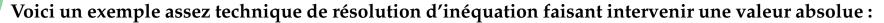
Inégalité avec une valeur absolu



$$|x^{2} + 2x| \leq 4 \iff -4 \leq x^{2} + 2x \leq 4$$

$$\iff -3 \leq x^{2} + 2x + 1 \leq 5$$

$$\iff -3 \leq x^{2} + 2x + 1^{2} \leq 5$$

$$\iff -3 \leq (x+1)^{2} \leq 5$$

$$\iff 0 \leq (x+1)^{2} \leq 5$$

$$\iff -\sqrt{5} \leq x + 1 \leq \sqrt{5}$$

$$\iff -1 - \sqrt{5} \leq x \leq -1 + \sqrt{5}$$

On se débarasse de la valeur absolue On cherche à faire apparaître l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2$ (ce qui revient à mettre sous forme canonique) Un carré est toujours positif Comme à la première ligne Et on trouve rapidement les solutions !

Une telle démonstration n'est pas toujours facile à voir, c'est pourquoi on lui préfère souvent la technique suivante, qui consiste à séparer les inégalités et à ramener chacune d'elles à une étude de signe en faisant apparaître un 0 d'un côté de l'inégalité.

$$|x^{2} + 2x| \le 4 \Longleftrightarrow -4 \le x^{2} + 2x \le 4$$

$$\iff -4 \le x^{2} + 2x \text{ et } x^{2} + 2x \le 4$$

$$\iff 0 \le x^{2} + 2x + 4 \text{ et } x^{2} + 2x - 4 \le 0$$

Chacune de ces inégalités peu se résoudre en utilisant un tableau de signe. Un rapide calcul de discriminant montre que le polynôme x^2+2x+4 n'a pas de racines réelles et que les racines réelles du polynôme x^2+2x-4 sont $x_1=\frac{-2-2\sqrt{5}}{2}=-1-\sqrt{5}$ et $x_2=\frac{-2+2\sqrt{5}}{2}=-1+\sqrt{5}$. On a donc $0 \le x^2+2x+4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $x^2+2x-4 \le 0$ pour tout $x \in [x_1; x_2]$. On trouve bien au total pour ensemble de solutions :

$$\left[-1 - \sqrt{5} \; ; \; -1 + \sqrt{5} \right]$$