期中试卷

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

解：$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 21 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -21 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 21.$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，求 X 使得 $A(X-B) = C$.

解：$(A, C) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 15 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 6 \end{array}\right)$，则：$Y = X - B = \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ 2 & -2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$，故：$X = B + Y = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 6 & 3 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$.

解法二：$(A, AB + C) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 1 & -11 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 29 \\ 1 & -1 & 1 & -5 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 8 \end{array}\right)$，故：$X = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 6 & 3 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$，

解法三：$(A, E) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -5 \end{array}\right)$，故 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$，

于是 $X = B + A^{-1}C = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ 2 & -2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 6 & 3 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$.

3. 已知 $A = \begin{pmatrix} 4 & 18 & -8 \\ -1 & x & 4 \\ -3 & -12 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，且 A 相似于 B，求参数 x, y.

解：$A \sim B$，故 $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B), |A| = |B|$，即 $4 + x + 5 = 1 + y + 0, -2(2x + 15) = -2y$，得：$x = -7, y = 1$.

解法二：相似矩阵有相同的特征多项式，故有 $\begin{vmatrix} \lambda - 4 & -18 & 8 \\ 1 & \lambda - x & -4 \\ 3 & 12 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ -1 & \lambda - y & -1 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$，

即：$\lambda^3 - (x + 9)\lambda^2 + (9x + 62)\lambda + 4x + 30 = \lambda^3 - (y + 1)\lambda^2 + (y - 2)\lambda + 2y$，

比较系数得到：$x = -7, y = 1$.

解法三：相似矩阵有相同的特征多项式，故有 $\begin{vmatrix} \lambda - 4 & -18 & 8 \\ 1 & \lambda - x & -4 \\ 3 & 12 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ -1 & \lambda - y & -1 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$，

取 $\lambda = 0$ 有 $2(2x + 15) = 2y$，取 $\lambda = 1$ 有 $-48 - 4(3x + 9) = -4 + 2(3 - y)$，解得 $x = -7, y = 1$.

4. 已知矩阵 $A, B \in \mathbf{R}^{3\times3}$，$A$ 有特征值 $-1, -2, 2$，且有 $|A^{-1}B| = 2$，求 $|B|$.

解：$|A^{-1}B| = |A^{-1}| \cdot |B| = |A|^{-1}|B| = 2$，故 $|B| = 2|A| = 2 * (-1)(-2)(2) = 8$.

解法二：易知 A^{-1} 有特征值 $-1, -1/2, 1/2$，故 $|A^{-1}| = (-1)(-1/2)(1/2) = 1/4$.

于是 $2 = |A^{-1}B| = |A^{-1}| \cdot |B| = |B|/4$，得 $|B| = 4$.

5. 已知列向量 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}^n, (n > 2)$，$\alpha_1, \alpha_2$ 线性无关，若 $B = \begin{pmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 \\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 \end{pmatrix}$，证明：$\mathrm{r}(B) = 2$.

证：设 $A = (\alpha_1, \alpha_2)$，则 $B = A^{\mathrm{T}}A$. 若 x 满足 $Bx = \theta$，则 $x^{\mathrm{T}}Bx = (Ax)^{\mathrm{T}}(Ax) = 0$，故 $Ax = \theta$.

又 α_1, α_2 线性无关，故 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2) = 2$，故 $x = \theta$，于是 $Bx = \theta$ 只有零解，从而 $\mathrm{r}(B) = 2$.

二.(10分) 解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 & = -11, \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 - 7x_4 & = 7, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4 & = 0. \end{cases}$

解：$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc|c}2&3&-5&4&-11\\1&a&2&-7&7\\3&-1&-2&-5&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&-1\\0&1&-1&2&-3\\0&0&a+3&-2a-6&3a+8\end{array}\right)$.

当 $a=-3$ 时, $(A,b)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&-1\\0&1&-1&2&-3\\0&0&0&0&-1\end{array}\right)$, $\mathrm{r}(A)=2<\mathrm{r}(A,b)=3$，方程组无解.

当 $a\neq-3$ 时，$(A,b)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-3&(2a+5)/(a+3)\\0&1&0&0&-1/(a+3)\\0&0&1&-2&(3a+8)/(a+3)\end{array}\right)$, $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,b)=2$，

方程组有无穷多组解，通解为 $x=\begin{pmatrix}(2a+5)/(a+3)\\-1/(a+3)\\(3a+8)/(a+3)\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\0\\2\\1\end{pmatrix}, k\in\mathbf{R}$.

三.(10分) 设 $A\in\mathrm{R}^{2\times3}, \mathrm{r}(A)=2$，$\xi_1=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix}-5\\3\\2\end{pmatrix}, b\neq\theta$，且有 $A\xi_1=2b, A\xi_2=3b$.

写出 $Ax=b$ 的通解并求特解 η 使得 $\eta=\min\{x^{\mathrm{T}}x \mid Ax=b\ \}$ (使得 $x^{\mathrm{T}}x$最小的解).

解：$A\xi_1=2b, A\xi_2=3b$，故设 $\eta=\xi_2-\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}, \alpha=3\xi_1-2\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$，

则有 $A\eta=A(\xi_2-\xi_1)=3b-2b=b, A\alpha=A(3\xi_1-2\xi_2)=6b-6b=\theta$.

又有 $\mathrm{r}(A)=2$，故 $Ax=\theta$ 的基础解系含1个向量，故 $Ax=b$ 的通解为 $x=\eta+k\alpha, k\in\mathbf{R}$.

由 $x^{\mathrm{T}}x=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(-2+k)^2+(2-3k)^2+(1-k)^2=11k^2-18k+9=11(k-9/11)^2+18/11$，

当 $k=9/11$ 时，特解 $\eta=(-13/11,-5/11,2/11)^{\mathrm{T}}$ 使得 $x^{\mathrm{T}}x$ 最小.

解法二：设 $\eta_1=\dfrac{1}{2}\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \eta_2=\dfrac{1}{3}\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}, \alpha=\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$,

则有 $A\eta_1=A(\dfrac{1}{2}\xi_1)=\dfrac{1}{2}2b=b, A\alpha=A(\eta_1-\eta_2)=b-b=\theta$，又 $\mathrm{r}(A)=2$,故通解为$x=\eta_1+k\alpha, k\in\mathbf{R}$.

令 $f(k)=x^{\mathrm{T}}x=(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{k}{6})^2+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{k}{2})^2+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{k}{6})^2$，则 $f'(k)=\dfrac{11k}{18}-\dfrac{7}{6}=0$，解得最小点 $k=\dfrac{21}{11}$，

代入通解得所求特解 $\eta=(-13/11,-5/11,2/11)^{\mathrm{T}}$.

四. (15分) 设有向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\8\\-1\\4\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\-5\\4\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\12\\1\\4\end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix}2\\6\\-2\\4\end{pmatrix}, \alpha_5=\begin{pmatrix}-2\\-4\\3\\-4\end{pmatrix}.$$

(1)求一个极大无关组，并用极大无关组表示其余向量;

(2) 向量组中去掉一个向量，使得去掉该向量后向量组的秩减小.

解：(1) $(A,b)\to\begin{pmatrix}1&0&3/2&0&-1/2\\0&1&-1/2&0&-1/2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$，一个极大无关向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

易知 $\alpha_3=\dfrac{3}{2}\alpha_1-\dfrac{1}{2}\alpha_2, \alpha_5=-\dfrac{1}{2}\alpha_1-\dfrac{1}{2}\alpha_2$.

(2) 从行简化梯形 B 可以看出，去掉 $(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 后，行简化梯形 B 的秩由3减为2，

故去掉向量组中对应的向量 α_4 即可.

五.(15分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\5&-4&-5\\-2&2&5\end{pmatrix}$.

(1) 计算 A 的特征值和特征向量；(2) 求一个2次多项式 $f(x)$，使得矩阵 $B=f(A)$ 有一个3重的特征值.

解：(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-1\\\lambda-1&\lambda+4&5\\0&-2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，解得特征值 $\lambda=1$(二重),2.

$\lambda=1$ 时，解方程组 $E-A\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量为 $k_1\xi_1,\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，

$\lambda=2$ 时，解方程组 $E-A\to\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&-5/2\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量为 $k_2\xi_2,\xi_2=(4,5/2,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 设 $f(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$，则 $f(A)=A^2-3A+2E$ 的特征值为 $f(1),f(1),f(2)$，即 $0,0,0$，故特征值为3重的0.

(2)的解法二：设 $f(x)=x^2+ax+b$，则 $f(A)=A^2+aA+bE$ 的特征值为 $f(1)=1+a+b=f(2)=4+2a+b$，解得 $a=-3$，b 可取任意值，不妨取 $b=0$，则 $f(x)=x^2-3x$，得到3重的特征值为 $f(1)=f(2)=-2$.

六.(10**分**) 设矩阵$A\in\mathbf{R}^{n\times n},\mathrm{r}(A)=n-1$,证明：$A^*=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，其中$\alpha,\beta\in\mathbf{R}^n$为列向量,且有$A\alpha=\theta,A^{\mathrm{T}}\beta=\theta$. (矩阵 A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵)

证：$\mathrm{r}(A)=n-1$，我们有 $|A|=0$，且 $Ax=\theta$ 基础解系含1个向量，设为 $\alpha\neq\theta$，则 $A\alpha=\theta$.

因为 $AA^*=|A|E=O$，故 A^* 的列为 $Ax=\theta$ 的解，故有 $A^*=(k_1\alpha,\cdots,k_n\alpha)=\alpha(k_1,\cdots,k_n)=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$.

又有 $A^*A=|A|E=O$，故 $A^{\mathrm{T}}(A^*)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\beta\alpha^{\mathrm{T}}=\gamma\alpha^{\mathrm{T}}=O$，由 $\alpha\neq\theta$ 得 $A^{\mathrm{T}}\beta=\gamma=\theta$.

证法二：$\mathrm{r}(A)=n-1$，则$|A|=0$，A存在非零$n-1$阶子式，故$A^*\neq O$，从而 $\mathrm{r}(A^*)\geq 0$.

因为 $AA^*=|A|E=O$，故 $0=\mathrm{r}(AA^*)\geq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A^*)-n=\mathrm{r}(A^*)-1$，故 $\mathrm{r}(A^*)\leq 1$.

由 $\mathrm{r}(A^*)\geq 0$ 和 $\mathrm{r}(A^*)\leq 1$ 可得 $\mathrm{r}(A^*)=1$.

我们有分解 $A^*=P\begin{pmatrix}1&\\&O\end{pmatrix}Q=Pe_1e_1^{\mathrm{T}}Q=(Pe_1)(e_1^{\mathrm{T}}Q)=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，

其中P,Q可逆，$\alpha,\beta^{\mathrm{T}}$分别为$P$的第一列和$Q$的第一行，且 $\alpha,\beta\neq\theta$.

$O=AA^*=A\alpha\beta^{\mathrm{T}}=(A\alpha)\beta^{\mathrm{T}}$，$\beta\neq\theta$，故 $A\alpha=\theta$. 同理由 $A^*A=O$ 可得 $\beta^{\mathrm{T}}A=\theta^{\mathrm{T}}$，从而 $A^{\mathrm{T}}\beta=\theta$.