南京大學 NANJING UNIVERSITY

第一章 概率论的基本概念

主要内容

1.1 随机试验

1.2 样本空间、随机事件

1.3 频率与概率

1.4 等可能概型（古典概型）

1.5 条件概率

1.6 独立性

1.4 等可能概型（古典概型）

等可能概型（1）

- **等可能概型：** 如果一个随机试验E满足下面2个条件，则称E为等可能概型（古典概型）：
  - 随机试验的样本空间中只包含有限个元素；
  - 随机试验中每个基本事件发生的可能性相同.

- **例：**
  - E_1:抛一枚均匀的硬币，观察正面H、反面T出现的情况.
  - E_2:抛一颗均匀的骰子，观察出现的点数.

等可能概型（2）

- **等可能概型中概率的计算：**

$n=$ S中基本事件的总数

$k=A$包含的基本事件数

则 $P(A)=\dfrac{k}{n}$

等可能概型（3）

- **例** 将一枚硬币抛掷三次.（1）设事件A_1为“恰有一次出现正面”，求$P(A_1)$；（2）设事件A_2为“至少有一次出现正面”，求 $P(A_2)$.
- **解：** (1) S={HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}, 则S中基本事件的总数为8.

  A_1={HTT, THT, TTH}, 则A_1中包含的基本事件数为3.

  $P(A_1) = 3/8$.

(2) $\overline{A_2} = \{TTT\}, P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - 1/8 = 7/8.$

等可能概型（4）

- **例** 一个口袋装有6只球，其中4只白球、2只红球. 从袋中取球两次，每次随机地抽取一只. 考虑两种取球方式：(a) 第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，第二次从剩余的球中再取一球. (b) 第一次取一球不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一球. 试分别就上面两种情况求：（1）取到的两只球都是白球的概率；（2）取到的两只球颜色相同的概率；（3）取到的两只球中至少有一只白球的概率.

- **解：** 以A表示事件“取到的两只球都是白球”，

  以B表示事件“取到的两只球都是红球”，

  以C表示事件“取到的两只球中至少有一只白球”，

  以D表示事件“取到的两只球颜色相同”，

  则 $D = A \cup B, C = \overline{B},$

  欲求$P(A), P(D), P(C).$

等可能概型（5）

（a）放回抽样的情况

样本空间S中基本事件总数为：$6*6 = 36$,

A中包含的基本事件数为：$4*4 = 16$,

B中包含的基本事件数为：$2*2 = 4$,

$P(A) = 16/36 = 4/9$,

$P(B) = 4/36 = 1/9$,

$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 4/9 + 1/9 = 5/9$,

$P(C) = 1 - P(B) = 1 - 1/9 = 8/9$.

等可能概型（6）

(b) 不放回抽样情况

样本空间S中基本事件总数为：6*5 = 30,

A中包含的基本事件数为：4*3 = 12,

B中包含的基本事件数为：2*1 = 2,

$P(A) = 12/30 = 2/5$,

$P(B) = 2/30 = 1/15$,

$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 2/5 + 1/15 = 7/15$,

$P(C) = 1 - P(B) = 1 - 1/15 = 14/15$.

等可能概型（7）

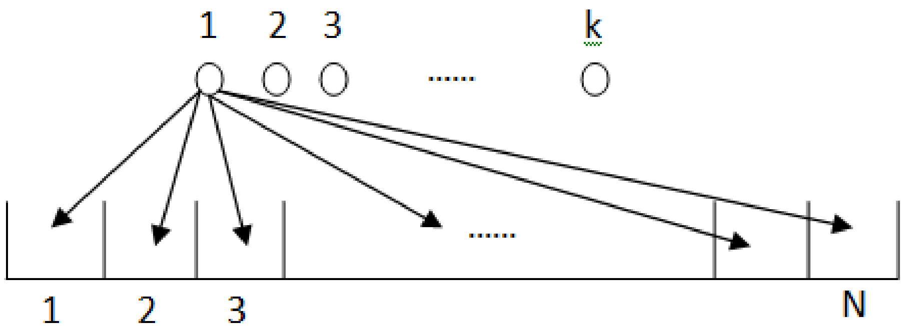
- **例** 将k只球随机地放入N（$N \ge k$）个盒子中去，试求每个盒子至多有一个球的概率（设盒子的容量不限）。

解： 样本空间中基本事件总数为：N^k，

设A表示事件“每个盒子至多有一个球”，

则A中包含的基本事件数为：A_N^k，

则$P(A)=\dfrac{A_N^k}{N^k}$



等可能概型（8）

上例的**“分球模型”**可应用于很多类似场合：

“球”可视为		“盒子”相应视为
人		房子
人		生日
信		信封
钥匙		门锁
男舞伴		女舞伴

等可能概型（9）

- 例 将15名新生随机地平均分配到三个班级中去，这15名新生中有3名是优秀生.问（1）每个班级各分配到1名优秀生的概率是多少？（2）3名优秀生分配在同一班级的概率是多少？
- 解：15名新生平均分配到三个班级中的分法总数为：

$$\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5}=\frac{15!}{5!5!5!},$$

(1) 应用乘法原理，第一步先分配优秀生，第二步分配普通学生。以A表示事件“每个班级各分配到1名优秀生”，则A中包含的分法数目为：

$$3!\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}=\frac{3!12!}{4!4!4!},$$

等可能概型（10）

$$则P(A)=\left(\frac{3!12!}{4!4!4!}\right)/\left(\frac{15!}{5!5!5!}\right)=\frac{25}{91}.$$

（2）**将3名优秀学生看成一个整体,还是应用乘法原理，第一步先分配优秀生组，第二步分配普通学生。**以B表示事件“3名优秀生分配在同一班级”，则B中包含的分法数目为:

$$3\binom{12}{2}\binom{10}{5}\binom{5}{5}=\frac{3\times 12!}{2!5!5!},$$

$$则P(B)=\left(\frac{3\times 12!}{2!5!5!}\right)/\left(\frac{15!}{5!5!5!}\right)=\frac{6}{91}.$$

1.5 条件概率

条件概率（1）

- **引例** 将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正反面的情况。设事件A为“至少有一次为H”，事件B为“两次掷出同一面”。则A={HH, HT, TH}，B={HH, TT}，易知P(B)=1/2。
- 若抛掷两次，已知至少有一次为H，则两次是同一 面的概率是多少？1/3

此概率称为在事件A发生条件下事件B发生的**条件概率**，记为P(B|A)。

一般情况下，

$$P(B) \neq P(B|A)$$

条件概率（2）

$$P(B|A)=\frac{1}{3}=\frac{k_{AB}}{k_A}=\frac{k_{AB}/n_S}{k_A/n_S}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{P(AB)}{P(\mathrm{A})}$$

- **定义：设A，B为两个事件，且P(A) ≠0，称P(B|A)=P(AB)/P(A)为在事件A发生条件下事件B发生的条件概率。**
- **注：条件概率也符合概率定义中的三个条件。**

条件概率（3）

- **例** 一盒子装有4只产品，其中有3只是一等品，1只二等品。从中取产品两次，每次任取一只，作不放回抽样。设事件**A**为**“第一次取到的是一等品”**，事件**B**为**“第二次取到的是一等品”**。试求条件概率P(B|A).
- **解：** 样本空间S中包含的基本事件总数：为4*3=12，

  事件A中包含的基本事件数为：3*3=9，

  事件AB中包含的基本事件数为：2*3=6，

  P(A)=9/12，P(AB)=6/12,

  P(B|A)=P(AB)/P(A)=(6/12)/(9/12)=2/3

乘法公式（1）

利用条件概率求**积事件**的概率~**乘法公式**

$$P(AB)=P(A)P\left(B\middle|A\right)\quad (P(A)>0)$$

$$P(AB)=P(B)P\left(A\middle|B\right)\quad (P(B)>0)$$

推广：

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P\left(A_2\mid A_1\right)\ldots P\left(A_n\mid A_1A_2\ldots A_{n-1}\right)$$

$$(P(A_1A_2\ldots A_{n-1})>0)$$

乘法公式（2）

- **例** 设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为1/2，若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率为7/10，若前两次落下未打破，第三次落下打破的概率为9/10。试求透镜落下三次而未打破的概率。

解： 以A_i(i = 1, 2, 3)表示事件“透镜第i次落下打破”，

以B表示事件“透镜落下三次而未打破”，

则$B=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$,

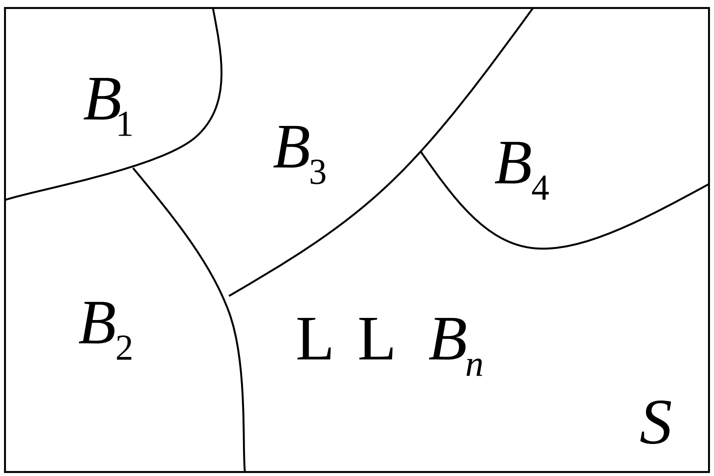
利用乘法公式:

$$P(B)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(\overline{A_3}\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{7}{10})(1-\frac{9}{10})=\frac{3}{200}$$

全概率公式和贝叶斯公式（1）

样本空间的完全划分



$$\begin{cases} B_iB_j = \Phi, i, j = 1, 2, \ldots, n \\ \bigcup_{i=1}^{n} B_i = S \end{cases}$$

$B_1, B_2, \ldots, B_n$是S的一个划分

全概率公式和贝叶斯公式（2）

$B_1, B_2, \ldots, B_n$是S的一个划分，A是任一事件，则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

全概率公式

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}, i = 1, 2, \ldots, n$$

贝叶斯公式

就是$P(A)$

全概率公式和贝叶斯公式（3）

- **例** 某电子设备制造厂所用的元件是由1号、2号、3号三家元件制造厂提供的。根据以往的记录， 1号、2号、3号三家提供的份额各占15%、80%和5%，次品率分别为0.02、0.01和0.03。设三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的且无区别的标志。现在仓库中随机地取一只元件，（1）求它是次品的概率；（2）发现它是次品，则它来自各厂的概率是多少？

解： 设B_i表示“所取到的产品是第i家工厂提供的”, $i=1, 2, 3,$

则$P(B_1)=0.15, P(B_2)=0.80, P(B_3)=0.05,$

设A表示“取到的是一只次品”，

则$P(A|B_1)=0.02, P(A|B_2)=0.01, P(A|B_3)=0.03,$

全概率公式和贝叶斯公式（4）

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.0125$$ 全概率公式

$$\left.\begin{aligned}
P(B_1|A)&=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=0.24\\
P(B_2|A)&=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=0.64\\
P(B_3|A)&=\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}=0.12
\end{aligned}\right\}\text{贝叶斯公式}$$

1.6 独立性

引例

例 设试验E为“抛甲、乙两枚硬币，观察正反面出现的情况”. 设事件A为“甲币出现H”，事件B为“乙币出现H”，求：

$$P(A)\,,\,P(B),\,P(B\mid A),\,P(AB).$$

解:

$$\begin{cases} P(A)=1/2=P(B), \\ P(B\mid A)=1/2, \\ P(AB)=1/4, \end{cases}$$

$$P(B\mid A)=P(B)$$

$$\boxed{P(AB)=P(A)P(B)}$$

两事件相互独立(1)

事件 A 发生与否对事件 B 发生的概率没有影响，反之亦然，则可视为事件A与B**相互独立**。

定义 设 A, B 为两个事件，若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称**事件 A 与事件 B 相互独立**。

常由事件的实际意义判断事件的独立性！

两事件相互独立(2)

四对事件：$A, B;\quad A, \overline{B};\quad \overline{A}, B;\quad \overline{A}, \overline{B},$

若任何一对相互独立,则其它三对也相互独立。

试证其一： A, B独立 $\Rightarrow A, \overline{B}$独立

证明：

$$
\begin{aligned}
P(A\overline{B}) &= P(A-B) = P(A) - P(AB) \\
&= P(A) - P(A)P(B) \\
&= P(A)[1-P(B)] \\
&= P(A)P(\overline{B})
\end{aligned}
$$

多个事件相互独立(1)

定义 三个事件 A, B, C 相互独立，是指下面的关系式同时成立：

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases} \qquad (1)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \qquad (2)$$

注： a.关系式(1)、(2)不能互相推出；

b.仅满足(1)式时，称 A, B, C **两两独立**。

A, B, C 相互独立 $\longrightarrow$ A, B, C 两两独立

多个事件相互独立(2)

推广：

n个事件 $A_1, A_2, \ldots\ldots$，A_n相互独立，则下面的关系式成立：

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

其中$k = 2, 3, \ldots n$

$$i_1, i_2, \cdots i_k = 1, 2, 3, 4, \cdots n$$

例题

- **例：** 一个元件（系统）能正常工作的概率称为元件（系统）的可靠性。下图是4个独立的工作元件1、2、3、4按先串联再并联的方式连接（称为串并联系统）。设第i个元件的可靠性为p_i(i =1, 2, 3, 4)，试求系统的可靠性。

解： 以A_i(i =1,2,3,4)表示事件“第i个元件正常工作”，

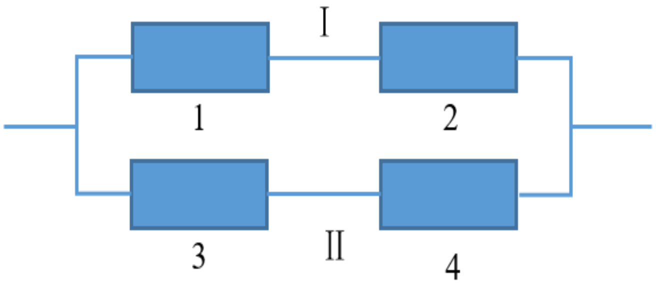
以A表示事件“系统正常工作”，

则$A = A_1A_2 \cup A_3A_4$,

$$P(A) = P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)$$

$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$= p_1p_2 + p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4$$



THE END

排列组合有关知识复习

加法原理： 完成一件事情有 n 类方法，第 i 类方法中有 m_i 种具体的方法，则完成这件事情共有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i$$ 种不同的方法.

乘法原理： 完成一件事情有 n 个步骤，第 i 个步骤中有 m_i 种具体的方法，则完成这件事情共有

$$\prod_{i=1}^{n} m_i$$ 种不同的方法.

排列： 从 n 个不同的元素中取出 m 个 (**不放回地**）按一定的次序排成一排，不同的排法共有

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) \text{ 种.}$$

全排列： $A_n^n = n!$

可重复排列： 从 n 个不同的元素中**可重复地**取出 m 个排成一排, 不同的排法有

$$n^m \text{ 种.}$$

不尽相异元素的全排列： n 个元素中有 m 类，第 i 类中有 k_i 个相同的元素，

$$k_1 + k_2 + \cdots\cdots + k_m = n,$$

将这 n 个元素按一定的次序排成一排，

不同的排法种类共有：

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k2} C_{n-k_1-k_2}^{k3} \ldots\ldots C_{n-k_1-k_2-\ldots\ldots-k_{m-1}}^{k_m}$$

$$= \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} \text{ 种.}$$

组合： 从 n 个不同的元素中取出 m 个(**不放回地**）组成一组，不同的分法共有

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$ 种.

多组组合： 把 n 个元素分成 m 个不同的组，各组分别有 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 个元素，

$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$，不同的分法共有

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k2} C_{n-k_1-k_2}^{k3} \ldots\ldots C_{n-k_1-k_2-\ldots\ldots-k_{m-1}}^{k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$ 种.