北京邮电大学 2018--2019 学年第 1 学期

《概率论与数理统计》期末考试试题（A）

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效.

一. 填空题（每空 4 分，共 4 0 分）

1.设 A,B 为两事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，则 $P(A\cup B)=$____.

2.设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} ax, 0<x<2, \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$$

则 $P\{X>1\}=$_______.（先确定常数 a，再计算 $P\{X>1\}$）

3.设随机变量 X 和 Y 相互独立,且 $X\sim N(0,3)$，$Y\sim N(0,4)$，则 $2X-Y$ 与 $2X+Y$ 的相关系数为_______.

4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X\sim U(0,2)$，Y 的分布律为 $P\{Y=k\}=\frac{1}{2}$，$k=1,2$，则 $P\{X+Y\le 2\}=$_______.

5.某种型号器件的寿命 X（单位:小时）具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1000}{x^2}, x>1000, \\ 0, 其他 \end{cases}$$

现有一大批此种器件，从中任取10件，Y 表示 10 件器件中寿命大于 2000 小时的件数，则 $D(Y)=$_______.

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{48}$ 独立同分布，且 $X_1\sim U(-1,1)$，利用中心极限定理可得

$$P\{|\sum_{i=1}^{48}X_i|<2\}\approx$$ ______.

7.设 X 服从参数为2 的泊松分布，则 $E(e^X)=$_____.

8.从正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取容量为16的样本，算得样本均值为 $\bar{x}=14.68$，样本标准差为 $s=2.4$，则 μ 的置信水平为95%的置信区间为______.

9.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $b(1,p)$ 的样本，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $D(\bar{X})=$_____.

10. 设 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，若统计量 $\frac{cX_1}{(X_2^2+X_3^2+X_4^2+X_5^2)^{1/2}}$ 服从 t 分布，则 $c=$______.

二．(10 分) 一袋中有 5 个球,其中 2 个红球、3 个白球. 从中不放回地任取 3 个球,以 X 表示取出的 3 球中的红球数，求

(1) X 的分布律; (2) $E(X)$; (3) X 的分布函数.

三．(10 分) 设随机变量 X 和 Y 相互独立,且均服从参数为 1 的指数分布，求

（1）$P\{X>2Y\}$；（2）$Z=\min(X,Y)$ 的分布函数；（3）$U=X+Y$ 的概率密度.

四．(10 分) 设随机向量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y, x^2<y<1,\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

求(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)$； (2) $Y=y(0<y<1)$ 的条件下，X 的条件概率密度.

五．(10 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}x^{\frac{1}{\theta}-1}, 0<x<1,\\ 0, 其他\end{cases}$$

$\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的样本.

(1)求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$；(2) 证明 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计.

六．(10 分) 有甲、乙两台机器生产同种类型的金属部件. 分别在两台机器所生产的部件中各抽取一个容量均为8的样本, 测量部件的重量(单位:kg), 经计算得样本均值和样本方差如下:

甲机器：$\bar{x}=12.68$, $s_1^2=5.06$,

乙机器：$\bar{y}=10.45$, s_2^2=2.94 ,

设甲、乙两台机器生产的金属部件的重量分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

(1) 试检验假设: $H_0:\sigma_1=\sigma_2$ $H_1:\sigma_1\neq\sigma_2$ (显著性水平 $\alpha=0.1$);

(2) 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，能否认为甲机器生产的部件的重量比乙机器生产的部件的重量大?

七．(10 分) 在钢线碳含量对于电阻的效应的研究中,得到以下数据：

碳含量 x(%)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
电阻 $y(\mu\Omega)$	15	18	19	21	23	25	26

并计算得 $\sum_{i=1}^{7}x_i=2.8,\sum_{i=1}^{7}x_i^2=1.4,\sum_{i=1}^{7}y_i=147,\sum_{i=1}^{7}y_i^2=3181,\sum_{i=1}^{7}x_iy_i=63.9$,

(1)求线性回归方程 $\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x$;

(2)在显著水平 $\alpha=0.01$ 下, 检验回归方程的显著性,即检验假设

$H_0:\beta_1=0, H_1:\beta_1\neq 0$

附： $\Phi(0.5)=0.6915$ ， $t_{0.025}(15)=2.13$ ， $t_{0.05}(14)=1.76$ ， $F_{0.05}(7,7)=3.79$ ，

$F_{0.01}(1,5)=16.3$.

北京邮电大学 2018--2019 学年第 1 学期

《概率论与数理统计》期末试题答案（B）

一．填空题（每空 4 分，共 4 0 分）

1. $P(A\cup B)=\dfrac{1}{3}$.
2. $P\{X>1\}=1-\int_0^1 \dfrac{x}{2}dx=\dfrac{3}{4}$.
3. $\dfrac{1}{2}$
4. $\dfrac{1}{4}$.
5. $\dfrac{5}{2}$
6. 0.383
7. $\mathrm{e}^{2(\mathrm{e}-1)}$.
8. (13.402,15.958)
9. $\dfrac{p(1-p)}{n}$
10. 2

二．(10 分)

解 (1) $P\{X=0\}=\dfrac{C_3^3}{C_5^3}=0.1$,

$$P\{X=1\}=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=0.6,$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=0.3.$$

X 的分布律为

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

……4 分

(2) $E(X)=0\times0.1+1\times0.6+2\times0.3=1.2$. ……3 分

(3) X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 0.1, 0\le x<1,\\ 0.7, 1\le x<2,\\ 1, x\ge 2\end{cases}$$ ……3 分

三．(10 分)

解:(1) (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, x>0, y>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

$$P\{X>2Y\}=\iint_{x>2y} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{\infty}dy\int_{2y}^{\infty}e^{-(x+y)}dx$$

$$=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-3y}dy$$

$$=\frac{1}{3}.$$ ……3 分

(2) $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{\min(X,Y)\le z\}$$

$$=1-P\{\min(X,Y)>z\}$$

$$=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}$$

$$=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2z}, z\ge 0,\\ 0, z<0\end{cases}$$ ……3 分

(3) $U = X + Y$ 的概率密度为

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, u-x)dx,$$

当 $u \le 0$ 时，$f_U(u) = 0$;

当 $u > 0$ 时,

$$f_U(u) = \int_0^u \mathrm{e}^{-u} du = u\mathrm{e}^{-u},$$

即得

$$f_U(u) = \begin{cases} u\mathrm{e}^{-u} u > 0, \\ 0, \text{其他} \end{cases}.$$

……4 分

四．(10 分)

解：（1）$E(X) = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x \cdot \frac{21}{4} x^2 y dx = 0$，

$$E(XY) = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xy \cdot \frac{21}{4} x^2 y dx = 0,$$

所以

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.$$

……5 分

(2)当 $0 < y < 1$ 时，$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{21}{4} x^2 y dx = \frac{7}{2} y^{5/2}$，

$Y = y(0 < y < 1)$ 条件下，X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{3}{2} x^2 y^{-3/2}, -\sqrt{y} < x < \sqrt{y}, \\ 0, \text{其他} \end{cases}.$$

……5 分

五．(10 分)

解：（1）似然函数为

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{\theta} - 1},$$

对数似然函数为

$$\ln[L(\theta)] = -n\ln\theta + (\frac{1}{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \ ,$$

令

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln[L(\theta)] = -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0 \ ,$$

得θ的最大似然估计量为

$$\hat{\theta} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i \ .$$ ……5 分

（2） $E(\ln X) = \int_0^1 \ln x \cdot \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1}dx = -\int_0^1 x^{\frac{1}{\theta}-1}dx = -\theta$，

$$E(\hat{\theta}) = -\frac{1}{n}E\{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\} = -E(\ln X) = \theta \ ,$$

所以θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$是θ的无偏估计. ……5 分

六．(10 分)

解： （1）检验统计量的观察值为

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{5.06}{2.94} = 1.7211$$

由于$F_{0.95}(7,7) < F = 1.7211 < F_{0.05}(7,7)$,故不拒绝原假设,即认为 $\sigma_1 = \sigma_2$.

……5 分

(2) 需检验假设

$$H_0: \mu_1 \le \mu_2 \qquad H_1: \mu_1 > \mu_2$$

$$s_w^2 = \frac{7s_1^2 + 7s_2^2}{14} = 4,$$

检验统计量的观察值为

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{12.68-10.45}{\sqrt{4}\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}}=2.23,$$

由于$t=2.23>t_{0.05}(14)$,故拒绝原假设,即认为甲机器生产的部件的重量比乙机生产的部件的重量大. ……5 分

七．(10 分)

解: (1) $L_{xx}=\sum_{i=1}^{7}x_i^2-\frac{1}{7}(\sum_{i=1}^{7}x_i)^2=0.28$, $L_{xy}=\sum_{i=1}^{7}x_iy_i-\frac{1}{7}(\sum_{i=1}^{7}x_i)(\sum_{i=1}^{7}y_i)=5.1$,

$$\hat{\beta}_1=\frac{L_{xy}}{L_{xx}}=18.2143,$$

线性回归方程为

$$\hat{y}=\frac{147}{7}+18.2143(x-\frac{2.8}{7}),$$

即 $\hat{y}=13.7143+18.2143x$. ……5 分

(2) $L_{xx}=\sum_{i=1}^{7}y_i^2-\frac{1}{7}(\sum_{i=1}^{7}y_i)^2=94$,

回归平方和为

$$S_R=\frac{L_{xy}^2}{L_{xx}}=92.893,$$

残差平方和为

$$S_E=L_{yy}-S_R=1.107,$$

检验统计量的观察值为

$$F=\frac{S_R}{S_E/5}=419.57.$$

由于$F>F_{0.01}(1,5)$,故拒绝原假设,即在显著水平$\alpha=0.01$下，回归方程是显著的. ……5 分