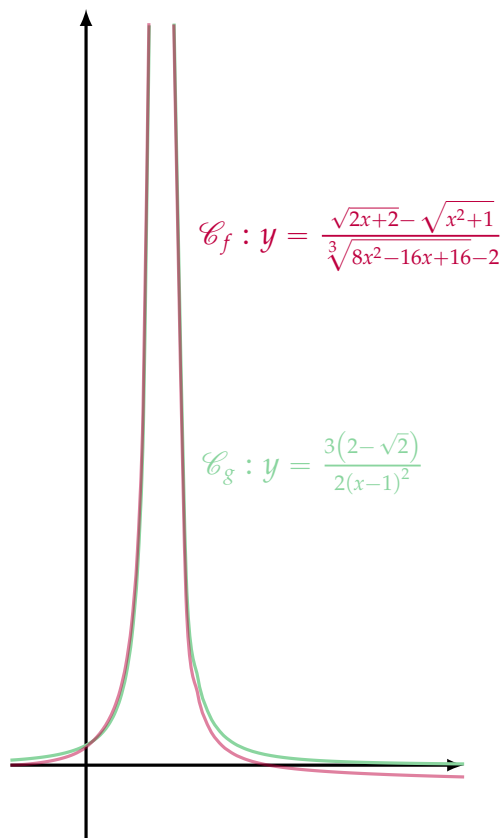


Recherche d'un équivalent

On cherche à déterminer un équivalent simple de la fonction f au voisinage de 1 grâce à un changement de variable. Après quelques lignes plus ou moins laborieuses de calculs pas spécialement intelligents, on obtiendra l'équivalent g qui, à une translation et à une multiplication par une constante près, n'est autre que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Le graphique ci-dessous permet de voir la qualité de l'approximation!

Pour x voisin de 1, on a

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2x+2} - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{8x^2-16x+16}-2} &= \frac{\sqrt{2(1+h)+2} - \sqrt{(1+h)^2+1}}{\sqrt[3]{8(1+h)^2-16(1+h)+16}-2} \\ &= \frac{\sqrt{4+2h} - \sqrt{2+2h+h^2}}{\sqrt[3]{8(1+h^2)}-2} \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{1+\frac{h}{2}} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{1+\left(h+\frac{h^2}{2}\right)}}{2 \cdot \sqrt[3]{1+h^2}-2} \\ &= \frac{2\left(1+\frac{1}{4}h+o(h)\right) - \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}h+o(h)\right)}{2\left(1+\frac{1}{3}h^2+o(h^2)\right)-2} \\ &= \frac{2 - \sqrt{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}h + o(h)}{\frac{2}{3}h^2 + o(h^2)} \\ &= \frac{3}{2h^2} \cdot \frac{2 - \sqrt{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}h + o(h)}{1+o(1)} \\ &= \frac{3}{2h^2} \cdot \left(2 - \sqrt{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}h + o(h)\right) (1+o(1)) \\ &= \frac{3}{2h^2} \cdot (2 - \sqrt{2} + o(1)) \\ &= \frac{3(2-\sqrt{2})}{2h^2} + o\left(\frac{1}{h^2}\right) \\ &= \frac{3(2-\sqrt{2})}{2(x-1)^2} + o\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) \\ &\sim \frac{3(2-\sqrt{2})}{2(x-1)^2} \end{aligned}$$



En posant $x = 1 + h$

On cherche à utiliser la formule :

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$$

$$\text{Car } o\left(h + \frac{h^2}{2}\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} o(h)$$

$$\text{et } \frac{h^2}{2} \underset{h \rightarrow 0}{=} o(h)$$

On cherche à utiliser la formule :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x)$$

(cas particulier de la formule précédente)

En développant

En repassant à la variable x

Terme d'erreur négligeable devant la fonction