Faire apparaître une série télescopique

Dans certaines situations, il est possible de grandement simplifier le calcul d'une somme en mettant son terme général sous une forme qui permet la simplification de la presque totalité des termes. C'est le principe du télescopage, que l'on résume par la formule $\sum_{k=0}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}$ **où** a **désigne une suite absolument quelconque. Le calcul ci-dessous montre un exemple de la mise en œuvre de cette technique :**

$$
\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n} p \cdot p! &= \sum_{p=1}^{n} p \cdot p! && \textbf{car quand } p = 0,\ p \cdot p! = 0 \\
&= \sum_{p=1}^{n}(p+1-1) \cdot p! \\
&= \sum_{p=1}^{n}\big((p+1) \cdot p! - p!\big) \\
&= \sum_{p=1}^{n}\big((p+1) \cdot p! - p \cdot (p-1)!\big) \\
&= \sum_{p=1}^{n}(a_p - a_{p-1}) && \textbf{en posant, pour tout } p \in \mathbb{N},\ a_p = (p+1) \cdot p! \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) && \textbf{par le changement d'indice } k = p-1 \\
&= -(a_0 - a_n) && \textbf{d'après la formule de télescopage} \\
&= (n+1) \cdot n! - 1 \\
&= (n+1)! - 1
\end{aligned}
$$