1)

对相关公理给出解释

1. 可加性
   若对策 v 和 w 相互独立，则
   $\varphi(v+w)=\varphi(v)+\varphi(w)$.
   允许将复杂对策分解为简单对策之和。
2. 对称性
   若两个参与者对所有联盟的边际贡献相同，则其Shapley值相等。数学表述为：
   若对任意联盟 $S \subseteq I \setminus \{i,j\}$，有
   $v(S\cup\{i\})-v(S)=v(S\cup\{j\})-v(S)$,
   则 $\varphi_i(v)=\varphi_j(v)$。
3. 有效性
   所有参与者的Shapley值之和等于总收益，即
   $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(v)=v(I)-v(\emptyset)$.
   保证收益完全分配，无冗余或短缺。

论述合理性与局限性

1. 合理性

- 通过加权平均所有边际贡献，公平反映每个参与者的作用。
- 公理体系唯一确定分配方式，避免主观性。

2. 局限性

- 时间复杂度为 $O(2^n)$，参与者数量大时不适用。
- 需满足线性可加性，但实际合作时存在非线性效应。

2)

权重 $w(|s|)$ 的意义

$w(|s|)=\frac{(|s|-1)!(n-|s|)!}{n!}$.

- 分子中的$(|s|-1)!$为联盟 S 中除参与者 i 外成员的排列方式数。
- 分子中的$(n-|s|)!$为参与者 i 加入后剩余成员的排列方式数。
- 分母中的 $n!$ 为总排列数。
  权重 $w(|s|)$ 反映了参与者 i 在联盟 S 中出现的概率。

证明 $\sum_{\forall S\subseteq I,1\in S} w(|s|)=1$

证明过程：
令 $k=|s|$，对包含参与者1的联盟 S，其大小 k 从1到n。
每个 k 对应的联盟数为 $\binom{n-1}{k-1}$，权重为 $\frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}$。求和得：

$$\begin{aligned}
\sum_{\forall S\subseteq I,1\in S} w(|s|) &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\cdot\frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} \\
&= 1.
\end{aligned}$$