南京大学大学数学试卷 答案

考试时间 2019.1.2 任课教师________ 考试成绩________

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 设方阵A满足 $aA^2+bA+cE=0(c\neq 0)$，判断 A 是否可逆？若A可逆，求 A^{-1}.

解：由 $aA^2+bA+cE=0$ 及 $c\neq 0$ 可得：$A(-\frac{a}{c}A-\frac{b}{c}E)=E$，

故方阵 A 可逆，而且 $A^{-1}=-\frac{a}{c}A-\frac{b}{c}E$.

2. 设实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 是正定二次型，试判断 $g(x)=x^{\mathrm{T}}A^kx$（k 为正整数）是否为正定二次型？

解：因为实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 是正定二次型，所以A是正定矩阵，从而A对称，故A^k也对称.

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值，则 $\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k$ 是 A^k 的全部特征值，

由 A 正定知，$\lambda_i>0(1\le i\le n)$，从而 $\lambda_i^k>0(1\le i\le n)$，故 A^k 正定，即$g(x)=x^{\mathrm{T}}A^kx$为正定二次型.

解法二：$k=1$ 时结论显然，下面证明 $k>=2$ 时结论成立.

因为 A 对称正定，对正整数 $s\ge 1$，易知 A^s 可逆，且 $(A^s)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^s=A^s$，故 A^s 对称可逆.

当 k 为偶数时，令 $k=2s$，则有 $A^k=(A^s)^{\mathrm{T}}E(A^s)$，即 A^k 合同于 E，故 A^k 正定，

故二次型 $g(x)=x^{\mathrm{T}}A^kx$ 正定.

当 k 为奇数时，令 $k=2s+1$，则有 $A^k=(A^s)^{\mathrm{T}}A(A^s)$，即 A^k 合同于 A，从而也合同于 E，

故 A^k 正定，二次型 $g(x)=x^{\mathrm{T}}A^kx$ 也正定.

3. 设矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=2$，求 x,y 的值，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&-3&x\\0&1&2&6&3\\5&4&3&-1&y\end{pmatrix}$.

解：$A\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&6&3\\0&0&0&0&x\\0&0&0&0&y-2\end{pmatrix}$，且 $\mathrm{r}(A)=2$，故有 $x=0,y=2$.

解法二：显然矩阵 A 中有2阶子式不为零，例如左上角的一个二阶子式：$D_2=\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}=-1\neq 0$.

为使 $\mathrm{r}(A)=2$，必须使A的所有三阶子式都等于零，特别是应使下列含x和y的三阶子式

$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-3&x\\2&6&3\end{vmatrix}=-4x=0,\ \begin{vmatrix}1&1&1\\2&6&3\\3&-1&y\end{vmatrix}=4y-8=0$，即 $x=0,y=2$.

4. 设 A 是正交矩阵，证明 A 的元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=\pm a_{ij}$.

证：$AA^*=|A|E=A^*A$，因为 A 是正交矩阵，所以，$|A|=\pm 1$，$A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$.

故 $A^*=|A|A^{-1}=\pm A^{-1}=\pm A^{\mathrm{T}}$，即 $A_{ij}=\pm a_{ij}$.

二、 (本题12分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}$，其行列式 $|A|=-1$，又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，求 a,b,c 和 λ_0 的值.

解：由题设有 $A^*\alpha=\lambda_0\alpha$，因在此式两端同时左乘$A$，利用 $AA^*=|A|E$ 得，$AA^*\alpha=\lambda_0A\alpha$，

$|A|\alpha=\lambda_0A\alpha$，即 $\lambda_0A\alpha=-\alpha$，亦即：$\lambda_0\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

于是有$\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1\\\lambda_0(-5-b+3)=1\\\lambda_0(-1+c-a)=-1\end{cases}\Rightarrow\lambda_0=1,c=a,b=-3.$ 又因为$|A|=\begin{vmatrix}a&-1&a\\5&-3&3\\1-a&0&-a\end{vmatrix}=a-3=-1$，

故 $a=c=2, b=-3$.

三. (本题12分) 设 A, B 都是 n 阶实对称矩阵，证明：存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=B$ 的充分必要条件是 A 与 B 有相同的特征值.

证：必要性：由题设可知 A 与 B 相似，所以 A 与 B 有相同的特征值.

充分性：设 A 与 B 有相同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，

因为 A, B 均为实对称矩阵，故存在正交矩阵 Q_1, Q_2，使得

$Q_1^{-1}AQ_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，$Q_2^{-1}BQ_2 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，

于是，$Q_1^{-1}AQ_1 = Q_2^{-1}BQ_2$，则有 $B = Q_2Q_1^{-1}AQ_1Q_2^{-1} = (Q_1Q_2^{-1})^{-1}A(Q_1Q_2^{-1})$.

令 $Q = Q_1Q_2^{-1}$，因为 $Q^{\mathrm{T}} = (Q_1Q_2^{-1})^{\mathrm{T}}(Q_1Q_2^{-1}) = (Q_1Q_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(Q_1Q_2^{-1}) = Q_2Q_1^{\mathrm{T}}Q_1Q_2^{-1} = E$，

故 Q 为正交矩阵. 即存在正交矩阵 $Q = Q_1Q_2^{-1}$，使得 $Q^{-1}AQ = B$.

四. (本题12分) 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1,2,3$，且对应于特征值 1 和 2 的特征向量分别为 $\alpha_1 = (-1,-1,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$，(1) 求 A 的属于特征值 3 的特征向量；(2) 求矩阵 A.

解：(1) 对应于特征值3的特征向量 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ 与 α_1, α_2 正交，得方程组$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$，

解得：$\alpha_3 = k(1,0,1)^{\mathrm{T}}, k \neq 0$.

(2) 令 $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，故 $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 13 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 13 \end{pmatrix}$.

五. (本题12分) 设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使得 $A^k = O$，(1) 求 $|A+E|$ 的值；(2) 求 A 相似于对角矩阵的充要条件.

解：(1) 设 λ 是 A 的特征值，则 λ^k 是 A^k 的特征值，

因为 $A^k = O$，零矩阵的特征值只能是0，故 $\lambda^k = 0$，从而 $\lambda = 0$，即 A 的所有特征值均为0.

所以 $A+E$ 的所有特征值均为1，故 $|A+E| = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$.

(2) 若 A 相似于对角矩阵，则该对角矩阵为零矩阵，因此有 $P^{-1}AP = O \Rightarrow A = POP^{-1} = O$，

反之，若 $A = O$，必有 A 相似于对角矩阵，故 A 相似于对角矩阵的充要条件是 $A = O$.

六. (本题12分) 已知 R^3 的一组基 $\alpha_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$，(1) 由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$；(2) α 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，求 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标.

解：(1) 由题意，有 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

故 $\beta_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, \beta_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \beta_3 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 因为 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $x = (1,2,3)^{\mathrm{T}}$，由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 A，

则 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标 $y = Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

七. (本题12分) 设n阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$，已知矩阵的迹 $\mathrm{tr}(A) = a \neq 0$，试问：矩阵 A 是否能相似于对角矩阵？

证：设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$，

则 $A = \alpha\beta^{\mathrm{T}}, A^2 = (\alpha\beta^{\mathrm{T}})(\alpha\beta^{\mathrm{T}}) = \alpha(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\beta^{\mathrm{T}} = (\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i) \cdot A = aA$.

设 λ 是 A 的特征值，ξ 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则 $A\xi=\lambda\xi, A^2\xi=aA\xi=a\lambda\xi$，
又 $A^2\xi=A\cdot A\xi=A\lambda\xi=\lambda A\xi=\lambda^2\xi$，所以，$a\lambda\xi=\lambda^2\xi$，即 $(\lambda^2-a\lambda)\xi=0$.
因为 $\xi\neq 0$，故 $\lambda^2-a\lambda=0$，$\lambda=0$ 或 $\lambda=a$.
又 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=\mathrm{tr}(A)=a\neq 0$，所以$\lambda=a$是$A$的单特征值，$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$ 是A的$n-1$重特征值.
对于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$，齐次线性方程组 $(0E-A)X=0$ 的系数矩阵的秩为：
$\mathrm{r}(0E-A)=\mathrm{r}(-A)=\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\alpha\beta^{\mathrm{T}})\leq\min\{r(\alpha),r(\beta^{\mathrm{T}})\}=1$.
又 $\mathrm{tr}(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=a\neq 0$，故 $a_i,b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为零，
故 $\mathrm{r}(A)\geq 1$，因此 $\mathrm{r}(0E-A)=1$.
因此矩阵 A 的属于 $n-1$ 重特征值 0 的线性无关的特征向量的个数为 $n-1$，故 A 有 n 个线性无关的特征向量，所以 A 相似于对角矩阵.