客观题1：条件概率的计算

定义1: 设 $P(A)>0$，若在随机事件A发生的条件下随机事件B发生的概率记作$P(B|A)$

定义 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$， 则称 $P(B|A)$

是事件A发生的条件下事件B发生的**条件概率**.

例1： 袋中有大小和质地均相同的球共5个，其中黑球有3个，白球有2个．从中不放回地取两个球，求已知在第一次取得黑球的条件下第二次也取得黑球的概率.

解： 记 B_i 表示第 i 次取得黑球, $i=1,2.$

$$P\left(B_2 \middle| B_1\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

概率的性质：

（1）不可能事件的概率为0，即 $P(\Phi)=0$

（2）有限可加性，即 $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

（3）对于事件 A,B，有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$

若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

进而有 $P(A)\le P(B)$

从而，对任意事件A，有 $0\le P(A)\le 1$

（4）对于任意两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

对于任意三个事件A、B、C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

$$-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

客观题2：古典概型的计算

定义： 如果随机试验具有下述两个特征：

（1）随机试验只有**有限个**可能的结果；

（2）每个结果发生的**可能性大小相同**.

则称这样的随机试验模型为**古典概型**.

古典概型中A事件发生的概率：

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

m :A事件发生的样本点数，n：总的样本点数

例1： 掷一枚质地均匀的骰子两次，求两次点数之和为7的概率.

解：

则两次点数之和为7的概率 $P(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

客观题3：利用随机事件的独立性计算概率

定义1：若两个随机事件A, B满足

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则**称事件A、B相互独立**，简称**独立**.

从事件独立性的定义，不难得到如下**性质**.

（1）若A, B独立，则 A与$\overline{B}$, $\overline{A}$与B, $\overline{A}$与$\overline{B}$ 均独立.

（2）若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n\,(n\geq 2)$ 相互独立，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$$

例5： 甲乙丙三人独立地破译密码，已知各自能破译出密码的概率分别是 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{5}$. 问密码能被破译出来的概率是多少？

解： 记A, B, C分别表示甲、乙、丙破译出密码，

则依题意 $P(A \cup B \cup C)$

$$= 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

定理1：在n重伯努利试验中，事件A发生的概率

$$P(A)=p\,(0<p<1)$$

则A恰好发生 $k\,(0\le k\le n)$ 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

该定理称作**伯努利定理**.

例6：某射手命中率为0.8，该选手对同一目标独立射击10次，则恰为8次击中目标的概率？

解：这是典型的伯努利试验

$$n = 10, p = 0.8, k = 8$$

$$P(A) = C_{10}^{8} \cdot 0.8^{8} \times (1 - 0.8)^{2} = 0.302$$

例7：某车间有12台车床，每台车床由于种种原因，时常需要停车，各台车床是否停车是相互独立的。若每台车床在任一时刻处于停止状态的概率为1/3，求任一时刻车间里恰有4台车床处于停止状态的概率.

解：

$$n = 12, p = 1/3, k = 4$$

$$P(A) = C_{12}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{8} \approx 0.238$$

例8： 一份试卷是由5道选择题构成，每道题四个选项且只有一个正确选项，如果某位同学每道题都是随机选择一个选项，那么这位同学最多能答对两道题的概率是多少？

解： 每道题随机选择一个选项，选对答案的概率是$\frac{1}{4}$，

则5道选择题做随机选择相当于做了5重伯努利试验，

故最多能答对两道题的概率是

$$P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)$$

又

$$P_5(0)=C_5^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(1-\frac{1}{4}\right)^5$$

$$P_5(1)=C_5^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(1-\frac{1}{4}\right)^4$$

$$P_5(2)=C_5^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^3$$

所以

$$P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)\approx 0.8965.$$

客观题5：连续型随机变量的分布函数中未知参数，数学期望或方差的运算

定义2： $F(x) = P(X \le x).$

分布函数的性质：

(1) **有界性：** $0 \le F(x) \le 1,$

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1,$$

(2) 连续型：分布函数$F(x)$处处连续.

1、设连续型随机变量X的概率密度是$f(x)$

（1） $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

（2） $$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

2、 设X为一随机变量，$E(X)$及$E(X^2)$均存在，则

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X).$$

例： 已知随机变量X 的密度函数如下，求X 的期望与方差.

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx=\frac{1}{2}$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

例： 设一个随机变量X的分布函数为

$$F(x) = A + B\arctan x, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

求： 参数A和B;

解 根据分布函数$F(x)$的基本性质，可得

$$0 = F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty}(A + B\arctan x) = A - \frac{\pi}{2}B,$$

$$1 = F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty}(A + B\arctan x) = A + \frac{\pi}{2}B,$$

因此 $A = \dfrac{1}{2}$, $B = \dfrac{1}{\pi}$,

客观题5: 二维离散型随机变量联合概率函数中未知参数的计算;

若二维离散随机变量 (X,Y) 所有可能取到的不同值为 (x_i, y_j), $i,j=1,2,\ldots$，称

$$p_{ij}=p(x_i,y_j)=P(X=x_i,Y=y_j)$$

为 (X,Y) 的联合概率函数或联合分布律，简称概率函数或分布律.

性质：(1) 非负性：$p_{ij}\geq 0,\ i,j=1,2,\ldots;$

(2) 规范性：$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1.$

(X,Y) 的联合分布律

(X,Y)		Y				
		y_1	y_2	L	y_j	L
X	x_1	p_{11}	p_{12}	L	p_{1j}	L
	x_2	p_{21}	p_{22}	L	p_{2j}	L
	M	M	M	O	M	O
	x_i	p_{i1}	p_{i2}	L	p_{ij}	L
	M	M	M	O	M	O

例： 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律如下表所示．求α 的值；

(X,Y)		Y	
		1	2
X	-1	α	$1/6$
	0	$1/3$	$1/4$

解 由联合分布律的规范性，有

$$\alpha+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=1$$

则

$$\alpha=\frac{1}{4}$$

客观题6：方差、协方差和相关系数的性质

方差的性质

- 常数的方差为0，即 $D(c)=0$

- $D(aX)=a^2D(X)$

  $D(aX+b)=a^2D(X)$

- 若随机变量X与Y 相互独立，且方差都存在，则

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$$

$$D(aX\pm bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)$$

协方差与相关系数的性质

（1） $\operatorname{cov}(X,X)=D(X).$

（2） $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X).$

（3） $\operatorname{cov}(aX,bY)=ab\operatorname{cov}(X,Y).$

（4） $\operatorname{cov}(X+Y,Z)=\operatorname{cov}(X,Z)+\operatorname{cov}(Y,Z).$

（5） $\operatorname{cov}(X,Y)=R(X,Y)\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}.$

（6） $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2R(X,Y)\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}.$$

例： $D(X)=D(Y)=2$ ， $R(X,Y)=-\dfrac{1}{3}$ ，

求： $D(X+Y)$ ，$D(2X-Y)$ ，$\operatorname{cov}(X+2Y,X)$

解： $\operatorname{cov}(X,\ Y)=R(X,\ Y)\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=-\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=-\dfrac{2}{3}$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,\ Y)=\frac{8}{3}$$

$$D(2X-Y)=D(2X)+D(Y)-2\operatorname{cov}(2X,\ Y)$$

$$=4D(X)+D(Y)-4\operatorname{cov}(X,\ Y)=\frac{38}{3}$$

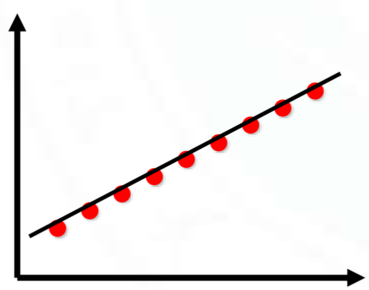
$$\operatorname{cov}(X+2Y,\ X)=\operatorname{cov}(X,\ X)+\operatorname{cov}(2Y,\ X)$$

$$=D(X)+2\operatorname{cov}(X,\ Y)=\frac{2}{3}$$

（7） $\left|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\right| \leq \mathbf{1}.$

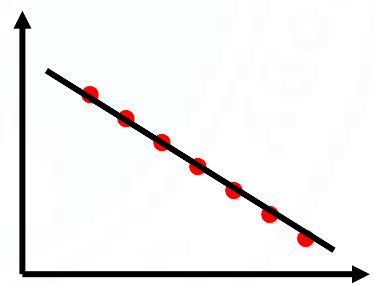
（ 8 ）

$$\left|R(X,Y)\right| = 1 \Leftrightarrow Y = a + bX\text{，}\underline{\text{且}}\ R(X,Y) = \begin{cases} 1, & b > 0 \\ -1, & b < 0 \end{cases}$$



完全正线性相关

$R(X,Y) = 1$



完全负线性相关

$R(X,Y) = -1$

定义3： 若$R(X,Y)=0$，则称(X,Y)不相关.

不相关反映的是变量之间没有线性变化趋势，但并不代表没有其它的关系（比如平方关系或其它非线性关系等）.

（9）若 X,Y独立，则 X,Y 不相关；反之不然.

（10）X,Y不相关 $\Leftrightarrow R(X,Y)=0$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cov}(X,Y)=0$$

$$\Leftrightarrow D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$$

客观题7：正态分布的性质

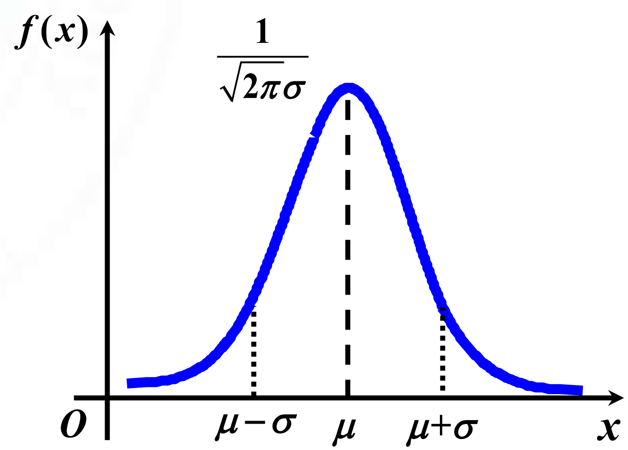
定义　设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad -\infty<x<+\infty$$

则称随机变量X服从**正态分布**，也称**高斯分布**，

记作 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$,

其中$\mu,\sigma\left(\sigma>0\right)$ 是分布参数.



正态分布概率密度函数特点：

（1） $f(x)$在$x=\mu$处达到最大值$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$；

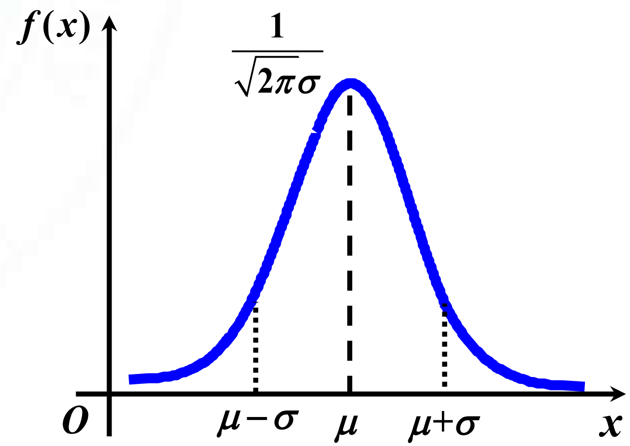
（2） $f(x)$在$(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$内是凸的，

其它范围内是凹的， 拐点：$\left(\mu\pm\sigma,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$；

（3） x轴为其水平渐近线；

（4） σ 越大，$f(x)$最大值越小；

（5） $f(x)$图像关于直线$x=\mu$对称.

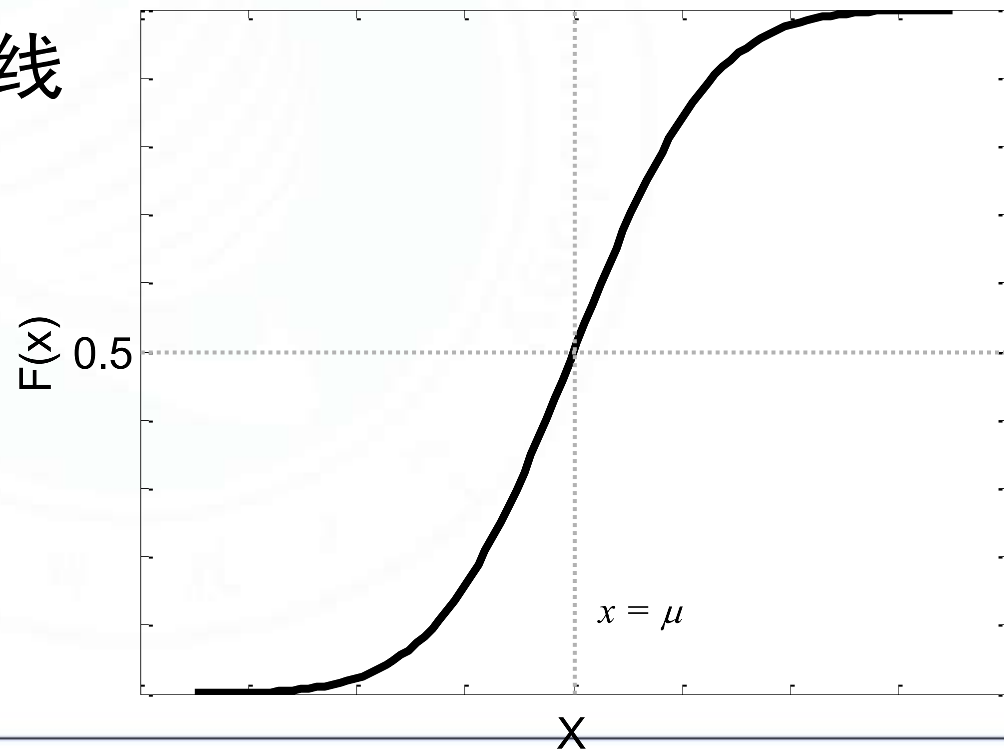


正态分布的分布函数及其图像

- 分布函数表达式

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t,\quad -\infty<x<+\infty$$

- 令人心动的*S*曲线



标准正态分布 $X \sim N(0,1)$,

概率密度: $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty$

分布函数: $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$

- **分布函数性质:**

① $\Phi(0)=0.5$;

② $\Phi(+\infty)=1, \quad \Phi(-\infty)=0$;

③ $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

客观题8： 正态分布的概率计算

正态分布的标准化

定理1 若 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, 则 $U=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1).$

$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$,

$$P(x_1 < X \le x_2) = P\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

例1 已知 $X \sim N(1,4)$，求 $P(X<-4)$、$P(1<X<3)$ 和 $P(|X|>2)$.

解 $P(X<-4)=\Phi\left(\frac{-4-1}{2}\right)=\Phi(-2.5)$

$=1-\Phi(2.5)=1-0.9938=0.0062;$

$P(1<X<3)=\Phi\left(\frac{3-1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{1-1}{2}\right)$

$=\Phi(1)-\Phi(0)$

$=0.8413-0.5=0.3413;$

$$P(|X|>2)=P(X<-2)+P(X>2)$$

$$=P(X<-2)+1-P(X\le 2)$$

$$=\Phi\left(\frac{-2-1}{2}\right)+1-\Phi\left(\frac{2-1}{2}\right)$$

$$=2-\Phi(1.5)-\Phi(0.5)$$

$$=2-0.9332-0.6915=0.3753.$$

练习： 已知 $X \sim N(1,4)$，求概率 $P(-1.6 \le X \le 2.4)$

解：

$$P(-1.6 \le X \le 2.4)$$
$$= \Phi\left(\frac{2.4-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1.6-1}{2}\right) = \Phi(0.7) - \Phi(-1.3)$$
$$= \Phi(0.7) - [1-\Phi(1.3)] = 0.7580 - (1-0.9032)$$
$$= 0.6612$$

练习： 已知 $X \sim N(108,9)$，求 $P(102 < X \le 117)$

求常数 a ，使得 $P(X < a) = 0.5$

解： $P(102 < X \le 117) = 0.9759$　　　$a = 108$

客观题9：切比雪夫不等式

定理1 设随机变量X的数学期望$E(X)$与方差$D(X)$存在，则对于任意正数ε，不等式

$$P\left(|X-E(X)|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

或

$$P\left(|X-E(X)|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

成立.

估算 X 落入 (a,b) 内的概率的步骤（切比雪夫不等式计算步骤）：

1、选择随机变量 X ；

2、求出 $E(X), D(X)$ ；

3、将 $P(a \le X \le b)$ 改写成 $P\left(\left|X - E(X)\right| < \varepsilon\right)$ 形式，确定 ε ；

4、利用切比雪夫不等式进行估算 $P(a \le X \le b)$.

例1： **设随机变量** X **的数学期望** $E(X)=\mu$**，方差** $D(X)=\sigma^2$**,利用切比雪夫不等式估计概率** $P\left(|X-\mu|\geq 4\sigma\right)$ **的上界。**

$$P\left(|X-E(X)|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

解： 由切比雪夫不等式可得

$$P\left(|X-\mu|\geq 4\sigma\right)\leq\frac{D(X)}{(4\sigma)^2}=\frac{1}{16}$$

例2：已知正常女性成年人每毫升血液中的红细胞含量X是一个随机变量，若 $E(X)=7000$ ，$D(X)=1100^2$ ，利用切比雪夫不等式估计概率 $P(4800<X<9200)$的下界。

$$P(|X-E(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

解： 由切比雪夫不等式可得

$$P(4800<X<9200)$$

$$=P(|X-E(X)|<2200)$$

$$\geq 1-\frac{D(X)}{2200^2}=\frac{3}{4}$$

例3： **设随机变量** $X \sim B(1000, 0.5)$ **，则利用切比雪夫不等式估算** $P(400 < X < 600) \geq (\quad)$

解：$E(X) = np = 1000 \times 0.5 = 500$

$$D(X) = npq = 1000 \times 0.5 \times 0.5 = 250$$

$$P(400 < X < 600) \geq P(-100 < X - 500 < 100)$$

$$= P(|X - 500| < 100)$$

$$\geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{250}{100^2} = 0.975$$

练习： 设随机变量X的数学期望 为12， 方差为 9，则利用切比雪夫不等式估算

$$P\left(3<X<21\right)\geq\left(\qquad\right)$$

解：

$$P\left(3<X<21\right)=P\left(-9<X-12<9\right)$$
$$=P\left(\left|X-12\right|<9\right)\ \geq 1-\frac{9}{9^2}=\frac{8}{9}$$

练习： 设随机变量X与Y的数学期望 分别为-2和2， 方差分别为 1和4，而则X与Y的相关系数为-0.5，则根据切比雪夫不等式，$P\left(\left|X+Y\right|<6\right)\geq\left(\qquad\right)$

练习： 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots X_9$ 相互独立，$E(X_i)=1$ $D(X_i)=1$ ，$(i=1,2,\cdots 9)$

则 $$P\left(3<\sum_{i=1}^{9} X_i<15\right) \geq (\quad)$$

解： 因为设随机变量 $X_1, X_2, \cdots X_9$ 相互独立，所以有

$$E\left(\sum_{i=1}^{9} X_i\right)=\sum_{i=1}^{9} E\left(X_i\right)=9 \quad D\left(\sum_{i=1}^{9} X_i\right)=\sum_{i=1}^{9} D\left(X_i\right)=9$$

$$P\left(3<\sum_{i=1}^{9} X_i<15\right)=P\left(3-9<\sum_{i=1}^{9} X_i-9<15-9\right)$$

$$=P\left(-6<\sum_{i=1}^{9} X_i-9<6\right)=P\left(\left|\sum_{i=1}^{9} X_i-9\right|<6\right) \geq 1-\frac{9}{6^2}=0.75$$

客观题10：含有一个未知参数的矩估计值的计算

$$\underbrace{\nu_1 = EX \qquad V_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}}_{EX=\overline{X}}$$

例1： 设总体$X \sim P(\lambda)$，其中λ为未知参数，$X_1, X_2, \mathrm{L}\ , X_n$是来自总体$X$的一个样本，求参数$\lambda$的矩估计值.

解： $\nu_1 = E(X) = \lambda$， $V_1 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$

所以参数λ的矩估计值为 $\hat{\lambda} = \bar{x}$

例2： 设总体X服从区间$[0,\theta]$上的均匀分布，其中$\theta>0$是未知参数，若取得样本观测值$x_1,x_2,\cdots,x_n$，试计算参数θ的矩估计值.

解： 总体的一阶原点矩为 $v_1(X)=E(X)=\dfrac{\theta}{2}$

而样本的一阶原点矩为 $V_1=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$

故有 $\dfrac{\theta}{2}=\bar{X}$

进而得到θ的矩估计值 $\hat{\theta}=2\bar{x}$

客观题11：统计量的概念

定义 6.1.1 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本，T是样本的函数，记为 $T = g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，若 $T = g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 中不含有未知的参数，则称T 为**统计量**.

例：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ，σ是未知参数，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$一组样本，下列哪个是统计量(　　)

A $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

B $\frac{X_1 - \mu}{\sigma}$

C $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$

D $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

客观题12：常用统计量的数学期望或方差

常用的统计量

样本均值： $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

样本方差：

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$

样本标准差： $$S = \sqrt{S^2}$$

样本k阶原点矩： $$V_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

样本k阶中心矩： $$U_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k, \quad k = 2, 3, \cdots$$

性质：

如果总体X的期望为μ，方差为σ^2，则

$$(1)\quad E(\overline{X})=E(X)=\mu$$

$$(2)\quad D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$(3)\quad E(S^2)=D(X)=\sigma^2$$

客观题13：判别估计量好坏的标准，无偏性，有效性

一、无偏性

定义： 设$X_1,X_2,\mathrm{L}\ ,X_n$是从总体X中抽取的样本，$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\mathrm{L}\ ,X_n)$是总体分布中未知参数$\theta$的估计量，如果$E(\hat{\theta})$存在，且

$$E(\hat{\theta})=\theta$$

则称$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量.

定理：

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的样本，总体 X 的均值为 μ，方差为 σ^2. 则

（1）样本均值 $\bar{X}$ 是总体均值 μ 的无偏估计量；

（2）样本方差 $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 是总体方差 σ^2 的无偏估计量；

定义： 设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是参数 θ 的无偏估计量，且 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 的**有效**.

当样本容量 n 一定时，若在 θ 的所有无偏估计量中，$\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$ 最小，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的有效估计量.

如：X_i和$\bar{X}$都是总体均值μ的无偏估计，

证明$n>1$时，$\bar{X}$比X_i有效。

例1： 设 X_1, X_2, X_3 是总体 X 的样本，证明

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3), \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2) + X_3,$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{4}(X_1 + X_2) + \frac{X_3}{2}$$ 都是总体均值 $E(X)$ 的无偏估计量，并比较哪个估计量更有效.

解： 由于

$$E(\hat{\mu}_1) = \frac{1}{3}[E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)]$$

$$= \frac{1}{3}[E(X) + E(X) + E(X)] = E(X)$$

$$E(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{2}E(X_1)-\frac{1}{2}E(X_2)+E(X_3)=E(X)$$

$$E(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{4}E(X_1)+\frac{1}{4}E(X_2)+\frac{1}{2}E(X_3)=E(X)$$

所以 $\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3$，都是总体均值$E(X)$的无偏估计量.

又因为

$$D(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{9}[D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)]=\frac{1}{3}D(X)$$

$$D(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{4}[D(X_1)+D(X_2)]+D(X_3)=\frac{3}{2}D(X)$$

$$D(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{16}[D(X_1)+D(X_2)]+\frac{1}{4}D(X_3)=\frac{3}{8}D(X)$$

又因为 $D(\hat{\mu}_1)<D(\hat{\mu}_3)<D(\hat{\mu}_2)$，所以 $\hat{\mu}_1$ 较 $\hat{\mu}_2$、$\hat{\mu}_3$ 更有效.

三、一致性（相合性）

在样本容量 n 一定的情况下，无偏性和有效性能够较好地反映估计量的好坏．但是随着样本所包含信息的增多，当 n 充分大时，我们希望估计值在某种意义下稳定在真值附近．这就是第三个评价标准：**一致性（相合性）．**

即随样本容量增大，估计量越来越接近于真实参数（$\hat{\theta}$ 以概率收敛于 θ ）。

主观题1：利用全概率公式计算概率；

定理2： 设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间Ω的一个划分且 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$，则对于任意随机事件$A$有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) P(B_i)$$

上式称作**全概率公式**.

例1： 播种用的一等小麦种子中混有2%的二等种子，1.5%的三等种子，1%的四等种子。用一，二，三、四等种子结出的穗含有50颗以上麦粒的概率分别为0.5，0.15，0.1，0.05，求这批种子所结的穗含有50颗以上麦粒的概率。

解： 以A表示“这批种子任选一颗所结的穗含有50颗以上麦粒”事件。从这批种子中任取一颗为一，二，三，四等种子的事件分别记为B_1，B_2，B_3，B_4，则

$P(B_1)=95.5\%$, $P(B_2)=2\%$, $P(B_3)=1.5\%$, $P(B_4)=1\%$,

$P(A/B_1)=0.5$, $P(A/B_2)=0.15$

$P(A|B_3)=0.1$, $P(A|B_4)=0.05$,

所以 $$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(A|B_i)P(B_i)$$

$$=0.4825$$

例2： 某商店从三个厂购买了一批灯泡，甲厂占25%，乙厂占35%，丙厂占40%，各厂的次品率分别为5%，4%，2%，

求： 消费者买到一只次品灯泡的概率

解： 以A表示消费者买到一只次品灯泡，B1，B2，B3分别表示买到的灯泡是甲、乙、丙厂生产的灯泡，根据题意得：

$$P(B_1)=25\%,\ P(B_2)=35\%,\ P(B_3)=40\%,$$

$$P(A|B_1)=5\%,\ P(A|B_2)=4\%,\ P(A|B_3)=2\%$$

$$(1)P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A\mid B_i)P(B_i)=0.0345$$

主观题3：利用中心极限定理计算概率近似值；

定理1（林德伯格—勒维中心极限定理）

设相互独立的随机变量序列$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 服从

相同的分布，且

$$E(X_i) = \mu, \quad D(X_i) = \sigma^2 > 0, \; i = 1, 2, \cdots, n, \cdots,$$

则对于任意实数x，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x \right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

定理表明：不管 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$服从什么样的分布，只要 n 充分大，随机变量

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$$

2、如何利用独立同分布中心极限定理近似计算随机变量和的有关事件的概率。

答：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是独立同分布随机变量序列，且 $E(X_i)=\mu,\ D(X_i)=\sigma^2>0,\ i=1,2,\cdots,n,\cdots;$

则

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i)=n\mu,\ D(\sum_{i=1}^{n} X_i)=n\sigma^2>0,$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le b\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)\approx\Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

$$P\left(a<\sum_{i=1}^{n} X_i \le b\right)=P\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}<\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

$$\approx\Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

例：一册400页的书中，每一页的印刷错误的个数服从泊松分布 $P(0.16)$ 各页有多少个印刷错误是相互独立的. 求这册书的印刷错误不多于72个的概率.

解：设 X_i 表示第 i 页印刷错误的个数，则 $X_i \sim P(0.16)$

$$\therefore E(X_i) = 0.16 = \mu \ , \ D(X_i) = 0.16 = \sigma^2 \ , \ i = 1,2,\cdots 400$$

又因为 $X_1, \ X_2, \cdots X_{400}$ 是相互独立的，

$$E(\sum_{i=1}^{400} X_i) = 64 \ , D(\sum_{i=1}^{400} X_i) = 64 = 8^2$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{400} X_i\right)=64 \;, D\left(\sum_{i=1}^{400} X_i\right)=64=8^2$$

$$\therefore P\left(0\le \sum_{i=1}^{400} X_i \le 72\right)=P\left(\frac{0-64}{8}\le \frac{\sum_{i=1}^{400} X_i-64}{8}\le \frac{72-64}{8}\right)$$

$$=P\left(-8\le \frac{\sum_{i=1}^{400} X_i-64}{8}\le 1\right)$$

$$\approx \Phi(1)-\Phi(-8)=0.8413$$

二、棣莫佛—拉普拉斯中心极限定理

定理2（棣莫佛—拉普拉斯中心极限定理）

设在独立试验序列中，事件A发生的概率为p $(0<p<1)$,随机变量Y_n表示事件A在n次试验中发生的次数，则对于任意实数x，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

2、如何利用棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理近似计算服从二项分布的随机变量的有关事件的概率

答：设随机变量 $X \sim B(n, p)$ $(0 < p < 1)$ 则

$$E(X) = np \;, D(X) = np(1-p)$$

$$P(X \le b) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$P(a < X \le b) = P\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

例：某电站供应10000户居民用电，设在高峰时每户用电的概率为0.8，且各户用电量多少是相互独立的，求：

（1）同一时刻有8100户以上用电的概率；

（2）若每户用电功率为100W，则电站至少需要多少电功率才能保证以0.975的概率供应居民用电？

解：设 X 表示10000户中在同一时刻用电的户数，则

$$X \sim B(10000, 0.8),$$

$$E(X) = np = 8000, \quad D(X) = npq = 40^2$$

$$P(8100 \le X \le 10000) = P\left(2.5 \le \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \le 50\right)$$

$$\approx \Phi(50) - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

若每户用电功率为100W，则X 户用电功率为100X W，设电站供电功率为 m W，则

$$P(0 \le 100X \le m) = P\left(\frac{0-8000}{40} \le \frac{X-8000}{40} \le \frac{m/100 - 8000}{40}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{m/100 - 8000}{40}\right) - \Phi(-200) = \Phi\left(\frac{m/100 - 8000}{40}\right) \ge 0.975$$

$$\Phi\left(\frac{m/100 - 8000}{40}\right) \ge 0.975 = \Phi(1.96) \quad \therefore \frac{m/100 - 8000}{40} \ge 1.96$$

即 $m \ge 807840$，故电功率应不少于807840.

主观题3：连续型随机变量函数的概率密度函数

1. 公式法

定理1 设随机变量X具有概率密度$f_X(x)$，又设函数$g(x)$处处可导且恒有$g'(x)>0$（或恒有$g'(x)<0$），则$Y=g(X)$是连续随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中$\alpha=\min(g(-\infty),g(+\infty)),\ \beta=\max(g(-\infty),g(+\infty))$,

$h(y)$是$g(x)$的反函数.

2. 分布函数法

设连续型随机变量X的分布函数为$F_X(x)$,

$Y=g(X)$ 的概率分布?

方法：根据X的分布先求随机变量Y的分布函数,

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\{g(X)\le y\},$$

利用不等式等价变形，将事件“$g(X)\le y$”转化为X的不等式，然后通过分布函数求$Y=g(X)$的概率密度.

例1 ： 随机变量X的密度函数为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$

求： $Y=2X$ 的密度函数

解法1： 由 $y=2x$ 得 $x=h(y)=\dfrac{y}{2}$

故Y的密度函数为

$$f_Y(y)=f_X\left(\frac{y}{2}\right)\left|\left(\frac{y}{2}\right)'\right|=\frac{1}{2}f_X\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi\left(1+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right)}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi\left(4+y^2\right)}$$

解法2： $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(2X \le y)$

$$= P\left(X \le \frac{y}{2}\right) = F_X\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X\left(\frac{y}{2}\right)}{dy} = f_X\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\pi\left(1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi(4 + y^2)}$$

例2、若随机变量 $X\sim U(3\,,\,7)$，求随机变量 $Y=3-2X$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$

解1：由于 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & 3\le x\le 7\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(3-2X\le y)=P(X\ge\frac{3-y}{2})$$

$$=1-P(X<\frac{3-y}{2})=1-F_X(\frac{3-y}{2})$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\left[1-F_X(\frac{3-y}{2})\right]_y'$$

$$=-f_X(\frac{3-y}{2})\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}\frac{1}{8} & -11\le y\le -3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

解法2： 由 $y=3-2x$ 得 $x=\dfrac{3-y}{2}$

故Y的密度函数为

$$f_Y(y)=f_X\left(\frac{3-y}{2}\right)\left|\left(\frac{3-y}{2}\right)'\right|=\frac{1}{2}f_X\left(\frac{3-y}{2}\right)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{8} & 3\le\frac{3-y}{2}\le 7\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{8} & -11\le y\le -3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

例3 设随机变量X具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=2X+1$ 的概率密度.

解： $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X+1\le y)=P(X\le \dfrac{y-1}{2})=F_X(\dfrac{y-1}{2})$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=F_X{}'(\frac{y-1}{2})=f_X\left(\frac{y-1}{2}\right)\left(\frac{y-1}{2}\right)'$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y-1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}, & 0<\dfrac{y-1}{2}<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y-1}{8}, & 1<y<5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

主观题4：含一个未知参数的最大似然估计量

计算最大似然估计步骤：

（1）写出似然函数

离散型总体

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)\\ \prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\end{cases}$$

连续型总体

（2）**似然函数两侧取自然对数，得到对数似然函数**

（3）**求对数似然函数的最大值点（通常为极大值点）**

由 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$ 可得参数的最大似然估计

（4）**写出结论**

例5： 设总体 $X \sim B(1,p)$， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，求 p 的最大似然估计量.

解： 总体 X 的分布律为

$$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x} \quad , x=0,1$$

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应的样本值，则似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

两边取对数，得

$$\ln L(p)=(\sum_{i=1}^{n} x_i)\ln p+(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)\ln(1-p)$$

由
$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0$$

可得
$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

因此参数p的最大似然估计量为

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$$

例： 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数，求 θ 的最大似然估计量.

解： 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应的样本观测值，则似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta-1}$

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

由 $$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

可得 $$\hat{\theta}=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

因此 θ 的最大似然估计量为 $$\hat{\theta}=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$$

例7： 设总体 X 的分布律如下：

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$ 是未知参数，从总体中抽取容量为8的一组样本，其样本值为3，1，3，0，3，1，2，3

求：θ 的矩估计值和最大似然估计值。

解：（1） $E(X)=0\cdot\theta^2+1\cdot 2\theta(1-\theta)+2\cdot\theta^2+3\cdot(1-2\theta)=3-4\theta$

令 $3-4\theta=\bar{x}$ 解得 $\hat{\theta}=\dfrac{3-\bar{x}}{4}$

又由样本观测值求得 $\bar{x}=2$

故 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{3-2}{4}=\dfrac{1}{4}$

解： （2）似然函数

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

3，1，3，0，
3，1，2，3

$$L(\theta)=P(X_1=3,X_2=1,X_3=3,X_4=0,X_5=3,X_6=1,X_7=2,X_8=3)$$

$$=\theta^2\cdot[2\theta(1-\theta)]^2\cdot\theta^2\cdot(1-2\theta)^4 \quad =4\theta^6\cdot(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$$

取对数得 $\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$

由 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{6}{\theta}-\dfrac{2}{1-\theta}-\dfrac{8}{1-2\theta}=0$ ，解得 $\theta=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{12}$

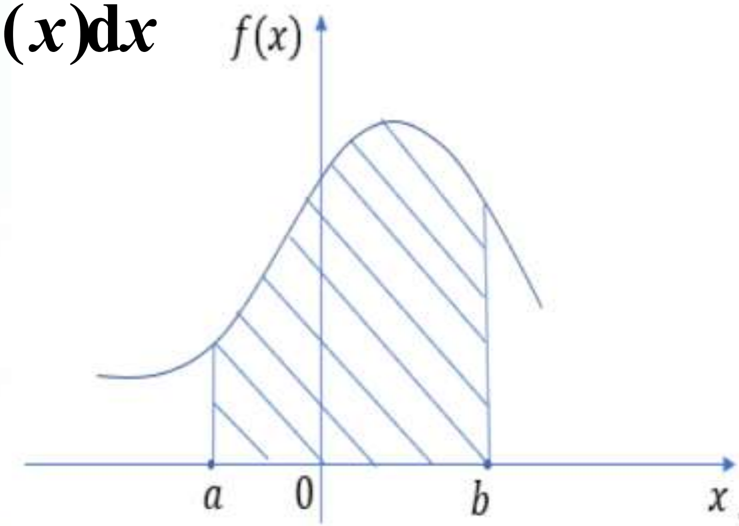
$\because \theta=\dfrac{7+\sqrt{13}}{12}$不符合题意，

故θ 的最大似然值为$\hat{\theta}=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$

主观题4：连续型随机变量函数的概率密度函数中未知参数的计算

定义1： 若随机变量X的取值范围是某个实数区间I（有界或无界），如果存在非负实数$f(x)$，使得对于任意区间$[a,b]\subset I$有

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



则称X为连续型随机变量，

函数$f(x)$称为连续型随机变量X的**概率密度函数**或**概率密度**.

概率密度函数的性质

（ i ）非负性 $f(x) \geq 0$;

（ii）正则性 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

例1 设连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} Ax, & 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求：(1) 系数；(2) $P(\frac{1}{4}<X\le\frac{1}{2})$.

解 (1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1.$

$$\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} Ax\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x=1 \Rightarrow A=2.$$

(2) $P(\frac{1}{4}<X\le\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 2x\,\mathrm{d}x=\frac{3}{16}.$

例2 设连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0\le x<1, \\ x-1, & 1\le x\le 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 确定k； (2) 求$P(\frac{1}{2}<X\le\frac{3}{2})$;

解 (1) $\int_0^1 kx\,\mathrm{d}x+\int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x=1 \Rightarrow k=1;$

(2) $P(\frac{1}{2}<X\le\frac{3}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{\frac{3}{2}}(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2};$$