00132380: 概率统计 (B) 期中考试

2019 年 4 月 17 日上午 10:10–12:10

常用分布的概率质量或密度函数：

(a) 泊松分布 $P(X=k)=\lambda^k e^{-\lambda}/k!, k=0,1,\ldots$;

(b) 指数分布 $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}, x>0$;

(c) 正态分布 $f(x)=(2\pi\sigma^2)^{-1/2}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, x\in\mathbb{R}$.

1. (12 分) 掷一枚均匀的骰子 N 次，其中 N 有概率分布 $P(N=j)=2^{-j}, j=1,2,\ldots$. 用 S 表示 N 次掷出点数之和，M 表示掷出的最大点数. 计算以下概率：
   (a) 已知 $S=4$ 时，$N=2$ 的概率；
   (b) $M=4$ 的概率.

2. (12 分) 甲乙丙丁四人每两人之间是朋友的概率为 p. 如果四人中任何一人听到一个消息，就会立即告诉所有朋友，听到消息的人再告诉自己的所有朋友，依次传播下去. 如果甲听到一个消息，计算以下概率：
   (a) 已知乙和丙不是朋友时，丁听到该消息的概率；
   (b) 丁听到该消息的概率.

3. (18 分) 假设某种型号的飞机每年发生事故的次数服从参数为 2.5 的泊松分布，且每次事故由非人为因素导致的概率为 0.2. 每次事故是否由非人为因素导致与其发生时间独立，也与其他事故是否由非人为因素导致独立.
   (a) 求在半年内发生至少两次非人为事故的概率.
   (b) 求连续两次非人为事故的期望时间间隔.
   (c) 已知过去两年内一共发生了两次非人为事故，求过去半年和未来半年内一共发生非人为事故的期望次数.

4. (18 分) 设 X 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$, 其中 $\sigma>0$. 令 $Y=|X|$.
   (a) 求 Y 的概率密度.
   (b) 求 EY.
   (c) 求 $\mathrm{Var}(Y)$.

5. (18 分) 设 X 与 Y 独立，都服从标准正态分布 $N(0,1)$. 用 $R=\sqrt{X^2+Y^2}$ 表示脱靶量，Θ 表示经过原点和 (X,Y) 的射线与 x 正半轴的夹角，$0\le\Theta<2\pi$.
   (a) 求 (R,Θ) 的联合密度.
   (b) 求 R 和 Θ 的边缘密度. R 与 Θ 是否独立？为什么？
   (c) 求 $E(X^2/R^2)$.

6. (10 分) 设随机变量 X_1 和 X_2 分别有期望 μ_1 和 μ_2, 相同方差 σ^2, 相关系数为 ρ. 证明：对任意常数 $k>0$, 有
$$P(|X_1-\mu_1+X_2-\mu_2|\ge k\sigma)\le\frac{2(1+\rho)}{k^2}.$$

7. (12 分) 某地发现一群恐龙足迹化石，共有 N 个脚印，用 x_j 表示第 j 个脚印的长度. 无放回地随机抽取 n 个脚印测量长度，得到样本均值 $\overline{Y}$. 分别用 μ 和 σ^2 表示总体均值和方差，即
$$\mu=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j,\qquad \sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j-\mu)^2.$$
   求 $E\overline{Y}$ 和 $\mathrm{Var}(\overline{Y})$ 的表达式，用 μ,σ^2,N,n 表示.