Calcul de limite

Quand on souhaite réaliser un calcul de limite et que l'on est face à une forme indéterminée, il est judicieux de commencer par faire les calculs "à la louche" afin d'avoir une idée de la limite. Il devient dés lors plus simple de voir comment lever l'indétermination. Par exemple, quand x est proche de $-\infty$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2+1}-2x}{x^2} &\approx \frac{\sqrt{x^2}-2x}{x^2} && \textbf{Car } 1 \textbf{ est négligeable devant } x^2 \\
&\approx \frac{-x-2x}{x^2} && \textbf{Car quand } x \textbf{ est négatif, } \sqrt{x^2}=|x|=-x \\
&\approx \frac{-3x}{x^2} && \textbf{On a toujours une forme indéterminée : } \frac{+\infty}{+\infty} \\
&\approx \frac{-3}{x} && \textbf{(ce nombre est positif par la règle des signes)} \\
&\approx 0 && \textbf{(et même } 0^+\textbf{)}
\end{aligned}$$

Nos calculs à la louche nous incitent à faire apparaître un $-x$ dans l'écriture de $\sqrt{x^2+1}$. Voyons ce que cela donne :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-2x}{x^2} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-2x}{x^2} && \textbf{On met le } x^2 \textbf{ en facteur sous la racine} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x}{x^2} && \textbf{(il domine le polynôme } x^2+1 \textbf{ en } +\infty\textbf{)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x}{x^2} && \textbf{afin de le séparer du } 1+\frac{1}{x^2} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x}{x^2} && \textbf{(qui tend vers } 1 \textbf{ quand } x \textbf{ tend vers } -\infty\textbf{)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\cdot\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2\right)}{x^2} && \left(-\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}-2\right) \textbf{ joue le rôle du -3 du dessus} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2\right)}{x} && \textbf{On simplifie les infinis "de même taille"} \\
&= 0 && \textbf{Car } \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2=-3
\end{aligned}$$