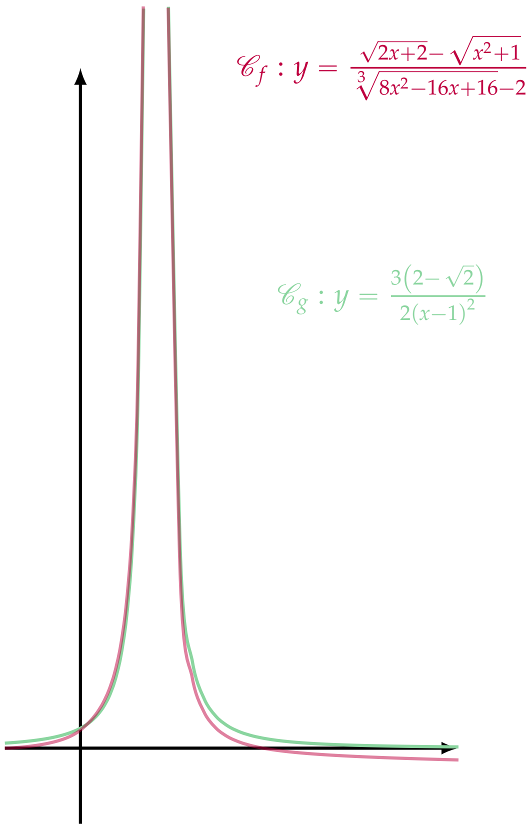
Recherche d'un équivalent

On cherche à déterminer un équivalent simple de la fonction f au voisinage de 1 grâce à un changement de variable. Après quelques lignes plus ou moins laborieuses de calculs pas spécialement intelligents, on obtiendra l'équivalent g qui, à une translation et à une multiplication par une constante près, n'est autre que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Le graphique ci-dessous permet de voir la qualité de l'approximation !



Pour x voisin de 1, on a

$$\frac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{8x^2-16x+16}-2} = \frac{\sqrt{2\left(1+h\right)+2}-\sqrt{\left(1+h\right)^2+1}}{\sqrt[3]{8\left(1+h\right)^2-16\left(1+h\right)+16}-2}$$

En posant $x = 1+h$

$$= \frac{\sqrt{4+2h}-\sqrt{2+2h+h^2}}{\sqrt[3]{8\left(1+h^2\right)}-2}$$

On cherche à utiliser la formule :

$$= \frac{2\cdot\sqrt{1+\frac{h}{2}}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\left(h+\frac{h^2}{2}\right)}}{2\cdot\sqrt[3]{1+h^2}-2}$$

$$\left(1+x\right)^{\alpha} \underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+o\left(x\right)$$

$$= \frac{2\left(1+\frac{1}{4}h+o\left(h\right)\right)-\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}h+o\left(h\right)\right)}{2\left(1+\frac{1}{3}h^2+o\left(h^2\right)\right)-2}$$

Car $o\left(h+\dfrac{h^2}{2}\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(h\right)$

$$= \frac{2-\sqrt{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}h+o\left(h\right)}{\frac{2}{3}h^2+o\left(h^2\right)}$$

et $\dfrac{h^2}{2} \underset{h\to 0}{=} o\left(h\right)$

$$= \frac{3}{2h^2}\cdot\frac{2-\sqrt{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}h+o\left(h\right)}{1+o\left(1\right)}$$

On cherche à utiliser la formule :

$$= \frac{3}{2h^2}\cdot\left(2-\sqrt{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}h+o\left(h\right)\right)\left(1+o\left(1\right)\right)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+o\left(x\right)$$

$$= \frac{3}{2h^2}\cdot\left(2-\sqrt{2}+o\left(1\right)\right)$$

(cas particulier de la formule précédente)

$$= \frac{3\left(2-\sqrt{2}\right)}{2h^2}+o\left(\frac{1}{h^2}\right)$$

En développant

$$= \frac{3\left(2-\sqrt{2}\right)}{2\left(x-1\right)^2}+o\left(\frac{1}{\left(x-1\right)^2}\right)$$

En repassant à la variable x

$$\sim \frac{3\left(2-\sqrt{2}\right)}{2\left(x-1\right)^2}$$

Terme d'erreur négligeable devant la fonction