期中考试复习题目

1. 3 个红色球、3 个黄色球、3 个白色球放在一起。从这 9 个球中拿取 4 个。求拿到的红色球比白色球多一个的概率。

2. 从 1 至 100 的正整数中随机选取一个。求该数可以被 7 整除的条件下，该数可以被 3 整除的条件概率。

3. 假设在某高尔夫球场的某球洞，70%的球员打出第一杆后，球会停留在球道上；另外 30%的球员的第一杆会偏离球道。已知若在此洞的第一杆击球停留在球道上，获得标准杆或更好成绩的概率是 70%；否则获得标准杆或更好成绩的概率是 30%。一名球员今天在该球洞获得了标准杆或更好成绩。求他第一杆的击球在球道上的概率。

4. 从 1 至 8 的正整数中随机选取 3 个。求它们的和除以 3 的余数的分布。

5. 已知在某个扑克游戏中，使用四种花色各 13 张牌，共 52 张。庄家从牌堆中随机抽出 5 张牌，不放回。已知这 5 张牌中有四张 ♠ 牌。现在，玩家可以选择支付 x 元，让庄家再从牌堆中随机抽取 2 张牌，其中 $x > 0$ 是一个给定实数。如果这两张牌中至少一张是 ♠，则玩家获得奖金 $(x + 100)$ 元，否则玩家不获得奖金。

   (a) 求玩家获得奖金的概率。

   (b) 当 x 在什么范围时，玩家选择支付的平均收益大于零？

6. 假设随机变量 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，随机变量 $Y \sim \mathrm{Exp}(\mu)$。X 与 Y 相互独立。求 $X + Y$ 的概率密度函数。

7. 假设随机变量 X 的概率密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

   求随机变量 X 的期望和方差。

8. 假设 X、Y 是离散型的随机变量，$X \sim \mathrm{Bernoulli}\left(\frac{1}{2}\right)$，$P(Y = 1) = P(Y = 2) = P(Y = 3) = \frac{1}{3}$。$X$ 与 Y 相互独立。求 $\mathrm{var}(X)$，$\mathrm{var}(Y)$，$E[X + 2Y]$，$\mathrm{var}(X + 2Y)$，$E[XY]$，$\mathrm{var}(XY)$。

9. X、Y 是随机变量。已知 $E[X] = 2, E[Y] = -3, E[X^2] = 9, E[XY] = -5, E[Y^2] = 25$。求 X 与 Y 的相关系数 $\mathrm{corr}(X, Y)$。

10. 假定 $C > 0$ 为常数，且随机向量 (X, Y) 的分布密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} C(x + y), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

   (a) 求常数 C。

   (b) 求 $E[X]$，$\mathrm{var}(X)$。

   (c) 求 $E[XY^2]$，$\mathrm{var}(XY^2)$。

11. 假设随机向量 (X,Y) 服从二维正态分布，且其分布的参数 $\mu_1 = 3$，$\mu_2 = 0$，$\sigma_1 = 5$，$\sigma_2 = 1$，$\rho = -1/4$。求 $\mathrm{corr}(X+3Y, 4X+5Y)$。

12. 假设随机向量 (X,Y) 服从扇形区域 $\{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 9\}$ 上的均匀分布。求该随机向量的联合密度函数和 X 的边缘密度。