Kapitola 10

Vlastní čísla

Vlastní čísla (dříve též nazývaná „charakteristická čísla“), podobně jako determinant, představují určitou charakteristiku matice. Jejich význam je dalekosáhlý a stále roste.

Definice 10.1 (Vlastní čísla a vlastní vektory)**.** Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je *vlastní číslo* matice A a $x \in \mathbb{C}^n$ jemu příslušný *vlastní vektor*, pokud $Ax = \lambda x$, $x \neq o$.

Poznamenejme, že $x \neq o$ je nezbytná podmínka, protože pro $x = o$ by rovnost byla triviálně splněna pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Na druhou stranu, $\lambda = 0$ klidně může nastat.

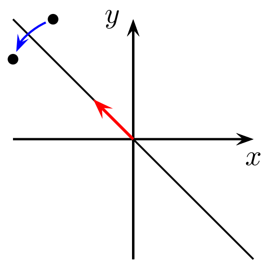
Povšimněme si dále, že vlastní vektor při daném vlastním čísle není určen jednoznačně – každý jeho nenulový násobek je také vlastním vektorem. Někdy se proto vlastní vektor normuje tak, aby $\|x\| = 1$.

Přirozeně, vlastní čísla a vektory lze definovat stejně nad jakýmkoli jiným tělesem. My zůstaneme u $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$. Jak uvidíme později, komplexním číslům se nevyhneme i když matice A je reálná.

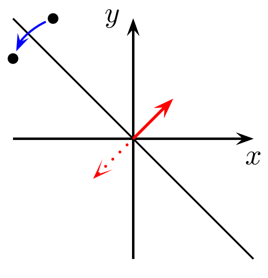
Vlastní čísla se dají zavést i obecněji. Buď V vektorový prostor a $f\colon V \to V$ lineární zobrazení. Pak λ je vlastní číslo a $x \neq o$ příslušný vlastní vektor, pokud platí $f(x) = \lambda x$. My se však vesměs budeme zabývat vlastními čísly matic, protože vzhledem k maticové reprezentaci lineárních zobrazení můžeme úlohu hledání vlastních čísel a vektorů lineárních zobrazení redukovat na matice.

Příklad 10.2 (Geometrická interpretace vlastních čísel a vektorů)**.** Vlastní vektor reprezentuje invariantní směr při zobrazení $x \mapsto Ax$, tedy směr, který se zobrazí opět na ten samý směr. Jinými slovy, je-li v vlastní vektor, pak přímka $\operatorname{span}\{v\}$ se zobrazí do sebe sama. Vlastní číslo pak představuje škálování v tomto invariantním směru.

- Překlopení dle přímky $y = -x$, matice zobrazení $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

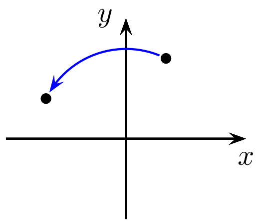


vlastní číslo 1, vlastní vektor $(-1, 1)^T$,



vlastní číslo -1, vlastní vektor $(1, 1)^T$.

- Rotace o úhel $90°$, matice zobrazení $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:



žádná reálná vlastní čísla.

□

Věta 10.3 (Charakterizace vlastních čísel a vektorů)**.** *Buď* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*. Pak*

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ *je vlastním číslem* A *právě tehdy, když* $\det(A - \lambda I_n) = 0$*,*

(2) $x \in \mathbb{C}^n$ *je vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu* $\lambda \in \mathbb{C}$ *právě tehdy, když* $o \neq x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$*.*

Důkaz.

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem A právě tehdy, když $Ax = \lambda I_n x$, $x \neq o$, neboli $(A - \lambda I_n)x = o$, $x \neq o$, což je ekvivalentní singularitě matice $A - \lambda I_n$, a to zase podmínce $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

(2) Analogicky, $x \in \mathbb{C}^n$ je vlastním vektorem k vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$ právě tehdy, když $(A - \lambda I_n)x = o$, $x \neq o$, tedy x je v jádru matice $A - \lambda I_n$. □

Důsledkem věty je, že k danému vlastnímu číslu λ přísluší $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = n - \operatorname{rank}(A - \lambda I_n)$ lineárně nezávislých vlastních vektorů.

10.1 Charakteristický polynom

První část věty 10.3 říká, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice A právě tehdy, když matice $A - \lambda I_n$ je singulární, neboli $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Pokud se na λ díváme jako na komplexní proměnnou, tak najít vlastní číslo je totéž jako najít řešení rovnice $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Rozvojem determinantu snadno nahlédneme, že levá strana je polynom stupně n v proměnné λ, což nás vede k tomu zavést následující pojem.

Definice 10.4 (Charakteristický polynom)**.** *Charakteristický polynom* matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ vzhledem k proměnné λ je $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

Z definice determinantu je patrné, že charakteristický polynom se dá vyjádřit ve tvaru

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0.$$

Tedy je to skutečně polynom a má stupeň n. Snadno nahlédneme, že $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn})$ a po dosazení $\lambda = 0$ získáme $a_0 = \det(A)$.

Podle základní věty algebry (věta 1.1) má tento polynom n komplexních kořenů (včetně násobností), označme je $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pak

$$p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n).$$

Podle věty 10.3(1) kořeny $p_A(\lambda)$ odpovídají vlastním číslům matice A. Vlastních čísel je tedy n, započítáme-li i jejich násobnosti. Tímto jsme odvodili následující:[1)]

Věta 10.5. *Vlastní čísla matice* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *jsou právě kořeny jejího charakteristického polynomu* $p_A(\lambda)$*, a je jich* n *včetně násobností.*

Příklad 10.6. Mějme matici $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ z příkladu 10.2. Pak

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Kořeny polynomu, a tedy vlastními čísly matice A, jsou $\pm i$. Vlastní vektor příslušný i je $(1, -i)^T$ a vlastní vektor příslušný $-i$ je $(1, i)^T$. □

[1)] Alternativní odvození existence a počtu vlastních čísel bez použití determinantu je k nalezení například v článku Axler [1995].

Definice 10.7 (Algebraická a geometrická násobnost vlastního čísla)**.** Buď $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Algebraická násobnost* λ je rovna násobnosti λ jakožto kořene $p_A(\lambda)$. *Geometrická násobnost* λ je rovna $n - \operatorname{rank}(A - \lambda I_n)$, tj. počtu lineárně nezávislých vlastních vektorů, které odpovídají λ.

Algebraická násobnost je vždy větší nebo rovna geometrické násobnosti, což vyplyne v sekci 10.4. Nadále budeme pojem násobnost používat pro algebraickou násobnost.

Definice 10.8 (Spektrum a spektrální poloměr)**.** Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pak *spektrum* matice A je množina jejích vlastních čísel $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ a *spektrální poloměr* je $\rho(A) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|$.

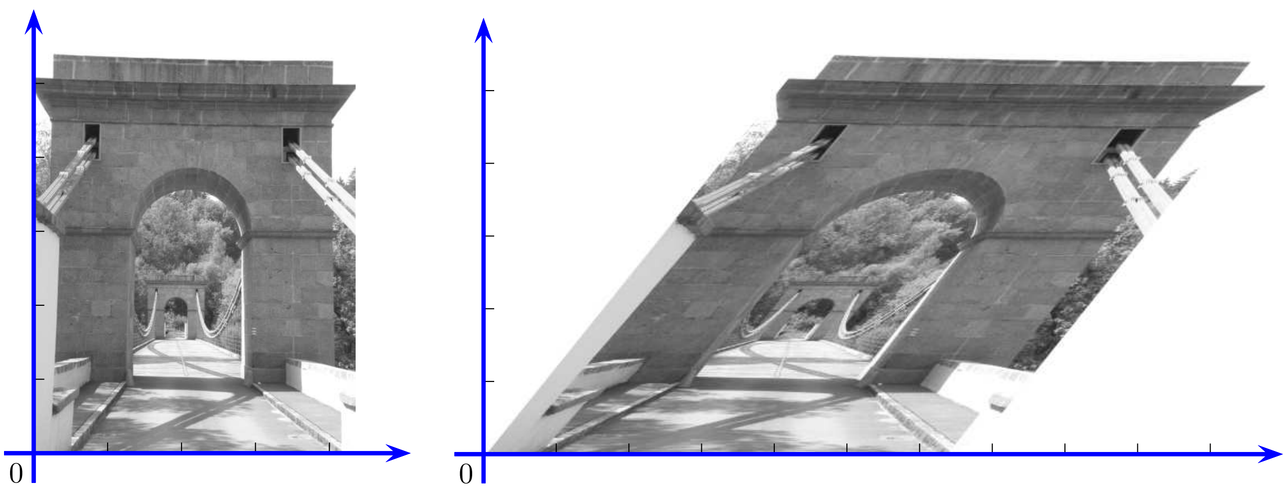
Počítat vlastní čísla jako kořeny charakteristického polynomu není příliš efektivní. Navíc, jak víme ze sekce 1.5, pro kořeny polynomu neexistuje žádný vzoreček ani konečný postup a počítají se iterativními metodami. Totéž platí i o vlastních číslech (uvidíme ve větě 10.16). Zde nepomůže ani jindy tak oblíbená a všestranná Gaussova eliminace. Nicméně pro některé speciální matice můžeme vlastní čísla určit snadno.

Příklad 10.9 (Vlastní čísla trojúhelníkové matice)**.**

- Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je trojúhelníková matice. Pak její vlastní čísla jsou prvky na diagonále, neboť $\det(A - \lambda I_n) = (a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$.
- Speciálně, I_n má vlastní číslo 1, které je n-násobné. Množina příslušných vlastních vektorů je $\mathbb{R}^n \setminus \{o\}$.
- Speciálně, 0_n má vlastní číslo 0, které je n-násobné. Množina příslušných vlastních vektorů je $\mathbb{R}^n \setminus \{o\}$.
- Speciálně, matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní číslo 1, které je dvojnásobné (algebraicky). Odpovídající vlastní vektor je až na násobek pouze $(1, 0)^T$, proto je geometrická násobnost vlastního čísla 1 pouze jedna.

$\square$

Příklad 10.10. Mějme matici $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.75 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Příslušné lineární zobrazení $x \mapsto Ax$ geometricky představuje skosení a protáhnutí v ose x_1 o 50%. Tuto transformaci ilustruje obrázek Stádleckého mostu dole



původní obrázek obrázek po transformaci

Vlastní čísla matice A jsou 1.5 a 1, a jim příslušející vlastní vektory jsou $(1, 0)^T$ a $(-1.5, 1)^T$. První vlastní číslo a vektor říkají, že se obrázek protáhne o 50% ve směru osy x_1. Druhé vlastní číslo a vektor říkají, že se obrázek ve směru vektoru $(-1.5, 1)^T$ nedeformuje. Tím pádem se obrázek sice neprotahuje ve směru osy x_2, ale dochází ke skosení. $\square$

Pro následující připomeňme, že $\operatorname{trace}(A)$ značí stopu matice A, čili součet diagonálních prvků A.

Tvrzení 10.11 (Součin a součet vlastních čísel)**.** *Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pak*

(1) $\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$,

(2) $\operatorname{trace}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Důkaz.

(1) Víme, že $\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n)$. Dosazením $\lambda = 0$ dostáváme $\det(A) = (-1)^n(-\lambda_1)\ldots(-\lambda_n) = \lambda_1 \ldots \lambda_n$.

(2) Porovnejme koeficienty u λ^{n-1} různých vyjádření charakteristického polynomu. V rozvoji $\det(A - \lambda I_n)$ dostáváme, že koeficient vznikne pouze ze součinu $(a_{11} - \lambda)\ldots(a_{nn} - \lambda)$, a má hodnotu $(-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn})$. Koeficient u λ^{n-1} v rozvoji $(-1)^n(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n)$ je očividně $(-1)^n(-\lambda_1 - \ldots - \lambda_n)$. Porovnáním tedy $(-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn}) = (-1)^n(-\lambda_1 - \ldots - \lambda_n)$. □

Poznamenejme, že porovnáním koeficientů u jiných členů charakteristického polynomu dostaneme další vztahy mezi prvky matice A a vlastními čísly, ale již trochu komplikovanější.

Tvrzení 10.12 (Vlastnosti vlastních čísel)**.** *Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$. Pak:*

(1) A je regulární právě tehdy, když 0 není její vlastní číslo,

(2) je-li A regulární, pak A^{-1} má vlastní čísla $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(3) A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(4) αA má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(5) $A + \alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \ldots, \lambda_n + \alpha$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,

(6) A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.

Důkaz. Dokážeme první dvě tvrzení, ostatní necháme čtenáři na rozmyšlení.

(1) A má vlastní číslo 0 právě tehdy, když $0 = \det(A - 0I_n) = \det(A)$, neboli když A je singulární.

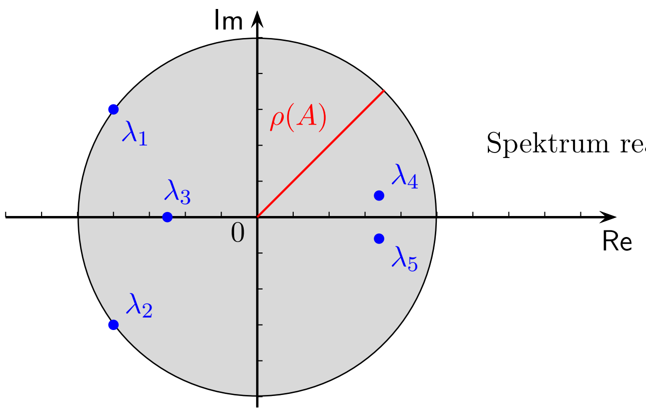
(2) Pro každé $i = 1, \ldots, n$ je $Ax_i = \lambda_i x_i$. Přenásobením A^{-1} dostaneme $x_i = \lambda_i A^{-1} x_i$ a vydělením $\lambda_i \neq 0$ pak $A^{-1}x_i = \lambda_i^{-1} x_i$. □

V následující větě je důležité, že matice A je reálná, pro komplexní už tvrzení neplatí.

Tvrzení 10.13. *Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak i komplexně sdružené $\overline{\lambda}$ je vlastním číslem A.*

Důkaz. Víme, že λ je kořenem $p_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$. Komplexním sdružením obou stran rovnosti máme $(-1)^n\overline{\lambda}^n + a_{n-1}\overline{\lambda}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{\lambda} + a_0 = 0$, tedy i $\overline{\lambda}$ je kořenem $p_A(\lambda)$. □

Příklad 10.14. Spektrum reálné matice je tedy množina symetrická podle reálné osy. Komplexní matice můžou mít za spektrum jakýchkoli n komplexních čísel.



Spektrum reálné matice A

□

Nyní ukážeme, že výpočet kořenů polynomu lze převést na úlohu hledání vlastních čísel určité matice.

Definice 10.15 (Matice společnice[2])**.** Buď $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Pak *matice společnice* polynomu $p(x)$ je čtvercová matice řádu n definovaná

$$C(p) \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Věta 10.16 (O matici společnici)**.** *Pro charakteristický polynom matice $C(p)$ platí $p_{C(p)}(\lambda) = (-1)^n p(\lambda)$, tedy vlastní čísla matice $C(p)$ odpovídají kořenům polynomu $p(\lambda)$.*

Důkaz. Upravme

$$p_{C(p)}(\lambda) = \det(C(p) - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Přičtením λ-násobku posledního řádku k předposlednímu, pak λ-násobku předposledního řádku k předpředposlednímu, atd. dostaneme

$$p_{C(p)}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -p(\lambda) \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} - a_{n-1}\lambda - \lambda^2 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Laplaceovým rozvojem podle prvního řádku pak $p_{C(p)}(\lambda) = (-1)^{n+1}(-p(\lambda)) \det(I_{n-1}) = (-1)^n p(\lambda)$. □

Věta má mj. za důsledek, že úloha hledání kořenů reálných polynomů a vlastních čísel matic jsou na sebe navzájem převoditelné: Věta 10.5 redukuje hledání vlastních čísel matice na hledání kořenů polynomu, a věta 10.16 to dělá naopak. S ohledem na poznámku 1.2 to znamená, že vlastní čísla obecně můžeme počítat pouze numericky, žádný konečný postup neexistuje (praktické numerické metody jsou ale efektivní). Zatímco vlastní čísla se přes kořeny charakteristického polynomu v praxi nepočítají, opačný postup použitelný je (i když se využívají spíš specializované metody). Zajímavostí je, že např. Matlab počítá charakteristický polynom $p_A(\lambda)$ matice A tak, že najde vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a pak roznásobí dvojčleny ve výrazu $p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n)$.

10.2 Cayleyho–Hamiltonova věta

Příklad 10.17. Abychom lépe porozuměli následující větě, uvádíme příklad polynomiální matice a maticového polynomu

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - \lambda & 2\lambda - 3 \\ 7 & 5\lambda^2 - 4 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Jsou to dva zápisy stejné matice s parametrem λ, a můžeme jednoduše převést jeden zápis na druhý. V různých situacích bývá užitečný jeden či druhý tvar. □

[2] V angličtině *companion matrix.* V češtině se používají různé termíny, např. doprovodná matice polynomu, matice přidružená polynomu atd. Pojem *matice společnice* začal používat nezávisle autor a někteří pracovníci jiných škol.

Následující větu formulujeme pro komplexní matice, ale její platnost je širší – platí nad libovolným tělesem a dokonce ještě obecněji nad tzv. komutativními okruhy [Horn and Johnson, 1985].

Věta 10.18 (Cayleyho–Hamiltonova[3])**.** *Buď* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *a* $p_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$. *Pak*

$$(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0.$$

Důkaz. Víme, že pro adjungované matice platí $(A-\lambda I_n)\operatorname{adj}(A-\lambda I_n) = \det(A-\lambda I_n)I_n$. Každý prvek $\operatorname{adj}(A-\lambda I_n)$ je polynom stupně nanejvýš $n-1$ proměnné λ, takže se dá vyjádřit ve tvaru $\operatorname{adj}(A-\lambda I_n) = \lambda^{n-1}B_{n-1} + \ldots + \lambda B_1 + B_0$ pro určité $B_{n-1},\ldots,B_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dosazením máme

$$\begin{aligned}(A-\lambda I_n)(\lambda^{n-1}B_{n-1} + \ldots + \lambda B_1 + B_0) &= \det(A-\lambda I_n)I_n = \\ &= ((-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)I_n.\end{aligned}$$

Roznásobením

$$\begin{aligned}-B_{n-1}\lambda^n + (AB_{n-1} - B_{n-2})\lambda^{n-1} + \ldots + (AB_1 - B_0)\lambda + AB_0 &= \\ = (-1)^n\lambda^n I_n + a_{n-1}\lambda^{n-1}I_n + \ldots + a_1\lambda I_n + a_0 I_n.\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů

$$\begin{aligned}-B_{n-1} &= (-1)^n I_n,\\ AB_j - B_{j-1} &= a_j I_n, \quad j = 1,\ldots,n-1,\\ AB_0 &= a_0 I_n.\end{aligned}$$

Vynásobme první rovnici A^n, další A^j a poslední $A^0 = I_n$. Sečtením pak získáme

$$\begin{aligned}&-A^nB_{n-1} + (A^nB_{n-1} - A^{n-1}B_{n-2}) + \ldots + (A^2B_1 - AB_0) + AB_0 = \\ &= 0 = (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n\end{aligned}$$ □

Zkráceně můžeme tvrzení Cayleyho–Hamiltonovy věty vyjádřit jako $p_A(A) = 0$, tj. matice je sama kořenem svého charakteristického polynomu. Přestože věta může působit jenom jako matematická zajímavost, má netriviální důsledky.

Důsledek 10.19. *Buď* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Pak:*

(1) *Pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *je* $A^k \in \operatorname{span}\{I_n, A, \ldots, A^{n-1}\}$, *tedy* A^k *je lineární kombinací matic* $I_n, A, \ldots, A^{n-1}$.

(2) *je-li* A *regulární, pak* $A^{-1} \in \operatorname{span}\{I_n, A, \ldots, A^{n-1}\}$.

Důkaz.

(1) Stačí uvažovat $k \geq n$. Při dělení polynomu λ^k polynomem $p_A(\lambda)$ se zbytkem tak vlastně polynom λ^k rozložíme $\lambda^k = r(\lambda)\,p_A(\lambda) + s(\lambda)$, kde $r(\lambda)$ je polynom stupně $k-n$ a $s(\lambda) = b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0$ je zbytek. Pak

$$A^k = r(A)\,p_A(A) + s(A) = s(A) = b_{n-1}A^{n-1} + \ldots + b_1 A + b_0 I_n.$$

(2) Víme $p_A(A) = (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0$ a $a_0 \neq 0$ z regularity A. Tedy

$$\begin{aligned}I &= -\frac{(-1)^n}{a_0}A^n - \frac{a_{n-1}}{a_0}A^{n-1} - \ldots - \frac{a_1}{a_0}A = \\ &= A\left(-\frac{(-1)^n}{a_0}A^{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_0}A^{n-2} - \ldots - \frac{a_1}{a_0}I_n\right).\end{aligned}$$

Tudíž vynásobením A^{-1} dostáváme

$$A^{-1} = -\frac{(-1)^n}{a_0}A^{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_0}A^{n-2} - \ldots - \frac{a_1}{a_0}I_n.$$ □

[3] Arthur Cayley objevil tuto identitu r. 1858, William Rowan Hamilton nezávisle na něm r. 1853, oba pouze pro řád 3. Na vyšší řády ji zobecnil až Ferdinand Georg Frobenius r. 1878.

Podle tohoto důsledku lze velkou mocninu A^k matice A spočítat alternativně tak, že najdeme příslušné koeficienty charakteristického polynomu a vyjádříme A^k jako lineární kombinaci $I_n, A, \ldots, A^{n-1}$.

Podobně můžeme vyjádřit i A^{-1}, a tím pádem vyjádřit řešení soustavy $Ax = b$ s regulární maticí jako $A^{-1}b = \frac{1}{a_0}(-(-1)^n A^{n-1}b - \ldots - a_1 b)$. Podobný přístup se občas používá pro řešení velmi rozměrných soustav rovnic (tzv. Krylovova metoda), ale tam se uvažuje trochu jiný polynom nižšího stupně.

10.3 Diagonalizovatelnost

Při řešení soustav lineárních rovnic pomocí Gaussovy–Jordanovy eliminace jsme používali elementární řádkové úpravy. Ty nemění množinu řešení a upraví matici soustavy na tvar, ze kterého snadno vyčteme řešení. Je přirozené hledat analogické, spektrum neměnící, úpravy i na problém počítání vlastních čísel. Elementární řádkové úpravy použít nelze, protože ty mění spektrum. Vhodnou transformací je tzv. *podobnost*, protože ta spektrum nemění. A pokud se nám podaří touto transformací převést matici na diagonální tvar, máme vyhráno – na diagonále jsou hledaná vlastní čísla.

Definice 10.20 (Podobnost)**.** Matice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jsou *podobné*, pokud existuje regulární $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tak, že $A = SBS^{-1}$.

Podobnost jde ekvivalentně definovat vztahem $AS = SB$ pro nějakou regulární matici S. Tímto přepisem můžeme i najít matici S, skrze kterou jsou A, B podobné (více viz Bečvář [2005]).

Příklad 10.21. Matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jsou si podobné skrze matici $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Věta 10.22 (Vlastní čísla podobných matic)**.** *Podobné matice mají stejná vlastní čísla.*

Důkaz. Z podobnosti matic existuje regulární matice S taková, že $A = SBS^{-1}$. Pak

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) = \det(SBS^{-1} - \lambda S I_n S^{-1}) = \det(S(B - \lambda I_n)S^{-1}) = \\ &= \det(S)\det(B - \lambda I_n)\det(S^{-1}) = \det(B - \lambda I_n) = p_B(\lambda). \end{aligned}$$

Obě matice mají stejné charakteristické polynomy, tedy i vlastní čísla. □

Příklad 10.23. Ukažte, že podobnost jako binární relace je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Tedy jedná se o relaci ekvivalenci. □

Uvědomme si, že věta neříká nic o vlastních vektorech, ty se měnit mohou. Co ale zůstává neměnné, je jejich počet.

Věta 10.24. *Nechť matice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jsou podobné a nechť λ je jejich vlastní číslo. Pak počet vlastních vektorů, odpovídajících λ, je stejný u obou matic.*

Důkaz. Buď $A = SBS^{-1}$. Dále víme, že počet (lineárně nezávislých) vlastních vektorů, které odpovídají vlastnímu číslu λ matice A, je roven dimenzi $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$, tedy číslu $n - \mathrm{rank}(A - \lambda I_n)$. Protože hodnost matice se nemění přenásobením regulární maticí, tak dostáváme

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}(A - \lambda I_n) &= \mathrm{rank}(SBS^{-1} - \lambda I_n) = \mathrm{rank}(SBS^{-1} - \lambda SS^{-1}) = \\ &= \mathrm{rank}(S(B - \lambda I_n)S^{-1}) = \mathrm{rank}(B - \lambda I_n). \end{aligned}$$

Tudíž dimenze jádra obou matic $A - \lambda I_n$ a $B - \lambda I_n$ jsou stejné, a tím pádem i počet vlastních vektorů. □

Vlastní čísla se ale podobnostní transformací nemění, tedy jestliže matici A převedeme podobnostní transformací na diagonální či obecněji trojúhelníkovou, tak na diagonále najdeme její vlastní čísla. Speciálně matice, které jdou převést na diagonální tvar, mají obzvláště pěkné vlastnosti.

Definice 10.25 (Diagonalizovatelnost)**.** Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je *diagonalizovatelná*, pokud je podobná nějaké diagonální matici.

Diagonalizovatelná matice A jde tedy vyjádřit ve tvaru $A = S\Lambda S^{-1}$, kde S je regulární a Λ diagonální. Tomuto tvaru se říká *spektrální rozklad*, a to proto, že na diagonále matice Λ je spektrum matice A.

Příklad 10.26. Ne každá matice je diagonalizovatelná, např.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

není. Její vlastní číslo (dvojnásobné) je 0. Pokud by A byla diagonalizovatelná, pak by byla podobná nulové matici, tedy $A = S0S^{-1} = 0$, což je spor. □

Věta 10.27 (Charakterizace diagonalizovatelnosti)**.** *Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je diagonalizovatelná právě tehdy, když má n lineárně nezávislých vlastních vektorů.*

Důkaz. Implikace „⇒“. Je-li A diagonalizovatelná, pak má spektrální rozklad $A = S\Lambda S^{-1}$, kde S je regulární a Λ diagonální. Rovnost přepíšeme $AS = S\Lambda$ a porovnáním j-tých sloupců dostaneme

$$AS_{*j} = (AS)_{*j} = (S\Lambda)_{*j} = S\Lambda_{*j} = S\Lambda_{jj}e_j = \Lambda_{jj}S_{*j},$$

což můžeme názorně zapsat jako

$$AS = A\begin{pmatrix} | & & | \\ S_{*1} & \dots & S_{*n} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ (\Lambda_{11}S_{*1}) & \dots & (\Lambda_{nn}S_{*n}) \\ | & & | \end{pmatrix} = S\Lambda.$$

Tedy Λ_{jj} je vlastní číslo a S_{*j} je příslušný vlastní vektor. Sloupce matice S jsou lineárně nezávislé díky její regularitě.

Implikace „⇐“. Analogicky opačným směrem. Nechť A má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a jim přísluší lineárně nezávislé vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$. Sestavme regulární matici $S \coloneqq (x_1 \mid \cdots \mid x_n)$ a diagonální $\Lambda \coloneqq \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Pak

$$(AS)_{*j} = AS_{*j} = Ax_j = \lambda_j x_j = \Lambda_{jj}S_{*j} = S(\Lambda_{jj}e_j) = S\Lambda_{*j} = (S\Lambda)_{*j}.$$

Tedy $AS = S\Lambda$, z čehož $A = S\Lambda S^{-1}$. □

Důkaz věty byl konstruktivní, tedy dává návod jak diagonalizovat matici ze znalosti vlastních čísel a vlastních vektorů. Podobně i naopak ze znalosti spektrálního rozkladu $A = S\Lambda S^{-1}$ snadno určíme vlastní vektory (jsou to sloupce matice S v pořadí odpovídajícím vlastním číslům na diagonále Λ).

Nediagonalizovatelné matice jsou ty, pro které nastávají určité patologické situace, ale diagonalizovatelné matice mají celou řadu přirozených vlastností. Je-li matice A diagonalizovatelná, pak:

- Algebraická a geometrická násobnost každého vlastního čísla A je stejná.

  (*Důkaz.* Ze spektrálního rozkladu.)
- Hodnost matice A je rovna počtu nenulových vlastních čísel A.

  (*Důkaz.* Ze spektrálního rozkladu $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(S\Lambda S^{-1}) = \operatorname{rank}(\Lambda) =$ počet nenulových vlastních čísel.)

Příklad 10.28. Pro diagonalizovatelné matice dokažte vlastnosti z tvrzení 10.12 pomocí spektrálního rozkladu. □

Poznámka 10.29 (Geometrická interpretace diagonalizace)**.** Jiný pohled na diagonalizaci je geometrický: víme, že vlastní vektor představuje invariantní směr při zobrazení $x \mapsto Ax$. Nyní si představme, že A představuje matici nějakého lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ vzhledem k bázi B. Buď $S = {}_{B'}[id]_B$ matice přechodu od B k jiné bázi B'. Pak $SAS^{-1} = {}_{B'}[id]_B \cdot {}_B[f]_B \cdot {}_B[id]_{B'} = {}_{B'}[f]_{B'}$ je matice zobrazení f vzhledem k nové bázi B'. Nyní diagonalizovatelnost můžeme chápat jako hledání vhodné báze B', aby příslušná matice byla diagonální, a tak jednoduše popisovala chování zobrazení.

Příklad 10.30 (Geometrická interpretace diagonalizace)**.** Buď

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

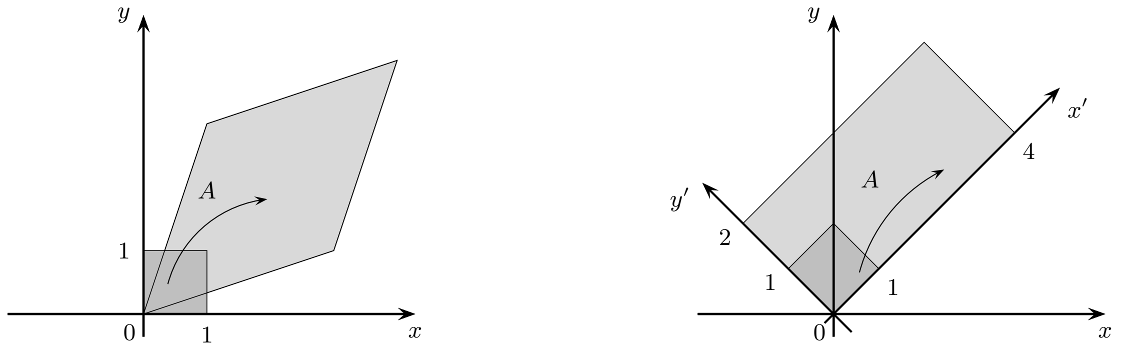
Vlastní čísla a vlastní vektory matice A jsou:

$$\lambda_1 = 4,\ x_1 = (1,1)^T, \quad \lambda_2 = 2,\ x_2 = (-1,1)^T.$$

Diagonalizace má tvar:

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Geometrická interpretace: v souřadném systému vlastních vektorů je matice zobrazení diagonální a zobrazení představuje jen škálování na osách. Na obrázku dole je znázorněný jednotkový čtverec a jeho obraz při zobrazení $x \mapsto Ax$. Nalevo je situace, kdy pracujeme v souřadném systému kanonické báze, a napravo v souřadném systému báze z vlastních vektorů.



□

Nyní ukážeme, že různým vlastním číslům odpovídají lineárně nezávislé vlastní vektory.

Tvrzení 10.31 (Vlastní vektory různých vlastních čísel)**.** *Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou navzájem různá vlastní čísla (ne nutně všechna) matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak odpovídající vlastní vektory $x_1, \dots, x_k$ jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ zřejmé, neboť vlastní vektor je nenulový.

Indukční krok $k \leftarrow k-1$. Uvažme lineární kombinaci

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = o. \tag{10.1}$$

Pak přenásobením maticí A dostaneme

$$A(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 A x_1 + \ldots + \alpha_k A x_k = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k x_k = o. \tag{10.2}$$

Odečtením λ_k-násobku (10.1) od (10.2) dostaneme

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = o.$$

Z indukčního předpokladu jsou $x_1, \dots, x_{k-1}$ lineárně nezávislé, tedy $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$. Dosazením do (10.1) máme $\alpha_k x_k = o$, neboli $\alpha_k = 0$. □

Důsledek 10.32. *Pokud matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ má n navzájem různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelná.*

Nyní předvedeme několik teoretických i praktických aplikací diagonalizace.

Tvrzení 10.33. *Buď $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak matice AB i BA mají stejná vlastní čísla včetně násobností.*

Důkaz. Matice

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

jsou blokově trojúhelníkové, proto mají stejná vlastní čísla jako AB resp. BA, plus navíc n-násobné vlastní číslo 0. Nyní stačí ukázat shodu spekter obou blokových matic. Tyto matice jsou podobné skrze matici $S = \left(\begin{smallmatrix} I & A \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right)$, neboť

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

□

Předchozí věta platí i pro obdélníkové matice $A, B^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ale znění platí pouze pro nenulová vlastní čísla; násobnost nulových vlastních čísel může být (a typicky je) odlišná.

Příklad 10.34 (Mocnina matice)**.** Buď $A = S\Lambda S^{-1}$ spektrální rozklad matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak $A^2 = S\Lambda S^{-1}S\Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}$. Obecněji:

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1} = S\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Můžeme studovat i asymptotické chování. Zjednodušeně:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} A^k &= S\begin{pmatrix} \lim_{k\to\infty}\lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lim_{k\to\infty}\lambda_n^k \end{pmatrix} S^{-1} = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{pokud } \rho(A) < 1, \\ \text{diverguje}, & \text{pokud } \rho(A) > 1, \\ \text{konverguje / diverguje}, & \text{pokud } \rho(A) = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Případ $\rho(A) = 1$ se nedá obecně rozhodnout: Pro $A = I_n$ matice konverguje k I_n, pro $A = -I_n$ matice osciluje mezi I_n a $-I_n$.

Zde je opět užitečné sledovat geometrickou paralelu pro lineární zobrazení $x \mapsto Ax$. Mocnění matice A odpovídá skládání zobrazení se sebou samým. Pokud jsou vlastní čísla v absolutní hodnotě menší než 1 (tj., $\rho(A) < 1$), tak lineární zobrazení kontrahuje vzdálenosti a proto konverguje k nule pro $k \to \infty$. Pokud je alespoň jedno vlastní číslo v absolutní hodnotě větší než 1, pak lineární zobrazení ve směru vlastního vektoru roztahuje vzdálenosti, a proto diverguje pro $k \to \infty$. Mezní případ, kdy $\rho(A) = 1$ je nejzajímavější. Tento případ nastává například pro ortogonální matice nebo matice Markovových řetězců, které zmíníme v příkladu 10.55. □

Příklad 10.35 (Rekurentní vzorečky a Fibonacci)**.** Uvažujme posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ zadanou rekurentním vztahem

$$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2},$$

kde a_1, a_2 jsou dané první hodnoty posloupnosti a p, q konstanty. Ukážeme, jak „rozbít“ rekurzi a vyjádřit explicitně n-tý prvek posloupnosti. Uvedený postup funguje i na složitější rekurze, kdy a_n závisí na více než dvou předchozích členech.

Rekurenci vyjádříme maticově

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Označíme-li

$$x_n := \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pak rekurence má tvar

$$x_n = Ax_{n-1} = A^2x_{n-2} = \ldots = A^{n-2}x_2.$$

Potřebujeme tedy určit vyšší mocninu matice A. K tomu poslouží postup z příkladu 10.34. Diagonalizujeme $A = S\Lambda S^{-1}$, a pak $x_n = S\Lambda^{n-2}S^{-1}x_2$. Nyní jsme hotovi, explicitní vyjádření a_n je skryto v první složce vektoru $x_n = S\Lambda^{n-2}S^{-1}x_2$.

Ukažme si postup konkrétně pro Fibonacciho posloupnost, která je daná rekurencí $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ a prvními členy $a_1 = a_2 = 1$. Označme $\varphi \coloneqq \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ hodnotu zlatého řezu. Nyní

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S\Lambda S^{-1},$$

kde

$$S = \begin{pmatrix} -1 & \varphi \\ \varphi & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 1-\varphi & 1 \\ 1 & \varphi - 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1-\varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}.$$

Tudíž

$$a_n = S_{1*}\Lambda^{n-2}S^{-1}x_2 = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}(1-\varphi)^{n-2} + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\varphi^{n-2},$$

což se dá snadno přepsat do běžněji používaného tvaru

$$a_n = -\frac{\sqrt{5}}{5}(1-\varphi)^n + \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi^n.$$

□

Příklad 10.36 (Diskrétní a rychlá Fourierova transformace, viz příklad 3.54)**.** Uvažujme dva polynomy

$$\begin{aligned} p(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^{m} a_k x^k = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0, \\ q(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^{m} b_k x^k = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0, \end{aligned}$$

kde ne nutně $a_m \neq 0$, $b_m \neq 0$. Naším cílem je rychle vynásobit tyto polynomy, a tedy získat polynom

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^{2m} \left(\sum_{j=\max\{0,k-m\}}^{\min\{k,m\}} a_j b_{k-j} \right) x^k \\ &= a_m b_m x^{2m} + \ldots + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + a_0 b_0. \end{aligned}$$

Tento problém je důležitý nejenom pro násobení polynomů, ale analogická operace se provádí i při obyčejném násobení čísel nebo při diskrétní konvoluci konečných posloupností.

Součin $p(x)q(x)$ budeme reprezentovat maticově, a sice tak, že polynom $p(x)$ zakódujeme do matice a polynom $g(x)$ do vektoru s příslušnými koeficienty (prázdná políčka jsou nuly):

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & \\ a_1 & a_0 & & \\ \vdots & a_1 & \ddots & \\ a_m & \vdots & \ddots & a_0 \\ & a_m & & a_1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{10.3}$$

Výsledkem součinu bude vektor koeficientů polynomu $p(x)q(x)$. Aby se s maticí a vektory lépe pracovalo, rozšíříme je na velikost $n = 2m+1$ a doplníme nulami. Pokud navíc definujeme $a_{m+1} = \ldots = a_{n-1} = 0$, $b_{m+1} = \ldots = b_{n-1} = 0$, má výraz (10.3) tvar

$$Ab = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \ldots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Matice, které jsou ve tvaru jako má matice A, se nazývají *cirkulanty.* Tyto matice mají pozoruhodné vlastnosti. Jedna z nich je, že její vlastní vektory nezávisí na konkrétních hodnotách $a_0, \ldots, a_{n-1}$, ale pouze na struktuře cirkulantu. Vlastní čísla matice A se dají jednoduše dopočítat z hodnot v matici. Navíc je matice A diagonalizovatelná, můžeme ji tedy vyjádřit ve tvaru $A = S\Lambda S^{-1}$, kde $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se skládá z vlastních vektorů matice A a $\Lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je diagonální matice s vlastními čísly matice A na diagonále. Pro matici S navíc platí $S^{-1} = \frac{1}{n}\overline{S}^T$. Součin Ab se dá nyní vyjádřit jako

$$Ab = S\Lambda\tfrac{1}{n}\overline{S}^T b.$$

Součin Ab můžeme tedy vyjádřit pomocí tří operací: vynásobení postupně třemi maticemi $\frac{1}{n}\overline{S}^T$, Λ a S. Pokud si matici S představíme jako matici přechodu z báze vlastních vektorů do kanonické báze, pak první operace převede vektor b do souřadného systému vlastních vektorů (tzv. *diskrétní Fourierova transformace*), druhá provede hlavní operaci a třetí převede výsledný vektor zpět do kanonické báze (tzv. *inverzní Fourierova transformace*). Druhá operace je zřejmě triviální, protože Λ je diagonální.

Na první pohled se může zdát, že jsme celý problém pouze zkomplikovali. Nicméně, za použití vhodných algoritmů (založených např. na principu rozděl a panuj) lze vynásobení vektoru b maticí $\frac{1}{n}\overline{S}^T$ provést v čase, který je úměrný funkci $n\log(n)$. Podobně pro násobení maticí S. To je asymptoticky výrazné vylepšení oproti obyčejnému maticovému součinu Ab, který vyžaduje řádově n^2 aritmetických operací. Takto vylepšená metoda se nazývá *rychlá Fourierova transformace* a je to jeden z nejdůležitějších numerických algoritmů, viz strana 8. Kromě efektivního násobení velkých čísel nebo polynomů má velké využití ve zpracováni signálů a obrazů, pro kompresi dat atp. □

10.4 Jordanova normální forma

Nejjednodušší tvar matice, ke kterému lze dospět pomocí elementárních řádkových úprav, je redukovaný odstupňovaný tvar. Jaký však je nejjednodušší tvar matice, ke kterému lze dospět pomocí podobnosti? Diagonální matice to není, protože již víme, že ne všechny matice jsou diagonalizovatelné. Nicméně každou matici lze podobnostní transformací převést na poměrně jednoduchý tvar, nazývaný Jordanova normální forma.[4)]

Definice 10.37 (Jordanova buňka)**.** Buď $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. *Jordanova buňka* $J_k(\lambda)$ je čtvercová matice řádu k definovaná

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Jordanova buňka má vlastní číslo λ, které je k-násobné, a přísluší mu pouze jeden vlastní vektor, protože matice $J_k(\lambda) - \lambda I_k$ má hodnost $k-1$.

Definice 10.38 (Jordanova normální forma)**.** Matice $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je v *Jordanově normální formě*, pokud je v blokově diagonálním tvaru

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_{k_m}(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

a na diagonále jsou Jordanovy buňky $J_{k_1}(\lambda_1), \ldots, J_{k_m}(\lambda_m)$.

[4)] Autorem je francouzský matematik Marie Ennemond Camille Jordan. Spolutvůrcem Gaussovy–Jordanovy eliminace je však někdo jiný, německý geodet Wilhelm Jordan.

Hodnoty λ_i a k_i nemusí být navzájem různé. Stejně tak nějaká Jordanova buňka se může vyskytovat vícekrát.

Věta 10.39 (O Jordanově normální formě)**.** *Každá matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je podobná matici v Jordanově normální formě. Tato matice je až na pořadí buněk určena jednoznačně.*

Důkaz. Úplný důkaz viz např. [Bečvář, 2005; Bican, 2009; Horn and Johnson, 1985]. Zde řekneme alespoň pár myšlenek z důkazu a konstrukce Jordanovy normální formy. Hledáme tedy bázi, vůči níž má zobrazení $x \mapsto Ax$ Jordanovu normální formu. Ukážeme, jak vypadají Jordanovy buňky a odpovídající část báze pro vlastní číslo λ. Bez újmy na obecnost buď $\lambda = 0$, jinak použijeme transformaci $A - \lambda I_n$.

Uvažujme podprostory $\mathbb{C}^n$:

$$\mathrm{Ker}(A) \subsetneqq \mathrm{Ker}(A^2) \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathrm{Ker}(A^p) = \mathrm{Ker}(A^{p+1}) = \dots$$

Buď $v \in \mathrm{Ker}(A^p) \setminus \mathrm{Ker}(A^{p-1})$, a uvažujme bázi B tvořenou vektory $A^{p-1}v, \dots, Av, v$. Na podprostoru generovaném těmito vektory pak lineární zobrazení $x \mapsto Ax$ má matici vůči bázi B rovnou Jordanově buňce $J_p(0)$.

Podobně dostaneme i ostatní Jordanovy buňky, jen postup trochu zobecníme. Namísto vektoru v vezmeme systém vektorů $v_1, \dots, v_\ell$ o velikosti $\dim \mathrm{Ker}(A^p) - \dim \mathrm{Ker}(A^{p-1})$, který doplňuje nějakou bázi $\mathrm{Ker}(A^{p-1})$ na bázi $\mathrm{Ker}(A^p)$. Každý z těchto vektorů je zdrojem řetízku vektorů $A^{p-1}v_i, \dots, Av_i, v_i$, který odpovídá Jordanově buňce $J_p(0)$; těchto buněk je tedy ℓ. Pokud $\ell' \coloneqq \dim \mathrm{Ker}(A^{p-1}) - \dim \mathrm{Ker}(A^{p-2}) - \ell > 0$, tak musíme vektory $Av_1, \dots, Av_\ell$ doplnit o nové vektory $v_{\ell+1}, \dots, v_{\ell+\ell'}$, aby opět doplňovaly nějakou bázi $\mathrm{Ker}(A^{p-2})$ na bázi $\mathrm{Ker}(A^{p-1})$. Tyto nové vektory se stanou základem řetízků $A^{p-2}v_j, \dots, Av_j, v_j$, které odpovídají ℓ' Jordanovým buňkám typu $J_{p-1}(0)$. Tento postup opakujeme až do dimenze 1. ☐

Příklad 10.40. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla 5 (dvojnásobné) a 7 (trojnásobné). Protože $3 = \mathrm{rank}(A - 5I_5) = \mathrm{rank}(A - 5I_5)^2$, tak budeme hledat dva řetízky o délce 1. Najdeme dva lineárně nezávislé vektory $x_1, x_2 \in \mathrm{Ker}(A - 5I_5)$, například $x_1 = (-2, 1, 1, 0, 0)^T$ a $x_2 = (-1, 1, 0, -1, 1)^T$, a ty tvoří základ hledané báze.

Přistupme k vlastnímu číslu 7. Nyní máme $\mathrm{rank}(A - 7I_5) = 3$ a $\mathrm{rank}(A - 7I_5)^2 = \mathrm{rank}(A - 7I_5)^3 = 2$. Zvolíme tedy $x_4 \in \mathrm{Ker}(A - 7I_5)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A - 7I_5)$, například $x_4 = (1, 0, 1, 0, 0)^T$ a potom příslušnou část báze tvoří řetízek $x_3 = (A - 7I_5)x_4 = (0, -1, 2, 3, -4)^T$, x_4. Posledním vektorem báze bude vektor z $\mathrm{Ker}(A - 7I_5)$ lineárně nezávislý s vektorem x_3, tedy například $x_5 = (0, 1, 1, 0, 1)^T$.

Hledaná báze je tvořena vektory $x_1, \dots, x_5$. Dáme-li tyto vektory do sloupců matice S, pak

$$J = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

je hledaná Jordanova normální forma matice A. ☐

Jordanova normální forma je nestabilní v tom smyslu, že i nepatrná změna v původní matici způsobí skokovou změnu Jordanovy formy – není to tedy spojitá funkce vzhledem k prvkům matice A. To je také důvod, proč třeba výpočetní systém Maple odmítl zařadit výpočet Jordanovy formy do své knihovny.

Důkaz věty 10.39 naznačil postup jak spočítat Jordanovu normální formu pro danou matici A, teď se ale zaměříme na určité rysy Jordanovy formy. Z věty 10.24 víme, že počet vlastních vektorů se nemění podobnostní transformací. Vzhledem k tomu, že každé Jordanově buňce odpovídá jeden vlastní vektor, tak jsme právě odvodili:

Tvrzení 10.41. *Počet všech Jordanových buněk odpovídajících λ je roven počtu vlastních vektorů pro λ.*

Jako důsledek dále dostáváme, že (algebraická) násobnost každého vlastního čísla λ je vždy větší nebo rovna počtu vlastních vektorů, které mu přísluší (tedy geometrické násobnosti).

Důsledek 10.42. *Násobnost vlastního čísla je větší nebo rovna počtu vlastních vektorů, které mu přísluší.*

Nicméně ani tyto znalosti ještě nemusí stačit k určení Jordanovy normální formy. Obecně potřebujeme znát ještě nějakou informaci navíc, např. jak to dělá následující vzoreček.

Poznámka 10.43 (Velikosti a počet buněk)**.** Počet buněk $J_k(\lambda)$ matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ve výsledné Jordanově normální formě je roven

$$\operatorname{rank}\left((A-\lambda I_n)^{k-1}\right) - 2\operatorname{rank}\left((A-\lambda I_n)^{k}\right) + \operatorname{rank}\left((A-\lambda I_n)^{k+1}\right).$$

Důkaz viz např. Horn and Johnson [1985]; Meyer [2000]. Vzoreček je možno též odvodit z myšlenky důkazy věty 10.39 o Jordanově normální formě.

Poznámka 10.44 (Zobecněné vlastní vektory)**.** Buď J Jordanova normální forma matice A, tedy $A = SJS^{-1}$ pro nějakou regulární matici S. Pokud je matice J diagonální, pak ve sloupcích matice S jsou vlastní vektory, které v pořadí odpovídají vlastním číslům matice A, umístěným na diagonále matice J. Jak ale interpretovat sloupce matice S (nazývané zobecněné vlastní vektory) pokud J není diagonální? Zaměřme se na speciální případ, kdy $J = J_k(\lambda)$ je jedna Jordanova buňka, obecný případ se vyřeší analogicky rozdělením na jednotlivé Jordanovy buňky. Nyní $A - \lambda I_k = SJ_k(0)S^{-1}$, z čehož

$$(A-\lambda I_k)^k = \left(SJ_k(0)S^{-1}\right)^k = SJ_k(0)^kS^{-1} = S0S^{-1} = 0.$$

Tudíž $(A-\lambda I_k)^kS = 0$, což znamená, že sloupce matice S patří do jádra matice $(A-\lambda I_k)^k$.

Souhrnem, buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo. Prostor vlastních vektorů, příslušných k λ, tvoří jádro matice $A - \lambda I_n$. Prostor zobecněných vlastních vektorů, příslušných k λ, tvoří jádro matice $(A-\lambda I_n)^n$. Vlastních vektorů je plný počet (tedy n) pouze, když matice A je diagonalizovatelná. Na druhou stranu, (lineárně nezávislých) zobecněných vlastních vektorů je vždy n. To přirozeně souvisí s tím, že každá matice je podobná matici v Jordanově normální formě.

V následujících příkladech ukážeme několik aplikací Jordanovy normální formy.

Příklad 10.45 (Mocnění matice)**.** Již v příkladu 10.34 jsme zmínili využití diagonalizace pro počítání mocniny matice. Pomocí Jordanovy normální formy můžeme tvrzení zobecnit pro libovolné $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$: Buď $A = SJS^{-1}$, pak

$$A^k = SJ^kS^{-1} = S\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{k_m}(\lambda_m)^k \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Zde je třeba si trochu rozmyslet, jak se chovají mocniny Jordanových buněk $J_{k_i}(\lambda_i)^k$, $i = 1,\dots,m$. Asymptoticky pak dostaneme stejně jako pro diagonalizovatelné matice:

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \begin{cases} 0, & \text{pokud } \rho(A) < 1, \\ \text{diverguje}, & \text{pokud } \rho(A) > 1, \\ \text{konverguje / diverguje}, & \text{pokud } \rho(A) = 1. \end{cases}$$

Příklad 10.46 (Maticová funkce)**.** Položme si otázku: Jak zavést maticovou funkci jako např. $\cos(A)$, e^A, atp.? Pro reálnou funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lze zavést $f(A)$ tak, že aplikujeme funkci na každou složku matice zvlášť,

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(a_{11}) & \dots & f(a_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ f(a_{n1}) & \dots & f(a_{nn}) \end{pmatrix}, \tag{10.4}$$

je sice možné, ale moc pěkných vlastností to mít nebude. Zkusme jiný přístup. Předpokládejme, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dá vyjádřit nekonečným rozvojem $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$; reálné analytické funkce jako např. $\sin(x)$, $\exp(x)$ aj. tento předpoklad splňují. Pak je tedy přirozené zavést $f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i$. Mocnit matice již umíme, proto je-li $A = SJS^{-1}$, tak

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i S J^i S^{-1} = S f(J) S^{-1}.$$

Dále snadno nahlédneme, že

$$f(J) := \begin{pmatrix} f(J_{k_1}(\lambda_1)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f(J_{k_m}(\lambda_m)) \end{pmatrix}.$$

Chybí tedy ještě zavést obraz Jordanových buněk $J_{k_i}(\lambda_i)$. Pro $k_i = 1$ je to triviální, jde o matici řádu 1. Pro $k_i > 1$ je předpis složitější [Meyer, 2000]:

$$f(J_{k_i}(\lambda_i)) := \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \dots & \frac{f^{(k_i-1)}(\lambda_i)}{(k_i-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & f'(\lambda_i) \\ 0 & \dots & 0 & f(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

Například funkce $f(x) = x^2$ má maticové rozšíření $f(A) = A^2$, jedná se tedy o klasické maticové mocnění. Na druhou stranu, předpis (10.4) by naznačoval mocnit jednotlivé prvky matice zvlášť, což není to, co bychom chtěli. □

Příklad 10.47 (Soustava lineárních diferenciálních rovnic)**.** Uvažme tzv. soustavu lineárních diferenciálních rovnic:

$$u(t)' = Au(t) \tag{10.5}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Cílem je nalézt neznámou funkci $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ splňující tuto soustavu pro určitou počáteční podmínku tvaru $u(t_0) = u_0$. Pro případ $n = 1$ je řešením diferenciální rovnice $u(t)' = au(t)$ funkce $u(t) = v \cdot e^{at}$, kde $v \in \mathbb{R}^n$ je libovolné (volí se tak, aby byla splněna počáteční podmínka). To nás motivuje (ale je za tím hlubší teorie) hledat řešení obecného případu ve tvaru

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t)) = (v_1 e^{\lambda t}, \dots, v_n e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} v,$$

kde v_i, λ jsou neznámé, $i = 1, \dots, n$. Dosazením $u(t) := e^{\lambda t} v$ do (10.5) dostaneme

$$\lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} A v, \quad \text{neboli} \quad \lambda v = Av.$$

To je přímo úloha výpočtu vlastních čísel a vektorů. Nechť matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$. Pak řešení (10.5) je $u(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} x_i$, kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ se získá z počátečních podmínek.

Uvažme konkrétní příklad:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= 7u_1(t) - 4u_2(t) \\ u_2'(t) &= 5u_1(t) - 2u_2(t) \end{aligned}$$

Matice $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla 2 a 3, jim odpovídají vlastní vektory $(4,5)^T$ a $(1,1)^T$. Řešení úlohy jsou tvaru

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Pro řešení lineárních diferenciálních rovnic je tedy znalost vlastních čísel a vlastních vektorů důležitá. Jordanova normální forma se použije, pokud matice A není diagonalizovatelná a deficience počtu vlastních vektorů se projeví tím, že ve vyjádření $u(t)$ nebudou α_i již skaláry, ale polynomy proměnné t stupňů odpovídajících násobnostem λ_i. □

10.5 Symetrické matice

Reálné symetrické matice mají řadu pozoruhodných vlastností týkající se vlastních čísel. Mezi stěžejní vlastnosti patří to, že jsou vždy diagonalizovatelné a jejich vlastní čísla jsou reálná.

Nejprve se podívejme na zobecnění transpozice a symetrických matic pro komplexní matice.

Definice 10.48 (Hermitovská matice a transpozice)**.** *Hermitovská transpozice*[5] matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je matice $A^* := \overline{A}^T$. Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se nazývá *hermitovská*, pokud $A^* = A$.

Hermitovská transpozice má podobné vlastnosti jako klasická transpozice, např. $(A^*)^* = A$, $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$, $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$.

Pomocí hermitovské transpozice můžeme unitární matice (rozšiřující pojem ortogonální matice pro komplexní matice, viz definice 8.50) definovat jako matice $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ splňující $Q^*Q = I_n$.

Příklad 10.49. Z matic

$$\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 5 \end{pmatrix}$$

je první symetrická, ale ne hermitovská, a druhá je hermitovská, ale ne symetrická. Pro reálné matice oba pojmy splývají. □

Věta 10.50 (Vlastní čísla symetrických matic)**.** *Vlastní čísla reálných symetrických (resp. obecněji komplexních hermitovských) jsou reálná.*

Důkaz. Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitovská a buď $\lambda \in \mathbb{C}$ její libovolné vlastní číslo a $x \in \mathbb{C}^n$ příslušný vlastní vektor jednotkové velikosti, tj. $\|x\|_2 = 1$. Pak $Ax = \lambda x$, přenásobením x^* máme $x^*Ax = \lambda x^*x = \lambda$. Nyní

$$\lambda = x^*Ax = x^*A^*x = (x^*Ax)^* = \lambda^*.$$

Tedy $\lambda = \lambda^*$ a proto $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Poznamenejme, že komplexní symetrické matice mohou mít ryze komplexní vlastní čísla.

Následující věta říká, že symetrické matice jsou diagonalizovatelné[6]. Navíc jsou diagonalizovatelné specifickým způsobem: z vlastních vektorů lze vybrat ortonormální systém, tedy matice podobnosti je ortogonální.

Věta 10.51 (Spektrální rozklad symetrických matic)**.** *Pro každou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje ortogonální $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a diagonální $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že $A = Q\Lambda Q^T$.*

Důkaz. Matematickou indukcí podle n. Případ $n = 1$ je triviální: $\Lambda = A$, $Q = 1$.

Indukční krok $n \leftarrow n-1$. Buď λ vlastní číslo A a x odpovídající vlastní vektor normovaný $\|x\|_2 = 1$. Doplňme x, jakožto ortonormální systém (důsledek 8.24), na ortogonální matici $S := (x \mid \cdots)$. Protože $(A - \lambda I_n)x = o$, máme $(A - \lambda I_n)S = (o \mid \cdots)$, a tudíž $S^T(A - \lambda I_n)S = S^T(o \mid \cdots) = (o \mid \cdots)$. A jelikož je tato matice symetrická, máme

$$S^T(A - \lambda I_n)S = \begin{pmatrix} 0 & o^T \\ o & A' \end{pmatrix},$$

kde A' je nějaká symetrická matice řádu $n-1$. Podle indukčního předpokladu má spektrální rozklad $A' = Q'\Lambda'Q'^T$, kde Λ' je diagonální a Q' ortogonální. Matice a rovnost rozšíříme o jeden řád takto:

$$\begin{pmatrix} 0 & o^T \\ o & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & o^T \\ o & \Lambda' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q'^T \end{pmatrix},$$

což snadno můžeme ověřit pronásobením. Označme

$$R := \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q' \end{pmatrix}, \quad \Lambda'' := \begin{pmatrix} 0 & o^T \\ o & \Lambda' \end{pmatrix}.$$

[5] Charles Hermite (1822–1901) byl francouzský matematik. Dokázal mj., že e je transcendentní, to jest není kořenem žádné polynomu s racionálními koeficienty.

[6] Augustin Louis Cauchy, r. 1829.

Matice R je ortogonální (věta 8.54(4)), matice Λ'' diagonální. Nyní můžeme psát

$$S^T(A - \lambda I_n)S = R\Lambda'' R^T,$$

z čehož

$$A = SR\Lambda'' R^T S^T + \lambda I_n = SR\Lambda'' R^T S^T + \lambda SRR^T S^T = SR(\Lambda'' + \lambda I_n)R^T S^T.$$

Nyní máme hledaný rozklad $A = Q\Lambda Q^T$, kde $Q \coloneqq SR$ je ortogonální matice a $\Lambda \coloneqq \Lambda'' + \lambda I_n$ je diagonální. $\square$

Podobně můžeme spektrálně rozložit hermitovské matice $A = Q\Lambda Q^*$, kde Q je unitární matice.

Poznámka 10.52 (Jiná forma spektrálního rozkladu)**.** Nechť symetrická $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a odpovídající ortonormální vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$. Tedy ve spektrálním rozkladu $A = Q\Lambda Q^T$ je $\Lambda_{ii} = \lambda_i$ a $Q_{*i} = x_i$. Pokud rozepíšeme Λ na součet jednodušších diagonálních matic

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i e_i^T,$$

tak matici A lze vyjádřit jako

$$A = Q\Lambda Q^T = Q\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i e_i^T\right) Q^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i Q e_i e_i^T Q^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_{*i} Q_{*i}^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i x_i^T.$$

Tvar $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i x_i^T$ je tak alternativní vyjádření spektrálního rozkladu, ve kterém matici A rozepisujeme na součet n matic hodnosti 0 nebo 1. Navíc, $x_i x_i^T$ je matice projekce na přímku $\operatorname{span}\{x_i\}$, tudíž z geometrického hlediska se na zobrazení $x \mapsto Ax$ můžeme dívat jako součet n zobrazení, kde v každém provádíme projekci na přímku (kolmou na ostatní) a škálování podle hodnoty λ_i.

Jedním z pěkných důsledků spektrálního rozkladu je následující, byť trochu teoretický, vzoreček na výpočet největšího a nejmenšího vlastního čísla[7)]. Říká, že největší resp. nejmenší vlastní číslo se dá vyjádřit jako největší resp. nejmenší hodnota kvadratické funkce $f(x) = x^T Ax$ na jednotkové sféře.

Věta 10.53 (Courant–Fischer)**.** *Nechť $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ jsou vlastní čísla symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pak*

$$\lambda_1 = \max_{x:\|x\|_2=1} x^T Ax, \quad \lambda_n = \min_{x:\|x\|_2=1} x^T Ax.$$

Důkaz. Pouze pro λ_1, druhá část je analogická.

Nerovnost „$\leq$“: Buď x_1 vlastní vektor příslušný k λ_1 normovaný $\|x_1\|_2 = 1$. Pak $Ax_1 = \lambda_1 x_1$. Přenásobením x_1^T zleva dostaneme

$$\lambda_1 = \lambda_1 x_1^T x_1 = x_1^T A x_1 \leq \max_{x:\|x\|_2=1} x^T Ax.$$

Nerovnost „$\geq$“: Buď $x \in \mathbb{R}^n$ libovolný vektor takový, že $\|x\|_2 = 1$. Označme $y \coloneqq Q^T x$, pak $\|y\|_2 = 1$ (věta 8.54(2)). S využitím spektrálního rozkladu $A = Q\Lambda Q^T$ dostaneme:

$$x^T Ax = x^T Q\Lambda Q^T x = y^T \Lambda y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_1 y_i^2 = \lambda_1 \|y\|_2^2 = \lambda_1. \qquad \square$$

[7)] Ernst Fischer odvodil vzorec r. 1905, Richard Courant ho zobecnil pro nekonečně rozměrné operátory r. 1920. Jejich vzorec zahrnuje i mezilehlá vlastní čísla $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, ale pro ně je to trochu komplikovanější. Tato jednodušší verze se také někdy nazývá Rayleigh-Ritzova věta.

10.6 Teorie nezáporných matic

Perronova–Frobeniova teorie nezáporných matic[8)] je pokročilá teorie kolem vlastních čísel nezáporných matic. Uvedeme jen základní výsledek bez důkazu.

Věta 10.54 (Perronova)**.**

(1) *Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nezáporná matice (tj. $a_{ij} \geq 0$ pro všechna i, j). Pak největší (v absolutní hodnotě) vlastní číslo je reálné nezáporné a příslušný vlastní vektor je nezáporný (ve všech složkách).*

(2) *Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kladná matice (tj. $a_{ij} > 0$ pro všechna i, j). Pak největší (v absolutní hodnotě) vlastní číslo je reálné kladné, je jediné, a příslušný vlastní vektor je kladný (ve všech složkách). Navíc žádnému jinému vlastnímu číslu neodpovídá nezáporný vlastní vektor.*

Důkaz. Viz např. [Meyer, 2000]. □

Příklad 10.55 (Markovovy řetězce)**.** Jedním z využití mocnin matice (příklad 10.45) a trochu i teorie nezáporných matic jsou Markovovy řetězce.[9)] Buď $x \in \mathbb{R}^n$ stavový vektor, čili x_i udává hodnotu stavu i. Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matice s hodnotami $a_{ij} \in [0, 1]$ tak, že součet hodnot v každém sloupci je roven 1. Na matici A budeme nahlížet jako na přechodovou matici, to jest, hodnota a_{ij} je pravděpodobnost přechodu ze stavu j do stavu i. Pak Ax udává nový stavový vektor po jednom kroku daného procesu. Zajímá nás, jak se bude stavový vektor vyvíjet v čase a zda se nějak ustálí. K tomu se bude hodit zjistit něco více o matici A. Přímo z definice platí, že $A^T e = e$, kde $e = (1, \dots, 1)^T$. Tudíž e je vlastní vektor A^T a 1 vlastní číslo A^T (a tedy i A). Navíc se dá ukázat, že žádné jiné vlastní číslo není v absolutní hodnotě větší (viz poznámka 10.58), tudíž 1 je vlastní číslo matice A z Perronovy věty a odpovídající vlastní vektor je nezáporný.

Další analýzu ilustrujeme na konkrétním příkladu: Migrace obyvatel USA v sektorech město–předměstí–venkov probíhá každoročně podle vzorce:

z města:	96% zůstane, 3% do předměstí, 1% na venkov,
z předměstí:	1% do města, 98% zůstane, 1% na venkov,
z venkova:	1.5% do města, 0.5% do předměstí, 98% zůstane.

Počáteční stav: 58 mil. obyvatel ve městě, 142 mil. na předměstí a 60 mil. na venkově. Jak se bude situace vyvíjet v čase? Označme

$$A := \begin{pmatrix} 0.96 & 0.01 & 0.015 \\ 0.03 & 0.98 & 0.005 \\ 0.01 & 0.01 & 0.98 \end{pmatrix}, \quad x_0 = (58, 142, 60)^T.$$

V nultém roce je rozmístění obyvatel dáno vektorem x_0 a v prvním roce vektorem Ax_0, protože Ax_0 má v první složce výsledný počet obyvatel ve městě po jednoroční migraci a podobně v druhé a třetí složce pro předměstí a venkov. Vývoj v čase probíhá tedy takto: x_0, Ax_0, A^2x_0, A^3x_0, …,$A^\infty x_0$. Diagonalizací spočítáme

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0.97 \end{pmatrix} Q^{-1}, \quad \text{kde} \quad Q \approx \begin{pmatrix} -0.393 & -0.707 & 0.154 \\ -0.729 & 0.707 & -0.772 \\ -0.561 & 0 & 0.617 \end{pmatrix}.$$

z čehož

$$\lim_{k\to\infty} A^k = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = Q_{*1} Q^{-1}_{1*} = \begin{pmatrix} 0.23 & 0.23 & 0.23 \\ 0.43 & 0.43 & 0.43 \\ 0.33 & 0.33 & 0.33 \end{pmatrix}.$$

[8)] Základní věta je od německého matematika Oskara Perrona z r. 1907, a byla rozšířena Ferdinandem Georgem Frobeniem r. 1912.

[9)] Andrej Andrejevič Markov (1856–1922), ruský matematik. Tvrdí se, že první aplikací Markovových řetězců byla analýza distribuce samohlásek a souhlásek v Puškinově Evženu Oněginovi, kdy vytvořil model předpokládající, že pravděpodobnost výskytu samohlásky či souhlásky na dané pozici závisí jen na posledním předchozím znaku, ale na žádném z předešlých už nikoli. Tato jednoduchá Markovova vlastnost se pak stala základem Markovových řetězců. Více o této lingvistické aplikaci se dočtete např. v *Učiteli matematiky*, 1–2(77–78), roč. 19, 2010–2011.

Tedy (bez ohledu na počáteční stav x_0) se rozložení obyvatelstva ustálí na hodnotách: 23% ve městě, 43% předměstí, 33% venkov.

Tento příklad ilustruje ještě jednu věc. Má-li vlastní číslo 1 násobnost jedna a ostatní vlastní čísla jsou v absolutní hodnotě menší (což nastane např. pokud A je kladná), tak $A^\infty = Q_{*1}Q^{-1}_{1*}$, kde Q_{*1} je vlastní vektor A k číslu 1, a $Q^{-1}_{1*} = (1, \dots, 1)$ je vlastní vektor A^T k číslu 1. Tudíž sloupce A^∞ budou opět stejné, a výsledné rozložení odpovídá složkám vlastního vektoru Q_{*1} (ty jsou kladné, podle Perronovy věty). Takže v tomto případě stačí jen spočítat kladný vektor z $\mathrm{Ker}(A - I_n)$, což odpovídá intuici, že ustálené rozložení reprezentované vektorem v má splňovat $Av = v$. $\square$

10.7 Výpočet vlastních čísel

Jak jsme již zmínili (poznámky k větě 10.16), vlastní čísla se počítají veskrze numerickými iteračními metodami, a hledat je jako kořeny charakteristického polynomu není efektivní postup. V této sekci ukážeme jednoduchý odhad na vlastní čísla, a jednoduchou metodu na výpočet největšího vlastního čísla. Další metodu, populární QR algoritmus, probereme v sekci 13.3. Pro velmi přesný výpočet vlastních čísel symetrických (zvláště tzv. positivně definitních) matic se používá také Jacobiho metoda (viz např. [Rohn, 2004]) a pro velké řídké symetrické matice např. Lanczosova metoda[10] (viz [Meyer, 2000]).

Nejprve uvedeme jednoduchý odhad pro vlastní čísla, tzv. Gerschgorinovy disky[11].

Věta 10.56 (Gerschgorinovy disky)**.** *Každé vlastní číslo λ matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ leží v kruhu o středu a_{ii} a poloměru $\sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Důkaz. Buď λ vlastní číslo a x odpovídající vlastní vektor, tedy $Ax = \lambda x$. Nechť i-tá složka x má největší absolutní hodnostu, tj. $|x_i| = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|$. Protože i-tá rovnice má tvar $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \lambda x_i$, vydělením $x_i \neq 0$ dostáváme

$$\lambda = a_{ii} + \sum_{j\neq i} a_{ij}\frac{x_j}{x_i}$$

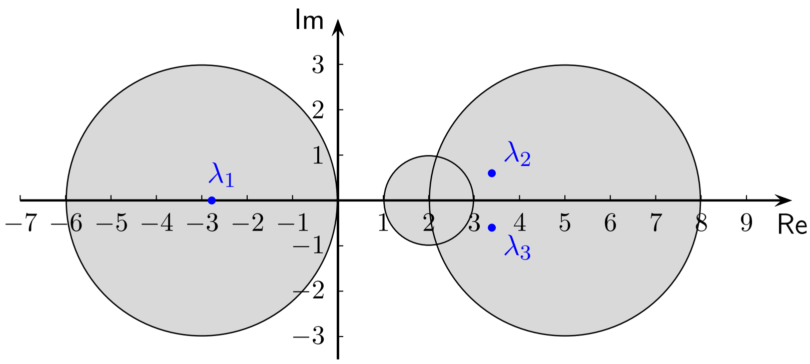
a tím pádem

$$|\lambda - a_{ii}| = \Big|\sum_{j\neq i} a_{ij}\frac{x_j}{x_i}\Big| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\frac{|x_j|}{|x_i|} \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$ $\square$

Příklad 10.57. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = -2.78$, $\lambda_2 = 3.39 + 0.6\,i$, $\lambda_3 = 3.39 - 0.6\,i$. Spolu s Gerschgorinovými disky jsou nakresleny dole:



[10] Algoritmus pochází z r. 1950 od maďarského matematika Cornelia Lanczose.

[11] Pochází z r. 1931, a autorem je běloruský matematik Semyon Aranovich Gerschgorin. Nicméně tvrzení bylo známo už dříve: L. Lévy (1881), H. Minkowski (1900), J. Hadamard (1903).

Vidíme, že ne každý kruh obsahuje nějaké vlastní číslo. Nicméně platí [Meyer, 2000], že v každé komponentě souvislosti je tolik vlastních čísel, z kolika kruhů daná komponenta vznikla. □

Věta dává jednoduchý ale hrubý odhad na velikost vlastních čísel (existují i vylepšení, např. Cassiniho ovály aj.). Nicméně, v některých aplikacích může takovýto odhad postačovat.

Poznámka 10.58 (Tři použití Gerschgorinových disků)**.**

1) *Kriterium pro zastavení výpočtu iteračních metod.* Např. Jacobiho metoda na výpočet vlastních čísel spočívá v postupném zmenšování nediagonálních prvků symetrické matice, takže matice konverguje k diagonální matici. Gerschgorinovy disky pak dávají horní mez na přesnost vypočtených vlastních čísel. Pokud např. matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je skoro diagonální v tom smyslu, že všechny mimodiagonální prvky jsou menší než 10^{-k} pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak diagonální prvky aproximují vlastní čísla s přesností $10^{-k}(n-1)$. Například matice

$$A = \begin{pmatrix} 7.0001 & 0.0001 & -0.0002 \\ 0.0001 & 5 & 0.0003 \\ -0.0002 & 0.0003 & 1.999 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla 7.0001 ± 0.0003, 5 ± 0.0004 a 1.999 ± 0.0005.

2) *Diagonálně dominantní matice.* Gerschgorinovy disky dávají také následující postačující podmínku[12)] pro regularitu matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\ \forall i = 1,\dots,n$. V tomto případě totiž disky neobsahují počátek a proto nula není vlastním číslem A. Matice s touto vlastností se nazývají diagonálně dominantní.

3) *Markovovy matice.* Buď A Markovova matice z příkladu 10.55. Všechny Gerschgorinovy disky matice A^T mají střed v bodě v intervalu $[0,1]$ a pravým krajem protínají hodnotu 1 na reálné ose. To dokazuje, že $\rho(A) \le 1$, a tudíž číslo 1 je skutečně v absolutní hodnotě největším vlastním číslem matice A.

Nyní ukážeme jednoduchou metodu na výpočet dominantního vlastního čísla.[13)] Přes svou jednoduchost se stala základem některých numerických metod jako je např. inverzní mocninná metoda[14)], nebo metoda Rayleighova podílu[15)] pro symetrické matice.

Algoritmus 10.59 (Mocninná metoda)**.** Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

1: Zvol $o \neq x_0 \in \mathbb{C}^n$, $i := 1$,

2: **while not** splněna ukončovací podmínka **do**

3: $\quad y_i := Ax_{i-1}$,

4: $\quad x_i := \frac{1}{\|y_i\|_2} y_i$,

5: $\quad i := i + 1$,

6: **end while**

Výstup: $\lambda_1 := x_{i-1}^T y_i$ je odhad vlastního čísla, $v_1 := x_i$ je odhad příslušného vlastního vektoru.

Příklad 10.60. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = (1,0,1)^T.$$

---

12) Tzv. Lévyho–Desplanquesova věta.

13) Mocninou metodu, anglicky *power method*, představil americký matematik a fyzik Richard Edler von Mises r. 1929.

14) Autorem je německý matematik Helmut Wielandt, z r. 1944, anglicky *inverse iteration*.

15) Autorem anglický fyzik John William Strutt, lord Rayleigh, nositel Nobelovy ceny za fyziku (1904), anglicky *Rayleigh quotient iteration*.

Postup výpočtu a zdrojový kód pro Matlab / Octave:

i	$\frac{1}{\\|x_i\\|_\infty}x_i$	$x_{i-1}^T y_i$
0	$(1.00, 0.00, 1.00)^T$	–
1	$(0.67, 1.00, 0.17)^T$	5
2	$(1.00, 0.88, 0.56)^T$	6.32
3	$(0.97, 1.00, 0.47)^T$	6.94
4	$(1.00, 1.00, 0.50)^T$	7

```
A=[2 4 2; 4 2 2; 2 2 -1];
x=[1;0;1];
for i=1:4
  y=A*x;
  (y'*x),
  x=y/norm(y);
  x/max(abs(x)),
end
```

□

Metodu ukončíme ve chvíli, když se hodnota $x_{i-1}^T y_i$ resp. vektor x_i ustálí; potom $x_i \approx x_{i-1}$ je odhad vlastního vektoru a $x_{i-1}^T y_i = x_{i-1}^T A x_{i-1} \approx x_{i-1}^T \lambda x_{i-1} \approx \lambda$ odhad odpovídajícího vlastního čísla. Metoda může být pomalá, špatně se odhaduje chyba a míra konvergence a navíc velmi záleží na počáteční volbě x_0. Na druhou stranu je robustní (zaokrouhlovací chyby nemají velký vliv) a snadno aplikovatelná na velké řídké matice. Ne vždy konverguje, ale za určitých předpokladů se to dá zajistit.

Tvrzení 10.61 (Konvergence mocninné metody)**.** *Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s vlastními čísly $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ a odpovídajícími lineárně nezávislými vektory $v_1, \ldots, v_n$ velikosti 1. Nechť x_0 má nenulovou souřadnici ve směru v_1. Pak x_i konverguje (až na znaménko) k vlastnímu vektoru v_1 a $x_{i-1}^T y_i$ konverguje k vlastnímu číslu λ_1.*

Důkaz. Nechť $x_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$, kde $\alpha_1 \neq 0$ podle předpokladu. Pak $x_i = \frac{1}{\|A^i x_0\|} A^i x_0$ a

$$A^i x_0 = A^i \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j A^i v_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^i v_j = \lambda_1^i \left(\alpha_1 v_1 + \sum_{j\neq 1} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^i v_j \right).$$

Protože vektory x_i postupně normujeme, násobek λ_1^i nás nemusí zajímat. Zbylý vektor postupně konverguje k $\alpha_1 v_1$, protože $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1$ a tudíž $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^i \to 0$ pro $i \to \infty$.

Nyní předpokládejme, že x_i již dobře aproximuje vlastní vektor v_1. Pak $x_{i-1}^T y_i = x_{i-1}^T A x_{i-1} = x_{i-1}^T \lambda_1 x_{i-1} = \lambda_1 \|x_{i-1}\|_2^2 = \lambda_1$. □

Z důkazu věty vidíme, že rychlost konvergence výrazně závisí na poměru $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$. Poznamenejme, že vzhledem k tomu, že λ_1 je dominantní vlastní číslo, tak pro reálnou matici A musí být reálné a v_1 rovněž tak (tvrzení 10.13).

Mocninná metoda počítá jen dominantní vlastní číslo a vektor. Následující technika ale umožňuje jednoduchou transformací vynulovat jedno vlastní číslo, např. to dominantní, a pak můžeme rekurzivně dopočítat mocninnou metodou i zbylá vlastní čísla. Nejprve uvádíme jednoduchou verzi pro symetrické matice, a potom v poznámce 10.63 jak postupovat obecně.

Tvrzení 10.62 (O deflaci vlastního čísla)**.** *Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ její vlastní čísla a $v_1, \ldots, v_n$ odpovídající ortonormální vlastní vektory. Pak matice $A - \lambda_1 v_1 v_1^T$ má vlastní čísla $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a vlastní vektory $v_1, \ldots, v_n$.*

Důkaz. Podle poznámky 10.52 lze psát $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T$. Pak $A - \lambda_1 v_1 v_1^T = 0 v_1 v_1^T + \sum_{i=2}^n \lambda_i v_i v_i^T$, což je spektrální rozklad matice $A - \lambda_1 v_1 v_1^T$. □

Poznámka 10.63 (K deflaci vlastního čísla obecné matice)**.** Buď λ vlastní číslo a x odpovídající vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Doplňme x na regulární matici S tak, aby $S_{*1} = x$. Pak

$$S^{-1}AS = S^{-1}A(x \mid \cdots) = S^{-1}(\lambda x \mid \cdots) = (\lambda e_1 \mid \cdots) = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots \\ o & A' \end{pmatrix}.$$

Z podobnosti má matice A' stejná vlastní čísla jako A, pouze λ má o jedna menší násobnost. Tudíž zbývající vlastní čísla matice A můžeme najít pomocí A'.

Příklad 10.64 (Vyhledávač Google™ a PageRank[16]). Uvažujme webovou síť s těmito parametry:

$$\begin{aligned} &N \text{ webových stránek},\\ &a_{ij} = \begin{cases} 1 & j\text{-tá stránka odkazuje na } i\text{-tou},\\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}\\ &b_j = \text{počet odkazů z } j\text{-té stránky},\\ &x_i = \text{důležitost } i\text{-té stránky}. \end{aligned}$$

Cílem je stanovit důležitosti $x_1, \dots, x_N$ jednotlivých stránek. Základní myšlenka autorů googlovského PageRanku spočívá ve stanovení důležitosti i-té stránky tak, aby byla úměrná součtu důležitosti stránek na ni odkazujících. Řešíme tedy rovnici $x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{b_j} x_j$, $i = 1, \dots, N$. Maticově $A'x = x$, kde $a'_{ij} := \frac{a_{ij}}{b_j}$. Tedy x je vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu 1. Vlastní číslo 1 je dominantní, což snadno nahlédneme z Gerschgorinových disků pro matici A'^T (součet sloupců matice A' je roven 1, tedy všechny Gerschgorinovy disky mají nejpravější konec v bodě 1). Podle Perronovy věty 10.54 je vlastní vektor x nezáporný. Ten pak normujeme tak, aby $\|x\|_\infty = 10$, to jest, aby složky byly v intervalu $[0, 10]$. Nakonec složky zaokrouhlíme, aby měly hodnoty v rozmezí $0, 1, 2, \dots, 10$.

V praxi je matice A' obrovská, řádově $\approx 10^{10}$, a zároveň řídká (většina hodnot jsou nuly). Proto se na výpočet x hodí mocninná metoda, stačí ≈ 100 iterací. Prakticky se navíc ještě matice A' trochu upravuje, aby byla tzv. stochastická, aperiodická a ireducibilní (vadilo by např. pokud by z nějaké stránky nebyl odkaz na žádnou jinou), více viz [Langville and Meyer, 2006; Tůma, 2003].

Na matici A' se můžeme dívat i z pohledu Markovových řetězců (příklad 10.55). Pokud budeme symbolicky procházet po webové síti a se stejnou pravděpodobností se na každé stránce rozhodneme, kam pokračovat, tak A' odpovídá přechodové matici a hledaný vektor x rovnovážnému stavu.

Příklady Page ranku (k roku 2010):

`www.google.com`	10
`www.cuni.cz`	8
`www.mff.cuni.cz`	7
`kam.mff.cuni.cz`	6
`kam.mff.cuni.cz/~hladik`	4

□

Poznámka 10.65 (Další aplikace v teorii grafů). Na závěr zmiňme široké použití vlastních čísel v teorii grafů. Vlastní čísla matice sousednosti a Laplaceovy matice grafu říkají mnoho o tom, jaká je struktura grafu. Používají se k odhadování velikosti tzv. „úzkého hrdla“ v grafu, což je množina vrcholů s relativně málo hranami vedoucími ven. Dávají také různé odhady na velikost nezávislé množiny v grafu a jiné charakteristiky. Podrobněji viz Brouwer and Haemers [2012]; Cvetković et al. [2010] nebo „Šestnáct miniatur“ Jiřího Matouška [Matoušek, 2010].

Problémy

10.1. Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ singulární. Dokažte, že existuje posloupnost regulárních matic A_i, $i = 1, \dots,$ konvergující po složkách k A. (Množina regulárních matic je tzv. *hustá* v $\mathbb{R}^{n\times n}$.)

10.2. Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nediagonalizovatelná. Dokažte, že existuje posloupnost diagonalizovatelných matic A_i, $i = 1, \dots,$ konvergující po složkách k A. (Množina diagonalizovatelných matic je tedy *hustá* v $\mathbb{R}^{n\times n}$.)

10.3. Ukažte přímo (bez Jordanovy normální formy), že algebraická násobnost vlastního čísla je vždy větší nebo rovna geometrické násobnosti.

10.4. Dokažte přímo Cayleyho–Hamiltonovu větu 10.18 pro diagonalizovatelné matice.

10.5. Dokažte Cayleyho–Hamiltonovu větu za použití Jordanovy normální formy.

10.6. Ukažte, že každá matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má invariantní podprostor dimenze 1 nebo 2.

10.7. Dokažte následující odhad pro hodnost druhé mocniny matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

[16] Z r. 1997, autory jsou Sergey Brin a Larry Page.

$$\operatorname{rank}(A) - \tfrac{n}{2} \le \operatorname{rank}(A^2) \le \operatorname{rank}(A).$$

Hint: Využijte faktu, že A je podobná matici v Jordanově normální formě.

10.8. Domyslete detaily důkazu věty 10.39 o Jordanově normální formě:

(a) Ukažte, že pro každou matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existuje $p \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\operatorname{Ker}(A) \subsetneq \operatorname{Ker}(A^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker}(A^p) = \operatorname{Ker}(A^{p+1}) = \ldots$$

(b) Buď $v \in \operatorname{Ker}(A^p) \setminus \operatorname{Ker}(A^{p-1})$. Ukažte, že vektory $v, Av, \ldots, A^{p-1}v$ jsou lineárně nezávislé.

(c) Dokažte vzoreček z poznámky 10.43 o velikostech a počtu Jordanových buněk.

Shrnutí ke kapitole 10. Vlastní čísla

Vlastní čísla a vlastní vektory matice A poskytují o matici a o lineárním zobrazení $x \mapsto Ax$ velmi důležité informace. Vlastní vektory reprezentují invariantní směry, které se zobrazí samy na sebe, a vlastní čísla představují míru škálování v těchto směrech. Vlastní čísla tedy celkem dobře popisují jak moc lineární zobrazení $x \mapsto Ax$ degeneruje objekty a co se děje, když zobrazení iterujeme.

Vlastních čísel matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je právě n včetně násobností, a (lineárně nezávislých) vlastních vektorů je nanejvýš n. Má-li vlastní číslo násobnost k, pak mu odpovídá maximálně k vlastních vektorů. Různá vlastní čísla pak mají lineárně nezávislé vlastní vektory.

Elementární úpravy mění vlastní čísla matice, ale úprava, která je nemění, je podobnost. Geometricky podobnost znamená jen změnu souřadného systému. Každá matice je podobná matici v jednodušším tvaru – Jordanově normálním tvaru. Ten může mít dokonce podobu diagonální matice (pak je původní matice diagonalizovatelná). To nastává právě tehdy, když matice má plný počet vlastních vektorů (počet Jordanových buněk je roven počtu vlastních vektorů).

Důležitou třídou matic jsou symetrické matice. Mají tři podstatné vlastnosti: (1) jsou vždy diagonalizovatelné, (2) mají reálná vlastní čísla, (3) vlastní vektory jdou vybrat tak, aby na sebe byly kolmé. Příslušný spektrální rozklad je pak velmi užitečný nástroj.

Další třídou matic se speciálními vlastnostmi jsou nezáporné matice: největší vlastní číslo v absolutní hodnotě leží na reálné ose vpravo od počátku a odpovídající vlastní vektor je nezáporný.

Problém výpočtu vlastních čísel a výpočtu kořenů polynomu jsou na sebe převoditelné (skrze charakteristický polynom a matici společnici). Na výpočet vlastních čísel nelze jednoduše použít Gaussovu eliminaci – veškeré používané metody jsou iterativní, jako například mocninná metoda. Šikovné jsou i různé odhady jako jsou například Gerschgorinovy disky.