La fonction Partie Entière

On se propose de démontrer la proposition $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! n \in \mathbb{Z}, n \leqslant x < n+1$

L'unique n **dont on affirme l'existence pour tout réel** x **sera appelé la partie entière de** x **et sera noté** $E(x)$

Comme $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$**, cela revient a montré les trois propositions suivantes :**

- $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leqslant x < n+1$
- $\forall x \in \mathbb{R}_-, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leqslant x < n+1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, (n_1 \leqslant x < n_1 + 1$ **et** $n_2 \leqslant x < n_2 + 1) \Longrightarrow n_1 = n_2$ **(c'est la condition d'unicité)**

Soit $x \in \mathbb{R}_+$**, on sait par la propriété d'Archimède que l'ensemble** $A = \{r \in \mathbb{N} | r > x\}$ **est non vide. Il admet donc un plus petit élément** r **vérifiant** $r > x$ **et tel que** $r - 1 \leqslant x$**. En posant** $n := r - 1$**, on a montré l'existence d'un** $n \in \mathbb{Z}$ **vérifiant** $n \leqslant x < n+1$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}_-$**, on a de même par la propriété d'Archimède que l'ensemble** $A = \{r \in \mathbb{N} | r \geqslant -x\}$ **est non vide. Il admet donc aussi un plus petit élément** r **vérifiant** $r \geqslant -x$ **et tel que** $r - 1 < -x$**. En posant** $n := -r$**, on a montré l'existence d'un** $n \in \mathbb{Z}$ **vérifiant** $n \leqslant x < n+1$

Enfin, soient $x \in \mathbb{R}$ **et** $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ **tels que** $n_1 \leqslant x < n_1 + 1$ **et** $n_2 \leqslant x < n_2 + 1$**. En réécrivant la deuxième inégalité sous la forme** $-n_2 - 1 < x \leqslant -n_2$ **et en l'additionnant à la première, on obtient l'inégalité** $(n_1 - n_2) - 1 < 0 < (n_1 - n_2) + 1$ **qui affirme que l'entier** $(n_1 - n_2)$ **est à une distance strictement inférieure à** 1 **de** 0**, il est donc nul. Ainsi** $n_1 = n_2$