院系________ 班级________ 学号________ 姓名________

请在所附答题纸上空出密封位置。并填写试卷序号、班级、学号和姓名

密 封 线

南京大学数学系 2021 – 2022 学年第 2 学期

线性代数（第一层次）期中试卷

考试日期：2022年05月08日（120分钟）

题 号	一	二	三	四	五	六	合 计	阅卷教师
得 分								

一、简答与计算（本题共5小题，每小题8分，共40分）

1、计算$A_{31}-2A_{32}+2A_{34}$，此处A_{ij}为$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}$的代数余子式。

解答：$A_{31}-2A_{32}+2A_{34}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\1&-2&0&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=-76$

2、用克莱姆法则求解线性方程组$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&5\\1&3^2&5^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

解答：$D=16$，$D_1=-8$，$D_2=32$，$D_3=-8$，$x_1=\dfrac{D_1}{D}=-\dfrac{1}{2}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=2$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=-\dfrac{1}{2}$，方程组的解为$(-\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2})^T$。

3、$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$是实向量，计算$y=Ax=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T$与A^TA，此处

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta&0\\0&-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \sin\theta=\frac{x_3}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}},\quad \cos\theta=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}}$$

解答：$y=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\cos\theta+x_3\sin\theta\\-x_2\sin\theta+x_3\cos\theta\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\\sqrt{x_2^2+x_3^2}\\0\\x_4\end{pmatrix}$

4、$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$A^k=0$，$k>1$是正整数，计算$|E+3A|$。

解答：A只有特征值0，$E+3A$只有特征值1，为n重，$\left|E+3A\right|=1^n=1$。

5、$A=\begin{pmatrix}a&-1&a\\5&-3&b\\-1&0&-2\end{pmatrix}$有特征值$\lambda_1=-1$（3重），计算$a,b$。

解答：$(-1)+(-1)+(-1)=a-5$，$(-1)(-1)(-1)=|A|=3a-10+b$，$a=2$，$b=3$。

二、（12分）

计算矩阵X使得$2X+XA=B$，此处$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\-1&0&-2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&-1&2\end{pmatrix}$

解答：$X(2E+A)=B$，$X=B(2E+A)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{7}{2}\\1&1&4\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$。

三、（12分）

（1）计算$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的所有极大线性无关组（6分）；（2）计算$Ax=0$的基础解系（基本解组）（6分）。

$$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5)=\begin{pmatrix}2&-3&-2&1&1\\1&8&6&-3&0\\1&-11&-8&4&1\\0&19&14&-7&-1\end{pmatrix}$$

解答：（1）对A进行初等行变换，得行简化矩阵$\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{19}&-\frac{1}{19}&\frac{8}{19}\\0&1&\frac{14}{19}&-\frac{7}{19}&-\frac{1}{19}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，极大线性无关组向量个数为2，为$\alpha_1$，$\alpha_2$；$\alpha_1$，$\alpha_3$；$\alpha_1$，$\alpha_4$；$\alpha_1$，$\alpha_5$；$\alpha_2$，$\alpha_3$；$\alpha_2$，$\alpha_4$；$\alpha_2$，$\alpha_5$；$\alpha_3$，$\alpha_5$；$\alpha_4$，$\alpha_5$。

(2)$\alpha_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{19}\\-\frac{14}{19}\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{19}\\\frac{7}{19}\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-\frac{8}{19}\\\frac{1}{19}\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，基础解系为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，$k_1$，$k_2$，$k_3\in\mathbb{R}$。

四、(12分)

$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)$为$m\times n$矩阵，$\alpha_3,\cdots,\alpha_n$线性无关，$\alpha_1=\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_2=\alpha_4+\alpha_5$，$\beta=-2\alpha_1+3\alpha_2$，计算$Ax=\beta$通解。

解答：$\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4=0$得到$\eta_1=(1,0,-1,-1,0\cdots,0)^T$，$\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5=0$得到$\eta_2=(0,1,0,-1$fi $-$ 1fi$0\cdots,0)^T$，此为$Ax=0$基本解组。$\beta=(-2)\alpha_1+3\alpha_2=(-2)(\alpha_3+\alpha_4)+3(\alpha_4+\alpha_5)=-2\alpha_3+\alpha_4+3\alpha_5$，$Ax=\beta$有特解$\eta^*=(0,0,-2,1,3,0,\cdots,0)^T$。

五、(12分)

$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)$可逆，$B=A^{-1}$，$B^T=(\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_n)$。试计算$C=\alpha_1\beta_1^T+\alpha_2\beta_2^T$的特征值与特征向量。

解答：C特征值为1和0，特征值1对应的特征向量为α_1、α_2，特征值0对应的特征向量为α_3、$\cdots$、α_n。

六、(12分)

$span\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r\}=\{c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_r\eta_r|\ c_i\in\mathbb{C},\ 1\le i\le r\}$，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$线性无关，$\gamma_j=c_{1j}\eta_1+c_{2j}\eta_2+\cdots+c_{rj}\eta_r$（$1\le j\le r$）.证明：（1）$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$线性无关当且仅当$C=(c_{ij})_{r\times r}$可逆；（2）$span\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r\}=span\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r\}$当且仅当$C=(c_{ij})_{r\times r}$可逆。

解答：略