北京邮电大学 2019-2020 年第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题（4 学分）

考试注意事项：
学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效.

一、填空题（每小题 4 分,共 40 分）

1. .设事件 A , B 相互独立,且 $P(A)=\dfrac{1}{4}$, $P(B)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(B\,|\,A\cup B)=$______ .

2.设 $X\sim N(-1,1)$，则 $Y=2X+1$ 的概率密度 $f_Y(y)=$______ .

3.设随机变量 X 和 Y 相互独立, X 服从均值为 $\dfrac{1}{2}$ 的指数分布， $Y\sim N(0,4)$，则 $D(2X+Y)=$______ .

4.设 $(X,Y)\sim N(1,0,4,4,\dfrac{1}{2})$, 则 $E[X(X-Y)]=$______ .

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{12}$ 独立同分布 , $X_1\sim U(0,2)$ ， 利用中心极限定理，$P\{10<\sum\limits_{i=1}^{12}X_i<14\}$ 的近似值为______ .

6. 有两箱同类型的零件, 每箱都装有 6 个零件, 第一箱有 4 个一等品, 第二箱有 2 个一等品, 从两箱中任选一箱, 然后从该箱中有放回地取零件两次,每次取一个,令 $X_i=\begin{cases}1,\text{第i次取到一等品},\\0,\text{否则},\end{cases}$ $i=1,2$，则 X_1 与 X_2 的相关系数为______ .

7. 某种电子产品的某一参数服从正态分布，从这种电子产品中抽取 16 件，测量他们的这一参数，并算得样本均值为 $\bar{x}=53.38$，样本标准差为 $s=8.00$, 则 μ 的置信度为 95% 的置信区间为______ .

8. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自参数为 2 的泊松分布总体的样本, $\bar{X}$ 为样本均值, 则 $D(\bar{X})=$____ .

9．设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，若统计量 $T=\dfrac{a(X_1^2+X_2^2)}{\sum\limits_{i=3}^{10}X_i^2}$ 服从 F 分布，则 $a=$______ ，该 F 分布的自由度为______ .

10. 设 $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ 为 θ 的两个无偏估计，$\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 相互独立，且 $D(\hat{\theta}_1)=3D(\hat{\theta}_2)$,为使 $\hat{\theta}=a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2$ 为 θ 的无偏估计且方差最小, 则 $a=$ ____ , $b=$ _____ .

二、(12 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ ，

（1）求 X 的方差；（2） X 与 $|X|$ 是否不相关？(3) X 与 $|X|$ 是否相互独立？

三、(10 分)

盒子中有 1 个红球，2 个白球，先从盒子中任取 1 球，以 X 表示取出的红球数，将取出的球放回盒子中并再放入 1 个与取出的球颜色相同的球，再从盒子中任取 2 球，Y 表示取出的红球数，求（1） (X,Y) 的分布律；(2) Y 的分布律；（3） $Y=1$ 的条件下 X 的条件分布律.

四、(12 分)

设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}(x+y), x>0, y>0, x+y<2,\\ 0, \text{其他},\end{cases}$$

求

(1) X 的概率密度；

(2) $P\{X>Y\}$;

(3) $Z=X+Y$ 的概率密度.

五、(10 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本, 总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}\ e^{-\frac{x}{\theta}}, x>0,\\ 0, \quad \text{其它},\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数,

(1) 求 θ 的最大似然估计量；(2) θ 的最大似然估计量是否为 θ 的无偏估计？

六、(8 分)

甲、乙两台机床加工某种零件，为了比较两台机床加工零件的内径有无差异，现从两台机床加工的零件中各抽取 8 件产品，测量其内径, 经计算得样本均值和样本方差如下:

甲机床：$\overline{x}=87.8$,　$s_1^2=10.8$,

乙机床：$\overline{y}=83.6$,　$s_2^2=7.2$,

设甲、乙两台机床加工零件的内径分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

(1) 试检验假设: $H_0:\sigma_1=\sigma_2$　$H_1:\sigma_1\neq\sigma_2$ (显著性水平取 $\alpha=0.1$)；

(2) 在显著水平 $\alpha=0.05$ 下,能否认为两台机床加工零件的内径的均值有显著差异？

七、(8 分)

下面数据是退火温度 x (单位:$100\,^0\mathrm{C}$)对黄铜延性 y (%)的试验结果:

x	3	4	5	6	7	8
y	40	50	58	61	72	79

经计算有 $\sum_{i=1}^{6}x_i=33$ ，$\sum_{i=1}^{6}y_i=360$ ，$\sum_{i=1}^{6}x_i^2=199$ ，$\sum_{i=1}^{6}y_i^2=22610$ ，

$\sum_{i=1}^{6}x_iy_i=2112$,

(1) 求线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$;

(2) 对回归方程作显著性检验,即检验假设 $H_0:b=0$　$H_1:b\neq0$ (显著性水平取 $\alpha=0.01$).

附： $\Phi(0.5)=0.6915$ ，$\Phi(1)=0.8413$ ，$t_{0.025}(15)=2.13$ ，$t_{0.025}(14)=2.1448$ ，

$t_{0.005}(4)=4.6041$ ，$F_{0.01}(1,4)=21.2$ ，$F_{0.05}(7,7)=3.79$.

北京邮电大学 2019-2020 年第一学期

《概率论与数理统计》期末试题答案（经管院，4 学分）

一、填空题（每小题 4 分,共 40 分）

1. $\frac{2}{3}$

2. $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y+1)^2}{8}}$

3. 5
4. 3
5. 0.6826
6. $\frac{1}{9}$

7. $(49.12, 57.64)$

8. $\frac{1}{2}$

9. 4，$(2,8)$

10. $\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$

二、(12 分)

解：（1）$E(X)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x\cdot x^2dx=0$，$E(X^2)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^2\cdot x^2dx=\frac{3}{5}$，

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3}{5}$.　　　　　　　……6 分

（2）$E(X\cdot|X|)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x|x|\cdot x^2dx=0$，

$Cov(X,|X|)=E(X\cdot|X|)-E(X)E(|X|)=0$,　　　　　　……4 分

所以 X 与 $|X|$ 不相关.

(3) $P\{X\le\frac{1}{2},|X|\le\frac{1}{2}\}=P\{|X|\le\frac{1}{2}\}\ne P\{X\le\frac{1}{2}\}P\{|X|\le\frac{1}{2}\}$,

所以 X 与 $|X|$ 不相互独立.　　　　　　……2 分

注：学生只要找出两个事件 $\{X\in I\}$，$\{|X|\in J\}$，然后说明这两事件不独立，那么 X 与 $|X|$ 不相互独立.都给 4 分.

三、(10 分)

解：（1）(X,Y) 的所有可能取的数对为 $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, 且

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\mid X=0\}=\frac{2}{3}\times\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\mid X=0\}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\mid X=1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\mid X=1\}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{9},$$

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\mid X=1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18},$$

(X,Y) 的分布律为

X \ Y	0	1	2
0	1/3	1/3	0
1	1/18	2/9	1/18

……4 分

(2) 由(1)可得 Y 的分布律为

Y	0	1	2
P	7/18	5/9	1/18

……4 分

(3)

$Y=1$ 条件下 X 的条件分布律为

$P\{X=0\mid Y=1\}=\dfrac{1/3}{5/9}=\dfrac{3}{5}$, $P\{X=1\mid Y=1\}=\dfrac{2/9}{5/9}=\dfrac{2}{5}$.　　……2 分

注：如第一问算错了，而后两问按第一问的结果算出的答案是对的，后二问给一半分。

四、(12 分)

解：（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$,

当 $0<x<2$ 时，

$$f_X(x)=\int_0^{2-x}\frac{3}{8}(x+y)dy=\frac{3}{16}(4-x^2),$$

当 $x \notin (0,2)$ 时， $f_X(x) = 0$ ，

所以 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}(4 - x^2), 0 < x < 2, \\ 0, 其他. \end{cases}$$ ……4 分

（2） $P\{X > Y\} = \iint\limits_{x>y} f(x,y)dxdy$

$$= \int_0^1 dy \int_y^{2-y} \frac{3}{8}(x+y)dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^1 (1 - y^2)dy$$

$$= \frac{1}{2}$$ ……4 分

（3） $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx$ ，

当 $0 < z < 2$ 时， $f_Z(z) = \frac{3}{8}\int_0^z zdx = \frac{3z^2}{8}$ ，

当 $z \notin (0,2)$ 时， $f_Z(z) = 0$ ，

所以 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3z^2}{8}, 0 < z < 2, \\ 0, 其他. \end{cases}$$ ……4 分

五、(10 分)

解：（1）似然函数为

$$L(\theta) = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{\theta^{2n}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i} ,$$ ……2 分

$$\ln L(\theta) = \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) - 2n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

令

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta) = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 ,$$

解得 $\theta = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ，所以 θ 的最大似然 $\hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. ……4 分

（2） $E(\hat{\theta}) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{E(X)}{2}$,

而$E(X)=\int_0^{\infty} x\cdot\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\frac{2}{\theta}\int_0^{\infty} xe^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta$,从而

$$E(\hat{\theta})=\frac{E(X)}{2}=\theta,$$

所以θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$为θ的无偏估计. ……4 分

六、(8 分)

解（1）该假设检验的拒绝域为

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}\le F_{0.95}(7,7)=\frac{1}{3.79}，\ 或F=\frac{s_1^2}{s_2^2}\ge F_{0.05}(7,7)=3.79,$$

由样本算得检验统计量的观察值为

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{10.8}{7.2}=1.5$$

由于$F_{0.95}(7,7)<F=1.5<F_{0.05}(7,7)$,故不拒绝原假设,即认为 $\sigma_1=\sigma_2$.

……4 分

(2) 需检验假设

H_0：$\mu_1=\mu_2$　　H_1：$\mu_1\ne\mu_2$

该假设检验的拒绝域为

$$|t|=\frac{|\overline{x}-\overline{y}|}{s_w\sqrt{1/8+1/8}}\ge t_{0.025}(14)=2.1448,$$

由样本得

$$s_w^2=\frac{7s_1^2+7s_2^2}{14}=9,$$

$$t=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{87.8-83.6}{\sqrt{9}\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}}=2.8,$$

由于$|t|=2.8>t_{0.025}(14)$,故拒绝原假设,即认为两台机床加工零件的内径的均值有显著差异 ……4 分

七、(8 分)

解 $L_{xx}=199-\frac{33^2}{6}=17.5$， $L_{xy}=2112-\frac{33\times360}{6}=132$， $\hat{b}=\frac{132}{17.5}=7.5429$，

y 关于 x 的一元线性回归方程为

$$\hat{y}=\frac{360}{6}+7.5429(x-\frac{33}{6})=7.5429x+18.5141,$$

即 $\hat{y}=7.5429x+18.5141$ ……5 分

（2） $L_{yy}=22610-\frac{360^2}{6}=1010$,

$$S_R=\hat{b}L_{xy}=7.5429\times132=995.6628,$$

$$S_E=L_{yy}-S_E=1010-995.6628=14.3372,$$

$$F=\frac{S_R}{S_E/4}=277.7844,$$

由于 $F>F_{0.01}(1,4)=21.2$, 所以拒绝原假设, 即认为回归方程是显著的.

……3 分