Semaine 42

12 octobre 2020

Soit X suit une loi log-normale de paramètre (μ, σ^2), ce qu'on note $\mathrm{X} \sim \mathrm{Log} - \mathcal{N}(\mu,\, \sigma^2)$, c'est-à-dire que X est telle que son logarithme suit une loi normale de paramètres (μ, σ^2). Autrement dit, X est de la forme $X = e^T$ où $T \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. (son logarithme étant alors bien normal, i.e. $\ln X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$).

On notera Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et φ sa fonction de densité usuelle.

1. Établir une relation entre F_X, la fonction de répartition de X, et Φ.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. En déduire une formule explicite d'une densité f_X de X.
4. Calculer l'espérance de X.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que si R suit une loi normale de paramètres (μ, σ^2), alors $R := nT$ suit également une loi normale dont on déterminera les paramètres.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y := X^n$ suit une loi log-normale dont on déterminera les paramètres.
7. Donner l'espérance de X^n en fonction de l'entier n.
8. En déduire la variance de X.