Derivadas de Restricciones sobre Sólidos Rígidos

Cinemática de sólido rígido

Consideramos un punto p de un sólido rígido, con centro de masas x y rotación R. La posición local de p es r. Para definir las derivadas de posición respecto a los grados de libertad del sólido, usamos un axis-angle diferencial θ a partir de la rotación actual.

$$p = x + R\, r = \lim_{\theta \to 0} x + (I + \theta^*)\, R\, r$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = I \qquad \frac{\partial p}{\partial \theta} = -(R\, r)^* = -(p - x)^*$$

Derivadas de restricción "articulación esférica"

Definimos una restricción como una articulación esférica entre dos puntos de dos sólidos rígidos:

$$C = p_a - p_b$$

Las derivadas y gradientes de la restricción respecto a uno de los sólidos son:

$$\frac{\partial C}{\partial x_a} = \frac{\partial C}{\partial p_a} \frac{\partial p_a}{\partial x_a} = I \qquad \frac{\partial C}{\partial \theta_a} = \frac{\partial C}{\partial p_a} \frac{\partial p_a}{\partial \theta_a} = -(p - x)^*$$

$$\nabla_{x_a} C = \frac{\partial C}{\partial x_a}^T = I \qquad \nabla_{\theta_a} C = \frac{\partial C}{\partial \theta_a}^T = (p - x)^*$$

Fuerzas debidas a restricciones débiles

Las fuerzas de la restricción coinciden con la fuerza y torque de un muelle:

$$E = \frac{1}{2}\, k\, C^T C$$

$$F_a = -\nabla_{x_a} E = -k\, \nabla_{x_a} C \cdot C = -k\, (p_a - p_b)$$

$$T_a = -\nabla_{\theta_a} E = -k\, \nabla_{\theta_a} C \cdot C = -k\, (p_a - x_a) \times (p_a - p_b)$$

Jacobianas de las fuerzas

Se incluyen solo Jacobianas de fuerzas de un sólido respecto a dicho sólido, pero habría que incluir Jacobianas cruzadas. Se ignoran segundas derivadas de la rotación.

$$\frac{\partial F_a}{\partial x_a} = \frac{\partial F_a}{\partial p_a} \frac{\partial p_a}{\partial x_a} = -k\, I \qquad \frac{\partial F_a}{\partial \theta_a} = \frac{\partial F_a}{\partial p_a} \frac{\partial p_a}{\partial \theta_a} = k\, (p_a - x_a)^*$$

$$\frac{\partial T_a}{\partial x_a} = \frac{\partial T_a}{\partial p_a} \frac{\partial p_a}{\partial x_a} = -k\, (p_a - x_a)^* \qquad \frac{\partial T_a}{\partial \theta_a} = \frac{\partial T_a}{\partial p_a} \frac{\partial p_a}{\partial \theta_a} = k\, (p_a - x_a)^* (p_a - x_a)^*$$