第八章 假设检验

主要内容

- 8.1 假设检验
- 8.2 正态总体均值的假设检验
- 8.3 正态总体方差的假设检验

8.1 假设检验

何为假设检验?

- 首先针对一个或多个总体提出关于概率分布或参数的假设. 提出的假设可能是正确的, 也可能是错误的.
- 为判断提出的假设是否正确, 从总体中抽取样本, 根据样本的取值, 按一定原则进行检验, 然后作出接受或拒绝假设的决定.

假设检验的内容

- 总体均值、均值差的检验
- 总体方差、方差比的检验
- 分布拟合检验
- 秩和检验

假设检验的理论依据

- 小概率事件原理
  - 即一般认为小概率事件在一次随机抽样中不会发生。

引例

- 某车间用一台包装机包装葡萄糖. 袋装糖的净重是一个随机变量, 它服从正态分布.当机器正常时，其均值为 0.5kg, 标准差为 0.015kg. 某日开工后为检验包装机是否正常, 随机地抽取它所包装的糖 9袋, 称得净重为(kg): 0.497 0.506 0.518 0.524 0.498 0.511 0.520 0.515 0.512, 问机器是否正常?

以 μ, σ 分别表示这一天袋装糖的净重总体 X 的均值和标准差. 由于长期实践表明标准差比较稳定，所以假设$\sigma = 0.015$.

引例

提出以下两个相互对立的假设:

$H_0: \mu = \mu_0 = 0.5$ ——称为**原假设**或**零假设**

原假设的对立面:

$H_1: \mu \neq \mu_0$ ——称为**备择假设**

假设检验的任务

必须在原假设与备择假设之间作一选择

因为 $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$，从而 $E(\overline{X}) = \mu.$

若原假设H_0正确，则 $\overline{X}$ 偏离 0.5 不应该太远,

若 $\overline{X}$ 偏离0.5太远, 就怀疑H_0的正确性而拒绝H_0,

检验统计量，记为 Z

即当 $\left|\dfrac{\overline{X}-0.5}{0.015/3}\right|$ 取较大值时(小概率事件)，拒绝H_0.

小概率事件

因此, 可以确定一个常数k使得 $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-0.5}{0.015/3}\right| \geq k\right) = \alpha$

显著性水平

取 $\alpha = 0.05$ ，则 $k = z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$

则 $\left|\dfrac{\overline{X}-0.5}{0.015/3}\right| \geq 1.96$ 为检验的拒绝域

$\left|\dfrac{\overline{X}-0.5}{0.015/3}\right| < 1.96$ 为检验的接受域 (实际上没理由拒绝)

现在 $\left|\dfrac{\overline{x}-0.5}{0.015/3}\right| = \left|\dfrac{0.511-0.5}{0.015/3}\right| = 2.2$

落入拒绝域, 则拒绝原假设H_0.

说明总体均值发生了显著性变化, 机器不再正常工作!

由上例可知, 在给定 α 的前提下, 接受还是拒绝原假设完全取决于样本值, 因此所作检验可能导致以下两类错误的产生:

第一类错误 ———— 弃真错误

第二类错误 ———— 取伪错误

假设检验的两类错误

真实情况 \ 所作判断	拒绝 H_0	不拒绝 H_0
H_0 为真	第一类错误（弃真）	判断正确
H_0 为假	判断正确	第二类错误（取伪）

犯第一类错误的概率通常记为 α（就是小概率事件临界值）

犯第二类错误的概率通常记为 β

引例中，犯第一类错误的概率

$$P(\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真})$$

$$= P\left(\left| \frac{\overline{X} - 0.5}{0.015/3} \right| \geq k \right)$$

$$= \alpha$$

所以, 拒绝 H_0 的概率为α, α 越大, 犯第一类错误的概率越大.

假设检验的两类错误

- 任何检验方法都不能完全排除犯错误的可能性。理想的检验方法应使犯两类错误的概率都很小，但在样本容量给定的情形下，不可能使两者都很小，降低一个，往往使另一个增大。
- 假设检验的指导思想是控制犯第一类错误的概率不超过α，然后，若有必要，通过增大样本容量的方法来降低β。

注 备择假设可以是双边的，也可以单边的.

引例中的备择假设是双边的. 若关心的是每包重量是否提高了. 此时可作如下的右边假设检验:

$$H_0: \mu \le 0.5; \qquad H_1: \mu > 0.5$$

若关心的是每包重量是否降低了. 此时可作如下的左边假设检验:

$$H_0: \mu \ge 0.5; \qquad H_1: \mu < 0.5$$

右边检验的拒绝域

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ 未知，σ 已知，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自 X 的样本. 给定显著性水平 α，求检验问题

$$H_0: \mu \le \mu_0, \quad H_1: \mu > \mu_0$$

的拒绝域.

因为 $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, 从而 $E(\overline{X}) = \mu$.

若原假设H_0正确, 则 $\overline{X} \leqslant \mu_0$ 是大概率事件,

即 $\overline{X} \geqslant \mu_0$ 是小概率事件, 此时应拒绝H_0.

即当 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/n}$ 取较大值时(小概率事件)，拒绝H_0.

因此, 可以确定一个常数 **k** 使得 $P\left(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq k\right)=\alpha$

则 $k=z_\alpha$

则 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha$ 为检验的拒绝域

$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < z_\alpha$ 为检验的接受域 (实际上没理由拒绝)

左边检验的拒绝域

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ 未知，σ 已知，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自 X 的样本. 给定显著性水平 α，求检验问题

$$H_0: \mu \geq \mu_0, \quad H_1: \mu < \mu_0$$

的拒绝域.

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha$$ 为检验的**拒绝域**

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > -z_\alpha$$ 为检验的**接受域** (实际上没理由拒绝)

假设检验的步骤

1. 根据实际问题所关心的内容, 建立H_0与H_1

2. 在H_0为真时, 选择合适的统计量W

3. 给定显著性水平α, 确定拒绝域

4. 根据样本值计算, 并作出相应的判断

8.2 正态总体均值的假设检验

（一）单个正态总体均值 μ 的检验

拒绝域的推导

给定显著性水平α与样本$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$,

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2 已知，需检验：

$$H_0: \mu = \mu_0\,, \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

选择统计量 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$P(\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真}) = \alpha$$

则 $P_{H_0}\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq k\right) = \alpha$

则 $k = z_{\alpha/2}$

所以本检验的拒绝域为

$$|Z| \geq z_{\alpha/2}$$ - · - · - · - · - **Z 检验法**

Z 检验法 (σ^2 已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\lvert Z \rvert \geq z_{\alpha/2}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$Z \leq -Z_\alpha$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$Z \geq Z_\alpha$

t 检验法 (σ^2 未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$	$\lvert t \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$t \leq -t_{\alpha}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$t \geq t_{\alpha}$

- **例** 某种元件的寿命 X (以 h 计)服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, μ, σ^2 均未知，现测得16只元件的寿命如下：

  159 280 101 212 224 379 179 264

  222 362 168 250 149 260 485 170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于225 h?

- **解** 按题意需检验

$$H_0:\mu\le\mu_0=225,\quad H_1:\mu>225$$

选择统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

检验的拒绝域为 $t\ge t_\alpha(n-1)$

现在 $n=16$, 取 $\alpha=0.5$,则拒绝域为

$$t > t_{0.5}(15) = 1.7531$$

经计算, $\bar{x}=241.5$, $s=98.7259$,

即有 $t=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\dfrac{241.5-225}{98.7259/\sqrt{16}}=0.6658<1.7531$

因此 t 没有落在拒绝域中，故接受 H_0,

即认为元件的平均寿命不大于225 h.

（二）两个正态总体均值差的检验

$(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})$为取自总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$的样本,

$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})$为取自总体$N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本,

且两样本相互独立,

$\bar{X}, S_1^2$；$\bar{Y}, S_2^2$ 分别表示两样本的均值与方差

需检验 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$, $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

关于均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的检验

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu_1-\mu_2=0$	$\mu_1-\mu_2\neq 0$	$Z=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ $\sim N(0,1)$ ($\sigma_1{}^2$，$\sigma_2{}^2$ 已知)	$\lvert Z\rvert \geq z_{\alpha/2}$
$\mu_1-\mu_2\geq 0$	$\mu_1-\mu_2< 0$		$Z\leq -z_{\alpha}$
$\mu_1-\mu_2\leq 0$	$\mu_1-\mu_2> 0$		$Z\geq z_{\alpha}$

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu_1-\mu_2=0$	$\mu_1-\mu_2\neq 0$	$t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}S_w}$	$\lvert t\rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1-\mu_2\geq 0$	$\mu_1-\mu_2<0$	$\sim t(n_1+n_2-2)$	$t\leq -t_\alpha$
$\mu_1-\mu_2\leq 0$	$\mu_1-\mu_2>0$	$\left(\begin{array}{c}\sigma_1^2,\sigma_2^2\text{未知}\\ \sigma_1^2=\sigma_2^2\end{array}\right)$	$t\geq t_\alpha$

其中 $S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

例 用两种方法治疗某种类型的精神病，从疗法1的65个病例的记录得到平均疗程为123天，均方差21天；从疗法2的53个病例的记录得到平均疗程为132天，均方差30天，问在$\alpha = 0.1$时，这两种疗法的平均疗程有无显著差异？(不论哪种疗法的疗程都服从正态分布，已经检验方差是齐性的)

解 按题意需检验

$$H_0: \mu_1 = \mu_2,\quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

选择统计量 $t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}S_w} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$

现在 $n_1 = 65,\ n_2 = 53, \alpha = 0.1$, 故拒绝域为

$$|t| \geq t_{0.05}(116) = 1.658$$

由给定值算得 $|t| = 1.912$,

落在拒绝域内, 故拒绝H_0,

即认为两种疗法的平均疗程有显著差异.

8.3 正态总体方差的假设检验

（一）单个总体的情况

拒绝域的推导

给定显著性水平α 与样本$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$,

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ, σ^2 未知，需检验：

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

选择统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

若原假设正确，则 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\ 2}} \sim \chi^2(n-1)$

因为$E(S^2)=\sigma_0^{\ 2}$,所以$\dfrac{S^2}{\sigma_0^{\ 2}}$在1附近摆动，

进而$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\ 2}}$在某个范围内摆动，这是一个大概率事件，

反之,$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\ 2}}$在某个范围外取值是一个小概率事件，

令$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} \le k_1$或$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} \ge k_2\right) = \alpha$,

可得$k_1 = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), k_2 = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

因此拒绝域为:$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$或$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

χ^2 检验法

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0 为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ $\sim\chi^2(n-1)$ （μ 未知）	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)$

（二）两个总体的情况

$(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})$为取自总体 $N(\mu_1, \sigma_1{}^2)$ 的样本，

$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})$为取自总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，

且两样本相互独立，

S_1^2，S_2^2 分别表示两样本的方差，

且设 $\mu_1, \sigma_1{}^2, \mu_2, \sigma_2^2$均未知，

需检验 $H_0: \sigma_1{}^2 = \sigma_2^2$，$H_1: \sigma_1{}^2 \neq \sigma_2^2$

关于方差比σ_1^2/σ_2^2的检验

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$ μ_1,μ_2均未知	$F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或$F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$		$F\le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2\le\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$		$F\ge F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$

例 在甲乙两地各取了50块和52块岩心，进行磁化率测定，算出样本无偏方差$s_1^2 = 0.0142$, $s_2^2 = 0.0054$, 今取显著水平$\alpha = 0.10$，问甲、乙两地段磁化率方差是否有显著差异？（设磁化率服从正态分布）

解 按题意需检验

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2; \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

选择统计量 $F = S_1^2 / S_2^2 \sim F(\ 49,\ 51\ )$

则拒绝域为 $F \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(49,51)$

或 $F \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(49,51)$

现在$\alpha = 0.10$, 查表得 $F_{0.05}(49, 51) = 1.59$,

$F_{0.95}(49, 51) = 1/F_{0.05}(51, 49) = 1/1.64 = 0.61$,

则拒绝域为：$F \le 0.61$ 或 $F \ge 1.59$

由给定值算得: $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{0.0142}{0.0054} = 2.63$

显然 $F = 2.63 > 1.59$，落入拒绝域内，故拒绝H_0,

即认为甲乙两地岩心磁化率方差有显著差异.

THE END