数学物理方程
与特殊函数

陈涛
chentao@cuc.edu.cn
数据科学与智能媒体学院

课程概况

- 什么是数学物理方程?

方程中含有多元函数u及其偏导数, 数学上称为**偏微分方程(PDE)**.

- 它们从哪里来?

这些方程主要来自于物理, 因为许多物理的基本规律的数学形式都是偏微分方程: 流体力学(N-S方程), 固体力学(弹性方程), 电磁学(Maxwell方程).

- 如何求解它们?

课程内容

第一章　数理方程及定解条件

第二章　分离变量法

第三章　行波法与积分变换法

第四章　拉普拉斯方程的格林函数法

第五章　贝塞尔函数

第六章　勒让德多项式

第一章　一些典型方程和定解条件的推导

- 第一节 基本方程的建立
- 第二节 初始条件与边界条件
- 第三节 定解问题的提法, 线性叠加原理

- 主要内容

从不同的物理模型出发，建立数学物理中三类**典型方程(波动,热传导,稳态)**；根据系统的**边界条件和初始状态**列出定解条件；提出相应的**定解问题.**

线性叠加原理——线性微分方程求解的理论依据.

例 1. 波动方程：弦的微小横振动

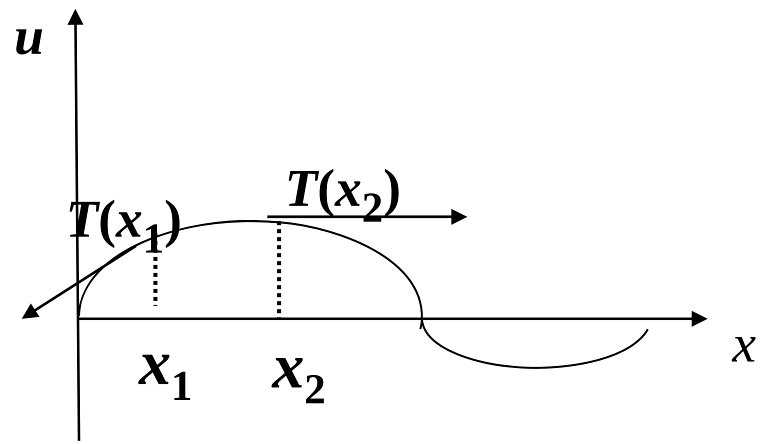
- 设有一条拉紧的弦，长为 l，平衡位置与x轴的正半轴重合，且一端与原点重合, 某个微小扰动引起部分质点的位移，内部张力又使邻近的部分随之产生位移，形成所谓波的运动。
- 求解描述弦上质点随时间和位置变化的位移函数**u(x,t)**。

假设：

（1）弦均匀细长，从而其横截面可忽略而视作线，线密度ρ为常数。

（2）弦柔软弹性，可任意弯曲，任一点处张力$T(x)$的方向总是沿着弦在该点的切线方向。

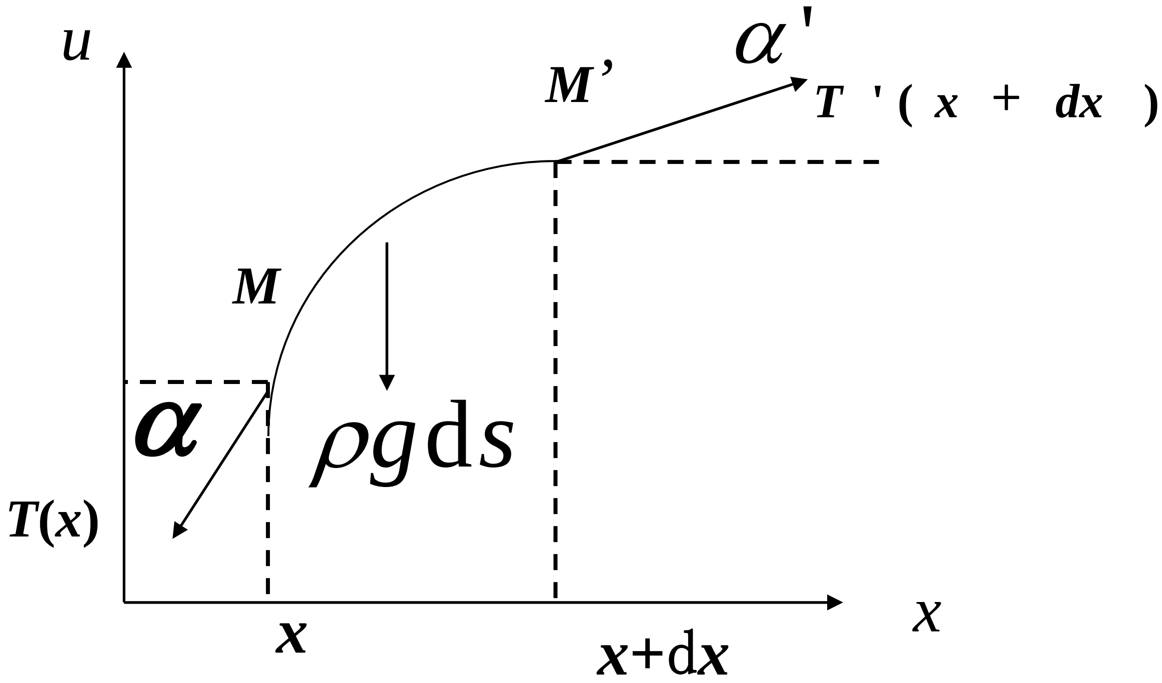
（3）微小横向振动：弦的运动在同一平面进行，弦上每点沿垂直于x轴的方向运动；且每点振动的幅度及**弦在任意位置处切线的倾角都很小**，以至于它们的高于一次方的项都可忽略不计。即



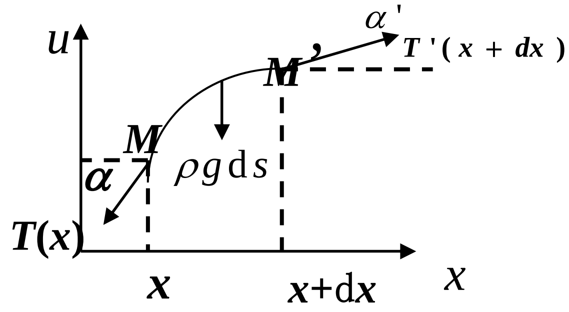
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 << 1 \qquad ds = \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx \approx dx$$

取坐标系oxu，位移记为$u(x,t)$ ，现在来建立位移满足的方程

- 建立方程
- 取微元 *MM'*， 此微元可以看作是质量为 $\rho g ds$的质点， 现对*MM'* 进行受力分析



牛顿运动定律： ***F* = *m*·*a***



作用在弧段 MM' 上的水平方向的力为

$$T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = 0$$

倾角很小，即 $\alpha \approx 0, \alpha' \approx 0$ 近似得

$$T = T'$$

垂直方向的力为

$$\boxed{-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g ds = \rho ds \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}} \quad （1）$$

由于 倾角很小，即 $\alpha \approx 0, \alpha' \approx 0$

$$\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\,\alpha, \quad \sin\alpha' \approx \mathrm{tg}\,\alpha', \quad ds \approx dx.$$

于是等式（1）变成

$$-T\,\mathrm{tg}\,\alpha + T\,\mathrm{tg}\,\alpha' - \rho g dx = \rho dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \qquad （2）$$

由微积分知识可知，在时刻$\boldsymbol{t}$ 有

$$tg\alpha = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad tg\alpha' = \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x}.$$

等式（2）可以写成

$$\frac{1}{dx}\left[\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 t} + \frac{\rho g}{T}$$

令 $dx \to 0$，取极限得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\rho g}{T}.$$

略去重力，可得方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (3)$$

其中 $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$

上述推导过程，实际上就是将微元运动满足的物理定律翻译成未知函数及其偏导数的数学方程。

弦振动方程（3）中只含有两个自变量 x和 t，其中 t 表示时间， x表示位置。由于它们描述的是弦的振动或波动现象，因而又称为一维波动方程。

注1. 如果在弦的每单位长度上有F 外力作用，则方程（3）具有下列形式：

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, \qquad (4)$$

其中 $f = \dfrac{F}{\rho}$，而外力可以是压力、重力、阻力等。

注2. $f \equiv 0$, 齐次方程; $f \neq 0$, 非齐次方程.

导出数学物理方程的一般方法：

- 确定所研究的**物理量**；
- 建立适当的**坐标系**；
- 找出研究单元（微元），写出**该单元（微元）与邻近单元（微元）的相互作用，用数学方法表示**这种相互作用对物理量的影响，把物理问题转化为数学问题；
- 简化整理，**得到方程**。

这个方法就是定积分应用中的**微元法**.

例 3. 热传导方程

物体内部温度分布不同时, 热量会从温度高的点传导到温度低的点, 从而使物体内部的温度分布随时间发生变化.

问题：建立温度函数$u(x, y, z, t)$, 研究温度随时间和点的位置变化规律。

高斯公式(散度定理)

$$\iiint_{\Omega} \nabla \bullet \mathbf{A} dV = \oiint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \bullet \mathbf{n} dS.$$

即

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV$$

$$= \oiint_{\partial\Omega} \left(A_x n_x + A_y n_y + A_z n_z \right) dS.$$

傅里叶实验定律

- 物体在无穷小时间段dt内，流过一个无穷小面积dS的热量dQ与时间dt，曲面面积dS，以及物体温度u沿曲面dS的法线方向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$三者成正比，即

$$dQ = -k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt$$

$$= -k\nabla u \cdot \mathbf{n}dSdt$$

- 其中k为物体的热传导系数，当物体均匀且各向同性的导热体时，k为常数.

- 式中的负号是由于热量的流向和温度梯度的正向相反而产生的。热量从高温流向低温，而温度的梯度方向正好是温度的增加方向，因此两者刚好反向。即,

$\frac{\partial u}{\partial n} > 0$ 时, 热量实际上是向 $-n$ 方向流动的.

温度$u(x, y, z, t)$通过对任意一个小的体积微元V内的热平衡关系的研究，建立方程。傅里叶定律:

$$dQ = -k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt$$

$[t_1, t_2]$内，采用高斯公式, 得通过曲面**S**流进**V**的热量,

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_{\partial\Omega} k\frac{\partial u}{\partial n}dS\right]dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_{\partial\Omega}\left(k\nabla u\right)\cdot\mathbf{n}dS\right]dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial u}{\partial z})\right]dV\right\}dt$$

温度由$u(x,y,z,t_1)$变到$u(x,y,z,t_2)$吸收热量

$$Q_2=\iiint_{\Omega} c\rho\,[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]dV$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{\Omega} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

其中 c,ρ 分别是物体的比热和密度。

能量守恒定理: $Q_1=Q_2$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial u}{\partial z})\right]dV\right\}dt$$

$$=\iiint_{\Omega}\int_{t_1}^{t_2}c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dtdV$$

化简

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad \left(\frac{k}{c\rho}=a^2\right)$$

$\boxed{\text{三维齐次热传导方程}}$

如果所考察的物体内部有热源 $F(x,y,z,t)$，则热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f$$

其中 $f(x,y,z,t)=F(x,y,z,t)/c\rho.$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

三维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

一维热传导方程

当我们考察气体的扩散, 液体的渗透, 半导体材料中的杂质扩散等物理过程时, 若用 u 表示所扩散物质的浓度, 则浓度所满足的方程形式和热传导方程完全相同. 所以热传导方程也叫扩散方程.

稳态方程

- 热传导方程中, 令t->∞, 温度场趋于稳定, 称为稳态场, 温度分布满足稳态方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

- 数学称为**Laplace方程**.

稳态方程

- 已知静电场内的电荷密度ρ(x,y,z), 求电场电势ϕ(x,y,z).
- 电场强度: $\mathbf{E} = -\nabla \phi$
- 电荷守恒:

$$\iint_{S} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{V} \nabla \cdot \left(\varepsilon \mathbf{E} \right) dV = \iiint_{V} \rho(x, y, z) dV.$$

- **Poisson方程:** $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla \phi = \dfrac{\rho}{\varepsilon}.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

总 结：

- 波动方程 — 声波、电磁波、杆的振动；
- 热传导方程 — 物质扩散时的浓度变化规律，

  海洋中的潮汐波的运动，

  土壤力学中的渗透方程；
- Laplace, Poisson方程 — 稳定的浓度分布，静电场的电位，流体的势.

- 作业：P18

  认真复习所讲内容。

  练习一 1