线性代数期中试卷　答案　(2019.11.16)

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\1&2&3&4\\-1&3&1&0\\1&2&1&3\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}0&-1&2&-1\\0&0&2&1\\0&5&2&3\\1&2&1&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&2&-1\\0&2&1\\5&2&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&2&-1\\0&2&1\\0&12&-2\end{vmatrix}=-16.$

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$，求矩阵 $B=\begin{pmatrix}M_{11}&M_{21}&M_{31}\\M_{12}&M_{22}&M_{32}\\M_{13}&M_{23}&M_{33}\end{pmatrix}$，其中 M_{ij}为行列式$|A|$的ij元素的余子式.

解：$|A|=8\neq 0$, 故 $A^*=|A|A^{-1}=8\begin{pmatrix}-2&1&0\\3/2&-1/2&0\\0&0&-1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16&8&0\\12&-4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

于是 $B=\begin{pmatrix}A_{11}&-A_{21}&A_{31}\\-A_{12}&A_{22}&-A_{32}\\A_{13}&-A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16&-8&0\\-12&-4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

解法二：$M_{11}=-16, M_{21}=-8, M_{31}=0, M_{12}=-12, M_{22}=-4, M_{32}=0, M_{13}=M_{23}=0, M_{33}=-2$

故 $B=\begin{pmatrix}-16&-8&0\\-12&-4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

3. 已知 $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&4\\1&-2&3\\-2&1&-6\end{pmatrix}$，求 $(E+A)^{-1}$.

解：$(E+A)^{-1}=(A(E+A^{-1}))^{-1}=(E+A^{-1})^{-1}A^{-1}$.

$(E+A^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&4\\1&-1&3\\-2&1&-5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&9&7\\-1&-7&-5\\-1&-5&-4\end{pmatrix}$,

故 $(E+A)^{-1}=\begin{pmatrix}2&9&7\\-1&-7&-5\\-1&-5&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&4\\1&-2&3\\-2&1&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-9&-7\\1&8&5\\1&5&5\end{pmatrix}$.

解法二：$(E+A)^{-1}=(A(E+A^{-1}))^{-1}=(E+A^{-1})^{-1}A^{-1}$，即解矩阵方程：$(E+A^{-1})X=A^{-1}$.

$(E+A^{-1}|A^{-1})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&1&4&2&1&4\\1&-1&3&1&-2&3\\-2&1&-5&-2&1&-6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-9&-7\\0&1&0&1&8&5\\0&0&1&1&5&5\end{array}\right)$.

故 $(E+A)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-9&-7\\1&8&5\\1&5&5\end{pmatrix}$.

解法三：$A=(A^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&4\\1&-2&3\\-2&1&-6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3/2&5/3&11/6\\0&-2/3&-1/3\\-1/2&-2/3&-5/6\end{pmatrix}$,

故 $(E+A)^{-1}=\begin{pmatrix}5/2&5/3&11/6\\0&1/3&-1/3\\-1/2&-2/3&1/6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-9&-7\\1&8&5\\1&5&5\end{pmatrix}$.

4. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), B=(-3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,-2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3), |B|=16$，求 $|A+B|$.

解：$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&1&-2\\-3&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}=AC$，易知 $|C|=8, |B|=|AC|=|A|\cdot|C|=16$，故 $|A|=2$.

于是 $|A+B|=|A(E+C)|=|A|\cdot|E+C|=2\begin{vmatrix}1&1&-2\\-3&0&1\\1&2&0\end{vmatrix}=22.$

解法二：$|B|=|-3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,-\alpha_2+3\alpha_3|=|-8\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2,-\alpha_2+3\alpha_3|=8|A|=16$，故$|A|=2.$
$|A+B|=|\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_3,-2\alpha_1+\alpha_2|=|-5.5\alpha_1,2\alpha_3,\alpha_2|=11|A|=22.$

解法三：$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&1&-2\\-3&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}=AC$，则 $A=BC^{-1}=B(\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1&-3&-1\\-2&2&6\\-5&1&3\end{pmatrix})$

$|A+B|=|B(C^{-1}+E)|=|B|\cdot\begin{vmatrix}7/8&-3/8&-1/8\\-2/8&10/8&6/8\\-5/8&1/8&11/8\end{vmatrix}=16\times\frac{11}{8}=22.$

5. 设矩阵 $A,B\in\mathrm{R}^{m\times n}$，证明 $\mathrm{r}(AA^{\mathrm{T}}+BB^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A,B)$.

证：$(AA^T+BB^T)=(A,B)\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}$.

若 x 满足 $\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x=\theta$，则有 $(AA^T+BB^T)x=(A,B)\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x=\theta$.

若 x 满足 $(AA^T+BB^T)x=\theta$，令 $y=\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x$，则有 $x^T(AA^T+BB^T)x=y^Ty=0$，

故 $y=\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x=\theta$，从而 $(AA^T+BB^T)x=\theta$ 与 $\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x=\theta$ 同解.

于是 $r(N(AA^T+BB^T))=r(N\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix})$，进一步有 $r(AA^T+BB^T)=r\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}=r(A,B)$.

二.(15分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&-3&5\\-2&1&-3\\-1&-7&9\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}4\\-3\\6\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}3\\s\\2.4\end{pmatrix}$，其中 s 为参数.

(1) 解方程组 $Ax=\beta$； (2) 令 $B=\begin{pmatrix}A&\beta\\\gamma^{\mathrm{T}}&3\end{pmatrix}$，解方程组 $By=\theta$.

解：(1) $(A,\beta)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&5&4\\0&-5&7&5\\0&-10&14&10\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&4/5&1\\0&1&-7/5&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$,

得一个特解为：$\eta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，齐次方程组的基础解系为：$\xi=\begin{pmatrix}-4/5\\7/5\\1\end{pmatrix}$，故通解为：$\eta+k\xi,\ k\in R.$

(2) 利用(1)的计算结果，有 $B\to\begin{pmatrix}1&0&4/5&1\\0&1&-7/5&-1\\0&0&0&0\\3&s&2.4&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&4/5&1\\0&1&-7/5&-1\\0&0&s&5s/7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

当 $s=0$ 时，$B\to\begin{pmatrix}1&0&4/5&1\\0&1&-7/5&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}-4/5\\7/5\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$,

故通解为：$k_1\xi_1+k_2\xi_2,\ k_1,k_2\in R.$

当 $s\neq0$ 时，$B\to\begin{pmatrix}1&0&0&3/7\\0&1&0&0\\0&0&1&5/7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系：$\xi_3=\begin{pmatrix}-3/7\\0\\-5/7\\1\end{pmatrix}$，通解为：$k_3\xi_3,\ k_3\in R.$

(2) 解法二：利用(1) 的过程，$(A,\beta)y=\theta$ 可得通解 $y=k_1\xi_1+k_2\xi_2$，其中 $\xi_1=\begin{pmatrix}-4/5\\7/5\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$,

代入 B 的最后一行 $(\gamma^T,3)y=0$ 计算后得到 $\frac{7}{5}sk_1+sk_2=0$，

当 $s=0$ 时，等式恒成立，故通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2,\ k_1,k_2\in R$.

当 $s\neq 0$ 时，$k_1=-\dfrac{5}{7}k_2$，故通解为 $k_2(-\dfrac{5}{7}\xi_1+\xi_2)=k_2\begin{pmatrix}-3/7\\0\\-5/7\\1\end{pmatrix}$，$k_2\in R$.

三. (10分) 设 n 阶矩阵 A 满足 $(A^*)^*=O$，其中 $(A^*)^*$ 是 A 的伴随矩阵 A^* 的伴随矩阵，证明 $|A|=0$.

证：反证法，设$|A|\neq 0$，则有 $A^*=|A|A^{-1},|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，

进一步有 $(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-2}A$.

因为 $(A^*)^*=O$，故 $|A|^{n-2}A=O$，从而 $A=O$，得出 $|A|=0$ 矛盾，故 $|A|=0$.

证法二：$|A|AA^*A^{**}=|A|^2A^{**}=|A|^2O=O$，

$|A|AA^*A^{**}=|A|\cdot|A^*|A=|AA^*|A=|\ |A|E\ |A=|A|^nA$，

故 $|A|^nA=O$，于是或者 $|A|=0$，或者 $A=O$，从而也有 $|A|=0$.

证法三：$AA^*=|A|E$，两边取行列式得 $|A|\cdot|A^*|=|A|^n$，同理有 $|A^*|\cdot|A^{**}|=|A^*|^n$.

因为 $A^{**}=O$，故 $|A^*|^n=|A^*|\cdot|O|=0$，于是 $|A^*|=0$，进一步 $|A|^n=|A|\cdot|A^*|=0$，最后有 $|A|=0$.

四.(15分) 设两个向量组 $A:\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\4\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\8\\6\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\2\end{pmatrix}$ 和 $B:\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\-5\\2\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}-3\\7\\12\\-5\end{pmatrix}$.

(1) 分别求向量组 A 的一个极大无关组和向量组 B 的一个极大无关组；

(2) 找一个向量 γ 使得向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma$ 等价，给出理由.

解：(1) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&1\\0&0&1&-1&0&-1\\0&0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$,

故 A 的一个极大无关组为：α_1,α_3，$A\cup B$ 的一个极大无关组为：$\alpha_1,\alpha_3,\beta_2$.

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&-1\\0&1&-2&0&0&0\\0&0&0&1&2&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$,

故 B 的一个极大无关组为：β_1,β_2，$A\cup B$ 的一个极大无关组为：β_1,β_2,α_1.

(2) A 中加 β_2 可表示 B，B 中加 α_1 可表示 A，故可取 $\gamma=\beta_2+\alpha_1=(4,1,-2,3)^T$，

于是 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma\}$ 等价于 $\{\alpha_1,\alpha_3,\beta_2\}$，等价于 $\{\beta_1,\beta_2,\alpha_1\}$ 等价于 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma\}$.

即添加 γ 后两组向量组等价.

五.(10分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&0\\-5&5&10\end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值和特征向量；　　(2) 计算行列式 $|3E+A^*|$.

解：(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda-1&0\\5&-5&\lambda-10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&2&-2\\\lambda+1&\lambda-1&0\\0&-5&\lambda-10\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda-8)$，

故特征值为：$\lambda_1=-1,\lambda_2=5,\lambda_3=8$.

$\lambda_1=-1$ 时，$\begin{pmatrix}-2&2&-2\\2&-2&0\\5&-5&-11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系:$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，特征向量：$k_1\xi_1,k_1\neq 0$.

$\lambda_2=5$ 时，$\begin{pmatrix}4&2&-2\\2&4&0\\5&-5&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2/3\\0&1&1/3\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系:$\xi_2=\begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\1\end{pmatrix}$，特征向量：$k_2\xi_2,k_2\neq 0$.

$\lambda_3=8$时，$\begin{pmatrix}7&2&-2\\2&7&0\\5&-5&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-14/45\\0&1&4/45\\0&0&0\end{pmatrix}$, 基础解系:$\xi_3=\begin{pmatrix}14/45\\-4/45\\1\end{pmatrix}$，特征向量:$k_3\xi_3,k_3\neq 0$.

(2) $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-40\neq 0$，故 $A^*=|A|A^{-1}=-40A^{-1}$，

$(3E+A^*)\xi_i = 3\xi_i - 40\lambda_i^{-1}\xi_i = (3-40/\lambda_i)\xi_i, i=1,2,3$，故 $3E+A^*$ 有特征值 $\mu_i = 3-40/\lambda_i = 43,-5,-2$，于是 $|3E+A^*| = \mu_1\mu_2\mu_3 = 430.$

(2) 的解法二：$|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -40 \neq 0$，

故 $A^* = |A|A^{-1} = -40A^{-1} = -40\begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 1/20 \\ -1/2 & -1/2 & 1/10 \\ 1/8 & -1/8 & 3/40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 30 & -2 \\ 20 & 20 & -4 \\ -5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$，

于是 $|3E+A^*| = \begin{vmatrix} 13 & 30 & -2 \\ 20 & 23 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 43 & -2 \\ 20 & 43 & -4 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 430.$

(2) 的解法三：$|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -40$，设 $B = A(3E+A^*) = 3A + |A|E = 3A - 40E$，

于是 $|A|\cdot|3E+A^*| = |B| = \begin{vmatrix} -37 & -6 & 6 \\ -6 & -37 & 0 \\ -15 & 15 & -10 \end{vmatrix} = -17200$，故 $|3E+A^*| = -17200/(-40) = 430.$

六.(10**分**) 设 n 阶实矩阵 $A \sim D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}, d_i \in \mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n, f(\lambda) = |\lambda E - A|.$

(1) 证明 $f(d_i) = 0, i=1,2,\cdots,n$；　　(2) 证明 $f(A) = O$.

证：(1) 因为 $A \sim D$，故 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = |\lambda E - D| = (\lambda - d_1)\cdots(\lambda - d_n)$，所以 $f(d_i) = 0.$

(2) $f(A) \sim f(D) = \begin{pmatrix} f(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(d_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(d_n) \end{pmatrix} = O$，故 $f(A) = P^{-1}OP = O.$

(2) 的证法二：因为 $A \sim D$，故有可逆矩阵 P 使得 $A = P^{-1}DP$，且 A 有特征值 $d_1, d_2, \cdots, d_n$，从而 $f(\lambda) = (\lambda - d_1)(\lambda - d_2)\cdots(\lambda - d_n)$. 于是

$$\begin{aligned} f(A) &= (A - d_1E)\cdots(A - d_nE) \\ &= (P^{-1}DP - d_1E)\cdots(p^{-1}DP - d_nE) \\ &= P^{-1}(D - d_1E)P \cdot P^{-1}(D - d_2E)P \cdots P^{-1}(D - d_nE)P \\ &= P^{-1}(D - d_1E)(D - d_2E)\cdots(D - d_nE)P \\ &= P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & d_2 - d_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n - d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 - d_2 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n - d_2 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} d_1 - d_n & & & \\ & d_2 - d_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}P \\ &= P^{-1}OP = O. \end{aligned}$$