Recherche d'un équivalent

On cherche à déterminer un équivalent simple de la fonction f au voisinage de 1 grâce à un changement de variable. Après quelques lignes plus ou moins laborieuses de calculs pas spécialement intelligents, on obtiendra l'équivalent g qui, à une translation et à une multiplication par une constante près, n'est autre que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Le graphique ci-dessous permet de voir la qualité de l'approximation !

Pour x voisin de 1, on a

$$\frac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{8x^2-16x+16}-2} = \frac{\sqrt{2(1+h)+2}-\sqrt{(1+h)^2+1}}{\sqrt[3]{8(1+h)^2-16(1+h)+16}-2} \qquad \textbf{En posant } x = 1+h$$

$$= \frac{\sqrt{4+2h}-\sqrt{2+2h+h^2}}{\sqrt[3]{8(1+h^2)}-2} \qquad \textbf{On cherche à utiliser la formule :}$$

$$= \frac{2\cdot\sqrt{1+\frac{h}{2}}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\left(h+\frac{h^2}{2}\right)}}{2\cdot\sqrt[3]{1+h^2}-2} \qquad (1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+o(x)$$

$$= \frac{2\left(1+\frac{1}{4}h+o(h)\right)-\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}h+o(h)\right)}{2\left(1+\frac{1}{3}h^2+o(h^2)\right)-2} \qquad \textbf{Car } o\left(h+\frac{h^2}{2}\right) \underset{h\to 0}{=} o(h)$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}h+o(h)}{\frac{2}{3}h^2+o(h^2)} \qquad \textbf{et } \frac{h^2}{2} \underset{h\to 0}{=} o(h)$$

$$= \frac{3}{2h^2}\cdot\frac{2-\sqrt{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}h+o(h)}{1+o(1)} \qquad \textbf{On cherche à utiliser la formule :}$$

$$= \frac{3}{2h^2}\cdot\left(2-\sqrt{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}h+o(h)\right)(1+o(1)) \qquad \frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+o(x)$$

$$= \frac{3}{2h^2}\cdot\left(2-\sqrt{2}+o(1)\right) \qquad \textbf{(cas particulier de la formule précédente)}$$

$$= \frac{3\left(2-\sqrt{2}\right)}{2h^2}+o\left(\frac{1}{h^2}\right) \qquad \textbf{En développant}$$

$$= \frac{3\left(2-\sqrt{2}\right)}{2(x-1)^2}+o\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) \qquad \textbf{En repassant à la variable } x$$

$$\sim \frac{3\left(2-\sqrt{2}\right)}{2(x-1)^2} \qquad \textbf{Terme d'erreur négligeable devant la fonction}$$