1 函数

定理4.1.1 设$|A|=m$，$|B|=n$，那么$\{f|f:A\to B\}$的基数为 n^m，即共有n^m个A到B的函数。

证明 设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$,$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$，那么每一个$f:A\to B$由一张如下的表来规定:

a	a_1	a_2	...	a_m
$f(a)$	b_{i1}	b_{i2}	...	b_{in}

映射个数问题

发表于2016年11月2日由意琦行

已知A是包含m个元素的集合，B是包含n个元素的集合，考虑从A到B的映射个数，单射个数以及满射个数.

分析与解　显然映射个数为n^m，单射个数为$\mathrm{A}_n^m(m \leqslant n)$，下面考虑当$m \geqslant n$时的满射个数.

设$S(m,n)$是把m个元素划分成n个非空子集的方法，考虑这些非空子集分别对应B中的各个元素，那么容易得到满射个数为$n! \cdot S(m,n)$．因此问题的关键是求$S(m,n)$.

将m个元素的集合划分为n个非空子集有两种方式：
方式一　最后一个元素单独构成一个集合，此时方法数为$S(m-1,n-1)\cdot 1$；
方式二　最后一个元素不单独构成一个集合，此时方法数为$S(m-1,n)\cdot n$.

这样我们就得到了递推公式

$$S(m,n)=S(m-1,n-1)+nS(m-1,n),$$

且容易得到递推的初值$S(m,1)=1$，$S(m,m)=1$．这样就得到了

$$S(m,n)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k(n-k)^m.$$

思考与总结　题中的$S(m,n)$即第二类Stirling数，并没有显式的表达式；第一类Stirling数是m个不同的元素构成n个圆排列的数目，记作$s(m,n)$，其递推公式为

$$s(m,n)=s(m-1,n-1)+(n-1)s(m-1,n),$$

初值为$s(0,0)=1$，$s(n,0)=0$，$s(n,n)=1$.

2 图

假设一个图有**n**个顶点，那么如果任意两个顶点之间都有边的话，该图就称为完全图

完全图**K_n(n≥1)**的点连通度为**n-1**；非连通图的点连通度为**0**

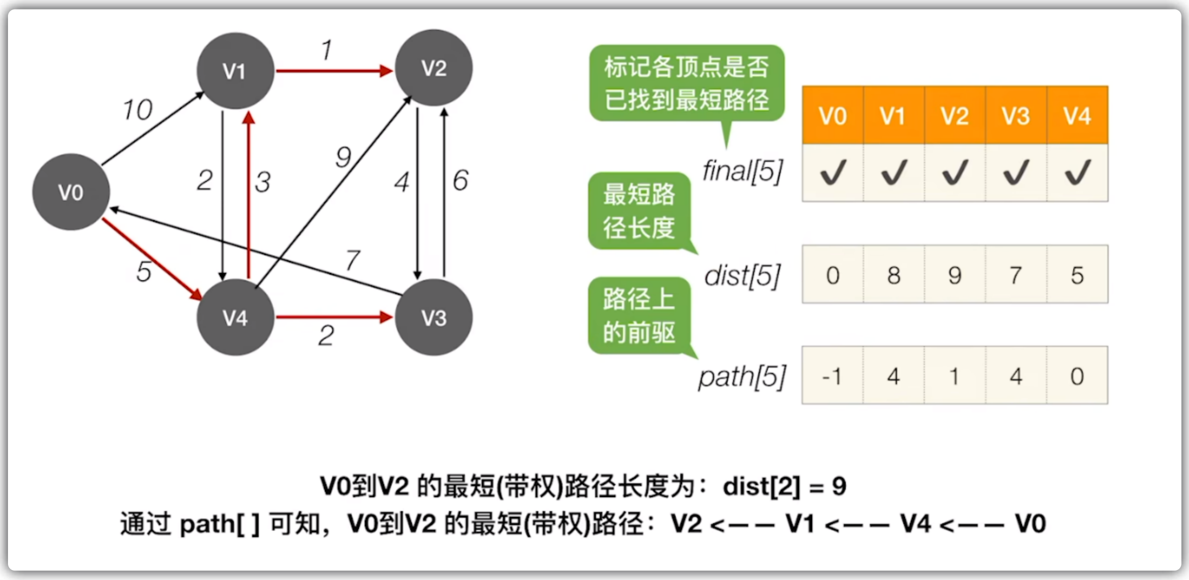
设**D=<V, E>**为一个有向图

- 若**D**的基图是连通图，则称**D**是弱连通图，简称为连通图
- 若 **vi, vj∈V**，**vi→vj**与**vj→vi**至少成立其一，则称**D**是单向连通图
- 均有**vi <-> vj**，则称**D**是强连通图
- 由定义可知，强连通图一定是单向连通图，单向连通图一定是弱连通图

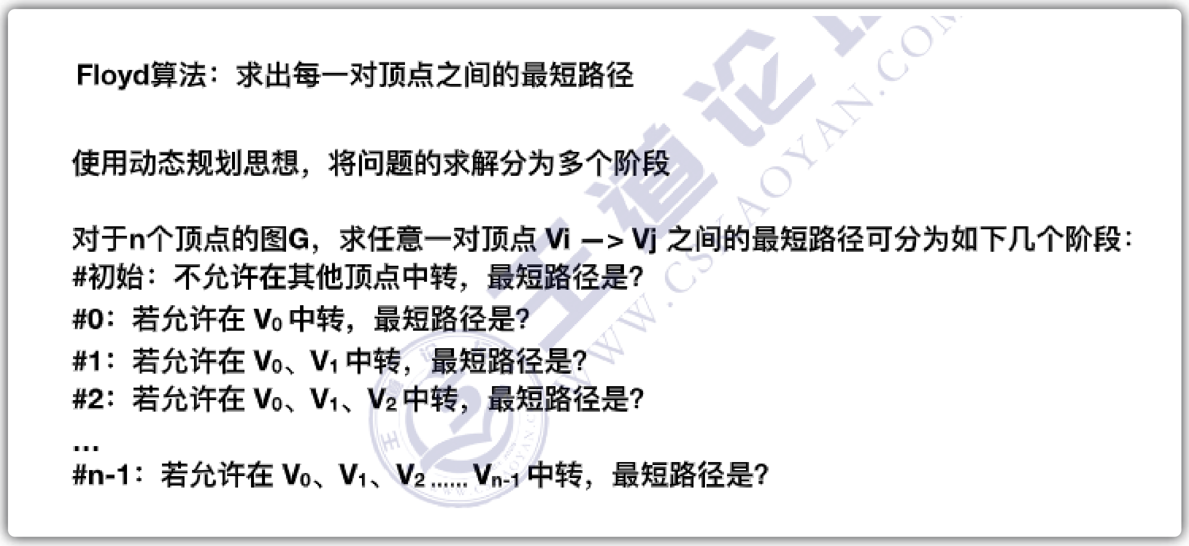
- D是强连通图当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路
- D是单向连通图当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路

若无向图G中恰有两个奇度顶点，则这两个奇度顶点必连通

Dijkstra算法



Floyd算法



若G是简单二部图，V_1中每个顶点均与V_2中所有顶点相邻，则称G为完全二部图，记为$K_{r,s}$，其中$r=|V_1|,s=|V_2|$

n阶零图为二部图

一个无向图G=<V,E>是二部图当且仅当G中无奇数长度的回路

设G = <V1 ,V2 ,E>为二部图，$M \subset G$，如果M中任何两条边都没有公共端点，称M为G的一个匹配

- 如果V_1中任一顶点均为匹配M中边的端点， 那么称M为V_1-完全匹配
- 如果V_2中任一顶点均为匹配M中边的端点，那么称M为V_2 -完全匹配
- 若M既是V_1 -完全匹配又是V_2 -完全匹配，则称M为G的完全匹配
- 最大匹配总是存在但未必唯一

M为G的最大匹配当且仅当不存在相对于M的交替链

3 欧拉图和哈密顿图

3.1 欧拉图

通过图（无向图或有向图）中所有边一次且仅一次（并行遍图中所有顶点）的通路称为欧拉通路

具有欧拉回路的图称为欧拉图；具有欧拉通路而无欧拉回路的图称为半欧拉图

> 在欧拉通路或欧拉回路中，顶点可以重复出现，边不可以重复出现

判别定理

- 无向图G是欧拉图当且仅当G是连通图，且G中没有奇度顶点
- 连通非欧拉图G存在欧拉通路当且仅当G中只有两个顶点度数为奇数

给定G是一个无孤立顶点的有向图，若存在一条单向通路(回路)，经过图中每边一次且仅一次，则称此单向通路(回路)为该图的一条单向欧拉通路(回路)

具有单向欧拉回路的图称为欧拉图

欧拉图G是以v为始点的随机欧拉图当且仅当G中任一回路均包含v

3.2 哈密顿图

经过图（有向图或无向图）中所有顶点一次且仅一次的通路称为哈密顿通路

具有哈密顿回路的图称为哈密顿图，具有哈密顿通路但不具有哈密顿回路的图称为半哈密顿图

定理11.6 设无向图$G=\langle V,E\rangle$是哈密顿图，对于V的任意的非空真子集V_1，均有

$$p(G-V_1)\le |V_1|$$

其中，$p(G-V_1)$为$G-V_1$的连通分支数

- 推论 设无向图$G=\langle V,E\rangle$是半哈密顿图，对于任意的$V_1\subset V$且$V_1\ne\varnothing$均有
- $p(G-V_1)\le |V_1|+1$

如果不满足该条件，则一定不是哈密顿图，满足该条件，也不一定是哈密顿图；由哈密顿图可得该结论，但由该结论无法证明是哈密顿图

定理11.7 设G是n阶无向简单图，若对于G中任意不相邻的顶点v_i,v_j，均有 $d(v_i)+d(v_j)\geq n-1$,则G中存在哈密顿通路。

设G为n(n≥3)阶无向简单图，若对于G中任意两个不相邻的顶点v_i,v_j，均有
$d(v_i)+d(v_j)\geq n$ · (11.2)
则G中存在哈密顿回路，从而G为哈密顿图

只能证明是哈密顿图，而不能证明不是哈密顿图

邮递员问题（奇偶点作业法）

根据上面的讨论及定理，我们可以设计出求带权非欧拉连通图 G 的最优环游的算法，即**奇偶点图上作业法。**

① 把 G 中所有奇点配对，将每对奇点之间的一条路上的每边改为二重边，得到一个新图 G_1 ，新图 G_1 中没有奇点，即 G_1 为多重欧拉图。

② 若 G_1 中每一对顶点之间有多于 2 条边连接，则去掉其中的偶数条边，直到每一对相邻顶点至多由 2 条边连接，得到图 G_2 。

③ 检查 G_2 的每一个回路 C ，若 C 上重复边的权和超过此圈权和的一半，则把其中的重边改为单边，单边改为重边。直到所有回路都复合要求，得到图 G_3 。

④ G_3 为对应 G 的欧拉回路，即为最优解。

4 树

连通而不含简单回路的无向图称为无向树，简称树，常用**T**表示树

- **T**中无简单回路且**n** = **m+1**
- **T**是连通的且**T**中每条边都是桥

在顶点给定的无向图中

- 树是边数最多的无简单回路的图
- 树是边数最少的连通图

设**T**是**n**（**n≥2**）阶有向树，如果有一个顶点的入度为**0**，其余顶点的入度均为**1**，则称此有向树为根树

若**T**是**m**元正则树，且所有树叶的层数相同，都等于树高，则称**T**为**m**元完全正则树

(i) n个顶点，则有$i=(n-1)/m$个分支点和$l=[(m-1)n+1]/m$个树叶；

(ii) i个分支点，则有$n=mi+1$个顶点和$l=(m-1)i+1$个树叶；

(iii) l个树叶，则有$n=(ml-1)/(m-1)$个顶点和$i=(l-1)/(m-1)$个分支点。