南京大学大学数学试卷 答案

考试时间____2019.6.17____ 任课教师__________ 考试成绩__________

一、 简答题(每小题7分,共4题,计28分)

1. 设 $A=\begin{pmatrix}-4&2&0&0\\2&0&0&0\\0&0&-7&3\\0&0&5&-1\end{pmatrix}$，且 $BA=A+B$，求矩阵 B.

解：$B(A-E)=A\Rightarrow B=A(A-E)^{-1}$，$A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix},A-E=\begin{pmatrix}-5&2&0&0\\2&-1&0&0\\0&0&-8&3\\0&0&5&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_3&O\\O&A_4\end{pmatrix}$,

故 $B=A(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_3^{-1}&O\\O&A_4^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1A_3^{-1}&O\\O&A_2A_4^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&0&0\\-2&-4&0&0\\0&0&-1&-3\\0&0&-5&-7\end{pmatrix}$.

2. 已知二次型 $f(x)=x_1^2+2tx_1x_2+x_2^2+tx_3^2$ 为正定二次型，求 t 的取值范围.

解：二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&t&0\\t&1&0\\0&0&t\end{pmatrix}$，因为 f 为正定二次型，

故有：$\begin{vmatrix}1&t\\t&1\end{vmatrix}>0,|A|>0$，解得：$0<t<1$.

3. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，且 $m>n$，求 $|AB|$.

解：因为 AB 是 m 阶方阵，且 $r(AB)\le r(A)\le n<m$，故 $|AB|=0$.

4. 判断 $R^{2\times 2}$ 的下列子集是否构成子空间？问什么？

(1) $W_1=\{\ A\mid |A|=0,A\in R^{2\times 2}\ \}$； (2) $W_2=\{\ A\mid A^2=A,A\in R^{2\times 2}\ \}$.

解：(1) 不构成. 取 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，则 $|A|=|B|=0$，即 $A,B\in W_1$，

但 $A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},|A+B|=1$，可见 $A+B\notin W_1$，故 W_1 不构成子空间.

(2) 不构成. 取 $A=E$，则 $A^2=E^2=E=A$，即 $A\in W_2$，

但 $(2A)^2=(2E)^2=4E\ne 2A$，可见 $2A\notin W_2$，故 W_2 不构成子空间.

二、 (本题12分) 设3阶非零矩阵 B 的每一个列向量都是方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3&=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3&=0\\3x_1+x_2-x_3&=0\end{cases}$ 的解，

(1) 求 λ 的值； (2) 求证 $|B|=0$.

解：(1) 因为 $B\ne O$ 的每一个列向量都是方程 $Ax=0$ 的解，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{pmatrix}$，

于是此方程组有非零解，从而 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{vmatrix}=5(\lambda-1)=0$，即 $\lambda=1$.

(2) 设 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，由于 $A\beta_1=A\beta_2=A\beta_3=0$，所以 $AB=O$，

方法1. 从而 $r(A)+r(B)\le 3$，但 $r(A)\ge 1$，于是 $r(B)\le 2$，故 $|B|=0$.

方法2. 反证. 若 $|B|\ne 0$，则 $A=ABB^{-1}=O$，这与 $A\ne O$ 矛盾，故 $|B|=0$.

三. (本题12分) 设 A 为 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶反对称矩阵，证明：$A-B^2$ 为正定矩阵.

证：因为 A 是正定矩阵，B 为反对称矩阵，所以 $A^T=A, B^T=-B$，
从而 $(A-B^2)^T=A^T-(BB)^T=A^T-(B^TB^T)=A^T-(B^T)^2=A-(-B)^2=A-B^2$，
即 $A-B^2$ 为对称矩阵.
对任意 $x\neq 0$，有 $x^T(A-B^2)x=x^T[A+(-B)B]x=x^T(A+B^TB)x=x^TAx+(Bx)^T(Bx)>0$，
故 $A-B^2$ 为正定矩阵.

四. (**本题12分**) 设 A 是 n 阶实对称矩阵，且满足 $A^2+2A=O, r(A)=k$，试求 $|A+3E|$.

解：设 $Ax=\lambda x, x\neq 0$，则由 $(A^2+2A)x=(\lambda^2+2\lambda)x=0$ 得 $\lambda(\lambda+2)=0$，即 A 的特征值可能是0或-2.
由于 A 是实对称矩阵，所以 A 可相似于对角矩阵 Λ，且由 $r(\Lambda)=r(A)=k$ 知，-2 是 A 的 k 重特征值，即：$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2E_k & O\\ O & O\end{pmatrix}$，故

$|A+3E|=|P\Lambda P^{-1}+3E|=|P(\Lambda+3E)P^{-1}|=|\Lambda+3E|=\begin{vmatrix}E_k & O\\ O & 3E_{n-k}\end{vmatrix}=3^{n-k}$.

解法二：由 $A^2+2A=O$ 有 $(-2E-A)A=O$，再由 $r(A)=k$ 可知 $Ax=0$ 有 $n-k$ 个无关解，
$(-2E-A)x=0$ 有至少 k 个无关解. 故 A 有 k 重特征值 -2，$n-k$ 重特征值 0.
易知，$A+3E$ 的特征值为 A 的特征值+3，即 $A+3E$ 有 k 重特征值 1 和 $n-k$ 重特征值 3，
故 $|A+3E|=1^k\times 3^{n-k}=3^{n-k}$.

五. (**本题12分**) 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 -1,1,1，对应于特征值 -1 的向量为 $\alpha_1=(0,1,1)^T$，求 A.

解：设属于特征值 1 的特征向量为 $(a,b,c)^T$，则它与 α_1 正交，即 $0\cdot a+1\cdot b+1\cdot c=0$，也就是 $b+c=0$，
可得基础解系 $\alpha_2=(1,0,0)^T, \alpha_3=(0,1,-1)^T$.
令 $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，由于 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\1&0&0\\0&1/2&-1/2\end{pmatrix}$，
故 $A=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

六. (**本题12分**) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 的一个基，
(1) 证明：$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 也是 R^n 的一个基；
(2) 求从旧基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到新基 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 的过渡矩阵；
(3) 求向量 α 的旧坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 和新坐标 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 间的变换公式.

解：(1) 要证明 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 也是 R^n 的基，只需证明
$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 线性无关，不难知道

$$\begin{aligned}(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n) &= (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\\ &= (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P\end{aligned}$$

因为 $|P|=1\neq 0$，故 P 可逆.
从而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 等价，
而由题设条件 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 的一个基底，从而线性无关，所以向量组
$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 线性无关，故也是 R^n 的一组基.
(2) 从上问解答过程可知，从旧基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到新基 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 的过渡矩阵为P.
(3) 坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\0&1&-1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&\cdots&1&-1\\0&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

七. (**本题12分**) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=\beta$ 有解但不唯一，试求

(1) a 的值； (2) 正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角矩阵.

解：(1) 对线性方程组 $Ax=\beta$ 的增广矩阵作行初等变换有 $(A,\beta)\to\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(a-1)(a+2)&a+2\end{pmatrix}$

由方程组 $Ax=\beta$ 有解但不唯一知 $r(A\ \beta)=r(A)<3$，故 $a=-2$.

(2) 由 (1) 有 $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$，$A$ 的特征多项式：$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$，

故 A 的特征值为：$\lambda_1=3,\lambda_2=-3,\lambda_3=0$.

对应的特征向量依次是：$\alpha_1=(-1,0,1)^T,\alpha_2=(1,-2,1)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$，

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化得：$\beta_1=(-\frac{\sqrt2}{2},0,\frac{\sqrt2}{2})^T,\beta_2=(\frac{\sqrt6}{6},-\frac{2\sqrt6}{6},\frac{\sqrt6}{6})^T,\beta_3=(\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3})^T$，

故 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，有 $Q^TAQ=\mathrm{diag}(3,-3,0)$.