南京大学大学数学试卷 答案

考试时间 2016.12.28 任课教师__________ 考试成绩__________

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 计算矩阵 $D=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&2&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&x_1&x_2&x_3&x_4\\0&x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{pmatrix}$ 的行列式值 $|D|$.

解：$|D|=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\x_2&x_3&x_4\\x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}=(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3).$

2. 设二次型 $f(x,y,z)=x^2+4y^2+4z^2+2txy-2xz+4yz$ 为正定二次型，求参数 t 的取值范围.

解：该二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&t&-1\\t&4&2\\-1&2&4\end{pmatrix}$.

因为 A 正定，故有 $\begin{vmatrix}1&t\\t&4\end{vmatrix}=4-t^2>0,\begin{vmatrix}1&t&-1\\t&4&2\\-1&2&4\end{vmatrix}=-4t^2-4t+8>0.$

取交集，可得 $-2<t<1$.

3. 解矩阵方程 $XB=C$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$.

解：因为 $|B|\neq 0$，所以 B^{-1} 存在，且 $B^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&1&4\\2&1&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}$，所以 $X=CB^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2&2&8\\4&2&2\\4&5&8\end{pmatrix}$.

4. 已知 A,B 都是 n 阶正交矩阵，且 $|A|+|B|=0$，证明 $|A+B|=0$.
证：因为 A,B 是正交矩阵，故有 $A^T(A+B)B^T=B^T+A^T=(A+B)^T$.
两边取行列式，并把 $|A|=-|B|$ 代入得 $|A+B|=|(A+B)^T|=|A^T||A+B||B^T|=-|A|^2|A+B|$.
移项得 $(1+|A|^2)|A+B|=0$，故 $|A+B|=0$.

二、 (本题12分) 设 A 为3阶实对称矩阵，A 的秩 $\mathrm{r}(A)=2$，且满足条件 $A^3+2A^2=O$，
(1) 求 A 的全部特征值；
(2) 当 k 为何值时，$A+kE$ 为正定矩阵？

解：(1) 设 λ 是 A 的特征值，λ 必满足 $\lambda^3+2\lambda^2=0\Rightarrow\lambda=0,-2$.
因为 A 是对称阵，故 A 必相似于某对角阵 Λ；又因 $r(A)=2$，从而 $r(\Lambda)=2$，
于是，Λ 的对角元素中恰好有两个 -2，一个 0. 据此，A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=0$.
(2) 因为 A 是实对称阵，对任意的 k，有 $A+kE$ 仍是对称阵，故只需 $A+kE$ 的特征值全部为正数即可.
由于 A 的特征值为 -2,-2,0. 所以 $A+kE$ 的特征值为 $-2+k,-2+k,k$.
因此，当 $k>2$ 时，$A+kE$ 的特征值全为正，故为正定矩阵.

三. (本题12分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2 是两个线性无关的向量组，且两组向量的内积 $(\alpha_i,\beta_j)=0$，
$(i=1,2,3,j=1,2)$. 证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 线性无关.

证：设有 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 及 k_1,k_2，使 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3+k_1\beta_1+k_2\beta_2=0$，即 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=-k_1\beta_1-k_2\beta_2$.
因为 $(\alpha_i,\beta_j)=0$，所以有

$$\begin{aligned}(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3) &= (\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3,-k_1\beta_1-k_2\beta_2)\\ &= -\lambda_1k_1(\alpha_1,\beta_1)-\lambda_2k_1(\alpha_2,\beta_1)-\lambda_3k_1(\alpha_3,\beta_1)\\ &\quad -\lambda_1k_2(\alpha_1,\beta_2)-\lambda_2k_2(\alpha_2,\beta_2)-\lambda_3k_2(\alpha_3,\beta_2)=0.\end{aligned}$$

因此得到 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=0$. 又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故有 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，
从而推得 $-k_1\beta_1-k_2\beta_2=0$，由于 β_1,β_2 线性无关，故有 $k_1=k_2=0$，于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 线性无关.

四. (本题12分) 设3阶实对称矩阵 A 的特征值为 -1,1,1，对应于特征值 -1 的向量为 $\alpha_1=(0,1,1)^T$，求 A.

解：设属于特征值 1 的特征向量为 $(a,b,c)^T$，则它与 α_1 正交：即 $0\cdot a+1\cdot b+1\cdot c=0$，也就是 $b+c=0$，
可得基础解系 $\alpha_2=(1,0,0)^T,\alpha_3=(0,1,-1)^T$.
令 $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. 由于 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\1&0&0\\0&1/2&-1/2\end{pmatrix}$.
故 $A=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

五. (本题12分) 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=0$，a_{ki} 的代数余子式 $A_{ki}\neq 0$，求 $Ax=0$ 的通解.

解：因 $|A|=0,A_{ki}\neq 0$，所以矩阵 A 中有非零的 $n-1$ 阶子式存在，于是 $\mathrm{r}(A)=n-1$，
则方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含有的向量个数为 $n-\mathrm{r}(A)=n-(n-1)=1$.
又因为 $a_{j1}A_{k1}+a_{j2}A_{k2}+\cdots+a_{jn}A_{kn}=\begin{cases}|A|=0 & j=k,\\ 0 & j\neq k.\end{cases}$
所以 $(A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn})^T$ 为 $Ax=0$ 的非零解向量，可作为基础解系，
故方程组 $Ax=0$ 的通解为 $x=c\begin{pmatrix}A_{k1}\\A_{k_2}\\\vdots\\A_{kn}\end{pmatrix}$，$(c\in R)$.

六. (本题12分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\0&-2&2&0\end{pmatrix}$，证明与 A 的行向量正交的向量集合 V 对于向量的加法与数量乘法构成一个线性空间，并求 V 的维数和一个基.

解：记 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}$，则若 $\beta,\nu\in V$，则有 $(\alpha_1,\beta)=0,(\alpha_2,\beta)=0,(\alpha_1,\nu)=0,(\alpha_2,\nu)=0$，
于是 $(\alpha_1,\beta+\nu)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_1,\nu)=0+0=0$，同理 $(\alpha_2,\beta+\nu)=0$，从而 $\beta+\nu\in V$.
又 $(\alpha_1,k\beta)=k(\alpha_1,\beta)=0,(\alpha_2,k\beta)=k(\alpha_2,\beta)=0$，即 $k\beta\in V$，因此，V 对于两种运算封闭，
易证对8条性质成立，故 V 是线性空间.
设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in V$，由 $(\alpha_1,\alpha)=0,(\alpha_2,\alpha)=0$，得 $\begin{cases}x_2-x_3=0,\\-2x_2+2x_3=0.\end{cases}$ 又得基础解系为：
$\eta_1=(1,0,0,0),\eta_2=(0,1,1,0),\eta_3=(0,0,0,1)$，所以 V 是 3 维向量，η_1,η_2,η_3 是一个基.

七. (本题12分) 在某国每年有比例为 p 的农村居民移居城镇，有比例为 q 的城镇居民移居农村. 假设该国总人口数不变，且上述人口迁移的规律也不变，把 n 年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为 x_n 和 y_n $(x_n+y_n=1)$.
(1)求关系式$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$中的矩阵$A$；(2)设目前农村人口与城镇人口相等，即$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}$，求$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

解：(1) 由题设，有 $\begin{cases}x_{n+1}=(1-p)x_n+qy_n\\ y_{n+1}=px_n+(1-q)y_n\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-p&q\\p&1-q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$，故 $A=\begin{pmatrix}1-p&q\\p&1-q\end{pmatrix}$.
(2) $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 可得 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}=\cdots=A^n\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}A^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，

再求 A 的特征值和特征向量，易求得 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=1-p-q$.
对应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}q\\p\end{pmatrix}$；对应于 $\lambda_2=1-p-q$ 的特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
令 $P=(\xi_1,\xi_2)$，则 P 可逆，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&\omega\end{pmatrix}$，其中 $\omega=1-p-q$，因此，
$A=P\begin{pmatrix}1&0\\0&\omega\end{pmatrix}P^{-1}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0\\0&\omega^n\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2(p+q)}\begin{pmatrix}2q-(q-p)\omega^n\\2p+(q-p)\omega^n\end{pmatrix}$.