南京大學 NANJING UNIVERSITY

第一章 概率论的基本概念

主要内容

1.1 随机试验

1.2 样本空间、随机事件

1.3 频率与概率

1.4 等可能概型（古典概型）

1.5 条件概率

1.6 独立性

确定性现象和随机现象

- **确定性（决定性）现象：**在一定条件下必然发生的现象。
  - 两个同性电荷一定互斥。
  - 一个大气压下水加热到100摄氏度会沸腾。
- **随机现象：**试验或观察之前不能预知确切结果的现象。
  - 抛掷一枚均匀硬币，观察哪面朝上。
  - 从54张扑克牌中任意抽取一张，观察抽到的是哪张。

统计规律性

- 对随机现象进行大量观察，能发现在不确定性中包含着规律性，这称为统计规律性。
  - 例如，某些服务系统对顾客的服务时间是服从指数分布的，人的身高是服从正态分布的。
- 概率论和统计学的工作就是研究随机现象的统计规律性。

1.1 随机试验

随机试验（1）

- 对随机现象的观察或试验若满足以下3点，则这样的试验就是**随机试验**：
  - 在相同条件下可以重复进行；
  - 试验结果不止一个，但可以预知一切可能的结果；
  - 试验前不能确定会出现哪个结果。

随机试验（2）

- **例：以下是4个随机试验。**
  - E_1：抛一枚硬币，观察正面H、反面T出现的情况。
  - E_2：将一枚硬币抛掷3次，观察出现正面的次数。
  - E_3：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。
  - E_4: 记录某地一昼夜的最高温度和最低温度。

1. 2 样本空间、随机事件

样本空间（1）

- 样本空间：将随机试验E的所有可能结果组成的集合称为E的样本空间，记为S。

- 样本点：样本空间的元素，即E的每个结果，称为样本点。

样本空间（2）

- E_1：抛一枚硬币，观察正面H、反面T出现的情况。

  $S_1=\{H,T\}$

- E_2：将一枚硬币抛掷3次，观察出现正面的次数。

  $S_2=\{0, 1, 2, 3\}$

- E_3：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

  $S_3=\{t \mid t \geq 0\}$

- E_4: 记录某地一昼夜的最高温度和最低温度。

  $S_4=\{(x, y) \mid T_0 \leq x \leq y \leq T_1\}$

注：样本空间中的样本点可以是有限的或无限的，可以是离散的或连续的，可以是一维的或多维的。

随机事件（1）

- **随机事件：**称试验E的样本空间S的子集为E的随机事件，简称为事件，用A、B、C……表示。
  - 在E_1中，A={H}表示的事件为：

    抛一枚硬币，出现了正面
  - 在E_2中，B={0, 2}表示的事件为：

    将一枚硬币抛掷3次，正面出现的次数为偶数
  - 在E_3中，$C=\{t \mid 0\le t\le 1000\}$表示的事件为：

    灯泡的寿命小于1000小时
  - 在E_4中，$D=\{(x, y) \mid y - x = 10, T_0 \le x \le y \le T_1\}$

    最高温度与最低温度相差10度

随机事件（2）

- **“事件A发生”这一说法的含义是：A中某个样本点发生了就称A发生了。**
  - 在E_2（将一枚硬币抛掷3次，观察出现正面的次数）中，事件A={0，2}，即“正面出现了偶数次”。如果在某次试验中，正面出现了2次，则可以说事件A发生了。

随机事件（3）

- 基本事件：由一个样本点构成的事件称为基本事件。
  - E_1有两个基本事件：{T}，{H}
  - E_2有4个基本事件：{0}，{1}，{2}，{3}

随机事件（4）

- **必然事件：**每次试验都发生的事件。

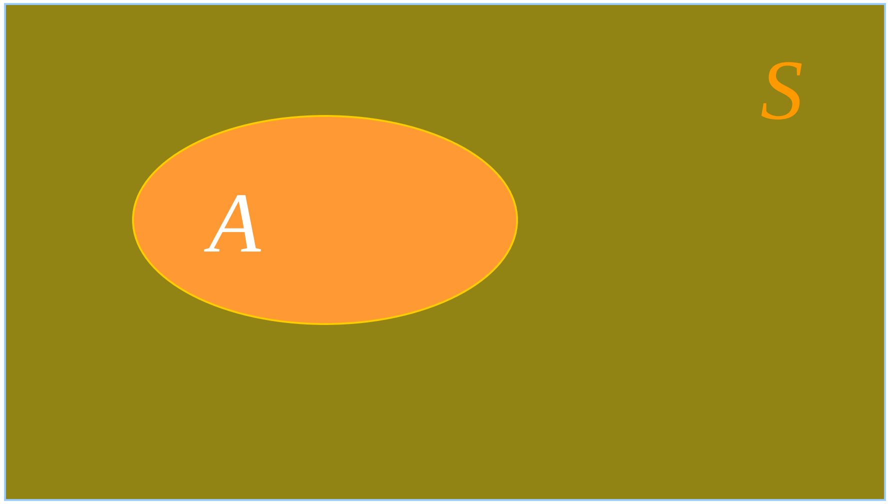
  实际上就是样本空间S

- **不可能事件：**每次试验都不会发生的事件。

  实际上就是空集Φ

事件间的关系与事件的运算（1）

文氏图（Venn diagram）

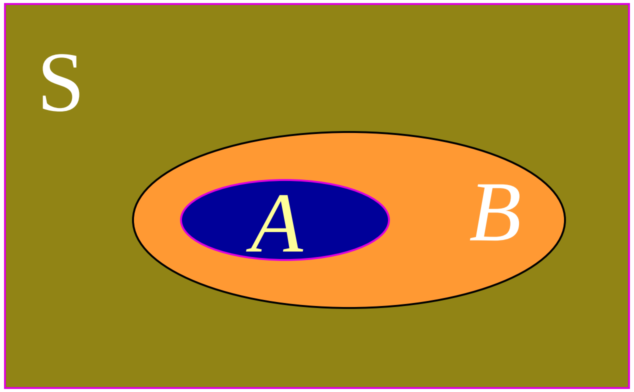


事件间的关系与事件的运算（2）

- 1、事件的包含

$A \subset B$ ——A 包含于B

$\Leftrightarrow$ 事件 A 发生必导致事件 B 发生



事件间的关系与事件的运算（3）

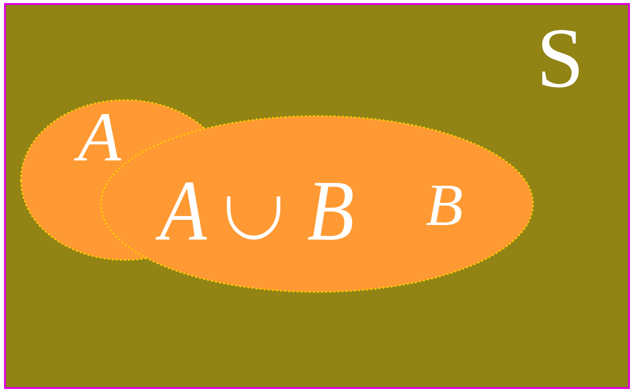
- 2、事件相等

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{且} B \subset A$$

事件间的关系与事件的运算（4）

- 3、事件的和（并）

$A \cup B$ —— A 与 B 的和事件



$A \cup B$发生

$\Leftrightarrow$事件A与事件B至少有一个发生

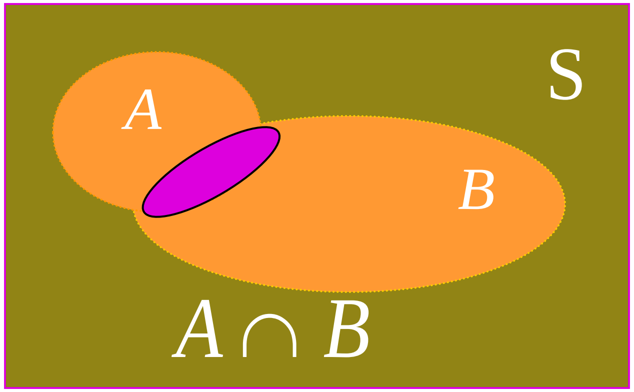
$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$的和事件 —— $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n, \ldots$的和事件 —— $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

事件间的关系与事件的运算（5）

- 4、事件的积（交）

$A\cap B$——A 与 B 的积事件



$A\cap B$ 发生

$\Leftrightarrow$ 事件 A 与事件 B 同时发生

$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ 的积事件 —— $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

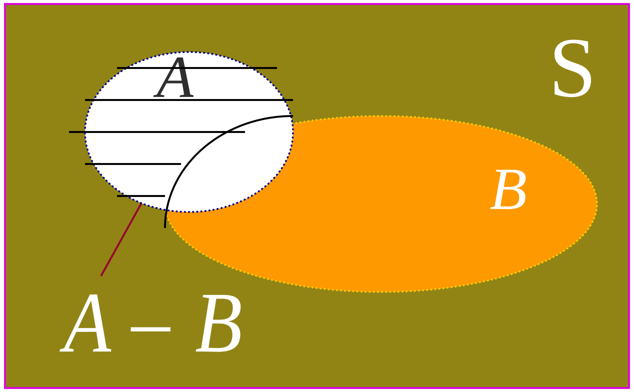
$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n, \ldots\ldots$ 的积事件 —— $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

事件间的关系与事件的运算（6）

- 5、事件的差

$A - B$

——A 与B 的差事件



$A-B$发生

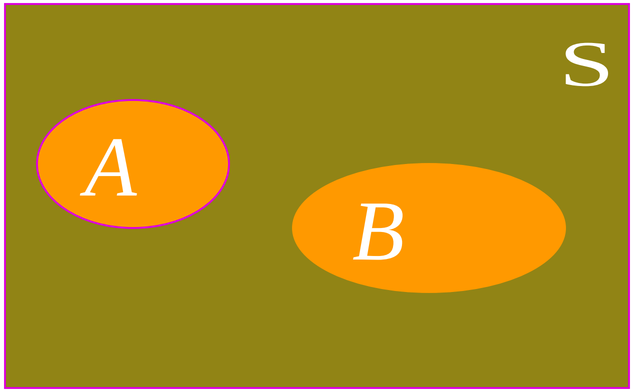
$\Leftrightarrow$ 事件A发生，但事件B不发生

事件间的关系与事件的运算（7）

- 6、事件的互斥（互不相容）

$AB=\Phi$——— A 与 B 互斥

$\Leftrightarrow A$、B不可能同时发生



$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$两两互斥

$$\Leftrightarrow A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i, j=1,2,\cdots,n$$

$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\ldots\ldots$两两互斥

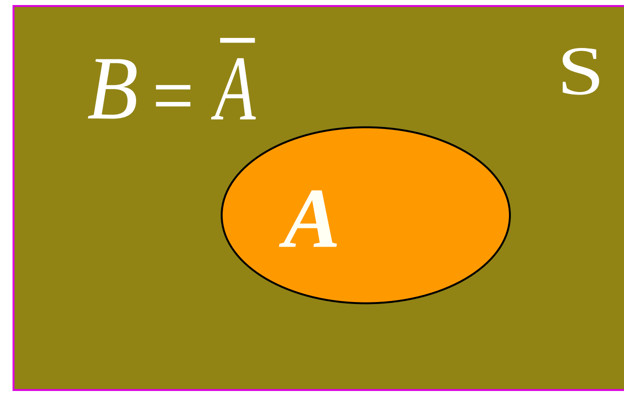
$$\Leftrightarrow A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i, j=1,2,\cdots$$

事件间的关系与事件的运算（8）

- **7、事件的对立**

$$AB=\varnothing,\ A\cup B=S$$

——A 与 B 互相对立



A与B对立$\Leftrightarrow$每次试验A、B中有且只有一个发生

称B 为A的**对立事件**(or**逆事件**)，记为 $B=\bar{A}=S-A$

注意：“A 与 B 互相对立”与“A 与 B 互斥”是不同的概念。

事件间的关系与事件的运算（9）

- 8、运算律

吸收率 $A \cup S = S$　　$A \cap S = A$

$A \cup \varnothing = A$　　$A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup (AB) = A$　　$A \cap (A \cup B) = A$

重余律 $\overline{\overline{A}} = A$

幂等律 $A \cup A = A$　　$A \cap A = A$

差化积 $A - B = A\overline{B} = A - (AB)$

事件间的关系与事件的运算（10）

交换律 $A\cup B=B\cup A$ $\quad AB=BA$

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$$(AB)C=A(BC)$$

分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$$

德摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$ $\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

运算顺序： 逆交并差，括号优先

例题

1.化简事件 $\overline{(\overline{A}\cap\overline{B}\cup C)\overline{AC}}$

解： 原式$=\overline{\overline{A}\,\overline{B}\cup C}\cup AC=\overline{\overline{A}\,\overline{B}}\,\overline{C}\cup AC$

$$=(A\cup B)\overline{C}\cup AC$$

$$=A\overline{C}\cup B\overline{C}\cup AC$$

$$=A(\overline{C}\cup C)\cup B\overline{C}$$

$$=AS\cup B\overline{C}=A\cup B\overline{C}$$

2.利用事件关系和运算表达多个事件的关系

A, B, C 都不发生——

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$$

A, B, C 不都发生——

$$\overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$

3.在图书馆中任意抽取一本书，

事件 A 表示抽取到数学书，

B 表示抽取到中文版书，

C 表示抽取到平装书.

$AB\overline{C}$ —— 抽取的是精装中文版数学书.

$\overline{C} \subset B$ —— 精装书都是中文版书.

$\overline{A} = B$ —— 非数学书都是中文版的，且中文版的书都是非数学书.

1. 3 频率与概率

频率（1）

- **频率：** 在相同的条件下，进行了n次试验，事件A发生的次数n_A称为事件A发生的**频数**，比值n_A/n称为事件A发生的**频率**，并记成$f_n(A)$.

- **频率的性质：**

  (1) $0 \le f_n(A) \le 1$

  (2) $f_n(S) = 1$

  (3) 若$A_1, A_2, \ldots, A_k$两两互斥，则

  $$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \ldots + f_n(A_k)$$

频率（2）

- **频率稳定性的试验**

德摩根(Morgan)投币

投掷一枚硬币，观察正面向上出现的次数

$n = 2048, \quad n_H = 1061, \quad f_n(H) = \mathbf{0.5181}$

蒲丰(Buffon)投币

$n = 4040, \quad n_H = 2048, \quad f_n(H) = \mathbf{0.5069}$

皮尔逊(Pearson) 投币

$n = 12000, \quad n_H = 6019, \quad f_n(H) = \mathbf{0.5016}$

$n = 24000, \quad n_H = 12012, \quad f_n(H) = \mathbf{0.5005}$

频率（3）

- 通过上述投币试验的数据可以发现：
  - 当n越来越大时，$f_n(H)$ 越来越趋近于某一个固定的数值——频率稳定性.
  - 这个固定的数值实际上就是事件发生的概率.

频率（4）

后面章节会在理论上证明：当试验次数n较大时，

事件发生的概率 $\approx$ 事件发生的频率

（伯努利大数定律）

概率（1）

概率的定义： 设 S 是随机试验E 的样本空间，对于E的每一个事件A赋予一个实数，记为$P(A)$，称为事件A的概率，如果集合函数$P(\bullet)$满足下列条件：

非负性：$\forall A \subset S$，$P(A) \geq 0$

规范性：$P(S) = 1$

可列可加性：$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

（其中 $A_1, A_2, \cdots$ 为两两互斥事件）

概率（2）

- **概率的性质：**

1. $P(\Phi) = 0$

2. 有限可加性：设$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

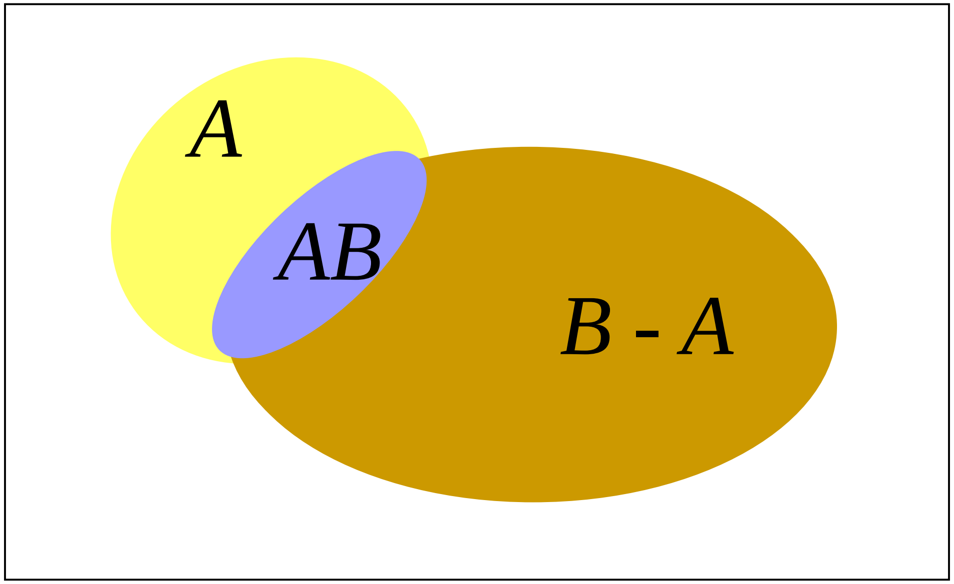
3. $A \subset B \quad \Rightarrow P(B-A) = P(B) - P(A)$

$$\Rightarrow P(A) \le P(B)$$

概率（3）

对任意两个事件A, B, 有：

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$



因为：

B-A=B-AB, 而

AB又包含于B.

概率（4）

4. $P(A) \leq 1$

因为A包含于S, 则$P(A) \leq P(S)=1$

5. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

因为$A \cap \overline{A} = \Phi$, 且$A \cup \overline{A} = S$,

则$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$,

即$1 = P(S) = P(A) + P(\overline{A})$.

概率（5）

6.加法公式： 对任意两个事件A, B, 有：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

则：$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$

推广：

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)$$
$$+P(ABC)$$

概率（6）

例： 某人外出旅游两天，据天气预报，第一天下雨的概率是0.6，第二天下雨的概率是0.3，两天都下雨的概率是0.1，试求:

（1）第一天下雨而第二天不下雨的概率;

（2）第一天不下雨而第二天下雨的概率;

（3）至少有一天下雨的概率;

（4）两天都不下雨的概率;

（5）至少有一天不下雨的概率 。

概率（7）

解： 假设事件A表示第一天下雨，事件B表示第二天下雨，则$P(A)=0.6$，$P(B)=0.3$，$P(AB)=0.1$。

$$(1)P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.6-0.1=0.5;$$

$$(2)P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.3-0.1=0.2;$$

$$(3)P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6+0.3-0.1=0.8;$$

$$(4)P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.8=0.2;$$

$$(5)P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.1=0.9。$$

THE END