BÖLÜM 10. BAĞINTILAR VE FONKSİYONLAR

M ve N gibi iki küme üzerinde tanımlanan bir B bağıntısına ***ikili bağıntı*** denir ve bu bağıntı MxN kümesinin bir alt kümesidir. $m \in M$ ve $n \in N$ için mBn şeklinde gösterilir. Bir ikili bağıntı bir küme üzerinde de tanımlanabilir. Bu durumda m_1, $m_2 \in M$ için m_1Bm_2 şeklinde gösterilir ve $B \subseteq MxM$ olur. Bağıntıların bazı özellikleri vardır.

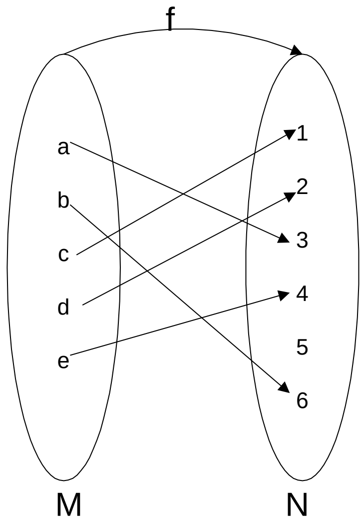
Yansıma. Eğer $m \in M$ için mBm varsa, buna B bağıntısının yansıma özelliği denir.
Simetri. Eğer m_1, $m_2 \in M$ için m_1Bm_2 varsa, m_2Bm_1' de vardır.
Geçişme. m_1, m_2, $m_3 \in M$ için m_1Bm_2 ve m_2Bm_3 varsa, m_1Bm_3' de vardır.
Antisimetri. Eğer m_1, $m_2 \in M$ için m_1Bm_2 ve m_2Bm_1 carsa, $m_1=m_2$ olur.

Bağıntılar taşıdıkları özelliklere göre sınıflandırılabilirler. Eğer bir bağıntı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahipse, bu bağıntıya ***denklik bağıntısı*** denir ve üzerinde tanımlandığı kümeyi denklik sınıflarına ayırır. Bir bağıntıda yansıma, antisimetri ve geçişme özellikleri varsa, bu bağıntıya ***kısmi sıralı bağıntı*** denir ve üzerinde tanımlandığı kümeye de ***kısmen sıralanmış küme*** denir. Kısmen sıralanmış kümede birden fazla maksimum eleman olabilir. Bütün m_1, $m_2 \in M$ için m_1Bm_2 veya m_2Bm_1 oluyorsa, bu kısmi sıralı B bağıntısına ***lineer sıralı*** veya ***total*** bağıntı denir.

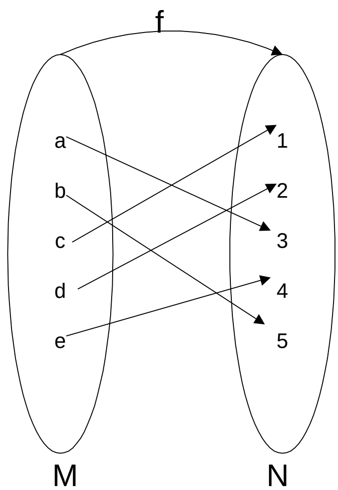
f bağıntısı M kümesinden N kümesine tanımlanmış bir bağıntı olmak üzere bütün $m \in M$ için mfn gibi bir $n \in N$ varsa, bu f bağıntısına fonksiyon denir ve $f:M \rightarrow N$ şeklinde gösterilir. M kümesine B bağıntısının tanım kümesi ve N kümesine de B bağıntısının görüntü kümesi denir. Fonksiyonlarda tanım kümesinde boşta eleman kalmaz. $m \in M$ ve $n \in N$ için $n=f(m)$ ise, m' ye f fonksiyonunun parametresi ve n' ye de f fonksiyonun değeri denir.

f ve g gibi iki fonksiyonun eşit olabilmeleri için her iki fonksiyonun tanım ve görüntü kümeleri aynı olmak zorundadır ve bunun yanında her $m \in M$ için $f(m)=g(m)$ olmak zorundadır.

Bir fonksiyonda tanım kümesindeki (M kümesindeki) her eleman görüntü kümesinde (N kümesinde) farklı bir eleman ile eşleştiriliyorsa, bu fonksiyona bire-bir fonksiyon denir ve Şekil 10.1' de bire-bir olan bir fonksiyon görülmektedir.



Şekil 10.1. *Bire-bir olan f fonksiyonu.*

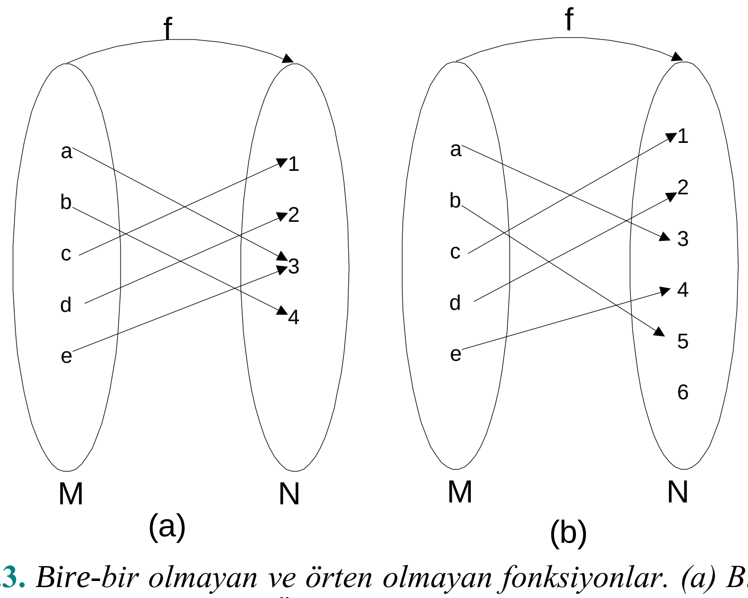


Şekil 10.2. *Örten f fonksiyonu.*

Eğer bir fonksiyonda görüntü kümesinde boşta kalan eleman yoksa, bu fonksiyona örten fonksiyon denir ve Şekil 10.2' de örten f fonksiyonu görülmektedir.

Şekil 10.3 (a)' da görülen f fonksiyonu bire-bir değil ve Şekil 10.3 (b)' de görülen f fonksiyonu ise örten değildir.

Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için o fonksiyonun hem bire-bir ve hem de örten olması gerekmektedir. f fonksiyonun tersi olan fonksiyon f^{-1} olsun. f fonksiyonun tanım kümesi M ve görüntü kümesi N olsun. f^{-1} kümesinin tanım kümesi N ve görüntü kümesi M olur. Eğer f fonksiyonu bire-bir bir fonksiyon değilse, f^{-1} bir fonksiyon olamaz, çünkü N kümesinin bir elemanı birden fazla eleman ile eşleşmektedir. f kümesi örten bir fonksiyon değilse; bunun anlamı N kümesinde boşta kalan en az bir tane eleman vardır. Bu durumda f^{-1} bağıntısının tanım kümesinde boşta kalan eleman olduğundan f^{-1} bir fonksiyon olamaz. Bu sebeplerden dolayı, bir fonksiyon bire-bir ve örten ise tersi vardır ve tersi olan her fonksiyon bire-bir ve örtendir.



Şekil 10.3. *Bire-bir olmayan ve örten olmayan fonksiyonlar. (a) Bire-bir olmayan f fonksiyonu; (b) Örten olmayan f fonksiyonu.*

Bölüm Soruları

10.1. Fonksiyon ile bağıntı arasındaki fark nedir? Varsa, benzer yönlerini açıklayınız.

10.2. Bire-bir, örten, içine fonksiyonları tanımlayınız.

10.3. Bir boolean fonksiyonun n-girişi ve m çıkışı olsun ve bu fonksiyon

$\{T,F\}^n \rightarrow \{T,F\}^m$

şeklinde tanımlanmış olsun. n girişli ve 1 çıkışlı kaç tane boolean fonksiyon vardır? Kaç tane n girişli ve m çıkışlı boolean fonksiyon vardır?

10.4. A ve B birer küme ve $f:A \rightarrow B$ şeklinde tanımlanmış bir fonksiyon olsun.

a) Eğer f fonksiyonu bire-bir bir fonksiyon ise, $|A| \leq |B|$ olduğunu gösteriniz.
b) Eğer f fonksiyonu örten bir fonksiyon ise, $|A| \geq |B|$ olduğunu gösteriniz.

10.5. Tanım ve görüntü kümeleri N olan $f(x)=x+1$ fonksiyonu tersinir bir fonksiyon mudur?

10.6. Z kümesinden ZxZ kümesine tersinir bir fonksiyon örneği veriniz.

10.7. A ve B birer küme olmak üzere $|A|=n$ ve $|B|=m$ olsun. f fonksiyonu A kümesinden B kümesine tanımlanmış olsun.

a) Kaç tane bire-bir f fonksiyonu tanımlanabilir?
b) Kaç tane örten f fonksiyonu tanımlanabilir?
c) Kaç tane tersinir f fonksiyonu tanımlanabilir?