第七章 参数估计

什么是参数估计？

参数是刻画总体某方面概率特性的数量. 当此数量未知时, 从总体抽出一个样本， 用某种方法对这个未知参数进行估计就是参数估计.

例如，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

若μ, σ^2未知, 通过构造样本的函数, 给出它们的估计值或取值范围就是参数估计的内容.

点估计　　区间估计

参数估计的类型

- 点估计
  - 设总体X的分布函数的形式已知，但它的一个或多个参数未知，借助于总体X的一个样本来估计总体未知参数的值。

- 区间估计
  - 估计总体未知参数的取值范围, 并使此范围包含未知参数真值的概率为给定的值（例如95%）.

主要内容

- 7.1 点估计
- 7.3 估计量的评选标准
- 7.4 区间估计
- 7.5 正态总体均值与方差的区间估计
- 7.6 0-1分布参数的区间估计
- 7.7 单侧置信区间

7.1 点估计

点估计的思想方法

设总体X 的分布函数的形式已知, 但含有一个或多个未知参数：$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$为总体的一个样本

构造 k 个统计量：

$$\left.\begin{array}{l} \theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ \theta_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \theta_k(X_1, X_2, \cdots, X_n) \end{array}\right\} \text{随机变量}$$

当测得样本值$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$时, 代入上述统计量, 即可得到 k 个数:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\theta}_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \hat{\theta}_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\theta}_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)\end{array}\right\} \text{数 值}$$

称数 $\hat{\theta}_1 \cdots, \hat{\theta}_k$ 为未知参数 $\theta_1, \cdots, \theta_k$ 的**估计值**

对应统计量为未知参数 $\theta_1, \cdots, \theta_k$ 的**估计量**

问题 $\begin{cases} \text{如何构造统计量?} \\ \text{如何评价估计量的好坏?} \end{cases}$

（一）矩估计法

- 方法原理
  - 利用总体 k 阶原点矩建立含有待估参数的方程组，解出待估参数. 再用样本 k 阶原点矩代替待估参数中的总体 k 阶原点矩，从而得到待估参数的矩估计。

设待估计的参数为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$

设总体的 l ($l = 1, 2, \ldots, k$) 阶矩存在，记为

$$E(X^l) = \mu_l(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$$

样本 $X_1, X_2,\ldots, X_n$ 的 l 阶矩为

$$A_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l$$

令

$$\mu_l = \mu_l(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \qquad l = 1,2,\cdots,k$$

(含未知参数 $\theta_1,\theta_2, \ldots,\theta_k$ 的方程组)

解方程组，得：

$$\theta_1 = \theta_1(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\theta_k = \theta_k(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$$

以A_i分别代替上式中的$\mu_i, i = 1, 2, \ldots, k$，得到

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\theta}_1 = \theta_1(A_1, A_2, \cdots, A_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\theta}_k = \theta_k(A_1, A_2, \cdots, A_n)\end{array}\right\}$$

未知参数 $\theta_1, \ \ldots, \ \theta_k$ 的**矩估计量**

一般, 不论总体服从什么分布, 总体期望 μ 与方差 σ^2 是存在的, 它们的矩估计量分别为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

事实上，按矩法原理，

$$\begin{cases} \mu_1 = EX = \mu \\ \mu_2 = E(X^2) = DX + (EX)^2 = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} \mu = \mu_1 \\ \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \end{cases}$

以A_1, A_2代替上式中的μ_1，μ_2，得

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

例1 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为总体的样本，求 μ, σ^2 的矩估计量.

解 $\hat{\mu}_{矩} = \overline{X}$

$$\hat{\sigma}^2{}_{矩} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2$$

例2 设总体 $X \sim \pi(\lambda)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为总体的样本, 求 λ 的矩估计量.

解 $E(X) = \lambda$, 令 $\overline{X} = \lambda$.

故 $\hat{\lambda}_{矩} = \overline{X}$.

例3 设从某灯泡厂某天生产的灯泡中随机抽取10只灯泡，测得其寿命为(单位:小时)

1050, 1100, 1080, 1120, 1200

1250, 1040, 1130, 1300, 1200

试用矩法估计该厂这天生产的灯泡的平均寿命及寿命分布的方差.

解： 设 X 为这天生产的灯泡的寿命，

$$E\hat{(X)} = \hat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 1147(h)$$

$$D\hat{(X)} = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \overline{x}^2 = 6821(h^2).$$

例4 设总体 $X \sim U(a, b)$, a, b 未知, 求参数a, b 的 矩法估计量.

解 由于 $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$, $D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

令
$$\begin{cases} \dfrac{\hat{a}+\hat{b}}{2} = \overline{X} \\ \dfrac{(\hat{b}-\hat{a})^2}{12} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \end{cases}$$

解得

$$\hat{\alpha} = \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2},$$

$$\hat{b} = \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}.$$

（二）最大似然估计法

思想方法：一次试验就出现的事件有较大的概率。

例如: 有两外形相同的箱子, 各装100个球,

一箱： 99个白球　　1 个红球

另一箱： 1 个白球　　99个红球

现从两箱中任取一箱, 并从箱中任取一球, 结果所取得的球是白球.

问：所取的球来自哪一箱？　答：第一箱

例5 设总体 X 服从0-1分布，且$P(X=1)=p$，用最大似然法求 p 的估计值.

解 总体 X 的分布律为

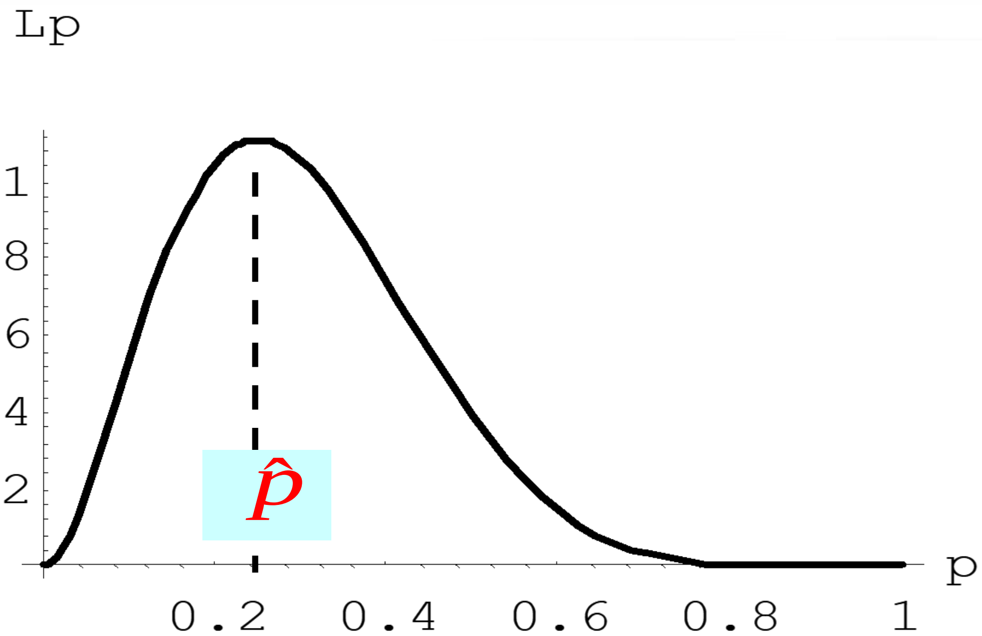
$$P(X=x)=p^{x}(1-p)^{1-x},\quad x=0,1$$

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$为总体样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的样本值,

则 $P(X_1=x_1, X_2=x_2, \cdots, X_n=x_n)$

$$=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}=L(p)\qquad x_i=0,1,\ i=1,2,\cdots,n$$

对于不同的 p , $L(p)$不同, 见下图



现经过一次试验, 事件

$$(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n)$$

发生了, 则 p 的取值应使这个事件发生的概率最大.

在容许范围内选择 p，使$L(p)$最大

注意到，$\ln L(p)$是 **L** 的单调增函数, 故若某个p 使$\ln L(p)$最大, 则这个p 必使$L(p)$最大。

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}\overset{\text{令}}{=}0\Rightarrow\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\ln L}{\mathrm{d}p^2}=-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p^2}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{(1-p)^2}<0\right)$$

所以 $\hat{p}=\bar{x}$ 为所求 p 的估计值.

最大似然法的思想方法

一般, 设 X 为离散型随机变量, 其分布律为

$$P(X=x)=p(x,\theta),\quad x=x_1,x_2,\cdots,\theta\in\Theta$$

则样本 $X_1, X_2,\ldots, X_n$的分布律为

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)$$
$$=p(x_1,\theta)p(x_2,\theta)\cdots p(x_n,\theta)$$

$$\overset{\text{记为}}{=} L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)\overset{\text{或}}{=}L(\theta)$$

称 $L(\theta)$ 为样本的**似然函数**

最大似然法的思想方法

选择适当的$\theta = \hat{\theta}$,使 $L(\theta)$ 取最大值, 即

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \hat{\theta})$$

$$= \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$$

称这样得到的 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为参数 θ 的**最大似然估计值.**

称统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为参数 θ 的**最大似然估计量.**

注 若 X 为连续型随机变量，其概率密度$f(x;\ \theta)$，$\theta\epsilon\Theta$ 的形式已知，θ为待估参数，Θ是θ可能取值的范围。设$X_1,X_2,\dots,X_n$是来自X的样本，则X_1，X_2，…，X_n的联合密度为

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

$x_1,x_2,\dots,x_n$是样本X_1，X_2，…，X_n的一个观测值，则似然函数为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\dots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

例6 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是 X 的样本值, 求 μ, σ^2 的最大似然估计.

解 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu, \sigma^2)$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L = -\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2)$$

似然方程组为

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L\right) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial(\sigma^2)}\ln L\right) = \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-\frac{n}{2(\sigma^2)}=0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \end{cases}$$

μ, σ^2 的极大似然估计量分别为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

最大似然估计方法的步骤

1） 写出似然函数 L

2） 写出对数似然方程(组）

3）求出 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$ ，使得

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k)$$

$$= \max_{(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) \in \Theta} \{L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)\}$$

7.3 估计量的评选标准

对于同一个未知参数，不同的方法得到的估计量可能不同，于是提出问题：

应该选用哪一种估计量?

用何标准来评价一个估计量的好坏?

常用标准

(1) 无偏性

(2) 有效性

(3) 相合性（一致性）

（一）无偏性

定义 若 $E(\hat{\theta})=\theta$

则称$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量

定义的合理性

我们不可能要求每一次由样本得到的估计值与真值都相等，但可以要求这些估计值的期望与真值相等.

例7 设总体X的 k 阶原点矩 $\mu_k = E(X^k)$ 存在，

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 X 的样本, 证明: 不论 X

服从什么分布(但期望存在), $A_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

是 μ_k 的无偏估计量.

证 由于 $E(X_i^k) = E(X^k) = \mu_k \quad i = 1, 2, \cdots, n$

则 $E(A_k) = E(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k)$

$$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu_k = \mu_k$$

所以A_k是μ_k的无偏估计量。

特别地

样本均值 $\overline{X}$ 是总体期望 $E(X)$ 的无偏估计量.

样本二阶原点矩 $A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 是总体二阶原点矩 $\mu_2 = E(X^2)$ 的无偏估计量.

例8 设总体 X 的期望与方差存在, X 的样本为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 证明

(1) $\tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 不是 $D(X)$的无偏估量;

(2) $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 是 $D(X)$ 的无偏估计量.

证 因为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \bar{X}^2$

$$E(X_i) = E(X) = \mu, \ D(X_i) = D(X) = \sigma^2$$

$$E(\bar{X}) = E(X) = \mu, \ D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

因而

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-E(\overline{X}^2)$$

$$=(\sigma^2+\mu^2)-(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)$$

$$=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$$

故 $E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=\sigma^2$ 证毕.

（二）有效性

定义 设 $\hat{\theta}_1 = \theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

$$\hat{\theta}_2 = \theta_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

都是总体参数θ的无偏估计量, 且

$$D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2)$$

则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效.

例9 设总体为 X，且 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为总体 X 的一个样本，

(1) 设常数 $c_i \neq \frac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n.$ $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1.$

证明 $\hat{\mu}_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ 是 μ 的无偏估计量.

(2) 证明 $\hat{\mu} = \overline{X}$ 比 $\hat{\mu}_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ 更有效.

证 (1) $E(\hat{\mu}_1) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu = \mu$

所以 $\hat{\mu}_1$ 是 μ 的无偏估计量.

(2) $D(\hat{\mu}_1) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D(X_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2$

而 $1 = (\sum_{i=1}^{n} c_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^{\ 2} + 2 \sum_{1 \le i \le j \le n} c_i c_j$

$$< \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} (c_i^2 + c_j^2) = n \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

$\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 > \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $D(\hat{\mu}) = \frac{1}{n}\sigma^2 < D(\hat{\mu}_1)$

所以μ比 $\hat{\mu}_1$ 更有效.

结论 算术均值比加权均值更有效.

例如 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, (X_1, X_2) 是一样本.

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mu}_1 &= \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 \\ \hat{\mu}_2 &= \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2 \\ \hat{\mu}_3 &= \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 \end{aligned}\right\} \text{都是}\mu\text{的无偏估计量}$$

由前例知 $\hat{\mu}_3$ 最有效.

（三）相合性

定义 设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体参数 θ 的估计量，

若对于任意的 $\theta\in\Theta$，当 $n\to\infty$ 时，

$\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ，即 $\forall\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}P(\left|\hat{\theta}-\theta\right|\geq\varepsilon)=0$$

则称 $\hat{\theta}$ 是总体参数 θ 的相合(或一致)估计量.

相合性估计量仅在样本容量 n 足够大时，才显示其优越性.

关于相合性的两个常用结论

1. 样本 k 阶矩是总体 k 阶矩的相合性估计量. } 由大数定律证明

2. 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} D(\hat{\theta}) = 0$, 则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的相合估计量. } 用切贝雪夫不等式证明

矩法得到的估计量一般为相合估计量

7.4 区间估计

区间估计的含义

- 对于总体的未知参数 θ，除了可以对其进行点估计，还可以估计出一个范围，并且知道这个范围包含 θ 真值的可信程度.
- 这样的范围通常以区间的形式给出，同时还给出此区间包含 θ 真值的可信程度．这种形式的估计称为区间估计．这样的区间称为置信区间.

引例

已知 $X \sim N(\mu, 1)$,

μ 的无偏、有效点估计为 $\bar{X}$

常数　　　　　　　　　　随机变量

不同样本算得的 μ 的估计值不同, 因此除了给出 μ 的点估计外, 还希望根据所给的样本确定一个随机区间, 使其包含参数真值的概率达到指定的要求.

引例

现在要找一个区间, 使其包含 μ 的真值的概率为0.95. （设样本容量 $n = 16$）

$$\bar{X} \sim N\left(\mu,\ \frac{1}{16}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{1/16}} \sim N(0,\ 1)$$

取$\alpha = 0.05$

查表得 $z_{\alpha/2} = 1.96$

引例

这说明 $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/16}}\right|<1.96\right)=0.95$

即 $P\left(\overline{X}-1.96\sqrt{1/16}<\mu<\overline{X}+1.96\sqrt{1/16}\right)=0.95$

称随机区间 $\left(\overline{X}-1.96\sqrt{1/16}，\ \overline{X}+1.96\sqrt{1/16}\right)$

为未知参数 μ 的置信水平为0.95的置信区间.

置信区间的意义

- 反复抽取容量为 16 的样本, 都可得一个区间, 此区间不一定包含未知参数 μ 的真值, 而包含真值的区间占 95%.

若测得 一组样本值, 算得 $\overline{x} = 5.2$

则得一区间 **(5.2 – 0.49, 5.2 + 0.49)**

它可能包含也可能不包含 μ 的真值, 反复

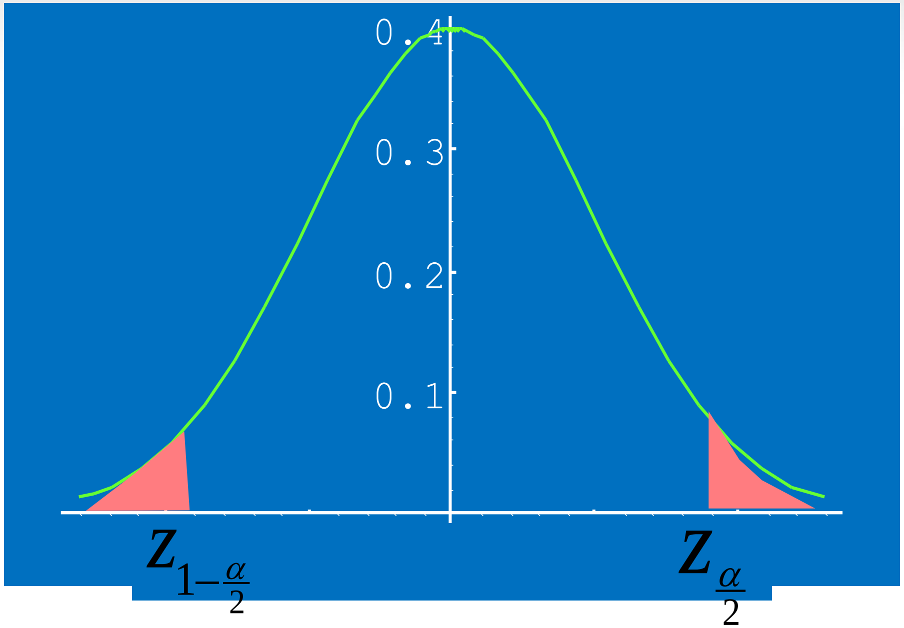
抽样得到的区间中有 **95%** 包含 μ 的真值.

为何要取 $z_{\alpha/2}$？

当置信区间为$\left(\bar{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1/16},\ \bar{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1/16}\right)$时

区间的长度为 $2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1/16}$ —— 达到最短

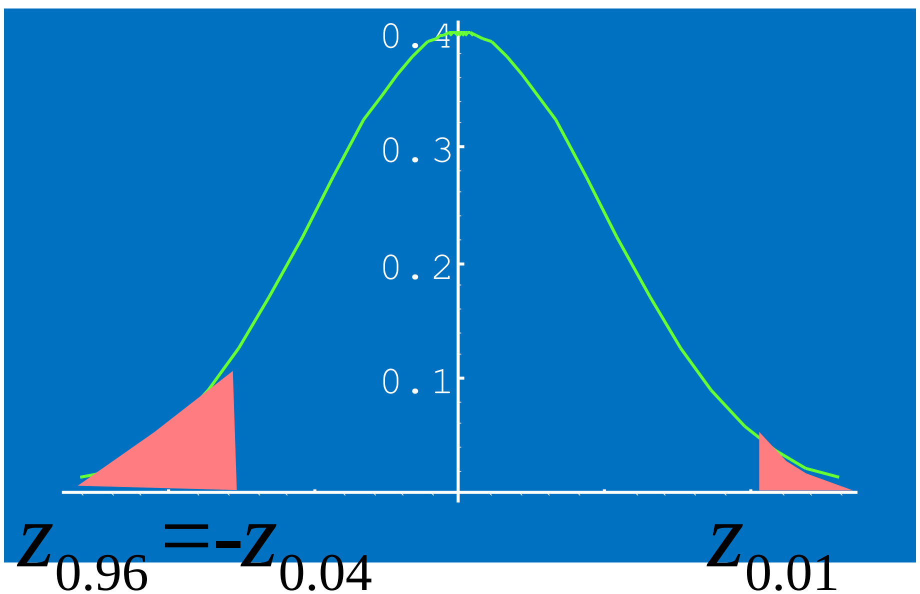
估计的精确度高



取 $\alpha = 0.05$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96 - (-1.96)$$

$$= 3.92$$



$$z_{\alpha/5} - z_{1-4\alpha/5} = z_{0.01} + z_{0.04}$$

$$= 2.33 + 1.75 = 4.08$$

置信区间的定义

设 θ 为待估参数, α 是一给定的数, ($0<\alpha<1$).

若能找到统计量 θ_1, θ_2 , 使

$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1 - \alpha \qquad \theta \in \Theta$$

则称 (θ_1, θ_2) 为 θ 的置信水平为 1 - α 的

置信区间.

θ_1 —— 置信下限

θ_2 —— 置信上限

几点说明

- 置信区间的长度 $\theta_2-\theta_1$ 反映了估计精度, $\theta_2-\theta_1$ 越小，估计精度越高.
- α 反映了估计的可靠度, α 越小, 越可靠. α 越小, 1- α 越大, 估计的可靠度越高, 但这时, $\theta_2-\theta_1$ 往往增大, 因而估计精度降低.
- α 确定后, 置信区间的选取方法不唯一, 常选长度最小的一个.

处理“可靠性与精度关系”的原则

先　　再

求参数置信区间

保 证
可靠性

提 高
精 度

求置信区间的步骤

- 1. 寻找一个样本的函数

$$W(X_x, X_2, \cdots, X_n, \theta)$$ — 称为**枢轴量**

它含有待估参数，不含其它未知参数，它的分布已知，且分布不依赖于待估参数 (常由 θ 的点估计出发考虑).

例如 $\bar{X} \sim N(\mu, 1/16)$

取枢轴量 $W(X_1, X_2, \cdots, X_n, \mu) = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{1/16}}$

求置信区间的步骤

- 2. 给定置信水平 $1-\alpha$, 定出常数 a , b ,使得

$$P(a < W(X_1, X_2, X_n, \theta) < b) = 1-\alpha$$

(引例中 $a = -1.96, b = 1.96$)

- 3. 由 $a < W(X_1, X_2, X_n, \theta) < b$ 解出 θ_1, θ_2,

得置信区间 (θ_1, θ_2)

引例中

$$(\theta_1, \theta_2) = (\bar{X} - 1.96\sqrt{1/16}, \quad \bar{X} + 1.96\sqrt{1/16})$$

7.5 正态总体均值与方差的区间估计

(一) 单个正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$的情况

(1) 方差σ^2已知, μ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

推导 由 $\bar{X} \sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$ 选取枢轴量

$$W(X_1,X_2,\cdots,X_n,\mu)=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

(一) 单个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的情况

由 $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$

得 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\quad \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

(一) 单个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$的情况

(2) 方差σ^2未知, μ 的置信区间

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

推导 选取枢轴量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

由 $P\left(\left| \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \right| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right) = 1 - \alpha$

(一) 单个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$的情况

得 μ 的置信水平为 $1-\alpha$的置信区间为

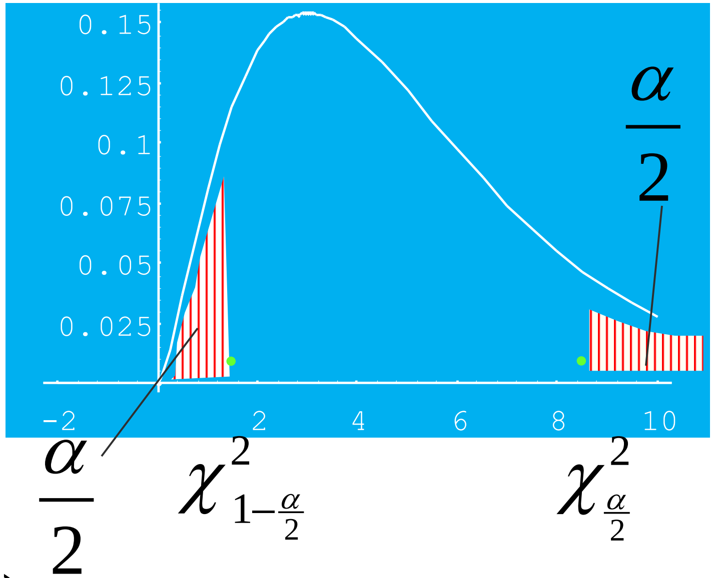
$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right)$$

(一) 单个正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$的情况

(3) 当 μ 未知时，方差σ^2的置信区间

选取 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 则由

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$



得 σ^2 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) \quad \cdots\cdots(3)$$

(一) 单个正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$的情况

例1 有一大批糖果. 现从中随机地取 16 袋，称得重量(以g计)如下：

506	507	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布. (1) 试求总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间. (2) 求总体标准差 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

解 (1) 由题可知, μ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

(一) 单个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的情况

$1-\alpha=0.95, \alpha/2=0.025, n-1=15,$

经查表可得 $t_{0.025}(15)=2.1315,$

由给出的数据算得 $\bar{x}=503.75, s=6.2022,$

则 μ 的一个置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(503.75 \pm \frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315)$$

即 $(500.4,\ 507.1)$

(一) 单个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的情况

(2) 由题可知，σ^2 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right)$$

$\alpha/2 = 0.025, 1-\alpha/2 = 0.975, n-1 = 15,$

经查表可得 $\chi^2_{0.025}(15) = 27.488, \chi^2_{975}(15) = 6.262$

又 $s = 6.2022,$

计算得 σ^2 的一个置信水平为 0.95 的置信区间为

(20.9913, 92.1446)

则 σ 的一个置信水平为 0.95 的置信区间为

(4.5816, 9.5992)

(二) 两个正态总体的情况

$(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})$为取自总体 $N(\mu_1, \sigma_1{}^2)$ 的样本,

$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})$为取自总体 $N(\mu_2, \sigma_2{}^2)$ 的样本,

$\bar{X}, S_1^2$；$\bar{Y}, S_2^2$ 分别表示两样本的均值与方差

置信度为 $1-\alpha$

(二) 两个正态总体的情况

(1) σ_1^2,σ_2^2 已知，$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

$$\bar{X}\sim N(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n_1}),\quad \bar{Y}\sim N(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n_2}),\qquad \bar{X},\bar{Y}\text{ 相互独立,}$$

$$\Longrightarrow \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\quad (\bar{X}-\bar{Y})+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)\quad \cdots\cdots \quad \textbf{(4)}$$

(二) 两个正态总体的情况

(2) σ_1^2,σ_2^2 **未知(但** $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ **)** $\mu_1-\mu_2$ **的置信区间**

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}\right)$$

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sigma}\sim N(0,1)$$

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1-1)$$

$$\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_2-1)$$

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

(二) 两个正态总体的情况

$$P\left(\left|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right|<t_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)\quad\cdots\cdots(5)$$

(二) 两个正态总体的情况

(3) 方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间 (μ_1, μ_2 未知)

取枢轴量 $F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\dfrac{S_1^2\big/S_2^2}{\sigma_1^2\big/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

因此, 方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\quad \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)\cdots\cdots(6)$$

(二) 两个正态总体的情况

例2 为比较A, B两种型号步枪子弹的枪口速度, 随机地取A型子弹10发, 得到枪口速度的平均值为500m/s, 标准差为1.1m/s, 随机地抽取B型子弹20发, 得到枪口速度的平均值为496m/s, 标准差为1.2m/s. 假设两总体都可近似地服从正态分布, 且由生产过程可认可方差相等. 求两总体均值差的一个置信水平为0.95的置信区间.

解 由题可知，$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

(二) 两个正态总体的情况

$$1-\alpha = 0.95, \alpha/2 = 0.025, n_1 = 10, n_2 = 20,$$

查表得 $t_{0.025}(28) = 2.0484,$

$$S_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{9\times 1.1^2 + 19\times 1.2^2}{28}}$$

$$= 1.1688$$

(二) 两个正态总体的情况

又 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 500 - 496 = 4,$

则 $\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(4 \pm 2.0484 \times 1.1688 \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{20}}\right)$$

即 (3.07, 4.93)

(二) 两个正态总体的情况

例3 研究由机器A和机器B生产的钢管的内径(单位：mm), 随机抽取机器A生产的管子18只，测得样本方差为0.34，抽取机器B生产的管子13只，测得样本方差为0.29. 设两样本相互独立, 且设由机器A, 机器B生产的管子的内径分别服从正态分布$N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 这里$\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2$均未知，试求方差比$\sigma_1^2/\sigma_2^2$的置信水平为0.9的置信区间.

解 由题可知，σ_1^2/σ_2^2 置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}, \quad \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)} \right)$$

(二) 两个正态总体的情况

$$n_1 = 18, s_1^2 = 0.34, n_2 = 13, s_2^2 = 0.29, \alpha = 0.1$$

查表可得 $F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.05}(17,12) = 2.59$

$$F_{1-\alpha/2}(17,12) = F_{0.95}(17,12) = \frac{1}{F_{0.05}(12,17)} = \frac{1}{2.38}$$

则 σ_1^2 / σ_2^2 的一个置信水平为 0.9 的置信区间为

$$(\frac{0.34}{0.29} \times \frac{1}{2.59}, \frac{0.34}{0.29} \times 2.38)$$

即 $(0.45,\ 2.79)$

7.6 0-1分布参数的区间估计

- 设有一容量 n > 50 的大样本，它来自(0 – 1)分布的总体X，X 的分布律为

$$f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x},\ x=0,1,$$

其中p为未知参数，现在来求p的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

易知 总体$\mu=p$,总体$\sigma^2=p(1-p)$

设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是一个样本，由中心极限定理可知

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(np,np(1-p))$$

对 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 标准化，可得 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\sim N(0,1)$

即 $\dfrac{n\overline{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$

于是 $P\left\{-z_{\alpha/2} < \dfrac{n\overline{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$

解 $-z_{\alpha/2} < \dfrac{n\overline{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}$ 可得

p的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{1}{2a}(-\mathrm{b}-\sqrt{b^2-4ac}),\frac{1}{2a}(-\mathrm{b}+\sqrt{b^2-4ac})\right)$$

其中 $a=n+z_{\alpha/2}^2, b=-(2n\overline{X}+z_{\alpha/2}^2), c=n\overline{X}^2$

例4 自一大批产品的100个样品中，得一等品60个，求这批产品的一级品率 p 的置信水平为 0.95 的置信区间.

解 由题可知，p 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{1}{2a}(-\mathrm{b}-\sqrt{b^2-4ac}),\frac{1}{2a}(-\mathrm{b}+\sqrt{b^2-4ac})\right)$$

其中 $a=n+z_{\alpha/2}^2, b=-(2n\overline{X}+z_{\alpha/2}^2), c=n\overline{X}^2$

$$n=100, \bar{x}=60/100=0.6, 1-\alpha=0.95, \alpha/2=0.025,$$

查表得 $z_{\alpha/2}=1.96$

则 $a=n+z_{\alpha/2}^2=100+1.96^2=103.84$

$b=-(2n\overline{X}+z_{\alpha/2}^2)=-(200\times 0.6+1.96^2)=-123.84$

$c=n\overline{X}^2=100\times 0.6^2=36$

则 p 的置信水平为0.95 的一个置信区间为

$$\left(\frac{1}{2\times 103.84}(123.84-\sqrt{(-123.84)^2-4\times 103.84\times 36}),\right.$$

$$\left.\frac{1}{2\times 103.84}(123.84+\sqrt{(-123.84)^2-4\times 103.84\times 36})\right)$$

即 (0.50, 0.69)

7.7 单侧置信区间

定义 对于给定的 $\alpha\,(0<\alpha<1)$, θ 是待估参数,

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 X 的样本,

若能确定一个统计量

$$\theta_3=\theta_3(X_1, X_2, \cdots, X_n) \quad (\text{或}\ \theta_4=\theta_4(X_1, X_2, \cdots, X_n)\,)$$

使得 $P(\theta>\theta_3)=1-\alpha$ (或 $P(\theta<\theta_4)=1-\alpha$)

则称 $(\theta_3, +\infty)$ (或 $(-\infty, \theta_4)$)

为 θ 的置信水平为1 - α 的**单侧置信区间.**

θ_3—— 单侧置信下限 θ_4—— 单侧置信上限

正态总体均值（方差未知）单侧置信区间

易知 $P\left(\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha}(n-1)\right)=1-\alpha$

解 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha}(n-1)$ 可得

μ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间为$\left(\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1),\ \infty\right)$

则 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限为 $\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$

正态总体均值（方差未知）单侧置信区间

易知 $P\left(\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} > -t_{\alpha}(n-1)\right) = 1-\alpha$

解 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} > -t_{\alpha}(n-1)$ 可得

μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 单侧置信区间为 $\left(-\infty, \bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)\right)$

则 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限为 $\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$

正态总体方差的单侧置信区间

易知 $P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\} = 1-\alpha$

解 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ 可得

σ^2 的置信水平为 1-α 的单侧置信区间为 $\left(0, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$

则 σ^2 的置信水平为 1-α 的单侧置信上限为 $\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$

正态总体方差的单侧置信区间

易知 $P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_\alpha^2(n-1)\right\} = 1-\alpha$

解 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_\alpha^2(n-1)$ 可得

σ^2 的置信水平为 1-α 的单侧置信区间为 $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi_\alpha^2(n-1)}, \infty\right)$

则 σ^2 的置信水平为 1-α 的单侧置信下限为 $\dfrac{(n-1)S^2}{\chi_\alpha^2(n-1)}$

例5 从一批灯泡中随机地取5只作寿命试验，测得寿命(以h计)为

1050　1100　1120　1250　1280

设灯泡寿命服从正态分布. 求灯泡寿命平均值的置信水平为0.95的单侧置信下限.

解 由题可知，μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限为

$$\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$$

$1-\alpha=0.95, n=5,$

查表得 $t_{\alpha}(n-1)=t_{0.05}(4)=2.1318,$

计算得 $\bar{x}=1160, s^2=9950$

则 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限为

$$1160-\frac{\sqrt{9950}}{\sqrt{5}}\times 2.1318=1065$$

THE END