大学数学试卷 答案 2021.1.4

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，且 $A^2B+A=B+E$，求矩阵 B 及行列式 $|B|$.

解：由 $A^2B+A=B+E$ 可得 $(A-E)(A+E)B=E-A$，且 $|A-E|=-2\neq 0$，

故 $(A+E)B=-E$，$B=-(A+E)^{-1}=-\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&3&0\\-1&0&2\end{pmatrix}^{-1}=-\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1/3&0\\1/2&0&1\end{pmatrix}$，$|B|=-1/6$.

解法二：由 $A^2B+A=B+E$ 可得 $(A^2-E)B=E-A$，

故 $B=(A^2-E)^{-1}(E-A)=\begin{pmatrix}2&0&-4\\0&3&0\\-2&0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&0&2\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1/3&0\\-1/2&0&-1\end{pmatrix}$，$|B|=-1/6$.

解法三：由 $A^2B+A=B+E$ 可得 $(A^2-E)B=E-A$，解矩阵方程

$$(A^2-E,E-A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-4&0&0&2\\0&3&0&0&-1&0\\-2&0&2&1&0&0\end{array}\right)^{-1}\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&0&-1\\0&1&0&0&-1/3&0\\0&0&1&-1/2&0&-1\end{array}\right),$$

故 $B=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1/3&0\\-1/2&0&-1\end{pmatrix}$，$|B|=-1/6$.

2. 设 $\alpha=(1,1,-1)^{\mathrm T}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，求常数 a,b 的值.

解：$A\alpha=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\a+2\\b+1\end{pmatrix}$，由 $A\alpha$ 与 α 线性相关，得 $\dfrac{-1}{1}=\dfrac{a+2}{1}=\dfrac{b+1}{-1}$.

解得 $a=-3,b=0$.

解法二：因为 $A\alpha=\lambda\alpha$，故得 $\begin{cases}-1&=&\lambda,\\a+2&=&\lambda,\\b+1&=&-\lambda.\end{cases}$，解得 $\lambda=-1,a=-3,b=0$.

解法三：$A\alpha=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\a+2\\b+1\end{pmatrix}$，由 $A\alpha$ 与 α 线性相关，知 $\mathrm r(\alpha,A\alpha)=1$。

而 $(\alpha,A\alpha)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&a+2\\-1&b+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&a+3\\0&b\end{pmatrix}$，可得 $a=-3,b=0$.

3. α 为 n 维实单位列向量，$A=E-k\alpha\alpha^{\mathrm T}$ 为正定矩阵，求实数 k 的取值范围.

解：由 $\mathrm r(E-A)=1$ 可知 1 为 A 的 $n-1$ 重特征值，又因为 $A\alpha=(1-k)\alpha$，

所以 $1-k$ 为 A 的 1 重特征值，由 A 正定知 $1-k>0$ 即 $k<1$.

解法二：设 $B=\alpha\alpha^{\mathrm T}$，由 α 为 n 维实单位列向量，可得 $B^2=\alpha(\alpha^{\mathrm T}\alpha)\alpha^{\mathrm T}=B$，于是 $B^2-B=O$.

设 λ 为 B 的特征值，ξ 为对应的特征向量，则有 $\theta=O\xi=(B^2-B)\xi=(\lambda^2-\lambda)\xi$，

故有 $\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)=0$，即 B 的特征值 $\lambda=0$ 或者1，于是 $A\xi=(E-kB)\xi=(1-k\lambda)\xi$，

即 A 的特征值为 1 或者 $1-k$，由于 A 正定，故 $1-k>0$，即 $k<1$.

解法三：由单位向量 α 构造标准正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，其中 $\beta_1=\alpha$，令 $P=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，

则有 $\alpha^{\mathrm T}P=\alpha^{\mathrm T}(\alpha,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(e_1,0,\cdots,0)=E_{11}$，于是

$$P^{\mathrm T}AP=E-kP^{\mathrm T}\alpha\alpha^{\mathrm T}P^{\mathrm T}=E-kE_{11}^{\mathrm T}E_{11}=\begin{pmatrix}1-k&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix},\text{由于}A\text{正定,故}1-k>0,\text{即 }k<1.$$

解法四：任取n维向量 $x\neq\theta$，$A=E-k\alpha\alpha^T$ 为正定矩阵，故要满足 $x^{\mathrm T}Ax=x^{\mathrm T}x-k(\alpha^{\mathrm T}x)^2>0$，

显然 $\alpha^{\mathrm T}A\alpha=\alpha^{\mathrm T}\alpha-k(\alpha^{\mathrm T}\alpha)^2=1-k>0$. 当 $1-k>0$ 时，由柯西不等式 $(\alpha^{\mathrm T}x)^2\leq(x^{\mathrm T}x)(\alpha^{\mathrm T}\alpha)=x^{\mathrm T}x$，

$\alpha^{\mathrm{T}}x \neq 0$ 时有 $x^{\mathrm{T}}Ax = x^{\mathrm{T}}x - k(\alpha^{\mathrm{T}}x)^2 \geq (\alpha^{\mathrm{T}}x)^2 - k(\alpha^{\mathrm{T}}x)^2 = (1-k)(\alpha^{\mathrm{T}}x)^2 > 0$，
$\alpha^{\mathrm{T}}x = 0$ 时显然有 $x^{\mathrm{T}}Ax = x^{\mathrm{T}}x - k(\alpha^{\mathrm{T}}x)^2 = x^{\mathrm{T}}x > 0$，故 k 满足 $k < 1$.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$，证明 A 与 B 合同，即存在可逆矩阵 P，使得 $B = P^{\mathrm{T}}AP$.

证：依次交换 A 的第1,2行，第2,3行，同时做相应的列操作，可将 A 合同变换至 B，

即取 $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，可使得 $B = P^{\mathrm{T}}AP$. (P 也可以为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 \end{pmatrix}$ 中的任何一种矩阵).

证法二：易知 A 有特征值 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b, \lambda_3 = c$，对应特征向量 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

则令 $P = (\pm\xi_1, \pm\xi_2, \pm\xi_3)$，则 P 为正交阵，且 $P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = B$.

(注：用 $P = \mathrm{diag}(\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{c}{b}}, \sqrt{\frac{a}{c}})$ 是错的，因为 a, b, c 可能为0)

二、(本题12分) 已知二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$ 经正交变换可化为标准形 $f = 2y_1^2 + y_3^2$，试求 a, b.

解：由 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = B$，可得 $A - E \sim B - E$，

可知 $|A| = 2ab - a^2 - b^2 = |B| = 0, |A - E| = 2ab = |B - E| = 0$，因此 $a = b = 0$.

解法二：由 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，可知 A 有特征值 $\lambda = 2, 0, 1$，代入特征多项式 $|\lambda E - A|$ 得

$|2E - A| = -a^2 - b^2 - 2ab = 0, |0E - A| = a^2 + b^2 - 2ab = 0, |E - A| = -2ab = 0$，解得 $a = b = 0$.

解法三：由 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，可知 A 有特征值 $\lambda = 2, 0, 1$,

故 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - 1 & -b \\ -1 & -b & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + (2 - a^2 - b^2)\lambda + (a^2 + b^2 - 2ab)$

$= (\lambda - 2)\lambda(\lambda - 1) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$,

比较系数得 $2 - a^2 - b^2 = 2, a^2 + b^2 - 2ab = 0$，解得 $a = b = 0$.

三、(本题12分) 设3阶实对称矩阵 A 的各行元素之和都为2，向量 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$ 为线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(1) 求 A 的全部特征值与特征向量; (2) 求正交矩阵 P，使得 $P^{\mathrm{T}}AP$ 为对角阵; (3) 求矩阵 A.

解：(1) 由 $A(1,1,1)^{\mathrm{T}} = 2(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，可知 $\lambda = 2$ 是 A 的一个特征值，且 $\alpha_3 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的属于特征值2的特征向量. 再由 $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 0$ 知，A 的特征值为0,0,2. 属于特征值0的全部特征向量为 $k_1\alpha_2 + k_2\alpha_2, k_1, k_2$不全为0. 属于特征值2的全部特征向量形如 $k_3\alpha_3, k_3 \neq 0$.

(2) 将 α_1, α_2 正交化并单位化，可得 $\beta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}, \beta_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^{\mathrm{T}}$,

再将 α_3 单位化，得 $\beta_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^{\mathrm{T}}$. 则

$$P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ 为正交阵且满足 } P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

(注：P 不唯一，只要构成矩阵 P 的前两列 β_1, β_2 与 $\beta_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^{\mathrm{T}}$ 构成标准正交向量组即可)

(3)解法一：$A = P\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 2\end{pmatrix}P^{\mathrm{T}} = \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

解法二：$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,2\alpha_3)$，故 $A=(0,0,2\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

解法二：(1) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则根据条件，有 $A\alpha_1=A\alpha_2=0, A\alpha_3=2\alpha_3$，即

$$\begin{cases}a_{11}-a_{13} &= 0,\\ a_{21}-a_{23} &= 0,\\ a_{31}-a_{33} &= 0,\end{cases}\qquad \begin{cases}a_{11}-a_{12} &= 0,\\ a_{21}-a_{22} &= 0,\\ a_{31}-a_{32} &= 0,\end{cases}\qquad \begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13} &= 2,\\ a_{21}+a_{22}+a_{23} &= 2,\\ a_{31}+a_{32}+a_{33} &= 2.\end{cases}$$

解得 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{22}=a_{23}=a_{31}=a_{32}=a_{33}=2/3$，即 $A=\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

$|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-2)$，故有特征值 $\lambda=0$(二重), 2.
当$\lambda=0$时,解得无关特征向量为:$\xi_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\xi_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,特征向量为$k_1\xi_1+k_2\xi_2,k_1,k_2$不全为0.
当 $\lambda=2$ 时，解得无关特征向量为：$\xi_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，特征向量为 $k_3\xi_3,k_3\neq 0$.
(2) 将 $\lambda=0$ 的无关特征向量 ξ_1,ξ_2 标准正交化得 $\beta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\beta_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，将 $\lambda=2$ 的无关特征向量 ξ_3 单位化得 $\beta_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，令 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 P 正交且 $P^{\mathrm{T}}AP=\mathrm{diag}(0,0,2)$.

(3) 由(1)已得 $A=\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

四、 (**本题12分**) 设 n 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n)$ 的前 $n-1$ 个列向量线性无关，
又 $\alpha_n=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}$. 令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$.
(1) 证明：方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多组解; (2) 求方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

解：(1) 因为 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 线性表示，故方程组 $Ax=\beta$ 有解，即 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,b)$.
又因为 $\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 线性相关，因此 $\mathrm{r}(A,b)=\mathrm{r}(A)<n$，从而方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多组解.
(2) $n-1=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})\le \mathrm{r}(A)<n$，因此 $\mathrm{r}(A)=n-1$，又有 $\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}-\alpha_n=0$，
于是 $Ax=\beta$ 的通解为 $(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}+k(0,1,\cdots,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意实数.

解法二：(1) $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n)\xrightarrow{c_n-c_1-\cdots-c_{n-1}}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},0)$，
故$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})=n-1$，$Ax=0$基础解系含一个向量，由$\alpha_n=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}$知，
$0\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}-\alpha_n=0$，即 $\xi=(0,1,1,\cdots,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系.
又有 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 知 $\eta=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $Ax=\beta$ 的一个特解，故 $Ax=\beta$ 通解为 $\eta+k\xi,k\in\mathbf{R}$.
由通解公式知 $Ax=\beta$ 有无穷多组解.
(2) 由(1)得到 $Ax=\beta$ 通解为 $\eta+k\xi,k\in\mathbf{R}$.

五、 (**本题12分**) 设 A 为三阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的三个不同特征值，
对应的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.
(1) 证明 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关; (2) 若 $A^3\beta=A\beta$，求秩 $\mathrm{r}(A-E)$ 及行列式 $|A+2E|$.

(1)证法一：由 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 及 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i\ (i=1,2,3)$，可知

$$A\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3\quad,\qquad A^2\beta=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3,$$

设 $k_1\beta+k_2A\alpha+k_3A^2\beta=0$，将上式代入整理可得

$$(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2)\alpha_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2)\alpha_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2)\alpha_3=0.$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三个不同特征值对应的特征向量，必线性无关，于是

$$\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=0.$$

其系数行列式非零，因此必有 $k_1=k_2=k_3=0$，故 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关.

证法二：由 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 及 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i\ (i=1,2,3)$，可知

$$A\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3\quad,\qquad A^2\beta=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3，于是$$

$$(\beta, A\beta, A^2\beta) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B,$$

故 $|\beta, A\beta, A^2\beta| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3|\cdot|B|$，因为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 互不相同，故 $|B| = (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2) \neq 0$，且对应的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，从而 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \neq 0$，于是 $|\beta, A\beta, A^2\beta| \neq 0$，即 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关.

(2) 解法一：由 $A^3\beta = A\beta$ 可得

$$A(\beta, A\beta, A^2\beta) = (A\beta, A^2\beta, A^3\beta) = (A\beta, A^2\beta, A\beta) = (\beta, A\beta, A^2\beta)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = (\beta, A\beta, A^2\beta)B.$$

记 $P = (\beta, A\beta, A^2\beta)$，$P$ 可逆且 $P^{-1}AP = B$，即 $A \sim B$，则也有 $A-E \sim B-E, A+2E \sim B+2E$，

因此 $\mathrm{r}(A-E) = \mathrm{r}(B-E) = \mathrm{r}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} = 2, |A+2E| = |B+2E| = \begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix} = 6.$

解法二：由 $(A^3-A)\beta = 0$，可知 $(\lambda_1^3-\lambda_1)\alpha_1 + (\lambda_2^3-\lambda_2)\alpha_2 + (\lambda_3^3-\lambda_3)\alpha_3 = 0$，而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，可知 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 均满足方程 $\lambda^3 - \lambda = 0$，又因为 A 的特征值各不相同，因此只能分别是 $0, -1, 1$，而 $A-E$ 的特征值为 A 的特征值减1即-1,-2,0，互不相同，可对角化，故 $A-E \sim \mathrm{diag}(-1,-2,0)$，从而 $\mathrm{r}(A-E) = 2$，而行列式 $|A+2E| = (0+2)\cdot(-1+2)\cdot(1+2) = 6.$

解法三：由 $(A^3-A)\beta = (A-E)(A+E)A\beta = (A-E)(A^2+A)\beta = (A-E)(A^2\beta + A\beta) = 0$ 可知 $\xi_1 = A^2\beta + A\beta$ 满足 $A\xi_1 = \xi_1$，因为 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关，故 $\xi_1 = A^2\beta + A\beta \neq 0$，于是 ξ_1 为 A 的属于特征值1的特征向量. 同理 $\xi_2 = A^2\beta - A\beta \neq 0, \xi_3 = A^2\beta - \beta \neq 0$ 分别为 A 的属于特征值-1和0的特征向量，故3阶矩阵 A 有互不相同的特征值1,-1,0，而 $A-E$ 的特征值为 A 的特征值减1即0,-2,-1，互不相同，可对角化，故 $A-E \sim \mathrm{diag}(0,-2,-1)$，从而 $\mathrm{r}(A-E) = 2$，而行列式 $|A+2E| = (1+2)\cdot(-1+2)\cdot(0+2) = 6.$

(注：(2)中如果用 $A^3\beta = \lambda^3\beta, A\beta = \lambda\beta$，故特征值满足 $\lambda^3 - \lambda = 0$ 是错误的，因为 β 不是 A 的特征值)

六、(本题12分) 已知线性空间 $\mathbf{R^3}$ 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 P，且

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 3\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

试求：(1) 基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; (2) 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下具有相同坐标的全部向量.

解：(1) 从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 P，即

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 3\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 1 & 5\\ 11 & -2 & 8\\ 10 & 1 & 8\end{pmatrix},$$

因此基 $\beta_1 = \begin{pmatrix}6\\11\\10\end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix}5\\8\\8\end{pmatrix}.$

(2)解法一：设所求向量的坐标为 x，则 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)Px$，因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以 $Px = x$，即 $(P-E)x = 0$，经行变换，

$$P - E = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 3\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得 $x = (1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，故所求向量为 $\alpha = k(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = k(2,1,3)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

解法二 设所求向量的坐标为 x，则 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x$，即 $(\beta_1-\alpha_1, \beta_2-\alpha_2, \beta_3-\alpha_3)x = 0$，解方程组

$$(\beta_1-\alpha_1, \beta_2-\alpha_2, \beta_3-\alpha_3) = \begin{pmatrix}5 & 0 & 5\\ 11 & -4 & 7\\ 9 & -1 & 8\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得 $x = (1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，故所求向量为 $\alpha = k(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = k(2,1,3)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

七、(本题12分) (1) 已知矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A) = 1$，证明：存在非零列向量 α 和 β，使得 $A = \alpha\beta^{\mathrm{T}}$.

(2) 已知矩阵 $A = \alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}} + \alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}$，其中列向量 α_1, α_2 线性无关，β_1, β_2 也线性无关，证明：$\mathrm{r}(A) = 2$.

证：(1) $\mathrm{r}(A) = 1$ 说明 A 的列秩为1，则 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 的任意两列线性相关，

取 A 的一个非零列向量记为 α，则 $\alpha_i = b_i\alpha, i=1,2,\cdots,n$，记 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，
因为有一个 b_i 为1，则 β 非零，有 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$.

(2)解法一：由 $A=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 及线性无关性知，

$$2=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2)+\mathrm{r}((\beta_1,\beta_2)^{\mathrm{T}})-2\le \mathrm{r}(A)\le \mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2)=2，故\ \mathrm{r}(A)=2.$$

解法二：由 $A=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 及线性无关性知，

$$2=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2)+\mathrm{r}((\beta_1,\beta_2)^{\mathrm{T}})-2\le \mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}})\le \mathrm{r}(\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}})+\mathrm{r}(\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}})=2，故\ \mathrm{r}(A)=2.$$

解法三：根据结论：若 P 行满秩，则 $\mathrm{r}(AP)=\mathrm{r}(A)$. 可知 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}((\alpha_1,\alpha_2)(\beta_1,\beta_2)^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2)=2$.

解法四：由 $A=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，令 $B=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，由线性无关性有 $\mathrm{r}(B)=2$.
只要证明 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，即可得 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)=2$.
若 x 满足方程组 $Bx=0$，则有 $Ax=(\alpha_1,\alpha_2)Bx=0$，若 x 满足 $Ax=0$，令 $y=Bx$，
则有 $(\alpha_1,\alpha_2)y=0$，由于 α_1,α_2 线性无关，故 $y=0$，于是 $Bx=y=0$，即 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

证法二：(1) 因为 $\mathrm{r}(A)=1$ 我们有分解 $A=P\begin{pmatrix}1 & \\ & O\end{pmatrix}Q=Pe_1e_1^{\mathrm{T}}Q=(Pe_1)(e_1^{\mathrm{T}}Q)=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，
其中 P,Q 可逆，$\alpha,\beta^{\mathrm{T}}$ 分别是 P,Q 的第一列和第一行，故 α,β 非零.

(2) 因为 α_1,α_2 线性无关，故存在可逆矩阵 P 使得 $P(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}E_2\\ O\end{pmatrix}$，

同理有可逆矩阵 Q 使得 $Q(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}E_2\\ O\end{pmatrix}$，

于是有 $PAQ^{\mathrm{T}}=P(\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}})Q^{\mathrm{T}}=P(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}E_2\\ O\end{pmatrix}(E_2,O)=\begin{pmatrix}E_2 & O\\ O & O\end{pmatrix}$，

故 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(PAQ^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}E_2 & O\\ O & O\end{pmatrix}=2$.