



Dans la boîte à outil du mathématicien, la mise en équation est l'arme la plus destructrice... De difficultés ! Donnons-en un exemple :

Un nombre entier a pour reste 35 dans la division euclidienne par 69, et dans la division par 75, il a même quotient et pour reste 17. Quel est ce nombre ?

On peut tout à fait trouver la solution de ce problème en tatonant, mais rien ne garantit qu'on aboutira, et pire, face à un autre problème, on repart de zéro. La clef de la mise en équation, c'est de nommer les éléments du problème, afin de pouvoir formuler le problème comme si l'on connaissait la solution. Dans notre exemple, on peut appeler n le nombre entier recherché, et q le quotient commun. La résolution du problème arrive très vite après la mise en équation :

$$\begin{cases} n = 69q + 35 \\ n = 75q + 17 \end{cases} \implies 0 = -6q + 18$$

En soustrayant les deux lignes

$$\implies q = 3$$

On trouve ainsi le quotient commun

$$\implies n = 69 \times 3 + 35$$

On substitue dans la première équation

$$\implies n = 242$$

(ou la deuxième : $n = 75 \times 3 + 17 = 242$)

En faisant ainsi, on ne démontre pas que 242 est une solution de notre problème, puisque nous avons des implications et non des équivalences. Ce que nous avons montré, c'est que seul 242 peut être solution, mais c'est un jeu d'enfant de vérifier que ce nombre répond bien aux conditions du problème. On a ainsi fait mieux que trouver une solution du problème, on a prouvé qu'il n'y en avait pas d'autres, et on a surtout, en prenant un peu de recul, mis en pratique une technique de résolution de problème très puissante et très générale.