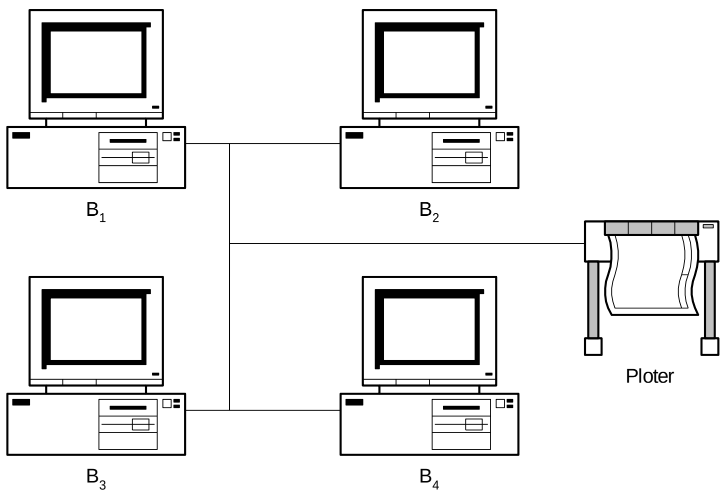
# ÇİZGELER

Günümüzde kullanılan bir çok sistem, varlıklar ve bu varlıklar arasındaki ilişkiden, veya nesneler ve bu nesneler arasındaki ilişkilerden veya olaylar (oluşlar) ve bu olaylar arasındaki ilişkilerden veya durumlar ve durumdan duruma geçiş elemanlarından oluşurlar.

Bu sistemlerin statik yapısını modellemek için kullanılan araçlardan biri çizgelerdir.

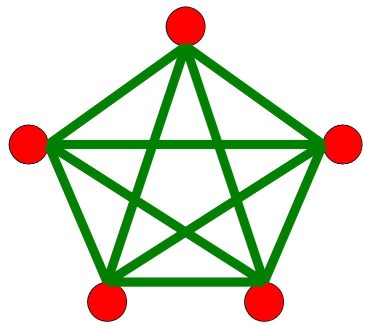



**Şekil 13.1.** *Bilgisayar Ağı.*

Şekil 13.1' de basit bir bilgisayar ağı görülmektedir. Bu ağdaki bilgisayarlar ve ploter varlık veya nesne olarak ele alınabilir ve aralarındaki bağlantılarda bu nesnelerin birbirlerine olan bilgi göndermeleri ve bilgi almalarına ait olan ilişkileri temsil etmektedir. $B_1$ bilgisayarı, $B_2$, $B_3$ ve $B_4$ bilgisayarları ile plotera bağlıdır. $B_2$ bilgisayarı, $B_1$, $B_3$ ve $B_4$ bilgisayarları ile plotera bağlıdır. $B_3$ bilgisayarı, $B_1$, B2 ve $B_4$ bilgisayarları ile plotera bağlıdır. $B_4$ bilgisayarı, $B_1$, B2 ve B3 bilgisayarları ile plotera bağlıdır. Ploter ise ağda bulunan bütün bilgisayarlara bağlıdır. Bütün bağlantılar sıralı ikili olarak ele alınırsa, elde edilecek ikililer listesi aşağıda verilmiştir.

$(B_1,B_2)$, $(B_1,B_3)$, $(B_1,B_4)$, $(B_1,Ploter)$ $(B_2,B_1)$, $(B_2,B_3)$, $(B_2,B_4)$, $(B_2,Ploter)$, $(B_3,B_1)$, $(B_3,B_2)$, $(B_3,B_4)$, $(B_3,Ploter)$, $(B_4,B_1)$, $(B_4,B_2)$, $(B_4,B_3)$, $(B_4,Ploter)$, $(Ploter,B_1)$, $(Ploter,B_2)$, $(Ploter,B_3)$ ve $(Ploter,B_4)$.

Bu şekilde verilen bilgisayar ağında beş tane nesne varken, 20 tane sıralı ikili vardır. Bu nesneleri ve verilen sıralı ikilileri daha soyut olarak Şekil 13.2' de verildiği gibi ifade edilebilir. Nesneler çemberlerle ve sıralı ikililerde bu çemberler arasında bulunan doğru parçası olarak ifade edilebilirler.



**Şekil 13.2.** *Şekil 13.1' de verilen bilgisayar ağının çizge modeli.*

## 13.1.Ayrıtlar, Düğümler, Çizge Çeşitleri

Çizgeler, iki sonlu kümeden oluşurlar. Bunlardan biri sonlu düğümler kümesidir, diğeri ise bu düğümler arasındaki ayrıtlar kümesidir. Genel olarak çizge $G=(V,E)$ ile gösterilir, $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ düğümler kümesidir ve $E=\{e_1,e_2,...,e_m\}$ ( $E \subseteq VXV$ ) ayrıtlar kümesidir.

Eğer $e_i=(v_j,v_{j+1}) \in E$ ve $(v_{j+1},v_j) \notin E$ ise bu tip ayrıtlara **yönlü ayrıt** denir ve $e_i=(v_j,v_{j+1})$ şeklinde gösterilir. Aynı zamanda $v_j$ ve $v_{j+1}$ düğümleri birbirine komşu (bitişik) düğümlerdir ve $ADJ(v_j)=v_{j+1}$, $ADJ(v_{j+1})=v_j$ olur. Eğer bir çizgenin ayrıtlarının hepsi yönlü ise bu çizgeye **yönlü çizge** denir. Eğer $e_i$ gibi bir ayrıt yönsüz ayrıt ise $e_i=(v_j,v_{j+1}) \in E$ ve $e_i=(v_{j+1},v_j) \in E$ olur. Yönsüz ayrıtlar $e_i=\{v_j,v_{j+1}\}$ veya $e_i=\{v_{j+1},v_j\}$ şeklinde gösterilir. Eğer bir çizgenin bütün ayrıtları yönsüz ise bu tip çizgelere **yönsüz çizge** denir. Bundan sonra, aksi belirtilmediği sürece yönsüz çizge yerine çizge terimi kullanılacaktır. $e_i=\{v_j,v_{j+1}\}$ ayrıtı için, $v_j$ ve $v_{j+1}$ düğümleri $e_i$ ayrıtının uç noktalarıdır.

$e_i=\{v_j,v_{j+1}\}$ olsun. Eğer $v_j=v_{j+1}$ ise $e_i$'ye **döngü** (**tek çevre**) denir. $e_i=\{v_j,v_{j+1}\}$ ve $e_{i+1}=\{v_k,v_{k+1}\}$ olsun. Eğer $v_k=v_j$, $v_{k+1}=v_{j+1}$ ve $v_k\neq v_{j+1}$, $v_{k+1}\neq v_j$ ise $e_i$ ve $e_{i+1}$ ayrıtlarına **paralel** (**koşut bağlı**) **ayrıtlar** denir. Uç noktaları farklı olan ayrıtlara **tek ayrıt** denir. Bir düğüme yalnız iki ayrıt bağlı ve bu ayrıtların öbür uç düğümleri birbirlerinden farklı ise bu ayrıtlara **dizi bağlı** ayrıtlar denir.

Bir çizgenin düğümler kümesinin eleman sayısı o çizgenin **mertebesini** verir, G=(V,E) için eğer |V|=n ise G çizgesinin mertebesi n'dir. v gibi bir düğüme giren ve çıkan ayrıt sayısına o **düğümün derecesi** (**kertesi**) denir ve d(v) ile gösterilir.

$v_i\in V$ için eğer $d(v_i)=0$ ise $v_i$ düğümü **izole** edilmiş bir düğümdür veya bu düğüme **tek düğüm** denir. Eğer $d(v_i)=1$ ise bu tip düğümlere **pendant** veya **uç düğüm** denir.

G=(V,E) bir yönsüz çizge olsun. Eğer $V=\varnothing$ veya $V\neq\varnothing$ ve $E=\varnothing$ ise bu tip çizgelere **boş çizge** denir ve $\forall v_i\in V$ için $d(v_i)=0$ olur. Bir adet tek düğümden veya tek çevreden, veya tek ayrıttan oluşan çizgelere **ilkel çizge** denir. Eğer bir çizge döngü ve paralel aytır içermiyorsa bu tip çizgelere **basit çizge** (**yalın çizge**) denir. Tek çevreleri (döngüleri) içeren çizgelere **sözde çizge** denir.

Bir çizgede, bir düğüme bağlı olan bütün ayrıtların oluşturduğu kümeye, o düğümün tanımladığı **çakışım kümesi** denir.

**Teorem 13.1**

G=(V,E) yönsüz bir çizge olsun. G çizgesi için

$$\sum_{i=1}^{|V|} d(v_i)=2|E| \qquad (13.1)$$

**İspat**

*Eğer $e_i\in E$ ise $e_i=\{v_j,v_{j+1}\}$ olduğundan bir ayrıt iki ayrı düğümün derecelerini birer arttırır, eğer ayrıt bir döngü ise bu ayrıt bir düğümün derecesini iki arttırır. Bundan dolayı düğümlerin dereceleri toplanırken bir ayrıt iki kez sayılacağından dereceler toplamı ayrıt sayısının iki katı olur* ■

**Teorem 13.2**
Bir çizgedeki derecesi tek olan düğüm sayısı her zaman çifttir.

**İspat**
*Eğer tek dereceli düğümlerin dereceleri ve çift dereceli düğümlerin dereceleri ayrı ayrı toplanırsa*

$$\sum_{i=1}^{|V|} d(v_i) = \sum_{\text{çift}} d(v_i) + \sum_{\text{tek}} d(v_k) \qquad (13.2)$$

*13.2 eşitliğin sol tarafı çifttir. Eşitliğin sağ tarafındaki dereceleri çift olan düğümlerin derecelerinin toplamı da çift olur. Çift bir sayıdan çift bir sayı çıkarılırsa sonuç çift olur.*

$$\sum_{\text{tek}} d(v_k) = \sum_{i=1}^{|V|} d(v_i) - \sum_{\text{çift}} d(v_i) \qquad (13.3)$$

*13.3 eşitliğin sağ tarafının çift olabilmesi için çift sayıda tek dereceli düğümün derecelerinin toplanmış olması gerekir* ■

Herhangi bir çizge için, eğer bütün düğümlerin dereceleri eşit ise bu tip çizgelere **düzenli çizge** denir. Eğer bir çizge paralel ayrıtlar içeriyorsa bu tip çizgelere **çoğul çizge** **(multi-çizge)** denir. Her türlü ayrıtı içeren çizgelere **karmaşık çizge** denir.

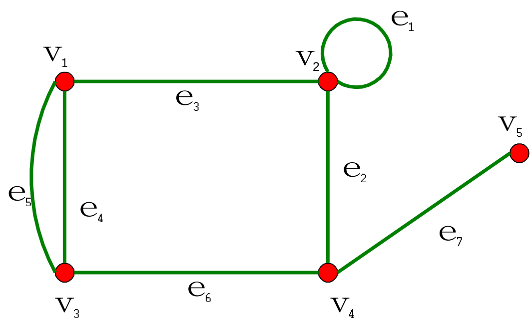
Tam olan bir çizgede her düğüm diğer bütün düğümler ile komşudur

$$\forall v_i \in V,\ Adj(v_i)=\{v_1,v_2,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_{|V|}\} \qquad (13.4)$$

Düzenli bir çizgede, eğer $\forall v_i \in V$, $d(v_i)=r$ ise du düzenli çizgeye **r-düzenli çizge** denir.

$G=(V,E)$ çizgesi iki parçalıdır eğer düğümler kümesi $V=V_1 \cup V_2$ ve $V_1 \cap V_2=\varnothing$ öyle ki, E' deki bütün ayrıtların bir ucu $V_1$' de ve diğer ucu $V_2$' dedir. İki parçalı ve tam olan çizgeler $K_{m,n}$ şeklinde gösterilirler ($|V_1|=m$ ve $|V_2|=n$).

$G=(V,E)$ çizgesi k-parçalıdır eğer V kümesi k tane öyle parçalara $V_1,\dots,V_k$ bölünebiliyor ki E içindeki bütün ayrıtların bir ucu $V_i$' de ve diğer ucu $V_j$' dedir, $i\neq j$. k-parçalı tam bir çizge basit bir k-parçalı çizge olup $V=\{V_1,\dots,V_k\}$, $\forall v_i \in V_r$, $\forall v_i \in V_s$, $r\neq s$, $1\leq r,s\leq k$, $\{v_i,v_j)\in E$.




**Şekil 13.3.** *Genel bir çizge*

**Örnek 13.1**

Şekil 13.3' teki çizgede görüldüğü gibi

$e_1=\{v_2,v_2\}$, $e_2=\{v_2,v_4\}$, $e_3=\{v_2,v_1\}$, $e_4=\{v_1,v_3\}$, $e_5=\{v_1,v_3\}$, $e_6=\{v_3,v_4\}$, $e_7=\{v_4,v_5\}$

$e_1=\{v_2,v_2\}$ ve $v_2=v_2$ olduğundan $e_1$ ayrıtı bir döngüdür. $e_4$ ve $e_5$ ayrıtları paralel ayrıtlardır. Bu çizge bir basit çizge değildir, çünkü hem döngü ve hem de paralel ayrıtlar içermektedir. Aynı zamanda döngüden dolayı multi-çizge de değildir. Bu çizge rast gele bir çizgedir.

Ayrıtların dereceleri ise $d(v_1)=3$, $d(v_2)=4$, $d(v_3)=3$, $d(v_4)=3$, $d(v_5)=1$. Bu çizgede izole edilmiş düğüm yok ve bir tane uç düğüm var ($v_5$). Düğümlerin dereceleri birbirine eşit olmadığından bu çizge bir düzenli çizge değildir. Bazı düğümler arasında ayrıt olmadığından bu çizge aynı zamanda bir tam çizge de değildir ■

$G=(V,E)$ yönsüz bir çizge olsun. $v_1,v_2\in V$ ($v_1$ ve $v_2$' nin farklı olması şart değildir)

$v_1=v_ie_jv_{i+1}e_{j+1}v_{i+2}\dots e_{j+n}v_{i+n}=v_2$

bu değişen seriye **yürüyüş (dolaşı)** denir.

Bir yürüyüşün uzunluğu o yürüyüş içinde bulunan ayrıt sayısıdır. Eğer $v_1=v_2$ ve yürüyüşün uzunluğu sıfır ise bu yürüyüşe **doğal yürüyüş** denir. Eğer yürüyüşün uzunluğu sıfır değil ve $v_1=v_2$ ise bu yürüyüşe kapalı yürüyüş denir, aksi halde açık yürüyüş denir.

Eğer $v_1$-$v_2$ yürüyüşünde tekrar eden ayrıt yok ise bu yürüyüşe **gezinti (gezi)** denir. $v_1$-$v_1$ gezintisine **çevre** denir. Eğer bir yürüyüşün düğümleri birden fazla tekrar etmiyorsa, bu yürüyüşe **yol** denir. Kapalı $v_1$-$v_1$ yoluna **devre** denir.

### Teorem 13.3

G=(V,E) yönsüz bir çizge olsun ve $v_1,v_2\in V$, $v_1\neq v_2$ olsun. Eğer $v_1$' den $v_2$' ye bir gezi varsa $v_1$' den $v_2$' ye bir yol vardır.

### İspat

*$\{v_1,v_i\}$, $\{v_{i+1},v_{i+2}\}$, ..., $\{v_{i+n},v_2\}$ bir gezi olsun. Eğer bu gezi bit yol değilse, $\{v_1,v_i\},\{v_{i+1},v_{i+2}\},\ldots,\{v_{i+k-1},v_{i+k}\}$, $\{v_{i+k},v_{i+k+1}\},\ldots,\{v_{i+m-1},v_{i+m}\},\{v_{i+m},v_{i+m+1}\},\ldots$, $\{v_{i+n},v_2\}$ gibi bir gezi vardır, öyle ki $v_{i+k}=v_{i+m}$. $\{v_1,v_i\},\{v_{i+1},v_{i+2}\}$ ,..., $\{v_{i+k-1},v_{i+k}\}$, $\{v_{i+m},v_{i+m+1}\},\ldots$, $\{v_{i+n},v_2\}$ daha kısa bir gezi olur* ♦

Yalın bir çizgenin her düğüm çifti birbirleriyle bitişik iseler bu tip çizgelere **tam (dolu) çizge** denir ve $\mathbf{K_n}$ ile gösterilir ( n çizgenin mertebesidir). Dolu çizgenin ayrıt sayısı $|E|=n(n-1)/2$ olur.

## 13.2.Alt Çizgeler ve Tamlayan (Tümleyen) Çizgeler

(V,E) bir çizge olsun. $G_2=(V_2,E_2)$ çizgesi G çizgesinin bir **alt çizgesidir**, eğer $E_2\subseteq E$ ve $V_2\subseteq V$. Eğer $E_2\subset E$ ise $G_2$ çizgesine G çizgesinin bir **özalt çizgesi** denir. Eğer $V_2=V$ ise $G_2$ çizgesine G çizgesinin bir **kapsar alt çizgesi** denir.

G=(V,E) yönsüz bir çizge olsun. Eğer herhangi iki düğüm arasında yol varsa, bu çizge bağlı çizgedir veya başka bir deyişle her düğüm çifti arasında en az bir yol bulunan çizgelere **bağlı çizge** denir.

Bağlı olmayan çizgelere parçalı çizge denir. G gibi bir çizgenin parça sayısı **κ(G)** ile gösterilir. Bir bağlı çizge için κ(G)=1 olur. Bir çizgenin kendi arasında bağlı olan ve olabildiğince çok sayıda ayrıtı içeren alt çizgelerinden her birine **parça** denir.

G=(V,E) ve $G_2=(V_2,E_2)$ birer yönsüz çizge olsunlar. Eğer $V_2 \subseteq V$, $E_2 \subseteq E$ ve $\forall(v_i,v_{i+1}) \in E_2$ ancak ve ancak $v_i,v_{i+1} \in V_2$ ise $G_2$ çizgesi G çizgesinin **indirgenmiş (düğüm-indirgenmiş) alt çizgesi** denir. Diğer bir deyişle, eğer $\forall v_i,v_{i+1} \in V_2$ ise E' nin elemanı olan ve uç noktaları $v_i$ ve $v_{i+1}$ olan bütün ayrıtlar aynı zamanda $E_2$' nin de elemanıdırlar.

Eğer $G_2$ çizgesi G çizgesinin bir alt çizgesi ise (G çizgesinde tek düğüm yok) $V_2$ içindeki bütün düğümler $E_2$' nin elemanlarının uç noktalarıdırlar. Bu durumda, $E_2$ tek olarak $V_2$' yi belirtebilir ve aynı zamanda $G_2$' yi de belirtebilir. Bu tip çizgelere **ayrıt-indirgenmiş alt çizge** denir. Aksi belirtilmediği sürece, indirgenmiş alt çizge terimi düğüm-indirgenmiş alt çizge teriminin yerine kullanılacaktır.

$G_2=(V_2,E_2)$ çizgesine G=(V,E) çizgesinin **tamlayanı (tümleyeni)** denir, eğer $(v_i,v_{i+1}) \in E_2$ ancak ve ancak $(v_i,v_{i+1}) \notin E$. Diğer bir deyişle, $G_2$ çizgesindeki iki tane düğüm birbirine bitişiktir ancak ve ancak bu iki düğüm G çizgesinde birbirine bitişik değilse. $G_2$ ve G çizgeleri için, eğer |V|=n, $V=V_2$, $K_n=(V,E_n)$ ise, $E \cup E_2=E_n$ olur. Eğer $G_2=(V,E_2)$ ve $G_3=(V,E-E_2)$ çizgeleri G çizgesinin alt çizgeleri iseler $G_3$ çizgesi $G_2$ çizgesinin tümleyen çizgesidir.

## 13.3.Bağlılık ve Çizgenin Parçaları

Eğer $v_i$ ve $v_j$ düğümleri arasında en az bir yol varsa, bu iki düğüm bağlı düğümlerdir denir. Her düğüm kendisine bağlıdır, çünkü bir düğümün kendisine olan en kısa yolun uzunluğu sıfır olur. Bir çizgede bütün düğüm çiftleri arasında en az bir yol varsa, bu tip çizgelere bağlı çizgeler denir.

Bir çizgede en az iki düğüm arasında yol yoksa, bu çizgelere parçalı çizgeler denir. G=(V,E) çizgesi parçalı bir çizge ve parça sayısı p ise, $V=V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_p$ olur. Her $G_i=(V_i,E_i)$, $1 \le i \le p$, çizgesi G çizgesinin alt çizgesi ve bağlı bir çizgedir. G çizgesinin düğüm indirgenmiş alt çizgesi $G_i$ ve $1 \leq i,j \leq p$ ve $i \neq j$ için $V_i$ içerisindeki herhangi bir düğümün $V_j$ kümesindeki herhangi bir düğüm ile komşuluğu yoktur. $G_i$ çizgesi bazı kaynaklarda $<V_i>$ şeklinde gösterilir. Parça sayısı bir olan çizgeler bağlı çizgelerdir.

**Teorem 13.4**

Bağlı bir çizgede en uzun iki yolda en az bir tane düğüm ortaktır.

**İspat**

*G=(V,E) çizgesi bağlı bir çizge olsun ve $P_1$ ve $P_2$ yolları bu çizgede bulunan en uzun iki yol olsun. Bu iki yolun içermiş oldukları düğümler*

$P_1$*:* $v_0, v_1, ..., v_k$
$P_2$*:* $u_0, u_1, ..., u_k$

*şeklinde olsunlar ve ortak düğüm olmadığı kabul edilsin. G bağlı olduğundan dolayı $P_a$ gibi bir yol vardır ve bu yolun $v_i$ ve $u_j$ düğümleri hariç diğer düğümleri $P_1$ ve $P_2$ yollarının düğümlerinden farklı olsun. Şekil 1.4' te görülen yollatın uzunlukları*

$t_1$ *:* $P_{11}$ *yolunun uzunluğu olsun.*
$t_2$ *:* $P_{12}$ *yolunun uzunluğu olsun.*
$t_3$ *:* $P_{21}$ *yolunun uzunluğu olsun.*
$t_4$ *:* $P_{22}$ *yolunun uzunluğu olsun.*
$t_5$ *:* $P_a$ *yolunun uzunluğu olsun.*

*şeklinde olsun. $P_1$ ve $P_2$ en uzun yollar olduklarından dolayı $t_1+t_2=t_3+t_4$ olur. Genelliği bozmadan $t_1 \geq t_2$ ve $t_3 \geq t_4$ olsun. Bu durumda $t_1+t_3 \geq t_2+t_4$ olur. $P_{11}+P_a+P_{21}$ yolunun uzunluğu $t_1+t_3+t_a$ olur ve $t_1+t_3+t_a \geq t_1+t_2=t_3+t_4$ olur ve bu yeni yol en uzun yol olur. Bu bir çelişkidir* ↯

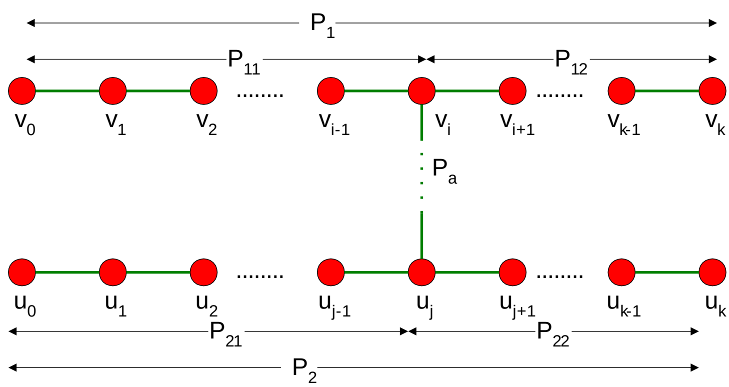
Bundan dolayı bir çizgede en uzun iki yolun ortak olan en az bir tane düğümü vardır.

**Teorem 13.5**
Eğer G=(V,E) çizgesi bağlı bir çizge ise, $G_1$=(V,E-e) çizgesi bir devre ayrıtının silinmesi sonucu elde edilir ve bağlı bir çizgedir.

## 13.4.Çizgeler Üzerinde Tanımlanan İşlemler

$G_1=(V_1,E_1)$ ve $G_2=(V_2,E_2)$ birer çizge olsunlar. Bu çizgeler üzerinde tanımlanabilen işlemler birleşim, kesişim, fark, çembersel toplam, düğüm silme, ayrıt silme, büzüştürme gibi işlemlerdir.

İki çizgenin **birleşimi**
$G=G_1 \cup G_2=(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$
İki çizgenin **kesişimi**
$G=G_1 \cap G_2=(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$




**Şekil 13.4.** *Ortak düğüm içeren en uzun iki yol.*

İki çizgenin **farkı**
$G=G_1-G_2=(V_1-V_2, E_1-E_2)$

**Çembersel toplam** ($V_1=V_2$ olmalı)
$G=G1 \oplus G2=(E_1-E_2) \cup (E_2-E_1)$

G çizgesi tekdüğüm içermez ve G' nin ayrıt kümesinin elemanları ya $E_1$' in elemanıdırlar ya da $E_2$' nin elemanladırlar, aynı anda her ikisinin elemanı olamazlar.

Yukarıda tanımlanan işlemlerden fark hariç diğerlernin değişim özelliği vardır.

$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1$
$G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1$
$G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1$

**Düğüm silme**
Eğer $v_i$ G çizgesinin bir düğümü ise, G-$v_i$ çizgesi G çizgesinin indirgenmiş alt çizgesidir ve düğümler kümesi V-$v_i$' dir. G-$v_i$ çizgesi G çizgesinden $v_i$ düğümü ve bu düğüme çakışık olan bütün ayrıtların silinmesi ile elde edilmiştir.

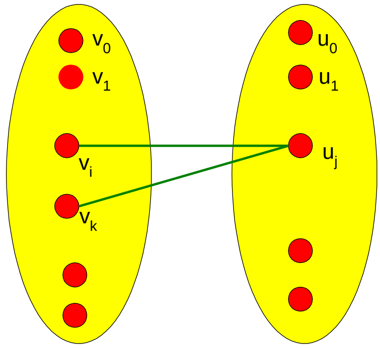
**Ayrıt silme**
Eğer $e_i$ G çizgesinin bir ayrıtı ise, G-$e_i$ çizgesi G çizgesinin ayrıt-indirgenmiş alt çizgesidir ve ayrıtlar kümesi E-$e_i$' dir. G-$e_i$ çizgesi G çizgesinden $e_i$ ayrıtın silinmesi ile elde edilir. $e_i$ ayrıtın çakışık olduğu düğümler silinmez.

**Kısa devre yapma**
$v_i$ ve $v_j$ gibi bir düğüm çiftinin yerine yeni tek bir düğüm koyup ve bu iki düğüme çakışık olan bütün ayrıtlar bu yeni düğüme çakışık hale getirilmesi işlemine kısa devre yapma denir.

**Büzüştürme**
e gibi bir ayrıtın silinip uç noktalarının kısa devre yapılmasıdır.

**Teorem 13.6**
Bir G=(V,E), $|V|=n\geq 2$, çizgesi bipartite çizgedir ancak ve ancak G çizgesi uzunluğu tek olan devre içermez.

**İspat. Gerek şartı.**
*G=(V,E) çizgesi bipartite bir çizge ise, $V=X\cup Y$ ve $X\cap Y=\varnothing$ olur. C bir devre olsun ve C devresi G çizgesinin bir devresi olsun. $v_0$ düğümü içerisinde olsun ve $v_0$ üzerinden başlanılsın. $v_i$ düğümü X içerisinde ve $v_j$ düğümü Y içerisinde olmak üzere ($v_i$,$v_j$) ayrıtı gezildiğinde ($v_j$, $v_k$) ayrıtı gezilmemiş durumda ve devrenin tamamlanması için bu ayrıtın gezilmesi gerekir. böylece $v_k$ düğümü X içerisinde olur.*




**Şekil 13.5.** *Teorem 13.6' nın ispatı için.*

**Yeter Şartı**

*$G=(V,E)$ çizgesinin uzunluğu tek sayı olan devre içermediği kabul edilsin ve G çizgesi bağlı bir çizgedir. G çizgesinden bir u düğümü seçilsin ve düğüm kümesi (X,Y) şeklinde bölmelensin ve*

*$X=\{x|\ d(u,x)$ bir çift sayıdır$\}$*
*$Y=\{y|\ d(u,y)$ sayısı tek sayıdır$\}$*

*şeklinde tanımlansınlar. (X,Y) ikilisi G çizgesinin bir bölmelemesidir. X içerisinde v ve w düğümleri seçilsin.* Gerekli olan durum w ve v *düğümlerinin G çizgesi içerisinde komşu olmadıklarının gösterilmesidir. Aksi iddia edilsin ve $e=(v,w)$ ayrının G çizgesi içerisinde olduğu kabul edilsin.*

*$P_1$* yolu *u-v arasındaki en kısa yol olsun*

*ve*

*$P_2$* yolu *u-w arasındaki en kısa yol* olsun.

*v ve w düğümleri X içerisinde olduklarından dolayı $P_1$* ve *$P_2$ yollarının uzunlukları çift sayı olur. $P_1$* ve *$P_2$ yolları gezildiğinde son ortak düğüm x olsun. $P_1$* ve *$P_2$ yolları en kısa yollar olduklarından dolayı her iki yol içerisinde u-x yollarının uzunlukları aynı olur. Böylece $P_1$* yolunun *x-v kısmının ve $P_2$* yolunun *x-w kısmının uzunlukları ya çift ya* *da tek olur (her ikisi aynı anda çift veya tek olur). Her iki yol birleştirildiği zaman uzunluğu çift olan bir yol elde edilir. e ayrıtı eklendiği zaman bir devre elde edilir ve uzunluğu tek olur. Bu bir çelişkidir ve buradan teorem ispatı yapılmış olur* ↯

## 13.5.Kesme Düğümleri ve Ayrışabilir Çizgeler

G=(V,E) çizgesinin p tane parçası olsun; yani $\kappa(G)=p$ olsun. Eğer $v_i$ düğümü G çizgesinden silindiğinde $\kappa(V-v_i, E')>p$ ise $v_i$ düğümüne kesme düğümü denir. Eğer G çizgesi bağlı bir çizge ise, $G-v_i$ çizgesi en az iki parçadan oluşur; yani $\kappa(G-v_i)\geq 2$ olur. İzole edilmiş düğümler ve pendant düğümler kesme düğümleri olamazlar. Eğer bir çizgede $|V|=1$ ise bu çizgeye **adi çizge** denir. Bir çizgede kesme düğümü yoksa, bu çizgeye ayrıştırılamaz çizge denir ve diğer çizgelerin hepsi ayrıştırılabilir çizgelerdir.

Şekil 1.4' te verilen çizgede $v_1$, $v_2$ ve $v_3$ düğümleri kesme düğümleridir. Bu düğümlerin herhangi birinin silinmesi sonucunda çizgenin değişmiş şekli kısmen olarak Şekil 1.6 (b)' de görülmektedir.

**Teorem 13.7**

G bir bağlı çizge olsun. v düğümü G çizgesinin kesme düğümüdür ancak ve ancak v düğümünden farklı her u, w düğümleri için v düğümü her u-w yolunun bir düğümüdür.

**İspat. Gerek Şartı.**

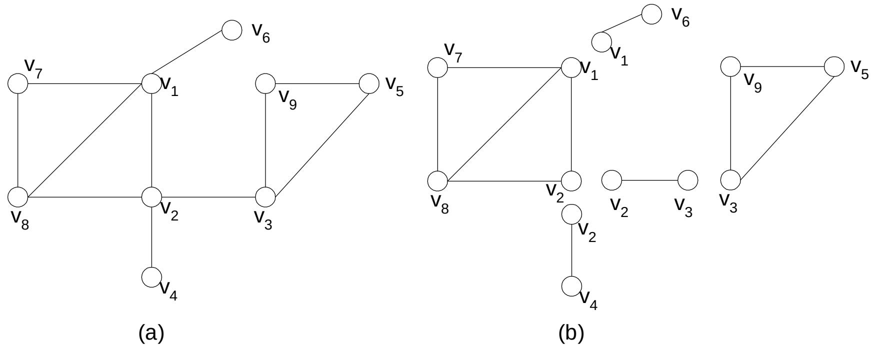
*v düğümü G çizgesinin kesme düğümü olduğuna göre G-v çizgesi bağlı bir çizge değildir. $G_1$ çizgesi G-v çizgesinin parçalarından biri olsun ve $G_1=(V_1,E_1)$. V-v kümesinde $V_2$ kümesi $V_1$ kümesinin tümleyeni olsun ve u düğümü $V_1$ içerisinde; w düğümü $V_2$ içerisinde olmak üzere u-w yolu G içerisindedir. Eğer v düğümü u-w yolu üzerinde değilse, bu yol da G-v çizgesi içerisinde olur; yani u ve w düğümleri G-v çizgesi içerisinde bağlı olurlar. Bu bir çelişkidir* ↯

**Yeter Şartı.**

*Eğer v düğümü her u-w yolu üzerinde ise, u ve w düğümleri G-v çizgesi içerisinde bağlı olmazlar. Böylece G-v çizgesi bağlı bir çizge değildir* ♦

**Teorem 13.8**
Her adi olmayan ve bağlı bir çizgede en az iki tane kesme düğümü olmayan düğüm vardır.

**İspat**
*G bir bağlı çizge olsun ve u, v düğümleri G çizgesinin düğümleri olsunlar ve u ve v arasındaki yolun uzunluğu G çizgesinin çapına eşit olsun; yani d(u,v)=diam(G) olsun.*




**Şekil 13.6.** *Kesme düğümleri*

*İddia: u ve v düğümleri G çizgesinin kesme düğümleri olmasınlar.*

*u ve v düğümlerinde biri kesme düğümü olduğu kabul edilsin. Buradan w düğümü G-v çizgesinin parçalarından u düğümünü içermeyen parçaya ait olsun. Bu durumda her u-w yolu üzerinde v düğümü olur; buradan*

*d(u,w)>d(u,v)=diam(G)*

*olur ve bu bir çelişkidir ↯*
*Böylece v düğümü bir kesme düğümü değildir ♦*

**Teorem 13.9**
n≥3 olmak üzere n tane düğüm içeren G çizgesi bir bloktur ancak ve ancak G çizgesi içerisinde her düğüm çifti arasında en az iki tane ayrık yol vardır.

**İspat**

*Ayrıştırılamayan çizgelere blok denir.*

**Gerek Şartı**

*G bir blok olsun ve aralarındaki uzaklık d(u,v) olan u ve v düğümleri düşünülsün. u ve v düğümleri arasında ayrık iki yolun olduğu d(u,v) üzerinde tümevarımla gösterilecektir.*

*İlk durum olarak d(u,v)=1 olduğu durumda u ve v bitişik düğümlerdir. e=(u,v) olsun ve G blok olduğundan kesme düğümü olmaz. Ne u ne de v düğümü kesme düğümüdür. Böylece G-e çizgesi bağlı bir çizgedir ve e ayrıtını içermeyen başka bir u-v yolu vardır.*

*d(u,v)<k için her u ve v düğümleri arasında iki tane yol olduğu kabul edilsin. u-v yolu üzerinde v düğümünden hemen önce gelen düğüm w olsun. Bu durumda d(u,w)=k-1 olur ve bu durumda u-w şeklinde iki tane yol vardır ve bunlardan biri p ve diğeri Q olsun. Eğer bu yollardan biri v düğümünü içeriyorsa, ispat yapılmış olur ve u-v arasında iki tane ayrık yol olur. P ve Q yollarının v düğümünü içermediği kabul edilsin. G bir blok olduğuna göre G-w çizgesi bağlı bir çizgedir. Böylece u-v yolu P* ve w düğümünü içermeyen bir yol vardır. P* yolunun, P veya Q yolunda olan en son düğümü x olsun. U düğümü üç yolda olduğuna göre x gibi bir düğüm vardır. Genel durumu bozmadan, x düğümü P yolunda olsun. Buradan G çizgesinde iki tane ayrık u-v yol vardır. Bunlardan biri P içerisinde u-x yolu ile P* içerisinde x-v yolunun birleştirilmesi ile elde edilir ve diğer yol da Q yoluna (w,v) ayrıtının eklenmesi ile elde edilir.*

**Yeter Şartı**

*Eğer G içerisinde iki düğüm arasında ayrık olan iki tane yol varsa, açık olarak G bağlıdır ve G çizgesinin kesme düğümü olmaz. Buradan G bir bloktur ♦*

Bir blok çoğu literatürde 2-bağlı (2-connected, biconnected) çizge olarak bilinir.

## 13.6.İzomorfizm

$G_1$ ve $G_2$ çizgeleri için $G_1$ çizgesinin düğümünü $G_2$ çizgesinin düğümüne ve ilgili olan $G_1$ çizgesinin $G_2$ çizgesinde ilgili düğümler olarak dönüştüren bağıntıya $G_1$ çizgesinin $G_2$ çizgesine olan izomorfizmi denir. Eğer bu bağıntı f ise

$f:V_1 \rightarrow V_2$

olur ve eğer $(v_i,v_j)\in E_1$, $1\leq i,j\leq |V_1|$ ve $i\neq j$, ise $(f(v_i),f(v_j))\in E_2$ olur. Şekil 13.7' de görülen iki çizge izomorfiktirler. bu çizgeler izomorfizm bağıntısı

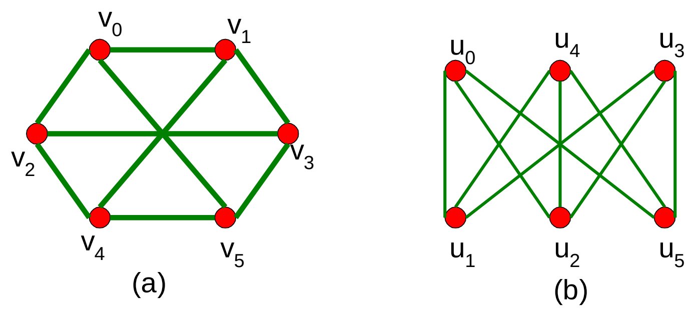
$g(v_0)=u_1$
$g(v_1)=u_0$
$g(v_2)=u_4$
$g(v_3)=u_5$
$g(v_4)=u_2$
$g(v_5)=u_3$

Şekil 13.7 (a) verilen çizgenin ayrıtları

$e_0=(v_0,v_1)$ $e_1=(v_0,v_2)$ $e_2=(v_2,v_4)$ $e_3=(v_4,v_5)$
$e_4=(v_5,v_3)$ $e_5=(v_3,v_1)$ $e_6=(v_1,v_4)$ $e_7=(v_0,v_5)$
$e_8=(v_2,v_3)$

Bu ayrıtların Şekil 13.7 (b)' de görülen çizgedeki karşılıklarının oldukları aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$f_0=(u_0,u_1)=(g(v_1),g(v_0))$ $f_1=(u_0,u_2)=(g(v_1),g(v_4))$
$f_2=(u_0,u_5)=(g(v_1),g(v_3))$ $f_3=(u_4,u_1)=(g(v_2),g(v_0))$
$f_4=(u_4,u_2)=(g(v_2),g(v_4))$ $f_5=(u_4,u_5)=(g(v_2),g(v_3))$
$f_6=(u_3,u_1)=(g(v_5),g(v_0))$ $f_7=(u_3,u_2)=(g(v_5),g(v_4))$
$f_8=(u_3,u_5)=(g(v_5),g(v_3))$

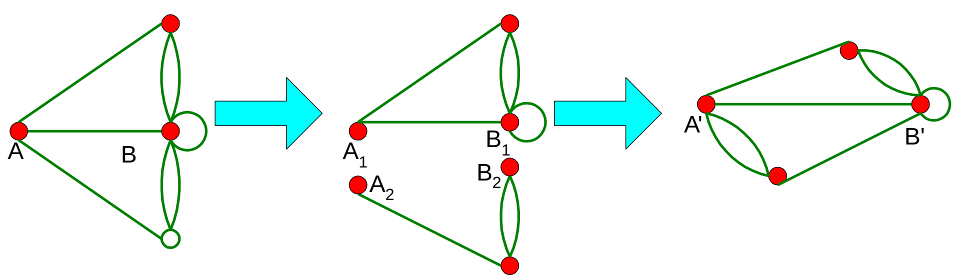



**Şekil 13.7.** *İzomorfizm.*

Eğer aşağıdaki işlemlerden biri veya ikisinin tekrarlı uygulaması sonucunda $G_1$ çizgesinden $G_2$ çizgesi elde ediliyorsa, $G_1$ ve $G_2$ çizgeleri 2-izomorfiktir denir.

a) $G_1$ veya $G_2$ çizgesinin artikulasyon noktasından iki veya daha fazla parçaya bölünmesi

b) $G_1$ ve $G_2$ çizgeleri iki tane ayrık alt çizgeye bölünüyor ve bu alt çizgelerin sadece iki düğümü ortak ise, bu ortak düğümler üzerinden ayrıştırılır (bu noktalar A ve B olsun) ve tekrar birleştir böylece $A_1$ düğümü $B_2$ ile çakışır ve $A_2$ ise $B_1$ ile çakışır.




**Şekil 13.8.** *2-izomorfizm.*

## Bölüm Soruları

13.1. Bir basit çizgede çevrenin uzunluğunun (içerdiği ayrıt sayısı) en az 3 olacağını gösteriniz.

13.2. Bağlı bir çizgede $|E| \geq |V|-1$ şartının sağlandığını gösteriniz.

13.3. Bir ağaca bir ayrıt eklenmesi, o ağacın ağaç olma özelliğini bozar. Bu önermenin doğru veya yanlış olduğunu gösteriniz.

13.4. Bir ağaçta çıkan düğüm derecesi en fazla 2 ise, bu ağaçlara ***ikili ağaç*** denir. İkili ağaçta n tane düğüm varsa, bu ağacın yüksekliğinin en az $\lfloor \lg n \rfloor$ olacağını gösteriniz ($\lfloor \ \rfloor$ fonksiyonu taban fonksiyonu olarak bilinir ve bununla ilgili olarak 3. bölüme bakınız).

13.5. İkili bir ağaçta, eğer yaprakların hepsi aynı seviyede ise, bu ağaca tam ikili ağaç denir. Yüksekliği h olan  bir tam ikili ağaçta kaç tane düğüm vardır?

13.6. Bir tam ikili ağaçta, dahili düğümlerin derinliği dahili yol uzunluğu olarak bilinir ve yaprakların derinliği ise harici yol uzunluğu olarak bilinir. Eğer n tane dahili düğüm içeren bir tam ikili ağaçta dahili yol uzunluğu i ve harici yol uzunluğu e ise, $e=i+2n$ olduğunu gösteriniz.