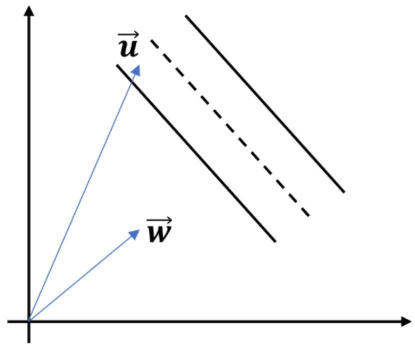
支持向量机的原理：



① 并不知道$\vec{u}$的长度，想要判断$\vec{u}$在街的哪一侧，如何判断？

如果$\vec{u}\cdot\vec{w}\geq c$（因为不知道街边到原点的距离）

那么可以说，$\vec{u}$落在街的右侧。

把$\vec{u}\cdot\vec{w}\geq c$改下形式：

$\vec{w}\cdot\vec{u}+b\geq 0$（b 是某个常数）

② 如果向量$\vec{u}$满足：$\vec{w}\cdot\vec{u}+b\geq 0$，我们称它为正例。

问题是，我们不知道$\vec{w}$是什么，不知道b应该怎么取值。(因为垂直于街道的$\vec{w}$有很多，它可以任意长)

为了求解$\vec{w}$和b，需要更多的约束条件。

增加约束：

对于正例$\vec{x_+}$，$\vec{w}\cdot\vec{x_+}+b\geq 1$

对于负例$\vec{x_-}$，$\vec{w}\cdot\vec{x_-}+b\leq -1$

为了数学上的便利性，增加变量y_i。对于正例，$y_i=1$；对于负例，$y_i=-1$。

y_i的取值，和正例还是负例有关。

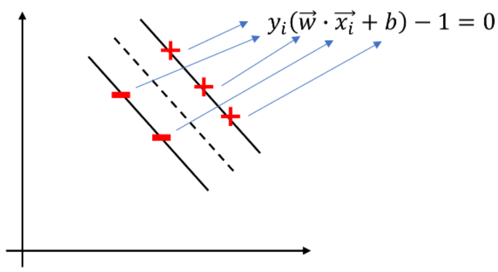
所以，可以把约束条件写为：

对于正例$\vec{x_+}$： $y_i(\vec{w}\cdot\vec{x_+}+b)\geq 1$

对于负例$\vec{x_-}$： $y_i(\vec{w}\cdot\vec{x_-}+b)\geq 1$

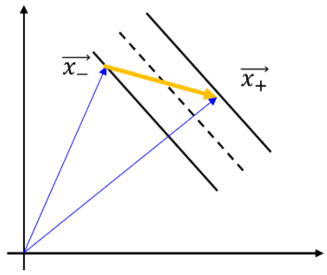
也就是说，对于所有例$\vec{x}$，都有$y_i(\vec{w}\cdot\vec{x_+}+b)-1\geq 0$。

继续增加约束：当例$\vec{x}$落在街边时，$y_i(\vec{w}\cdot\vec{x_+}+b)-1=0$。



问题的目的，是用街道把正负例分离，并且街道尽可能宽。
街道的宽度可以由落在街边上的例表示：

$$\text{Width}=(\overrightarrow{x_+}-\overrightarrow{x_-})\cdot\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$$



对于正例，有：$\vec{w}\cdot\overrightarrow{x_+}+b=1$
对于负例，有：$\vec{w}\cdot\overrightarrow{x_-}+b=-1$

③ 所以，width=$\frac{1-b+b+1}{\|\vec{w}\|}=\frac{2}{\|\vec{w}\|}$

所以，问题的目的成了将$\frac{2}{\|\vec{w}\|}$最大化，即将$\|\vec{w}\|$最小化，即将$\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2$最小化。（为了数学上的便利，选择二范数的平方形式）怎么解呢？

思考还有什么约束条件？
之前约束了，在街边上，$y_i(\vec{w}\cdot\overrightarrow{x_+}+b)=1$。所以，可以用拉格朗日乘子法将最值问题约束为：

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2-\sum\alpha_i[y_i(\vec{w}\cdot\vec{x_i}+b)-1]$$

其中，α_i不能全为 0。
则：

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{w}}=\vec{w}-\sum\alpha_i y_i\vec{x_i}=0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b}=\sum\alpha_i y_i=0$$

④ 即：

$$\vec{w}=\sum\alpha_i y_i\vec{x_i}$$

$$\sum\alpha_i y_i=0$$

（数学语言翻译 1：$\vec{w}$是由样本集中位于街边上的$\vec{x_i}$和拉格朗日乘子集α_i决定的，即$\vec{w}$是样本集的线性组合。
数学语言翻译 2：α_i不能全为 0，同时，α_i要满足$\sum\alpha_i y_i=0$）

将

⑤ $\vec{w}=\sum\alpha_i y_i\vec{x_i}$代入 $\mathcal{L}$中：

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\alpha_j y_i y_j\vec{x_i}\cdot\vec{x_j}-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[y_i\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j y_j\vec{x_j}\cdot\vec{x_i}+b\right)-1\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\alpha_j y_i y_j\vec{x_i}\cdot\vec{x_j}-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j y_j\vec{x_j}\cdot\vec{x_i}\right)-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i b+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\alpha_j y_i y_j\vec{x_i}\cdot\vec{x_j}-0+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\alpha_j y_i y_j\vec{x_i}\cdot\vec{x_j}+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$$

观察发现，$\mathcal{L}$的取值，和样本集之间的联系，仅仅是和样本集中的两个样本的内积有关。

⑥ 回到正负例的判断上：

$$\vec{w}\cdot\vec{x_+}+b\geq 1$$

如果$\sum\alpha_i y_i\vec{x_i}\cdot\vec{u}+b\geq 1$，则$\vec{u}$是正例。

⑦ 如果样本集是线性不可分的, 则将其映射到另一个空间中, 即通过坐标变换的方式使$\vec{x_i}$、$\vec{x_j}$→$\Phi(\vec{x_i})$、$\Phi(\vec{x_j})$。映射后的$\Phi(\vec{x_i})$是线性可分的。

所以正负例的判断变为：

$$\sum\alpha_i y_i\Phi(\vec{x_i})\cdot\Phi(\vec{u})+b\geq 1$$

则$\vec{u}$是正例。

因为影响最终判断结果的是$\Phi(\vec{x_i})\cdot\Phi(\vec{u})$，所以未必要去找Φ映射，只要能找到K($\vec{x_i}$,$\vec{u}$)= $\Phi(\vec{x_i})\cdot\Phi(\vec{u})$就好了。K就称为 kernel function。

SVM 的计算过程总结：

① 先有了数据集，然后设了一个 b。
② 求街道最宽的宽度，发现$\vec{w}=\sum\alpha_i y_i\vec{x_i}$，$\sum\alpha_i y_i=0$。（$\alpha_i$不全为 0，$\alpha_i$的值还没确定，但是知道，存在这样的$\alpha_i$使街道最宽，同时$\alpha_i$满足：$\sum\alpha_i y_i=0$。）
③ 正负例的判断标准变为：
若$\vec{u}$使：$\sum\alpha_i y_i\Phi(\vec{x_i})\cdot\Phi(\vec{u})+b\geq 1$，则$\vec{u}$为正例。
若$\vec{u}$使：$\sum\alpha_i y_i\Phi(\vec{x_i})\cdot\Phi(\vec{u})+b\leq -1$，则$\vec{u}$为负例。
并且，不用找Φ，找到$\mathrm{K}=\Phi\cdot\Phi$就行了。
需要找的是α_i。α_i需要满足的条件有：
（1） α_i不全为 0；
（2）α_i满足$\sum\alpha_i y_i=0$；
（3）α_i的取值要满足样本集的分类结果。这样便可以寻找到适合的α_i。

如果计算 b 呢？
对于街边上的正例、反例：

$$y_i(\vec{w}\cdot\vec{x_i}+b)-1=0$$

而$y_i{}^2=1$，所以上式可以写为：

$$y_i(\vec{w}\cdot\vec{x_i}+b-y_i)=0$$

所以：

$$\vec{w}\cdot\vec{x_i}+b-y_i=0$$

$$b=y_i-\vec{w}\cdot\vec{x_i}=y_i-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j y_j\vec{x_j}\cdot\vec{x_i}$$

（数学语言翻译：b 的值是由样本集和α_i所决定的。确定了α_i后，b 可以由样本集上，位于街边的任一例来生成得到。任一例对应着上式中的$\vec{x_i}$，样本集对应着上式中的$\vec{x_j}$。）

综上，SVM 只依赖于训练样本和样本内积，不依赖于高维映射函数，因为有核函数的存在。其他的全靠训练α_i来得到。然后可以使用α_i预测新样本$\vec{u}$的类别。预测方法如下：

$$sign\left(\sum\alpha_i y_i\mathrm{K}\big(\Phi(\vec{x_i})\cdot\Phi(\vec{u})\big)+(y_i-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j y_j\vec{x_j}\cdot\overrightarrow{x_{i-random}})\right)\rightarrow\begin{cases}<0;\textbf{负例}\\>0;\textbf{正例}\end{cases}$$

（正例：$y_i(\vec{w}\cdot\vec{x_i}+b)\geq 1$；负例：$\vec{w}\cdot\vec{x_i}+b\leq -1$。所以由符号就能得出例的类别。）

所以，使用 SVM 完成分类问题，其实是根据样本集和α_i的约束条件，对α_i的寻找问题。