南京大学大学数学试卷 答案

考试时间____2018.7.3____ 任课教师__________ 考试成绩____________

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 设行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$，求：(1) 第4行各元素的余子式之和；(2) 第4行各元素的代数余子式之和.

解：(1) $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=-28.$

或者 $M_{41}=-56, M_{42}=0, M_{43}=42, M_{44}=-14, M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-28.$

(2) $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0.$

2. 已知 $\begin{pmatrix}1&1&-6&10\\2&5&k&-1\\1&2&-1&k\end{pmatrix}$ 的秩为2，求 k 的值.

解：由 $\begin{pmatrix}1&1&-6&10\\2&5&k&-1\\1&2&-1&k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-6&10\\0&3&k+12&-21\\0&1&5&k-10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-6&10\\0&0&k-3&-3(k-3)\\0&1&5&k-10\end{pmatrix}$

推得：$k=3$时矩阵的秩为2.

3. 设矩阵 A 的各行元素之和都等于2，求 A 的一个特征值及其对应的一个特征向量.

解：将 $|\lambda E-A|$ 中的各列元素均加到第一列，由 A 的各行元素之和为2 知 $|\lambda E-A|$ 第一列中必有因子 $(\lambda-2)$，可以提到行列式记号的外面，因此2是矩阵 A 的一个特征值.

又因为 $A(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}=2(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，故 $(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是从属于特征值2的一个特征向量.

4. 设 V 是 n 维向量空间，设 W_1 和 W_2 是 V 的两个不同的 $n-1$ 维子空间，证明：$\dim(W_1\cap W_2)=n-2$.

证明：因为 $W_1\neq W_2$，所以 W_1+W_2 是真包含 W_1 的子空间，故只能是 $W_1+W_2=V$.

再由维数公式就得 $\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1+W_2)=(n-1)+(n-1)-n=n-2.$

二、 (本题12分) 已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，而且 $A^{-1}+E$ 可逆. 如果矩阵 X 满足 $A^{-1}XA+XA+2E=0$，求 X.

解：用 A^{-1} 右乘 $A^{-1}XA+XA+2E=0$ 两边得：$A^{-1}X+X+2A^{-1}=0.$

所以 $A^{-1}X+X=(A^{-1}+E)X=-2A^{-1}$.

又，行列式 $|A|^{3-1}=|A^*|=1$，故 $|A|=\pm1$，从而 $A^{-1}=\pm A^*$. 但是 $A^{-1}=-A^*$ 时，

$A^{-1}+E=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}$ 不可逆，不符合题设，所以只能是 $A^{-1}=A^*$，那么

$A^{-1}+E=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}, -2A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\-2&-2&0\\-2&-2&-2\end{pmatrix}, (A^{-1}+E)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac12&0&0\\-\frac14&\frac14&0\\-\frac18&-\frac14&\frac12\end{pmatrix},$

所以 $X=-2(A^{-1}+E)^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-\frac12&-1&0\\-\frac14&-\frac12&-1\end{pmatrix}.$

三. (本题12分) 设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定，B 为 $m\times n$ 实矩阵，试证明：$B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $\mathrm{r}(B)=n$.

证明：必要性：因为$B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵，所以对任意n 维实向量$x\neq 0$，有$x^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)x=(Bx)^{\mathrm{T}}A(Bx)>0$，
由于矩阵 A 为正定矩阵，故 $Bx\neq 0$，即齐次线性方程组 $Bx=0$ 只有零解，因此 $\mathrm{r}(B)=n$.
充分性：因为 $A^{\mathrm{T}}=A$，得 $(B^{\mathrm{T}}AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}AB$，故 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为实对称矩阵，
因为 $\mathrm{r}(B)=n$，所以 $Bx=0$ 只有零解，于是对任意 n 维实向量 $x\neq 0$，都有 $Bx\neq 0$，
又因为 A 为正定矩阵，故 $(Bx)^{\mathrm{T}}A(Bx)=x^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)x>0$，根据定义知：$B^{\mathrm{T}}AB$ 是正定矩阵.

四. (本题12分) 若实对称矩阵 A 满足关系式 $(A-E)(A-2E)=O$，A 是否正定？

解：展开关系式得：$A^2-3A+2E=O$. 设 λ 是 A 的特征值，ξ 为属于 λ 的特征向量，
则有 $(A^2-3A+2E)\xi=(\lambda^2-3\lambda+2)\xi=0$，得 $\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$，
故 A 的特征值是1或是2，均大于零，所有矩阵 A 正定.

五. (本题12分) 设3阶实对称矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1=8,\lambda_2=\lambda_3=2$，矩阵 A 属于特征值 λ_1 的特征向量 $\xi_1=(1,k,1)^{\mathrm{T}}$，属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3$ 的一个特征向量 $\xi_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，(1) 求参数 k 及 A 的属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3$ 的另一个特征向量；(2) 求矩阵 A.

解：(1) 因为 A 是实对称矩阵，则 A 的属于不同特征值的特征向量必正交，
所以 $\xi_1^{\mathrm{T}}\xi_2=0$ 即 $-1+k+0=0$，所以 $k=1$，故 $\xi_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.
设矩阵 A 的属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的另一个特征向量 $\xi_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，故有 $\xi_1^{\mathrm{T}}\xi_3=0$，
为使属于同一个特征值 $\lambda_2=\lambda_3$ 的2个特征向量正交，则设 $\xi_2^{\mathrm{T}}\xi_3=0$，
于是有齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ -x_1+x_2=0 \end{cases}$，解得方程组的基础解系为 $(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$.
故矩阵 A 的属于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的另一个特征向量 $\xi_3=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$.
(注：此处的 ξ_3 并不唯一，我们只是给出了求 ξ_3 的其中一种方法，但是第(2)小题中所要求的 A 矩阵是唯一确定的).

(2) 令 $P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\1&0&-2\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&1/3&1/3\\-1/2&1/2&0\\1/6&1/6&-1/3\end{pmatrix}$，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

所以 $A=P\begin{pmatrix}8&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$.

六. (本题12分) 设 $V=\mathrm{R}^3,\varepsilon_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\varepsilon_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\varepsilon_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\alpha_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，(1) 求从基底 $(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$ 到 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的过渡矩阵；(2) 求向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$ 在基底 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 之下的坐标；(3) 求在两基底之下有相同坐标的向量.

解：(1) $((\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)P$，故 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(2) α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$.

(3) 令 $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，解得 $\alpha=k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},k\in\mathrm{R}$.

七. (本题12分) 设 A 是 n 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维非零列向量，若 $A\alpha_1=\alpha_2,A\alpha_2=\alpha_3,\cdots,A\alpha_{n-1}=\alpha_n,A\alpha_n=0$，(1) 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关；(2) 求 A 的特征值与特征向量.

解：(1) 由已知条件 $A\alpha_1=\alpha_2,A^2\alpha_1=A\cdot A\alpha_1=A\alpha_2=\alpha_3,\cdots,A^{n-1}\alpha_1=\alpha_n,A^n\alpha_1=A\cdot A^{n-1}\alpha_1=A\alpha_n=0$，
设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$，即 $k_1\alpha_1+k_2A\alpha_1+\cdots+k_nA^{n-1}\alpha_1=0 \qquad (*)$
(*)式两边左乘 A^{n-1} 得：$k_1A^{n-1}\alpha_1+k_2A^n\alpha_1+k_3A^{n+1}\alpha_1+\cdots+k_nA^{2n-2}\alpha_1=0$.
因为：$A^n\alpha_1=0$，所以由上式得：$k_1A^{n-1}\alpha_1=k_1\alpha_n=0$，因为 $\alpha_n\neq 0$，所以由上式得：$k_1=0$.

类似的，依次用 $A^{n-2}, A^{n-3}, \cdots$ 左乘(*)两边可推得：$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$，故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.
(2) 对 $A\alpha_1 = \alpha_2, A\alpha_2 = \alpha_3, \cdots, A\alpha_{n-1} = \alpha_n, A\alpha_n = 0$ 用分块矩阵表示有

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n, 0) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} = PB,$$

由(1)知 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是 n 阶可逆矩阵，故 $A \sim B$，
所以矩阵 A 和矩阵 B 的特征值相同.
$|\lambda E - B| = \lambda^n = 0$，故矩阵 B 的特征值为 $\lambda = 0$ (n重)，所以 $\lambda = 0$ 是 A 的 n 重特征值.
由 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = n - 1$ 知齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系只含一个解向量.
因为 $A\alpha_n = 0, \alpha_n \neq 0$，所以 α_n 是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系，故矩阵 A 的特征向量是 $k\alpha_n(k \neq 0)$.