8.2 definice: skalarni soucin nad $\mathbb{R}$

Bud V vektorovy prostor nad $\mathbb{R}$.
Pak skalarni soucin je zobrazeni $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \to \mathbb{R}$, splnujici $\forall x, y, z \in V, | forall \alpha \in \mathbb{R}$

- $\langle x, y \rangle \geq 0$ a rovnost nastane pouze pro $x = 0$
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

8.3 definice: skalarni soucin nad $\mathbb{C}$

to same jako 8.2 se zmenou:

- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

8.8 definice: Norma indukovana skalarnim soucinem

Norma indukovana skalarnim soucinem je definovano pro $x \in V$ jako $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

8.9 definice: Kolmost

vektory $x, y \in V$ jsou kolme pokud $\langle x, y \rangle = 0$

8.11 veta: Pythagorova

Pokud $x, y \in V$ jsou kolme, tak $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$

dukaz

$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle =$
dle definice 8.2 item 2.
$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle$
dle predpokladu kolmosti $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle = 0$
$\langle x, x \rangle = ||x||^2$ a $\langle y, y \rangle = ||y||^2$

8.13 veta: Cauchyho-Schwarzova nerovnost

Pro kazde $x, y \in V$ plati $|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$

8.15 definice: Norma

Bud V vektorovy prostor nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$
Pak norma je zobrazeni $||/cdot|| : V \to \mathbb{R}$, splnujici $\forall x, y \in V a \forall \alpha \in \mathbb{R}$

- $||x|| \geq 0$ a rovnost nastane pouze pro $x = 0$
- $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Priklady norem v $x \in \mathbb{R}^n$:

- $p \geq 1$ p-norma
- $p = 2$ eukleidovska
- $p = 1$ soucotva
- $p = \infty$ maximova (cebysevova)

8.20 pozorovani: rovnobeznikove pravidlo

$||x-y||^2 + ||x+y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$

8.21 definice: metrika

$\forall x, y, z \in M$:

- $d(x, y) \geq 0$ a $=$ nastane pouze pro $x = y$
- $d(x, y) = d(x, y)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

8.27 veta: Fourierovy koeficienty

Gramova–Schmidtova ortogonalizace

8.38 veta: Ortogonalni doplnek