BÖLÜM 5. SAYILAR, KUVVETLERİ VE LOGARİTMA

Doğal sayılar kümesi

N={0,1,2,....}

şeklinde bir küme olup sonsuz sayıda elemana sahiptir. Bu küme alttan sınırlı ve üstten sınırsızdır. Tamsayılar kümesi ise her iki taraftan da sınırlı değildir ve

Z={.....,-2,-1,0,1,2,.......}

şeklindedir. Rasyonel sayılar kümesi ise,

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b, \in Z \right\}$$

olan bir kümedir. Bu küme bir tamsayının başka bir tamsayıya olan oranı sonucunda elde edilen sayılar kümesidir. Gerçel (**R**) sayılar kümesi ise, rasyonel ve irrasyonel sayılar kümelerinin birleşiminden oluşur. İrrasyonel sayılara birkaç tane aşağıdaki gibi örnek olarak verilebilir.

π=3.141803398874989....

ve bu değer bir çemberin çevresinin çapına olan oranıdır. Altın oran olarak bilinen

$$\phi=1.61803398874989......=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

şeklindedir.

Algoritma analizinde daha çok karşılaşılacak sayılar, tamsayılar, rasyonel sayılar ve reel (gerçel) sayılardır.

b sayısı bir pozitif reel sayı olsun ve bu sayının üsleri

$b^0=1$,
$b^n=b^{n-1}b$ eğer $n>0$
$b^n=b^{n+1}/b$ eğer $n<0$
$b^{x+y}=b^x b^y$
$(b^x)^y=(b^y)^x=b^{xy}$

şeklinde verilir.

Eğer r bir pozitif bir gerçel sayı ve m bir pozitif tamsayı ise, her zaman v gibi bir sayı r sayısının m. köküdür, yani $v^m=r$. Rasyonel üsler için ise

$$b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{b^p}$$

olur.

Eğer bütün reel a ve b sabitleri için (a>1)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \qquad (5.1)$$

oluyorsa, $n^b=o(a^n)$ olur. Bunun anlamı herhangi bir üstel fonksiyon daima polinom şeklinde olan bir fonksiyondan daha hızlı artar. Buna örnek olarak bütün gerçel x değerleri için

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \qquad (5.2)$$

olur. "!" sembolü faktöriyel işlemini göstermektedir. Buradan $e^x \geq 1+x$ olduğu açıkça görülmektedir. Eğer x=0 ise eşitlik sağlanır ve eğer $|x| \leq 1$ ise

$$1+x \leq e^x \leq 1+x+\Theta(x^2) \qquad (5.3)$$

olur. x sıfıra giderken eşitsizliğin sağ tarafı

$$e^x=1+x+\Theta(x^2) \tag{5.4}$$

şeklinde eşitlik olur.

$y\in R^+$ için $y=b^x$ eşitliğini sağlayacak $x\in R$ gibi bir sayı var mıdır? Bu sorunun cevabı evettir ve x sayısına b tabanına göre y sayısının logaritması denir. Diğer bir deyişle üstel fonksiyonların ters fonksiyonu olan logaritma ile ilgili olarak şunlar verilebilir.

$$x=\log_b y$$

şeklinde gösterilir. Bu tanımdan

$$x=b^{\log_b x}=\log_b(b^x)$$

elde edilir. x>0 ve y>0 için

$$\log_b(xy)=\log_b x+\log_b y \tag{5.5}$$

olduğu aşikardır. Logaritmada taban 10 ise, logaritma fonksiyonu yazılırken 10 değeri gösterilmez ve x=logy şeklinde gösterilir. Eğer taban 2 ise, x=lgy şeklinde gösterilir ve e=2.718281828459045.... sabit sayısı taban olarak seçildiği zaman buna doğal logaritma denir ve

$$x=\ln y$$

şeklinde ifade edilir. a ve b farklı sayılar olmak üzere $\log_a y$ ile $\log_b y$ arasında bir ilişki vardır.

$$\begin{aligned}\log_a y &= \log_a(b^{\log_b y})\\ &= (\log_b y)(\log_a b)\end{aligned} \tag{5.6}$$

olur. Böylece

$$\log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a} \tag{5.7}$$

olur. Logaritmanın diğer özellikleri aşağıdaki gibi listelenmiştir.

$\lg n = \log_2 n$
$\ln n = \log_e n$
$\lg^k n = (\lg n)^k$
$\lg \lg n = \lg(\lg n))$

Logaritma fonksiyonu kullanılırken dikkat edilmesi gereken noktalardan biri logn+k fonksiyonu (logn)+k fonksiyonudur; log(n+k) fonksiyonu değildir. n>0 ve b>1 sayıları için $\log_b n$ fonksiyonu sürekli artan bir fonksiyondur.

Bütün a>0, b>0, c>0 ve n reel sayıları için

$a = b^{\log_b a}$
$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$
$\log_b a^n = n\log_b a$
$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
$\log_b(1/a) = -\log_b a$
$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

şeklinde tanımlanır.

Bir logaritma tabanının sabit bir sayıdan başka bir sabit sayıya değiştirilmesi, logaritmanın değeri sabit bir faktör kadar değişir. Bazı durumlarda logaritmanın seriye açılmış şekli kullanılabilir. Bundan dolayı ln(1+x) (|x|<1) logaritmik ifadenin açılımı

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots.$$

olur ve x>-1 için ise aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$$

ve yukarıda verilen eşitsizlikte x=0 durumunda eşitlik sağlanır. Bir f(n) fonksiyonu için $f(n)=\lg^{O(1)}(n)$ şeklinde bir sınırlama getirilebiliyorsa, f(n) fonksiyonuna ***polilogaritmik sınırlı*** bir fonksiyon denir ve O(1) ifadesinin anlamı O-notasyonun içerisi herhangi bir pozitif sabittir. Yani O(1)=1, O(1)=10000, O(1)=1/9000 vb. gibi. (5.1) ifadesinde n yerine lg n ve a yerine de 2^a yazılırsa polinom sınırlı ve polilogaritmik sınırlı fonksiyonlar arasında bir ilişki kurulmuş olur ve bu ilişki aşağıdaki gibi olur.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lg^b n}{2^{a \lg n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\lg^b n}{n^a} = 0$$

Bu limitten yola çıkılarak $\lg^b n=o(n^a)$ ilişkisi elde edilir.

Algoritma analizinde sıkça görülen iki tane özel fonksiyon vardır. Bunlar ***tavan*** ve ***taban*** fonksiyonlarıdır. Taban fonksiyonu kendisine parametre olarak gelen değerden küçük en büyük tamsayıyı verir ve $\lfloor . \rfloor$ sembolü ile gösterilir. Tavan fonksiyonu ise kendisine gelen parametre değerinden büyük en küçük tamsayıyı verir ve $\lceil . \rceil$ ile gösterilir. Örnek olarak

$\lfloor 0.1 \rfloor=0$
$\lfloor 0.000001 \rfloor=0$
$\lfloor -0.000001 \rfloor=-1$
$\lfloor 2.9 \rfloor=2$
$\lfloor 2.000001 \rfloor=2$

ve

$\lceil 0.00001 \rceil=1$
$\lceil 0.9 \rceil=1$

$\lceil 3.000001 \rceil = 4$
$\lceil 3.999 \rceil = 4$
$\lceil -3.9 \rceil = -3$
$\lceil -3.00001 \rceil = -3$

olur.

Bütün reel x sayıları için

$x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$

olur. Herhangi bir n tamsayısı için

$\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$

olur. a ve b sıfırdan farklı tamsayıları için

$\lceil \lceil n/a \rceil / b \rceil = \lceil n/ab \rceil$

ve

$\lfloor \lfloor n/a \rfloor / b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor$

olur. Taban ve tavan fonksiyonları monotonik artan fonksiyonlardır. Algoritma analizinde genellikle tamsayı ile ilgilenildiğinden dolayı bu iki fonksiyona sıkça ihtiyaç duyulur.

Bölüm Soruları

5.1. ln(xy)=lnx+lny eşitliğinin ispatını geometrik olarak gösteriniz.

5.2. $0<n<90000$ olmak üzere n sayısının karekökünün taban fonksiyonu n sayısını bölen sayılar kaç tanedir?