北京邮电大学 2021-2022 第二学期

《概率论与数理统计》期末考试试题(3 学分)

一、填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 设 A，B，C 为三个随机事件，且 A 与 B 互不相容，A 与 C 互不相容，B 与 C 相互独立，已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，则 $P(A|A\cup B\cup C)=$________________.

2. 甲袋中有 1 个红球和 1 个白球.乙袋中有 2 个红球和 2 个白球. 从甲袋中任取一球放入乙袋中,再从乙袋中任取一球,若从乙袋中取出的球是红球,则从甲袋中取出的球是红球的概率为_________.

3. 设随机变量 $X\sim N(1,\dfrac{1}{2})$，则 $Y=2X-1$ 的概率密度 $f_Y(y)=$___________.

4. 设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} a\sin x, & 0<x<\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，则 $P\left\{X>\dfrac{\pi}{3}\right\}=$__________.（先确定常数 a，再求 $P\left\{X>\dfrac{\pi}{3}\right\}$）

5. 设随机变量 X,Y 相互独立,且 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2}{8}, & 0<x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

Y 服从区间 $(0,2)$ 上的均匀分布,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的概率密度为 $f_Z(z)=$_______.

6. 设 X_1，$X_2,\cdots$，$X_n,\cdots$ 为独立同分布的随机变量序列，且 X_1 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & -1<x<0 \\ x, & 0\le x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于__________.

7. 叙述在假设检验中,显著性水平 α 的概率意义为:_________________________________.

8. 从正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取容量为 11 的样本，样本方差为 $s^2=8.46$，则 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间为__________.（计算结果保留三位小数）

9. 设X_1，$X_2,\cdots$，X_n为来自参数为λ的泊松分布的样本，$\overline{X}$为样本均值，则统计量：

①$\overline{X}$，②$\overline{X}^2$，③$\overline{X}^2+\frac{1}{n}\overline{X}$，④$\overline{X}^2-\frac{1}{n}\overline{X}$中是$\lambda^2$的无偏估计的是_________.（填写正确结论的编号）

10. 设(X, Y)服从二维正态分布$N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,-0.5)$，则随机变量：

①$\frac{X^2}{Y^2}$，②$\frac{(X-Y)^2}{(X+Y)^2}$，③$\frac{(X-Y)^2}{3(X+Y)^2}$，④$\frac{3(X-Y)^2}{(X+Y)^2}$中服从F分布的是_________.（填写正确结论的编号）

二(12分) 设随机变量X的所有可能取值为$0,1,2$，且已知$E(X)=1, P\{X=0\}=\frac{1}{4}$，令$Y=(X-1)^2$

(1)求X的分布律;
(2)求Y的分布函数;
(3)X与Y是否不相关？是否独立?

三(12分) 设随机变量X和Y相互独立，且X服从参数为1的指数分布，Y服从两点分布$b\ (1,\frac{1}{2})$

(1)求$D\ (e^{-X})$;
(2)求$Z=XY$的分布函数.

四(12分) 设随机变量X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}e^{-x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

在$X=x(x\in(0,+\infty))$的条件下，Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{2y}{x^2}, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(1)求 $P\{X\le 2Y\}$;
(2)求Y的边缘概率密度;
(3)求$Y=y(y>0)$的条件下，X的条件概率密度.

五(12 分) 有甲、乙两台机器生产同种类型的金属部件，分别在两台机器所生产的部件中各抽取一个容量均为 8 的样本，测量部件的重量(单位:kg)，经计算得样本均值和样本方差如下:

甲机器：$\bar{x}=12.68$，　$s_1^2=5.06$ ，

乙机器：$\bar{y}=10.45$，　$s_2^2=2.94$，

设甲、乙两台机器生产的金属部件的重量分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，

(1) 试检验假设: $H_0:\sigma_1=\sigma_2$ ， $H_1:\sigma_1\neq\sigma_2$ （显著性水平 $\alpha=0.1$）;

(2) 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，能否认为甲机器生产的部件的重量比乙机器生产的部件的重量大?

(3) 给出甲乙两台机器生产的部件平均重量差的 95%的置信区间。

六(12 分) 某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量结果 X_1，$X_2,\cdots$，X_n 相互独立且均服从正态分布 N（μ,σ^2），该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$.利用 Z_1，$Z_2,\cdots$，Z_n 估计 σ .

(1) 求 Z_1 的概率密度;

(2) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(3) 求 σ 的最大似然估计量.

附注: $\chi^2_{0.975}(10)=3.247$ ，$\chi^2_{0.025}(10)=20.48$ ，$F_{0.05}(7,7)=3.79$ ，$t_{0.05}(14)=1.76$

$t_{0.025}(14)=2.14$