La fonction Partie Entière

On se propose de démontrer la proposition $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! n \in \mathbb{Z}, n \leqslant x < n+1$. (l'unique n dont on affirme l'existence pour tout réel x sera appelé la partie entière de x et sera noté $E(x)$)
Comme $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$, cela revient a montré les trois propositions :

— $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leqslant x < n+1$
— $\forall x \in \mathbb{R}_-, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leqslant x < n+1$
— $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, (n_1 \leqslant x < n_1 + 1 \text{ et } n_2 \leqslant x < n_2 + 1) \Longrightarrow n_1 = n_2$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on sait par la propriété d'Archimède que l'ensemble $A = \{r \in \mathbb{N} | r > x\}$ est non vide. Il admet donc un plus petit élément r vérifiant $r > x$ et tel que $r - 1 \leqslant x$. En posant $n := r - 1$, on montre l'existence d'un $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $n \leqslant x < n+1$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$, on a de même par la propriété d'Archimède que l'ensemble $A = \{r \in \mathbb{N} | r \geqslant -x\}$ est non vide. Il admet donc aussi un plus petit élément r vérifiant $r \geqslant -x$ et tel que $r - 1 < -x$. En posant $n := -r$, on a montré l'existence d'un $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $n \leqslant x < n+1$.

Enfin, soient $x \in \mathbb{R}$ et $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $n_1 \leqslant x < n_1 + 1$ et $n_2 \leqslant x < n_2 + 1$. En réécrivant la deuxième inégalité sous la forme $-n_2 - 1 < x \leqslant -n_2$ et en l'additionnant à la première, on obtient l'inégalité $(n_1 - n_2) - 1 < 0 < (n_1 - n_2) + 1$ qui affirme que l'entier $(n_1 - n_2)$ est à une distance strictement inférieure à 1 de 0, il est donc nul. Ainsi $n_1 = n_2$