BÖLÜM 7. SAYMANIN TEMEL PRENSİBİ, FAKTÖRİYEL, PERMUTASYON VE KOMBİNASYON

Nesnelerin düzenlenmesi, nesnelerin belli bir özelliklerine göre sayılmaları, vb. konular ayrık matematiğin kombinatorik kısmında incelenir. Aynı zamanda hesaplama, algoritma analizlerinde de kullanılmaktadır.

Nesnelerin konulacakları yer sayısı belli ve nesnelerin sayısı da belli ise, nesnelerin bu yerlere yerleştirilmesi sayısı hesaplanabilir. Örneğin bilgisayarda eğer sekiz karakterli bir şifre kullanılıyorsa ve bu şifre rakam ve harflerden oluşuyorsa, kaç tane farklı şifre oluşturulacağı hesaplanabilir.

Eğer bir iş n_1 yol ile ve diğer işte n_2 yolla yapılmaktadır. Bu işler aynı zamanda yapılamıyorsa bu iki işten birinin yapılabilme yolları n_1+n_2 olur.

Toplama kuralı ikiden fazla iş için genelleştirilebilir. Örneğin işler T_1, T_2, ..., T_m ve n_1, n_2, ..., n_m yolla yapılıyor olsun, ve bu işlerden herhangi ikisi aynı anda yapılamıyor olsun. Bu işlerden birinin yapılabilme yol sayısı $n_1+n_2+...+n_m$ olur.

Örneğin aşağıdaki kod tamamen işletilirse k' nın değeri ne olur ?

İkinci adım sonunda k' nın değeri n_1 olur. Dördüncü adımın sonunda k' nın değeri $k=n_1+n_2$ olur. Bu işlem bütün adımlar sonuna kadar devam ettirilirse $k=n_1+n_2+...+n_m$ olur.

A_1, A_2, ..., A_m gibi kesişimleri boş küme olan kümeler olsunlar ve $|A_j|=T_j$ olsun. A_j kümesinden bir eleman seçme T_j değişik şekilde olur. Eğer bir elemanı herhangi bir kümede seçme durumu hesaplanacaksa

Algoritma 7.1. Deneme	
1-	$k \leftarrow 0$
2-	$i_1 \leftarrow 0$ ‘ dan n_1 kadar
3-	$k \leftarrow k+1$
4-	$i_2 \leftarrow 0$’ dan n_2 kadar
5-	$k \leftarrow k+1$
.	
.	
m-	$i_m \leftarrow 0$’ dan n_m kadar
(m+1)-	$k \leftarrow k+1$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = |T_1| + |T_2| + \cdots + |T_m|$$

kadar yolla olur.

Eğer bir iş ikiye parçalanıp işin ilk kısmı n_1 yolla ve işin geriye kalan kısmı da n_2 yolla yapılıyorsa, bu iş $n_1 n_2$ yolla yapılır.

Algoritma 7.2. Deneme	
1-	$k \leftarrow 0$
2-	$i_1 \leftarrow 0$’ dan n_1-1 kadar
3-	$i_2 \leftarrow 0$’ dan n_2-1 kadar
	.
	.
	.
	.
m-	$i_m \leftarrow 0$’ dan n_m-1 kadar
(m+1)-	$k \leftarrow k+1$

Eğer bu işlem genelleştirilecek olursa, T_1 işi n_1 yolla, T_2 işi n_2 yolla, ..., ve T_m işi de n_m yolla yapılıyorsa ve bu işleri eğer bir algoritma tarafından sıra ile yapılıyorsa, işin bütünün yapılması $n_1.n_2. \ldots .n_m$ yolla yapılır.

Örneğin aşağıdaki kodun işletilmesi sonucunda k' nın değeri ne olur ?

İlk döngünün içi n_1 kez çalışacaktır ve ikinci döngünün içi n_2 kez kendisinden dolayı çalışacaktır ve aynı zamanda kendisi birinci döngünün içinde olduğundan dolayı ikinci döngünün içi $n_1.n_2$ kez işletilecektir. Bu işlem sonuna kadar devam ettirilirse, bütün döngüler işletilecek olursa $k=n_1.n_2. \ldots .n_m$ olur.

Matematiğin sayma kısmında güvercin deliği olarak bilinen bir prensip vardır. Eğer delik sayısından bir fazla güvercin varsa ve bu güvercinler deliklere girecek olurlarsa ve hiçbir delik boş kalmayacaksa en az bir delikte iki tane güvercin olacaktır.

Daha matematiksel olarak, eğer k+1 veya daha fazla nesne k tane kutuya konulacak olursa, en az bir kutuda iki ya da daha fazla nesne olur. Örneğin, 366 kişiden aynı doğum gününe sahip en az iki kişi olur.

Bir nesne grubunun nesnelerin sırası göz önünde tutularak lineer olarak yan yana dizilmelerine permutasyon denir. Permutasyon çarpmanın kuralından çıkılarak hesaplanır.

Tanım 7.1
Verilen farklı nesneler koleksiyonu için, bu nesnelerin herhangi lineer düzenleme şekline ***permutasyon*** *denir.*

Genel olarak, eğer n tane farklı nesne varsa ve r tamsayısı $1 \leq r \leq n$ için, n' nin r' li permutasyonu (7.2) bağıntısına göre hesaplanır.

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

$$=n(n-1)\ldots(n-r+1).\frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(3)(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)\ldots(3)(2)(1)}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}$$

ve bu daha da genel olarak ifade edilecek olursa

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

Eğer verilen nesneler arasında sıra önemli değilse bu nesnelerin lineer olarak dizilmelerine **kombinasyon** denir. Bu farklı nesneler arasında r tane nesne seçilecek olursa bu işlemde kombinasyondur veya **seçme**dir.

n tane nesnenin r'li kombinasyonu (n bir pozitif tamsayı ve $0 \leq r \leq n$)

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Bunun sonucu olarak C(n,r)=C(n,n-r) olur. Çünkü

$$C(n,n-r)=\frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!}$$

$$\frac{n!}{(n-r)!(n-n+r)!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Genelde bu sayıya **binom katsayısı** denir.

Eğer x ve y değişkenler ve n bir tamsayı ise ($n \geq 0$)

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \cdots + \binom{n}{r}x^ny^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

olur. n ve k pozitif tamsayılar ve $n \geq k$

C(n+1,k)=C(n,k)+C(n,k-1)

olur. Bunun doğruluğu gösterilebilir. T bir küme olsun, |T|=n+1 ve $a \in T$ için S=T-{a} olsun.

C(n+1,k) tane k elemanlı T' nin altkümesi vardır. Bununla birlikte k elemanlı T' nin altkümelerinin bir kısmı a elemanını içerirler ve bir kısmı da içermezler. a' yı içeren alt kümeler k-1 elemanlı S' nin altkümelerini oluştururlar ve a' yı içermeyenler de k elemanlı S' nin altkümelerini oluştururlar. k elemanlı S' nin altküme sayısı C(n,k) olur ve k-1 elemanlı S' nin altkümelerinin sayısı ise C(n,k-1) olur. Buradan

C(n+1,k)=C(n,k)+C(n,k-1)

n pozitif bir tamsayı olsun

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$$

olur. Bu iddianın doğruluğunun gösterilmesi için bir kümenin sıfır elemanlı altküme sayısı 1'dir ve C(n,0); 1 elemanlı altkümelerinin sayısı n'dir ve C(n,1); 2 elemanlı altkümelerin sayısı C(n,2), yani n(n-1)/2'dir; ..., n elemanlı altkümelerin sayısı 1'dir ve C(n,n).

m, n ve r negatif olmayan tamsayılar olsunlar ve $r \leq m$ ve $r \leq n$ için

$$C(m+n,r) = \sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k)$$

olur. m tane eleman bir kümede ve n tane eleman da diğer bir kümede olduğu kabul edilsin. Bu iki kümenin birleşiminden r tane elemanı seçip almanın yol sayısı C(m+n,r) olur. k eleman bir kümeden ve r-k elemanda diğer kümeden alınırsa, bu işlem C(m,k)C(n,r-k) yolla yapılabilir. Buradan r tane iki kümenin birleşiminden seçmenin yol sayısı

$$C(m+n,r)=\sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k)$$

x ve y birer değişken olsunlar ve n pozitif bir tamsayı ise

$$(x+y)^{n}=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{n-k}y^{k}.$$

olur ve n pozitif tamsayısı için

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C(n,k)=0.$$

olur. Bunun doğruluğu gösterilebilir. Binom teoreminden

$$0=((-1)+1)=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)(-1)^{k}1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)(-1)^{k}$$

n,t pozitif tamsayıları için, $(x_1 + x_2 + ... + x_t)^n$ hesaplanmasında $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$ teriminin katsayısı

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_t!}$$

değerine eşit olur. Binom teoreminin ispatında olduğu gibi, $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$ terimim katsayısı n faktörün n_1 tanesinden x_1' i seçebilme yol sayısı, n-n_1 faktörün n_2 tanesinden x_2 seçme yol sayısı, bu şekilde devam ederek en sonunda n-n_1-n_2-...-n_{t-1} faktörün n_t (n-n_1-

n_2-...-n_{t-1}= n_t) tanesinden x_t seçebilme yol sayısı ile diğer yol sayılarının hepsinin çarpımım o terimin katsayısını verir ve

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{t-1}}{n_t}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$$
$$=\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_t}$$

olur ve buna aynı zamanda **multinomial** katsayı da denir.

Faktöriyel işlemi negatif olmayan tamsayılar için tanımlı olduğu kabul edilecektir. n gibi bir sayının faktöriyeli demek 1' den n' e kadar olan tamsayıların çarpımı demektir. Tanım olarak verilecek olursa

$$n!=\begin{cases}1 & n=0\\ n(n-1)! & n>0\end{cases}$$

olarak verilir.

Algoritma analizinde karşılaştırmaları yapabilmek için faktöriyelin de logaritmik, üslü veya polinom şeklindeki bir eşitinin veya yaklaşık değerinin bilinmesi gerekir. Bunun için

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

olduğu bilinmektedir ve "≈" sembolü yaklaşık değer olduğunu gösterir ve e ise doğal logaritmanın tabanıdır. Faktöriyelin değerine daha yakın değere sahip olan (7.14) bağıntısı da vardır.

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}\right)$$

Faktöriyel işleminin alt ve üst sınır ile verilmesi ise

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

şeklinde olur. Bütün n değerleri için faktöriyel işleminin aşağıdaki eşitsizliği verilebilir.

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n+(1/12n)}$$

Notasyonlar şeklindeki faktöriyel ifadeleri için

$n!=o(n^n)$
$n!=\omega(2^n)$

$\lg(n!)=\Theta(n\lg n)$

ilişkileri verilebilir.

Bölüm Soruları

7.1. {1,2,...,100} kümesinden toplamı çift olan ve birbirinden farklı olan üç tane sayı kaç yol ile seçilebilir?

7.2. $0<k\le n$ olmak üzere

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

olduğunu gösteriniz.

7.3. $0\le k<n$ olmak üzere

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$$

olduğunu gösteriniz.

7.4. Aşağıdaki eşitliğin olduğunu gösteriniz.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2}$$

7.5. $n \geq 0$, $j \geq 0$, $k \geq 0$ ve $j+k \leq n$ olmak üzere

$$\binom{n}{j+k} \leq \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$$

olduğunu tartışınız.

7.6. n tane karakterden oluşan bir dizinin k tane karakterden oluşan kaç tane alt dizisi vardır?