

NTIN090 — Základy složitosti a vyčísitelnosti

1. cvičení

Petr Kučera

6. října 2022

Pomocí w^R označujeme zrcadlové otočení řetězce w .

1. Uvažme následující dva jazyky

$$S_1 = \{\langle M \rangle^R \mid \langle M \rangle^R \notin L(M)\}$$

$$S_2 = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle^R \notin L(M)\}$$

- (a) Ukažte, že S_1 není částečně rozhodnutelný (je možné postupovat podobně jako u jazyka DIAG).
- (b) Ukažte, že S_2 není částečně rozhodnutelný (můžete využít toho, že S_1 není částečně rozhodnutelný).
- (c) Ukažte, že $\overline{S_1}$ i $\overline{S_2}$ jsou částečně rozhodnutelné jazyky, které nejsou rozhodnutelné.

2. Uvažme následující problém

Problém 1: Použití stavu se vstupem (PSx)

Instance: Kód Turingova stroje $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, stav $q \in Q$ a vstup x .

Otázka: Použije M při výpočtu nad x stav q ?

- (a) Zformulujte tento problém jako jazyk PSx
- (b) Ukažte, že jazyk PSx je částečně rozhodnutelný
- (c) Ukažte, že jazyk PSx není rozhodnutelný. *Nápověda: šel by pomocí rozhodovací procedury pro PSx rozhodnout univerzální jazyk?*

3. Uvažme následující variantu problému z předchozí otázky

Problém 2: Použití stavu (PS)

Instance: Kód Turingova stroje $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a stav q .

Otázka: Existuje vstup x takový, že M při výpočtu nad x použije stav q ?

- (a) Zformulujte tento problém jako jazyk PS
 - (b) Ukažte, že jazyk PS je částečně rozhodnutelný
 - (*c) Ukažte, že jazyk PS není rozhodnutelný
4. Dokažte následující ekvivalenci: Jazyk A je rozhodnutelný, právě když existují rozhodnutelné jazyky B_1 a B_2 takové, že

$$A = \{x \in \Sigma^* \mid (\exists y \in \Sigma^*)[\langle x, y \rangle \in B_1]\} \quad \text{a} \quad (3)$$

$$A = \{x \in \Sigma^* \mid (\forall y \in \Sigma^*)[\langle x, y \rangle \in B_2]\} \quad (4)$$

5. Ukažte, že následující jazyky jsou částečně rozhodnutelné.

- (a) $S_1 = \{\langle M \rangle \mid (\exists w \in L(M))[w = w^R]\}$
 (b) $S_2 = \{\langle M_1, M_2, x \rangle \mid x \in L(M_1) \cap L(M_2)\}$
 (c) $S_3 = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) \cap L(M_2) \neq \emptyset\}$
 (d) $S_4 = \{\langle M, k \rangle \mid |L(M)| \geq k\}$
6. Ukažte, že funkce $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ je algoritmicky vyčíslitelná, právě když její graf $F = \{\langle x, f(x) \rangle \mid f(x) \downarrow\}$ je částečně rozhodnutelný jazyk.

Domácí úkoly

7. (20 bodů) Následující dva problémy zformulujte jako jazyky a ukažte, že jsou částečně rozhodnutelné.
- (a) (10 bodů)

Problém 3: PRÁZDNÁ PÁSKA SE VSTUPEM (PP)

Instance: Kód Turingova stroje $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a vstup x .

Otázka: Ukončí M se vstupem x výpočet a bude na konci výpočtu páska M prázdná?

- (b) (10 bodů)

Problém 4: PRÁZDNÁ PÁSKA (PPE)

Instance: Kód Turingova stroje $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Otázka: Existuje takový řetězec x , že M se vstupem x ukončí výpočet jeho páska bude po ukončení výpočtu prázdná?

8. (10 bodů) Ukažte, že jazyk PP není rozhodnutelný (popište, jak by bylo možné rozhodovací proceduru pro PP použít pro rozhodnutí univerzálního jazyka L_u).