数学物理方程期末复习之一起学套路 1

一. 分离变量法

【例 1】给出特征值问题$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l \\ X(0)=0, X'(l)=0 \end{cases}$

（1）当特征值取何值时$X(x)$有非零解，并求出该特征函数$X(x)$

（2）描述特征函数系$\{X_n(x)\}$在区间$[0,l]$上的正交性

（3）假设函数$f(x)$能够按照特征函数系$\{X_n(x)\}$展开为级数，试写出展开式中的系数表达式

【例 2】利用分离变量法求解下列定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<l, \quad t>0 \\ u\big|_{x=0}=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0 & t>0 \\ u\big|_{t=0}=\sin\dfrac{5\pi x}{2l}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 & 0\le x\le l \end{cases}$$

【例 3】试用函数代换将下列方程转化为齐次方程齐次边界条件的形式（不用解方程）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u\big|_{x=0} = B \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = C \quad t > 0 \\ u\big|_{t=0} = D, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = E \quad 0 \le x \le l \end{cases}$$

二. 行波法与积分变换法

【例 4】证明定解问题$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$的解为

$u(x,t) = \dfrac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \dfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$（即达朗贝尔公式的证明）

【例 5】求下列初值问题的解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad -\infty<x<+\infty, y>0 \\ u\Big|_{y=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=2x, \quad -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

【例 6】写出单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的定义，并求 $\delta(t)$ 的傅里叶变换。验证 $\delta(t)$ 是单位阶跃函数 $u(t)$ 的弱导数，并分别求解 $\delta(t)$ 以及单位阶跃函数 $u(t)$ 的拉普拉斯变换。

【例 7】利用积分变换法求解定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty<x<+\infty \\ u\Big|_{t=0}=\varphi(x) \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$$

【例 8】求解下面的非齐次波动问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos t \cdot \sin x, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = x^2 \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = x \end{cases}$$

可能用到的傅里叶变换对：$g(t) = \begin{cases} h, -\tau < t < \tau \\ 0, otherwise \end{cases} \underset{FT^{-1}}{\overset{FT}{\rightleftharpoons}} 2h \dfrac{\sin \omega\tau}{\omega}$

【例 9】设 $x > 1,\ y > 0$，利用积分变换法求解定解问题：$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y \\ u\,|_{y=0} = x^2 \\ u\,|_{x=1} = \cos y \end{cases}$