北京邮电大学 2020-2021 第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题(计算机学院，4 学分，A)

考试注意事项：

学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效.

一、填空题与选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 设 A,B 为两事件，且 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，则

$P(B\mid A\cup\overline{B})=$______ .

2. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，$X\sim b(1,p)$，$Y\sim b(2,p)$（$p\in(0,1)$），则 X 与 $X+Y$ 的相关系数为_______.

3. 设随机变量 X 服从均值为 $\dfrac{1}{3}$ 的指数分布，则 $D(\mathrm{e}^X)=$____.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，X_1 的分布律为 $P\{X_1=k\}=\dfrac{k+1}{10},k=0,1,2,3$，

则 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于_______.

5. 有两箱同类型的零件, 每箱都装有 8 个零件, 第一箱中有 4 个一等品, 第二箱有 6 个一等品, 现从两箱中任选一箱, 然后从该箱中不放回地取零件两次,每次取一个, 则在第一次取到一等品条件下, 第二次取到一等品的条件概率为_______.

6. 设随机变量 X_1,X_2 独立同分布,且 X_1 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{1+x^2}, x\ge 0,\\ 0, x<0,\end{cases}$$

则 $Z=\min(X_1,X_2)$ 的概率密度为 $f_Z(z)=$______ .

7. 设 $(X,Y)\sim N(0,1,4,1,-\dfrac{1}{2})$，则 $X-2Y+1$ 服从正态分布

A. $N(-1,4)$　　B. $N(-1,8)$

C. $N(1,10)$　　D. $N(-1,12)$

8. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $E(\bar{X}^2)=$

A. λ　　B. λ^2　　C. $\lambda^2+\frac{\lambda}{n}$　　D. $\lambda^2-\frac{\lambda}{n}$

9. 从正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取容量为 n 的样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. s^2 为样本方差, 则 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

A. $(\frac{ns^2}{\chi^2_{\alpha}(n)},\frac{ns^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)})$　　B. $(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)})$

C. $(\frac{ns^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\frac{ns^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)})$　　D. $(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$

10. 设 $X\sim\chi^2(n)$, 则由中心极限定理知, 当 n 充分大时, 下列随机变量中近似服从标准正态分布的是

A. $\frac{X-n}{2n}$　　B. $\frac{X-n}{\sqrt{2n}}$　　C. $\frac{X-2n}{n}$　　D. $\frac{X-2n}{\sqrt{n}}$

二(12 分)设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{200}{x^3}, x\ge 10,\\ 0, \quad 其它,\end{cases}$,

(1) 求 X 的期望 $E(X)$; (2) 求 X 的分布函数; (3) 求 $Y=\ln X$ 的概率密度.

三 (12 分) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, X 的分布律为 $P\{X=-1\}=\frac{1}{2},P\{X=1\}=\frac{1}{2}$, $Y\sim N(0,1)$,令 $Z=XY$,

(1) 求 $\mathrm{Cov}(Y,Z)$; (2) 求 Z 的概率密度;

(3) 证明：事件 $\{Y\le 0\}$ 与事件 $\{Z\le 0\}$ 相互独立, 而事件 $\{|Y|\le 1\}$ 与事件 $\{|Z|\le 1\}$ 不独立.

四(8 分) 设随机向量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6y, 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, \quad 其它,\end{cases}$$

(1) 求 $P\{X+Y<1\}$; (2)求在 $Y=y$ $(0<y<1)$ 的条件下, X 的条件概率密度.

五(8 分) 一项研究比较两种不同复合材料制造的发动机轴承.两种类型的轴承各取

10个进行使用寿命(以百万圈为单位)的测试,由试验结果算得样本均值、样本方差如下:

类型 1　$\overline{x}=19.5$　$s_x^2=9.5$

类型 2　$\overline{y}=16.5$　$s_y^2=8.5$

假设类型1,类型2轴承的使用寿命分别服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

(1)在水平$\alpha=0.1$下,检验假设$H_0:\sigma_1=\sigma_2$ 对 $H_1:\sigma_1\neq\sigma_2$;

(2)能否认为类型1轴承的平均寿命显著地大于类型2轴承的平均寿命(检验水平取$\alpha=0.05$).

六(12分) 设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, x\geq 0,\\ 0, \quad 其它,\end{cases}$$

其中$\theta>0$为未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的样本.

(1) 求θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$;

(2) 求θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$是否是θ的无偏估计?

(3) 确定a,使得$E(a\hat{\theta}-\theta)^2$最小.

七(8分) 测量了10名5～8岁儿童的体重x（单位：kg）和体积Y (单位: dm^3),得数据$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,10)$,并算得: $\sum_{i=1}^{10}x_i=144$, $\sum_{i=1}^{10}x_i^2=2136.84$,

$\sum_{i=1}^{10}y_i=141.2$, $\sum_{i=1}^{10}y_i^2=2065.08$, $\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=2095.42$.

(1) 求线性回归方程$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$;

(2) 对回归方程作显著性检验,即检验假设$H_0:b=0$ 对 $H_1:b\neq 0$. (水平取$\alpha=0.01$)

附: $t_{0.05}(18)=1.734$, $F_{0.05}(9,9)=3.18$, $F_{0.01}(1,8)=11.3$, $t_{0.005}(8)=3.355$.

北京邮电大学 2020-2021 第一学期

《概率论与数理统计》期末试题答案(计算机学院，4 学分)

一、填空题与选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 0.25　2. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　3. $\frac{3}{4}$　4. 5　5. $\frac{3}{5}$　6. $f_{Z}(z)=\begin{cases}\frac{4z}{(1+z^2)^3}, z>0,\\ 0, z\le 0\end{cases}$

7. D　8. C　9. D.　10. B

二、(12 分)

解:(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{10}^{\infty}\frac{200}{x^2}dx=20$.　　……4 分

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}\int_{10}^{x}\frac{200}{t^3}dt, x\ge 10\\ 0, x<10\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{100}{x^2}, x\ge 10,\\ 0, x<10\end{cases}$.　　……4 分

(3) $y=\ln x$ 的反函数为 $x=\mathrm{e}^y$，且 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\mathrm{e}^y$，所以 $Y=\ln X$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=f(\mathrm{e}^y)\mathrm{e}^y=\begin{cases}200\mathrm{e}^{-2y}, y>\ln 10,\\ 0, \text{其他}.\end{cases}$$　　……4 分

三、(12 分)

解 (1) $E(Y)=0, E(YZ)=E(XY^2)=E(X)E(Y^2)=0$,故

$\mathrm{Cov}(Y,Z)=E(YZ)-E(Y)E(Z)=0$.　　……4 分

(2) Z 的分布函数为

$F_Z(z)=P\{XY\le z\}$

$=P\{X=-1\}P\{XY\le z\mid X=-1\}+P\{X=1\}P\{XY\le z\mid X=1\}$

$=\frac{1}{2}[P\{Y\ge -z\}+P\{Y\le z\}]$

$=\frac{1}{2}[1-\Phi(-z)+\Phi(z)]$

$=\Phi(z)$，

所以Z的概率密度为

$$f_Z(z)=\Phi'(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}.\qquad\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

(3) $P\{Y\le 0,Z\le 0\}=\frac{1}{2}[P\{Y\le 0,XY\le 0\mid X=-1\}+P\{Y\le 0,XY\le 0\mid X=1\}]$

$$=\frac{1}{2}[P\{Y\le 0,Y\ge 0\}+P\{Y\le 0,Y\le 0\}]$$

$$=\frac{1}{4}.$$

又 $P\{Y\le 0\}=P\{Z\le 0\}=\frac{1}{2}$，从而 $P\{Y\le 0,Z\le 0\}=P\{Y\le 0\}P\{Z\le 0\}$，故事件$\{Y\le 0\}$与事件$\{Z\le 0\}$相互独立.

$P\{|Y|\le 1,|Z|\le 1\}=P\{|Y|\le 1,|XY|\le 1\}=P\{|Y|\le 1\}\ne P\{|Y|\le 1\}P\{|Z|\le 1\}$，所以$Y$与$Z$不相互独立. ……4 分

四、(8 分)

解:(1) $P(X+Y\le 1)=\iint\limits_{x+y\le 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{1-y}6ydx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(6y-12y^2)dy$$

$$=\frac{1}{4}.\qquad\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}6y(1-y),0<y<1,\\0,\text{其他}\end{cases}$,

在$Y=y$ $(0<y<1)$的条件下,X的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y},y<x<1,\\0,\text{其他}\end{cases}.\qquad\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

五、(8 分)

解:(1)检验的拒绝域为

$F\le F_{0.95}(9,9)=\frac{1}{3.18}$,或$F\le F_{0.05}(9,9)=3.18$,

其中检验统计量$F=\frac{s_x^2}{s_y^2}$,

由样本算得$F=\frac{s_x^2}{s_y^2}=\frac{9.5}{8.5}=1.118$,易见 $F_{0.95}(9,9)<F=1.118<F_{0.05}(9,9)$,样本没有落入拒绝域,所以不拒绝原假设,即认为两总体的方差无显著差异. ……4 分

(2)需检验假设

$H_0:\mu_1\le\mu_2 \quad H_1:\mu_1>\mu_2$

检验的拒绝域为

$t\ge t_{0.05}(18)=1.734$

其中检验统计量$t=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}}$,

由样本算得

$$t=\frac{19.5-16.5}{3\sqrt{1/5}}=\sqrt{5},$$

易见$t=\sqrt{5}\ge 1.734$,从而样本落入拒绝域,所以拒绝原假设,即认为类型 1 轴承的平均寿命显著地大于类型 2 轴承的平均寿命.

……4 分

六、(12 分)

解:(1)似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x;\theta)=\frac{x_1\cdots x_n}{\theta^{2n}}\ e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i},$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=-2n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

令

$$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{-2n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0,$$

解得

$$\theta=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

所以θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.　　　　　　……4 分

(2) $E(X)=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=2\int_0^{\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=2\theta$,

所以

$$E(\hat{\theta})=\frac{1}{2n}E[\sum_{i=1}^{n}x_i]=\frac{1}{2}E(X)=\theta,$$

因此θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i$是$\theta$的无偏估计.　　　……4 分

(3) $E(X^2)=\int_0^{\infty}\frac{x^3}{\theta^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=3\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=6\theta^2$,

$$D(X)=6\theta^2-(2\theta)^2=2\theta^2,$$

$$D(\hat{\theta})=\frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{\theta^2}{2n},$$

$$\begin{aligned}E(a\hat{\theta}-\theta)^2&=a^2E(\hat{\theta}^2)-2a\theta E(\hat{\theta})+\theta^2\\&=a^2(D(\hat{\theta})+(E(\hat{\theta}))^2)-2a\theta^2+\theta^2\\&=(\frac{2n+1}{2n}a^2-2a+1)\theta^2\end{aligned}$$

当$a=\frac{2n}{2n+1}$时$E(a\hat{\theta}-\theta)^2$最小.　　　　　　……4 分

七、(8 分)

解 (1) $\overline{x}=14.4$, $\overline{y}=14.12$,

$$S_{xx}=\sum_{i=1}^{10}x_i^2-\frac{1}{10}(\sum_{i=1}^{10}x_i)^2=2136.84-\frac{144^2}{10}=63.24,$$

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i\cdot\sum_{i=1}^{10}y_i=2095.42-14.4\times141.2=62.14,$$

$$\hat{b}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=0.9826,\ \hat{a}=14.12-0.9826\times14.4=-0.0294,$$

所以y关于x的线性回归方程为

$\hat{y} = -0.0294 + 0.9826x$.   ……5 分

(2) $S_{yy} = \sum_{i=1}^{10} y_i^2 - \frac{1}{10}(\sum_{i=1}^{10} y_i)^2 = 2065.08 - \frac{1}{10} \times 141.2^2 = 71.336$,

$S_R = \hat{b} S_{xy} = 0.9826 \times 62.14 = 61.0588$,

$S_E = S_{yy} - S_R = 71.336 - 61.0588 = 10.2772$,

$F = \frac{S_R}{S_E / 8} = 47.53$,

由于 $F > F_{0.01}(1,8) = 11.3$, 因此在显著水平 0.01 下认为回归方程是显著的.

……3 分

附: $t_{0.05}(18) = 1.734$, $t_{0.005}(8) = 3.355$, $F_{0.05}(9,9) = 3.18$, $F_{0.01}(1,8) = 11.3$.