大学数学试卷 答案 2021.6.22

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 求关于 x 的一元四次方程 $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$ 的根，其中 a 为一个实数.

解：$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = 0$，

因此，该方程的根为$-3a$(一重)，a(三重).

2. 求 a 的范围使得矩阵 $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ 为对称正定方阵.

解：A 对称正定，当且仅当 $\det(6) = 6 > 0, \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0, |A| = 2 - 6a^2 > 0$，

因此 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < a < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，A 为对称正定方阵.

解法二：合同变换 $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a^2 \end{pmatrix}$，

故 A 对称正定当且仅当 $1 - 3a^2 > 0$，因此 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < a < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，A 为对称正定方阵.

3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是否相似，请说明理由？

解：这两个矩阵相似. A 的三个特征值为 $2, -1, 1$，B 的三个特征值为 $2, -1, 1$，因此这两个矩阵都相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}(2, -1, 1)$，因此它们相似.

4. $n \times n$ $(n > 1)$ 方阵 A, B 满足 $|A| = 2, |B| = 3$，求 $2A^{-1}B^*$ 的行列式的值.

解：$|2A^{-1}B^*| = 2^n|A^{-1}|\,|B^*| = 2^n \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} = 6^{n-1}$.

二、 (本题12分) A, B, C, D 是4个 $n \times n$ 方阵，其中 A 可逆且 $AC = CA$，求证：$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.

解：注意到：$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}$ 且 $\begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix}$ 的行列式为1，因此

$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & -CA^{-1}B + D \end{vmatrix} = |A|\,|-CA^{-1}B + D| = |AD - ACA^{-1}B| = |AD - CB|$，证毕.

(本题可以有多种证明方法)

三、 (本题12分) 设 A 是一个 $m \times 4$ 矩阵，b 是一个4维列向量. 已知 A 的秩为2. 线性方程组 $AX = b$ 有三个解 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 满足 $\alpha_1 + \alpha_2 = (2, 1, 3, 2)^{\mathrm{T}}, 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = (4, -1, 4, 8)^{\mathrm{T}}, 3\alpha_1 + \alpha_3 = (0, -1, 3, 5)^{\mathrm{T}}$. 求线性方程组 $AX = b$ 的通解.

解：线性方程组 $AX = b$ 有4个未知数且 A 的秩为2，因此该方程导出组的基础解系有两个线性无关的向量. 再注意到导出组有的两个解

$$2(\alpha_1 + \alpha_2) - (3\alpha_1 + \alpha_3) = (4, 3, 3, -1)^{\mathrm{T}}, 5(\alpha_1 + \alpha_2) - 2(2\alpha_2 + 3\alpha_3) = (2, 7, 7, -6)^{\mathrm{T}},$$

且这两个向量线性无关. 因此 $(4, 3, 3, -1)^{\mathrm{T}}, (2, 7, 7, -6)^{\mathrm{T}}$ 是导出组的基础解系.

另一方面 $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = (1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $AX = b$ 的一个解. 综上所述，$AX = b$ 的通解为：

$(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)^{\mathrm{T}} + k_1(4, 3, 3, -1)^{\mathrm{T}} + k_2(2, 7, 7, -6)^{\mathrm{T}} \qquad (k_1, k_2 \in \mathbf{R})$. (本题答案形式不唯一)

四、 (本题12分) 在 $\mathbf{R}^3$ 中取两组基 $\begin{cases} \alpha_1 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}} \\ \alpha_2 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}} \\ \alpha_3 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}} \end{cases}$ 和 $\begin{cases} \beta_1 = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}} \\ \beta_2 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}} \\ \beta_3 = (3, 4, 3)^{\mathrm{T}} \end{cases}$. 试求从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵以及从基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵.

解：设从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 P. 我们应该有：

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$，且从基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵为 P^{-1}. 计算得：

$P=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}, P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-2\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

五、（本题12分）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-4x_1x_3+x_3^2-4x_2x_3$ 是否为正定二次型？将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准二次型.

解：$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$ 的行列式为 -27.

因此这个二次型不是正定的. 该矩阵的特征值为-3(一重)，3(二重). 一个属于特征值-3的单位特征向量为 $\beta_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$，两个属于特征值3的互相正交的单位特征向量为 $\beta_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}, \beta_3=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$.

令矩阵 U 为：$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$，$U$ 为正交矩阵且我们有 $U^{\mathrm{T}}AU=\mathrm{diag}(-2,3,3)$.

在正交变换 $x=Uy$ 下，我们有标准形 $f=-3y_1^2+3y_2^2+3y_3^2$. （本答案形式不唯一）

六、（本题12分）令 X 为一个 n 维（$n\geq 2$）实向量，满足 $XX^{\mathrm{T}}=1$. 令 λ 为一个实数，试证明

(1) X^{T} 是 $n\times n$ 矩阵 $E-\lambda X^{\mathrm{T}}X$ 的一个特征向量，并求特征值.

(2) 令 P 是一个 $n\times n$ 正交矩阵并且以 X^{T} 为其第一列. 证明 $E-\lambda X^{\mathrm{T}}X$ 可通过 P 对角化.

(3) 当 λ 为何值时，$E-\lambda X^{\mathrm{T}}X$ 能成为一个对称正交矩阵？

解：(1) $(E-\lambda X^{\mathrm{T}}X)X^{\mathrm{T}}=X^{\mathrm{T}}-\lambda X^{\mathrm{T}}(XX^{\mathrm{T}})=(1-\lambda)X^{\mathrm{T}}$. 因此 X^{T} 是 $E-\lambda X^{\mathrm{T}}X$ 的一个特征向量且特征值为 $1-\lambda$.

(2) 注意到 $XP=(1,0,\cdots,0)$. 从而我们有：

$P^{\mathrm{T}}(E-\lambda X^{\mathrm{T}}X)P=E-\lambda(XP)\mathrm{T}(XP)=\mathrm{diag}(1-\lambda,1,\cdots,1)$. 得证.

(3) $E-\lambda X^{\mathrm{T}}X$ 是一个对称矩阵. 我们有 $(E-\lambda X^{\mathrm{T}}X)(E-\lambda X^{\mathrm{T}}X)=E+(\lambda^2-2\lambda)X^{\mathrm{T}}X$.

因此 $E-\lambda X^{\mathrm{T}}X$ 是对称正交矩阵当且仅当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$.

七、（本题12分）一个实系数 $n\times n$ 方阵 A 满足 $A^3=A$. 证明 A 可以对角化.

证：设 λ 为 A 的一个特征值，那么属于 λ 的特征向量 α 满足 $\lambda\alpha=A\alpha=A^3\alpha=\lambda^3\alpha$. 因此 $\lambda^3=\lambda$.

从而 A 的特征值只能为 $0,1,-1$. 再由条件 $A^3=A$，我们得到：

$$-A(A^2-E)=O\ ,\ (-E-A)(A^2-A)=O\ ,\ (E-A)(A^2+A)=O.$$

从上面三式中我们可以得到 A 的线性无关特征向量的个数$\geq \mathrm{r}(A^2-E)+\mathrm{r}(A^2+A)+\mathrm{r}(A^2-A)$. 注意到

$$\mathrm{r}(A^2-E)+\mathrm{r}(A^2+A)+\mathrm{r}(A^2-A)\geq \mathrm{r}(A^2-E)+r(2A^2)=\mathrm{r}(A^2-E)+\mathrm{r}(-A^2)\geq \mathrm{r}(-E)=n.$$

因此我们可以找到 A 的 n 个线性无关的特征向量，从而 A 可对角化.