

Predmet: Kombinatorika a grafy 1

Ukol: 6.

Verze: 1.

Autor: David Napravnik

Prvni ukol

Generujici matice: $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Parametry jsou $[4, 7]$, dokaze opravit az 1 chybný bit.

Kontrolni matice: $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Odesilame zpravu $5 \sim 0b0101$

Enkodovana zprava $= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Odesilame zpravu $9 \sim 0b1001$

Enkodovana zprava $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Prijimame zpravu 1100100

Kontrola chyb: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1, 1, 1]$

jelikoz se chyba nasla na 4 pozici (4. slupek kontrolni matice), tak puvodni zprava znela: $[1, 1, 0, 1, 1, 0, 0]$, coz nam bez kontrolnich bitu dava cislo $0b1101 \sim 13$

Prijimame zpravu 1111111

Kontrola chyb: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [0, 0, 0]$

jelikoz chyba nenasla (nulovy vektor), tak puvodni zprava znela: $[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$, coz nam bez kontrolnich bitu dava cislo $0b1111 \sim 15$

Prijimame zpravu 0110010

$$\text{Kontrola chyb: } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1, 0, 0]$$

Jelikož se chyba našla na 5. pozici (5. sloupec kontrolní matice), tak původní zpráva zněla: $[0, 1, 1, 0, 1, 1, 0]$, což nám bez kontrolních bitů dává číslo $0b0110 \sim 6$

Druhy ukol

Vezmeme jeden vrchol v ten musí mít 16 hran k ostatním bodům.

Jelikož máme 3 barvy a 16 hran, tak podle holubníkového lematu, musí jedna barva být zastoupena minimálně 6krát. (řekneme třeba modrá)

Vezmeme těchto 6 hran stejné barvy a jejich vrcholy. Ty tvoří K_6 .

Rozebereme tři případy co se děje uvnitř tohoto K_6 grafu:

graf nemá zadnou modrou hranu

Tak je to kompletní graf na 6ti vrcholech obarvený 2mi barvami a tudíž má dva jednobarevné trojúhelníky.

graf má alespoň jednu modrou hranu

Tudíž existuje modrá hrana mezi vrcholy t a u (hranu nazveme tu), dále máme dvě modré hrany vt a vu neboť každý vrchol z K_6 je napojen na v . Tudíž dostáváme trojúhelník tuv modré barvy.

Třetí ukol

$$R(3,4) = 9$$

Mejme graf K_9 obarvený modře a červeně.

Chceme dokázat, že existuje modrý čtverec nebo červený trojúhelník.

Vezmeme vrchol x , ten může mít maximálně 5 modrých hran, protože kdyby měl více než 5 modrých hran, tak by tvořil modrý čtverec, nebo červený trojúhelník. A může mít maximálně 3 červené hrany, protože kdyby jich měl víc, tak zase vznikne červený trojúhelník nebo modrý čtverec.

Jelikož z vrcholu x vychází 8 hran, maximálně 5 je modrých a maximálně 3 červené, tak má právě 5 modrých a právě 3 červené hrany.

Každý vrchol z K_9 tak musí mít právě 3 červené a 5 modrých hran. To ale není možné, protože červených hran by bylo $3 * 9/2 = 13.5$, poloviční hrana nemůže existovat, proto musíme číslo zaokrouhlit, pokud číslo zaokrouhlíme dolů, bude v grafu vrchol který má 6 modrých hran, pokud nahoru, tak bude existovat vrchol s 4mi červenými vrcholy. Obe tyto možnosti implikují vznik červeného trojúhelníku nebo modrého čtverce.

Tudíž dokázáno.