

数学物理方程期末复习之一起背公式

(ball ball 大家不要纠结推导)

第一章 典型方程与定解问题的推导

1. 波动方程

$$\text{一维: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \text{ 二维: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \text{ 三维: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

2. 热传导方程

$$\text{一维: } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \text{ 二维: } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \text{ 三维: } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

3. 拉普拉斯方程

$$\text{二维: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ 三维: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\text{极坐标: } \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{建议背这个})$$

$$\text{球坐标: } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

4. 三类边界条件

波动方程: 第一类边界条件: 固定端, $u|_{x=a} = 0$ 或 $u(a, t) = 0$

第二类边界条件: 自由端, $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=a} = 0$ 或 $u_x(a, t)|_{x=a} = 0$

第三类边界条件: 弹性支承端, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u \right)|_{x=a} = 0$

热传导方程: 第一类边界条件: $u|_s = f$

第二类边界条件: $\frac{\partial u}{\partial n}|_s = 0$

第三类边界条件: $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right)|_s = \sigma u_1|_s$

【说明】

三类边界条件的一般形式:

第一类边界条件: 边界上直接给出未知函数的数值: $u|_s = f_1$

第二类边界条件：边界上给出未知函数沿边界外法向量的方向导数： $\frac{\partial u}{\partial n}|_s = f_2$

第三类边界条件：边界上给出未知函数及其沿边界外法向量方向导数线性组合值

即： $(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u)|_s = f_3$

第三章 行波法与积分变换法

1. 达朗贝尔公式

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

2. 二阶线性偏微分方程的特征方程以及方程类型的判断

$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$ 对应的特征方程为

$$A(dy)^2 - 2Bdx dy + C(dx)^2 = 0$$

$B^2 - AC > 0$ ：双曲型，如波动方程

$B^2 - AC = 0$ ：抛物型，如热传导方程

$B^2 - AC < 0$ ：椭圆型，如拉普拉斯方程，泊松方程

3. 傅里叶变换和拉普拉斯变换的公式以及性质（详见信号与系统，谢谢）

第五章 贝塞尔函数

1. n 阶贝塞尔方程

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

2. n 阶贝塞尔函数与贝塞尔方程的通解

$$n \text{ 阶第一类贝塞尔函数: } J_n(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2^{n+2m} m! \Gamma(n+m+1)} x^{n+2m} (n \geq 0)$$

$$n \text{ 阶第二类贝塞尔函数: } Y_n(x) = \frac{\cos n\pi J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

(1) n 不为整数时, 贝塞尔方程的通解 $y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$

(2) n 为整数时, 贝塞尔方程的通解 $y = AJ_n(x) + BY_n(x)$

(3) n 无论是整数还是非整数, 统一的通解形式为 $y = AJ_n(x) + BY_n(x)$

3. 贝塞尔函数的递推公式

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x), \quad \frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$$

(第二类也有对应的一套公式)

4. 贝塞尔函数的正交性

特征函数系 $\{ J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{R} r) \} (m=1,2,\dots)$ 为正交函数系, $\mu_m^{(n)}$ 为 $J_n(x)$ 的非负零点

$$\int_0^R r J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{R} r) J_n(\frac{\mu_k^{(n)}}{R} r) dr = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ \frac{R^2}{2} J_{n-1}^2(\mu_m^{(n)}) = \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)}), & m = k \end{cases}$$

5. 函数展开成贝塞尔函数的级数

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{R} r)$$

第六章 勒让德多项式

1. 勒让德方程

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

2. n 次勒让德多项式

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \cdot M = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{2}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

罗德里格斯表达式: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$ (这个貌似更好记)

几个特殊阶次的勒让德多项式(常考用它们来表示一些简单函数)

$$P_0(x)=1, \quad P_1(x)=x, \quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), \quad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

3. 勒让德多项式的正交性

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

4. 函数展开成勒让德多项式的级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x), (-1 < x < 1), \quad \text{其中 } C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx, (n=0,1,2,\dots)$$

$$f(\cos \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(\cos \theta), (0 < \theta < \pi), \quad \text{其中 } C_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\cos \theta)P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

【说明】若给定多项式函数，可以直接根据最高次幂，通过待定系数法利用

$$P_0(x)=1, \quad P_1(x)=x, \quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), \quad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x) \cdots \cdots \text{等进行展开,}$$

无需利用正交性求积分