北京大学数学科学学院期中考试

20 21 - 20 22 学年第 一 学期

考试科目：概率统计 B　　考试时间：2021 年 11 月 22 日

姓　　名：＿＿＿＿＿＿　　学　　号：＿＿＿＿＿＿

本试题共 八 道大题，满分 100 分

解答仅供参考。。。

1. (18 分) 有 n 个箱子，第 i 个箱子中放了 i 个白球和 $n+1-i$ 个黑球 $(i=1,2,...,n)$，现随机选出一个箱子，从选出的箱子中有放回依次抽两个球，以 A 和 B 分别表示第一次和第二次抽到白球.

   a. 求 $P(A), P(AB)$；

   b. 求 $P($球来自第n个箱子$|A)$.

a.

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{i}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(4')$

$P(AB) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{i^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{6(n+1)}(5')$

b.

$P(\text{球来自第}n\text{个箱子}|A) = \frac{P(\text{球来自第}n\text{个箱子},A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{n}\frac{n}{n+1}}{0.5} = \frac{2}{n+1}(9')$

2. (12 分) 一个家庭有两个孩子，

   a. 已知至少有一个男孩，求两个都是男孩的概率；

   b. 已知至少有一个星期三出生的男孩，求两个都是男孩的概率.

a.

设两个孩子分别为 A 和 B，则两个都是男孩为 A 男 B 男，至少有一个男孩为 A 男 B 男或 A 男 B 女或 A 女 B 男，故概率为 $\frac{1}{3}$

b.

至少有一个星期三出生的男孩，共有 14+14-1 种可能，两个都是男孩且至少有一个星期三出生的男孩，共有 7+7-1 种可能，故概率为 $\frac{13}{27}$

3. (15 分) 设 X 的密度函数为

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{1+x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

   a. 求 c 的值；

   b. 求分布函数 $F(x)$；

   c. 求 $Y = lnX$ 的密度（当 $x \le 0$ 时，规定 $lnx = 0$）.

a.

$\int_0^\infty \frac{c}{1+x^2} = 1$
$carctanx|_0^\infty = 1$
$c = \frac{2}{\pi}$(3')
b.
(5')

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}arctanx, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

c.
solution 1
$P(Y \le y) = P(lnX \le y) = P(X \le e^y) = \frac{2}{\pi}arctane^y$
$p_Y(y) = \frac{2}{\pi}\frac{e^y}{1+e^{2y}}$
solution 2
$p_X(x)\frac{dx}{dy} = p_Y(y)$
$p_Y(y) = \frac{2}{\pi}\frac{e^y}{1+e^y}$(7')

4. (10 分) 某枪手每次打中目标的概率都是 p，现连续向一个目标射击，直到击中为止，求射击次数 X 的期望和方差.

$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$
几何分布
$E(X) = \frac{1}{p}$
$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

5. (10 分) X, Y 独立同分布，服从 $N(0,1)$. $Z = e^{-\frac{1}{2}(X^2+Y^2)}$，求 Z 的分布函数.

$P(X^2 \le t) = P(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dt = 2\int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dt$
$p_{X^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{t}{2}}$，同理有 $p_{Y^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{t}{2}}(t \ge 0)$
$P(X^2+Y^2 \le t) = P(X^2 \le t - Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{t-v} p(u,v)du = \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{t} p(h-v,v)dh = \int_{-\infty}^{t} dh \int_{-\infty}^{\infty} p(h-v,v)dv$
$p(X^2+Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t-v,v)dv = \int_0^t \frac{1}{2\pi\sqrt{v(t-v)}}e^{-\frac{t}{2}}dv = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}(t \ge 0)$
$0 < z \le 1$
$P(Z \le z) = P(e^{-\frac{1}{2}(X^2+Y^2)} \le z) = P(X^2+Y^2 \ge -2lnz) = \int_{-2lnz}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}dt = -e^{-\frac{t}{2}}|_{-2lnz}^{\infty} = z$
$p_Z(z) = \begin{cases} 1, \ (0 < z \le 1) \\ 0, \ otherwise \end{cases}$
直接积分做极坐标变换更加简便。

6. (10 分) X_i 服从参数为 λ_i 的 Poisson 分布，$i = 1, 2$。X_1, X_2 相互独立，求 $X_1 + X_2$ 的概率分布.

$P(X_1+X_2 = k) = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2} = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i}{i!}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}}{i!(k-i)!} =$

$e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{\binom{k}{i}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}}{k!}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$
即参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 分布.

7. (10 分) 从一副扑克牌（没有大小王）中随机抽取 13 张，放回后再随机抽取 13 张. 以 X 表示至少被抽到一次的牌的张数，求 $E(X)$.

共 52 张牌，若第 i 张牌被抽到，则 $Y_i=1$，否则 $Y_i=0$，有 $X=\sum_{i=1}^{52}Y_i$，$P(Y_i=0)=(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16},P(Y_i=1)=\frac{7}{16}$，因此 $E(X)=\sum_{i=1}^{52}E(Y_i)=52*7/16=22.75$

8. (15 分) 在 1000 毫升液体中有 2500 个细菌. 现从中取 100 毫升液体，X 为这 100 毫升液体中细菌个数. 求 $P(220\le X\le 280)$.

$P(X=k)=\binom{2500}{k}0.1^k0.9^{2500-k}$
$P(220\le X\le 280)=\sum_{k=220}^{280}\binom{2500}{k}0.1^k0.9^{2500-k}$
可通过中心极限定理近似为 $2\Phi(2)-1$, $\Phi(x)$ 为正态分布累积分布函数。