Sommes de séries géométriques

• Soient $q \in \mathbb{R}$ et v une suite géométrique de raison q définie sur $\mathbb{N}$, i.e. vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = q \cdot v_n$

• Soit V la série associée, i.e. la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} V_0 = v_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = V_n + v_{n+1} \end{cases}$$

Ce qu'on note usuellement sous la forme : $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

• On cherche a exprimer V_n *en fonction* de $n \in \mathbb{N}$.

• Par distributivité du produit sur les sommes, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned}
(1-q)V_n &= V_n - q \cdot V_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} v_k - q \cdot \sum_{k=0}^{n} v_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{n} q \cdot v_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{n} v_{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=1}^{n+1} v_k \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{n} v_k \right) + (v_0 - v_{n+1}) \\
&= v_0 - v_{n+1}
\end{aligned}$$

• En définitive, nous avons $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \dfrac{v_0 - v_{n+1}}{1-q}$