0.1 集合

- 集合一般用大写字母$A, B, C, \cdots$来表示。
- 集合的元素一般用小写字母$a, b, c, \cdots$来表示。
- 若a是集合A的一个元素，称a属于A，或A包含a，记为$a \in A$。若a不是集合A的一个元素，称a不属于A，或A不包含a，记为$a \notin A$。
- $\emptyset$表示空集，是任何集合的子集。
- $B \subset A$表示集合B是集合A的子集合，子集合B包含于集合A。
- $B \not\subset A$表示集合B不是集合A的子集合，子集合B不包含于集合A。
- 交集、并集、补集、幂集（子集组成的集合）

映射

- $x \in X, y \in Y$
- 映射$\varphi: x \to y$，x称为原象（逆象），y称象。注意y是惟一的，无论那个x对应的y是惟一的，不能一个x对应多个y。这是映射的关键。反之是可以的。
- 什么是满射，每一个y都有原象（逆象），这个叫满射。
- 什么是单射，在映射的基础上，不同元素的象不同。注意：不一定是满射啊！
- 满射和单射合起来叫作双射。
- 双射是集合上的一一映射。

从集合到映射

- 映射是一个规则，或者叫法则，定义在两个集合间的一个法则，规则，也是关系，这个是本质。
- 从映射如何走到代数运算（结合法，或者叫运算）呢？首先要明白映射的性质：

  （1）φ对于X中每个元素必须有象，且象必属于Y；

  （2）φ对于X中每个元素的象必须是唯一的。

X相当于定义域，Y相当于值域。映射是函数的扩充。

变换是一种特殊的映射，是自身到自身的映射。

一一变换就是置换了。

满射，单射和双射

- 映射要求原象集合（就是X）中每一个元素在映射φ下在象集合（就是集合Y）中都有象。且相同原象的象必须是唯一的。但没要求Y中每个元素都有原象。也没有要求不同的原象的象不同。但要求原象的象唯一，不能一个原象有几个象。
- 由两个没有要求，而做了要求就是满射和单射
- 即是满射又是单射就是双射

0.2 关系

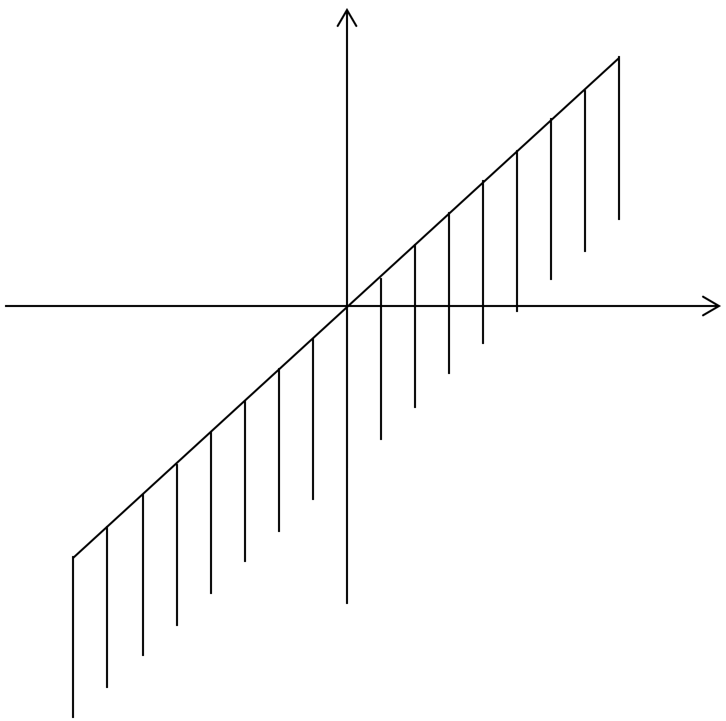
“关系”是一个数学概念. 在本节中, 我们将在集合的笛卡儿积的基础上, 对关系进行描述, 我们还将进一步学习等价关系、运算、同态等的相关知识.

定义：$A \times B$ 的子集R，称为A, B之间的一个二元关系$(a, b) \in R$。当时，称a与b具有关系R，记作aRb，当时，称a与b不具有关系R，记作$aR'b$。

知：$\forall a \in A, b \in b, aRb$ 与 $aR'b$ 二者有一，且仅有一种情况成立。

二元关系形式的给出了A中某些元素与B中某些元素相关联的概念。

例：实数集 $A=\{x|-\infty<x<+\infty\}$ 中，大于关系“>”可记作：“>” $=\{(x,y)|x,y\in A,\text{且}x\text{大于}y\}$ 。此时，定义中的关系“R”被具体化为“>”，R是$A\times A$的子集。在坐标系中，将大于关系“>”表示为$A\times A$的子集，如下图所示。



当$A = B$集合时，关系R是$A \times A$的子集，此时称R为A上的二元关系。

定义：设R是集A上的二元关系，则：

1、若$\forall a \in A$，均有aRa，则称R具有反身性（自反性）；

2、若$\forall a, b \in A$，当aRb时，均有bRa，则称R具有对称性；

3、若$\forall a, b, c \in A$，当aRb，且bRc时，恒有aRc，则称R具有传递性；

4、若$\forall a, b \in A$，当aRb，且bRa时，恒有$a = b$，则称R具有反对称性。

例 考虑大于关系，$">"=\{(x,y)\mid x,y\in A,\text{且大于}y\}$，是否满足自反性、对称性、传递性。

解：∵3≯3，∴大于关系不具有自反性。

易知，大于关系不具有对称性。

∵a>b，且 $b>c\Rightarrow a>c$，故，大于关系具有传递性。

例 设整数集 $Z=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 上的二元关系为 $R=\{(a,b)\mid a,b\in Z,\text{且}a\mid b\}$,此时 a|b 表示 a 整除 b，即 b 是 a 的倍数。则 R 具有自反性，传递性，但不具有对称性及反对称性。

解：关系 R 显然满足自反性与传递性。

$\because 2\mid 6\not\Rightarrow 6\mid 2$ ，故，关系 R 不满足对称性。

又：$\because 3\mid(-3),\text{且}(-3)\mid 3$，但 $-3\neq 3\therefore$ 不具备反对称性

0.3 等价关系

定义：设 R 是集合上的二元关系，如果 R 满足自反性、对称性和传递性，则称 R 为 A 上的等价关系，记作：~。若~是 A 上的等价关系，$\forall a,b\in A$，若 a~b，则称 a 与 b 是等价的，称：$[a]=\{x\mid x\in A,且x\sim a\}$ 为包含元素 a 的等价类。

例 设 R 是 $Z=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 上的二元关系，规定关系 R 为：如果 Z 中的数 a,b 用固定的正整数 n 除，余相等，则 $(a,b)\in R,即aRb,即aRb\Leftrightarrow a-\text{b是n的倍数}$，记作：$a\equiv b\pmod{n}$。

求证：R是等价关系, 称此关系为模n的剩余关系（或同余关系）.

定义　设一个集合A分成若干个非空子集，使得A中每一个元素属于且只属于一个子集，则这些子集的全体称为A的一个分类。每一个子集称为一个类。类里任何一个元素称为这个类的一个代表。刚好由每一类一个代表作成的集合叫做一个全体代表团。

由定义可知，A的非空子集$S=\{A_i \mid i\in I\}$是A的一个分类当且仅当其满足下列性质：

1 $\bigcup_{i\in I} A_i = A$

2 当$i\neq j$时，$A_i \cap A_j = \Phi$，即不同的类互不相交。

例　设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，则：$S_1=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5,6\}\}$ 是 A 的一个分类。但是，$S_2=\{\{1,2\},\{2,3,4\},\{5,6\}\}$ 就不是 A 的一个分类。因为 $\{1,2\}\cap\{2,3,4\}=\{2\}$。$S_3=\{\{1\},\{3,4\},\{5,6\}\}$ 也不是 A 的一个分类，因为元素"2"不属于任何一个子集。

定理：设~是集合 A 上的等价关系，则：

1、若对于 $a,b\in A$　$a\sim b$，则 $[a]=[b]$；

2、若对于 $a,b\in A$　$a\not\sim b$ {不等价}，则 $[a]\cap[b]=\phi$；

3、A 能写成所有不同等价类的并，即：$A=[a_1]\cup[a_2]\cup\cdots\cup[a_n]\cdots$。

以 n=3 时的模 3 同余关系为例。此时，

$$Z=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}=[0]\cup[1]\cup[2]$$

$$\begin{cases}[0]=\{\cdots,-6,-3,0,3,6,\cdots\} \\ [1]=\{\cdots,-5,-2,1,4,7,\cdots\} \\ [2]=\{\cdots,-4,-1,2,5,8,\cdots\}=[5]\end{cases}$$

0.4 运算

定义 设A是三个非空集合。从$A \times B$到D的映射叫做一个$A \times B$到D的二元代数运算；当时$A = B = D$， $A \times A$到A的映射简称A上的代数运算或二元运算。

一个代数运算可以用∘表示，并将(a, b)在∘下的像记作$a \circ b$ 。若∘是A上的代数运算$\Leftrightarrow \forall a, b \in A, a \circ b \in A$。

设：A={$a_1, a_2, \cdots a_n$}，B={$b_1, b_2 \cdots b_m$}，则 $A \times B$ 到 D 的一个代数运算 $a_i \circ b_j = d_{ij}$ 可以表为

$$
\begin{array}{c|cccc}
\circ & b_1 & b_2 & \cdots & b_m \\
\hline
a_1 & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\
a_2 & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
a_n & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nm}
\end{array}
$$

定义：设 A 是一个非空集合，n 是自然数，$A\times A\times\cdots\times A$（$n$ 个 A 的笛卡尔积）到 A 的映射 f，称为 A 的一个 n 元运算。

例 设 Q^* 为非 0 有理数的集合，每个非 0 有理数的倒数还是有理数，故倒数运算是 Q^* 的一元运算。

此时，$f: \mathrm{Q}^* \to \mathrm{Q}^*, f(a)=\dfrac{1}{a}, \forall a\in \mathrm{Q}^*$

定义 设∘是集合 A 的一个代数运算。如果对任意a，b，$c \in A$，有$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$，则称代数运算∘适合结合律，并且统一记成$a \circ b \circ c$。

定义 设∘是$A \times A$到D的代数运算。如果$\forall a$，$b \in A$，有$a \circ b = b \circ a$成立，则称运算∘满足交换律。

定义 设⊙是$B \times A$到A的代数运算，$\oplus$是A上的一个代数运算。若$\forall a_1$，$a_2 \in A$，$b \in B$，都有$b \odot (a_1 \oplus a_2) = (b \odot a_1) \oplus (b \odot a_2)$成立，则称⊙，$\oplus$适合第一分配律(左分配律)。同理可以定义第二分配律(右分配律)。

代数运算

- 加氏积、直积：设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是n个集合，一切从$A_1,A_2,\cdots,A_n$里顺序取出的元素组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$a_i\in A_i, i\in(1,2,\cdots,n)$，所做成的集合叫$A_1,A_2,\cdots,A_n$做集合的加氏积，记为$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$。
- 设A,B,C为三个集合。我们把从$A\times B$到C的映射叫做一个从$A\times B$到C的代数运算，记为$\circ$，对于任意$\circ:(a,b)\rightarrow c$，记为$a\circ b=c$。
- 倘若A,B,C为同一个集合，则代数运算$\circ$是该集合上的二元运算。并且称该集合的代数运算$\circ$是封闭的。

如何构建代数运算

- 如果说映射是类似一元，那么运算就相当于二元了，这里是“相当”，不是“就是”。如何构造呢？
- 两种方法构造：
- 1.直积模式
- 2.法则模式，如果三个集合就是同一个集合，那么简单的定义就可以用法则：集合X存在一个法则，其中有序的两个元素a, b，在X中都有一个唯一确定的元素d与它对应，则称这个法则是集合X的一个代数运算。

分配律

- 第一分配律：
- 集合A, B为两个集合。我们定义其上两个代数运算$\otimes$和$\oplus$，
  $\otimes$是一个$B \times A$到A的代数运算；
  $\oplus$是一个A上的代数运算；
  如果对于任意的$b \in B$和$a_1, a_2 \in A$，正式总成立
  $b \otimes (a_1 \oplus a_2) = (b \otimes a_1) \oplus (b \otimes a_2)$
- 第二分配律：
- 集合A, B为两个集合。我们定义其上两个代数运算$\otimes$和$\oplus$，
  $\otimes$是一个$B \times A$到A的代数运算；
  $\oplus$是一个A上的代数运算；
  如果对于任意的$b \in B$和$a_1, a_2 \in A$，正式总成立
  $(a_1 \oplus a_2) \otimes b = (a_1 \otimes b) \oplus (a_2 \otimes b)$

0.5 同态

定义：设$(S,\circ)$和$(T,*)$是两个代数系统，这里$\circ,*$分别为集合S,T上的代数运算。如果存在S到T的映射f，且保持运算，即：$f(a\circ b)=f(a)*f(b),\forall a,b\in S$，则称$f$是$(S,\circ)$至$(T,*)$的同态映射，简称$f$是$S$到$T$的同态。

定义：如果集合S到T的同态映射f是$S\to T$的单射，则称f为$S\to T$的单一同态。如果集合S到T的同态映射f是$S\to T$的满射，则称f为$S\to T$的满同态。如果集合S至T存在满同态，则称S与T是同态的，记作$S\sim T$。如果$S\to T$的同态映射f是$S\to T$的双射（即满又单的映射，一一映射），则称f为$S\to T$的同构映射。（简称同构）记作$S\cong T$。