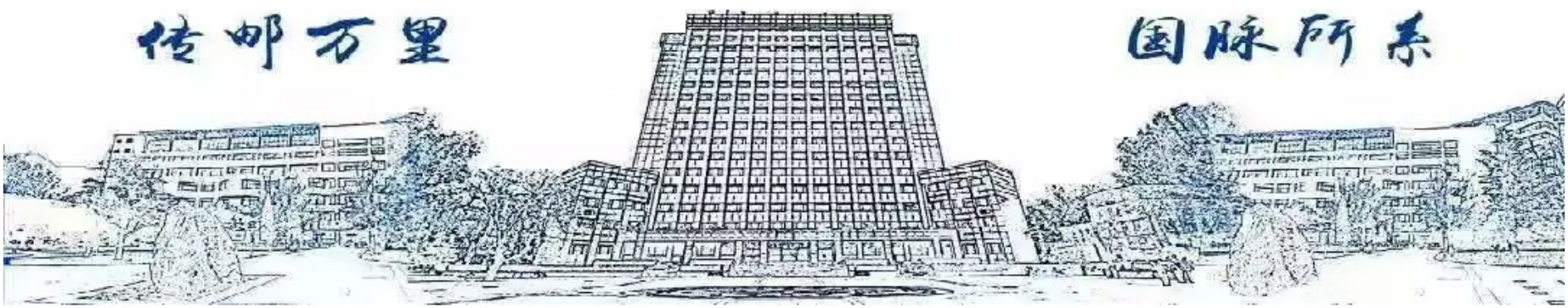
网络空间安全学院
School of Cyberspace Security, BUPT

信息安全数学基础

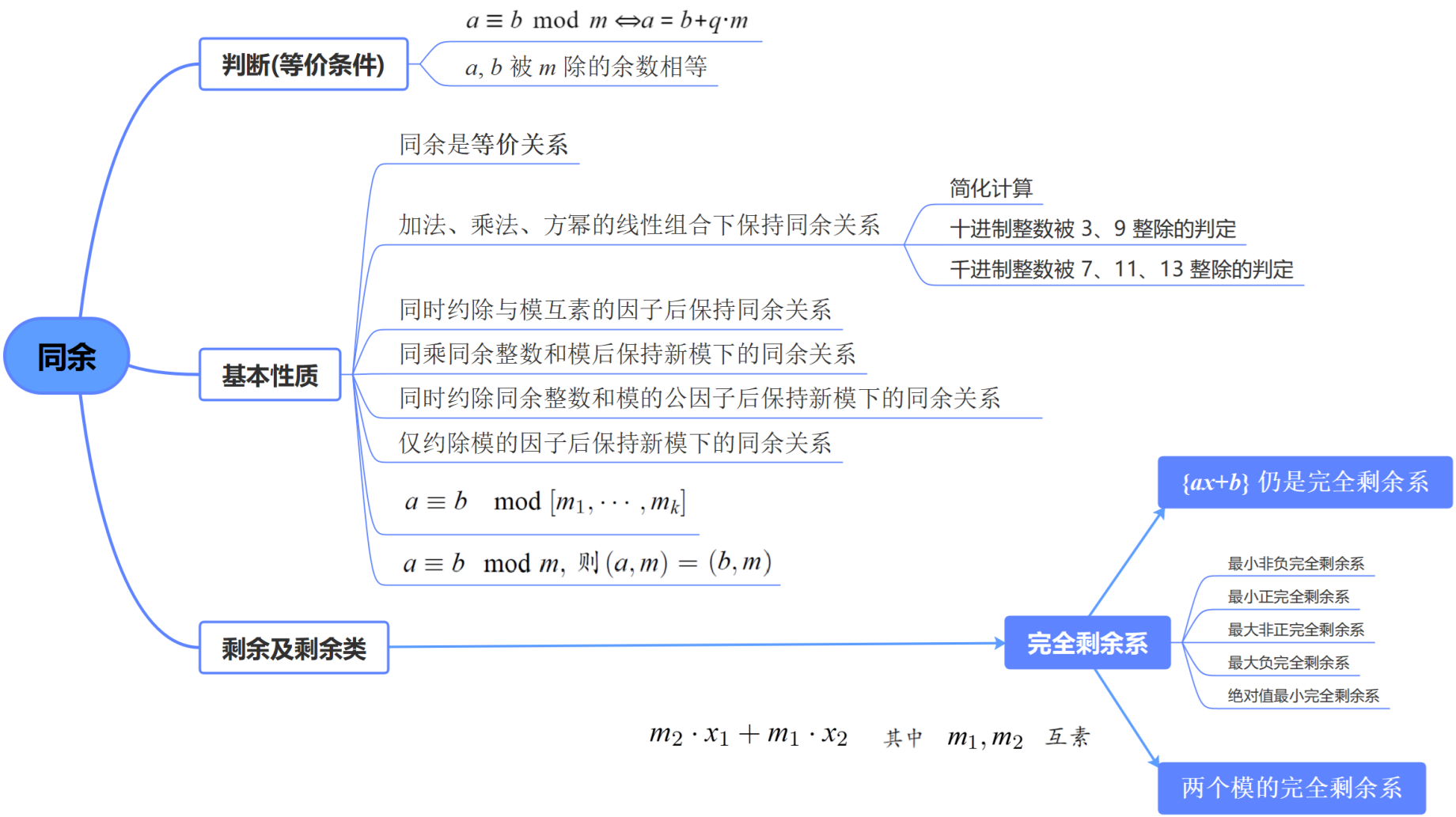
—— 同余 (2)

信数课题组

北京邮电大学



上次课回顾


同余
判断(等价条件)
$a \equiv b \mod m \Leftrightarrow a = b+q\cdot m$
a, b 被 m 除的余数相等
基本性质
同余是等价关系
加法、乘法、方幂的线性组合下保持同余关系
简化计算
十进制整数被 3、9 整除的判定
千进制整数被 7、11、13 整除的判定
同时约除与模互素的因子后保持同余关系
同乘同余整数和模后保持新模下的同余关系
同时约除同余整数和模的公因子后保持新模下的同余关系
仅约除模的因子后保持新模下的同余关系
$a \equiv b \mod [m_1, \cdots, m_k]$
$a \equiv b \mod m$, 则 $(a, m) = (b, m)$
剩余及剩余类
完全剩余系
$\{ax+b\}$ 仍是完全剩余系
最小非负完全剩余系
最小正完全剩余系
最大非正完全剩余系
最大负完全剩余系
绝对值最小完全剩余系
两个模的完全剩余系
$m_2 \cdot x_1 + m_1 \cdot x_2$ 其中 m_1, m_2 互素

目录

目录

定义 2.2.4

设 m 是一个正整数, 则 m 个整数 $1, \cdots, m-1, m$ 中与 m 互素的整数的个数, 记作 $\varphi(m)$, 通常叫做 **欧拉 (Euler) 函数**.

定义 2.2.4

设 m 是一个正整数，则 m 个整数 $1, \cdots, m-1, m$ 中与 m 互素的整数的个数，记作 $\varphi(m)$，通常叫做 **欧拉** (Euler) **函数**.

莱昂哈德·欧拉

(Leonhard Euler, 1707.4.15 — 1783.9.18)

瑞士数学家、自然科学家. 18 世纪数学界最杰出的人物之一，是数学史上最多产的数学家，写下了浩如烟海的书籍和论文，其中《无穷小分析引论》、《微分学原理》、《积分学原理》等都是数学界的经典著作. 几乎在每一个数学领域都可以看到欧拉的名字，如初等几何的欧拉线，多面体的欧拉定理，立体解析几何的欧拉变换公式，四次方程的欧拉解法，数论中的欧拉函数，微分方程的欧拉方程，级数论的欧拉常数，变分学的欧拉方程，复变函数的欧拉公式等等. 欧拉还创造了一批数学符号，如 $f(x), \pi, e, \sin, \cos, \mathrm{ty}, \Sigma, \Delta x, i$ 等.

定义 2.2.4

设 m 是一个正整数, 则 m 个整数 $1, \cdots, m-1, m$ 中与 m 互素的整数的个数, 记作 $\varphi(m)$, 通常叫做 **欧拉** (Euler) **函数**.

莱昂哈德·欧拉

(Leonhard Euler, 1707.4.15 — 1783.9.18)

瑞士数学家、自然科学家. 18 世纪数学界最杰出的人物之一, 是数学史上最多产的数学家, 写下了浩如烟海的书籍和论文, 其中《无穷小分析引论》、《微分学原理》、《积分学原理》等都是数学界的经典著作. 几乎在每一个数学领域都可以看到欧拉的名字, 如初等几何的欧拉线, 多面体的欧拉定理, 立体解析几何的欧拉变换公式, 四次方程的欧拉解法, 数论中的欧拉函数, 微分方程的欧拉方程, 级数论的欧拉常数, 变分学的欧拉方程, 复变函数的欧拉公式等等. 欧拉还创造了一批数学符号, 如 $f(x), \pi, e, \sin, \cos, \mathrm{ty}, \Sigma, \Delta x, i$ 等.

例 2.2.5 设 $m = p$ 是素数, 则 p 个整数 $1, 2, \cdots, p-1$ 中与 p 互素的整数为 $1, 2, \cdots, p-1$, 所以 $\varphi(p) = p - 1$.

定理 2.2.5

对于素数幂 $n = p^{\alpha}$, 有 $\varphi(n) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1}$.

定理 2.2.5

对于素数幂 $n = p^\alpha$, 有 $\varphi(n) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

证：对于素数幂 $n = p^\alpha$, 从 1 到 n 的 n 个整数的形式为

$$\begin{aligned}
1, &\ \cdots, & p-1, &\quad 1\cdot p,\\
p+1, &\ \cdots, & p+p-1, &\quad 2\cdot p,\\
2\cdot p+1, &\ \cdots, & 2\cdot p+p-1, &\quad 3\cdot p,\\
&\ \vdots & &\\
(p^{\alpha-1}-1)\cdot p+1, &\ \cdots, & (p^{\alpha-1}-1)\cdot p+p-1, &\quad p^{\alpha-1}\cdot p.
\end{aligned}$$

其中与 n 不互素的整数为 $1\cdot p,\ 2\cdot p,\ \cdots,\ (p^{\alpha-1}-1)\cdot p,\ p^{\alpha-1}\cdot p$, 共有 $p^{\alpha-1}$ 个整数. 因此, n 个整数中与 n 互素的整数个数为 $p^\alpha - p^{\alpha-1}$, 即证.

定理 2.2.5

对于素数幂 $n = p^\alpha$, 有 $\varphi(n) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

证：对于素数幂 $n = p^\alpha$, 从 1 到 n 的 n 个整数的形式为

$$\begin{array}{rcll} 1, & \cdots, & p-1, & 1\cdot p, \\ p+1, & \cdots, & p+p-1, & 2\cdot p, \\ 2\cdot p+1, & \cdots, & 2\cdot p+p-1, & 3\cdot p, \\ & \vdots & & \\ (p^{\alpha-1}-1)\cdot p+1, & \cdots, & (p^{\alpha-1}-1)\cdot p+p-1, & p^{\alpha-1}\cdot p. \end{array}$$

其中与 n 不互素的整数为 $1\cdot p,\ 2\cdot p,\ \cdots,\ (p^{\alpha-1}-1)\cdot p,\ p^{\alpha-1}\cdot p$, 共有 $p^{\alpha-1}$ 个整数. 因此, n 个整数中与 n 互素的整数个数为 $p^\alpha - p^{\alpha-1}$, 即证.

例 2.2.6 设 $m = 7^3$, 则 m 的欧拉函数值为 294.

定义 2.2.5

设 m 是一个正整数，如果一个模 m 的剩余类中存在一个与 m 互素的剩余，就称这个模 m 的剩余类为 **简化剩余类**.

定义 2.2.5

设 m 是一个正整数，如果一个模 m 的剩余类中存在一个与 m 互素的剩余，就称这个模 m 的剩余类为 **简化剩余类**.

注：简化剩余类的这个定义与剩余的选取无关.

定理 2.2.6

设 r_1, r_2 是同一模 m 剩余类的两个剩余，则 r_1 与 m 互素的充要条件是 r_2 与 m 互素.

定义 2.2.5

设 m 是一个正整数, 如果一个模 m 的剩余类中存在一个与 m 互素的剩余, 就称这个模 m 的剩余类为 **简化剩余类**.

注：简化剩余类的这个定义与剩余的选取无关.

定理 2.2.6

设 r_1, r_2 是同一模 m 剩余类的两个剩余, 则 r_1 与 m 互素的充要条件是 r_2 与 m 互素.

证：依题设, 存在整数 k, 使得 $r_1 = r_2 + k \cdot m$. 根据定理 1.2.2, $(r_1, m) = (r_2, m)$. 故 $(r_1, m) = 1$ 的充要条件是 $(r_2, m) = 1$.

定义 2.2.5

设 m 是一个正整数, 如果一个模 m 的剩余类中存在一个与 m 互素的剩余, 就称这个模 m 的剩余类为 **简化剩余类**.

注：简化剩余类的这个定义与剩余的选取无关.

定理 2.2.6

设 r_1, r_2 是同一模 m 剩余类的两个剩余, 则 r_1 与 m 互素的充要条件是 r_2 与 m 互素.

证：依题设, 存在整数 k, 使得 $r_1 = r_2 + k \cdot m$. 根据定理 1.2.2, $(r_1, m) = (r_2, m)$. 故 $(r_1, m) = 1$ 的充要条件是 $(r_2, m) = 1$.

定义 2.2.6

设 m 是一个正整数, 在模 m 的所有不同简化剩余类中, 从每个类任取一个数组成的整数的集合, 叫做模 m 的一个**简化剩余系**.

定义 2.2.5

设 m 是一个正整数, 如果一个模 m 的剩余类中存在一个与 m 互素的剩余, 就称这个模 m 的剩余类为 **简化剩余类**.

注：简化剩余类的这个定义与剩余的选取无关.

定理 2.2.6

设 r_1, r_2 是同一模 m 剩余类的两个剩余, 则 r_1 与 m 互素的充要条件是 r_2 与 m 互素.

证：依题设, 存在整数 k, 使得 $r_1 = r_2 + k \cdot m$. 根据定理 1.2.2, $(r_1, m) = (r_2, m)$. 故 $(r_1, m) = 1$ 的充要条件是 $(r_2, m) = 1$.

定义 2.2.6

设 m 是一个正整数, 在模 m 的所有不同简化剩余类中, 从每个类任取一个数组成的整数的集合, 叫做模 m 的一个**简化剩余系**.

注：由定义可知, 模 m 的一个简化剩余系的元素个数为 $\varphi(m)$.

定义 2.2.7

设 m 是一个正整数, 则

(i) m 个整数 $0, 1, \cdots, m-1$ 中与 m 互素的整数全体组成模 m 的一个简化剩余系, 叫做模 m 的**最小非负简化剩余系**.

定义 2.2.7

设 m 是一个正整数, 则

(i) m 个整数 $0, 1, \cdots, m-1$ 中与 m 互素的整数全体组成模 m 的一个简化剩余系, 叫做模 m 的**最小非负简化剩余系**.

(ii) m 个整数 $1, \cdots, m-1, m$ 中与 m 互素的整数全体组成模 m 的一个简化剩余系, 叫做模 m 的**最小正简化剩余系**.

定义 2.2.7

设 m 是一个正整数, 则

(i) m 个整数 $0, 1, \cdots, m-1$ 中与 m 互素的整数全体组成模 m 的一个简化剩余系, 叫做模 m 的**最小非负简化剩余系**.

(ii) m 个整数 $1, \cdots, m-1, m$ 中与 m 互素的整数全体组成模 m 的一个简化剩余系, 叫做模 m 的**最小正简化剩余系**.

(iii) m 个整数 $-(m-1), \cdots, -1, 0$ 中与 m 互素的整数全体组成模 m 的一个简化剩余系, 叫做模 m 的**最大非正简化剩余系**.

定义 2.2.7

设 m 是一个正整数, 则

(i) m 个整数 $0, 1, \cdots, m-1$ 中与 m 互素的整数全体组成模 m 的一个简化剩余系, 叫做模 m 的**最小非负简化剩余系**.

(ii) m 个整数 $1, \cdots, m-1, m$ 中与 m 互素的整数全体组成模 m 的一个简化剩余系, 叫做模 m 的**最小正简化剩余系**.

(iii) m 个整数 $-(m-1), \cdots, -1, 0$ 中与 m 互素的整数全体组成模 m 的一个简化剩余系, 叫做模 m 的**最大非正简化剩余系**.

(iv) m 个整数 $-m, -(m-1), \cdots, -1$ 中与 m 互素的整数全体组成模 m 的一个简化剩余系, 叫做模 m 的**最大负简化剩余系**.

定义 2.2.7 (续)

(v) 当 m 为偶数时, m 个整数

$$-\frac{m}{2}, -\frac{m-2}{2}, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, \frac{m-2}{2}$$

或 m 个整数

$$-\frac{m-2}{2}, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, \frac{m-2}{2}, \frac{m}{2}$$

中与 m 互素的整数全体组成模 m 的一个简化剩余系;

当 m 为奇数时, m 个整数

$$-\frac{m-1}{2}, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, \frac{m-1}{2}$$

中与 m 互素的整数全体组成模 m 的一个简化剩余系.

上述两个简化剩余系统称为模 m 的一个**绝对值最小简化剩余系**.

例 2.2.7 $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ 是模 30 的简化剩余系, $\varphi(30) = 8$.

例 2.2.7 $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ 是模 30 的简化剩余系, $\varphi(30) = 8$.

例 2.2.8 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ 是模 13 的简化剩余系, $\varphi(13) = 12$.

注：当 $m = p$ 是素数时, $1, 2, \cdots, p-1$ 是模 p 的简化剩余系, 所以 $\varphi(p) = p - 1$.

例 2.2.7 $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ 是模 30 的简化剩余系, $\varphi(30) = 8$.

例 2.2.8 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ 是模 13 的简化剩余系, $\varphi(13) = 12$.

注：当 $m = p$ 是素数时, $1, 2, \cdots, p-1$ 是模 p 的简化剩余系, 所以 $\varphi(p) = p - 1$.

定理 2.2.7

设 m 是一个正整数, 若 $r_1, \cdots, r_{\varphi(m)}$ 是 $\varphi(m)$ 个与 m 互素的整数, 并且两两模 m 不同余, 则 $r_1, \cdots, r_{\varphi(m)}$ 是模 m 的一个简化剩余系.

例 2.2.7 $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ 是模 30 的简化剩余系, $\varphi(30) = 8$.

例 2.2.8 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ 是模 13 的简化剩余系, $\varphi(13) = 12$.

注：当 $m = p$ 是素数时, $1, 2, \cdots, p-1$ 是模 p 的简化剩余系, 所以 $\varphi(p) = p - 1$.

定理 2.2.7

设 m 是一个正整数, 若 $r_1, \cdots, r_{\varphi(m)}$ 是 $\varphi(m)$ 个与 m 互素的整数, 并且两两模 m 不同余, 则 $r_1, \cdots, r_{\varphi(m)}$ 是模 m 的一个简化剩余系.

证：根据题设及定理 2.2.1 知, $\varphi(m)$ 个整数 $r_1, \cdots, r_{\varphi(m)}$ 是模 m 的所有不同简化剩余类的剩余. 因此, $r_1, \cdots, r_{\varphi(m)}$ 是模 m 的一个简化剩余系.

定理 2.2.8

设 m 是一个正整数，a 是满足 $(a,m)=1$ 的整数. 如果 x 遍历模 m 的一个简化剩余系，则 $a\cdot x$ 也遍历模 m 的一个简化剩余系.

定理 2.2.8

设 m 是一个正整数，a 是满足 $(a,m)=1$ 的整数. 如果 x 遍历模 m 的一个简化剩余系，则 $a\cdot x$ 也遍历模 m 的一个简化剩余系.

证：因为 $(a,m)=1,(x,m)=1$，根据推论 1.2.1，有 $(a\cdot x,m)=1$. 这说明 $a\cdot x$ 是简化剩余类的剩余.

又 $a\cdot x_1\equiv a\cdot x_2 \mod m$ 时，有 $x_1\equiv x_2 \mod m$.

因此，x 遍历模 m 的一个简化剩余系时，$a\cdot x$ 遍历 $\varphi(m)$ 个数，且它们两两模 m 不同余. 根据定理 2.2.7，$a\cdot x$ 遍历模 m 的一个简化剩余系.

定理 2.2.8

设 m 是一个正整数，a 是满足 $(a,m)=1$ 的整数. 如果 x 遍历模 m 的一个简化剩余系，则 $a\cdot x$ 也遍历模 m 的一个简化剩余系.

证：因为 $(a,m)=1,(x,m)=1$，根据推论 1.2.1，有 $(a\cdot x,m)=1$. 这说明 $a\cdot x$ 是简化剩余类的剩余.

又 $a\cdot x_1\equiv a\cdot x_2 \mod m$ 时，有 $x_1\equiv x_2 \mod m$.

因此，x 遍历模 m 的一个简化剩余系时，$a\cdot x$ 遍历 $\varphi(m)$ 个数，且它们两两模 m 不同余. 根据定理 2.2.7，$a\cdot x$ 遍历模 m 的一个简化剩余系.

例 2.2.9 $1,7,11,13,17,19,23,29$ 是模 30 的简化剩余系，$(7,30)=1$，则

$$7\cdot 1\equiv 7,\quad 7\cdot 7\equiv 49\equiv 19,\quad 7\cdot 11\equiv 77\equiv 17$$

$$7\cdot 13\equiv 91\equiv 1,\quad 7\cdot 17\equiv 119\equiv 29,\quad 7\cdot 19\equiv 133\equiv 13$$

$$7\cdot 23\equiv 161\equiv 11,\quad 7\cdot 29\equiv 203\equiv 23 \mod 30.$$

故 $7\cdot 1,7\cdot 7,7\cdot 11,7\cdot 13,7\cdot 17,7\cdot 19,7\cdot 23,7\cdot 29$ 是模 30 的简化剩余系.

例 2.2.9 设 $m = 7$, a 表示第一列数, 为与 m 互素的给定数. x 表示第一行数, 遍历模 m 的简化剩余系. a 所在行与 x 所在列的交叉位置表示 ax 模 m 最小非负剩余. 则我们得到如下的列表：

ax \ x / a	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

其中 a 所在行的数表示 ax 随 x 遍历模 m 的简化剩余系.

定理 2.2.9

设 m 是一个正整数，a 是满足 $(a,m)=1$ 的整数，则存在唯一的整数 a'，$1 \leqslant a' < m$ 使得 $a \cdot a' \equiv 1 \mod m$.

定理 2.2.9

设 m 是一个正整数, a 是满足 $(a,m)=1$ 的整数, 则存在唯一的整数 a', $1 \leqslant a' < m$ 使得 $a \cdot a' \equiv 1 \mod m$.

证一：(存在性证明).

因为 $(a,m)=1$, 根据定理 2.2.8, x 遍历模 m 的一个简化剩余系时, $a \cdot x$ 也遍历模 m 的一个简化剩余系.

因此, 存在整数 $x=a'$, $1 \leqslant a' < m$ 使得 $a \cdot a'$ 属于 1 的剩余类, 即 $a \cdot a' \equiv 1 \mod m$.

定理 2.2.9

设 m 是一个正整数, a 是满足 $(a,m)=1$ 的整数, 则存在唯一的整数 a', $1 \leqslant a' < m$ 使得 $a \cdot a' \equiv 1 \mod m$.

证一：(存在性证明).

因为 $(a,m)=1$, 根据定理 2.2.8, x 遍历模 m 的一个简化剩余系时, $a \cdot x$ 也遍历模 m 的一个简化剩余系.

因此, 存在整数 $x=a'$, $1 \leqslant a' < m$ 使得 $a \cdot a'$ 属于 1 的剩余类, 即 $a \cdot a' \equiv 1 \mod m$.

证二：(构造性证明).

因为 $(a,m)=1$, 运用广义欧几里得除法, 可找到整数 s,t 使得

$$s \cdot a + t \cdot m = (a,m) = 1.$$

因此, 整数 $a' = s \mod m$ 即为所求.

例 2.2.11 设 $m = 7$, a 表示与 m 互素的整数. 根据定理 2.2.9, 得到:

$$1 \cdot 1 \equiv 1, \quad 2 \cdot 4 \equiv 1, \quad 3 \cdot 5 \equiv 1 \mod 7,$$

$$4 \cdot 2 \equiv 1, \quad 5 \cdot 3 \equiv 1, \quad 6 \cdot 6 \equiv 1 \mod 7.$$

例 2.2.11 设 $m = 7$, a 表示与 m 互素的整数. 根据定理 2.2.9, 得到：

$$1 \cdot 1 \equiv 1, \quad 2 \cdot 4 \equiv 1, \quad 3 \cdot 5 \equiv 1 \mod 7,$$

$$4 \cdot 2 \equiv 1, \quad 5 \cdot 3 \equiv 1, \quad 6 \cdot 6 \equiv 1 \mod 7.$$

例 2.2.12 设 $m = 65521, a = 32749$.

由广义欧几里德除法, 可找到整数 $s = 11391, t = -22790$ 使得 $11391 \cdot 65521 - 22790 \cdot 32749 = 1$.

因此, $a' = -22790 \equiv 42731 \mod 65521$ 使得 $42731 \cdot 32749 \equiv 1 \mod 65521$.

定理 2.3.6

设 m_1, m_2 是互素的两个正整数. 如果 x_1, x_2 分别遍历模 m_1 和模 m_2 的简化剩余系, 则 $m_2 \cdot x_1 + m_1 \cdot x_2$ 遍历模 $m_1 \cdot m_2$ 的简化剩余系.

定理 2.3.6

设 m_1, m_2 是互素的两个正整数. 如果 x_1, x_2 分别遍历模 m_1 和模 m_2 的简化剩余系, 则 $m_2 \cdot x_1 + m_1 \cdot x_2$ 遍历模 $m_1 \cdot m_2$ 的简化剩余系.

证：首先证明 $(x_1, m_1) = 1, (x_2, m_2) = 1$ 时,

$$(m_2 \cdot x_1 + m_1 \cdot x_2, m_1 \cdot m_2) = 1.$$

定理 2.3.6

设 m_1, m_2 是互素的两个正整数. 如果 x_1, x_2 分别遍历模 m_1 和模 m_2 的简化剩余系, 则 $m_2 \cdot x_1 + m_1 \cdot x_2$ 遍历模 $m_1 \cdot m_2$ 的简化剩余系.

证：首先证明 $(x_1, m_1) = 1, (x_2, m_2) = 1$ 时,

$$(m_2 \cdot x_1 + m_1 \cdot x_2, m_1 \cdot m_2) = 1.$$

事实上, 因为 $(m_1, m_2) = 1$, 根据定理 1.2.2 和定理 1.2.8, 有

$$(m_2 \cdot x_1 + m_1 \cdot x_2, m_1) = (m_2 \cdot x_1, m_1) = (x_1, m_1) = 1,$$

$$(m_2 \cdot x_1 + m_1 \cdot x_2, m_2) = (m_1 \cdot x_2, m_2) = (x_2, m_2) = 1.$$

因此, 再根据推论 1.2.1, 可得到

$$(m_2 \cdot x_1 + m_1 \cdot x_2, m_1 \cdot m_2) = 1.$$

其次, 证明模 $m_1 \cdot m_2$ 的任一简化剩余可表示为

$$m_2 \cdot x_1 + m_1 \cdot x_2,$$

其中 $(x_1, m_1) = 1, (x_2, m_2) = 1.$

其次, 证明模 $m_1 \cdot m_2$ 的任一简化剩余可表示为

$$m_2 \cdot x_1 + m_1 \cdot x_2,$$

其中 $(x_1, m_1) = 1, (x_2, m_2) = 1.$

事实上, 根据定理 2.2.4, 模 $m_1 \cdot m_2$ 的任一剩余可以表示为 $m_2 \cdot x_1 + m_1 \cdot x_2.$

而当 $(m_2 \cdot x_1 + m_1 \cdot x_2, m_1 \cdot m_2) = 1$ 时, 有

$$(x_1, m_1) = (m_2 \cdot x_1, m_1) = (m_2 \cdot x_1 + m_1 \cdot x_2, m_1) = 1.$$

同理, $(x_2, m_2) = 1.$

故结论成立.

从定理 2.2.10 我们可以推出欧拉函数 φ 的性质（即 φ 是所谓的乘性函数）.

定理 2.2.11

设 m,n 是互素的两个正整数, 则 $\varphi(m\cdot n)=\varphi(m)\cdot\varphi(n)$.

从定理 2.2.10 我们可以推出欧拉函数 φ 的性质（即 φ 是所谓的乘性函数）.

定理 2.2.11

设 m, n 是互素的两个正整数, 则 $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

证：根据定理 2.2.10, 当 x 遍历模 m 的简化剩余系, 共 $\varphi(m)$ 个整数, 以及 y 遍历模 n 的简化剩余系, 共 $\varphi(n)$ 个整数时, $n \cdot x + m \cdot y$ 遍历模 $m \cdot n$ 的简化剩余系, 其整数个数为 $\varphi(m) \cdot \varphi(n)$. 但模 $m \cdot n$ 的简化剩余系的元素个数又为 $\varphi(m \cdot n)$, 故 $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

从定理 2.2.10 我们可以推出欧拉函数 φ 的性质（即 φ 是所谓的乘性函数）.

定理 2.2.11

设 m, n 是互素的两个正整数, 则 $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

证：根据定理 2.2.10, 当 x 遍历模 m 的简化剩余系, 共 $\varphi(m)$ 个整数, 以及 y 遍历模 n 的简化剩余系, 共 $\varphi(n)$ 个整数时, $n \cdot x + m \cdot y$ 遍历模 $m \cdot n$ 的简化剩余系, 其整数个数为 $\varphi(m) \cdot \varphi(n)$. 但模 $m \cdot n$ 的简化剩余系的元素个数又为 $\varphi(m \cdot n)$, 故 $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

例 2.2.13

$$\varphi(143) = \varphi(11)\varphi(13) = 10 \cdot 12 = 120.$$

$$\varphi(105) = \varphi(3)\varphi(5)\varphi(7) = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48.$$

下面给出欧拉函数的计算公式.

定理 2.2.12

设正整数 n 的标准因数分解式

$$n = \prod_{p \mid m} p^{\alpha} = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

则

$$\varphi(n) = n \prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

下面给出欧拉函数的计算公式.

定理 2.2.12

设正整数 n 的标准因数分解式

$$n = \prod_{p \mid m} p^{\alpha} = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

则

$$\varphi(n) = n \prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

证：由欧拉函数的可乘性, 有

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \prod_{p \mid n} \varphi(p^{\alpha}) = \prod_{p \mid n} (p^{\alpha} - p^{\alpha-1}) \\ &= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \end{aligned}$$

下面给出欧拉函数的计算公式.

定理 2.2.12

设正整数 n 的标准因数分解式

$$n = \prod_{p \mid m} p^{\alpha} = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

则

$$\varphi(n) = n \prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

证：由欧拉函数的可乘性, 有

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \prod_{p \mid n} \varphi(p^{\alpha}) = \prod_{p \mid n} (p^{\alpha} - p^{\alpha-1}) \\ &= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \end{aligned}$$

注 1：设 p, q 是不同的素数, 则 $\varphi(p \cdot q) = p \cdot q - p - q + 1$.

注 1：设 p, q 是不同的素数, 则 $\varphi(p \cdot q) = p \cdot q - p - q + 1$.

注 2：当 n 为合数, 且不知道 n 的因数分解式时, 通常很难求出 n 的欧拉函数值 $\varphi(n)$.

注 1：设 p, q 是不同的素数, 则 $\varphi(p \cdot q) = p \cdot q - p - q + 1$.

注 2：当 n 为合数, 且不知道 n 的因数分解式时, 通常很难求出 n 的欧拉函数值 $\varphi(n)$.

例 2.2.14　设正整数 n 是两个不同素数的乘积. 如果知道 n 和欧拉函数值 $\varphi(n)$, 则可以求出 n 的因数分解式.

注 1：设 p, q 是不同的素数, 则 $\varphi(p \cdot q) = p \cdot q - p - q + 1$.

注 2：当 n 为合数, 且不知道 n 的因数分解式时, 通常很难求出 n 的欧拉函数值 $\varphi(n)$.

例 2.2.14　设正整数 n 是两个不同素数的乘积. 如果知道 n 和欧拉函数值 $\varphi(n)$, 则可以求出 n 的因数分解式.

证: 考虑未知数 p, q 的方程组

$$\begin{cases} p + q = n + 1 + \varphi(n) \\ p \cdot q = n \end{cases}$$

根据多项式的根与系数之间的关系, 我们可以从二次方程

$$z^2 - (n + 1 - \varphi(n))z + n = 0$$

求出 n 的因数 p, q.

目录

在实际应用中, 经常要考虑模幂运算, 即 $a^k \mod m$.

例 2.2.15 设 $m = 7, a = 2$. 有 $(2, 7) = 1, \varphi(7) = 6$. 考虑模 7 的最小非负简化剩余系 $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, 我们有 $2x =$

$$2 \cdot 1 \equiv 2, \quad 2 \cdot 2 \equiv 4, \quad 2 \cdot 3 \equiv 6,$$

$$2 \cdot 4 \equiv 1, \quad 2 \cdot 5 \equiv 3, \quad 2 \cdot 6 \equiv 5 \mod 7.$$

在实际应用中, 经常要考虑模幂运算, 即 $a^k \mod m$.

例 2.2.15 设 $m = 7, a = 2$. 有 $(2, 7) = 1, \varphi(7) = 6$. 考虑模 7 的最小非负简化剩余系 $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, 我们有 $2x =$

$$2 \cdot 1 \equiv 2, \quad 2 \cdot 2 \equiv 4, \quad 2 \cdot 3 \equiv 6,$$

$$2 \cdot 4 \equiv 1, \quad 2 \cdot 5 \equiv 3, \quad 2 \cdot 6 \equiv 5 \mod 7.$$

上述式子左右对应相乘, 得到

$$(2 \cdot 1)(2 \cdot 2)(2 \cdot 3)(2 \cdot 4)(2 \cdot 5)(2 \cdot 6) \equiv 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \mod 7$$

或

$$2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \mod 7.$$

注意到 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \equiv (1 \cdot 6)(2 \cdot 4)(3 \cdot 5) \equiv (-1) \cdot 1 \cdot 1 \equiv -1 \mod 7$,

故 $2^6 \equiv 1 \mod 7$.

例 2.2.16 设 $m = 30, a = 7$. 有 $(7, 30) = 1, \varphi(30) = 8$. 考虑模 30 的最小非负简化剩余系 $x = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$, 我们有 $7x =$

$$7 \cdot 1 \equiv 7, \qquad 7 \cdot 7 \equiv 49 \equiv 19, \qquad 7 \cdot 11 \equiv 77 \equiv 17,$$

$$7 \cdot 13 \equiv 91 \equiv 1, \qquad 7 \cdot 17 \equiv 119 \equiv 29, \qquad 7 \cdot 19 \equiv 133 \equiv 13,$$

$$7 \cdot 23 \equiv 161 \equiv 11, \quad 7 \cdot 29 \equiv 203 \equiv 23 \mod 30.$$

例 2.2.16 设 $m = 30, a = 7$. 有 $(7, 30) = 1, \varphi(30) = 8$. 考虑模 30 的最小非负简化剩余系 $x = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$, 我们有 $7x =$

$$7 \cdot 1 \equiv 7, \qquad 7 \cdot 7 \equiv 49 \equiv 19, \qquad 7 \cdot 11 \equiv 77 \equiv 17,$$

$$7 \cdot 13 \equiv 91 \equiv 1, \qquad 7 \cdot 17 \equiv 119 \equiv 29, \qquad 7 \cdot 19 \equiv 133 \equiv 13,$$

$$7 \cdot 23 \equiv 161 \equiv 11, \quad 7 \cdot 29 \equiv 203 \equiv 23 \mod 30.$$

上述式子左右对应相乘, 得到

$$(7{\cdot}1)(7{\cdot}7)(7{\cdot}11)(7{\cdot}13)(7{\cdot}17)(7{\cdot}19{\cdot}23{\cdot}29) \equiv 7{\cdot}19{\cdot}17{\cdot}1{\cdot}29{\cdot}13{\cdot}11{\cdot}23 \mod 30$$

或

$$7^8 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \equiv 1 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \mod 30.$$

注意到 $(1 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29, 30) = 1$, 故 $7^8 \equiv 1 \mod 30$.

如上例题可推广为一般的结论, 即欧拉（Euler）定理.

定理 2.2.13 (欧拉定理)

设 m 是大于 1 的整数. 如果 a 是满足 $(a,m)=1$ 的整数, 则

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m.$$

如上例题可推广为一般的结论，即欧拉（Euler）定理.

定理 2.2.13 (欧拉定理)

设 m 是大于 1 的整数. 如果 a 是满足 $(a,m)=1$ 的整数，则

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m.$$

证：取 $r_1,\cdots,r_{\varphi(m)}$ 为模 m 的一个最小正简化剩余系，则当 a 是满足 $(a,m)=1$ 的整数时，根据定理 2.2.8，$a\cdot r_1,\cdots,a\cdot r_{\varphi(m)}$ 也为模 m 的一个最小正简化剩余系. 这就是说，$a\cdot r_1,\cdots,a\cdot r_{\varphi(m)}$ 模 m 的最小正剩余是 $r_1,\cdots,r_{\varphi(m)}$ 的一个排列. 故 $(a\cdot r_1)(a\cdot r_2)\cdots(a\cdot r_{\varphi(m)})$ 模 m 的最小正剩余和 $r_1r_2\cdots r_{\varphi(m)}$ 模 m 的最小正剩余相等. 根据定理 2.1.2，有

$$(a\cdot r_1)\cdots(a\cdot r_{\varphi(m)}) \equiv r_1\cdots r_{\varphi(m)} \mod m.$$

因此，$r_1\cdots r_{\varphi(m)}(a^{\varphi(m)}-1)\equiv 0 \mod m$. 又由 $(r_1,m)=1,\cdots,(r_{\varphi(m)},m)=1$ 及推论 1.2.1，可推出 $(r_1\cdots r_{\varphi(m)},m)=1$. 从而，根据性质 2.1.3，得到 $a^{\varphi(m)}\equiv 1 \mod m$.

例 2.2.17

设 $m = 19, a = 3$, 有 $(3, 19) = 1, \varphi(19) = 18$, 故 $3^{18} \equiv 1 \mod 19$.

设 $m = 31, a = 2$, 有 $(2, 31) = 1, \varphi(31) = 30$, 故 $2^{30} \equiv 1 \mod 31$.

例 2.2.17

设 $m = 19, a = 3$, 有 $(3, 19) = 1, \varphi(19) = 18$, 故 $3^{18} \equiv 1 \mod 19$.

设 $m = 31, a = 2$, 有 $(2, 31) = 1, \varphi(31) = 30$, 故 $2^{30} \equiv 1 \mod 31$.

应用欧拉定理, 当 m 是素数时, 给出费马（Fermat）小定理与 Wilson 定理.

定理 2.2.14 (费马小定理)

设 p 是一个素数, 则对任意整数 a, 有

$$a^p \equiv a \mod p.$$

例 2.2.17

设 $m = 19, a = 3$, 有 $(3, 19) = 1, \varphi(19) = 18$, 故 $3^{18} \equiv 1 \mod 19$.

设 $m = 31, a = 2$, 有 $(2, 31) = 1, \varphi(31) = 30$, 故 $2^{30} \equiv 1 \mod 31$.

应用欧拉定理, 当 m 是素数时, 给出费马（Fermat）小定理与 Wilson 定理.

定理 2.2.14 (费马小定理)

设 p 是一个素数, 则对任意整数 a, 有

$$a^p \equiv a \mod p.$$

证：分两种情形考虑.

(i) 若 a 被 p 整除, 则同时有 $a \equiv 0 \mod p$ 和 $a^p \equiv 0 \mod p$. 故 $a^p \equiv a \mod p$.

例 2.2.17

设 $m = 19, a = 3$, 有 $(3, 19) = 1, \varphi(19) = 18$, 故 $3^{18} \equiv 1 \mod 19$.

设 $m = 31, a = 2$, 有 $(2, 31) = 1, \varphi(31) = 30$, 故 $2^{30} \equiv 1 \mod 31$.

应用欧拉定理, 当 m 是素数时, 给出费马（Fermat）小定理与 Wilson 定理.

定理 2.2.14 (费马小定理)

设 p 是一个素数, 则对任意整数 a, 有

$$a^p \equiv a \mod p.$$

证：分两种情形考虑.

(i) 若 a 被 p 整除, 则同时有 $a \equiv 0 \mod p$ 和 $a^p \equiv 0 \mod p$. 故 $a^p \equiv a \mod p$.

(ii) 若 a 不能被 p 整除, 则 $(a, p) = 1$ (见例 1.2.5). 根据定理 2.2.13 知, $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$. 两端同时乘以 a 得, $a^p \equiv a \mod p$.

例 2.2.18 应用欧拉定理可以证明 RSA 公钥密码算法的正确性. Ron Rivest 和 Adi Shamir 以及 Leonard Adleman 于 1978 年提出的 RSA 公钥密码体制至今仍被公认为是一个安全性能良好的密码体制. RSA 公钥密码体制的描述如下：

1) 选取两个大素数 p, q.

2) 计算 $n = pq, \varphi(n) = (p-1)(q-1)$.

3) 随机选取正整数 $e, 1 < e < \varphi(n)$, 满足 $(e, \varphi(n)) = 1$.

4) 计算 d, 满足 $de \equiv 1 \mod \varphi(n)$. $p, q, \varphi(n), d$ 是保密的；n, e 是公开的.

5) 加密变换：对于明文 $m, 1 < m < n$, 加密后的密文为 $c \equiv m^e \mod n$.

6) 解密变换：对于密文 $c, 1 < c < n$, 解密后的明文为 $m = c^d \mod n$.

这个解密变换能正确恢复出明文.

证：由于 $de \equiv 1 \mod \varphi(n)$, 所以存在正整数 t, 使得 $de = 1 + t\varphi(n)$.

对任意明文 $m, 1 < m < n$,

当 $(m, n) = 1$ 时, 根据欧拉定理得

$$c^d \equiv (m^e)^d \equiv (m^{\varphi(n)})^t m \equiv 1^t m \equiv m \mod n. \tag{2.2.2}$$

当 $(m, n) \neq 1$ 时, 因为 $n = pq$ 且 p, q 是两个素数, 所以 $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$, $(m, n) = p$ 或 q. 不妨设 $(m, n) = p$, 则 $p \mid m$. 设 $m = bp, 1 \leq b < q$. 另一方面, 由欧拉定理得 $m^{q-1} \equiv 1 \mod q$, 从而 $m^{t\varphi(n)} = (m^{q-1})^{t(p-1)} \equiv 1 \mod q$, 于是存在一个整数 s, 使得 $m^{t\varphi(n)} = 1 + sq$. 此式两端用 $m = bp$ 同乘, 就得到

$$m^{t\varphi(n)+1} = m + bsn, \tag{2.2.3}$$

从而由（2.2.2）与（2.2.3）有, $c^d \equiv m^{t\varphi(n)+1} \equiv m \mod n$.

定理 2.2.15 (Wilson 定理)

设 p 是一个素数, 则

$$(p-1)! \equiv -1 \mod p.$$

定理 2.2.15 (Wilson 定理)

设 p 是一个素数, 则

$$(p-1)! \equiv -1 \mod p.$$

证：若 $p = 2$, 则结论显然成立.

若 $p \geqslant 3$, 根据定理 2.2.9, 对于每个整数 $a, 1 \leqslant a \leqslant p-1$, 存在唯一的整数 $a', 1 \leqslant a' \leqslant p-1$, 使得 $a \cdot a' \equiv 1 \mod p$.

而 $a' = a$ 的充要条件是 a 满足 $a^2 \equiv 1 \mod p$. 这时, $a = 1$ 或 $a = p-1$. 故将 $2, \cdots, p-2$ 中的 a 与 a' 配对, 得到

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (p-2) \cdot (p-1) &\equiv 1 \cdot (p-1) \prod_{a} a \cdot a' \\ &\equiv 1 \cdot (p-1) \\ &\equiv -1 \mod p. \end{aligned}$$

因此, 结论成立.

例 2.2.19 设 $p = 13$. 有

$$2 \cdot 7 = 14 \equiv 1 \mod 13, \qquad 3 \cdot 9 = 27 \equiv 1 \mod 13,$$
$$4 \cdot 10 = 40 \equiv 1 \mod 13, \qquad 5 \cdot 8 = 40 \equiv 1 \mod 13,$$
$$6 \cdot 11 = 66 \equiv 1 \mod 13, \qquad 1 \cdot 12 = 12 \equiv -1 \mod 13.$$

因此,

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \\ = \ & (1 \cdot 12)(2 \cdot 7)(3 \cdot 9)(4 \cdot 10)(5 \cdot 8)(6 \cdot 11) \\ \equiv \ & (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ \equiv \ & -1 \mod 13. \end{aligned}$$

在模算术计算中, 常常需要进行大整数的方幂模运算, 即对大整数模 m 和大整数 n, 计算 $b^n \mod m$.

在模算术计算中, 常常需要进行大整数的方幂模运算, 即对大整数模 m 和大整数 n, 计算 $b^n \mod m$.

当然, 可以递归地计算 $b^n \equiv (b^{n-1} \mod m) \cdot b \mod m$. 但这种计算方式较为耗时, 须作 $n-1$ 次乘法.

在模算术计算中, 常常需要进行大整数的方幂模运算, 即对大整数模 m 和大整数 n, 计算 $b^n \mod m$.

当然, 可以递归地计算 $b^n \equiv (b^{n-1} \mod m) \cdot b \mod m$. 但这种计算方式较为耗时, 须作 $n-1$ 次乘法.

注意到以下计算特性:

$$b^{16} \equiv \left(\left((b^2)^2\right)^2\right)^2 \mod m,\ b^{128} \equiv \left(\left(\left(\left((b^2)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2 \mod m.$$

则可以优化方幂模 m 运算.

在模算术计算中, 常常需要进行大整数的方幂模运算, 即对大整数模 m 和大整数 n, 计算 $b^n \mod m$.

当然, 可以递归地计算 $b^n \equiv (b^{n-1} \mod m) \cdot b \mod m$. 但这种计算方式较为耗时, 须作 $n-1$ 次乘法.

注意到以下计算特性:

$$b^{16} \equiv \left(\left((b^2)^2\right)^2\right)^2 \mod m,\ b^{128} \equiv \left(\left(\left(\left((b^2)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2 \mod m.$$

则可以优化方幂模 m 运算.

将 n 写成二进制, 即

$$n = n_0 + n_1 2 + \cdots + n_{k-1} 2^{k-1},\ n_i \in \{0,1\},\ i = 0,1,\cdots,k-1.$$

则 $b^n \mod m$ 的计算可归纳为

$$b^n \equiv \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{b^{n_0}}_{a_0}\underbrace{(b^2}_{b_1})^{n_1}}_{a_1}\cdots}_{a_{k-3}}(\underbrace{b^{2^{k-2}}}_{b_{k-2}})^{n_{k-2}}}_{a_{k-2}}\underbrace{(\underbrace{b^{2^{k-1}}}_{b_{k-1}})^{n_{k-1}}}_{a_{k-1}} \mod m.$$

$$b^n \equiv \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{b^{n_0}}_{a_0}\underbrace{(b^2)^{n_1}}_{b_1}}_{a_1}\cdots}_{a_{k-3}}\underbrace{(b^{2^{k-2}})^{n_{k-2}}}_{b_{k-2}}}_{a_{k-2}}\underbrace{(b^{2^{k-1}})^{n_{k-1}}}_{b_{k-1}}}_{a_{k-1}} \mod m.$$

或

$$a_0 = b^{n_0},\ b_0 = b,\ b_i = b_{i-1}^2,\ a_i = a_{i-1}\cdot b_i,\ i = 1,\cdots,k-1.$$

$$b^n \equiv \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{b^{n_0}}_{a_0}\underbrace{(b^2}_{b_1})^{n_1}}_{a_1}\cdots}_{a_{k-3}}\underbrace{(b^{2^{k-2}}}_{b_{k-2}})^{n_{k-2}}}_{a_{k-2}}\underbrace{(b^{2^{k-1}}}_{b_{k-1}})^{n_{k-1}}}_{a_{k-1}} \mod m.$$

或

$$a_0 = b^{n_0},\ b_0 = b,\ b_i = b_{i-1}^2,\ a_i = a_{i-1}\cdot b_i,\ i = 1,\cdots,k-1.$$

从“低位”到“高位”(从右到左) 的顺序进行递归.

$$b^n \equiv \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{b^{n_0}}_{a_0}\underbrace{(b^2}_{b_1})^{n_1}}_{a_1}\cdots\underbrace{(b^{2^{k-2}}}_{b_{k-2}})^{n_{k-2}}}_{a_{k-2}}\underbrace{(b^{2^{k-1}}}_{b_{k-1}})^{n_{k-1}}}_{a_{k-1}} \mod m.$$

或

$$a_0 = b^{n_0},\ b_0 = b,\ b_i = b_{i-1}^2,\ a_i = a_{i-1}\cdot b_i,\ i = 1,\cdots,k-1.$$

从“低位”到“高位”(从右到左) 的顺序进行递归.

因此, 最多作 $2[\log_2 n]$ 次乘法. 该计算方法叫做“**模重复平方计算法**”.

具体算法如下：

令 $a = 1$, 并将 n 写成二进制

$$n = n_0 + n_1 2 + \cdots + n_{k-1} 2^{k-1},$$

其中 $n_i \in \{0, 1\},\ i = 0, 1, \cdots, k-1.$

令 $a = 1$, 并将 n 写成二进制

$$n = n_0 + n_1 2 + \cdots + n_{k-1} 2^{k-1},$$

其中 $n_i \in \{0, 1\},\ i = 0, 1, \cdots, k-1.$

(1) 如果 $n_0 = 1$, 则计算 $a_0 \equiv a \cdot b \mod m$; 否则, 取 $a_0 = a$, 即计算 $a_0 \equiv a \cdot b^{n_0} \mod m$. 再计算 $b_1 \equiv b^2 \mod m$.

令 $a = 1$, 并将 n 写成二进制

$$n = n_0 + n_1 2 + \cdots + n_{k-1} 2^{k-1},$$

其中 $n_i \in \{0, 1\},\ i = 0, 1, \cdots, k-1.$

(1) 如果 $n_0 = 1$, 则计算 $a_0 \equiv a \cdot b \mod m$; 否则, 取 $a_0 = a$, 即计算 $a_0 \equiv a \cdot b^{n_0} \mod m$. 再计算 $b_1 \equiv b^2 \mod m$.

(2) 如果 $n_1 = 1$, 则计算 $a_1 \equiv a_0 \cdot b_1 \mod m$; 否则, 取 $a_1 = a_0$, 即计算 $a_1 \equiv a_0 \cdot b_1^{n_1} \mod m$. 再计算 $b_2 \equiv b_1^2 \mod m$.

$\vdots$

令 $a=1$, 并将 n 写成二进制

$$n = n_0 + n_1 2 + \cdots + n_{k-1} 2^{k-1},$$

其中 $n_i \in \{0,1\},\ i = 0, 1, \cdots, k-1.$

(1) 如果 $n_0 = 1$, 则计算 $a_0 \equiv a \cdot b \mod m$; 否则, 取 $a_0 = a$, 即计算 $a_0 \equiv a \cdot b^{n_0} \mod m$. 再计算 $b_1 \equiv b^2 \mod m$.

(2) 如果 $n_1 = 1$, 则计算 $a_1 \equiv a_0 \cdot b_1 \mod m$; 否则, 取 $a_1 = a_0$, 即计算 $a_1 \equiv a_0 \cdot b_1^{n_1} \mod m$. 再计算 $b_2 \equiv b_1^2 \mod m$.

$\vdots$

(k-1) 如果 $n_{k-2} = 1$, 则计算 $a_{k-2} \equiv a_{k-3} \cdot b_{k-2} \mod m$; 否则, 取 $a_{k-2} = a_{k-3}$, 即计算 $a_{k-2} \equiv a_{k-3} \cdot b_{k-2}^{n_{k-2}} \mod m$. 再计算 $b_{k-1} \equiv b_{k-2}^2 \mod m$.

令 $a=1$, 并将 n 写成二进制

$$n = n_0 + n_1 2 + \cdots + n_{k-1} 2^{k-1},$$

其中 $n_i \in \{0,1\},\ i = 0, 1, \cdots, k-1.$

(1) 如果 $n_0 = 1$, 则计算 $a_0 \equiv a \cdot b \mod m$; 否则, 取 $a_0 = a$, 即计算 $a_0 \equiv a \cdot b^{n_0} \mod m$. 再计算 $b_1 \equiv b^2 \mod m$.

(2) 如果 $n_1 = 1$, 则计算 $a_1 \equiv a_0 \cdot b_1 \mod m$; 否则, 取 $a_1 = a_0$, 即计算 $a_1 \equiv a_0 \cdot b_1^{n_1} \mod m$. 再计算 $b_2 \equiv b_1^2 \mod m$.

$\vdots$

(k-1) 如果 $n_{k-2} = 1$, 则计算 $a_{k-2} \equiv a_{k-3} \cdot b_{k-2} \mod m$; 否则, 取 $a_{k-2} = a_{k-3}$, 即计算 $a_{k-2} \equiv a_{k-3} \cdot b_{k-2}^{n_{k-2}} \mod m$. 再计算 $b_{k-1} \equiv b_{k-2}^2 \mod m$.

(k) 如果 $n_{k-1} = 1$, 则计算 $a_{k-1} \equiv a_{k-2} \cdot b_{k-1} \mod m$; 否则, 取 $a_{k-1} = a_{k-2}$, 即计算 $a_{k-1} \equiv a_{k-2} \cdot b_{k-1}^{n_{k-1}} \mod m$.

令 $a=1$, 并将 n 写成二进制

$$n = n_0 + n_1 2 + \cdots + n_{k-1} 2^{k-1},$$

其中 $n_i \in \{0,1\},\ i = 0, 1, \cdots, k-1.$

(1) 如果 $n_0 = 1$, 则计算 $a_0 \equiv a \cdot b \mod m$; 否则, 取 $a_0 = a$, 即计算 $a_0 \equiv a \cdot b^{n_0} \mod m$. 再计算 $b_1 \equiv b^2 \mod m$.

(2) 如果 $n_1 = 1$, 则计算 $a_1 \equiv a_0 \cdot b_1 \mod m$; 否则, 取 $a_1 = a_0$, 即计算 $a_1 \equiv a_0 \cdot b_1^{n_1} \mod m$. 再计算 $b_2 \equiv b_1^2 \mod m$.

$\vdots$

(k-1) 如果 $n_{k-2} = 1$, 则计算 $a_{k-2} \equiv a_{k-3} \cdot b_{k-2} \mod m$; 否则, 取 $a_{k-2} = a_{k-3}$, 即计算 $a_{k-2} \equiv a_{k-3} \cdot b_{k-2}^{n_{k-2}} \mod m$. 再计算 $b_{k-1} \equiv b_{k-2}^2 \mod m$.

(k) 如果 $n_{k-1} = 1$, 则计算 $a_{k-1} \equiv a_{k-2} \cdot b_{k-1} \mod m$; 否则, 取 $a_{k-1} = a_{k-2}$, 即计算 $a_{k-1} \equiv a_{k-2} \cdot b_{k-1}^{n_{k-1}} \mod m$.

最后, a_{k-1} 就是要求的 $b^n \mod m$.

例 2.3.1　计算 $7^{29} \mod 31$.

例 2.3.1 计算 $7^{29} \mod 31$.

解：设 $m = 31, b = 7$. 令 $a = 1$. 将 29 写成二进制，

$29 = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = (11101)_2$.

例 2.3.1 计算 $7^{29} \mod 31$.

解：设 $m = 31, b = 7$. 令 $a = 1$. 将 29 写成二进制，

$29 = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = (11101)_2$. 运用模重复平方法, 依次计算如下：

例 2.3.1 计算 $7^{29} \mod 31$.

解：设 $m = 31, b = 7$. 令 $a = 1$. 将 29 写成二进制，

$29 = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = (11101)_2$. 运用模重复平方法, 依次计算如下：

(1) $n_0 = 1$, 计算

$$a_0 = a \cdot b \equiv 7 \mod 31, \quad b_1 \equiv b^2 \equiv 18 \mod 31.$$

例 2.3.1 计算 $7^{29} \mod 31$.

解：设 $m = 31, b = 7$. 令 $a = 1$. 将 29 写成二进制，

$29 = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = (11101)_2$. 运用模重复平方法, 依次计算如下：

(1) $n_0 = 1$, 计算

$$a_0 = a \cdot b \equiv 7 \mod 31, \quad b_1 \equiv b^2 \equiv 18 \mod 31.$$

(2) $n_1 = 0$, 计算

$$a_1 = a_0 \equiv 7 \mod 31, \quad b_2 \equiv b_1^2 \equiv 14 \mod 31.$$

例 2.3.1 计算 $7^{29} \mod 31$.

解：设 $m = 31, b = 7$. 令 $a = 1$. 将 29 写成二进制，

$29 = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = (11101)_2$. 运用模重复平方法, 依次计算如下：

(1) $n_0 = 1$, 计算

$$a_0 = a \cdot b \equiv 7 \mod 31, \quad b_1 \equiv b^2 \equiv 18 \mod 31.$$

(2) $n_1 = 0$, 计算

$$a_1 = a_0 \equiv 7 \mod 31, \quad b_2 \equiv b_1^2 \equiv 14 \mod 31.$$

(3) $n_2 = 1$, 计算

$$a_2 = a_1 \cdot b_2 \equiv 5 \mod 31, \quad b_3 \equiv b_2^2 \equiv 10 \mod 31.$$

例 2.3.1 计算 $7^{29} \mod 31$.

解：设 $m = 31, b = 7$. 令 $a = 1$. 将 29 写成二进制，

$29 = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = (11101)_2$. 运用模重复平方法, 依次计算如下：

(1) $n_0 = 1$, 计算

$$a_0 = a \cdot b \equiv 7 \mod 31, \quad b_1 \equiv b^2 \equiv 18 \mod 31.$$

(2) $n_1 = 0$, 计算

$$a_1 = a_0 \equiv 7 \mod 31, \quad b_2 \equiv b_1^2 \equiv 14 \mod 31.$$

(3) $n_2 = 1$, 计算

$$a_2 = a_1 \cdot b_2 \equiv 5 \mod 31, \quad b_3 \equiv b_2^2 \equiv 10 \mod 31.$$

(4) $n_3 = 1$, 计算

$$a_3 = a_2 \cdot b_3 \equiv 19 \mod 31, \quad b_4 \equiv b_3^2 \equiv 7 \mod 31.$$

例 2.3.1 计算 $7^{29} \mod 31$.

解：设 $m = 31, b = 7$. 令 $a = 1$. 将 29 写成二进制，

$29 = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = (11101)_2$. 运用模重复平方法, 依次计算如下：

(1) $n_0 = 1$, 计算

$$a_0 = a \cdot b \equiv 7 \mod 31, \quad b_1 \equiv b^2 \equiv 18 \mod 31.$$

(2) $n_1 = 0$, 计算

$$a_1 = a_0 \equiv 7 \mod 31, \quad b_2 \equiv b_1^2 \equiv 14 \mod 31.$$

(3) $n_2 = 1$, 计算

$$a_2 = a_1 \cdot b_2 \equiv 5 \mod 31, \quad b_3 \equiv b_2^2 \equiv 10 \mod 31.$$

(4) $n_3 = 1$, 计算

$$a_3 = a_2 \cdot b_3 \equiv 19 \mod 31, \quad b_4 \equiv b_3^2 \equiv 7 \mod 31.$$

(5) $n_4 = 1$, 计算 $a_4 = a_3 \cdot b_4 \equiv 9 \mod 31$.

例 2.3.1 计算 $7^{29} \mod 31$.

解：设 $m = 31, b = 7$. 令 $a = 1$. 将 29 写成二进制，

$29 = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = (11101)_2$. 运用模重复平方法, 依次计算如下：

(1) $n_0 = 1$, 计算

$$a_0 = a \cdot b \equiv 7 \mod 31, \quad b_1 \equiv b^2 \equiv 18 \mod 31.$$

(2) $n_1 = 0$, 计算

$$a_1 = a_0 \equiv 7 \mod 31, \quad b_2 \equiv b_1^2 \equiv 14 \mod 31.$$

(3) $n_2 = 1$, 计算

$$a_2 = a_1 \cdot b_2 \equiv 5 \mod 31, \quad b_3 \equiv b_2^2 \equiv 10 \mod 31.$$

(4) $n_3 = 1$, 计算

$$a_3 = a_2 \cdot b_3 \equiv 19 \mod 31, \quad b_4 \equiv b_3^2 \equiv 7 \mod 31.$$

(5) $n_4 = 1$, 计算 $a_4 = a_3 \cdot b_4 \equiv 9 \mod 31$.

最后, 计算得出 $7^{29} \equiv 9 \mod 31$.

例 2.3.2　计算 $32760^{365} \mod 65521$.

例 2.3.2 计算 $32760^{365} \mod 65521$.

解：设 $m = 65521, b = 32760$. 令 $a = 1$. 将 365 写成二进制，

$365 = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^8 = (101101101)_2$.

例 2.3.2 计算 $32760^{365} \mod 65521$.

解：设 $m = 65521, b = 32760$. 令 $a = 1$. 将 365 写成二进制，

$365 = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^8 = (101101101)_2$.可以依次计算如下：

(1) $n_0 = 1$, 计算

$$a_0 = ab \equiv 32760 \mod 65521, \quad b_1 \equiv b^2 \equiv 49141 \mod 65521.$$

例 2.3.2 计算 $32760^{365} \mod 65521$.

解：设 $m = 65521, b = 32760$. 令 $a = 1$. 将 365 写成二进制，

$365 = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^8 = (101101101)_2$.可以依次计算如下：

(1) $n_0 = 1$, 计算

$$a_0 = ab \equiv 32760 \mod 65521, \quad b_1 \equiv b^2 \equiv 49141 \mod 65521.$$

(2) $n_1 = 0$, 计算

$$a_1 = a_0 \equiv 32760 \mod 65521, \quad b_2 \equiv b_1^2 \equiv 61426 \mod 65521.$$

例 2.3.2 计算 $32760^{365} \mod 65521$.

解：设 $m = 65521, b = 32760$. 令 $a = 1$. 将 365 写成二进制，

$365 = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^8 = (101101101)_2$.可以依次计算如下：

(1) $n_0 = 1$, 计算

$$a_0 = ab \equiv 32760 \mod 65521, \quad b_1 \equiv b^2 \equiv 49141 \mod 65521.$$

(2) $n_1 = 0$, 计算

$$a_1 = a_0 \equiv 32760 \mod 65521, \quad b_2 \equiv b_1^2 \equiv 61426 \mod 65521.$$

(3) $n_2 = 1$, 计算

$$a_2 = a_1 \cdot b_2 \equiv 34808 \mod 65521, \quad b_3 \equiv b_2^2 \equiv 61170 \mod 65521.$$

例 2.3.2 计算 $32760^{365} \mod 65521$.

解：设 $m = 65521, b = 32760$. 令 $a = 1$. 将 365 写成二进制，

$365 = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^8 = (101101101)_2$.可以依次计算如下：

(1) $n_0 = 1$, 计算

$$a_0 = ab \equiv 32760 \mod 65521, \quad b_1 \equiv b^2 \equiv 49141 \mod 65521.$$

(2) $n_1 = 0$, 计算

$$a_1 = a_0 \equiv 32760 \mod 65521, \quad b_2 \equiv b_1^2 \equiv 61426 \mod 65521.$$

(3) $n_2 = 1$, 计算

$$a_2 = a_1 \cdot b_2 \equiv 34808 \mod 65521, \quad b_3 \equiv b_2^2 \equiv 61170 \mod 65521.$$

(4) $n_3 = 1$, 计算

$$a_3 = a_2 \cdot b_3 \equiv 34944 \mod 65521, \quad b_4 \equiv b_3^2 \equiv 61153 \mod 65521.$$

例 2.3.2 计算 $32760^{365} \mod 65521$.

解：设 $m = 65521, b = 32760$. 令 $a = 1$. 将 365 写成二进制，

$365 = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^8 = (101101101)_2$.可以依次计算如下：

(1) $n_0 = 1$, 计算

$$a_0 = ab \equiv 32760 \mod 65521, \quad b_1 \equiv b^2 \equiv 49141 \mod 65521.$$

(2) $n_1 = 0$, 计算

$$a_1 = a_0 \equiv 32760 \mod 65521, \quad b_2 \equiv b_1^2 \equiv 61426 \mod 65521.$$

(3) $n_2 = 1$, 计算

$$a_2 = a_1 \cdot b_2 \equiv 34808 \mod 65521, \quad b_3 \equiv b_2^2 \equiv 61170 \mod 65521.$$

(4) $n_3 = 1$, 计算

$$a_3 = a_2 \cdot b_3 \equiv 34944 \mod 65521, \quad b_4 \equiv b_3^2 \equiv 61153 \mod 65521.$$

(5) $n_4 = 0$, 计算

$$a_4 = a_3 \equiv 34944 \mod 65521, \quad b_5 \equiv b_4^2 \equiv 12813 \mod 65521.$$

(6) $n_5 = 1$, 计算

$$a_5 = a_4 \cdot b_5 \equiv 32479 \mod 65521, \quad b_6 \equiv b_5^2 \equiv 42864 \mod 65521.$$

(6) $n_5 = 1$, 计算

$$a_5 = a_4 \cdot b_5 \equiv 32479 \mod 65521, \quad b_6 \equiv b_5^2 \equiv 42864 \mod 65521.$$

(7) $n_6 = 1$, 计算

$$a_6 = a_5 \cdot b_6 \equiv 55169 \mod 65521, \quad b_7 \equiv b_6^2 \equiv 48135 \mod 65521.$$

(6) $n_5 = 1$, 计算

$$a_5 = a_4 \cdot b_5 \equiv 32479 \mod 65521, \quad b_6 \equiv b_5^2 \equiv 42864 \mod 65521.$$

(7) $n_6 = 1$, 计算

$$a_6 = a_5 \cdot b_6 \equiv 55169 \mod 65521, \quad b_7 \equiv b_6^2 \equiv 48135 \mod 65521.$$

(8) $n_7 = 0$, 计算

$$a_7 = a_6 \equiv 55169 \mod 65521, \quad b_8 \equiv b_7^2 \equiv 24623 \mod 65521.$$

(6) $n_5 = 1$, 计算

$$a_5 = a_4 \cdot b_5 \equiv 32479 \mod 65521, \quad b_6 \equiv b_5^2 \equiv 42864 \mod 65521.$$

(7) $n_6 = 1$, 计算

$$a_6 = a_5 \cdot b_6 \equiv 55169 \mod 65521, \quad b_7 \equiv b_6^2 \equiv 48135 \mod 65521.$$

(8) $n_7 = 0$, 计算

$$a_7 = a_6 \equiv 55169 \mod 65521, \quad b_8 \equiv b_7^2 \equiv 24623 \mod 65521.$$

(9) $n_8 = 1$, 计算

$$a_8 = a_7 \cdot b_8 \equiv 44915 \mod 65521.$$

最后, 计算得出 $32760^{365} \equiv 44915 \mod 65521$.

本课作业

1. 证明：若 p 为奇素数, 且 $2^m \not\equiv 1 \mod p$, 则
$$1^m + 2^m + \cdots + (p-1)^m \equiv 0 \mod p.$$
2. 求 $\varphi(2024)$.
3. 证明: 如果 m 是正整数, a 是与 m 互素的整数, 且 $(a-1, m) = 1$,
则 $1 + a + a^2 + \cdots + a^{(\varphi(m)-1)} \equiv 0 \mod m$.
4. 利用模重复平方算法计算 $21^{39} \mod 100$.

交流与讨论

电子邮箱：

陈秀波：xb_chen@bupt.edu.cn

徐国胜：guoshengxu@bupt.edu.cn

金正平：zhpjin@bupt.edu.cn