Inégalité avec une valeur absolu

Voici un exemple assez technique de résolution d'inéquation faisant intervenir une valeur absolue :

$$\begin{aligned}
\left|x^2+2x\right| \leqslant 4 &\iff -4 \leqslant x^2+2x \leqslant 4 && \textbf{On se débarasse de la valeur absolue}\\
&\iff -3 \leqslant x^2+2x+1 \leqslant 5 && \textbf{On cherche à faire apparaître}\\
&\iff -3 \leqslant x^2+2x+1^2 \leqslant 5 && \textbf{l'identité remarquable } a^2+2ab+b^2\\
&\iff -3 \leqslant (x+1)^2 \leqslant 5 && \textbf{(ce qui revient à mettre sous forme canonique)}\\
&\iff 0 \leqslant (x+1)^2 \leqslant 5 && \textbf{Un carré est toujours positif}\\
&\iff -\sqrt{5} \leqslant x+1 \leqslant \sqrt{5} && \textbf{Comme à la première ligne}\\
&\iff -1-\sqrt{5} \leqslant x \leqslant -1+\sqrt{5} && \textbf{Et on trouve rapidement les solutions !}
\end{aligned}$$

Une telle démonstration n'est pas toujours facile à voir, c'est pourquoi on lui préfère souvent la technique suivante, qui consiste à séparer les inégalités et à ramener chacune d'elles à une étude de signe en faisant apparaître un 0 d'un côté de l'inégalité.

$$\begin{aligned}
\left|x^2+2x\right| \leqslant 4 &\iff -4 \leqslant x^2+2x \leqslant 4\\
&\iff -4 \leqslant x^2+2x \textbf{ et } x^2+2x \leqslant 4\\
&\iff 0 \leqslant x^2+2x+4 \textbf{ et } x^2+2x-4 \leqslant 0
\end{aligned}$$

Chacune de ces inégalités peu se résoudre en utilisant un tableau de signe. Un rapide calcul de discriminant montre que le polynôme x^2+2x+4 n'a pas de racines réelles et que les racines réelles du polynôme x^2+2x-4 sont $x_1 = \frac{-2-2\sqrt{5}}{2} = -1-\sqrt{5}$ et $x_2 = \frac{-2+2\sqrt{5}}{2} = -1+\sqrt{5}$. On a donc $0 \leqslant x^2+2x+4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $x^2+2x-4 \leqslant 0$ pour tout $x \in [x_1\,;\,x_2]$. On trouve bien au total pour ensemble de solutions :

$$\left[-1-\sqrt{5}\,;\,-1+\sqrt{5}\right]$$