1.（20 分）设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & a\end{pmatrix}$，已知-5 是 A 的重数为 2 的特征值。

（1）求 a 的值。

（2）求一个正交矩阵 Q,使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解：因为-5 是 A 的二重特征值，因此 $r(-5E-A)=r(5E+A)=1$。

$$5E+A=\begin{pmatrix}5-4 & 2 & 2\\ 2 & 5-1 & 4\\ 2 & 4 & 5+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 4\\ 2 & 4 & 5+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1+a\end{pmatrix}\Rightarrow a=-1$$

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda+4 & -2 & -2\\ -2 & \lambda+1 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+5)^2(\lambda-4)$$

求出特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=-5,\lambda_3=4$。

对于特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=-5$

$$-5E-A=\begin{pmatrix}-5+4 & -2 & -2\\ -2 & -5+1 & -4\\ -2 & -4 & -5+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ -2 & -4 & -4\\ -2 & -4 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

求出基础解系为 $\xi_1=(-2,1,0)^T,\xi_2=(-2,0,1)^T$

经过施密特正交化得到标准正交向量为：$\gamma_1=(-\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},0)^T,\gamma_2=(-\frac{2}{3\sqrt5},-\frac{4}{3\sqrt5},\frac{\sqrt5}{3})^T$

对于特征值为：$\lambda_3=4$

$$4E-A=\begin{pmatrix}4+4 & -2 & -2\\ -2 & 4+1 & -4\\ -2 & -4 & 4+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}8 & -2 & -2\\ -2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

求出基础解系为 $\xi_3=(1,2,2)^T$，标准化向量为：$\gamma_3=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T$

所求 $P=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{3\sqrt5} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{4}{3\sqrt5} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt5}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$。

2. (15 分) 令 $\alpha_1=(1,2,1,0),\alpha_2=(-1,1,1,1),\beta_1=(2,-1,0,1),\beta_2=(1,-1,3,7)$。求向量 α_1,α_2 生成的子空间与由向量 β_1,β_2 生成的子空间的交的基。

解：因为 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2\in L(\alpha_1,\alpha_2)\bigcap L(\beta_1,\beta_2)$ 当且仅当存在 $y_1\beta_1+y_2\beta_2$ 使得：

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=y_1\beta_1+y_2\beta_2$。或者存在 $y_1\beta_1+y_2\beta_2$ 使得：$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+y_1\beta_1+y_2\beta_2=0$。

要找出使得上面的向量方程有解的全部 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2$，它们就是 $L(\alpha_1,\alpha_2)\bigcap L(\beta_1,\beta_2)$ 的全部向量。

按题设的 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 将上述方程按各个分量写出来就是下面的齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1-x_2+2y_1+y_2=0 \\ 2x_1+x_2-y_1-y_2=0 \\ x_1+x_2 \qquad +3y_2=0 \\ \qquad x_2+y_1+7y_2=0 \end{cases}$$

求出该齐次线性方程组的基础解系只有一个解：$(-1,4,3,-1)$，全部解为 $x(-1,4,3,-1)$。

于是 $L(\alpha_1,\alpha_2)\bigcap L(\beta_1,\beta_2)$ 的全部向量为：$-x\alpha_1+4x\alpha_2=x(-5,2,3,4)$。

3. (15 分) 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，求 t 的取值范围。

解：用顺序主子式进行讨论，f 对应的矩阵及顺序主子式为：$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&\frac{t}{2}\\0&\frac{t}{2}&1\end{bmatrix}$，

$D_1=2>0,D_2=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1>0,D_3=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&1&\frac{t}{2}\\0&\frac{t}{2}&1\end{vmatrix}=1-\dfrac{t^2}{2}>0$，解得 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$。

即：当 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ 时，f 为正定矩阵。

4. (10 分) 设 A,B 分别为 $s\times n,n\times s$ 矩阵，证明：$|I_s-AB|=|I_n-BA|$。

证明：考察 $\begin{vmatrix}I_s&A_{s\times n}\\B_{n\times s}&I_n\end{vmatrix}$。把第二列右乘 $-B_{n\times s}$ 加到第一列上，得到

$\begin{vmatrix}I_s-A_{s\times n}B_{n\times s}&A_{s\times n}\\0&I_n\end{vmatrix}=|I_s-A_{s\times n}B_{n\times s}|$；把第一列右乘 $-A_{s\times n}$ 加到第二列上，得到

$\begin{vmatrix}I_s&0\\B_{n\times s}&I_n-B_{n\times s}A_{s\times n}\end{vmatrix}=|I_n-B_{n\times s}A_{s\times n}|$；所以 $|I_s-AB|=|I_n-BA|$。

5. (10 分) 令 V 是域 k 上的 n-维线性空间，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的一组基。定义 $Hom_k(V,V)$ 到 $M_{n\times n}(k)$ 映射 σ, 对于任意线性变换 $\mathcal{A} \in Hom_k(V,V)$ 都有

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}(\alpha_1) \\ \cdots \\ \mathcal{A}(\alpha_n) \end{pmatrix} = \sigma(\mathcal{A}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

证明:

(i) σ 是线性同构。

(ii) 判断对于任意 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in Hom_k(V,V)$ 是否满足 $\sigma(\mathcal{AB}) = \sigma(\mathcal{A})\sigma(\mathcal{B})$, 并给出证明或反例。

证明：（1）首先 σ 是单射。若 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 为 V 上的两个不同的线性变换，则存在：

$\alpha = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_n\alpha_n$，使得 $\mathcal{A}(\alpha) \neq \mathcal{B}(\alpha)$。若 $\sigma(\mathcal{A})=\sigma(\mathcal{B})$,则：

$$\mathcal{A}(\alpha) = (l_1,l_2,\cdots,l_n)\begin{pmatrix} \mathcal{A}(\alpha_1) \\ \mathcal{A}(\alpha_2) \\ \vdots \\ \mathcal{A}(\alpha_n) \end{pmatrix} = (l_1,l_2,\cdots,l_n)\,\sigma(\mathcal{A})\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$= (l_1,l_2,\cdots,l_n)\,\sigma(\mathcal{B})\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (l_1,l_2,\cdots,l_n)\begin{pmatrix} \mathcal{B}(\alpha_1) \\ \mathcal{B}(\alpha_2) \\ \vdots \\ \mathcal{B}(\alpha_n) \end{pmatrix} = \mathcal{B}(\alpha)。$$

矛盾，从而 σ 是单射。

（2）σ 是满射。任取矩阵 $M \in M_{n\times n}(k)$。定义：$\mathcal{A}$：$V \to V$

$\forall \alpha = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_n\alpha_n$，$\mathcal{A}(\alpha) = (l_1,l_2,\cdots,l_n)\,M\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$，则 $\mathcal{A} \in Hom_k(V,V)$，且 $\sigma(\mathcal{A})=M$。

所以 σ 是满射。

（3）σ 是线性同构的。

$$\begin{pmatrix} l\mathcal{A}\alpha_1 \\ l\mathcal{A}\alpha_2 \\ \vdots \\ l\mathcal{A}\alpha_n \end{pmatrix} = l\sigma(\mathcal{A})\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k\mathcal{B}\alpha_1 \\ k\mathcal{B}\alpha_2 \\ \vdots \\ k\mathcal{B}\alpha_n \end{pmatrix} = k\sigma(\mathcal{B})\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$,因此

$$\begin{pmatrix} l\mathcal{A}+k\mathcal{B}(\alpha_1) \\ l\mathcal{A}+k\mathcal{B}(\alpha_2) \\ \vdots \quad \vdots \\ l\mathcal{A}+k\mathcal{B}(\alpha_n) \end{pmatrix} = (l\sigma(\mathcal{A})+k\sigma(\mathcal{B}))\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$，所以 $\sigma(l\mathcal{A}+k\mathcal{B})=l\sigma(\mathcal{A})+k\sigma(\mathcal{B})$

所以 σ 是线性同构的。

（4）一般情况下不满足 $\sigma(\mathcal{A}\mathcal{B})=\sigma(\mathcal{A})\sigma(\mathcal{B})$。

$$\mathcal{A}\mathcal{B}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} \mathcal{B}\alpha_1 \\ \mathcal{B}\alpha_2 \\ \vdots \\ \mathcal{B}\alpha_n \end{pmatrix} = \mathcal{A}(\sigma(\mathcal{B})\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix})$$

$$= \mathcal{A}\begin{pmatrix} b_{11}\alpha_1+b_{12}\alpha_2+\cdots+b_{1n}\alpha_n \\ b_{21}\alpha_1+b_{22}\alpha_2+\cdots+b_{2n}\alpha_n \\ \vdots \\ b_{n1}\alpha_1+b_{n2}\alpha_2+\cdots+b_{nn}\alpha_n \end{pmatrix} = \sigma(\mathcal{B})\begin{pmatrix} \mathcal{A}\alpha_1 \\ \mathcal{A}\alpha_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}\alpha_n \end{pmatrix} = \sigma(\mathcal{B})\sigma(\mathcal{A})\begin{pmatrix} \mathcal{A}\alpha_1 \\ \mathcal{A}\alpha_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}\alpha_n \end{pmatrix}$$

若取 $\begin{pmatrix} \mathcal{A}\alpha_1 \\ \mathcal{A}\alpha_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$，$\mathcal{B}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$，

则 $\sigma(\mathcal{A}\mathcal{B})\neq\sigma(\mathcal{A})\sigma(\mathcal{B})$。

6. (10 分) 设 A 为实数域中的任一个 m 行 n 列非零矩阵。证明一定存在 m 行 m 列的正交矩阵 P 和 n 行 n 列的正交矩阵 Q，使得

$$A = P\begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q,$$

其中的 D_r 为 r 行 r 列的对角矩阵，对角元都是正数，$r = \mathrm{rank}(A)$；三个 0 表示相应大小的零矩阵。

证明：矩阵 A^TA 为 n 行 n 列的实对称矩阵，而且 $\forall x \in \mathbb{R}^n$，$x^T(A^TA)x = (Ax)^T(Ax) \geq 0$，即，$A^TA$ 是半正定矩阵，其所有特征值都是非负实数，记为 $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \cdots \geq \sigma_r^2 > \sigma_{r+1}^2 = \cdots = \sigma_n^2 = 0$，其中 $r = \mathrm{rank}(A^TA) = \mathrm{rank}(A)$，由于 A 非零，所以 $1 \leq r \leq \min(m,n)$。

根据实对称矩阵的性质，一定存在列向量

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$$

为矩阵 A^TA 的标准正交的特征向量，

$$A^TAu_i = \sigma_j^2 u_i, \quad \text{向量} Au_i \text{的长度平方} \|Au_i\|^2 = u_i^T A^T A u_i = \sigma_i^2 u_i^T u_i = \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

这表明 $Au_i = 0$, for $i = r+1, r+2, \ldots, n$。

定义一个以

$$u_1^T, u_2^T, \ldots, u_n^T$$

作为第 1 行到第 n 行的 n 行 n 列方阵 Q，则 Q 必为正交阵。

令

$$v_i = \frac{Au_i}{\sigma_i} \in \mathbb{R}^m, \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, r,$$

则当 $1 \le i, j \le r$ 时，有

$$v_i^T v_j = \frac{(Au_i)^T}{\sigma_i} \frac{Au_j}{\sigma_j} = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j}(u_i^T A^T A u_j) = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j}(\sigma_j^2 u_i^T u_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases}$$

即，$v_1, v_2, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^m$ 为标准正交向量集，可扩充成 $\mathbb{R}^m$ 的标准正交基：$v_1, v_2, \ldots, v_m$。定义一个以它们作为第 1 列到第 m 列的 m 行 m 列的方阵 P，则 P 必为正交阵。

现在

$$P^T A Q^T = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{bmatrix} A(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{bmatrix} (Au_1, Au_2, \ldots, Au_r, 0, \ldots, 0)$$

而

$$\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{bmatrix} (Au_1, Au_2, \ldots, Au_r, 0, \ldots, 0) = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} u_1^T A^T \\ \vdots \\ \sigma_r^{-1} u_r^T A^T \\ v_{r+1}^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{bmatrix} (Au_1, Au_2, \ldots, Au_r, 0, \ldots, 0)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即

$$P^T A Q^T = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 P 和 Q 都是正交矩阵，所以就有

$$A = P \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q.$$

7. (10 分) 设 n-阶方阵 A 满足 $A^2=2A$, 证明：A 可以对角化。

证明：由 $A^2=2A$ 可知：$A(A-2E)=0=(2E-A)A$，(1)

因此：$r(A)+r(2E-A)\le n$，又因为 $A+(2E-A)=2E$，因此 $r(A)+r(2E-A)\ge r(2E)=n$，故：$r(A)+r(2E-A)=n$。

A 的列向量的极大无关组是 $(2E-A)x=0$ 的基础解系，$2E-A$ 的列向量的极大无关组是 $Ax=0$ 的基础解系。设 $r(A)=r$，A 的列向量的极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，$2E-A$ 的列向量的极大无关组为 $\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n$，

由（1）式可知：$A\alpha_i=0\,(i=r+1,\cdots,n)$，$(2E-A)\alpha_i=0\,(i=1,\cdots,r)$

即：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 A 对应于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量，$\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n$ 是 A 对应于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量。从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则 P 可逆，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$$

即 A 可对角化，且对角矩阵中 2 的个数为 r。

8. (10 分) 令 V 是域 k 上维数大于 1 的线性空间，$V^*=Hom_k(V,k)$ 是 V 到 k 上的所有线性映射的集合。对 $i=1,2$ 取集合 $V^*\times V$ 中的元素 (ϕ_i,w_i) 满足如下条件：$0\neq\phi_i\in V^*$, $0\neq w_i\in V$ 且 $\phi_i(w_i)=0$. 定义 V 上的线性变换 $\tau_i(v)=v+\phi_i(v)w_i$。证明：

(i) τ_i 是可逆线性变换。

(ii) 存在 V 上的可逆线性变换 g 使得 $g^{-1}\tau_1 g=\tau_2$。

证明：任取 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，令 $\phi_i(\alpha_l)=a_l$，因为 $0\neq\phi_i$，不妨设 $\phi_i(\alpha_1)=a_1\neq 0$，则

$\phi_i(\alpha_j-\dfrac{a_j}{a_1}\alpha_1)=0$。令 $V_i'=\{v\in V|\phi_i(v)=0\}$，则 V_i' 是 V 的子空间。

由于$\alpha_2-\frac{a_2}{a_1}\alpha_1,\cdots,\alpha_n-\frac{a_n}{a_1}\alpha_1$线性无关，且都属于$V_i'$，因此$\dim(V_i')\ge n-1$。

又因为$0\ne\phi_i$，因此$\dim(V_i')=n-1$。

任取V_i'的一组基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-1}$。令$w_i=l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_{n-1}\beta_{n-1}$。把$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-1}$扩充成$V$的一组基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-1},\beta_n$且$\phi_i(\beta_n)=1$，则$\tau_i$在这组基下的矩阵为

（$\tau_i\beta_1,\tau_i\beta_2,\cdots,\tau_i\beta_{n-1},\tau_i\beta_n)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & l_1\\ & \ddots & & \\ & & 1 & l_{n-1}\\ & & & 1\end{pmatrix}$为可逆矩阵，因此$\tau_i$可逆。

（2）任取$e_1=w_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$为$V_1'$的基，$f_1=w_2,f_2,\cdots,f_{n-1}$为$V_2'$的基，将这两组基分别扩充成 V 的基：$e_1,e_2,\cdots,e_{n-1},e_n$，和$f_1,f_2,\cdots,f_{n-1}$，$f_n$，且$\phi_1(e_n)=\phi_2(f_n)=1$。

定义 V 上的线性变换：$\rho:V\to V$，$\rho(e_i)=f_i$。显然ρ是同构。

$\rho\tau_1\rho^{-1}(f_i)=\tau_2(f_i)\quad i=1,2,\cdots,n$。因此$\rho\tau_1\rho^{-1}=\tau_2$。