§2 初始条件与边界条件

- 方程描述运动/变化规律(物理定律);
- 物理现象发生在特定条件下,方程需要特定条件才能确定解;
- **定解条件**:**初始条件**和**边界条件**,描述具体物理现象发生的初始状态或者边界上的约束情况。

一． 初始条件及Cauchy问题

描述某系统或某过程初始状况的条件称为**初始条件**；

初始条件与对应方程加在一起构成**初始问题（Cauchy问题）**。

● 弦振动方程

初始位移、初始速度分别为 $\varphi(x),\psi(x)$，称

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x)$$

为波动方程的初始条件.

$\varphi(x)\equiv 0$且$\psi(x)\equiv 0$ 齐次初始条件.

● 热传导方程

初始温度为 $\phi(x)$，称

$$u\big|_{t=0}=\phi(x)$$

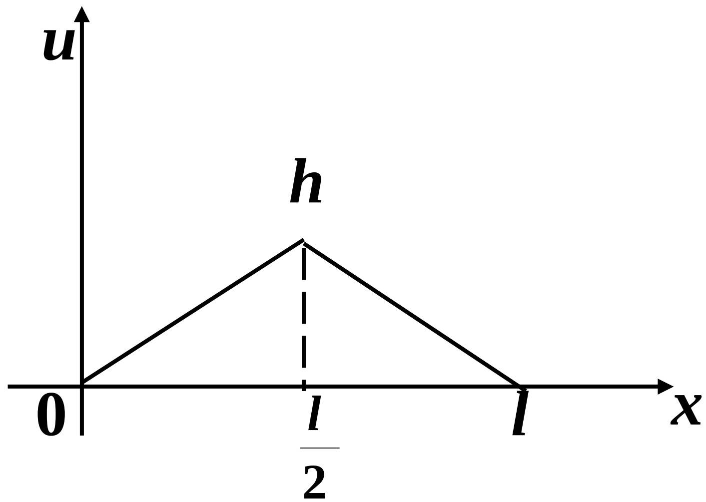
为热传导方程的初始条件.

- **不同类型的方程，相应初始条件的个数不同。波动方程有两个初始条件，热传导方程只有一个初始条件，稳态方程没有初始条件。**

- **初始条件给出的应是整个系统所有质点的初始状态，而非系统中个别点的初始状态。**

Q:初值条件的个数由谁决定?

例.长为 l 两端固定的弦，初始时刻将弦的中点拉起 h，试写出初始条件。



$$u\big|_{t=0} = h \qquad (\times)$$

$$u\big|_{x=l/2} = h \qquad (\times)$$

正确结果:

$$u\big|_{t=0} = \begin{cases} \dfrac{2h}{l}x, & 0 \le x < \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{2h}{l}(l-x), & \dfrac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$$

$$u_t\big|_{t=0} = 0$$

二.边界条件

描述某系统或过程边界状况的约束条件称为**边界条件**.
对于弦振动而言，有三类边界条件

- 第一类边界条件
(边界函数值已知)

$$\boxed{u\big|_S = f_1}$$

- 第二类边界条件
(边界法向导数已知)

$$\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f_2}$$

- 第三类边界条件(混合)

$$\boxed{\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\right|_S = f_3}$$

➢第一类边界条件（Dirichlet边界条件）

例.长为l的弦，右端点的规律运动随时间变化的已知函数

$$u\big|_{x=l}=f(t)$$

如果

$$u\big|_{x=l}=0,$$

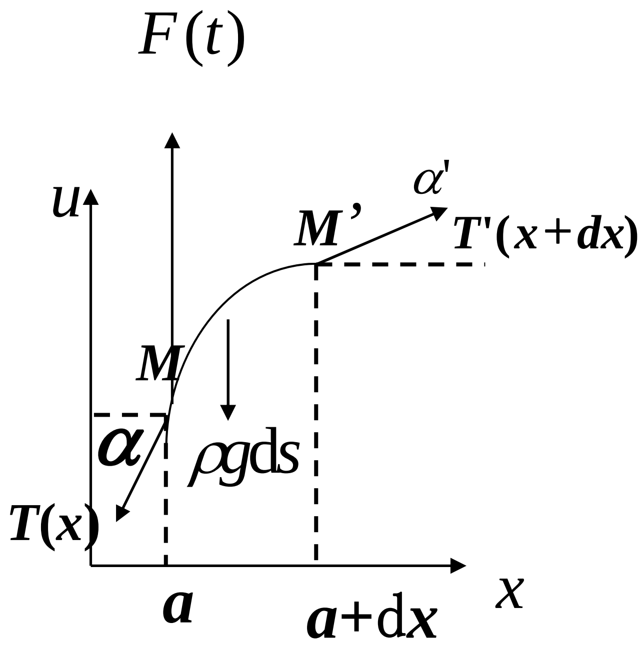
则为第一类齐次边界条件，亦称**固定端条件**。

➢第二类边界条件（Neumann边界条件）

如果端点负荷已知，即a处受外力$F(t)$，在左端点取微元$[a,a+dx]$,由牛顿第二定律可得

T（a）=0, 端点a没有张力！

$$\rho dx \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=a} = F(t) + T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a+dx} - \rho dxg$$



$$= F(t) + T\frac{\partial u(a,t)}{\partial x} + T\frac{\partial u(a+dx,t)}{\partial x}$$

$$-T\frac{\partial u(a,t)}{\partial x} - \rho dxg$$

$$= F(t) + T\frac{\partial u(a,t)}{\partial x} + T\frac{\partial^2 u(a,t)}{\partial x^2}dx - \rho dxg$$

- 当 $dx \to 0$时,

- 从而 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = -\dfrac{F(t)}{T}$,如果$F(t)=0$，则为第二类齐次边界条件，亦称自由端边界条件。

➢第三类边界条件(混合边界条件/Robin边界条件)

如果端点弹性支承，即端点除外力*F(t)*外，还有一弹性力-*ku(a,t)*,由牛顿第二定律得

$$\rho dx \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=a} = F(t)dx - ku(a,t) + T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a+dx} - \rho dxg$$

- 当 $dx \to 0$ 化简后得 $ku(a,t) - T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = F(t)$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u\right)\right|_{x=a} = -\frac{F(t)}{T} \qquad \sigma = -\frac{k}{T}$$

- 如果*F(t)*=0,则称为第三类齐次边界条件。

- 这三类边界条件也会在热传导问题中出现，以三维热传导问题为例，当物体边界Γ的温度已知时，导出的也是第一类边界条件

$$u(x,y,z,t)\big|_{\Gamma} = f(x,y,z,t)$$

特别当边界温度保持零度时，便得第一类齐次边界条件。

- 当物体边界Γ的热流密度已知时，则为第二类边界条件

$$k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=f(x,y,z,t),$$

特别当边界热流密度等于零, 即不发生热交换绝热时，便得第二类齐次边界条件。

$$k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=0,$$

也称为绝热条件.

- 如果物体通过边界与外界自由热交换，在边界面上(x,y,z)处取小面元ds,在时间段$[t,t+dt]$内从物体内部流出面元ds的热量为

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{(x,y,z,t)} dsdt$$

根据牛顿冷却定律，从外部流入面元的热量为

$$h(\theta-u)\big|_{(x,y,z,t)} dsdt$$

其中h为两种物质间的热交换系数，θ为外界的温度，能量守恒定律决定了热量不能在面元上积聚，从而有

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}+h(\theta-u)\big|_{\Gamma}=0$$

- 即为第三类边界条件

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}+h(\theta-u)\big|_{\Gamma}=0 \qquad (hu+k\frac{\partial u}{\partial n})\bigg|_{\Gamma}=h\theta\big|_{\Gamma}$$

当外界温度为零时，为第二类齐次边界条件:

$$(hu+k\frac{\partial u}{\partial n})\bigg|_{\Gamma}=0.$$

§3 定解问题的提法

- 二阶线性偏微分方程: 二阶偏导+线性
- 满足方程的函数称为该方程的解（古典解）
- 定解条件: 初值条件, 边界条件
- 定解问题: 方程 + 定解条件
- 只有初始条件，没有边界条件的定解问题称为初值问题。
- 只有边值条件，没有初始条件的定解问题称为边值问题。
- 既有初始条件，又有边界条件的定解问题称为混合问题。

- 一个定解问题往往从以下三个方面来考虑其是否合理:
- （1）解的存在性，即定解问题是否有解？
- （2）解的唯一性，即解是否只有唯一一个？
- （3）解的稳定性，即看定解条件有微小变化时，解是否相应地只有微小的变化？
- 同时满足以上三个条件，则此问题称为**适定的(Well-posed) [Hadamard, 1902]**。

- 不适定问题的例子 1917年Hadamard给出了下述著名的例子

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, 0<x<\pi, y>0, \\ u\big|_{x=0}=u\big|_{x=\pi}=0, \\ u\big|_{y=0}=0, \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=\dfrac{1}{n}\sin nx. \end{cases}$$

- 该问题有唯一解 $u(x,y)=\dfrac{1}{n^2}\sin nx\, sh\, ny$，但该解不满足稳定性。

➢包含初值条件的定解问题称为**初值问题（Cauchy 问题）**

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) & \end{cases}$$

弦振动的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

热传导的Cauchy问题

➢包含初值条件和边界条件的混合问题（初边值问题）

$$
\begin{cases}
u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0 & (x,y,z) \in \Omega, t > 0 \\
u\big|_{t=0} = \varphi(x,y,z) & (x,y,z) \in \Omega \\
\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\partial\Omega} = f(x,y,z,t) &
\end{cases}
$$

热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{t=0} = \phi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) & (0 \le x \le l) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0 & \end{cases}$$

波动方程的混合问题

- 只附加边界条件的定解问题称为**边值问题**.
- 初值条件、边界条件统称为**定解条件**.
- 初值问题、边值问题、混合问题统称为**定解问题**.

- 一般线性二阶偏微分方程（n个自变量）

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + f = 0$$

两个自变量二阶线性偏微分方程的一般形式

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f$$

➢ 线性方程的叠加原理

定义线性微分算子:

$$L = a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y} + c$$

$$L[u] = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + c$$

二阶偏微分方程

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f$$

可简写为

$$L[u]=f$$

线性叠加原理叠： 若u_i满足线性方程

$$L[u_i] = f_i,\quad i = 1,2,\cdots,n$$

则$u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$满足方程 $L[u] = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$

条件是：u 收敛，并且可以逐项微分两次。

如果方程是齐次方程，即 $f_i = 0$ ，则 $u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$
仍是齐次方程的解。

- 作业：P18
- 认真阅读所讲内容
- 习题一　5、6题