## Inégalité avec une valeur absolu

**Voici un exemple assez technique de résolution d'inéquation faisant intervenir une valeur absolue :**

| | |
|---|---|
| $\left\|x^2+2x\right\| \leqslant 4 \iff -4 \leqslant x^2+2x \leqslant 4$ | **On se débarasse de la valeur absolue** |
| $\iff -3 \leqslant x^2+2x+1 \leqslant 5$ | **On cherche à faire apparaître** |
| $\iff -3 \leqslant x^2+2x+1^2 \leqslant 5$ | **l'identité remarquable** $a^2+2ab+b^2$ |
| $\iff -3 \leqslant (x+1)^2 \leqslant 5$ | **(ce qui revient à mettre sous forme canonique)** |
| $\iff 0 \leqslant (x+1)^2 \leqslant 5$ | **Un carré est toujours positif** |
| $\iff -\sqrt{5} \leqslant x+1 \leqslant \sqrt{5}$ | **Comme à la première ligne** |
| $\iff -1-\sqrt{5} \leqslant x \leqslant -1+\sqrt{5}$ | **Et on trouve rapidement les solutions !** |

**Une telle démonstration n'est pas toujours facile à voir, c'est pourquoi on lui préfère souvent la technique suivante, qui consiste à séparer les inégalités et à ramener chacune d'elles à une étude de signe en faisant apparaître un 0 d'un côté de l'inégalité.**

$$\begin{aligned}\left|x^2+2x\right| \leqslant 4 &\iff -4 \leqslant x^2+2x \leqslant 4\\ &\iff -4 \leqslant x^2+2x \textbf{ et } x^2+2x \leqslant 4\\ &\iff 0 \leqslant x^2+2x+4 \textbf{ et } x^2+2x-4 \leqslant 0\end{aligned}$$

**Chacune de ces inégalités peu se résoudre en utilisant un tableau de signe. Un rapide calcul de discriminant montre que le polynôme $x^2+2x+4$ n'a pas de racines réelles et que les racines réelles du polynôme $x^2+2x-4$ sont $x_1=\frac{-2-2\sqrt{5}}{2}=-1-\sqrt{5}$ et $x_2=\frac{-2+2\sqrt{5}}{2}=-1+\sqrt{5}$. On a donc $0 \leqslant x^2+2x+4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $x^2+2x-4 \leqslant 0$ pour tout $x \in [x_1\,;\,x_2]$. On trouve bien au total pour ensemble de solutions :**

$$\left[-1-\sqrt{5}\,;\,-1+\sqrt{5}\right]$$