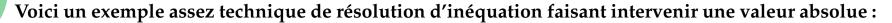
Inégalité avec une valeur absolu



$$|x^2 + 2x| \le 4 \iff -4 \le x^2 + 2x \le 4$$
 On se débarasse de la valeur absolue
$$\iff -3 \le x^2 + 2x + 1 \le 5$$
 On cherche à faire apparaître
$$\iff -3 \le x^2 + 2x + 1^2 \le 5$$
 l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2$
$$\iff -3 \le (x+1)^2 \le 5$$
 (ce qui revient à mettre sous forme canonique)
$$\iff 0 \le (x+1)^2 \le 5$$
 Un carré est toujours positif
$$\iff -\sqrt{5} \le x + 1 \le \sqrt{5}$$
 Comme à la première ligne
$$\iff -1 - \sqrt{5} \le x \le -1 + \sqrt{5}$$
 Et on trouve rapidement les solutions!

Une telle démonstration n'est pas toujours facile à voir, c'est pourquoi on lui préfère souvent la technique suivante, qui consiste à séparer les inégalités et à ramener chacune d'elles à une étude de signe en faisant apparaître un 0 d'un côté de l'inégalité.

$$|x^{2} + 2x| \leq 4 \iff -4 \leq x^{2} + 2x \leq 4$$

$$\iff -4 \leq x^{2} + 2x \text{ et } x^{2} + 2x \leq 4$$

$$\iff 0 \leq x^{2} + 2x + 4 \text{ et } x^{2} + 2x - 4 \leq 0$$

Chacune de ces inégalités peu se résoudre en utilisant un tableau de signe. Un rapide calcul de discriminant montre que le polynôme $x^2 + 2x + 4$ n'a pas de racines réelles et que les racines réelles du polynôme $x^2 + 2x - 4$ sont $x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{2} = -1 - \sqrt{5}$ et $x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = -1 + \sqrt{5}$. On a donc $0 \le x^2 + 2x + 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 + 2x - 4 \le 0$ pour tout $x \in [x_1; x_2]$. On trouve bien au total pour ensemble de solutions :

$$\left[-1 - \sqrt{5} ; -1 + \sqrt{5} \right]$$