第七章
限失真信源编码

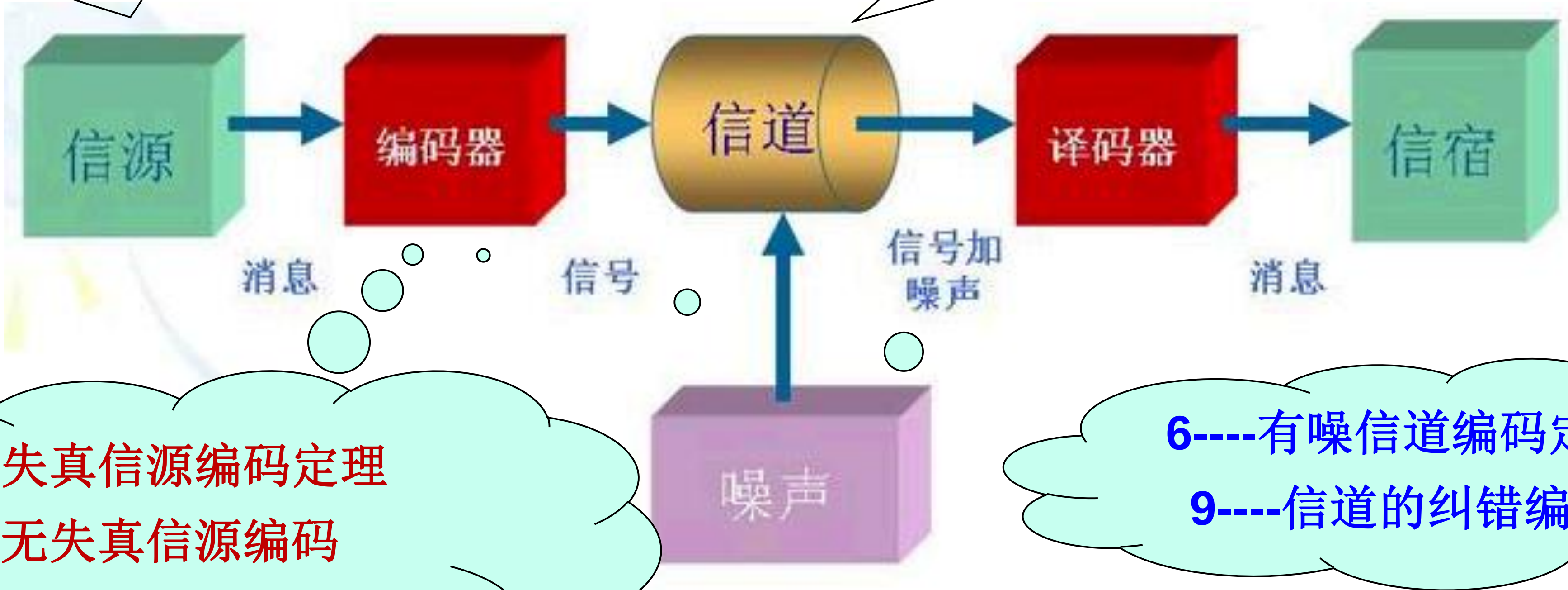
石东新
中国传媒大学信息工程学院

信息论的旅程

- 本章将着重讨论允许一定失真的条件下可把信源信息压缩到什么程度。

如何度量信息？信源的输出含有多少信息？
2----离散信源及其信息测度

传输信息的最高速率（信道容量）
3---- 离散信道及其信道容量



5----无失真信源编码定理
8----无失真信源编码
7----保真度准则下的信源编码

6----有噪信道编码定理
9----信道的纠错编码

4----波形信源和波形信道

7.1、概述

- 香农第一定理的回顾
  - 无失真信源编码的压缩码率极限是信源熵
- 实际中存在的问题
  - 人们并不要求完全无失真地恢复消息（人眼的视觉特性和听觉特性），主要的目的还是尽可能提高存储和传输的效率
  - 保证一定质量的前提下，在信宿近似地再现信源输出的消息

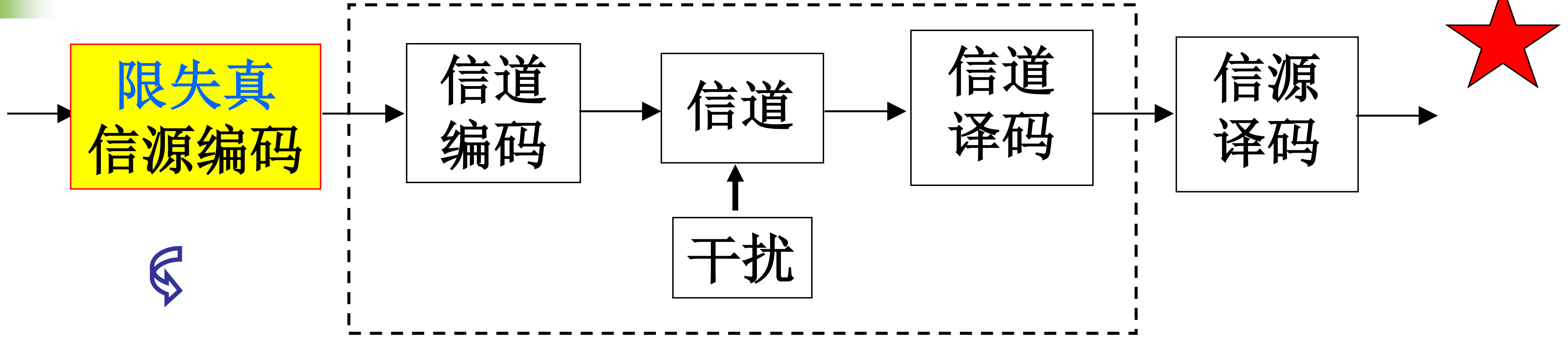
7.1 概述（续）

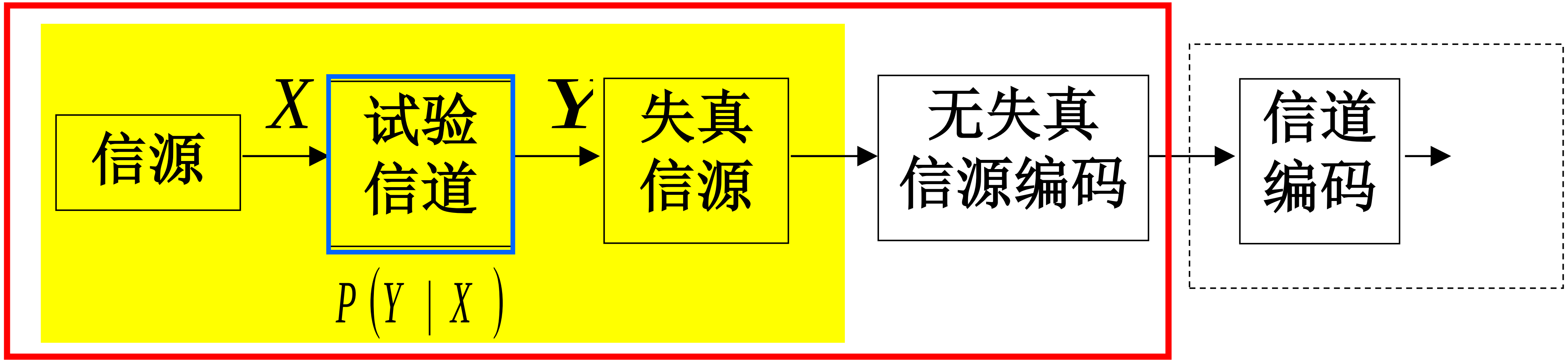
- 实际问题？
  - 在保证一定质量的前提下，在信宿近似地再现信源输出的消息。
- 对于给定信源-$H(X)$，在允许的失真条件下
  - 能把信源信息压缩到什么程度？
  - 如何计算这个值？如何度量失真？
- 限失真信源编码
  - 从信源抽取重要信息并压缩冗余信息 – 数据压缩
  - 有失真编码：压缩信息不能完全恢复原来信源

主要内容

- **7.1 概述**
- **7.2 信息率失真函数**
- **7.3 限失真信源编码定理和逆定理**
- **7.4 率失真函数的计算**

7.1 系统模型 – 只讨论信源编码问题





- 选择不同的试验信道，相当于不同的编码方法，其所得的**平均失真度*D***不同。有些试验信道（编码方法）满足 $D \le D^*$,有些则 $D > D^*$

7.2、失真测度 – 失真函数

- 失真函数 $d(x,y)$
  - 非负函数；函数形式可根据需要定义
  - 定量描述发出符号与接收符号之间的差异（失真）

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 y_2 \cdots y_m \end{bmatrix}$$

失真矩阵 $$[d] = \begin{bmatrix} d(x_1,y_1) & d(x_1,y_2) & \cdots & d(x_1,y_m) \\ d(x_2,y_1) & d(x_2,y_2) & \cdots & d(x_2,y_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d(x_n,y_1) & d(x_n,y_2) & \cdots & d(x_n,y_m) \end{bmatrix}$$

7.2 失真测度 – 例题7.1

- 设信源符号序列为X=[0，1]，接收端收到的符号序列为Y=[0，？，1]，规定失真函数如下，求失真矩阵[d]。

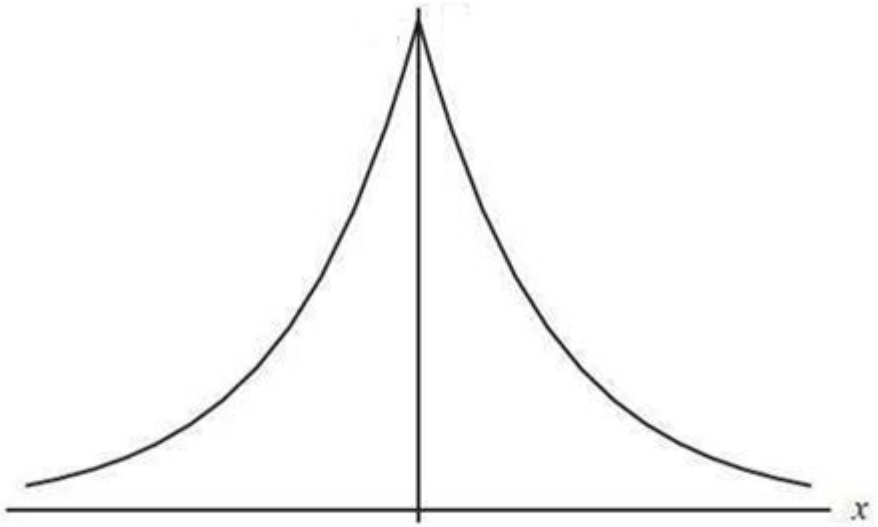
$$d(0,0)=d(1,1)=0$$

$$d(0,?)=d(1,?)=1/2$$

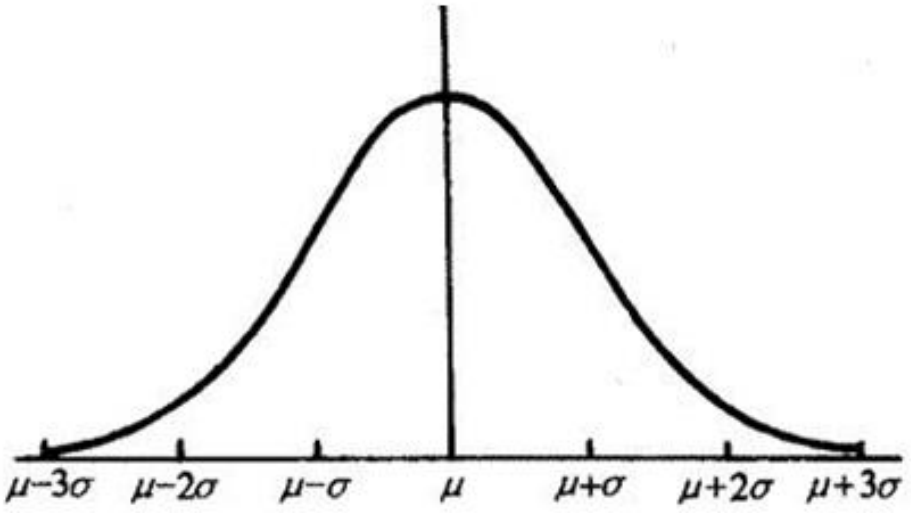
$$d(0,1)=d(1,0)=1$$

$$\mathrm{D}=\begin{bmatrix} d(x_1,y_1) & d(x_1,y_2) & d(x_1,y_3) \\ d(x_2,y_1) & d(x_2,y_2) & d(x_2,y_3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}$$



$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



7.2、失真测度 – 平均失真

- **平均失真度**：失真函数的数学期望。

$$D = E[\mathrm{d}] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i y_j) d(x_i, y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i) p(y_j | x_i) d(x_i, y_j)$$

- 平均失真度是对给定信源***P(X)***在转移概率分布为***P(Y|X)***的信道中传输时的失真的总体度量。

7.2 失真测度 – 矢量传输中的失真函数

- 输入N长符号序列：$\alpha = X_1X_2\cdots X_i\cdots X_N$　　$X_i=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$
- 输出N长符号序列：$\beta = Y_1Y_2\cdots Y_j\cdots Y_N$　　$Y_j=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$

则失真函数定义为

$$d(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{N} d(X_i,Y_i)$$

即矢量的失真度等于序列中对应单个信源符号失真度之和。失真度矢量失真函数矩阵共有$n^N \cdot m^N$个元素。

7.2 失真测度 – 矢量的平均失真度

- ***N*长信源序列的平均失真度：**

$$D(N)=E\left[d\left(\alpha_i,\beta_j\right)\right]=\sum_{i=1}^{n^N}\sum_{j=1}^{m^N}p\left(\alpha_i\beta_j\right)d\left(\alpha_i,\beta_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n^N}\sum_{j=1}^{m^N}p\left(\alpha_i\right)p\left(\beta_j\,|\,\alpha_i\right)d\left(\alpha_i,\beta_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n^N}\sum_{j=1}^{m^N}p\left(\alpha_i\right)p\left(\beta_j\,|\,\alpha_i\right)\boxed{\sum_{l=1}^{N}d\left(\alpha_{i_l},\beta_{j_l}\right)}$$

$$\boxed{D_N=\frac{1}{N}D(N)\qquad\text{信源的平均失真度（每个符号的失真度）}}$$

7.2 失真测度 – 矢量的平均失真度

- **N长信源序列的平均失真度：**

当信源和信道均为无记忆时，N维序列的平均失真度

$$D(N)=\sum_{i=1}^{N}D_i$$ （D_i是信源序列第i个分量的平均失真度）

如果离散信源是平稳信源，则$D_1=D_2=\cdots D_N=D$

$$D(N)=ND$$

离散无记忆平稳信源通过无记忆的试验信道其信源序列的平均失真度等于单个符号平均失真度的N倍

7.2、失真测度 – 例题7.2

- 设信源符号集为$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{2r}\}$，概率分布为

$$p(a_i)=1/2r \quad (i=1,2,\cdots,2r)$$

失真函数定义为（汉明失真） $d(x_i,y_j)=\begin{cases}0 & (x_i=y_j)\\ 1 & (x_i\neq y_j)\end{cases}$

假定允许的平均失真限度为 $D^*=\dfrac{1}{2}$

分析在给定的失真限度条件下信源压缩的程度。

- 首先考虑无失真编码时每个符号需要多少码元？

7.2 失真测度 – 例题7.2（续）

1. 输入等概，则信源熵 $H(X)=\log 2r$，即无失真编码中，每个信源符号需要 $\log 2r(bit)$。
2. 给出一种编码方案，将2r个输入信源编码对应到r个输出符号中。编码方法对应如右所示的试验信道。
3. 平均失真为：

$$P=\left[p\left(y_j \mid x_i\right)\right]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

7.2 失真测度 – 例题7.2（续）

$$P=\left[p\left(y_j\mid x_i\right)\right]=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1\\0&0&\cdots&1\\0&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&0\\1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}$$

$$D=E\left[d\right]=\sum_{i=1}^{2r}\sum_{j=1}^{r}p\left(x_i\right)p\left(y_j\mid x_i\right)d\left(x_i,y_j\right)$$

$$=\frac{1}{2r}\sum_{i=1}^{2r}p\left(y_r\mid x_i\right)d\left(x_i,y_r\right)=\sum_{i=r+1}^{2r}p\left(x_i\right)=\frac{1}{2}$$

7.2 失真测度 – 例题7.2（续）

- 该信道为无噪信道，则H(Y|X)=0。

$$P_Y = P_X P_{Y|X} \qquad \begin{bmatrix} Y \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{r-1} & y_r \\ 1/2r & 1/2r & \cdots & 1/2r & r+1/2r \end{bmatrix}$$

信道的输出熵：

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{Y})$$

$$= \boldsymbol{H}\left(\frac{1}{2\boldsymbol{r}}, \frac{1}{2\boldsymbol{r}}, \cdots, \frac{1}{2\boldsymbol{r}}, \frac{\boldsymbol{r}+1}{2\boldsymbol{r}}\right)$$

$$= \log 2\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{r}+1}{2\boldsymbol{r}}\log(\boldsymbol{r}+1)$$

$$P = \left[p\left(y_j \mid x_i\right)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

信源信息压缩：

$$H(X) - R = \frac{r+1}{2r}\log(r+1)$$

有无压缩下界？

7.3 信息率失真函数 – 保真度准则

- **保真度准则**：若预先规定的平均失真度为D^*，则称信源压缩后的平均失真度 $\bar{D}$ 不大于D^*的准则为保真度准则，即 $\bar{D} \le D^*$
-
- ***D*允许的试验信道**：将满足保真度准则的所有信道称为失真度***D****允许信道（也称***D****允许的试验信道），记为
- $$B_D = \left\{ p\left(y \mid x\right) : \bar{D} \le D^* \right\}$$
- 对于确定信源和失真函数，不同编码对应不同的试验信道。

7.3 信息率失真函数 – 率失真函数

- 率失真函数*R*(*D*)：在信源确定的情况下，信宿以满足失真*D*要求再现信源消息所必须获取的最少平均信息量。
  - 在*D*允许信道中寻找一个信道（一种有失真编码方法），使给定信源经过此信道传输时，其平均互信息达到最小，即定义为信息率失真函数*R*(*D*)。
  - 满足保真度准则的前提下，*R*(*D*)是信息率允许压缩到的最小值；是信源特有的参数。

$$R(D)=\min_{D\le D^*} I(X;Y)=\min_{p(y_j|x_i)\in B_D}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i)\,p(y_j\,|\,x_i)*\log\frac{p(y_j\,|\,x_i)}{p(y_j)}$$

7.3信息率失真函数 – 率失真函数的性质

- ***R*(*D*)的定义域和值域**
  - 平均失真度*D*的取值范围：[D_{min}，D_{max}]；
  - 率失真函数的取值：[*H*(*X*)， *0*]

$$D_{\min} = \min[\sum_{X}\sum_{Y} P(x_i)P(y_j \mid x_i)d(x_i, y_j)]$$

$$= \sum_{i=1}^{r} P(x_i)\min[\sum_{j=1}^{s} P(y_j \mid x_i)d(x_i, y_j)]$$

最大　　最小

$$D_{\min} = \sum_{i=1}^{r} P(x_i) \min[\sum_{j=1}^{s} \overset{\text{最大=1}}{P(y_j \mid x_i)} \overset{\text{最小=0}}{d(x_i, y_j)}]$$

- 需要注意的是：

$D_{\min}$=0只有满足失真函数矩阵的每一行至少存在一个为0的元素才有可能达到。

当$D_{\min}$=0时，仅表示不允许有任何失真，并不意味着信息一定没有任何信息损失。
例如，当失真矩阵某列有2个0时，只能对应给出无噪有损信道。

信道容量和信息率失真函数的比较

1\. 信道容量： $$C = \max_{p(x_i)} I(X;Y)$$

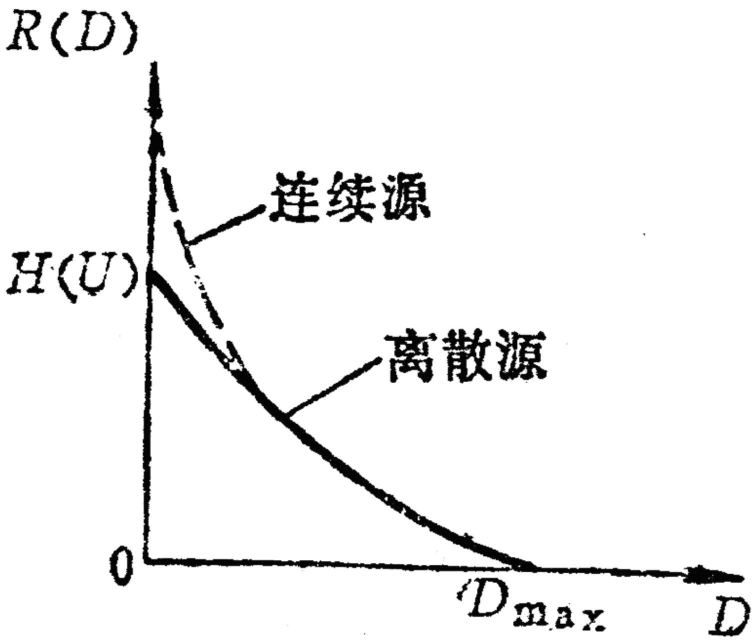
是在信道固定前提下，选择一种信源概率分布使信息传输率最大（求极大值）。它反映了信道传输信息的能力，是信道可靠传输的最大信息传输率。信道容量与信源无关，是反映信道特性的参量，不同的信道其信道容量不同。

2\. 率失真函数： $$R(D) = \min_{p(y_j|x_i):D \le D^*} I(X;Y)$$

是在信源固定，满足保真度准则的条件下的信息传输率的最小值。反映了满足一定失真度的条件下信源可以压缩的程度，也就是满足失真要求而再现信源消息所必须获得的最少平均信息量。

3 率失真函数的性质

- $R(D)$的定义域和值域
  - 平均失真度D的取值范围：[0，D_{max}]；
  - 率失真函数的取值：[$H(X)$，0]
- $R(D)$是关于D 的下凸函数。
- **$R(D)$在定义区间是严格递减函数。**



主要内容

- 基本概念
- 失真测度
- 信息率失真函数
- 限失真信源编码定理和逆定理

7.4 限失真信源编码定理 – 香农第三定理

- 设离散无记忆平稳信源的信息率失真函数为 $R(D)$ ，只要满足 $R>R(D)$ ，当信源序列长度N足够大时，一定存在一种编码方法，其译码失真≤ $D+\varepsilon$ ，其中 ε是任意小的正数。
- 反过来，若$R<R(D)$ ，则无论采用什么样的编码方法，其译码失真必大于 D 。

定理说明：在允许失真D的条件下，信源最小的、可达的信息传输率是信源的率失真函数。

7.4 限失真信源编码说明

- 该定理是对离散无记忆信源给出的，对于连续无记忆平稳信源有类似结论。
- 存在性定理 。
  - 正定理：$R \geqslant R(D)$时，译码失真小于或等于$D+\varepsilon$的码肯定存在，但定理本身并未告知码的具体构造方法。
  - 反定理：$R < R(D)$时，译码失真必大于D，肯定找不到满足条件的码，因此用不着浪费时间和精力。
- 香农信息论的三个基本概念——信源熵、信道容量和信息率失真函数，都是临界值，是从理论上衡量通信能否满足要求的重要界限。

本章总结

- 概论
  - 失真产生的原因和存在的合理性。
  - 率失真通过信道形式来研究信源的压缩问题。
- 失真函数、平均失真；失真测度分析。
- 信息率失真函数
  - 保真度准则；
  - **率失真函数*R(D)*概念、性质、及曲线；**
- 香农第三定理

作业

1. 简述$R(D)$的性质，画出一般$R(D)$的曲线并说明其物理意义。

信息传输理论和率失真理论的对偶关系

信息传输理论	率失真理论
信道$P=[P(y\|x)]$（固定）	失真测度$d(u,v)$ 信源$P=[P(u)]$ （固定）
信源$P=[P(x)]$	信道$P=[P(v\|u)]$
码C：$M \longrightarrow X^n$	信源码C：$U^N \longrightarrow C$
错误概率P_E	平均失真度D_N
信道容量 $$C=\max_{p(x)} I(P(x))$$	率失真函数 $$R(D)=\min_{p(v\|u)\in B_D} I(P(v\|u))$$
$R<C$ 信道编码定理	$R>R(D)$ 信源编码定理