Sommes de séries arithmétiques

• **Soient $r \in \mathbb{R}$ et u une suite arithmétique de raison r définie sur $\mathbb{N}$, i.e. vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$**

• **Soit U la série associée, i.e. la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :**

$$\begin{cases} U_0 = u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n + u_{n+1} \end{cases}$$

Ce qu'on note usuellement sous la forme : $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

• **On cherche a exprimer U_n *en fonction* de $n \in \mathbb{N}$.**

• **Puisque l'application $\varphi\colon\ [\![0,n]\!] \longrightarrow [\![0,n]\!]\ ,\ k \mapsto n-k$ est bijective pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:**

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}$$

• **On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite d'égalités :**

$$\begin{aligned} 2U_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (u_0 + kr) + (u_0 + (n-k)r) \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_0 + (u_0 + nr) \\ &= (n+1)(u_0 + (u_0 + nr)) \\ &= (n+1)(u_0 + u_n) \end{aligned}$$

• **En définitive, on obtient $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = (n+1) \cdot \dfrac{u_0 + u_n}{2}$**