BÖLÜM 9: TÜMEVARIM

9.1.Matematiksel Tümevarım

Matematiksel tümevarımda, doğal sayıların özellikleri üzerinde tanımlanmış özellikler ispatlanır. P(n), n sayısı için verilmiş olan bir veya birden fazla cümle olsun. Örneğin,

P(n) : n(n+3) sayısı çifttir.
P(n) : Eğer $n \geq 10$ ise, $2^n > n^3$ olur.

Amacımız, P(n) cümlesinin doğru olduğunu bütün n değerleri için göstermektir. Bunun için

a) P(1) doğru olduğu gösterilir.
b) Bu adımda yapılacak olan P(1), P(2), ..., P(n) doğru ise P(n+1) cümlesinin doğru olduğunu göstermektir. Bu ispat, herhangi bir $n \in Z^+$ için doğru olmalıdır.

Örneğin,

$1=1^2$
$1+3=2^2$
$1+3+5=3^2$
$1+3+5+7=4^2$
$1+3+5+7=5^2$
.....

ve genel bağıntısı

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2 \qquad (9.1)$$

şeklindedir. Bu bir iddia olduğuna göre tümevarım ile ispatı yapılabilir. İlk olarak n=1 için

a) $1=1^2$ olur.

b) P(1), P(2), ..., P(n) kadar olan cümlelerin doğrulukları kabul edilsin. Bundan sonra (9.1) bağıntısının (2n+1) için doğru olup olmadığının irdelenmesi gerekir. Bu eşitlikte her iki tarafa 2n+1 değeri eklensin ve toplam işlemleri yapılsın.

$$1+3+5+...+(2n-1)+2n+1=n^2+(2n+1)$$
$$=(n+1)^2$$

olur veya

$$\underbrace{1+3+5+...+(2n-1)}_{n^2}+(2n+1)=(n+1)^2$$

$n^2+(2n+1)=(n+1)^2$
$n^2+2n+1=n^2+2n+1$

olur ve ispat tamamlanmış olur ve P(n+1) cümlesinin doğru olduğunu gösterir. Bu tarz yapılan ispata tümevarım denir. Bu yönteme ***Algoritmik İspat Yöntemi*** *de* denir. Diğer bir tümevarım ispat şekli de şudur. P(n) bir önerme ise $P(n)\rightarrow P(s(n))$ önermesinin doğru veya yanlışlığı kolayca gösterilebilir (s(n) n' ye bağlı bir cümle). Eğer P(0) doğru ise aşağıdaki türetme yapılabilir. s(0), s(s(0)) ve benzeri yerlerine 1, 2, 3, ve benzerleri kullanılmıştır.

1- $\forall n(P(n)\rightarrow P(s(n)))$	*birinci önerme*
2- P(0)	*ikinci önerme*
3-$P(0)\rightarrow P(1)$	*n=0 için*
4-P(1)	*2,3 modus ponens*
5-$P(1)\rightarrow P(2)$	*n=1*
6-P(2)	*4,5 modus ponens*
7-$P(2)\rightarrow P(3)$	*n=2*
8-P(3)	*6,7 modus ponens*
....	

Bu ispatta istenilen n pozitif tamsayısına kadar veya sonsuza kadar devam edilebilir. Tümevarımın tanımı şu şekilde yapılabilir.

Tanım 9.1

Evrensel uzay, doğal sayılar ile verildiği kabul edilsin ve P(n) doğal sayıların özelliği olsun. Bu durumda aşağıdaki çıkartım kuralları kullanılabilir.

a) $P(0)$

b) $\forall n(P(n) \Rightarrow P(s(n)))$

$\because \forall n P(n)$

Diğer bir örnek olarak n=0 için $H_n=0$ ve n>0 için $H_{n+1}=2H_n+1$ olarak tanımlanmaktadır. $H_n=2^n-1$ olduğu tümevarımla gösterilebilir.

1- $H_0=0$, n=0
2- $H_1=1+2H_0=1=2^1-1$
3- $H_2=1+2H_1=3=2^2-1$
4- $H_3=1+2H_2=7=2^3-1$
5- $H_4=1+2H_3=15=2^4-1$
....
Bu şekilde n sayısına kadar devam edilebileceği gibi ispat daha kısa bir yol olan aşağıdaki gibi de yapılabilir.

$$
\begin{aligned}
H_{n+1} &= 1+2H_n \\
&= 1+2(2^n-1) \\
&= 1+2^{n+1}-2 \\
&= 2^{n+1}-1.
\end{aligned}
$$

İlk ispat yöntemi algoritmaya dönüştürülebilir ve bu işlemin algoritması aşağıda görüldüğü gibidir.

Algoritma 9.1: Tümevarım Algoritması

$n \in Z^+$ ve bu algoritmanın sonucunda P(n) önermesinin doğru olup olmadığının ispatı yapılmış olur.

1- $k \leftarrow 1$ ve P(1) önermesinin ispatını göster.
2- Eğer k=n ise işlemi bitir ve gerekli ispat kullanıcıya sunulur.
3- Eğer P(1), P(2), ..., P(k) önermelerinin hepsi doğru ise P(k+1) önermesi de doğrudur.
4- $k \leftarrow k+1$ ve 2. adıma git.

Tümevarım ispatı kullanılırken, biraz dikkatli olmak gerekiyor. Örneğin bütün pozitif tamsayılar acaba kaç değişik pozitif tamsayı toplamlarından oluşmaktadır? Bu soruya cevap vermeden önce kaç tane farklı sayıdan oluşan toplam olduğunu gösteren formül P(n) olsun. Bu durumda birkaç sayı için deneme yapılabilir.

$1=1 \Rightarrow P(1)=1$

2=2
$2=1+1 \Rightarrow P(2)=2$

3=3
3=1+1+1
$3=2+1 \Rightarrow P(3)=3$

4=4
4=1+1+1+1
4=2+1+1
4=2+2
$4=3+1 \Rightarrow P(4)=5$

5=5
5=1+1+1+1+1
5=2+1+1+1
5=2+2+1
5=3+1+1
5=3+2
$5=4+1 \Rightarrow P(5)=7$

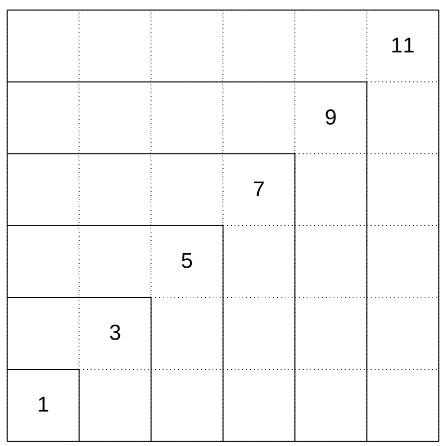
Bu bilgiler ışığında kaç tane farklı toplam olduğu asal sayı gibi davranıyor. Emin olmak için birkaç deneme daha yapılabilir.

6=6
6=1+1+1+1+1+1
6=2+1+1+1+1
6=2+2+1+1
6=2+2+2
6=3+1+1+1

6=3+2+1
6=3+3
6=4+1+1
6=4+2
6=5+1 $\Rightarrow$ P(6)=11

olduğu görüldükten sonra yapılan iddia doğruymuş gibi görünüyor. Fakat 7 sayısı için deneme yapıldığında P(7)=15 olduğu görülecektir ve bu sonuç bu iddianın yanlış olduğunu gösterir.

Matematiksel tümevarım yöntemi, bütün durumları inceleyerek yapılan bir ispat yöntemi değildir; genelleme yapılarak yapılan bir ispat yöntemidir. Bu ispat yöntemini kullanacak olan kişi neyi ispatlayacağını çok iyi bilmelidir.



Şekil 9.1. *Tek sayıların toplamı bir karedir.*

Biraz önceki problemin ispatını yapmak için geometriksel bir yol kullanılabilir. n=6 için hücreler 1+3+...+(2n-1) hücreye gruplanmıştır. Eğer bu gösterim bütün n' ler için yapılabilirse, bu bir ispat olur ve tümevarıma benzer.

Başka bir örnek olarak Fibonacci dizileri (F_0,F_1,F_2,...) düşünülebilir ve bu serinin elemanları 0,1,1,2,3,5,8,.... şeklinde devam eder. ϕ bir gerçel sayı ve

$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{9.2}$$

olsun. $F_0=0$, $F_1=1$ ve $n>1$ için

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2} \tag{9.3}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. İspatlanması gereken P(n) cümlesi

P(n) : $F_n\leq\phi^{n-1}$

olur. Amaç bu cümlenin doğru olduğunu göstermektir.

P(1) için $F_1=1=\phi^0=\phi^{1-1}$

n=2 için doğru olduğu açıktır, çünkü

P(2) için $F_2=1<1.6<\phi^1=\phi^{2-1}$

olur. P(1), P(2), P(3), ..., P(n) doğru iseler, P(n-1) ve P(n) doğru olduğu kesindir. ϕ sayısının bir özelliği olarak

$\phi^2=\phi+1$

olur. Buradan

$F_n\leq\phi^{n-1}$ ve $F_{n-1}\leq\phi^{n-2}$

ve

$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}\leq\phi^{n-1}+\phi^{n-2}=\phi^{n-1}(\phi+1)=\phi^n$

olur.

9.2.Özdevinim ile İspat

Özyineleme ile ispat matematiksel tümevarıma benzer, fakat burada P(n) cümlesi için n mutlaka doğal sayı olacak şekilde bir zorunluluk yoktur. Aslında, özyineleme ile ispat matematiksel tümevarımdan daha geneldir ve matematiksel tümevarımla yapılacak ispatlar özyineleme ile ispat yöntemi yapılabilir ve bu durumda tanım kümesi doğal sayılar olarak seçilecektir. Diğer yönde, Özyineleme ile ispat mantığının daha iyi anlaşılması için x bir insan olmak üzere

- x kişisinin bütün çocukları x' in soyundan gelirler.
- Eğer y kişisi x kişisinin çocuğu ise, y kişisinin soyundan gelenler aynı zamanda x kişisinin de soyundan gelirler.
- Bunun dışındakiler x' in soyundan değillerdir.

x kişisi için verilen mantık silsilesi ispatlarda da kullanılmaktadır. Sonuca ulaşıncaya kadar bu yöntem uygulanır ve sonuçta ya istenen durum oluşmuştur ya da istenmeyen durum oluşmuştur. Bu iki durum dışında oluşabilecek başka durum yoktur.

Özyinelemede temel kural ile özyineleme kuralının hangileri oldukları rahatlıkla fark edilebilirler. Temel kural, doğrudan tanımlanacak terimi verir. Bu özyinelemenin her zaman bitime gittiği varsayılmıştır. x kişisi için verilen bilgiler veya bu tarzda verilen bilgilere **özyineleme tanımı** denir.

Özyineleme ile ispatta kullanılacak olan **iyi keşfedilmiş** (well founded) tanım kümesinin ne olduğu üzerinde durulacaktır. Çünkü özyineleme ile ispat sadece bu kümeler üzerinde çalışmaktadır.

G(x,y) bir önerme olsun ve bu önerme, sayısal değerler için $y<x$ olduğu zaman ve x ve y karakter katarı iseler bu durumda y katarı x katarının bir parçası olduğu zaman sağlanır; aksi halde sağlanmaz. Örneğin doğal sayılar kümesinde bu şekilde azalan bir kümedir ve bu kümenin minimum olan bir değeri vardır; o da 0 değeridir. Bu özelliği sağlayan dizilere G-dizisi denir.

Tanım 9.2
Eğer bütün G-dizileri biten dizilerse, G önermesine göre bu tanım kümesi ***iyi keşfedilmiş*** *bir kümedir.*

G(x,y) önermesinde eğer x minimum değer ise bütün y değerleri için G(x,y) yanlış olur. Şimdi sıra özyineleme ile ispat yönteminin prensiplerini açıklamaya geldi.

$\forall$x, P(x) doğru olduğunu özyineleme ile göstermek için aşağıdaki adımlara başvurulur.

- **Tanım kümesi iyi keşfedilmiştir**: G-dizilerinin hepsinin sonlu olduğunu gösteren bir G önermesi seçilir.
- **Tümevarım bazı**: Eğer x minimum is P(x)' in doğru olduğunun ispatlanması gerekir.
- **Tümevarım Hipotezi**: Rastgele bir x seçilir ve G(x,y) önermesini sağlayan bütün y' ler için P(x) önermesinin sağlandığı kabul edilir. Örneğin, eğer G(x,y) için x>y ise, $\forall$y, y<x için P(y) sağlanır.

- **Tümevarım Adımı**: P(x) ispatlanır.
- **Sonuç**: $\forall$x, P(x) sonuçlandırılır.

Eğer tanım kümesi doğal sayılar kümesi olarak seçilir ve x>y için G(x,y) doğru ise, özyineleme ile ispata **güçlü tümevarım** denir, çünkü 0 tek minimum elemandır ve tümevarım P(0) ile başlar. P(x) önermesini ispatlamada $\forall$y, y<x için P(y) önermelerinin hepsi doğru kabul edilir.

Daha matematiksel olarak özyineleme ile ispat aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Tanım kümesi iyi keşfedilmiş olarak verilsin, $\forall$x, P(x) ispatlanabilir.

$$\forall x(\forall y(G(x,y) \Rightarrow P(y)) \Rightarrow P(x) \qquad (9.4)$$

olur. Bu denklem hem temel durumu ve hem de tümevarımın adımını içermektedir. Temel durumda, G(x,y) sağlayan y yoktur ve bu durum

$\forall y(G(x,y)\Rightarrow P(y))$

ifadesini doğru yapar. P(x) doğru olduğu sürece (9.4) önermesi de doğru olur. Eğer x temel değilse, (9.4) önermesi (9.5) önermesi şekline dönüşür.

$$\forall y(G(x,y)\Rightarrow P(y))\Rightarrow P(x) \quad (9.5)$$

Bu önermenin ispatlanması için G(x,y) önermesini sağlayan bütün y değerleri için P(y) doğru kabul edilir ve P(x) türetilir.

Bu ispatın mantığı kısaca şu şekilde açıklanabilir. Bazı x değerleri için $\neg P(x)$ doğru olduğu kabul edilir ve çelişki (olmayan ergi yöntemi) oluşturulmaya çalışılır. Aslında, gösterilmek istenen şudur: Eğer $\neg P(x)$ doğru ise sonsuz G-dizisi inşa edilebilir, çünkü iyi keşfedilmiş tanım kümeleri için bu imkansızdır, bunun sonucunda $\forall x$ değerleri için $\neg P(x)$ yanlış olmalıdır. Diğer bir deyişle $\forall x$ değerleri için P(x) doğru olmalıdır. Sonsuz bir G-dizisi inşa etmek için $\neg P(x)$ önermesini sağlayan bir x ile başlanır ve bu değere x_0 gösterilir ve sonsuz G-dizisinin ilk elemanıdır denir. İkinci elemanı bulmak için (9.4) önermesinden

$$\forall y(G(x_0,y_0)\Rightarrow P(y))\Rightarrow P(x_0) \quad (9.6)$$

önermesi elde edilir ve kabule göre $P(x_0)$ doğru olduğundan modus tollens ile

$$\neg\forall y(G(x_0,y)\Rightarrow P(y)) \quad (9.7)$$

olur. Mantıksal olarak (9.7) önermesi (9.8) önermesine denktir.

$$\exists y(G(x_0,y)\wedge\neg P(y)) \quad (9.7)$$

Böylece $G(x_0,y)=G(x_0,x_1)$ ve $\neg P(y)= \neg P(x_1)$ doğru yapan $y=x_1$ olmalıdır. x_1 elemanı G-dizisinin ikinci elemanı olarak seçilir. Bu mantıkla

$G(x_0,x_1)\wedge\neg P(x_2)$

doğru olur ve bu eleman üçüncü elemandır. Bu şekilde devam ederek sonsuz bir dizi oluşturulur. Fakat iyi keşfedilmiş tanım kümelerinde sonsuz dizi oluşturulamaz, çünkü bir tane minimum değer vardır.

Eğer tanım kümesi iyi keşfedilmiş bir küme değilse, özyineleme ile ispatın bir anlamı olmaz. Tanım kümesi Z ise, özyineleme ile ispata izin verilmez.

Algoritma 9.2: Faktöriyel
$n \in Z$ ve bu algoritmanın sonucunda n! çıkış olarak verilir.

1. eğer n=0 ise
2. $f \leftarrow 1$
3. aksi durumda $f \leftarrow n*f(n-1)$

Bu algoritmanın her zaman bitime gitmesi mümkün müdür? Eğer $n \in Z^-$ ise, bu algoritma bitime gitmez. Özyineleme ile ispat yönteminin bu algoritma için nasıl çalıştığını göstermek için algoritma bitime gidiyorsa, P(n) doğru ve gitmiyorsa, P(n) yanlış kabul edilsin.

İyi Keşfedilmiş Tanım Kümesi : Eğer $n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\} = \mathbf{N}$ ise, bu özellik vardır (> göre) ve minimum eleman 0 olur.

Tümevarım bazı : n=0 için program bitime gider ve baz durumu oluşur.

Tümevarım Hipotezi : $n \geq 0$ için bitime gittiğini ispatlamak için bütün $m<n$ için bitime gittiği kabul edilsin.

Tümevarım Adımı : $\forall m$, $m<n$ için f(m) bitime gittiği kabulü kullanılarak f(n) bitime gittiği gösterilir.

Sonuç : $n \geq 0$ için bu algoritma bitime gider.

9.3.Yapısal Tümevarım

Yapısal tümevarım, kısaltma kuralları kullanılmadan özyinelemeli tanımlama ile elde edilen tanım kümelerine uygulanabilir. Bu durumda tanım kümesinin iyi keşfedilmiş olması ihtiyacı yoktur. Bununla birlikte x üretmek için y değerlerine ihtiyaç olduğu zaman G(x,y) doğru olur. Bu bağlamda y, x' in bir parçası olur. $\forall x$, P(x) sağlandığını göstermek için bütün baz durumları için P(x) ilk olarak ispatlanmalıdır.

Yapısal tümevarım yöntemi aşağıdaki gibi kısaca özetlenebilir.

Tümevarım bazı: Eğer x temel bir nesne ise, P(x) önermesinin doğru olduğu ispatlanmalıdır.
Tümevarım hipotezi : $\forall y$, $y<x$ için P(y) doğru olduğu kabul edilir ve P(x) önermesinin ispatı yapılır.
Tümevarım Adımı : P(x) ispatlanır.
Sonuç : $\forall x$, P(x) sonuçlanır.

Teorem 9.1
Yüksekliği n olan bir ikili ağaçta maksimum 2^n-1 tane düğüm vardır.

İspat
Bu teoremin ispatı tümevarım ile gösterilebilir. Yapısal tümevarımda çizgelerle ilgili sorularda rahatlıkla kullanılabilir.

Tümevarım Bazı : Yüksekliği 0 olan ağaçlar boş ağaçlardır.
Tümevarım Hipotezi : Herhangi bir ikili ağaçta bütün alt ağaçlar için iddianın doğru olduğu kabul edilir.
Tümevarım Adımı : Yüksekliği n olan bir ikili ağacın özalt ağacı olan bir başka ağaç en fazla n-1 yüksekliğinde olur. Tümevarım yönteminden, bu çizgede maksimum 2^{n-1}-1 tane düğüm vardır. Çünkü bu şekilde iki tane alt ağaç vardır ve her birinde 2^{n-1}-1 tane düğüm olur. Kök düğüm ile beraber böyle bir ağaçta

$$2(2^{n-1}-1)+1$$

düğüm olur. Böylece toplam 2^n-1 tane düğüm olduğu gösterilmiş olur.
Sonuç : Yüksekliği n olan bir ağaçta maksimum 2^n-1 tane düğüm vardır ♦

Teorem 9.2
n tane düğüm içeren bir ikili ağaç tam olarak n+1 tane boş alt ağaç içerir.

İspat
Bu teoremde yapısal tümevarımla ispatlanabilir.

Tümevarım Bazı : n=1 için ağaçta bir tane düğüm vardır ve bu düğümün iki tane çocuğu vardır; fakat ikisi de boştur.
Tümevarım Hipotezi : Herhangi bir ağacın bütün özalt ağaçları için teoremin doğru olduğu kabul edilsin. Böylece, eğer ağaçta n tane düğüm varsa, m<n için m tane düğüm içeren bir ağaçta m+1 tane boş ağaç olduğu varsayımı yapılır.
Tümevarım Adımı : n>1 için n tane düğüm içeren bir ağaçta n+1 tane boş ağaç vardır. Böyle bir ağaçta bir tane kök vardır ve bunun sonucunda bu ağaçtan ağacın geriye kalan kısmı için n-1 tane düğüm vardır. Bundan sonra aşağıdaki işlemleri yapmadan dışarı çıkabilirsiz.

a) n>0 için alt ağaçlardan biri boş ise, diğerinde n-1 tane düğüm vardır. n-1 düğümü olan bir ağaçta n tane boş ağaç vardır. Sonuçta ağacın kendisi n+1 tane boş ağaç içermektedir.

b) Hemen sonraki ağaç boş değilse, m_1 tane düğüm sol alt ağaçta ve m_2 tane düğüm sağ alt ağaçta olsun ve $m_1+m_2=n-1$ olur. Tümevarım hipotezine göre, sol alt ağaç m_1+1 tane boş ağaca sahiptir ve sağ alt ağaç m_2+1 tane boş ağaca sahiptir. Böylece $(m_1+m_2+2)=(n-1)+2$ boş ağaç vardır. İstenildiği gibi n+1 tane boş ağaç vardır.

Sonuç : n tane düğümü olan bütün ikili ağaçlarda n+1 tane boş ağaç vardır ♦

Bölüm Soruları

9.1. $n \geq 0$ için $2^n \geq n^3$ olduğunu tümevarımla gösteriniz.