院系______ 班级______ 学号______ 姓名______

请在所附答题纸上空出密封位置。并填写试卷序号、班级、学号和姓名

密 封 线

南京大学数学系 2021 – 2022 学年第 1 学期
线性代数（第一层次） 期中试卷

考试日期：2021年11月20日（120分钟）

题 号	一	二	三	四	五	六	合 计	阅卷教师
得 分								

一、简答与计算（本题共5小题，每小题8分，共40分）

1、$B = A^*$，计算B的所有代数余子式的和，即$\sum_{i,j=1}^{4} B_{ij}$，此处

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 13 & 16 \\ 5 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

解答： 计算得$r(A) = 3$，$r(A^*) = 1$，$(A^*)^* = 0$，$\sum_{i,j=1}^{4} B_{ij} = 0$。

2、计算行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3^2 & 5^2 & 7^2 \\ 1 & 3^3 & 5^3 & 7^3 \end{vmatrix}$$

解答： $D_5 = (7-1)(7-3)(7-5)(5-1)(5-3)(3-1) = (6!!)(4!!)2 = 768$

3、证明：如果$A \xrightarrow{c} B$，则A的列向量组与B的列向量组等价。

解答： 略。

4、计算$A = (a_{ij})_{n\times n}$，$A^k = 0$，$k > 1$是正整数。证明：$E - A$可逆。

解答： $(E-A)(E + A + \cdots + A^{k-1}) = E + A + \cdots + A^{k-1} - A - \cdots - A^k = E - A^k = E$。

5、$\eta = (1,1,1)^T$是矩阵A的特征向量，计算a, b与A的所有特征值，此处：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$$

解答： $A\eta = (4, a+b+1, b+3)^T = \lambda(1,1,1)^T$，$4 = a+b+1 = b+3$，$a = 2$，$b = 1$。$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 4$。

二、（12分）

计算矩阵X使得$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

解答：

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/6 & 2/3 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

三、（14分）

（1）计算矩阵$A = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5)$的秩，计算$A$列向量组的一个极大线性无关组，并用以表示其余向量（6分）；（2）判断$Ax = b$解的存在性，如有解则计算其通解（8分）。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

解答：

$$(A\,b) \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$, 极大线性无关组：α_1, α_2

$\alpha_3 = -2\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_5 = -2\alpha_1 - \alpha_2$

$Ax = b$解：$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3 + \eta_0$

$\eta_1 = (2,-1,1,0,0)^T$, $\eta_2 = (-1,1,0,1,0)^T$, $\eta_3 = (2,1,0,0,1)^T$,

$\eta_0 = (10,-4,0,0,0)^T$,

四、(10分)

A为$m \times n$矩阵，$r(A) = r > 0$，证明必有非零m维向量α_1，α_2，$\cdots$，α_r与n维向量$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$，使得$A = \alpha_1\beta^T + \alpha_2\beta_2^T + \cdots + \alpha_r\beta_r^T$。

解答：略。

五、(10分)

$\alpha = (1, 1, \cdots, 1)^T$为$n$维向量，$A = \alpha\alpha^T$，计算$A$的$n$个线性无关的特征向量。

解答：略。

六、(14分)

$A = (a_{ij})_{3\times3}$，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，$A\alpha_1 = \alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3$，$A\alpha_2 = -2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3$，$A\alpha_3 = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$。计算$A$的特征值与特征向量（用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的线性组合表示）。

解答：$P = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$可逆，$AP = PB$，$|\lambda E - B| = (\lambda+3)(\lambda-3)^2 = 0$，$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$，$\lambda_3 = -3$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 E - B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\eta_3 = (1, 1, 1)^T$。$\zeta_1 = P\eta_1 = -\alpha_1 + \alpha_2$，$\zeta_2 = P\eta_2 = -\alpha_1 + \alpha_3$，$\zeta_3 = P\eta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$。