线性代数期中试卷 答案 (2021.4.24)

一. 简答与计算题(本题共6小题，每小题8分，共48分)

1. 计算 $A_{11}+M_{12}-M_{13}$，此处 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式，M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式，$D=\begin{vmatrix}2&1&1&1&1\\1&2&1&1&1\\1&1&2&1&1\\1&1&1&2&1\\1&1&1&1&2\end{vmatrix}$.

解：$A_{11}+M_{12}-M_{13}=1\times A_{11}-1\times A_{12}-1\times A_{13}+0\times A_{14}+0\times A_{15}$

$$=\begin{vmatrix}1&-1&-1&0&0\\1&2&1&1&1\\1&1&2&1&1\\1&1&1&2&1\\1&1&1&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\1&3&2&1&1\\1&2&3&1&1\\1&2&2&2&1\\1&2&2&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2&1&1\\2&3&1&1\\2&2&2&1\\2&2&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\-2&-2&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-2&-2&-1&7\end{vmatrix}=7.$$

解法二：$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}=5, M_{12}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}=1, M_{13}=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\1&1&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}=-1$,

故 $A_{11}+M_{12}-M_{13}=7$.

2. 计算 A^{2021}，此处 $A=\begin{pmatrix}-1&1&-2&-1\\1&-1&2&1\\0&0&0&0\\2&-2&4&2\end{pmatrix}$.

解：$A=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\2\end{pmatrix}(1,-1,2,1)=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，因为 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha=0$，故有

$A^{2021}=(\alpha\beta^{\mathrm{T}})^{2021}=\alpha(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\cdots(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\beta^{\mathrm{T}}=\alpha\times 0\times 0\cdots\times 0\times\beta^{\mathrm{T}}=O$.

解法二：$A^2=O$，故 $A^{2021}=A^2A^{2019}=O$.

3. A 与 B 是 3 阶方阵，$AB=\begin{pmatrix}6&2&7\\2&-1&1\\7&3&3\end{pmatrix}, C=BA$，求 $c_{11}+c_{22}+c_{33}$.

解：因为 $|AB|=57\neq 0$，故 $|B|\neq 0$，从而 B 可逆. 于是有 $AB=B^{-1}(BA)B=B^{-1}CB$，即 $C\sim AB$，故迹相同，于是 $c_{11}+c_{22}+c_{33}=\mathrm{tr}(AB)=8$.

解法二：由 $\begin{pmatrix}AB&A\\O&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&O\\-B&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&A\\O&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&O\\-B&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&A\\O&BA\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}E&O\\-B&E\end{vmatrix}=0$,

知 $\begin{pmatrix}AB&A\\O&O\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}O&A\\O&BA\end{pmatrix}$ 相似，故有特征多项式相等，即

$\begin{vmatrix}\lambda E-AB&-A\\O&\lambda E\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda E&-A\\O&\lambda E-BA\end{vmatrix}$，得到 $\lambda^3|\lambda E-AB|=\lambda^3|\lambda E-BA|$，

于是 $|\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|$，即 AB 与 BA 的特征值相同，迹也相同.

故 $c_{11}+c_{22}+c_{33}=\mathrm{tr}(C)=\mathrm{tr}(AB)=6+(-1)+3=8$.

4. 计算 $(A^*)^*$，此处 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

解：易知 $|A|=4, A^*=|A|A^{-1}, |A^*|=|A|^3|A^{-1}|=|A|^2=16$，

则 $(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=16(|A|A^{-1})^{-1}=16|A|^{-1}A=4A=\begin{pmatrix}8&4&4\\4&8&4\\4&4&8\end{pmatrix}$.

解法二：$|A^*|A=A(A^*A^{**})=(AA^*)A^{**}=|A|A^{**}$，$|A|=4, |A^*|=|A|^2=16$，故 $(A^*)^*=4A$.

5. 计算矩阵 X 使得 $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\end{pmatrix}$.

解：$X=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}5&2&3&3\\-6&0&-2&-2\\3&-2&1&1\end{pmatrix}$.

解法二：令 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\end{pmatrix}$，矩阵方程为 $AXB=C$.

先解 $AY=C$，$\left(\begin{array}{ccc|cccc}2&1&0&1&0&0&0\\1&2&1&-1&1&0&0\\0&1&2&0&-1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cccc}1&0&0&5/4&-3/4&1/4&0\\0&1&0&-3/2&3/2&-1/2&0\\0&0&1&3/4&-5/4&3/4&0\end{array}\right)$，

得 $Y=\begin{pmatrix}5/4&-3/4&1/4&0\\-3/2&3/2&-1/2&0\\3/4&-5/4&3/4&0\end{pmatrix}$. 再解 $XB=Y$，

$$\left(\begin{array}{cccc}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\\\hline 5/4&-3/4&1/4&0\\-3/2&3/2&-1/2&0\\3/4&-5/4&3/4&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline 5/4&1/2&3/4&3/4\\-3/2&0&-1/2&-1/2\\3/4&-1/2&1/4&1/4\end{array}\right).\ \text{得 } X=\begin{pmatrix}5/4&1/2&3/4&3/4\\-3/2&0&-1/2&-1/2\\3/4&-1/2&1/4&1/4\end{pmatrix}.$$

6. $A=(a_{ij})_{3\times3},\mathrm{r}(A)=1,\alpha_1$、$\alpha_2$与$\alpha_3$ 是 $Ax=b$ 的三个解向量，$\alpha_1+\alpha_2=(1,-1,3)^{\mathrm T}$，
$\alpha_2+\alpha_3=(0,-2,1)^{\mathrm T},\alpha_3+\alpha_1=(3,0,4)^{\mathrm T}$，求 $Ax=b$ 的通解.

解：因为 $\mathrm{r}(A)=1$ 且 $Ax=b$ 的有3个未知量，故 $Ax=0$ 的基础解系含两个解向量，易知
$$\beta_1=(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)=(1,1,2)^{\mathrm T},\beta_2=(\alpha_3+\alpha_1)-(\alpha_1+\alpha_2)=(2,1,1)^{\mathrm T}$$
是方程组 $Ax=0$ 的解且线性无关，故是基础解系. 再令 $\eta=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2})^{\mathrm T}$ 有 $A\eta=b$，
故 $Ax=b$ 的通解为：$\eta+k_1\beta_1+k_2\beta_2,\qquad k_1,k_2\in\mathbf{R}$.

解法二：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&-2&0\\3&1&4\end{pmatrix}$，解得 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\0.5\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-1.5\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-0.5\\1\end{pmatrix}$.

因为 $\mathrm{r}(A)=1$，故 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix},\beta_2=\alpha_3-\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系，

故 $Ax=b$ 的通解为：$\alpha_1+k_1\beta_1+k_2\beta_2,\quad k_1,k_2\in\mathbf{R}$.

二.(10分) 设有三个互异的实数 t_1,t_2,t_3，计算次数不超过2的(插值)多项式 $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$，使得 $f(t_1)=f(t_2)=0,f(t_3)=1$. 这样的多项式是否唯一？为什么？

解：次数不超过2的多项式 $f(t)$ 满足 $f(t_1)=f(t_2)=0,f(t_3)=1$，且 t_1,t_2,t_3 互异. 则有方程组
$$\begin{pmatrix}1&t_1&t_1^2\\1&t_2&t_2^2\\1&t_3&t_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\text{，记为 } Ax=b.$$
因为 $|A|=(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)\neq0$，由克莱姆法制，方程组有唯一解：
$$a_0=\frac{t_1t_2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)},a_1=-\frac{t_1+t_2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)},a_2=\frac{1}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)},$$
故有唯一多项式 $f(t)=\dfrac{1}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}t^2-\dfrac{t_1+t_2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}t+\dfrac{t_1t_2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$ 满足条件.

解法二：次数不超过2的多项式 $f(t)$ 满足 $f(t_1)=f(t_2)=0,t_1\neq t_2$，故有形式 $f(t)=c(t-t_1)(t-t_2)$，
又由 $f(t_3)=1$，可得 $f(t)=\dfrac{1}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}(t-t_1)(t-t_2)$.

这样的多项式是唯一的，因为 $f(t)$ 的系数 a_0,a_1,a_2 必定满足下列方程组：
$\begin{pmatrix}1&t_1&t_1^2\\1&t_2&t_2^2\\1&t_3&t_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，记为 $Ax=\beta$，则有 $|A|=(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)\neq0$，由克莱姆法制，
方程组有唯一解：a_0,a_1,a_2，即多项式是唯一的.

三.(12分) 给定矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 与向量 β，(1) 计算 $B=(b_{ij})_{5\times5}$ 使得 $AB=0$ 且 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)=5$(7分)；(2) 判断 $Ax=\beta$ 解的存在性，如有解则计算其通解(5分).

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\\-5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\6\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-3\\5\\-11\\-2\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\0\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-2\\13\\3\\9\end{pmatrix}.$$

解：$(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&-3&1&-2\\-4&2&1&5&1&13\\-2&6&1&-11&3&3\\-5&0&1&-2&0&9\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&-0.2&0&0&-2.04\\0&1&0.1&0&0.5&0.92\\0&0&0&1&0&0.6\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).\qquad(*).$

(1) 从(*)可得：$\mathrm{r}(A)=3,\gamma_1=(0.2,-0.1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\gamma_2=(0,-0.5,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系，
令 $B=(\gamma_1,\gamma_2,0,0,0)$，则有 $AB=O$ 且 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)=5$.

(2) 从(*)还能得到 $Ax=\beta$ 的一个特解 $\eta=(-2.04,0.92,0,0.6,0)^{\mathrm{T}}$，则 $Ax=\beta$ 有解，
且通解为：$\eta+k_1\gamma_1+k_2\gamma_2,\quad k_1,k_2\in\mathbf{R}$.

解法二：(1) $A=\begin{pmatrix}1&2&0&-3&1\\-4&2&1&5&1\\-2&6&1&-11&3\\-5&0&1&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-0.2&0&0\\0&1&0.1&0&0.5\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$

可得：$\mathrm{r}(A)=3,\gamma_1=(0.2,-0.1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\gamma_2=(0,-0.5,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系，
令 $B=(\gamma_1,\gamma_2,0,0,0)$，则有 $AB=O$ 且 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)=5$.

(2) $(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&-3&1&-2\\-4&2&1&5&1&13\\-2&6&1&-11&3&3\\-5&0&1&-2&0&9\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&-0.2&0&0&-2.04\\0&1&0.1&0&0.5&0.92\\0&0&0&1&0&0.6\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$

可得 $Ax=\beta$ 有解，$\eta=(-2.04,0.92,0,0.6,0)^{\mathrm{T}}$ 为方程组的一个特解，
故通解为：$\eta+k_1\gamma_1+k_2\gamma_2,\quad k_1,k_2\in\mathbf{R}$.

四.(10分) 给定 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 与 $\beta\in\mathbf{R}^m, A^{\mathrm{T}}A=A^{\mathrm{T}}\beta$ 称为 $Ax=\beta$ 的法方程组，证明：
(1) 法方程组必有解(4分)；(2) 当 A 列满秩时，法方程组有唯一解(4分)；
(3) 当 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,\beta)$ 时，$A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$ 与 $Ax=\beta$ 同解(2分).

证：(1) $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)\le\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A,A^{\mathrm{T}}\beta)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}(A,\beta))\le\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A)$.
又由 $Ax=0\Rightarrow A^{\mathrm{T}}Ax=0$，及 $A^{\mathrm{T}}Ax=0\Rightarrow x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax=(Ax)^{\mathrm{T}}(A)=0\Rightarrow Ax=0$，
知 $Ax=0$ 与 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 同解，故有 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)$.
于是有 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)\le\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A,A^{\mathrm{T}}\beta)\le\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)$，即 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A,A^{\mathrm{T}}\beta)$，法方程组有解.

(2) 由(1)的证明知 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)=\mathrm{r}(A)=n$，故 $A^{\mathrm{T}}A$ 列满足，故法方程组有唯一解.

(3) 当 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,\beta)$ 时，$Ax=\beta$ 有解，易知 $Ax=\beta$ 的解也是 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$ 的解，
设 η 为 $Ax=\beta$ 的特解，则也是 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$ 的特解. 设 γ 为 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$ 的任意解，
则有 $A^{\mathrm{T}}A(\gamma-\eta)=0$，由于 $Ax=0$ 与 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 同解，故有 $A\gamma=A\eta=\beta$，
于是 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$ 的解也是 $Ax=\beta$ 的解，故 $Ax=\beta$ 与 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$ 同解.

证法二：(1) 设 $\mathrm{r}(A)=r$，则有 $A=PQ^{\mathrm{T}}$，其中 $P\in\mathbf{R}^{m\times r},Q\in\mathbf{R}^{n\times r},\mathrm{r}(P)=\mathrm{r}(Q)=r$.
P 列满秩，由施密特正交化定理可知 P 的列可组合出标准正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$，
于是有 r 阶对角元非零的上三角矩阵 M 使得 $PM=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)$，显然 M 可逆，

故 $\mathrm{r}(P^{\mathrm{T}}P)=\mathrm{r}(M^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}PM)=\mathrm{r}(\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\\beta_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\beta_r^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r))=\mathrm{r}(E_r)=r=\mathrm{r}(P)$，即 $P^{\mathrm{T}}P$ 可逆.

考虑 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$，即 $QP^{\mathrm{T}}PQ^{\mathrm{T}}x=QP^{\mathrm{T}}\beta=Q\gamma$，
由于 $\mathrm{r}(P^{\mathrm{T}}PQ^{\mathrm{T}},\gamma)\le$ 增广矩阵行数r，而 $\mathrm{r}(P^{\mathrm{T}}PQ^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}((P^{\mathrm{T}}P)Q^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(Q^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(Q)=r$，
故 $\mathrm{r}(P^{\mathrm{T}}PQ^{\mathrm{T}},\gamma)=\mathrm{r}(P^{\mathrm{T}}PQ^{\mathrm{T}})$，即方程组 $P^{\mathrm{T}}PQ^{\mathrm{T}}x=\gamma$ 有解，
于是 $QP^{\mathrm{T}}PQ^{\mathrm{T}}x=Q\gamma$ 也有解，即 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$ 有解.

(3) 因为 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,\beta)$，故 $Ax=\beta$ 有解，设为 x_0，则 $\beta=Ax_0$. 假设 x 满足 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$，
则 $(Ax-\beta)^{\mathrm{T}}(Ax-\beta)=(A(x-x_0))^{\mathrm{T}}(Ax-\beta)=(x-x_0)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(Ax-\beta)=0$，故 $Ax-\beta=0$，
即 x 满足 $Ax=\beta$，反之显然，故同解.

五.(10分) $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n), B=A^{-1}=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm T}\\ \beta_2^{\mathrm T}\\ \vdots\\ \beta_n^{\mathrm T}\end{pmatrix}, C=\alpha_1\beta_1^{\mathrm T}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm T}+\cdots+\alpha_k\beta_k^{\mathrm T}\quad(k<n)$，

(1) 证明 C 为投影矩阵，即 $C^2=C$ (5分)；(2) 写出 $Cx=0$ 的一个基础解系 (5分).

解：(1) 易知 $C=A\begin{pmatrix}E_k & \\ & O\end{pmatrix}B$，故有 $C^2=A\begin{pmatrix}E_k & \\ & O\end{pmatrix}(BA)\begin{pmatrix}E_k & \\ & O\end{pmatrix}B=A\begin{pmatrix}E_k & \\ & O\end{pmatrix}B=C$.

(2) $Cx=A\begin{pmatrix}E_k & \\ & O\end{pmatrix}Bx=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}E_k & \\ & O\end{pmatrix}Bx=\begin{pmatrix}E_k & \\ & O\end{pmatrix}y=0$，

解得 $y=e_{k+1},e_{k+2},\cdots,e_n$ 为基础解系.

因为 $y=Bx$，故 $x=Ay$，于是 $Ae_{k+1},Ae_{k+2},\cdots,Ae_n$ 即 $\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\cdots,\alpha_n$ 为 $Cx=0$ 的一组基础解系.

解法二：(1) 因为 $BA=A^{-1}A=E$，而 $BA=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm T}\alpha_1 & \beta_1^{\mathrm T}\alpha_2 & \cdots,\beta_1^{\mathrm T}\alpha_n\\ \beta_2^{\mathrm T}\alpha_1 & \beta_2^{\mathrm T}\alpha_2 & \cdots,\beta_2^{\mathrm T}\alpha_n\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \beta_n^{\mathrm T}\alpha_1 & \beta_n^{\mathrm T}\alpha_2 & \cdots,\beta_n^{\mathrm T}\alpha_n\end{pmatrix}$，

故有 $\beta_i^{\mathrm T}\alpha_j=\delta_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$. 于是

$$\begin{aligned}C^2&=(\alpha_1\beta_1^{\mathrm T}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm T}+\cdots+\alpha_k\beta_k^{\mathrm T})\times(\alpha_1\beta_1^{\mathrm T}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm T}+\cdots+\alpha_k\beta_k^{\mathrm T})\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha_i\beta_i^{\mathrm T}\alpha_j\beta_j^{\mathrm T}=\sum_{i=1}^n\alpha_i\beta_i^{\mathrm T}\alpha_i\beta_i^{\mathrm T}=\sum_{i=1}^n\alpha_i\beta_i^{\mathrm T}=C.\end{aligned}$$

(2) 当 $j=k+1,k+2,\cdots,n$ 时有 $\beta_i^{\mathrm T}\alpha_j=0,i=1,2,\cdots,k$，

故有 $C\alpha_j=\alpha_1\beta_1^{\mathrm T}\alpha_j+\alpha_2\beta_2^{\mathrm T}\alpha_j+\cdots+\alpha_k\beta_k^{\mathrm T}\alpha_j=0$. 又因为 A 可逆，故 A 的列 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 非零且线性无关，故 $\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\cdots,\alpha_n$ 为 $Cx=0$ 的 $n-k$ 个线性无关解.

注意到 $\mathrm r(C)=\mathrm r(BCA)=\mathrm r(B(\alpha_1,\cdots,\alpha_k,0,\cdots,0))=\mathrm r\begin{pmatrix}E_k & \\ & O\end{pmatrix}=k$，

故知 $\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\cdots,\alpha_n$ 为 $Cx=0$ 的基础解系.

六.(10分) $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times k}, AB=O, \mathrm r(A)+\mathrm r(B)=n$，$B$ 与 $C=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k)$ 列等价，证明 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k$ 的极大无关组给出 $Ax=0$ 的一个基础解系.

证：因为 $AB=O,\mathrm r(A)+\mathrm r(B)=n$，故 B 的极大无关的列可以作为 $Ax=0$ 的一组基础解系，

即 $Ax=0$ 的所有解可由 B 的列表示. 又因为 B 与 $C=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k)$ 列等价，

故 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k$ 的极大无关组也可以表示 $Ax=0$ 的所有解，再有极大无关组的无关性可得 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k$ 的极大无关组给出 $Ax=0$ 的一个基础解系.

证法二：因为 B 与 $C=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k)$ 列等价，故存在矩阵 $P=(p_{ij})_{k\times k}$ 使得 $C=BP$，且 B 与 C 的列秩相等，即 $\mathrm r(B)=\mathrm r(C)$.

由 $AC=ABP=OP=O$，且 $\mathrm r(A)+\mathrm r(C)=\mathrm r(A)+\mathrm r(B)=n$，

知 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k$ 的极大无关组给出 $Ax=0$ 的一个基础解系.