

以人口增长问题的数学建模为例，论述数学建模的一般环节与步骤，特别解释“模型假设”之于数学建模的关键性地位。

一般环节与步骤：

- 问题定义与分析
- 模型假设
- 建立数学模型并求解
- 检验模型
- 回到模型假设处修正模型直到检验结果满意

人口增长问题的数学建模例子：

- 问题定义与分析：该问题的目的是得到某个时刻的人口预测值，根据常识可得在无战争、疾病等特殊情况时人口的数量在长期来看是单调递增至某个最大值的。
- 模型假设1.1：时刻t时人口增长速率与当时人口数量成正比
- 模型假设1.2：人口数量P(t)足够大且连续可微
- 建立数学模型1并求解：
$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = r \cdot P \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$$
- 检验模型：t趋于无穷时人口也趋于无穷，不合常理
- 模型假设2.1：地球上的资源有限，设为1
- 模型假设2.2：在时刻t时人口增长速率与当时人口数量和剩余资源量s成正比
- 模型假设2.3：人口数量P(t)足够大且连续可微
- 建立数学模型2并求解：
$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = r^* \cdot P \cdot s \\ s = 1 - \frac{P}{P^*} \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dP}{dt} = r^* \cdot P \cdot (1 - \frac{P}{P^*}) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad P(t) = \frac{P^*}{1 + (\frac{P^*}{P_0} - 1) \cdot e^{-r^* \cdot t}}$$
- 检验模型：当人口数初始值 $P_0 > P^*$ 时，人口曲线单调递减；当人口数初始值 $P_0 < P^*$ 时，人口曲线单调递增；t趋于无穷时，人口数量收敛于 P^*
- 结果满意

“模型假设”之于数学建模的关键性地位

模型假设决定了模型的方向

若假设资源无限，则人口数量会如模型1中一样无限增长；若假设资源有限，则人口数量会如模型2中一样趋于一个最大值（环境容纳量）

模型假设降低了问题的复杂性

模型1与模型2均假设人口数量 $P(t)$ 足够大且连续可微，使我们能够直接建立微分方程来求解，降低了问题的复杂性

模型假设限定了特殊情况

人口数量受到很多因素影响，故需要模型假设进行特判