1、图示为一个均匀带电的球层，其电荷体密度为ρ，球层内表面半径为 R_1，外表面半径为 R_2．设无穷远处为电势零点，求空腔内任一点的电势．

解: 由高斯定理可知空腔内 E＝0，故带电球层的空腔是等势区，各点电势均为 U .

在球层内取半径为 r→r＋dr 的薄球层．其电荷为

$$\mathrm{d}q = \rho\, 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

该薄层电荷在球心处产生的电势为

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}q/\left(4\pi\varepsilon_0 r\right) = \rho r\,\mathrm{d}r/\varepsilon_0$$

整个带电球层在球心处产生的电势为

$$U_0 = \int \mathrm{d}U_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2} r\,\mathrm{d}r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

因为空腔内为等势区所以空腔内任一点的电势 U 为

$$U = U_0 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

若根据电势定义$U = \int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 计算同样给分.

2、一半径为 R 的带电球体，其电荷体密度分布为

ρ =Ar　　(r≤R) ，　　　ρ =0　　(r＞R)

A 为一常量．试求球体内外的场强分布．

解：在球内取半径为 r、厚为 dr 的薄球壳，该壳内所包含的电荷为

$$\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}V = Ar\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$$

在半径为 r 的球面内包含的总电荷为

$$q = \int_V \rho dV = \int_0^r 4\pi A r^3\,\mathrm{d}r = \pi A r^4 \quad (r\leqslant \mathrm{R})$$

以该球面为高斯面，按高斯定理有　$E_1\cdot 4\pi r^2 = \pi A r^4/\varepsilon_0$

得到　$$E_1 = Ar^2/\left(4\varepsilon_0\right), \quad (r\leqslant R)$$

方向沿径向，A>0 时向外, A<0 时向里．

在球体外作一半径为 r 的同心高斯球面，按高斯定理有

$$E_2\cdot 4\pi r^2 = \pi A R^4/\varepsilon_0$$

得到　$$E_2 = AR^4/\left(4\varepsilon_0 r^2\right), \quad (r>R)$$

方向沿径向，A>0 时向外，A<0 时向里．

3 在半径为 R_1 和 R_2 的两个同心球面上分别均匀带电 q_1 和 q_2,求在 $0<r<R_1$，$R_1<r<R_2$, $r>R_2$ 三个区域内的电势分布。

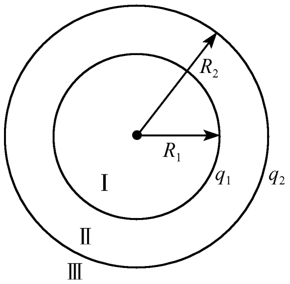
分析：由于场为球对称的，作同心球面，利用高斯定理求出场强。再利用电势与场强的积分关系 $U=\int_r^{+\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$ 求电势。注意：积分路径上的场强是分段函数。

解：利用高斯定理求出空间的电场强度：

$$E_I=0 \qquad r<R_1$$

$$\vec{E}_{II}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \qquad R_1<r<R_2$$

$$\vec{E}_{III}=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \qquad r>R_2$$



解图 9-21

则空间电势的分布：

$r\le R_1$

$$U_I=\int_r^{R_1}\vec{E}_I\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}_{II}\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_2}^{+\infty}\vec{E}_{III}\cdot \mathrm{d}r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_2}{R_2}+\frac{q_1}{R_1}\right)$$

$R_2\le r\le R_2$

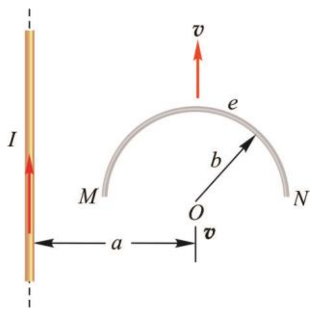
$$U_{II}=\int_r^{R_2}\vec{E}_{II}\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_2}^{+\infty}\vec{E}_{III}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{R_2}\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_2}{R_2}+\frac{q_1}{r}\right)$$

$r\ge R_2$

$$U_{III}=\int_r^{+\infty}\vec{E}_{III}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{+\infty}\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

4 如题图13-7 所示 载有电流 I 的长直导线附近，放一半圆环 MeN 的导线与长直导线共面，其端点 MN 的连线与长直导线垂直．半圆环的半径为 b，环心 O 与导线相距 a．设半圆环以速度 $\vec{v}$ 平行导线平移，求半圆环内感应电动势的大小和方向以及 MN 两端的电势差 U_{MN}

分析：此题直接利用 $\varepsilon_{MeN}=\int\limits_{MN}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 计算半圆环的两端



题图 13-7

电势差难于实现，为便于计算，可引入一条辅助线 MN，构成闭合回路 $MeNM$, 穿过闭合回路的磁通量不变，故总电动势为零，即 $\varepsilon_{总}=\varepsilon_{MeN}+\varepsilon_{NM}=0$，而直导线 MN 的两端电势差可由 $\varepsilon_{MN}=\int\limits_{MN}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 求得，从而可以得到半圆环的两端电势差.

解：动生电动势

$$\varepsilon_{MN}=\int\limits_{MN}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

闭合回路总电动势

$$\varepsilon_{总}=\varepsilon_{MeN}+\varepsilon_{NM}=0$$

$$\varepsilon_{MeN}=-\varepsilon_{NM}=\varepsilon_{MN}$$

$$\varepsilon_{MN}=\int\limits_{MN}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{a-b}^{a+b}-v\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\mathrm{d}x=-\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}$$

负号表示 ε_{MN} 的方向与 x 轴相反.

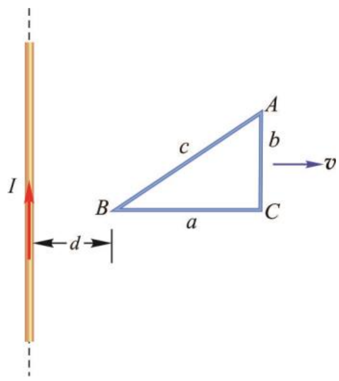
$$\varepsilon_{MeN}=-\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}$$

方向 $N\rightarrow M$ ，半圆环的两端电势差为

$$U_M-U_N=-\varepsilon_{MN}=\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}$$

5 如题图 13-8 所示，无限长直导线，通以电流 I．有一与之共面的直角三角形线圈 ABC．已知 AC 边长为 b，且与长直导线平行，BC 边长为 a．若线圈以垂直于导线方向的速度 $\vec{v}$ 向右平移，当 B 点与长直导线的距离为 d 时，求此时线圈 ABC 内的感应电动势的大小和感应电动势的方向.

分析：直角三角形内各个位置的磁场是不同的，但是平行于 AC 边的各个位置的磁场一致，则将此三角形拆分成都平行于 AC 边的窄条，得到穿过窄条的磁通量，再利用积分得到穿过此三角形的总磁通量，再由法拉第电磁感应定律求得线圈 ABC 内的感应电动势的大小.



题图 13-8

解：建立坐标系，长直导线为 y 轴，BC 边为 x 轴，原点在长直导线上，则斜边的方程为

$$y=(bx/a)-br/a$$

式中 r 是 t 时刻 B 点与长直导线的距离．三角形中磁通量为

$$\Phi_{\mathrm{m}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_r^{a+r}\frac{y}{x}\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_r^{a+r}(\frac{b}{a}-\frac{br}{ax})\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 I}{2\pi}(b-\frac{br}{a}\ln\frac{a+r}{r})$$

感应电动势为

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 Ib}{2\pi a}(\ln\frac{a+r}{r}-\frac{a}{a+r})\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

当 $r=d$ 时，感应电动势为

$$\varepsilon=\frac{\mu_0 Ib}{2\pi a}(\ln\frac{a+d}{d}-\frac{a}{a+d})v$$

方向：$ACBA$(即顺时针)

6、如图所示，一长直导线中通有电流 I，有一垂直于导线、长度为 l 的金属棒 AB 在包含导线的平面内，以恒定的速度 $\vec{v}$ 沿与棒成 θ 角的方向移动．开始时，棒的 A 端到导线的距离为

a，求任意时刻金属棒中的动生电动势，并指出棒哪端的电势高．

解：　　　$\upsilon_{\perp}=\upsilon\sin\theta$　　　$\upsilon_{//}=\upsilon\cos\theta$

$$\varepsilon=\int \mathrm{d}\varepsilon_i=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\upsilon\sin\theta\,\mathrm{d}\,x \qquad (\varepsilon_i \text{ 指向以 } A \text{ 到 } B \text{ 为正})$$

式中：　　$x_2=a+l+\mathrm{v}t\cos\theta$　　　　$x_1=a+\mathrm{v}t\cos\theta$

$$\varepsilon_i=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{v}\sin\theta\ln\frac{a+l+\mathrm{v}t\cos\theta}{a+\mathrm{v}t\cos\theta}$$

A 端的电势高．

7、波长λ=600nm(1nm=10^{-9}m)的单色光垂直入射到一光栅上，测得第二级主极大的衍射角为30°，且第三级是缺级．

(1) 光栅常数$(a+b)$等于多少？

(2) 透光缝可能的最小宽度 a 等于多少？

(3) 在选定了上述$(a+b)$和 a 之后，求在衍射角$-\frac{1}{2}\pi<\varphi<\frac{1}{2}\pi$ 范围内可能观察到的全部主极大的级次．

解：(1) 由光栅衍射主极大公式得

$$a+b=\frac{k\lambda}{\sin\varphi}=2.4\times10^{-4}\ \mathrm{cm}$$

(2) 若第三级不缺级，则由光栅公式得

$$(a+b)\sin\varphi'=3\lambda$$

由于第三级缺级，则对应于最小可能的 a，φ'方向应是单缝衍射第一级暗纹：两式比较，得

$$a\sin\varphi'=\lambda$$

$$a=(a+b)/3=0.8\times10^{-4}\ \ \mathrm{cm}$$

(3)　$(a+b)\sin\varphi=k\lambda$，(主极大)

$a\sin\varphi=k'\lambda$，(单缝衍射极小)　　(k' =1，2，3，......)

因此　k=3，6，9，........缺级．

又因为 $k_{max}=(a+b)/\lambda=4$, 所以实际呈现 k=0，±1，±2 级明纹．(k=±4 在$\pi/2$ 处看不到．)

8、(1) 在单缝夫琅禾费衍射实验中，垂直入射的光有两种波长，λ_1=400 nm，λ_2=760 nm (1 nm=10^{-9} m)．已知单缝宽度 a=1.0×10^{-2} cm，透镜焦距 f=50 cm．求两种光第一级衍射明纹中心之间的距离．

(2) 若用光栅常数 d=1.0×10^{-3} cm 的光栅替换单缝，其他条件和上一问相同，求两种光第一级主极大之间的距离．

解：(1) 由单缝衍射明纹公式可知

$$a\sin\varphi_1=\frac{1}{2}(2k+1)\lambda_1=\frac{3}{2}\lambda_1 \qquad (\text{取 } k=1)$$

$$a\sin\varphi_2=\frac{1}{2}(2k+1)\lambda_2=\frac{3}{2}\lambda_2$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_1=x_1/f \quad , \quad \mathrm{tg}\,\varphi_2=x_2/f$$

由于 $\sin\varphi_1\approx\mathrm{tg}\,\varphi_1$ ， $\sin\varphi_2\approx\mathrm{tg}\,\varphi_2$

所以 $x_1=\frac{3}{2}f\lambda_1/a$

$$x_2=\frac{3}{2}f\lambda_2/a$$

则两个第一级明纹之间距为

$$\Delta x=x_2-x_1=\frac{3}{2}f\Delta\lambda/a=0.27\text{ cm}$$

(2) 由光栅衍射主极大的公式

$$d\sin\varphi_1=k\lambda_1=1\lambda_1$$

$$d\sin\varphi_2=k\lambda_2=1\lambda_2$$

且有 $\sin\varphi\approx\mathrm{tg}\,\varphi=x/f$

所以 $\Delta x=x_2-x_1=f\Delta\lambda/d=1.8\text{ cm}$

9.波长 600nm 的单色光垂直入射在一光栅上，第 2 级主极大在 $\sin\varphi=0.20$ 处，第 4 级缺级，试问：

（1）光栅上相邻两缝的间距 $a+b$ 有多大？

（2）光栅上狭缝可能的最小宽度 a 有多大？

（3）按上述选定的 a 、b 值，试问在光屏上可能观察到的全部级数是多少？

分析：（1）将已知条件代入光栅方程 $(a+b)\sin\varphi=k\lambda$ ，可求出光栅常数即光栅上相

邻两缝的间距；（2）用缺级公式$\frac{a+b}{a}=\frac{k}{k'}$，$k'=1$，可求出光栅上狭缝可能的最小宽度$a$；（3）以$90^{\circ}$为限先确定干涉条纹的级数，等于$90^{\circ}$时对应的级次看不见，最后算出条纹数。

解：（1）由光栅方程　　　　　$(a+b)\sin\varphi=k\lambda$　（k=2）

得光栅上相邻两缝的间距

$$(a+b)=\frac{k\lambda}{\sin\varphi}=6\times10^{-4}\text{cm}$$

（2）根据缺级条件，有

$$\frac{a+b}{a}=\frac{k}{k'}$$

取$k'=1$,得狭缝的最小宽度

$$a=\frac{a+b}{4}=1.5\times10^{-4}\text{cm}$$

（3）由光栅方程

$$(a+b)\sin\varphi=k\lambda,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

令$\sin\varphi=1$,解得:

$$k=\frac{a+b}{\lambda}=10$$

即$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm5,\pm6,\pm7,\pm9$时出现主极大，$\pm4,\pm8$缺级,$\pm10$级主极大在$\varphi=90^{\circ}$处，实际不可见，光屏上可观察到的全部主极大谱线数有 15 条.

10　波长为 200nm 的紫外光照射到铝表面,铝的逸出功为 4.2eV。 试求：

(1)出射的最快光电子的能量;

(2)截止电压;

(3)铝的截止波长;

(4)如果入射光强度为 2.0 $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$,单位时间内打到单位面积上的平均光子数。

分析 本题考察的是爱因斯坦光电效应方程。

解: (1) 入射光子的能量为:

$$E=h\nu=h\frac{c}{\lambda}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{200\times10^{-9}}=9.93\times10^{-19}(\text{J})=6.20(\text{eV})$$

由光电效应方程可得出射的最快光电子的能量为:

$$\frac{1}{2}mv_{max}^{2}=\frac{hc}{\lambda}-A=6.20-4.20=2.00(\text{eV})$$

(2) 截止电压为:

$$U_0=\frac{\frac{1}{2}mv_{max}^{2}}{e}=\frac{2.00(\text{eV})}{e}=2.00(\text{V})$$

(3) 铝的截止波长可由下式求得:

$$\lambda_0=\frac{c}{\nu_0}=\frac{hc}{A}=\frac{h\nu}{A}\lambda=\frac{6.20}{4.20}\times200=295.2(\text{nm})$$

(4) 光强 I 与光子流平均密度 N 的关系为 $I=Nh\nu$, 所以有：

$$N=\frac{I}{h\nu}=\frac{2.0}{9.93\times10^{-19}}=2.02\times10^{18}(\mathrm{m^{-2}\cdot s^{-1}})$$

11、波长为λ的单色光照射某金属 M 表面发生光电效应，发　　射的光电子(电荷绝对值为 e，质量为 m)经狭缝 S 后垂直进入磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场(如图示)，今已测出电子在该磁场中作圆运动的最大半径为 R．求

(1) 金属材料的逸出功 A；

(2) 遏止电势差 U_a．

解：(1)　由　$eB\upsilon=m\upsilon^2/R$　得　$\upsilon=(ReB)/m$，

代入　$$h\nu=\frac{1}{2}m\upsilon^2+A$$

可得　$$A=\frac{hc}{\lambda}-\frac{1}{2}\cdot\frac{mR^2e^2B^2}{m^2}=\frac{hc}{\lambda}-\frac{R^2e^2B^2}{2m}$$

(2)　$$e|U_a|=\frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$$|U_a|=\frac{m\upsilon^2}{2e}=\frac{R^2eB^2}{2m}$$

12、光电管的阴极用逸出功为 A = 2.2 eV 的金属制成，今用一单色光照射此光电管，阴极发射出光电子，测得遏止电势差为$|U_a|$ = 5.0 V，试求：

(1) 光电管阴极金属的光电效应红限波长；

(2) 入射光波长．

（普朗克常量 h = 6.63×10^{-34} J・s，　基本电荷 e = 1.6×10^{-19} C）

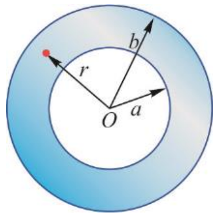
解：(1) 由　$$A=h\nu_0=hc/\lambda_0$$

得 $$\lambda_0=\frac{hc}{A}=5.65\times10^{-7}\ \mathrm{m}=565\ \mathrm{nm}$$

(2) 由 $$\frac{1}{2}m\upsilon^2=e|U_a|\ ,\qquad h\nu=\frac{hc}{\lambda}=e|U_a|+A$$

得 $$\lambda=\frac{hc}{e|U_a|+A}=1.73\times10^{-7}\ \mathrm{m}=173\ \mathrm{nm}$$

13　如题图 11-19 所示的空心柱形导体，柱的内外半径分别为a和b，导体内载有电流I，设电流I均匀分布在导体的横截面上。求证导体内部各点（$a<r<b$）的磁感应强度B由下式给出：$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(b^2-a^2)}\dfrac{r^2-a^2}{r}$.



题图 13

分析：应用安培环路定理求解。注意环路中电流的计算，应该是先求出载流导体内电流密度，再求出穿过环路的电流。

证明：载流导体内电流密度为

$$\delta=\frac{I}{\pi(b^2-a^2)}$$

由对称性可知，取以轴为圆心，r为半径的圆周为积分回路L，则由安培环路定理

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\sum_i I_i$$

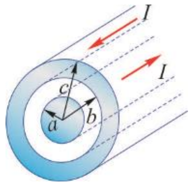
得

$$B2\pi r=\mu_0\delta\,\pi(r^2-a^2)=\mu_0 I\frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}$$

从而有

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2-a^2)}\frac{r^2-a^2}{r}$$

14　有一根很长的同轴电缆，由两个同轴圆筒状导体组成，这两个圆筒状导体的尺寸如题图 11-19 所示。在这两导体中，有大小相等而方向相反的电流I流过。求:



题图 14

（1）内圆筒导体内各点（$r<a$）的磁感应强度B;

（2）两导体之间（$a<r<b$）的B;

（3）外圆筒导体内（$b<r<c$）的B;

（4）电缆外（$r>c$）各点的B。

分析：应用安培环路定理求解。求外圆筒导体内（$b<r<c$）的B时，注意环路中电流的

计算，应该是先求出外圆导体内电流密度，再结合内圆筒的电流，求出穿过环路的电流。

解：在电缆的横截面，以截面的轴为圆心，将不同的半径 r 作圆弧并取其为安培积分回路 L，然后，应用安培环路定理求解，可得离轴不同距离处的磁场分布。

(1)当 $r<a$ 时，$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i = 0$ ，　$B\cdot 2\pi r = 0$，得

B=0

(2)当 $a<r<b$ 时，同理可得

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(3)当 $b<r<c$ 时，有

$$B2\pi r=\mu_0\left[I-\frac{I\pi(r^2-b^2)}{\pi(c^2-b^2)}\right]$$

得

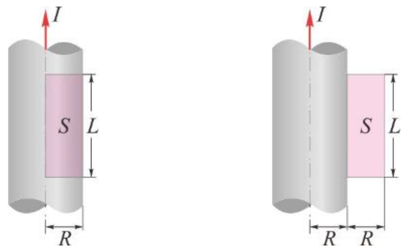
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1-\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right)$$

(4)当 $r>c$ 时，　B=0

15 一根很长的圆柱形实心铜导线半径为 R，均匀载流为 I 。试计算：

（1）如题图 11-18（a）所示，导线内部通过单位长度导线剖面的磁通量；

（2）如题图 11-18（a）所示，导线外部通过单位长度导线剖面的磁通量.



题图 15

分析　解此题需分以下两步走：先由安培环路定理求得导线内、外的磁感应强度分布情况；再根据磁通量的定义式 $\Phi=\int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 来求解。

解　由磁场的安培环路定理可求得磁感应强度分布情况为

$$\begin{cases} B_{内}=\dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & (r<R) \\ B_{外}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r\geq R) \end{cases}$$

然后求磁通量。沿轴线方向在剖面取面元 $\mathrm{d}S = l\mathrm{d}r$，考虑到面元上各点 B 相同，故穿过面元的磁通量 $\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S$，通过积分，可得单位长度导线内的磁通量。

(1)导线内部通过单位长度导线剖面的磁通量

$$\Phi_{内}=\int_0^R B_{内}\mathrm{d}r=\int_0^R \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

(2)导线外部通过单位长度导线剖面的磁通量.

$$\Phi_{外} = \int_{R}^{2R} B_{外} \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln 2$$