南京大学线性代数期末试卷参考答案 2021年1月

一.简答题（每小题7分，共4题，计28分）

1. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，且$A^2B+A=B+E$，求矩阵$B$及行列式$|B|$.

解：由$A^2B+A=B+E$可知$B=-(A+E)^{-1}=-\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}^{-1}=-\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1/2&0\\1/2&0&1\end{pmatrix}$，$|B|=-1/4$.

2.设$\alpha=(1,1,-1)^T$是矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量，求常数$a,b$的值.

解：$A\alpha=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\a+2\\b+1\end{pmatrix}$，由$A\alpha$与$\alpha$线性相关，得$\dfrac{-1}{1}=\dfrac{a+2}{1}=\dfrac{b+1}{-1}$，解得$a=-3,b=0$.

3. α为n维实单位列向量，$A=E-k\alpha\alpha^T$为正定矩阵，求实数k的取值范围.

解：由$r(E-A)=1$可知1为A的$n-1$重特征值，又因为$A\alpha=(1-k)\alpha$，所以$1-k$为A的1重特征值. 由A正定知$1-k>0$即$k<1$.

4. 设$A=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b&0&0\\0&c&0\\0&0&a\end{pmatrix}$, 证明$A$与$B$合同, 即存在可逆矩阵$P$，使得$B=P^TAP$.

解：依次交换A的第1,2行，第2,3行，同时做相应的列操作，可将A合同变换至B, 即取$P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, 可使$B=P^TAP$.

或者根据

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

也可立即得到$AP=PB$. (注：此题P不唯一)

二.(本题12分)已知二次型$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$经正交变换可化为标准形$f=2y_1^2+y_3^2$, 试求$a,b$.

解：由$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}$, 可知$|A|=2ab-a^2-b^2=0, |A-E|=2ab=0$, 因此$a=b=0$.

三.(本题12分) 设3阶实对称矩阵A的各行元素之和都为2, 向量$\alpha_1=(1,0,-1)^T, \alpha_2=(1,-1,0)^T$为线性方程组$Ax=0$的两个解.（1）求$A$的全部特征值与特征向量;（2）求正交矩阵$P$，使得$P^TAP$为对角阵;（3）求矩阵$A$.

解:（1）由$A(1,1,1)^T=2(1,1,1)^T$, 可知$\lambda=2$是A的一个特征值, 且$\alpha_3=(1,1,1)^T$是A的属于特征值2的特征向量. 再由$A\alpha_1=0, A\alpha_2=0$知, A的特征值为$0,0,2$. 属于特征值0的全部特征向量为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$, k_1,k_2不全为0. 属于特征值2的全部特征向量形如$k_3\alpha_3$, $k_3\neq0$.

（2）将α_1,α_2正交化并单位化, 可得$\beta_1=(\frac{1}{\sqrt2},0,-\frac{1}{\sqrt2})^T$, $\beta_2=(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6})^T$. 再将$\alpha_3$单位化, 得$\beta_3=(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})^T$. 则

$$P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$$

为正交阵且$P^TAP=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{pmatrix}$.

（3）$A=P\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{pmatrix}P^T=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. (注：此题$P$不唯一, 如能算对$A$, 大致可间接保证第二问$P$的正确性。)

四.(本题12分) 设n阶矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n)$的前$n-1$个列向量线性无关，又$\alpha_n=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}$. 令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$，（1）证明：方程组$Ax=\beta$有无穷多组解．（2）求方程组$Ax=\beta$的通解.

解：(1)因为β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n$线性表示，故方程组$Ax=\beta$有解。又因为$\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n$线性相关，因此$A$的秩小于$n$, 从而齐次方程$Ax=0$有非零解。综上，$Ax=\beta$ 方程组有无穷多解。
(2)$n-1=r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1})\leqslant r(A)<n$, 因此$A$的秩为$n-1$, 又有 $\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}-\alpha_n=0$, 于是 $Ax=\beta$的通解为$(1,1,\ldots,1)^T+k(0,1,\ldots,1,-1)^T$, k为任意实数。

五.(本题12分) 设A为三阶矩阵, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是$A$的三个不同特征值, 对应的特征向量分别为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 令$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.（1）证明: $\beta,A\beta,A^2\beta$线性无关.（2）若$A^3\beta=A\beta$, 求秩$r(A-E)$及行列式$|A+2E|$.

（1）由$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$及$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i\,(i=1,2,3)$, 可知

$$A\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3,\quad A^2\beta=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3.$$

设$k_1\beta+k_2A\beta+k_3A^2\beta=0$, 将上式代入整理可得

$$(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2)\alpha_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2)\alpha_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2)\alpha_3=0.$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三个不同特征值对应的特征向量, 必线性无关, 于是

$$\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=0.$$

其系数行列式非零, 因此必有$k_1=k_2=k_3=0$, 故$\beta,A\beta,A^2\beta$线性无关.

（2）解法一：由$A^3\beta=A\beta$可得

$$A(\beta,A\beta,A^2\beta)=(A\beta,A^2\beta,A^3\beta)=(A\beta,A^2\beta,A\beta)=(\beta,A\beta,A^2\beta)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

记$P=(\beta,A\beta,A^2\beta)$, P可逆且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=B.$$

即A与B相似，因此$r(A-E)=r(B-E)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=2$. $|A+2E|=|B+2E|=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=6$.

解法二：由$(A^3-A)\beta=0$, 可知

$$(\lambda_1^3-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda_2^3-\lambda_2)\alpha_2+(\lambda_3^3-\lambda_3)\alpha_3=0,$$

可知$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$均满足方程$\lambda^3-\lambda=0$. 又因为$A$的特征值各不相同，因此只能分别是$0,\pm1$, 从而$r(A-E)=2$及行列式$|A+2E|=(0+2)\cdot(-1+2)\cdot(1+2)=6$.

六.(本题12分) 已知线性空间$\mathbb{R}^3$的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为$P$,且

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}2&1&2\\4&0&3\\3&-2&2\end{pmatrix}.$$

试求:(1)基β_1,β_2,β_3; (2)在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下具有相同坐标的全部向量.

解:(1)从基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为$P$,即

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\4&0&3\\3&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1&5\\11&-2&8\\10&1&8\end{pmatrix},$$

因此基$\beta_1=\begin{pmatrix}6\\11\\10\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}5\\8\\8\end{pmatrix}$.

(2)设所求向量的坐标为x,则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)x=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)Px,$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,所以$Px=x$,即$(P-E)x=0$. 经行变换,

$$P-E=\begin{pmatrix}1&1&2\\4&-1&3\\3&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得$x=(1,1,-1)^T$,故所求向量为$\alpha=k(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)=k(2,1,3)^T$,其中$k$为任意常数.

七.(本题12分)(1)已知矩阵A的秩$r(A)=1$. 证明:存在非零列向量α和β,使得$A=\alpha\beta^T$.

(2)已知矩阵$A=\alpha_1\beta_1^T+\alpha_2\beta_2^T$,其中列向量$\alpha_1,\alpha_2$线性无关,$\beta_1,\beta_2$也线性无关,证明:$r(A)=2$.

证明:(1)$r(A)=1$说明A的列秩为1,则$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的任意两列线性相关. 取$A$的一个非零列向量记为$\alpha$,则$\alpha_i=b_i\alpha,i=1,2,\cdots n$. 记$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$,因有一$b_i$为1,则$\beta$非零。有$A=\alpha\beta^T$.

(2)解法一:由$A=\alpha_1\beta_1^T+\alpha_2\beta_2^T=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\end{pmatrix}$及线性无关性知,$2=r(\alpha_1,\alpha_2)+r(\beta_1,\beta_2)-2\leqslant r(A)\leqslant r(\alpha_1\beta_1^T)+r(\alpha_2\beta_2^T)=2$. 故$r(A)=2$.

解法二:根据结论:若P行满秩,则$r(AP)=r(A)$. 可知$r(A)=r\left((\alpha_1,\alpha_2)(\beta_1,\beta_2)^T\right)=r(\alpha_1,\alpha_2)=2$.