BÖLÜM 8. ÇARPIM VE TOPLAM SEMBOLLERİ

a_0, a_1, ..., bir sayılar dizisi olsun ve bu dizinin elemanlarının toplamını bulmak bazı durumlarda gerekebiliyor ve bu toplam aşağıdaki gibi sembolize edilmektedir.

$$\sum_{1 \le k \le n} a_k \tag{8.1}$$

Eğer n değeri sıfır veya negatif ise toplam sıfır olarak kabul edilmektedir. k endeksi için bir şart bağıntısı da verilebilir ve bu bağıntı B(k) ise toplam sembolü

$$\sum_{B(k)} a_k \tag{8.2}$$

olur. Eğer B(k) şartını sağlayan tamsayı yoksa, toplamın sonucu sıfır olur. (8.2)' de verilen toplam işleminde endeksin üst sınırı belli değildir, fakat B(j) içerisinde verilen şartları sağlayan j değerleri alınır. Eğer toplam sembolünde indis sonsuza kadar gidiyorsa, bu durumda (8.1) ve (8.2)' de verilen eşitlikleri yerine

$$\sum_{k \ge 1} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{8.3}$$

sembolü kullanılır. Bu sonsuza giden toplamın var olabilmesi için

$$\sum_{B(j)} a_j = \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{B(j), 0 \le j \le n} a_j \right) + \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{B(j), -n \le j < 0} a_j \right)$$

eşitliğinde her iki limitin var olması gerekmektedir. Limitlerden biri veya her ikisi de yoksa, bu serinin toplamı ıraksayan bir toplam olur. Toplam sembolünde yazılan şartların hepsinin sağlandığı durumlar göz önüne alınır.

Toplam sembolünün dört tane önemli özelliği vardır ve bunlar bilindiği zaman bir çok problemin çözümü daha rahat yapılabilmektedir. Bu özellikler aşağıdaki gibi olur.

a) Dağılım özelliği

$$\left(\sum_{B(k)} a_k\right)\left(\sum_{S(j)} b_j\right) = \sum_{B(k)}\left(\sum_{S(j)} a_k b_j\right) \tag{8.4}$$

Şu örnek üzerinde değişim özelliği daha rahat anlaşılır hale getirilebilir.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{1\le k\le 2} a_k\right)\left(\sum_{1\le j\le 3} b_j\right) &= (a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + b_3) \\ &= (a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3) + (a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3) \\ &= \sum_{1\le k\le 2}\left(\sum_{1\le j\le 3} a_k b_j\right)\end{aligned}$$

olur. Arzu edenler sağ taraftaki ifadede parantezi kaldırabilirler. İç içe birden fazla toplam sembolü var ve bu toplam sembollerin endeksleri arasında herhangi bir bağıntı yoksa, bu toplam sembolleri arasında istenilen her türlü yer değiştirme yapılabilir ve işlemin sonucu değişmez.

b) Değişken değişimi

$$\sum_{R(i)} a_i = \sum_{R(j)} a_j = \sum_{R(p(j))} a_{p(j)} \tag{8.5}$$

Burada verilen eşitliklerde iki tane değişim vardır. İlk değişim endeksin isminin değiştirilmesi ile ilgiliyken, ikinci değişimde ise endeks bir bağıntı ile hesaplanmaktadır. Bu bağıntıya önceki endeks parametre olarak gelmektedir ve çıkışta ise kullanılacak olan endeks üretilmektedir. Bu duruma endeks permutasyonu da denilebilir.

Örneğin, p(j)=c+j veya p(j)=j-c şeklindeki bağıntılar doğru çalışır ve endeks sırasını değiştirir. Bu değişimin daha rahat anlaşılması için

$$\sum_{1\le j\le n} a_j = \sum_{1\le j-1\le n} a_{j-1} = \sum_{2\le j\le n+1} a_{j-1}$$

değişimleri doğru çalışır. Bütün sonsuz toplamlar için j yerine p(j) değişimi her zaman yapılamaz. Eğer p(j)=j±c şeklinde bir değişim yapılacaksa, problem çıkmaz. Fakat bunun dışındaki endeks değişimlerinde biraz daha dikkatli olmak gerekiyor.

c) Toplam sembollerinin sırasının değiştirilmesi

$$\sum_{R(k)}\sum_{S(j)} a_{kj} = \sum_{S(j)}\sum_{R(k)} a_{kj} \qquad (8.6)$$

Bu denklemin basit ve önemli bir özelliği vardır.

$$\sum_{R(k)}\sum_{1\le j\le 2} a_{kj} = \sum_{R(k)} (a_{k1} + a_{k2})$$

$$\sum_{1\le j\le 2}\sum_{R(k)} a_{kj} = \sum_{R(k)} a_{k1} + \sum_{R(k)} a_{k2}$$

(8.6) eşitliğinden dolayı bu eşitliklerin her ikisi de birbirine denktir; bu

$$\sum_{R(k)} (b_k + c_k) = \sum_{R(k)} b_k + \sum_{R(k)} c_k$$

eşitliğinden başka bir şey değildir ($b_k=a_{k1}$ ve $c_k=a_{k2}$). Toplam sembollerinin sırasını değiştirme işlemi çok kullanılan bir işlemdir. Her toplam sembolünün bağlı olduğu şart basit olduğu zaman sırayı değiştirmek o kadar sıkıntılı değildir, fakat şart birden fazla endekse bağlı ise, bu durumda biraz daha dikkat gerektiren işlemlerin yapılması gerekiyor. Toplam sembollerinin sırasının değiştirilmesi

$$\sum_{R(k)} \sum_{S(k,j)} a_{kj} = \sum_{S'(j)} \sum_{R'(k,j)} a_{kj}$$

şeklinde yapılmalıdır. S'(j) şartının anlamı şudur. Öyle bir k tamsayısı vardır ki hem R(k) ve hem de S(k,j) şartlarını doğru yapmaktadır. Örneğin,

$$\sum_{1\le k\le n} \sum_{1\le j\le k} a_{kj} = \sum_{1\le j\le n} \sum_{j\le k\le n} a_{kj}$$

şeklinde olur. j endeksinin alabileceği durumlar

$1\le j\le 1$, $1\le j\le 2$, $1\le j\le 3$, ..., $1\le j\le n$

şeklindedir. Sonsuz seriler için her zaman sıra değiştirmesi doğru olmaz.

d) Tanım kümesiyle oynama: Eğer R(k) ve S(k) birer bağıntı iseler

$$\sum_{R(k)} a_k + \sum_{S(k)} a_k = \sum_{R(k)\vee S(k)} a_k + \sum_{R(k)\wedge S(k)} a_k \tag{8.7}$$

elde edilir.

Örneğin,

$$\sum_{1\le k\le r} a_k + \sum_{r\le k\le n} a_k = \left(\sum_{1\le k\le n} a_k \right) + a_r$$

olur. Bu işlemlerin daha iyi anlaşılması için birkaç örnek üzerinde bu işlemlere bakılabilir.

Örnek 8.1

$$\begin{aligned}
\sum_{0\le j\le n} a_j &= \sum_{\substack{0\le j\le n \\ j \text{ çift}}} a_j + \sum_{\substack{0\le j\le n \\ j \text{ tek}}} a_j \\
&= \sum_{0\le 2j\le n} a_{2j} + \sum_{0\le 2j+1\le n} a_{2j+1} \\
&= \sum_{0\le j\le n/2} a_{2j} + \sum_{0\le j\le n/2} a_{2j+1}
\end{aligned}$$

Örnek 8.2

$$T_1 = \sum_{0\le k\le n} \sum_{0\le j\le k} a_k a_j = \sum_{0\le j\le n} \sum_{j\le k\le n} a_k a_j$$

$T_1=T_2$ için

$$\sum_{0\le k\le n} \sum_{k\le j\le n} a_k a_j$$

olsun. k ve j endekslerinin yer değiştirmesi ve $a_k a_j = a_j a_k$ olduğu açıktır. Buradan

$$\begin{aligned}
2T_1 &= T_1 + T_2 \\
&= \sum_{0\le k\le n} \left(\sum_{0\le j\le k} a_k a_j + \sum_{k\le j\le n} a_k a_j \right) \\
&= \sum_{0\le k\le n} \left(\left(\sum_{0\le j\le n} a_k a_j \right) + a_k a_k \right) \\
&= \sum_{0\le k\le n} \sum_{0\le j\le n} a_k a_j + \sum_{0\le k\le n} a_k a_k \\
&= \left(\sum_{0\le k\le n} a_k \right) \left(\sum_{0\le j\le n} a_j \right) + \left(\sum_{0\le k\le n} a_k^2 \right) \\
&= \left(\sum_{0\le k\le n} a_k \right)^2 + \left(\sum_{0\le k\le n} a_k^2 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan elde edilen önemli bir özellik vardır ve bu özellik

$$\sum_{0\le k\le n}\sum_{0\le j\le k} a_k a_j = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{0\le k\le n} a_k\right)^2 + \left(\sum_{0\le k\le n} a_k^2\right)\right) \qquad (8.8)$$

şeklindedir.

Toplam sembolü ile verilen bir seride ardışık olan her eleman çifti arasındaki fark sabit ve eşit ise bu serilere aritmetik seriler denir. Geometrik seriler ise bütün ardışık terim çiftinden endeksi büyük olanının küçük olana oranı sabittir.

Örnek 8.3

x sayısı birden farklı ve n sayısı da negatif olmayan bir sayı olmak üzere geometrik serinin toplamı

$$\begin{aligned} a + ax + \cdots + ax^n &= \sum_{0\le j\le n} ax^j \\ &= a + \sum_{1\le j\le n} ax^j \\ &= a + x\sum_{1\le j\le n} ax^{j-1} \\ &= a + x\sum_{1\le j\le n-1} ax^j \\ &= a + x\sum_{0\le j\le n} ax^j - ax^{n+1} \end{aligned}$$

Birinci adım ile beşinci adımı karşılaştırırsak,

$$(1-x)\sum_{0\le j\le n} ax^j = a - ax^{n+1}$$

olur ve buradan şu temel bağıntı elde edilir.

$$\sum_{0\le j\le n} ax^{j} = a\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) \tag{8.9}$$

Örnek 8.4

Aritmetik serinin toplamı için n negatif olmayan bir sayı olmak üzere

$$\begin{aligned}
&a+(a+b)+(a+2b)+...+(a+nb)\\
&= \sum_{0\le j\le n}(a+bj)\\
&= \sum_{0\le n-j\le n}(a+b(n-j))\\
&= \sum_{0\le j\le n}(a+bn-bj)\\
&= \sum_{0\le j\le n}(2a+bn) - \sum_{0\le j\le n}(a+bj)\\
&= (n+1)(2a+bn) - \sum_{0\le j\le n}(a+bj)
\end{aligned}$$

olur. İlk eşitlikteki terim ile en son elde edilen terimlerin birbirine eşitlenmesi ile

$$\begin{aligned}
&\sum_{0\le j\le n}(a+bj) = (n+1)(2a+bn) - \sum_{0\le j\le n}(a+bj)\\
&\Rightarrow \sum_{0\le j\le n}(a+bj) = a(n+1) + \frac{1}{2}bn(n+1)
\end{aligned} \tag{8.10}$$

olur.

Diğer bir toplam sembolünün özelliği de lineerlik özelliğidir ve

$$\sum_{B(k)}(ca_k + b_k) = c\sum_{B(k)} a_k + \sum_{B(k)} b_k \tag{8.11}$$

şeklinde tanımlanır. Toplam sembolünün asimptotik notasyon ile gösterimi ise (8.12) eşitliğinde görülmektedir.

$$\sum_{k=1}^{n}\Theta(f(k)) = \Theta\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right) \qquad (8.12)$$

Geometrik seriye örnek olarak

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

verilebilir. Eğer |x|<1 için ve n sonsuza gidiyorsa, serinin elemanlarının toplamı (limit olarak)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad (8.13)$$

olur. Gerçel bir x için ise, n sonsuza giderken toplam sonsuz olur. Sınırlı bir n için toplam

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{(1-x^{n+1})}{1-x} \qquad (8.14)$$

olur. Diğer bazı özel serilere Harmonik ve teleskopik seriler örnek olarak verilenilir. Harmonik seri

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad (8.15)$$

şeklinde tanımlanır ve $H_n=\ln(n)+O(1)$ olur. Teleskopik seri a_0, a_1, …, a_n elemanları için

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 \qquad (8.16)$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_n \tag{8.17}$$

şeklinde bir seri tanımlaması yapılabilir. Diğer bir özel seri de

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \tag{8.18}$$

olan serisidir. Herhangi bir x gerçel sayısı için aşağıdaki önemli limit değerleri vardır ve sıkça kullanılan değerlerdir.

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \tag{8.19}$$

ve

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \tag{8.20}$$

Eğer bir a_0, a_1, …, a_n serisinin bütün elemanlarının çarpımı yapılacaksa,

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 a_1 \ldots a_n \tag{8.21}$$

şeklinde yazılır ve kullanılan $\prod$ sembolüne çarpım sembolü denir. Çarpım sembolü kullanılarak faktöriyel tanımı tekrar yapılabilir ve aşağıda gösterildiği gibi olur.

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1.2.\cdots.n\,.$$

Bölüm Soruları

8.1. Aşağıdaki çarpım işleminin eşiti nedir?

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

8.2. Aşağıdaki çarpım işleminin eşiti nedir?

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

8.3. Aşağıdaki toplamın sonucu nedir?

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{30}{k}\right\rfloor$$

8.4. Aşağıdaki işlemin sonucu nedir?

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{10000}{k}\right\rfloor$$

8.5. Aşağıdaki işlemin soncu nedir?

$$\prod_{k=1}^{30}\left\lceil\sum_{j=1}^{5}\left\lfloor\frac{5}{i}\right\rfloor\right\rceil$$