1. 三种典型方程的表示及初始条件、边界条件的提法

一维波动方程：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

一维热传导方程：$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

二维拉普拉斯方程：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

初始条件：

- 弦振动：弦在开始时刻的位移及速度　eg. $\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$
- 热传导：开始时刻物体温度的分布状况　eg. $u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x)$

边界条件：

（以弦振动为例）

第一类边界条件：　固定端　$u|_{x=a} = 0$　或　$u(a,t) = 0$

第二类边界条件：　自由端　$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=a} = 0$　或　$u_x(a,t) = 0$

第三类边界条件：　弹性支承端　$(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u)|_{x=a} = 0$.　　$\sigma = k/T$

（理解，会写方式）. P30. (2.14)

2. 二阶线性偏微分方程的一般表示，课本里出现的有关二阶线性常微分方程的解法。理解并会使用叠加原理.

二阶线性常微分方程　$y'' + py' + qy = 0$　（齐次）

- 若 $p^2 - 4q > 0$ 则有两不相等实根 k_1, k_2　　通解：$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
- 若 $p^2 - 4q = 0$ 则有两相等实根 k　　通解：$y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$
- 若 $p^2 - 4q < 0$ 则有一对共轭复根 $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$　　通解：$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

叠加原理：　当偏微分方程是线性齐次的，边界条件也是齐次的时，可先求其通解，再利用叠加原理将它们线性组合使满足初始条件.

3.会熟练地用分离变量法求解偏微分方程的定解问题(包括各种齐次边界条件，特征值的讨论和特征方程的求解，掌握特征函数系正交性，掌握将函数按特征函数系展开，要求有完整的求解过程).

有界弦的自由振动 (两端固定)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<l,\ t>0 \quad ① \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0 & ,t>0 \quad ② \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x) & ,0\le x\le l \quad ③ \end{cases}$$

解: 令 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 变量分离

对于①,有 $X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$

$\therefore \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}$

令 $\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda$

可得 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & ④ \\ T''(t)+a^2\lambda T(t)=0 & ⑤ \end{cases}$

对于② $\because u(x,t)=X(x)T(t)$, $u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0$

$\therefore X(0)T(t)=0,\ X(l)T(t)=0$

$\because T(t)\not\equiv 0$

$\therefore X(0)=X(l)=0$

由④得 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$ ← 特征值

特征值的讨论: 有欧?

1' 设 $\lambda<0$, 此时通解为 $X(x)=Ae^{\sqrt{-\lambda}x}+Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$\because X(0)=X(l)=0$

$\therefore A=B=0$ 即 $X(x)\equiv 0$

$\because u(x,t)=X(x)T(t)\not\equiv 0$

$\therefore \lambda<0$ 时不成立.

2' 设 $\lambda=0$, 此时通解为 $X(x)=Ax+B$

$\because X(0)=X(l)=0$

$\therefore A=B=0$ 即 $X(x)\equiv 0$

$\because u(x,t)=X(x)T(t)\not\equiv 0$

$\therefore \lambda=0$ 时不成立.

3' 设 $\lambda>0$, 并令 $\lambda=\beta^2$, 此时通解为 $X(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$

(一端固定另一端开放)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<l,\ t>0 \quad ①' \\ u|_{x=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l}=0 & t>0 \quad ②' \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x) & 0\le x\le l \quad ③' \end{cases}$$

= 与左边相同

对于②' $X(0)T(t)=0$, $X'(l)T(t)=0$

$\because T(t)\not\equiv 0$

$\therefore X(0)=X'(l)=0$.

由④得 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X'(l)=0 \end{cases}$

1' 设 $\lambda<0$ 时, 有 $X(x)=Ae^{\sqrt{-\lambda}x}+Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$\begin{cases} X(0)=A+B=0 \\ X'(l)=\sqrt{-\lambda}\cdot Ae^{\sqrt{-\lambda}l}-\sqrt{-\lambda}\cdot Be^{-\sqrt{-\lambda}l}=0 \end{cases}$

$\therefore A=B=0$ 即 $X(x)\equiv 0$

$\because u(x,t)\not\equiv 0$

$\therefore \lambda<0$ 时不成立.

2' 设 $\lambda=0$. 有 $X(x)=Ax+B$

$\begin{cases} X(0)=B=0 \\ X'(l)=A=0 \end{cases}$ $\therefore X(x)\equiv 0$

$\because u(x,t)\not\equiv 0$

$\therefore \lambda=0$ 时不成立.

3' 设 $\lambda>0$ 并令 $\lambda=\beta^2$ 有 $X(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$

$$\begin{cases} X(0)=A=0 \\ X(l)=B\sin\beta l=0 \end{cases}$$

$\because B\neq 0$ (否则 $X(x)\equiv 0$)

$\therefore \sin\beta l=0$ Sin → 从1开始

$\beta=\frac{n\pi}{l}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$\therefore \lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2}$, $X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi x}{l}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

对于 $T_n''(t)+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t)=0$

通解: $T_n(t)=C_n'\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n'\sin\frac{n\pi a}{l}t$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中, $C_n=C_n'\cdot B_n$; $D_n=D_n'\cdot B_n$

根据初始条件②

$$\begin{cases} u(x,t)|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cdot\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x) \end{cases}$$

得 $$\begin{cases} C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \\ D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(0)=A=0 \\ X'(l)=\beta B\cos\beta l=0 \end{cases}$$

$\because B\neq 0$ (否则 $X(x)\equiv 0$)

$\therefore \cos\beta l=0$ Cos → 从0开始

$\beta=\frac{2n+1}{2l}\pi$ $(n=0,1,2,\cdots)$

$\therefore \lambda=\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}$

对于 $T_n''(t)+\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}T_n(t)=0$

通解: $T_n(t)=C_n'\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t+D_n'\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t$ $(n=0,1,2,\cdots)$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t+D_n\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

利用

$$\begin{cases} C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,dx \\ D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,dx \end{cases}$$

将函数按特征函数系展开.有款

e.g. $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x)$ [将 $\varphi(x)$ 按特征函数系 $\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}$ 展开].

$$\int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{k\pi x}{l} \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx = \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\, dx$$

$\because \int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot \sin\frac{m\pi}{l}x\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{l}{2} & m = n \end{cases}$

$\therefore \quad C_n \cdot \frac{l}{2} = \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\, dx$ 　　即 $C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\, dx$.

1. 熟练地掌握具有各种非齐次边界条件的非齐次方程的未知函数代换法，掌握将非齐次方程和非齐次边界条件同时齐次化的情形.

有题

非齐次方程齐次化.

eg. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) & 0<x<l,\ t>0 \\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0 & t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x) & 0\le x\le l \end{cases}$

设解为 $u(x,t)=V(x,t)+W(x,t)$

$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+f(x,t) & 0<x<l,\ t>0 \\ V|_{x=0}=V|_{x=l}=0 & t>0 \\ V|_{t=0}=\frac{\partial V}{\partial t}|_{t=0}=0 & 0\le x\le l \end{cases}$ 与 $\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} & 0<x<l,\ t>0 \\ W|_{x=0}=W|_{x=l}=0 & t>0 \\ W|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial W}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x) & 0\le x\le l \end{cases}$

只会齐次化即可，后续求解不用掌握

方程&边界条件均非齐次

(设法将边界条件化成齐次的. 即取一个适当的未知函数之间的代换，使对于新的未知函数，边界条件是齐次的)

① $u|_{x=0}=u_1(t),\ u|_{x=l}=u_2(t)$ 不同边界条件对应不同的 $W(x,t)$.

$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) & 0<x<l,\ t>0 \\ u|_{x=0}=u_1(t),\ u|_{x=l}=u_2(t) & t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x) & 0\le x\le l \end{cases}$

令 $u(x,t)=V(x,t)+W(x,t)$

要使 $V|_{x=0}=V|_{x=l}=0$，只需 $W|_{x=0}=u_1(t)$，$W|_{x=l}=u_2(t)$ (选取 $W(x,t)$ 使 $V(x,t)$ 的边界条件齐次化)

$\therefore$ 设 $W(x,t)=A(t)x+B(t)$

$\begin{cases} W|_{x=0}=B(t)=u_1(t) \\ W|_{x=l}=A(t)\cdot l+B(t)=u_2(t) \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} A(t)=\frac{u_2(t)-u_1(t)}{l} \\ B(t)=u_1(t) \end{cases}$ 即 $W(x,t)=u_1(t)+\frac{u_2(t)-u_1(t)}{l}x$

若 f, u_1, u_2 均与 t 无关，则可取适当的 $W(x)$ [而不是 $W(x,t)$] 并通过一次代换将方程与边界条件都变为齐次的

5.熟练一维波动方程的达朗贝尔公式~~和三维波动方程的球对称解~~。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x) \quad -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

$(dx)^2-a^2(dt)^2=0$

$(dx+adt)(dx-adt)=0$.

令 $\xi=x+at,\ \eta=x-at$

则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta})\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta})\frac{\partial \eta}{\partial x}$

$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$

同理：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2})$

$\therefore$ 由 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 得 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$. 会推导！考试时可能为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=A$ 常数

两边对 η 积分：$\frac{\partial u}{\partial \xi}=f(\xi)$

$u(x,t)=\int f(\xi)d\xi+f_2(\eta)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$

由 $u|_{t=0}=\varphi(x)$，$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x)$ 得 $\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x) \\ af_1'(x)-af_2'(x)=\psi(x) \ ① \end{cases}$

对①两边对 x 积分一次：$f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{a}\int_0^x\psi(\xi)d\xi+C$

$\therefore f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(\xi)d\xi+\frac{C}{2}$ （$x \to x+at$）

$f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(\xi)d\xi-\frac{C}{2}$ （$x \to x-at$）

$\therefore u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$ （达朗贝尔公式）

~~三维波动方程的球对称解：~~

$$\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2(ru)}{\partial t^2}$$

~~通解 $ru=f_1(r+at)+f_2(r-at)$~~ 即 $u(r,t)=\frac{f_1(r+at)+f_2(r-at)}{r}$

6. 掌握行波法求解波动方程，会用微分方程的特征变换来化简方程.

行波法只能用于求解无界域内波动方程的定解问题.

方程分类： 对 $A\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0$

其特征方程为 $A(dy)^2-2Bdxdy+C(dx)^2=0$.

$\begin{cases} B^2-AC<0 & \text{椭圆型方程} \\ B^2-AC=0 & \text{抛物型方程} \end{cases}$

7. 熟悉傅里叶变换和反变换，拉普拉斯变换及其反变换的定义和求法.
掌握积分变换法求解偏微分方程的定解问题

$$\begin{cases} F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\ f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}dt \end{cases}$$

微分性质：$\mathcal{F}[f'(x)]=(i\omega)\mathcal{F}[f(x)]$

$F(p)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$

微分性质：$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$时 $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=p^n F(p)$

$\mathcal{L}[f'(t)]=p\mathcal{L}[f(t)]-f(0)$.

弱导数：在区间[a,b]上给定的函数 $f(t)$，如果存在一个函数 $g(t)$，使得对任意一次连续可微且在端点附近为0的函数 $\varphi(t)$，有

$$\int_a^b g(t)\varphi(t)dt=-\int_a^b f(t)\varphi'(t)dt$$ 则称 $g(t)$ 是 $f(t)$ 的弱导数.

eg. 证明 $\delta(t)=h'(t)$ or 求 $|x|$ 的弱导数 $(sgn(x))$

积分变换法求解偏微分方程的定解问题 会出题！

e.g. P90 例12 作业中 P101 8, 10, 11.

8. 掌握n阶贝塞尔方程和两类n阶贝塞尔函数，贝塞尔函数的递推公式，贝塞尔函数的正交性，会利用该正交性把满足一定条件的函数展开为贝塞尔函数的级数.

n阶贝塞尔方程： $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$

第一类贝塞尔函数： $J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m}\cdot m!\,(n+m)!}$ $(n=0,1,2,\cdots)$

第二类贝塞尔函数： $Y_n(x)=\frac{J_n(x)\cos n\pi-J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$

n阶贝塞尔方程通解： $y=AJ_n(x)+BJ_{-n}(x)$

贝塞尔函数的递推公式：

$$\frac{d}{dx}J_0(x)=-J_1(x)$$

$$☆\begin{cases}\frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)]=x^nJ_{n-1}(x)\\ \frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2}{x}nJ_n(x)\\ J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x)\end{cases}$$

贝塞尔函数的正交性：

特征函数系 $\left\{J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)\right\}$ $(m=1,2,\cdots)$ 正交

$$\int_0^R rJ_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)dr=\begin{cases}0 & m\neq k\\ \frac{R^2}{2}J_{n-1}^2(\mu_m^{(n)})=\frac{R^2}{2}J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)}) & m=k\end{cases}$$

将函数展开为贝塞尔函数的级数.

e.g.
$$f(r)=\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)$$

<任意在[0,R]上具有一阶连续导数及分段连续的二阶导数的函数f(r)，只要它在r=0处有界，r=R处等于0，则它必能展开成上述形式>.

$$\int_0^R r\cdot f(r)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)dr=\int_0^R\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)\cdot r\,dr$$
$$=A_k\cdot\frac{R^2}{2}J_{n-1}^2(\mu_m^{(n)})$$

$$\therefore A_k=\frac{1}{\frac{R^2}{2}J_{n-1}^2(\mu_m^{(n)})}\int_0^R rf(r)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)dr$$

9. 掌握勒让德方程、勒让德多项式的表示式及其罗德里格斯表示式，勒让德多项式的正交性。会利用待定系数把一个函数展开为勒让德多项式的级数。

勒让德方程：$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$

勒让德多项式：

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}$$

其中 $M=\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{当}n\text{为偶数时}\\ \frac{n-1}{2} & \text{当}n\text{为奇数时}\end{cases}$

$$\begin{cases}P_0(x)=1\\ P_1(x)=x\\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)\\ P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)\\ P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\\ P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)\end{cases}$$

罗德里格斯表达式 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

勒让德多项式的正交性：

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{2}{2n+1} & m=n\end{cases}$$

$\left(\int_{-1}^{1}x^k P_n(x)dx=0\right.$ k为小于n的正整数)

函数展开为勒让德多项式的级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n(x),\quad -1<x<1$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)P_k(x)dx=\int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n(x)\cdot P_k(x)\,dx.$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx=C_n\cdot\frac{2}{2n+1}$$

$$\therefore C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx$$

会有一道用贝塞尔 or 勒让德解的应用题.