Двумерное преобразование Фурье:

$$(u, v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)e^{-i2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u, v)e^{i2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

Переменные u и v принято называть частотными переменными, а область их изменения – частотным пространством по аналогии с x и y – пространственными переменными и пространственной областью их определения.

Каждый элемент Фурье-образа $F(u, v)$ содержит все отсчеты функции $f(x, y)$. Поэтому обычно, за исключением тривиальных случаев, невозможно установить прямое соответствие между характерными деталями изображения и его Фурье-образа. Однако некоторые общие утверждения относительно взаимосвязи частотных составляющих Фурье-образа и пространственных характеристик изображения могут быть сделаны. Частоты в Фурье-преобразовании связаны с вариацией яркости на изображении. Наиболее медленно меняющаяся (постоянная) частотная составляющая $u = v = 0$ совпадает со средней яркостью изображения. Низкие частоты, отвечающие точкам вблизи начала координат Фурье-преобразования, соответствуют медленно меняющимся компонентам изображения. На изображении комнаты, например, они могут соответствовать плавным изменениям яркости стен и пола. По мере удаления от начала координат, более высокие частоты начинают соответствовать все более и более быстрым изменениям яркости, которые суть границы объектов (контуры) и другие детали изображения, характеризуемые резкими изменениями яркости, такие как шум.

Один из часто используемых способов обработки изображения, которая выполняется с различными целями, является частотная фильтрация. Процедура фильтрации состоит из следующих шагов (рисунок 1.1):

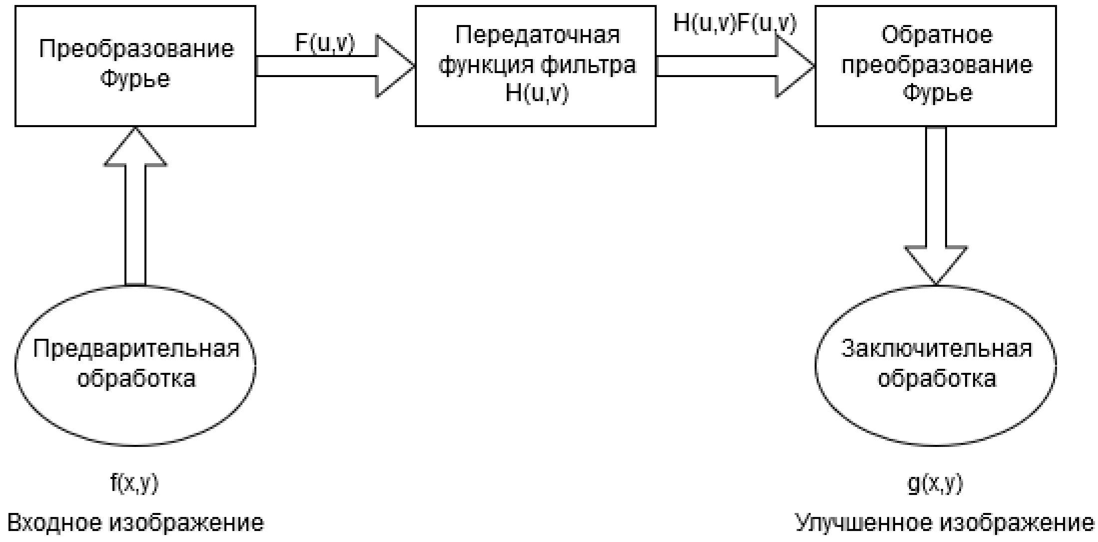

Рисунок 1.1 – Основные этапы фильтрации в частотной области

Порядок фильтрации в частотной области:

1. Исходное изображение умножается на $(-1)^{x+y}$, чтобы его преобразование Фурье оказалось центрированным.
2. Вычисляется прямое ДПФ $F(u,v)$ изображения, полученного после шага 1.
3. Функция $F(u,v)$ умножается на функцию фильтра $H(u,v)$.
4. Вычисляется обратное ДПФ от результата шага 3.
5. Выделяется вещественная часть результата шага 4.
6. Результат шага 5 умножается на $(-1)^{x+y}$.

Пусть $f(x,y)$ обозначает входное изображение после шага 1, $F(u,v)$ – его Фурье-образ, тогда Фурье-образ выходного изображения определяется выражением:

$$G(u,b) = H(u,v)F(u,v);$$

Каждая компонента Фурье образа определяет некоторое свойство изменения яркости на изображении. Элементы, соответствующие низким частотам (вблизи начала координат) определяют плавные переходы, и чем выше значения этих элементов там более размытым будет изображение.

Высокие частоты определяют резкие переходы яркости. Поэтому чем большие значения имеют элементы образа Фурье для больших значений u и v тем ярче будут контуры.

На этих свойствах основано действие частотных фильтров.

Простейшими из них являются идеальные высокочастотный и низкочастотный фильтры.

Идеальный низкочастотный фильтр сохраняет без изменений (в идеальном виде) значения низких частот и обнуляет все высокие.

Передаточная функция идеального низкочастотного фильтра задается выражением:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1, \text{при } D(u,v) \le D_0 \\ 0, \text{при } D(u,v) < D_0 \end{cases}$$

где D_0 – неотрицательная константа, которая определяет расстояние от начала координат до границы между сохраняемыми и обнуляемыми частотами;

D(u,v) – евклидово расстояние от начала координат до точки с текущим значением *(u,v)*.

Началом координат для Фурье-образа изображения считается точка (*M*/2,*N*/2), так как изображение на этапе предобработки было центрировано. Поэтому евклидово расстояние от некоторой точки *(u,v)* до начала координат может быть вычислено с помощью простого выражения:

$$D(u,v) = [(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2]^{1/2}$$

Величину D_0 принято называть *частотой среза*.

Если для фильтрации использовать обратную передаточную функцию:

$$H(u,v) = \begin{cases} 0, \text{при } D(u,v) \le D_0 \\ 1, \text{при } D(u,v) < D_0 \end{cases},$$

то будет получен идеальный высокочастотный фильтр. Он позволяет выделить контуры на изображении и удаляет фоновые детали. Его эффект тем больше, чем больше частота среза.

Для идеальных фильтров, как высокочастотных, так и низкочастотных характерен нежелательный побочный эффект, который проявляется в возникновении ложных контуров на отфильтрованном изображении. Такой эффект по аналогии с терминологией теории обработки сигналов принят называть «эффектом звона». Степень проявления этого эффекта также связана с величиной частоты среза, как и описанные основные эффекты от фильтров.

Передаточная функция низкочастотного фильтра Баттерворта задается формулой:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$$

Константа n определяет порядок фильтра. При n=1 получаем фильтр первого порядка, при n=2 фильтр второго порядка и т.д. Чем выше порядок фильтра, тем больше проявляются как основные, так и побочные эффекты («звон»).

Для высокочастотного фильтра применяется передаточная функция заданная следующим выражением:

$$H(u,v) = \frac{1}{1+[D_0/D(u,v)]^{2n}}.$$

Для этих фильтров характерно отсутствие резкой черты, разделяющей сохраняемые и обрезаемые частоты. Переход между ними выполняется плавно.

Эффект от такого фильтра меньший чем от идеального, но и «звон» проявляется в меньшей степени, особенно для фильтров первого и второго порядка.

К числу фильтров, гарантированных от появления «звона» относятся фильтры Гаусса. Результаты применения таких фильтров очень схожи с изображениями обработанными фильтрами Баттерворта второго порядка (рис 31).

Передаточная функция низкочастотного фильтра Гаусса задается формулой:

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}.$$

Для высокочастотного фильтра это выражение принимает вид:

$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}.$$

Влияние частоты среза для этих фильтров такое же, как и для идеальных. Чем меньше значение D_0 для низкочастотного фильтра, тем выше эффект размывания. И наоборот, чем выше значение D_0 для высокочастотного фильтра, тем больше будут выделены яркие контуры.

Умножение функций двух переменных H и F осуществляется поэлементно, то есть первый элемент функции H умножается на первый элемент функции F, второй элемент функции H умножается на второй элемент функции F и так далее. В общем случае компоненты фильтра H являются комплексными величинами. На практике чаще всего используются H с действительными компонентами. В этом случае и действительная и мнимая часть функции F умножаются на одну и ту же действительную функцию фильтра H. Такие фильтры называются фильтрами нулевого фазового сдвига, поскольку не меняют фазу Фурье-преобразования.