《概率统计B》期中考试参考答案

20 17 -20 18 学年第 二 学期

2018年5月10日上午

1. (10分) 设随机事件A,B相互独立，A,C互不相容，并且 $P(A)=P(B)=P(C)=0.3$, 试求下列事件的概率AB, $A\cup B$, $A-B$, AC, $A\cup C$, $A-C$.

   解： 由A,B独立，那么有：$P(AB)=P(A)P(B)=0.09$,$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.51$,$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.21$

   由A,C互不相容，那么有:$P(AC)=0$,$P(A\cup C)=P(A)+P(C)=0.6$,$P(A-C)=P(A)=0.3$

2. (10分) 设某市冬季有风的天数占40%, 有风时雾霾出现概率为0.1, 无风时雾霾出现概率为0.8. 求该市冬季随 机抽取的一天有雾霾的概率。

   解： 记A表示有风，B表示出现雾霾，那么由全概率公式有$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})=0.52$

3. (15分) 某射击运动员命中10环的概率为p， 某次训练中他希望击中二次10环再结束， 结束时的射击次数为X。

   (1). 求X的概率分布；

   (2). 计算EX.

   解： (1) $P(X=n)=C_{n-1}^{1}p(1-p)^{n-2}p=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,4\ldots$

   (2)$EX=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)p^2(1-p)^{k-2}=p^2(\sum_{k=2}^{\infty}(1-p)^k)''=p^2(\frac{1}{p}-2+p)''=\frac{2}{p}$

4. (10分) 某地区的肝癌发病率为0.0004,先用某方法进行普查，医学研究表明，化验结果是存有错误的，已知患有肝癌的人其化验结果99%有病，而没患肝癌的人化验结果99%显示没有病，现某人的化验结果显示有病，问其真的患肝癌的概率是多少？

   解：记得病为A,化验结果显示有病为B,那么由贝叶斯公式有

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})}=0.038$$

5. (20分) 设X 与 Y独立同分布，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, α,β是两个实数（全不为0）

(1). 求$\alpha X+\beta Y$与$\alpha X-\beta Y$的相关系数和联合密度；

(2). 证明$E(\max(X,Y))=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

解： (1) 因为

$$\begin{aligned}
Cov(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)&=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2\\
Var(\alpha X+\beta Y)=Var(\alpha X-\beta Y)&=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2
\end{aligned}$$

因此

$$\rho=\frac{Cov(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)}{Var(\alpha X+\beta Y)^{1/2}Var(\alpha X-\beta Y)^{1/2}}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

联合密度计算：记$U=\alpha X+\beta Y, V=\alpha X-\beta Y$,则

$$f(u,v)=f(\frac{u+v}{2\alpha},\frac{u-v}{2\beta})\frac{1}{2\alpha\beta}=\frac{1}{2\pi\sigma^2}exp\{-\frac{(\frac{u+v}{2\alpha}-\mu)^2}{2\sigma^2}-\frac{(\frac{u-v}{2\beta}-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\frac{1}{2\alpha\beta}.$$

(2)注意到

$$\max\{X,Y\}=\frac{X+Y+|X-Y|}{2}$$

又$X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$, 因此

$$E|X-Y|=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

从而结论成立。

下面计算正态分布$X\sim N(0,\sigma^2)$的绝对值的期望，

$$\begin{aligned}
E|X|&=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\\
&=2\int_{0}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\\
&=2\sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma
\end{aligned}$$

6. (10分) 设(X,Y)的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}4xy\exp\{-(x^2+y^2)\}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

求$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的均值。

解： 考虑极坐标变换：

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

并利用欧拉积分公式

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int\int_{\{x>0,y>0\}} \sqrt{x^2+y^2}4xy\exp\{-(x^2+y^2)\}dxdy \\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} r4r\cos\theta r\sin\theta e^{-r^2} rd\theta dr \\ &= \int_0^{\infty} 2r^4 e^{-r^2} dr \\ &= \int_0^{\infty} 2x^2 e^{-x}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ &= \Gamma\left(\frac{5}{2}\right). \end{aligned}$$

由Gamma函数性质：$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ 得到

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

7. (15分) 设X 与 Y的联合密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

试求以下随机变量的密度函数

(1). $Z = \frac{X+Y}{2}$.

(2). $Z = Y - X$.

解：(1) 因为X, Y都是正的随机变量，所以其和也是正的随机变量。 当$z \geq 0$时

$$\begin{aligned} F(Z) = P(Z \leq z) &= P(\frac{X+Y}{2} \leq z) \\ =& \int_0^{2z} dy \int_0^{2z-y} p(x,y)dx \\ =& \int_0^{2z} dy \int_0^{2z-y} e^{-(x+y)}dx \\ =& \int_0^{2z} (e^{-y} - e^{-2z})dy \\ =& 1 - e^{-2z} - 2ze^{-2z} \end{aligned}$$

当$z<0$, 显然有$F(z)=P(Z<z)=0$, 于是密度函数

$$p(z)=\frac{dF(z)}{dz}=\begin{cases}4ze^{-2z} & u\geq 0\\ 0 & u<0\end{cases}$$

(2) 由题意X,Y都是正的随机变量，其差可正可负；而且由联合密度的对称性，可得Z的密度应该关于原点对称。 为简便起见，不妨设考虑正半部分$z>0$的情形，

$$\begin{aligned}F(z)&=P(Z\leq z)=P(Y-X\leq z)\\&=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{x+z}p(x,y)dy\\&=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{x+z}e^{-(x+y)}dy\\&=\int_0^{+\infty}(e^{-x}-e^{-2x-z})dx\\&=1-\frac{e^{-z}}{2}\end{aligned}$$

于是，密度函数

$$p(z)=\frac{dF(z)}{dz}=\frac{e^{-z}}{2},\quad z\geq 0.$$

再由对称性得负半轴上的密度

$$p(z)=\frac{dF(z)}{dz}=\frac{e^{z}}{2},\quad z\leq 0.$$

综上得Z的密度函数为

$$p(z)=\frac{1}{2}e^{-|z|},\quad z\in(-\infty,+\infty)$$

8. (10分) 设X 为正常成年男人每毫升血液中白细胞个数，已知均值$EX=7300$, 标准差 $\sqrt{Var(X)}=700$, 试给出 X 的值落入区间$(5200,9400)$ 范围的概率的一个下界。

解：由题设

$$|EX-5200|=|EX-9400|=2100$$

于是由切比雪夫不等式得

$$\begin{aligned}
&Pr(X \in (5200, 9400)) \\
=&Pr(|X - EX| \leq 2100) \\
=&1 - Pr(|X - EX| \geq 2100) \\
\geq&1 - \frac{Var(X)}{2100^2} \\
=&1 - \frac{700^2}{2100^2} = \frac{8}{9}
\end{aligned}$$