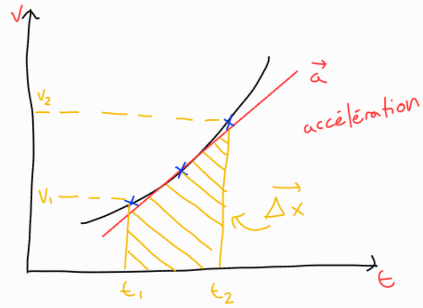
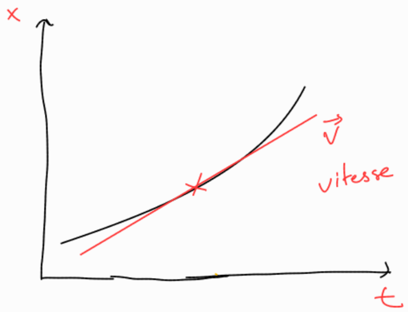
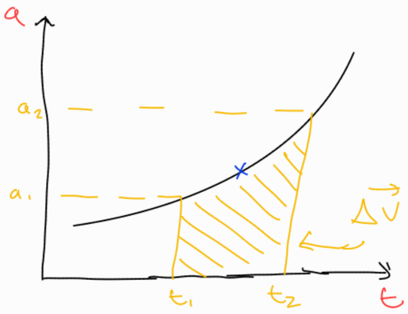
Cour #7 Cinématique de rotation







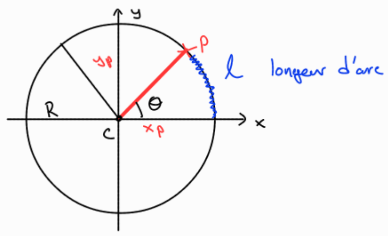
1. cinématique de rotation

Définition : étude du mouvement d'un corps en rotation autour d'un cercle de rayon r et de centre fixe

On va définir les paramètre angulaire
- * Position angulaire (θ)
- * vitesse angulaire (ω)
- * accélération angulaire (α)

2. Paramètre angulaire

2.1 position angulaire



unité : Degré
Radian → $\theta = \dfrac{\ell}{R}$

RMQ : Quand $\ell = R$

$\theta = 1$ Radian

$360° = 2\pi$ radian
$= 1$ tour $= 1$ révolution

$x_p = R\cos\theta$

$y_p = R\sin\theta$

θ = est appelé la position angulaire

Convention signe

$\theta > 0 \Rightarrow$ sens anti-horraire

$\theta < 0 \Rightarrow$ sens horraire

* Déplacement angulaire

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

2.2 vitesse angulaire

Définition : c'est le taux de variation de la position angulaire

unité : rad/s

2.2.1 vitesse angulaire moyenne

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i}$$

2.2.2 Vitesse angulaire instantanée

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

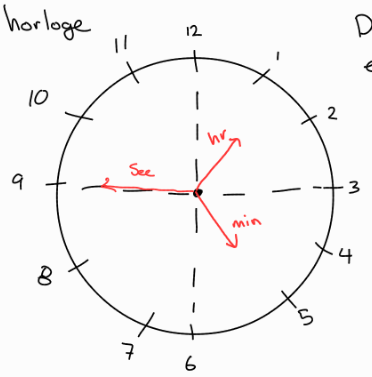
Convention signe

$\omega > 0 \Rightarrow$ Sens anti-horraire

$\omega < 0 \Rightarrow$ Sens horraire

2.3 application

horloge



Déterminez la position angulaire et la vitesse angulaire de chaque aiguille en tour et radian / minute

/ seconde

Position

aiguille des heures

$$\theta_H = -\frac{1}{12} \text{ tour} = -\frac{360°}{12}$$

$$= -30°$$

$$-\frac{1}{12} 2\pi \text{ rad} = -\frac{\pi}{6}$$

aiguille minutes

$$\theta_m = -\frac{5}{12} \text{ tour}$$

$$= -\frac{5 \cdot 360°}{12} = -150°$$

$$= -\frac{5 \cdot 2\pi}{12} = -2{,}62 \text{ RAD}$$

aiguille secondes

$$\theta_s = -\frac{9}{12} \text{ tour}$$

$$= -\frac{9 \cdot 360°}{12} = -270°$$

$$= -\frac{9 \cdot 2\pi}{12} = \frac{-3\pi}{2} \text{ RAD}$$

vitesse angulaire

vitesse pour l'heure

$$\omega_H = -\frac{1}{12} \text{ tour}/h = -\frac{1}{12} \cdot \frac{\text{tour}}{60 \text{ min}}$$

$$= -\frac{2\pi}{12 \times 3600} \Rightarrow \text{rad}/\text{sec} \Rightarrow -1{,}454 \cdot 10^{-4} \text{ rad}/\text{sec}$$

vitesse pour minutes

$$\omega_m = -\frac{1 \text{ tour}}{1 \text{ hour}} = -\frac{1}{60} \text{ tour}/\text{minutes}$$

$$= -\frac{2\pi}{3600} \text{ rad}/\text{sec} \Rightarrow -1{,}745 \cdot 10^{-5} \text{ rad}/s$$

vitesse pour secondes

$$\omega_s = -\frac{1 \text{ tour}}{\text{min}}$$

$$= -\frac{1 \times 2\pi}{60} \text{ rad}/s$$

$$\omega_s = -0{,}10472 \text{ rad}/s$$

2.4 accélération angulaire

Définition : c'est le taux de variation par rapport aux temps de la vitesse angulaire

Unité : rad/s^2

2.4.1 accélération angulaire moyenne

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i}$$

2.4.2 accélération moyenne instantanné

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Convention signe : $\alpha > 0$ et $\omega > 0$

alors il n'y a aucune augmentation de la vitesse

3. mouvement circulaire uniformément accéléré (MCUA)

$\Rightarrow \alpha = C^{te}$

3.1 équation d'un MCUA

$$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1(t_2 - t_1) + \frac{\alpha}{2}(t_2 - t_1)^2 \quad ①$$
$$\omega_2 = \omega_1 + \alpha(t_2 - t_1) \quad ②$$

et $\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha(\theta_2 - \theta_1)$

3.2 MCU

$\omega = C^{te}$

$$\theta_2 = \theta_1 + \omega(t_2 - t_1)$$

3.3 application

3.3.1 Ex # moodle

① $\alpha = C^{te} = ?$ ②

$\theta_1 = 0$ tr — $\theta_2 = 400$ tr $\times 2\pi = $ Rad

$\omega_1 = 250$ tr/sec $\times 2\pi$ rad/s — $\omega_2 = 0$

$t_1 = 0$ — $t_2 = ?$

2 inc

on cherche α en rad/s²

$$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1(t_2 - t_1) + \frac{\alpha}{2}(t_2 - t_1)^2 \quad ①$$
$$\omega_2 = \omega_1 + \alpha(t_2 - t_1) \quad ②$$

$$400 \cdot 2\pi = 0 + 250 \cdot 2\pi(t_2 - 0) + \frac{\alpha}{2}(t_2 - 0)^2 \quad ①$$
$$0 = 250 \cdot 2\pi + \alpha(t_2 - 0) \quad ②$$

2 éq et 2 inc

$\alpha = -490{,}874$ rad/s²

$t_2 = 3{,}2$ seconde

3.3.2 Ex # 2 moodle

① $\alpha = ?$ ②

$\theta_1 = 0$ — $\theta_2 = 450$ RAD

$\omega_1 = 0$ — $\omega_2 = ?$

$t_1 = 0$ — $t_2 = 10$s

$$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1(t_2 - t_1) + \frac{\alpha}{2}(t_2 - t_1)^2 \quad ①$$
$$\omega_2 = \omega_1 + \alpha(t_2 - t_1) \quad ②$$

$$450 = 0 + 0(10 - 0) + \frac{\alpha}{2}(10 - 0)^2$$
$$\omega_2 = 0 + \alpha(10 - 0)$$

$\omega_2 = 90$ rad/s

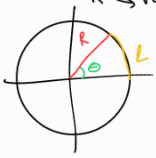
$\alpha = 9$ rad/s²

4. Mouvement circulaire - relations paramètre linéaire et angulaire

4.1 Position θ et L (ou Δs)

Revenons à la définition d'un radian

$\theta = \frac{L}{R}$ L → longueur d'arc, R → rayon



$$\boxed{L = \Delta s = \theta \cdot R}$$

m, RAD, m

RMQ : θ doit être en radian

4.2 vitesse V et ω

On sait que $V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ou $\Delta s = R\,\Delta\theta$

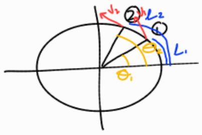
$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\theta}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$$\boxed{V = \omega \cdot R}$$

ou

$L_1 = \theta_1 R$

$L_2 = \theta_2 R$

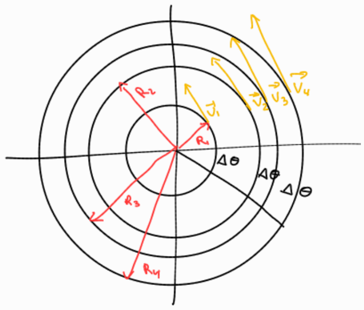


$$\underbrace{\frac{L_1 - L_2}{\Delta t}}_{V} = \underbrace{\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta t}\right)}_{\omega} R$$

RMQ : ω doit être en rad/s

$\vec{V}$ est tangente à la trajectoire

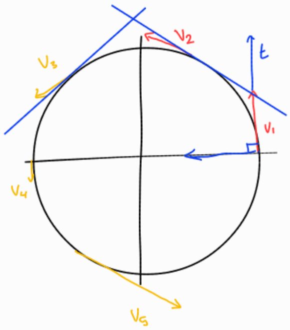
c'est à dire $\vec{V}$ est tangente au cercle



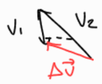
4.3 accélération

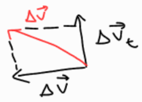
4.3.1 accélération dans un mouvement circulaire

$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$ = Variation du vecteur vitesse



$\Delta \vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$





Dans un mouvement circulaire

* La variation de grandeur du vecteur vitesse (selon la tangente au cercle) à l'accélération tangentielle
* La variation de direction du vecteur vitesse correspond à l'accélération centripete

4.3.2 accélération tangentielle

On sait que la vitesse est tangente à la trajectoire

$\Rightarrow a_t$ et $\vec{V}$ sont dans la même direction

$V = \omega R$

$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t}\right)$

$= \underbrace{R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}}_{\alpha}$

m/s², rad/s², m

$$\Rightarrow \boxed{a_t = \alpha \cdot R}$$

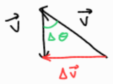
RMQ : α doit être rad/sec²

4.3.3 accélération centripète

Déterminons l'expression de

a_c

On suppose que $V_1 = V_2$



si $\Delta\theta \approx 0$

$\approx$ équivalent à un triangle rectangle

$$\tan\Delta\theta \approx \frac{\Delta V}{V} \approx \Delta\theta$$

$$\Delta V \approx V \cdot \Delta\theta$$

Si on divise par Δt

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \approx V \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$a_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_c}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(V \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)$$

$$a_c = V \cdot W$$

et $V = W \cdot R$

$$\Rightarrow W = \frac{V}{R}$$

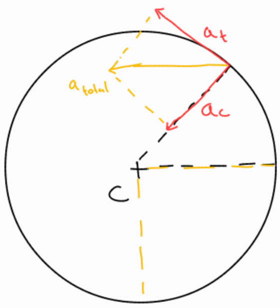
$$\Rightarrow \boxed{a_c = \frac{V^2}{R}}$$

$$a_{total} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = a_c$$

4.3.4 conclusion

Dans un mouvement circulaire l'accélération s'écrit

$$\vec{a}_{total} = \vec{a_t} + \vec{a_c}$$



$\vec{a_t}$ = correspond à la variation de grandeur et tangente au cercle

$$a_t = \frac{\Delta V}{\Delta t} = (\alpha R)$$

$\vec{a_c}$ = correspond à la variation de direction du Vecteur vitesse et est orienté vers le centre du cercle

$\Rightarrow a_{centripète}$ et $a_c = \frac{V^2}{R}$ → grandeur

4.3.5 application

a) Ex#3 moodle

hyp : α est supposé Constante

1) $a_t = \alpha R$

α est déterminer avec MCUA

①	$\alpha = ?$	②
$\theta_1 = 0$		$\theta_2 = 400$
$W_1 = 250$ tr/min		$W_2 = 0$
$t_1 = 0$		$t_2 = 0$

Voir #1 $\alpha = -490,874$ rad/s²

$$\Rightarrow a_t = \alpha R = -490,874 \cdot 0,5 \text{ m}$$

$$= -245,437 \text{ m/s}^2$$

MCUA $\alpha = -490,874$ rad/s²

$t_2 = 2s$

$$W_2 = W_1 + \alpha(t_2 - t_1)$$

$$W_2 = 250 \cdot 2\pi + (-490,874)(2-0)$$

$$W_2 = 589,05 \text{ rad/s}$$

$$V_2 = W_2 R = 294,524 \text{ m/s}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + W_1(t_2 - t_1) + \frac{\alpha}{2}(t_2 - t_1)^2$$

$$\theta_2 = 0 + 250 \cdot 2\pi(2-0) + \frac{-490,874}{2}(2-0)^2$$

$$\theta_2 = 2159,845 \text{ rad} = 343,75 \text{ tour}$$

$$L_2 = \theta_2 R_2 = 1079,92 \text{ m}$$