ASİMPTOTİK DAVRANIŞLAR VE MATEMATİKSEL TEMMELERİ

Bu bölümde algoritma analizinde kullanılan matematiksel terimler ve ifadeler verilecektir. Matematiksel temeller, bir algoritmanın bir kısmının tasviri için veya o algoritmanın performans analizi için kullanılabilirler.

Bu matematiksel temellerden bir kısmı çok basit olabileceği gibi bir kısmı kompleks olabilir. Bu kısımda verilecek olan matematiksel bilgilerin daha iyi anlaşılması için bu bölüme bir göz atıldıktan sonra diğer bölümler geçilebilir. Buradaki bilgiler lazım oldukça bakılırsa daha faydalı olur.

Algoritma analizi için özel notasyonlar kullanılmaktadır ve algoritmanın çalışma hızını gösterirler. Lise cebirini bilen ve temel kalkülüs bilgisine sahip olan bir kişi rahatlıkla burada verilecek olan matematiği kavrayacaktır.

Algoritma analizinde göz önünde bulundurulan iki türlü kriter vardır. Biri algoritmanın kullandığı verinin kapsamış olduğu hafıza alanı ve diğeri de algoritma çalışırken almış olduğu zamandır. Bir algoritmanın çalışma esnasında verisi sürekli olarak boyut değiştireceğinden dolayı bu verinin kapsamış olduğu alan bir bağıntı olarak tanımlanır. Aynı durum almış olduğu zaman içinde geçerlidir. Veri kaplamış olduğu alan veya zaman ifadesi bir bağıntı olduğundan, bu bağıntının alt ve üst sınırları göz önüne alınarak bir karara varılır. Elde edilen bağıntıya algoritmanın zaman veya uzay mertebesi denir. Bundan dolayı bağıntıların veya fonksiyonların artışının incelenmesi gerekir ve bunun için özel notasyonlar kullanılmaktadır.

6.1.Fonksiyonların Artışı

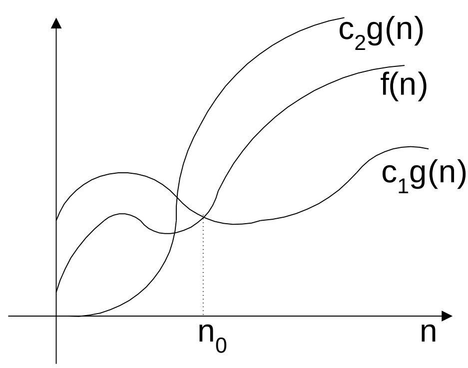
Algoritma analizi yapılırken, o algoritmada kullanılan verinin boyutunun sonsuza gittiği veya çok büyük olduğu kabul edilir. Bir algoritma için veri boyutu n ise, elde edilecek algoritma mertebesi n türünden bir bağıntı olacaktır. Mertebelere asimptotik notasyon da denir.

Bu bağıntılar alt ve üst sınırların var olmalarına göre incelenirler.

Tanım 6.1
f(n) ve g(n) birer bağıntı olsunlar. Eğer g(n) bağıntısı farklı iki tane c_1 ve c_2 gibi sabit ile çarpıldığında sırası ile f(n) bağıntısının belli bir n değerinden sonra alt ve üst sınırları oluşturuyorsa, $f(n)=\Theta(g(n))$ şeklinde gösterilir. f(n) bağıntısının alt ve üst sınırlara eşitliği vardır.

Θ-notasyonun anlamı $\Theta(g(n))=\{f(n)$: $c_1,c_2 \in R^+$, $\forall n \geq n_0$ için $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$.

Küme bakımından anlamı $\Theta(g(n))$ kümesi f(n) kümesini kapsayan bir kümedir. Buradan $f(n)= \Theta(g(n))$ veya $f(n) \in \Theta(g(n))$ şeklinde yazılabilir. Şekil 6.1' de Θ-notasyonun grafiksel anlamı görülmektedir.



Şekil 6.1. *$f(n)= \Theta(g(n))$*

Θ-notasyonunda alt ve üst sınıra eşitlik vardır. Bu notasyonda $\Theta(g(n))$ kümesinin elemanlarının hepsinin negatif olmaması gerekir. Bundan dolayı yeterli büyüklükte olan n için f(n) bağıntısının değerleri de negatif olamaz. g(n) bağıntısına f(n) bağıntısının ***asimptotik sıkı sınır*** bağıntısı denir. Örneğin $f(n)=n^2+n-4$ olarak verilmişse, $f(n)= \Theta(n^2)$ şeklinde yazılır. Bunun anlamı $g(n)=k_1n^2+k_2n+k_3$ şeklindeki bir polinom olabileceği gibi n^2' li terimin katsayısı sabit olmak üzere diğer terimler bu terimden küçük olmak koşulu ile logaritmik veya daha başka bir fonksiyon içerebilirler. Θ-notasyonu gösteriminde en büyük terim alınır ve diğer terimler gösterilmez. Çünkü derecesi en büyük olan terim, n çok büyüdüğünde baskın olmaya başlayacaktır.

$f(n)=n_2+n-4$ için c_1, c_2 ve n_0 sabitleri şu şekilde bulunur.

$$c_1n^2 \le n^2 + n - 4 \le c_2n^2$$

eşitsizliğinde her taraf n^2' ye bölündüğünde

$$c_1 \le 1 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} \le c_2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sol tarafının sağlandığı en küçük n değeri bulunur. c_1 pozitif bir sabit olduğundan n=2 değeri için

$$1 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{4}{4} = \frac{1}{2}$$

olacağından $c_1=1/2$ olur. Fakat daha küçük c_1 değeri bu eşitsizlik sağlanabilir. Eğer $f(n)=an^2+bn+c$ ve $a>0$ olmak üzere bir polinom verilirse, c_1, c_2 ve n_0 değerlerini bulmak için $c_1=a/4$, $c_2=7a/4$ ve $n_0 = 2.\max(|b|/a, \sqrt{|c|/a})$ eşitlikleri kullanılır. Bu eşitliklere göre yukarıda verilen örnek için $c_1=1/4$, $c_2=7/4$ ve $n_0=4$ olur.

Eğer $f(n)=a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1n+a_0$ olarak verilmişse, $k>m$ için $f(n)\neq \Theta(n^m)$. Eğer m=k ise $f(n)= \Theta(n^m)$ olur. Eğer f(n) bağıntısının alt ve üst sınırlara olan eşitliği kaldırılırsa, θ-notasyonu elde edilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 6.2

f(n) ve g(n) birer bağıntı olsunlar. Eğer g(n) bağıntısı farklı iki tane c_1 ve c_2 gibi sabit ile çarpıldığında sırası ile f(n) bağıntısının belli bir n değerinden sonra alt ve üst sınırları oluşturuyorsa, f(n)= θ(g(n)) şeklinde gösterilir. f(n) bağıntısının alt ve üst sınırlara eşitliği yoktur.

θ-notasyonun anlamı $\theta(g(n))=\{f(n): c_1,c_2\in R^+, \forall n\geq n_0$ için $0\leq c_1g(n) < f(n) < c_2g(n)\}$.

Her bağıntı için alt ve üst sınırlar aynı zamanda belirlenemiyorsa, bu sınırlardan sadece biri belirlenebiliyorsa, o sınıra göre notasyon gösterimi yapılır.

Tanım 6.3

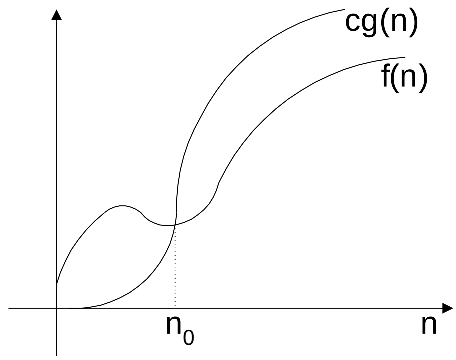
f(n) ve g(n), n' ye bağlı birer bağıntı olsunlar. Eğer belli bir n değerinden büyük değerler için g(n) bağıntısı bir pozitif sabit ile çarpıldığında her zaman f(n)' den büyük oluyorsa, g(n) bağıntısı f(n) bağıntısının üst sınırını oluşturur ve f(n)=O(g(n)) şeklinde gösterilir. O-notasyonunda üst sınıra eşitlik vardır.

Bu notasyon daha matematiksel bir ifade ile belirtilecek olursa

$O(g(n))=\{f(n): c\in R^+$ ve $n\geq n_0$ için $0\leq f(n) \leq cg(n)\}$.

Bir f(n) bağıntısının O(g(n)) bir üyesi olduğunu göstermek için f(n)=O(g(n)) şeklinde yazılır. Eğer f(n)= Θ(g(n)) ise f(n)=O(g(n)) yazılır, çünkü Θ-notasyonu O-notasyonundan daha güçlü bir notasyondur. Aynı zamanda $\Theta(g(n))\subseteq O(g(n))$ olarak yazılabilir.

Eğer $f(n)=a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1n+a_0$ olarak verilmişse, k>m için $f(n)\neq O(n^m)$. Eğer $m\geq k$ ise $f(n)= O(n^m)$ olur. O-notasyonun grafiksel anlamı Şekil 6.2' de görülmektedir.



Şekil 6.2. *f(n)=O(g))*

Eğer f(n) bağıntısının üst sınıra olan eşitliği kaldırılırsa, o-notasyonu elde edilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$o(g(n))=\{f(n): c\in R^{+}$ ve $n\geq n_0>0$ için $0\leq f(n) <cg(n)\}$.

o-notasyonunda üst sınıra eşitlik yoktur ve bundan dolayı üst sınırı sıkı bir asimptotik notasyon değildir. O-notasyonu üst sınırı sıkı bir notasyondur.

o-notasyonunda n sonsuza gittiğinde f(n) fonksiyonu g(n) fonksiyonu karşısında önemini kaybeder. Bunun anlamı

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$$

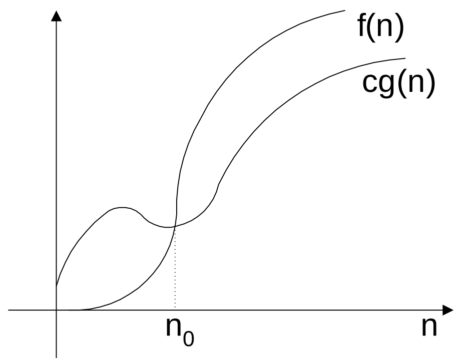
olur.

Eğer fonksiyonun üst sınırı değil de alt sınırı belirlenebiliyorsa, yani üstten sınırlı bir fonksiyon değilse, bu durumda Ω-notasyonu kullanılır.

Tanım 6.4
f(n) ve g(n), n' ye bağlı birer bağıntı olsunlar. Eğer belli bir n değerinden büyük değerler için g(n) bağıntısı bir pozitif sabit

ile çarpıldığında her zaman f(n)' den küçük oluyorsa, g(n) bağıntısı f(n) bağıntısının alt sınırını oluşturur ve f(n)= Ω(g(n)) şeklinde gösterilir. Ω-notasyonunda alt sınıra eşitlik vardır.

Daha matematiksel bir ifade ile $\Omega(g(n))=\{c$ ve n_0 pozitif sabitler olmak üzere $0 \leq cg(n) \leq f(n),\ \forall n \geq n_0\}$. Şekil 6.3' te Ω-notasyonun grafiksel gösterimi görülmektedir.



Şekil 6.3. *f(n)= Ω(g(n)).*

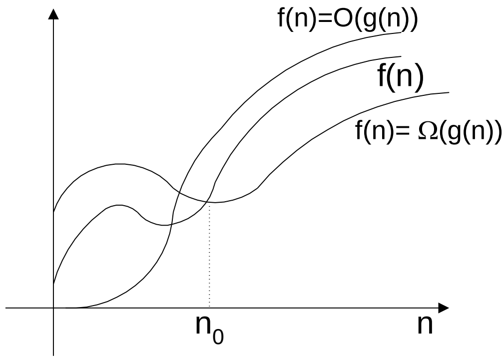
Alt sınıra olan eşitlik kaldırıldığında ω-notasyonu elde edilir ve

$\omega(g(n))= \{c$ ve n_0 pozitif sabitler olmak üzere $0 \leq cg(n) < f(n),\ \forall n \geq n_0\}$ olur.

Örneğin, $n^2/9 \neq \omega(n^2)$, fakat $n^2/9=\omega(n)$. Eğer $f(n)=\omega(g(n))$ olarak verilmişse

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

olur. Eğer $f(n)=O(g(n))$ ve $f(n)=\Omega(g(n))$ ise, $f(n)=\Theta(g(n))$ olur. Çünkü $f(n)=O(g(n))$ ifadesi $f(n)=\Theta(g(n))$ ilişkisinin üst sınırını ve $f(n)=\Omega(g(n))$ ise alt sınırını teşkil eder. f(n) için g(n) türünde hem alt sınır ve hem de üst sınır ifadesi verilebilmektedir. Bu önermenin ispatı grafiksel olarak Şekil 6.4' te görülmektedir.



Şekil 3.4. *Θ-notasyonun diğer notasyonlar türündeki ifadesi.*

Verilen bu notasyonlar arasında ilişkiler vardır ve bunlar aşağıdaki gibidirler.

Eğer $f(n)=\Theta(g(n))$ ve $g(n)=\Theta(h(n))$ ise $f(n)=\Theta(h(n))$ olur, çünkü Θ-notasyonun geçişme özelliği vardır. Eğer $f(n)=O(g(n))$ ve $g(n)=O(h(n))$ ise $f(n)=O(h(n))$ olur, çünkü O-notasyonun geçişme özelliği vardır. Aynı durum o-notasyonu içinde geçerlidir. Eğer $f(n)=\Omega(g(n))$ ve $g(n)=\Omega(h(n))$ ise $f(n)=\Omega(h(n))$ olur, çünkü Ω-notasyonun geçişme özelliği vardır ve bu durum ω-notasyonu içinde geçerlidir. Θ, Ω ve O notasyonlarının yansıma özelliği vardır.

$f(n)=\Theta(f(n))$
$f(n)=\Omega(f(n))$
$f(n)=O(f(n))$

Simetri özelliği sadece Θ-notasyonu için vardır. $f(n)=\Theta(g(n))$ ancak ve ancak $g(n)=\Theta(f(n))$. Bu notasyonların bir kısmının transpoz özelliği vardır.

Eğer $f(n)=O(g(n))$ ise $g(n)=\Omega(f(n))$ olur ve bunun tersi de doğrudur. Eğer $f(n)=o(g(n))$ ise $g(n)=\omega(f(n))$ olur ve bunun tersi de doğrudur.

Asimptotik notasyonlar fonksiyonların davranışları ile ilgili bilgi verir. Eğer bütün $m \leq n$ için $f(m) \leq f(n)$ oluyorsa, f(n) fonksiyonuna ***monotonik artan*** fonksiyon denir. Eğer bütün $m \leq n$ için $f(m) \geq f(n)$ oluyorsa, f(n) fonksiyonuna ***monotonik azalan*** fonksiyon denir. Eğer bütün $m<n$ için $f(m)<f(n)$ oluyorsa, f(n) fonksiyonuna ***kesin artan*** fonksiyon denir. Eğer bütün $m<n$ için $f(m)>f(n)$ oluyorsa, f(n) fonksiyonuna ***kesin azalan*** fonksiyon denir.

Algoritma analizinde kullanılacak olan bazı matematiksel bilgiler verilebilir.

Bölüm Soruları

6.1. f(n) ve g(n) asimptotik negatif olmayan fonksiyonlar olsunlar. $\max(f(n),g(n))= \Theta(f(n)+g(n))$ olduğunu gösteriniz.

6.2. $b>0$ olmak üzere reel a ve b sabitleri için $(n+a)^b=\Theta(n^b)$ olduğunu gösteriniz.

6.3. $f(n)=2^{n+1}$ ve $g(n)=2^n$ ise $f(n)=O(g(n))$ midir? $f(n)=3^{2n}$ olduğu durumda $f(n)=O(n))$ midir?

6.4. Bir algoritmanın en iyi çalışma performansında çalışma zamanı $\Omega(g(n))$ ve en kötü çalışma durumunda çalışma zamanı $O(g(n))$ ise, algoritmanın mertebesi $f(n)=\Theta(g(n))$ olduğunu gösteriniz.

6.5. Aşağıdaki kümelerden hangisi veya hangileri boş kümedir?

$\omega(f(n)) \cap o(f(n))$
$\Omega(f(n)) \cap O(f(n))$

6.6. Asimptotik notasyonların tanımı bir parametre için verilmiştir. Eğer algoritmada birden fazla parametre varsa, bu durumda tanımlama şu şekilde yapılabilir. $f(m,n)$ ve $g(m,n)$ asimptotik negatif olmayan fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda O-notasyonun tanımı

$O(g(m,n))=\{f(m,n)$: c, n_0 ve m_0 pozitif sabitler olmak üzere $0\leq f(m,n)\leq cg(m,n)$, $n\geq n_0$ ve $m\geq m_0\}$.

Benzer tanımlamaları Θ, Ω, ϖ ve o için yapınız.

6.7. $f(n)$ ve $g(n)$ monotonik artan fonksiyonlarsa, $f(n)+g(n)$ fonksiyonu da monotonik artan bir fonksiyondur. Eğer $f(n)$ ve $g(n)$ pozitif fonksiyonlarsa, $f(n).g(n)$ fonksiyonu da monotonik artan bir fonksiyondur.

6.8. $\lg(n!)=\Theta(n\lg n)$ ve $n!=o(n^n)$ olduğunu gösteriniz.

6.9. Eğer bir algoritmanın çalışma ortalama zaman bir $k>0$ sabiti için $T(n)=O(n^k)$ ise $T(n)=n^{O(1)}$ olduğunu gösteriniz. Tersinin de doğruluğunu gösteriniz.

6.10. $\lceil \lg n \rceil!$ fonksiyonu asimptotik olarak sınırlı mıdır? $n>0$ için $\lfloor \lg n \rfloor!$ fonksiyonu polinom olarak sınırlı mıdır?

6.11. $P(n)$, derecesi d olan bir polinom olsun. $k>0$ bir sabit olmak üzere $P(n)=O(n^k)$, $P(n)=\Theta(n^k)$, $P(n)=\Omega(n^k)$, $P(n)=\omega(n^k)$ ve $P(n)=o(n^k)$ durumları için d ve k arasındaki ilişkileri gösteriniz.

6.12. $f(n)$ ve $g(n)$ asimptotik pozitif fonksiyonlar olsunlar. Aşağıdakilerin doğruluğunu veya yanlışlığını gösteriniz.

$f(n)=O(g(n))\rightarrow g(n)=O(f(n))$
$f(n)+g(n)=\Theta(\min(f(n),g(n)))$
$f(n)=O(g(n))\rightarrow 2^{f(n)}=O(2^{g(n)})$
$f(n)=O((f(n))^2)$
$f(n)=O(g(n))\rightarrow g(n)=\Omega(f(n))$
$f(n)=\Theta(f(n/2))$
$f(n)+o(f(n))=\Theta(f(n))$

6.13. f(n) ve g(n) asimptotik pozitif fonksiyonlar ve yeterince büyük bütün n' ler için $f(n) \geq 1$ ve $lg(g(n)) > 0$ olsun. $f(n)=O(g(n))$ ise $lg(f(n))=O(lg(g(n)))$ olduğunu gösteriniz.

6.14. Eğer $f(n)=O(F(n))$ ve $g(n)=O(G(n))$ ise

$$\frac{f(n)}{g(n)} = O\left(\frac{F(n)}{G(n)}\right)$$

olur. Bu iddianın doğru ya da yanlış olduğunu gösteriniz.

6.15. Aşağıda iddiaların doğru ya da yanlış olduğunu gösteriniz.

a) Eğer $f(n)=O(g(n))$ ve $g(n)=O(h(n))$ ise, $f(n)=O(h(n))$ olur.

b) Eğer $f(n)=\Theta(g(n))$ ve $g(n)=\Theta(h(n))$ ise, $f(n)=\Theta(h(n))$ olur.