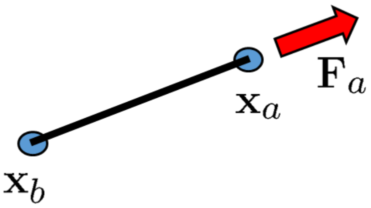
Derivadas de Fuerzas en Muelles

Definición del muelle

Se considera un muelle como en la figura:



Con longitud de reposo L_0 y longitud deformada $L = |x_a - x_b|$

Con vector unitario apuntando de 'b' a 'a': $u = \frac{x_a - x_b}{L}$

Derivadas básicas

$$\frac{\partial L}{\partial x_a} = u^T$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_a} = \frac{1}{L}\,(I - u\,u^T)$$

Fuerza elástica y derivada

$$F_a = -k\,(L - L_0)\,u$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial x_a} = -k\,(L - L_0)\frac{\partial u}{\partial x_a} - k\,u\frac{\partial L}{\partial x_a} = -k\,\frac{L - L_0}{L}\,I - k\frac{L_0}{L}\,u\,u^T$$

Fuerza de amortiguamiento y derivada

$$F_a = -d\,u\,u^T\,(v_a - v_b)$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial v_a} = -d\,u\,u^T$$

La derivada de la fuerza de amortiguamiento respecto a las posiciones no es nula en realidad, pero es mejor ignorarla, ya que da lugar a términos no simétricos.

Derivadas cruzadas

$$\frac{\partial F_b}{\partial x_b} = \frac{\partial F_a}{\partial x_a} \qquad \frac{\partial F_a}{\partial x_b} = -\frac{\partial F_a}{\partial x_a} \qquad \frac{\partial F_b}{\partial x_a} = -\frac{\partial F_a}{\partial x_a}$$

$$\frac{\partial F_b}{\partial v_b} = \frac{\partial F_a}{\partial v_a} \qquad \frac{\partial F_a}{\partial v_b} = -\frac{\partial F_a}{\partial v_a} \qquad \frac{\partial F_b}{\partial v_a} = -\frac{\partial F_a}{\partial v_a}$$