Predmet: Linearni algebra 2
Ukol: 2.
Verze: 1.
Autor: David Napravnik
Prezdivka: DN

1. zadani

Prevedte nasledujici matice do tvaru SDS^{-1}, kde D je diagonalni a S je regularni.

reseni A

$$\begin{bmatrix} 0-\lambda & -3 & -3 \\ -4 & -7-\lambda & -7 \\ 6 & 12 & 12-\lambda \end{bmatrix}$$

Vlastni cisla:
$p_A(\lambda) = +(0-\lambda)*(-7-\lambda)*(12-\lambda)+(-3)*(-7)*(6)+(-3)*(-4)*(12)-(-3)*(-7-\lambda)*(6)-(-7)*(12)*(0-\lambda)-(-3)*(-4)*(12-\lambda) = -\lambda^3+5\lambda^2-6\lambda$
$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = 3$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vlastni vektory:
pro λ_1: $\begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -4 & -7 & -7 \\ 6 & 12 & 12 \end{bmatrix} => [0,-1,1]$
pro λ_2: $\begin{bmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -4 & -9 & -7 \\ 6 & 12 & 10 \end{bmatrix} => [-3,-1,3]$
pro λ_3: $\begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -4 & -10 & -7 \\ 6 & 12 & 9 \end{bmatrix} => [1,1,-2]$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -4 & -7 & -7 \\ 6 & 12 & 12 \end{bmatrix}}}$$

reseni B

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Vlastni cisla: $p_A(\lambda) = (-1-\lambda)^2+1 = \lambda^2+2\lambda+2$
$\lambda_1 = -1+i$
$\lambda_2 = -1-i$
Vlastni vektory:
pro λ_1: $\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} => [-i,1]$
pro λ_2: $\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} => [i,1]$

2. zadani

Rozhodnete o platnosti nasledujicich implikacich

reseni

1.) Plati
Mejme λ_{Ax} jsou vlastni cisla matice A,
a λ_{Bx} jsou vlastni cisla matice A^2,
pak pro kazde z nich plati: $\lambda_{Bx} = (\lambda_{Ax})^2$

2.) Neplati
Mejme λ_{Ax} jsou vlastni cisla matice A,
a λ_{Bx} jsou vlastni cisla matice A^2,
pak pro kazde z nich musi platit: $\lambda_{Bx} = (\lambda_{Ax})^2$, ale
to neplati pro $\lambda_{Ax} < 0$

3. zadani

Bud $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizovatelna. Ukazte $A \sim A^T$

reseni

Jelikoz $(A - \lambda I)^T = (A^T - \lambda I)$
Pak plati: $\det(A^T - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A - \lambda I)$
Tudiz matice A a matice A^T maji stejne vlastni cisla a tudiz jsou podobne

4. zadani

Budte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ podobne. Ukazte, ze maticova soustava $AX - XB = 0$ ma reseni $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$

reseni

$A = SBS^{-1}$ | vzorecek podobnosti
$SBS^{-1}X = XB$ | dokazovana rovnice
$SBS^{-1}XX^{-1} = XBX^{-1}$
$SBS^{-1} = XBX^{-1}$ |
pak vidime ze $X = S$