二、主观题

3、连续型随机变量函数的概率密度函数；（另一种解法）

1. 若随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)},\ x\in\mathbb{R}$ ，求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解： $$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1-\sqrt[3]{X}\le y)=P(\sqrt[3]{X}\ge 1-y)=P(X\ge(1-y)^3)$$

$$=1-P(X<(1-y)^3)=1-F_X\left((1-y)^3\right),\ x\in\mathbb{R}$$

$$f_Y(y)=\left[F_Y(y)\right]'=\left[1-F_X\left((1-y)^3\right)\right]'=f_X\left((1-y)^3\right)\cdot 3(1-y)^2$$

$$=\frac{3(1-y)^2}{\pi[1+(1-y)^6]},\quad x\in\mathbb{R}$$

2. 设随机变量 $X\sim U(0,\pi)$ ，求随机变量 $Y=6-4X$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解： $$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(6-4X\le y)=P(X\ge\frac{6-y}{4})$$

$$=1-P(X<\frac{6-y}{4})=1-F_X(\frac{6-y}{4})$$

由于 $$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & 0\le x\le\pi\\ 0, & 其他\end{cases}$$

故 $$f_Y(y)=\left[F_Y(y)\right]'=\left[1-F_X(\frac{6-y}{4})\right]'=f_X(\frac{6-y}{4})\cdot\frac{1}{4}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}, & 6-4\pi\le y\le 6\\ 0, & 其他\end{cases}$$

3. 若随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4\\ 0, & 其他\end{cases}$ ，求随机变量 $Y=2X+8$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解： 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$ ，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X+8\le y)=P(X\le \frac{y-8}{2})=F_X(\frac{y-8}{2})$$

于是Y的概率密度函数为 $$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}=f_X(\frac{y-8}{2}).\frac{1}{2}$$

注意到 $0<x<4$时，$f_X(x)\neq 0$，即$8<y<16$时，$f_Y(y)=f_X(\frac{y-8}{2}).\frac{1}{2}\neq 0$.

所以 $$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{y-8}{32}, & 8<y<16\\ 0, & 其他\end{cases}$$

4. 若随机变量$X\sim N(0,\ 1)$，设$Y=\mathrm{e}^{-X}$，求随机变量Y的概率密度$f_Y(y)$.

解： 由$X\sim N(0,\ 1)$，有X的概率密度为$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ (-\infty<x<+\infty)$

当$y\le 0$时，由$(Y\le y)=(\mathrm{e}^{-X}\le y)$是不可能事件，得$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$，$f_Y(y)=0$.

当$y>0$时，由$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\mathrm{e}^{-X}\le y)=P(X\ge -\ln y)=1-F_X(-\ln y)$

两边对y求导，得$f_Y(y)=f_X(-\ln y)\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\ln^2 y}{2}}\ (y>0)$

所以 $$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\ln^2 y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

4、利用中心极限定理计算概率；

1. 一加法器同时收到300个噪声电压$V_k\ (k=1,2,\cdots,300)$，设它们是相互独立的随机变量，且都在区间$(0,6)$上服从均匀分布，记$V=\sum_{k=1}^{300}V_k$，求$P(V>930)$的近似值.

解： 易知$E(V_k)=3,\ D(V_k)=36/12=3\ (k=1,2,\cdots,300)$.

$$E(V)=E\left(\sum_{k=1}^{300}V_k\right)=900 \qquad D(V)=D\left(\sum_{k=1}^{300}V_k\right)=900$$

$Z=\dfrac{\sum_{k=1}^{300}V_k-300\times 3}{\sqrt{300\times 3}}=\dfrac{V-900}{30}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，于是

$$P(V>930)=P(\frac{V-900}{30}>\frac{930-900}{30})=1-P(\frac{V-900}{30}\le 1)\approx 1-\Phi(1)=0.1587.$$

2. 某保险公司多年的资料表明，在索赔户中被盗索赔户占 20%，用 X 表示在随意抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数.（1）写出 X 的概率函数；（2）利用棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理，求索赔户中被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值.

解:（1）$X \sim B(100,0.2)$，概率函数为 $P\{X=k\}=C_{100}^{k}(0.2)^k(0.8)^{100-k}$, k=0,1,2,...,100.

(2) $E(X)=100\times 0.2=20$, $D(X)=100\times 0.2\times 0.8=16$，由 $D-L$ 中心极限定理得

$$P(14\le X\le 30)=P(\frac{14-20}{4}\le\frac{X-20}{4}\le\frac{30-20}{4})=P(-1.5\le\frac{X-20}{4}\le 2.5)$$

$$\approx\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)=\Phi(2.5)+\Phi(1.5)-1=0.9938+0.9332-1=0.927$$

3. 车间有 100 台机床，它们独立工作着，每台机床正常工作的概率均为 0.8，正常工作时耗电功率各为 1kw，问供电所至少要供给这个车间多少电功率，才能以 99.9%的概率保证这个车间不会因供电不足而影响生产？

解: 用 X 表示工作的机床台数，则 $X\sim B(100,0.8)$， $E(X)=80$， $D(X)=16$.

设向该车间供电功率为 m （kw），

$$P(0<X\le m)=P(\frac{0-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}})\approx\Phi(\frac{m-np}{\sqrt{npq}})-\Phi(-\frac{np}{\sqrt{npq}})$$

$$=\Phi(\frac{m-80}{\sqrt{16}})-\Phi(-\frac{80}{\sqrt{16}})\approx\Phi(\frac{m-80}{\sqrt{16}})\ge 0.999$$

即 $\dfrac{m-80}{\sqrt{16}}\ge 3.1$， $m\ge 80+3.1\times 4=92.4$ (kw)

因此，若向该车间供电功率为 92.4kw，那么由于供电不足而影响生产的可能性小于 0.001.

5、含有一个未知参数的最大似然估计量。

1. 设离散总体 X 的概率函数为 $P(x;p)=(1-p)^{x-1}p \quad x=1,2,\cdots$.若样本观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，求未知参数 p 的最大似然估计值.（考试时为估计量，大写）

解： 似然函数 $L(p)=\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i-1}p=(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}p^n$，

$$\ln[L(p)]=(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)\ln(1-p)+n\ln(p)$$

由 $\frac{\mathrm{d}\ln[L(p)]}{\mathrm{d}p}=-(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)\frac{1}{1-p}+n\frac{1}{p}=0$ 得

p 的最大似然估计值 $\hat{p}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}=\dfrac{1}{\bar{x}}$.

2. 设连续总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中 $\theta>0$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，求未知参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

解： 矩估计：因为 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x;\theta)x\mathrm{d}x=\int_0^1\theta x^{\theta}dx=\dfrac{\theta}{\theta+1}$，

所以 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$，其中 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

最大似然估计：设样本观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta-1}$，

$$\ln[L(\theta)]=n\ln(\theta)+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$

由 $$\frac{\mathrm{d}\ln[L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)=0$$

得 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(X_i)}$.

3. 设 $X\sim f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ $(\theta>0)$ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为 X 的一组观察值，求 θ 的最大似然估计

解：似然函数为：$L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$

$$\ln\left[L(\theta)\right]=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln\left[L(\theta)\right]}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

解之有最大似然估计量：$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\bar{X}$.