE}(n)$	$\mathrm{TIME}(2^n)$
(2)	$\mathrm{TIME}(2^n)$	$\mathrm{TIME}(2^{n\log n})$
(3)	$\mathrm{TIME}(2^{n\log n})$	$\mathrm{NSPACE}((\log n)^3)$
(4)	$\mathrm{NSPACE}((\log n)^3)$	$\mathrm{NTIME}(2^n)$
(5)	$\mathrm{NTIME}(2^n)$	$\mathrm{SPACE}(n)$
(6)	$\mathrm{SPACE}(n)$	$\mathrm{TIME}(2^{n\log n})$
(7)	$\mathrm{TIME}(2^n)$	$\mathrm{NSPACE}((\log n)^3)$
(8)	$\mathrm{TIME}(2^{n\log n})$	$\mathrm{NTIME}(2^n)$
(9)	$\mathrm{NSPACE}((\log n)^3)$	$\mathrm{SPACE}(n)$
(10)	$\mathrm{NTIME}(2^n)$	$\mathrm{TIME}(2^n)$

Řešení:

(1) ?

(2) $\mathrm{TIME}(2^n) \overset{6}{\subsetneq} \mathrm{TIME}(2^{n\log n})$

(3) $\mathrm{NSPACE}((\log n)^3) \overset{3}{\subseteq} \mathrm{TIME}(n) \overset{6}{\subsetneq} \mathrm{TIME}(2^{n\log n})$

(4) $\mathrm{NSPACE}((\log n)^3) \overset{4}{\subseteq} \mathrm{NSPACE}(\log^6 n) \overset{3}{\subseteq} \mathrm{TIME}(2^{\log^7 n}) \overset{6}{\subsetneq} \mathrm{TIME}(2^n) \overset{1(ii)}{\subseteq} \mathrm{NTIME}(2^n)$

(5) ?

(6) $\mathrm{SPACE}(n) \overset{5}{\subsetneq} \mathrm{SPACE}(n\sqrt{\log n}) \overset{1(iii)}{\subseteq} \mathrm{NSPACE}(n\sqrt{\log n}) \overset{3}{\subseteq} \mathrm{TIME}(2^{n\log n})$

(7) $\mathrm{NSPACE}((\log n)^3) \overset{4}{\subseteq} \mathrm{NSPACE}(\log^6 n) \overset{3}{\subseteq} \mathrm{TIME}(2^{\log^7 n}) \overset{6}{\subsetneq} \mathrm{TIME}(2^n)$

(8) ?

(9) $\mathrm{NSPACE}((\log n)^3) \overset{4}{\subseteq} \mathrm{SPACE}(\log^6 n) \overset{5}{\subsetneq} \mathrm{SPACE}(n)$

(10) $\mathrm{TIME}(2^n) \overset{1(ii)}{\subseteq} \mathrm{NTIME}(2^n)$

3. Ukažte, že třída P je uzavřena na sjednocení, průnik a doplněk.

Řešení: Předpokládejme, že A a B jsou jazyky v P. Uvažme navíc deterministické Turingovy stroje M_A a M_B, které přijímají jazyky A a B v polynomiálním čase.

(a) Deterministický Turingův stroj $M_\cup$, který přijímá $A \cup B$ v polynomiálním čase, pustí pro vstup x postupně výpočty $M_A(x)$ a $M_B(x)$ a přijme, právě když byl jeden z těchto výpočtů přijímající.

(b) Deterministický Turingův stroj $M_\cup$, který přijímá $A \cap B$ v polynomiálním čase, pustí pro vstup x postupně výpočty $M_A(x)$ a $M_B(x)$ a přijme, právě když oba tyto výpočty přijaly.

(c) Deterministický Turingův stroj M', který přijímá jazyk $\overline{A}$ v polynomiálním čase se vstupem x pustí $M(x)$ a zneguje odpověď tohoto výpočtu.

4. Ukažte, že třída NP je uzavřena na sjednocení a průnik.

Řešení: Postupujeme stejně jako v řešení problému 3 jen s tím rozdílem, že všechny uvažované Turingovy stroje jsou nedeterministické.

5. Ukažte, že třída NP je uzavřena na operaci Kleeneho hvězdičky. Tj. je-li $A \in \mathrm{NP}$

$$A^* = \{w = w_1 w_2 \dots w_k \mid k \in \mathbb{N} \wedge (\forall i = 1, \dots, k)[w_i \in A]\}$$

je v NP.

Řešení: Předpokládejme, že M_A je nedeterministický Turingův stroj, který přijímá A v polynomiálním čase. Nedeterministický Turingův stroj M, který přijímá v polynomiálním čase jazyk A^* se vstupem w uhodne nedeterministicky rozdělení w na podřetězce $w_1, \dots, w_k$ (pro nějaké číslo k). Poté M pustí postupně výpočty $M_A(w_1), \dots, M_A(w_k)$. Aby $M(w)$ přijal, musí být všechny tyto výpočty přijímající, v opačném případě je tento výpočet odmítající.

6. Ukažte, že třída P je uzavřena na operaci Kleeneho hvězdičky. Tj. je-li $A \in \mathrm{P}$

$$A^* = \{w = w_1 w_2 \dots w_k \mid k \in \mathbb{N} \wedge (\forall i = 1, \dots, k)[w_i \in A]\}$$

je v P.

Řešení: Předpokládejme, že řetězec w se skládá z n znaků, které označíme $w[1], \dots, w[n]$. Pokud $n = 0$, pak $w \in A^*$, můžeme tedy předpokládat, že $n > 0$ a řetězec w je neprázdný. Pomocí $w[i : l]$ označíme podřetězec w, který začíná na indexu i a má délku l, tedy $w[i : l] = w[i] \cdot \dots \cdot w[i + l - 1]$. Uvažme tabulku T o rozměrech $n \times n$, v níž jsou hodnoty 0 nebo 1. Popíšeme dynamický algoritmus, který vyplní tabulku T tak, aby platilo, že pro indexy $i \in \{1, \dots, n\}$ a $l \in \{1, \dots, n\}$ platilo, že $T[i][l] = 1$, právě když $w[i : l] \in A^*$. Ve chvíli, kdy bude tato tabulka správně vyplněná, stačí se podívat na hodnotu $T[1][n]$. Popíšeme nyní dynamický algoritmus, který tabulku T vyplní.

Pro $l = 1$ má platit $T[i][1] = 1$, právě když $w[i] \in A^*$, což je totéž jako $w[i] \in A$, tento test lze provést v polynomiálním čase. Pro $l > 1$ předpokládejme, že řádky před l-tým jsou již vyplněny správně. Pokud $w[i : l] \in A$, můžeme položit $T[i][l] = 1$, toto je možné otestovat v polynomiálním čase. Jinak hledáme hodnotu $m \in \{1, \dots, l - 1\}$, pro kterou by platilo, že $w[i : m] \in A^*$ (tedy $T[i][m] = 1$) a $w[i + m : l - m] \in A^*$ (tedy $T[i + m][l - m] = 1$). Algoritmus 1 sleduje právě popsanou myšlenku.

```
Input: Řetězec w = w[1] ... w[n]
Output: true pokud w ∈ A*, false jinak
Inicializuj tabulku T o rozměrech n × n;
for l ← 1 to n do
    for i ← 1 to n − l + 1 do
        T[i][l] ← 0;
        if w[i, l] ∈ A then
            T[i][l] ← 1;
            continue;
        for m ← 1 to l − 1 do          // Pro l = 1 se neprovede žádná smyčka
            if T[i][m] = 1 and T[i + m][l − m] = 1 then
                T[i][l] ← 1;
                break;
if T[1][n] = 1 then
    return true
else
    return false
```

Algoritmus 1: Algoritmus rozhodující, zda $w \in A^*$.

Počet dotazů rozhodovací proceduře pro jazyk A je polynomiální, a tedy i složitost algoritmu 1 je polynomiální.

3 Domácí úkoly

7. (30 bodů) Pro následující dvojice tříd rozhodněte, zda mezi nimi platí nějaká inkluze, pokud ano, tak zda je ostrá nebo ne. Vyznačte také dvojice, u nichž není možno (z našich znalostí) ukázat, zda mezi nimi je nějaký vztah. Přesněji, mezi danou dvojici tříd doplňte symbol $\subseteq$, $\subsetneq$, $=$, $\supseteq$, $\supsetneq$ nebo „?“. Své odpovědi zdůvodněte.

(1)	$\mathrm{SPACE}(n)$	$\mathrm{TIME}(2^{\log^3 n})$
(2)	$\mathrm{TIME}(2^{\log^3 n})$	$\mathrm{NSPACE}(\log^2 n)$
(3)	$\mathrm{NSPACE}(\log^2 n)$	$\mathrm{NTIME}(2^{\log^3 n})$
(4)	$\mathrm{NTIME}(2^{\log^3 n})$	$\mathrm{NTIME}(2^{n \log n})$
(5)	$\mathrm{NTIME}(2^{n \log n})$	$\mathrm{SPACE}(n)$
(6)	$\mathrm{SPACE}(n)$	$\mathrm{NSPACE}(\log^2 n)$
(7)	$\mathrm{TIME}(2^{\log^3 n})$	$\mathrm{NTIME}(2^{\log^3 n})$
(8)	$\mathrm{NSPACE}(\log^2 n)$	$\mathrm{NTIME}(2^{n \log n})$
(9)	$\mathrm{NTIME}(2^{\log^3 n})$	$\mathrm{SPACE}(n)$
(10)	$\mathrm{NTIME}(2^{n \log n})$	$\mathrm{TIME}(2^{\log^3 n})$