算法笔记

基础语法

基本模板

- ```cpp
#include<bits/stdc++.h>   // 万能头文件
using namespace std;

using ll=long long;   // 简化long long 数据类型的声明
const int MOD=998244353;   // 取模值

void solve(){}   // 实际解决方案

int main(){

    ios::sync_with_stdio(false); // 加速外挂
    cin.tie(nullptr);   // endl换为 '\n'

    int T=1;
    cin>>T;   // 测试案例个数
    while(T--)solve();
    return 0;
}
```

### 输入输出

- ```cpp

cout<<fixed<<setprecision(n); // 指定输出小数位数

string str;
getline(cin,str);   // 按行输入,包括空格

getline(cin,str,',');   // 以char类型的字符','为分隔符进行输入
while(getline(cin,str,',')){
    //.....
}
```

-

数据类型

- **转换**

```
int num=c-'0';  // 字符char转int
char c=num +'0';    // 整型int转char
string str=to_string(num);  // 整形int转string
int num=stoi(str);  // 字符串string转int
long long num_ll=stoll(str);    // 字符串string转long long

char ch=toupper(c); // 小写转大写
char ch=tolower(c); // 大写转小写
```

- **判断**
    - 数值判断isdigit().
    - 字符判断isalpha().
    -

数学函数

- **基础函数**
    - 绝对值 abs().
    - 开平方 sqrt().
    - 最值 max(a,b), min(a,b).
    - 最大公约数gcd(a,b), 最小公倍数lcm(a,b)
- **模板函数**

1. **is_prime** (素数判断)

```
bool isPrime(int n) {
  if (n < 2) return false;
  // i * i <= n 可能会溢出，建议写成 i <= n / i
  for (int i = 2; i <= n / i; i++) {
      if (n % i == 0) return false;
  }
  return true;
}
```

```
2. **Factorial** ( 阶乘, 全排列 )
```

```
const int MAX_N=.....;
long long fact[MAX_N];

void Factorial(long long n){
    fact[0] = 1;
    for (int i = 1; i < MAX_N; i++){
        fact[i] = (fact[i - 1] * i) % MOD;
    }
}
```

3. **GCD,LCM** (辗转相除法)

```cpp
// 递归版
long long gcd(long long a, long long b) {
    return b == 0 ? a : gcd(b, a % b);
}
// 非递归版：避免栈溢出（处理极大数字时）
long long gcd_iter(long long a, long long b) {
    while (b) {
        a %= b;
        swap(a, b);
    }
    return a;
}

long long lcm(long long a, long long b) {
    if (a == 0 || b == 0) return 0;
    // 注意：先除后乘可以防止 a * b 直接相乘导致的溢出
    return (a / gcd(a, b)) * b;
}
```

4. $(A^B)\%MOD$ (快速幂)

```cpp
// 迭代写法
long long modpow(long long a, long long b){
    long long res = 1;
    while (b > 0){
        if (b & 1)res = res * a % MOD;  // 二进制最后一位为 1的情况
        a = a * a % MOD;
        b >>= 1;    // 幂次减半
    }
    return res;
}
// 递归写法

long long modpow(long long a, long long b){
    if (b == 1)return a;
    long long res = modpow(a, b >> 1);
    res = res * res % MOD;
    if (b & 1)return a * res % MOD;
    return res;
}
```

- 补充: **费马小定理**

• 技巧结论

- 分数计算 $H(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$

```cpp
sum += (1.0 / i);   // 用 1.0进行除法,强制转化为浮点运算
```

- 约瑟夫环 (如:星期1~7循环).

```cpp
(index+Δstep)%n;            // 顺时针循环
(index-Δstep%n+n)%n;        // 逆时针循环
```

- 两点间距直接函数

```cpp
hypot(x1-x2,y1-y2);     // 返回两点间距
```

- **位运算**
    - 奇偶判断

```
(n&1)==1?"奇数":"偶数";
```

    - 运算结论

```
a+b=a|b --> a&b=0 // 推导

```

STL容器

迭代器

- ```
  auto itA=v.begin(); // 指向容器第一个元素,*it表示实际存储的值
   auto itB=v.end(); //指向最后一个元素的下一个位置,*it报错
   for(auto it=v.begin();it!=v.end();it++);// 遍历

   auto itA=v.rbegin(); // 指向容器最后一个元素
   auto itB=v.rend(); //指向第一个元素的前一个位置
   for(auto it=v.rbegin();it!=v.rend();it++);// 逆序遍历

   min_element(v.begin(),v.end());     // 返回指向最小值的迭代器
   max_element(v.begin(),v.end());     // *max_element得到具体值
  ```

algorithm

- **sort** (排序)

```
sort(v.begin(),v.end()); // 升序排序
sort(v.begin(),v.end(),greater<T>); // 降序排序

sort(v.begin(), v.end(), [](int a, int b) {
        return a > b;
    }); // 自定义排序
```

- **merge** (合并)

```
//merge(iterator beg1, iterator end1, iterator beg2, iterator end2,
iterator dest);
merge(v1.begin(), v1.end(), v2.begin(), v2.end(), vtarget.begin()); //
合并两个序列

```

- **accumulate** (累加和)
```

```
//accumulate(iterator beg, iterator end, value);
int total = accumulate(v.begin(), v.end(), 0);// 计算容器元素累计总和

```

- **fill**（填充）

```
//fill(iterator beg, iterator end, value);
fill(v.begin(), v.end(), val);//容器区间内元素填充为指定的值
```

- **count**（计数）

```
// count(iterator beg, iterator end, value), 返回值为整数
int numX=count(v.begin(),v.end(),x);// 统计容器区间内值为 x的个数
```

string

- 增删改查

```
strA+=strB;      // 尾部拼接
str.insert(index,"A");  //指定索引index位置插入字符"A"

auto pos=str.find("abc");   // 查找str是否包含子串,pos为size_t类型,直接输出则为索引
if(pos!=string::npos){} // 表示查找成功的情况
```

- **reverse**（反转字符串）

```
reverse(str.begin(),str.end()); // 无返回值
```

- **replace**（替换字符）

```
replace(str.begin(),str.end(),'A','B'); // 将所有'A'替换为'B', 无返回值
```

- **transform**（转换大小写）

```
transform(s.begin(), s.end(), s.begin(), ::tolower);// 全部转为小写字符
transform(s.begin(), s.end(), s.begin(), ::tolower);// 全部转为大写字符
```

- **substr**（分割子串）

```
// substr(起始索引, 字符个数)
string t=str.substr(0,2); // 从索引0位置开始分割str的两个字符
```

- **remove+erase**（去除所有空格）

```
str.erase(remove(str.begin(),str.end(),' '),str.end());

auto new_end=remove(str.begin(), str.end(), ' ');   // 将所有非空格字符覆盖到容器前面，保持相对顺序,返回的迭代器指向新范围的末尾（第一个被"移除"的空格的位置）
str.erase(new_end, str.end());  // 从 new_end 到容器末尾的所有元素进行真正的删除
```

vector（动态数组）

- 一维动态数组声明

```
vector<T>v; // 只声明，不开辟空间，后续用v.push_back()插入
vector<T>v(n);  // 开辟大小为n的空间并初始化为0,可直接用v[i]
vector<T>v(str.begin(),str.end());  // 用字符串进行拷贝构造
```

- 增删

```
v.push_back(ele);   // 在数组末尾增添元素ele
v.pop_back();   // 删除最后一个元素

v.insert(iterator,ele); // 在迭代器it位置插入元素ele
v.erase(iterator);  //删除迭代器it位置的元素
v.erase(iteratorA,iteratorB);   // 删除迭代器itA~itB之间的元素
```

- 查找

```
v.empty();  // 判断是否为空
v.size();   // 返回元素个数

v.begin();  // 返回首元素的值
v.back();   // 返回尾元素的值
```

stack (栈)

- ```
  stack<T> stk;   // 声明容器

  stk.push(val);  // 向栈顶添加元素val
  stk.pop();  // 从栈顶移除第一个元素
  stk.top();  // 返回栈顶元素

  stk.empty();    // 判断栈是否为空
  stk.size();     // 返回栈的大小
  ```

- 习题集
  - 验证栈序列

queue (队列)

- ```
  queue<T> que;   // 声明容器

  que.push(val);  // 往队尾添加元素val
  que.pop();  // 从队头移除第一个元素
  que.front();    // 返回队首元素
  que.back();     // 返回队尾元素

  que.empty();    // 判断队列是否为空
  que.size();     // 返回队列的大小
  ```

-

list (双向链表)

- 适用条件: 保留插入顺序,支持拼接
- ```
  list<T> lt;

  lt.push_front(val); // 在容器开头插入一个元素
  lt.push_back(val);  // 在容器尾部加入一个元素
  ```
  ```

```
5
6  lt.pop_front(); // 从容器开头移除第一个元素
7  lt.pop_back();  // 删除容器中最后一个元素
8
9  lt.insert(pos,lt.begin(),ls.end());//在pos位置插入[beg,end)区间的数据，无返回值。
10 lt.erase(lt.begin(),lt.end());//删除[beg,end)区间的数据，返回下一个数据的位置。
11 lt.erase(it);//删除迭代器it所指位置的值，返回下一个数据的位置。
12 lt.remove(val);//删除容器中所有与val值匹配的元素。
13
14 lt.front(); // 返回首元素的值
15 lt.back();  // 返回尾元素
```

- 反转和排序

```
1 lt.sort(); // 默认的排序规则从小到大
2 lt.sort(greater<T>()); // 降序
3 lt.sort(cmp);   // 自定义
4
5 lt.reverse();
```

priority_queue (优先队列)

- 声明

```
1 priority_queue<T>pq;     // 最大值先出队
2 priority_queue<T, vector<T>, greater<T> > pq; // 最小值先出队
3 priority_queue<int, vector<int>, decltype(cmp)> pq(cmp);     // 自定义
4
5 auto cmp = [](int a, int b) { return 表达式(例:a > b); };
```

- 两端优先队列考虑使用 multiset

set (集合)

- **set** (所有元素在插入时自动被排序)
    - 键值对声明

```
1 set<T>st;   // 默认构造声明
2 set<T,greater<T1> >st;  // 元素降序排序
3 set<T,decltype(cmp)> st(cmp);   // 自定义排序规则
4
5 auto cmp=[](T1 a,T2 b){retrun 表达式(例: a>b );} // 自定义
```

    - 基本操作

```
st.size();  // 返回元素个数(去重后)
st.empty(); // 判断是否为空,返回值bool

st.insert(ele); // 插入元素ele
st.insert(ele).second // 返回bool值,插入成功为true, 已有元素ele则返回false
st.erase(ele);  // 删除元素ele
st.erase(it);   // 删除迭代器it所在指向位置的值

st.count(ele);  // 返回值为ele的个数
st,find(ele);   // 查找元素ele是否存在,存在则返回it,否则返回st.end()
```

- **multiset** (允许容器中有重复的元素)

```
mset.erase(val); // 删掉所有为val的值

mset.erase(mset.rbegin());  // 删掉最大值(默认)
ms.erase(prev(ms.end()));   // 同理
ms.erase(--ms.end());       // 同上

mset.erase(mset.begin());   // 删掉最小值(默认)


int getPre(int x){  //TODO 实现找前驱
    auto it = mset.lower_bound(x);// 找到大于等于x的元素的最大值
    if(it == mset.begin()) return -1;
    else return *prev(it);// 找到第一个比x小的数,prev()返回it的前一个迭代器,也可以用*(--it)
}

int getBack(int x){ //TODO 实现找后继
    auto it = mset.upper_bound(x);// 找到第一个比x大的元素
    if(it == M.end()) return -1;
    else return *it;
}
```

- **unordered_set** (仅用来去重)

map (键值对)

- **map** (用于key需要排序的情况)
    - 键值对声明

```
map<T1,T2>mp;   // 一般声明,keys升序排序
map<T1,T2,greater<T1> >mp;  // keys降序排序
map<T1,T2,decltype(cmp)> mp(cmp);   // 自定义排序规则

auto cmp=[](T1 a,T2 b){retrun 表达式(例: a>b );} // 自定义
```

    - 基本操作

```
mp.size();  //返回keys元素的数目
mp.empty(); //判断是否为空,返回值bool

mp[key]=value;  // 插入键值对{key:val}
mp.erase(key);  // 删除map中键为key的键值对

mp.count(key);  // 统计key元素的个数
```

```
mp.find(key);    // 查找key是否存在,存在则返回it,否则返回mp.end()

for(auto it = mp.begin();it != mp.end();it++){
if(mp.find(key)==mp.end()){}     // 未查找到元素的情况
cout << "key:"<<it->first;       // 访问用it->first为键key,it->second为值val
cout <<"value:"<< it->second;
}

```

- **multimap**（用于键key可重复的情况）
- **unordered_map**（不需要排序, 性能最好, 最常用）

基础算法

模拟/枚举

严格遵循题目规则，不重不漏地穷举所有可能状态

1. **建表查询**: 将**状态抽象化**, 对于日期(仅12个固定值), 方位(上,下,左,右)等可枚举的量,直接建表

```
// 数组查表处理月份天数
int days[] = {0, 31, 28, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30, 31};
// 数字确定移动方向
int dir[4][2] = {{0, 1}, {1, 0}, {0, -1}, {-1, 0}};
```

2. **边界划分**: 保证所有过程都在问题之内

贪心

鼠目寸光: 不从整体最优上加以考虑，而是始终做出**在当前看来最好的选择**

- 注意点:
    1. 可以一直向前走, 没有后顾之忧.（贪心思想的选择, 局部最优走到终点即为全局最优）
    2. 关键问题转化, 边界条件的处理.（找到贪心策略）
    3. 每轮都将问题转化成一个规模更小的子问题，直到问题被解决.
    4. 一般配合排序等方法找最值

- 典型例题思维:
    - 双向约束(邻域依赖)问题: 将双向约束拆分为两个单向约束, 分别进行遍历。**先解决左邻居，再解决右邻居, 最后取极值。**

      分发糖果

      接雨水(贪心,双指针,动态规划,单调栈)

    - 容器选择,性能优化: vector(动态数组)的增删操作相对于list(双向链表)的耗费要大得多,依据已有思路可以转变容器优化性能

      根据身高重建队列

    - 区间排序方向选择: **不重叠调度**选右端点；**合并区间**选左端点。

        - 选右边界排序,可避免区间范围过大的问题

    用最少数量的箭引爆气球(合并区间)

    无重叠区间(左右均可,推荐右)
- 遍历顺序的选择: 不要有后顾之忧,宁愿边界多处理,也不回头看一步

    单调递增的数字

    划分字母区间

backtrack (回溯)

核心思想是从一个初始状态出发，暴力搜索所有可能的解决方案，当遇到正确的解则将其记录，直到找到解或者尝试了所有可能的选择都无法找到解为止. 本质上是穷举, 效率并不高, 一般为指数级别, 可借助剪枝优化来提高效率.

- 一般解决以下问题:

```
1. 组合问题：N个数里面按一定规则找出k个数的集合，不强调元素顺序
2. 切割问题：一个字符串按一定规则有几种切割方式
3. 子集问题：一个N个数的集合里有多少符合条件的子集
4. 排列问题：N个数按一定规则全排列，有几种排列方式，强调元素顺序
5. 棋盘问题：N皇后，解数独等等
```

- 一般模板[**回溯函数**, **终止条件**,**遍历过程**,(剪枝)]

```cpp
// 参数列表 vector<vector<T> >&res, vector<T>&path, int startIndex, vector<T>nums
void backtrack(参数) {
    // 求子集等情况,可在该行存放结果
    if (终止条件) {
        存放结果;
        return;
    }

    for (选择：本层集合中元素（树中节点孩子的数量就是集合的大小）) {
  //for(int i=startIndex; i<nums.size()&& (剪枝操作) ; i++ )
        if(...){continue;}// 也可以剪枝
        处理节点;
        // path.push_back(nums[i]);
        backtrack(路径，选择列表); // 递归
        // backtrack(res, path, i+1, nums);
        回溯，撤销处理结果;
        // path.pop_back();
    }
}

// 调用
vector<vector<T>> res;
vector<T>path;
backtrack(res,path , 0, nums);
```

    - 关于startIndex
        - i==startIndex是为了避免单纯因为顺序不同而重复出现的子答案
        - 在回溯过程中for(i=start; xxxx; i++){},i++是为了确保子答案的选取时不会再从头开始选取

        - 如果是排列，不同顺序代表了不同的答案，则`int i=0`. startIndex不再需要
        - 去重操作,`if (i > start && num[i] == num[i-1]) continue;`
    - 关于sum Target
        - 题目要求子项和等于target，因此首先要注意除了正常return，还要考虑`sum>target`立刻return
        - 剪枝操作，`sum+子项<=target`，但是要注意子项必须满足升序排列，有必要时提前sort()
    - 关于优化
        - 组合类问题, 如果仅用于求符合解的个数, 可以使用dp优化例: 目标和

Dynamic Programming (动态规划)

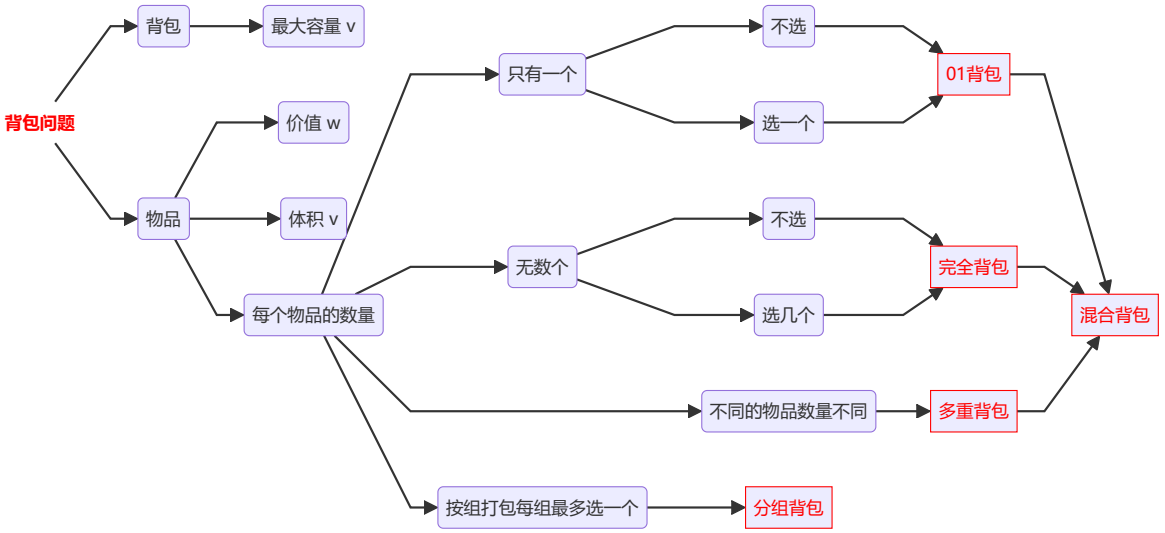
将一个问题**分解**为一系列更小的子问题，并通过**存储子问题的解**来避免重复计算, 旧状态+决策=新状态

- 一般解题步骤:
    1. 确定dp数组（一维或二维）以及下标的含义
    2. 借助数学归纳思想, 确定递推公式 (状态转移方程)
    3. dp数组如何初始化
    4. 确定遍历顺序
    5. 举例推导dp数组
- 一般模板

  以leetcode 96.不同的二叉搜索树为例

```
int numTrees(int n) {
    vector<int> dp(n + 1);  // 明确下标含义，声明dp数组，大小为n-1
    dp[0]= 1;// 依据题意初始化基础值
    for (int i = 1; i <= n; i++) {  // 确定遍历规则和顺序
        for (int j = 1; j <= i; j++) {
            dp[i] += dp[j - 1] * dp[i - j];// 递推公式，依赖于子问题的解
        }
    }
    return dp[n];
}
```

- 典型类题目->**背包问题**



- 解题步骤(二维DP数组) :
    1. 声明数组dp[i][j]: i表示**第i个物品**, j表示**容量为 j的背包**,dp[i][j]表示从下标为[0~i]的物品里任意取，放进容量为 j的背包，价值总和最大是多少
    2. 状态转移分析:
        1. 不放物品 i: 最大价值延续,即dp[i][j] = dp[i-1][j]
        2. 放物品 i: 背包空出物品i的容量,转为j-weight[i]后,放物品+value[i],即dp[i][j] = dp[i-1][j-weight[i]]+value[i]
        3. 得出递推公式 dp[i][j] = max(dp[i - 1][j], dp[i - 1][j - weight[i]] + value[i]);
    3. 初始化dp数组: 每一个(i,j)都需要依赖左上方和正上方的解,则用第1个物品初始化第一行,从第2个物品开始分析; 背包容量为0时不放物品,则第一列初始化为0; 非零下标无需初始化,任意值均可
    4. 遍历顺序(物品先?背包先?): 对于01背包的二维DP均可
    5. 打印DP数组(debug):

物品(索引 i)\背包容量c	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
物品(0), 价值val_1	0	当前最大价值	当前最大价值	当前最大价值	当前最大价值
物品(1), 价值val_2	0				
物品(2), 价值val_3	0				最终解

    6. 空间优化(二维DP -> 一维滚动数组):
        - dp[j]表示容量为 j的背包，所背的物品价值可以最大为dp[j];
        - 递推公式为dp[j]=max(dp[j-1], dp[j-weight[i]]+value[i]);
        - 初始化dp[0]=0, dp[j]=0 (非负数值的最小值,一般取0就可)
        - 遍历顺序: 先顺序遍历物品,后倒序遍历背包, 保证每个物品只被添加一次
- 01背包模板:

- 以leetcode 416.分割等和子集 为例(非本题最优解,本题可用vector<bool>优化)

```cpp
// 二维DP数组
bool canPartition(vector<int>&nums) {
    int sum = accumulate(nums.begin(), nums.end(), 0);
    if (sum % 2 != 0) return false; // 排除无效判断

    int target = sum / 2;
    vector<vector<int> >dp(nums.size(),vector<int>(target+1));
    for(int j=0;j<=target;j++){// 初始化第一行,能放则放,否则为 0
        if(j>=nums[0])dp[0][j]=nums[0];
    }
    // 填充DP表
    for(int i=1;i<nums.size();i++){
        for(int j=1;j<=target;j++){
            if(j<nums[i])    // 放不下, 继承上一行
                dp[i][j]=dp[i-1][j];
            else    // 能放下, 放与不放, 取最大值
                dp[i][j]=max(dp[i-1][j],dp[i-1][j-nums[i]]+nums[i]);
        }
    }
    return dp[nums.size()-1][target]== target;
}
```

```cpp
// 空间优化: 一维滚动数组
bool canPartition(vector<int>& nums) {
    int sum = accumulate(nums.begin(), nums.end(), 0);
    if (sum % 2 != 0) return false; // 排除无效判断

    int target = sum / 2;
    vector<int> dp(target + 1, 0);  // 声明大小为 n+1的DP数组,表示从 0~j可取的最大元素和,初始化为 0
    for (int i = 0; i < nums.size(); i++) { // 顺序遍历
        for (int j = target; j >= nums[i]; j--) {   // 逆序遍历
            dp[j] = max(dp[j], dp[j - nums[i]] + nums[i]);  // 递推公式
        }
    }
    return dp[target] == target;
}
```