北京邮电大学 2023—2024 学年第二学期

《概率论与数理统计》期末考试试题（4 学分·A 卷）

考试注意事项	一、学生参加考试须带学生证或学院证明，未带者不准进入考场。学生必须按照监考教师指定座位就坐。 二、书本、参考资料、书包等物品一律放到考场指定位置。 三、学生不得另行携带、使用稿纸，要遵守《北京邮电大学考场规则》，有考场违纪或作弊行为者，按相应规定严肃处理。 四、学生必须将答题内容做在试题答卷上，做在草稿纸上一律无效。

一、填空选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 已知男性有5%是色盲者，女性有0.25%是色盲者。从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲者。问此人是女性的概率为________。

2. 设 A,B 为相互独立的随机事件，$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，则 A,B 中至少一个发生的概率为________。

3. 一个质点在随机外力的作用下，从原点0出发，每次等可能地向左或向右移动一个单位长度，共移动4次。则质点刚好回到原点的概率为________。

4. 某公安局在长度为 t 的时间间隔内收到的紧急呼救次数 X 服从参数为 $\frac{t}{2}$ 的泊松分布，而与时间间隔的起点无关（时间以小时计）。则某天下午 12 时至下午 4 时正好收到 2 次紧急呼救的概率为________。

5. 设随机变量 Y 服从指数分布，且 $E(Y)=2$，a 为常数且大于零，则 $P\{Y\geq a+1 \mid Y>a\}=$________。

6. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，且 $X_1\sim U(0,6)$，$X_2\sim N(1,3)$，$X_3\sim B(16,\frac{1}{4})$。则 $Y=X_1+2X_2-X_3$ 的方差为________。

7. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中总体 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，则利用中心极限定理可得 $P\{\sum_{i=1}^{80}X_i\leq 66\}$ 的近似值为________。

(A) $1-\Phi(1)$　(B) $\Phi(\sqrt{3})$　(C) $\Phi(2\sqrt{3})$　(D) $\Phi(6)$

8. 设总体 X 的概率分布为

X	-1	0	1
P	p	$1-2p$	p

其中 $p\ (0<p<1)$ 是未知参数。设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差。若 $\overline{X}+kS^2$ 为 p 的无偏估计，则 $k=$____？

9. 设 X_1, X_2, X_3 为来自正态总体 $X \sim N(0,1)$ 的简单随机样本，则当常数 $\alpha=$________时，统计量 $S=\dfrac{X_1-X_2}{\alpha\,|X_3|}$ 服从________分布。

(A) $\sqrt{2}$，$F(1,2)$　　(B) 2，$F(1,1)$

(C) $\sqrt{2}$，$t(1)$　　(D) 2，$t(2)$

10. 设某批矿砂中的镍含量（以%计）服从正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，从中任取 n 个样本。其平均镍含量为 $\bar{x}$，标准差为 s。则这批矿砂中镍含量的方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha=0.9$ 的双侧置信区间为________________。

(A) $\left(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.05}(n-1)}, \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.95}(n-1)}\right)$　　(B) $\left(\bar{x}-\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1), \bar{x}+\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)\right)$

(C) $\left(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.95}(n-1)}, \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.05}(n-1)}\right)$　　(D) $\left(\bar{x}-\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{0.95}(n-1), \bar{x}+\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{0.95}(n-1)\right)$

二、计算题（共 10 分）

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} a, & x<1, \\ \ln x, & 1\le x<e, \\ 1, & x\ge e. \end{cases}$

(1) 确定常数 a；

(2) 求 $P\{X<2\}$；

(3) 求概率密度 $f(x)$。

三、计算题（共 10 分）

设圆的**直径** $X \sim U(0,1)$，求圆的面积 $Y = \dfrac{\pi X^2}{4}$ 的概率密度函数、以及 $E(Y)$。

四、计算题（共 10 分）

设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(1,-1;1,4;-\dfrac{1}{2})$。

(1) $X+Y$ 和 $X-Y$ 分别服从什么分布？给出分布类型和参数取值。

(2) 求协方差 $Cov(X+Y,X)$， $X+Y$ 与 X 是否相关？

(3) $\sqrt{5}(X+Y)$ 与 X 是否相互独立？为什么。

五、计算题（共 10 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{-(\theta+1)}, & x>1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$，其中 $\theta>1$ 是未知参数。

$X_1,X_2,\dots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本， $x_1,x_2,\dots,x_n$ 为样本观测值。

(1) 求 θ 的矩估计量；

(2) 求 θ 的最大似然估计量。

六、计算题（共 10 分）

在 20 世纪 70 年代后期人们发现，酿造啤酒时，在麦芽干燥过程中会形成致癌物质亚硝基二甲胺(NDMA)。20 世纪 80 年代初期开发了一种新的麦芽干燥过程。设老过程中形成 NDMA 含量（以 10 亿份中的含量计）服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$，新过程中形成 NDMA 含量服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma^2)$，参数 μ_1,μ_2,σ^2 均未知。

技术人员独立地对两种过程中形成 NDMA 含量做抽样测试，测得数据如下：

老过程： $n_1=11$， $\bar{x}_1=5.2$， $s_1^2=0.98$

新过程： $n_2=11$， $\bar{x}_2=1.7$， $s_2^2=1.00$

在检验水平 $\alpha=0.10$ 下，能否认为新过程比老过程中形成 NDMA 含量的均值降低量**显著地大于** 2？即 $\mu_1-\mu_2>2$ 。

在解题过程中，你可能需要用到数据：$F_{0.05}(10,10)=2.98$、$F_{0.05}(11,11)=2.81$、$t_{0.05}(20)=1.7247$、$t_{0.10}(20)=1.3253$。

七、计算题（共 10 分）

生活经验告诉我们，儿子的身高与父亲的身高不仅线性相关，而且还是正相关的。即父亲的身高较高时，儿子的身高通常也较高。为了进一步研究两者之间的关系，有人调查了某所高校 5 名男大学生的身高及其父亲的身高，得到的统计数据如下表：

编号	1	2	3	4	5
父亲身高 x/cm	175	171	173	169	182
儿子身高 y/cm	177	175	172	171	185

计算得到

$\sum_{i=1}^{5} x_i=870$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2=151480$		$n\bar{x}^2=151380$
$\sum_{i=1}^{5} y_i=880$	$\sum_{i=1}^{5} y_i^2=155004$	$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i=153225$	$n\bar{y}^2=154880$

(1) 求线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$；

(2) 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下对回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 作显著性检验。

在解题过程中，你可能需要用到数据：$F_{0.05}(1,3)=10.1$、$F_{0.05}(1,4)=7.71$。