

# Développements limités usuels

On trouvera ci-dessous des approximations utiles au voisinage de 0. Ces approximations permettent d'obtenir des équivalents dans de nombreuses situations. Les graphiques en regard de certaines fonctions permettent de se rendre compte de la validité de l'approximation suivant l'ordre auquel on pousse le développement.

## Approximation affine

## Développement limité d'ordre $n$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + o(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n \cdot x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{\alpha \dots (\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \cdot x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + o(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2 \times 5 \times 8 \times \dots \times (3n-4)}{3^n \cdot n!} \cdot x^n + o(x^n)$$