Une récurrence bien technique

Nous allons montrer par récurrence sur n que la propriété définie par $P(n) :\Longleftrightarrow \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$ est vérifiée par tout entier.

Introduisons, par souci de clarté, la notation $I_n := \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt$ définie pour tout entier n.

Comme $I_0 = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^0\,dt = \int_{-1}^{1}dt = 2$, un calcul direct montre que la propriété P est bien vérifiée au rang 0.
Reste à vérifier l'hérédité de P. Pour cela, considérons un entier n quelconque et admettons que la propriété est vérifiée au rang n. Nous allons montrer qu'elle l'est également au rang $n+1$.
Observons que :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n+1}\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} 1\cdot(1-t^2)^{n+1}\,dt \\
&= \left[t\cdot(1-t^2)^{n+1}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} t\cdot(n+1)\left(1-t^2\right)^n\cdot(-2t)dt \\
&= -2(n+1)\int_{-1}^{1} -t^2\cdot\left(1-t^2\right)^n\,dt \\
&= -2(n+1)\int_{-1}^{1}\left(1-t^2-1\right)\cdot\left(1-t^2\right)^n\,dt \\
&= -2(n+1)\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)\cdot\left(1-t^2\right)^n\,dt + 2(n+1)\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^n\,dt \\
&= -2(n+1)I_{n+1} + 2(n+1)I_n
\end{aligned}$$

D'où il sort que $(2n+3)I_{n+1} = (n+1)I_n$, c'est-à-dire $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3}I_n$. Il vient ainsi :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{2n+3}\cdot\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)^2\,2^{2n+3}(n!)^2}{2\,(n+1)\,(2n+3)\,(2n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)^2\,2^{2n+3}(n!)^2}{(2n+2)\,(2n+3)\,(2n+1)!} \\
&= \frac{2^{2n+3}((n+1)!)^2}{(2n+3)\,(2n+2)\,(2n+1)!} \\
&= \frac{2^{2n+3}((n+1)!)^2}{(2n+3)!} \\
&= \frac{2^{2(n+1)+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer !