线性代数整理

一、线性方程组

1. 符合实际问题需要的解成为可行解
2. 线性方程组的初等变换
    1. 把一个方程的倍数加到另一个方程上
    2. 互换两个方程的位置
    3. 用一个非零数乘某一个方程
3. 矩阵：由$s \cdot m$个数排成s行m列的一张表称为一个$s \times m$列的一张表称为$s \times m$矩阵，其中的每一个数称为这个矩阵的一个元素，第i行与j列交叉位置的元素称为矩阵的(i, j)元
4. 一个$s \times m$矩阵可以记为$A_{s \times m}$，它的(i, j)元记作$A(i; j)$，如果矩阵A的(i, j)元是a_{ij}，那么可以记作$A = (a_{ij})$
5. 零矩阵：元素全为0的矩阵称为零矩阵，简记为0，s行m列的零矩阵可以记成$0_{s \times m}$
6. 如果一个矩阵A的行数和列数相等，则称它为方阵，m行m列的方阵也称为m级矩阵
7. 阶梯形方程组：$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_3 = 6 \\ 0 = 0 \end{cases}$ 简化阶梯形方程组：$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$
8. 矩阵的初等行变化、阶梯形矩阵、简化阶梯形矩阵
9. 一般解：$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$，其中以主元为系数的未知量$x_1, x_3$称为主变量，其余未知量$x_2$称为自由未知量
10. 高斯-约当算法：初等行变化解线性方程组P9
11. 解的可能情况：
    1. 无解：出现$0 = d(d \neq 0)$
    2. 有解：1. 有唯一解：非零行个数r=未知量个数n

       2.有无穷多解：$r < n$
12. 如果一个线性方程组有解，则称它是相容的，否则，称它是不相容的
13. 如果一个齐次线性方程组有非零解，那么它就有无穷多个解
14. n元齐次线性方程组如果方程的个数$s < n$，那么它就一定有非零解
15. 数域：设K是复数集的一个子集，如果K满足：
    1. $0, 1 \in K$
    2. 对于任意的$a, b \in K$，都有$a \pm b, ab \in K$；并且当$b \neq 0$时有$\frac{a}{b} \in K$，

    那么称K是一个数域

16. 数域对加减乘除封闭

二、行列式

1. n个不同的自然数的一个全排列称为一个n元排列
2. 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列，$\tau(2341)=3$
3. 对换改变n元排列的奇偶性
4. 任一n元排列与排列123……n可经过一系列对换互变，并且所做对换的次数与这个n元排列有相同的奇偶性
5. 定义$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum\limits_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$类似地可以给出n元行列式定义
6. n级矩阵A的行列式简记为$|A|$或者$\det(A)$
7. n阶上三角行列式的值等于它的主对角线上n个元素的乘积
8. 行列式的性质
    1. 行列互换，行列式的值不变
    2. 行列式一行（列）的公因子可以提出去；行列式某一行（列）是两组数的和，它可以展成相应两个行列式之和；把一行（列）加到另一行（列）上，行列式的值不变
    3. 两行（列）互换，行列式反号；两行（列）相同，行列式的值为0；两行（列）成比例，行列式的值为0
9. A的转置：A'或A^T或A^t
10. 把行列式化成上三角行列式，是计算行列式的基本方法之一
11. n阶行列式中，划去第i行和第j列，剩下的元素按照原来次序组成的n-1阶行列式称为(i,j)元的余子式，记作M_{ij}，令$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称A_{ij}是(i,j)元的代数余子式
12. n阶行列式按第i行展开：$|A|=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$
13. $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0$（相当于第i行和第k行相同，行列式等于0）
14. 范德蒙行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-3} & \ldots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$
15. 克莱姆法则：n个方程的n元线性方程组，如果它的系数行列式$|A|\neq 0$，则它有唯一解，这个解是$(\frac{|B_1|}{|A|},\ldots,\frac{|B_n|}{|A|})$；如果它的系数行列式$|A|=0$，则它无解或有无穷多解。
16. n个方程的n元其次线性方程组有非零解的充要条件是它的系数行列式等于零

17. $|A|$的k阶子式：$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ j_1, j_2, \ldots, j_k \end{pmatrix}$剩下部分为该子式的余子式，在它前面乘以 $(-1)^{(i_1+i_2+\ldots+i_k)+(j_1+j_2+\ldots+j_k)}$则称为该子式的代数余子式
18. 拉普拉斯定理（行列式按k行展开）：在n阶行列式$|A|$中，取定k行，则这k行元素形成的所有k阶子式与它们自己的代数余子式的乘积之和等于$|A|$

三、线性方程组的进一步理论

1. 数域K上所有n元有序数组组成的集合K^n，连同定义在它上面的加法运算和数量乘法运算及其满足的8条运算法则一起，称为数域K上的一个n维向量空间，K^n的元素称为n维向量；8条运算法则：
    1. 加法交换律
    2. 加法结合律
    3. 把元素$(0,0,\ldots,0)$记作0，使得$0+\alpha=\alpha+0=\alpha$，称0是K^n的零元素
    4. $\alpha+(-\alpha)=(\alpha)+\alpha=0$称$-\alpha$是$\alpha$的负元素
    5. $1\alpha=\alpha$
    6. 数乘的结合律
    7. $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$
    8. $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$
2. 可将线性方程组有没有解的问题归结为：常数项列向量β能不能由系数矩阵的列向量组线性表出
3. 线性相关：K^n中向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s(s\geqslant 1)$称为是线性相关的，如果有$K$中不全为零的数$k_1,k_2,\ldots,k_s$使得$k_1\alpha_1+\ldots+k_s\alpha_s=0$
4. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s(s\geqslant 1)$线性相关等价于：
    1. 线性表出
    2. 齐次线性方程组有非零解
    3. 行列式等于零
5. $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\cdots,\widetilde{\alpha}_s$称为$\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的延伸组，$\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_s$称为$\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\cdots,\widetilde{\alpha}_s$的缩短组；如果向量组线性无关，则它的延伸组线性无关；如果向量组线性相关，则它的缩短组也线性相关
6. 如果两个向量组可以互相线性表出，则称它们等价。性质：
    1. 反身性
    2. 对称性
    3. 传递性
7. 向量组与它的极大线性无关组等价。向量组的任意两个极大线性无关组等价。
8. 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出，如果$r>s$，那么向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性相关
9. 等价的线性无关的向量组所含的向量个数相等
10. 向量组的极大线性无关组所含的向量个数称为向量组的秩
11. 向量组（1）可以由向量组（2）线性表出，则（1）的秩⩽（2）的秩
12. 矩阵的行秩等于它的列秩。矩阵的初等行列变换不改变矩阵的秩。矩阵的秩记作$rank(A)$
13. 矩阵化为阶梯形矩阵后，主元所在的列构成矩阵列向量组的一个极大线性无关组

14. 任一非零矩阵的秩等于它的行列式不为零的子式的最高阶数
15. 一个方阵的秩等于它的级数，成这个方阵为满秩矩阵
16. 线性方程组有解的充要条件：系数矩阵与增广矩阵有相同的秩
17. 系数矩阵的秩等于未知量的个数：有唯一解；系数矩阵的秩小于未知量的个数：有无穷多解
18. 线性子空间定义：K^n的一个非空子集U如果满足条件：
    1. $\gamma,\delta\in U$则$\gamma+\delta\in U$（对加法封闭）
    2. $\gamma\in U,k\in K$则$k\gamma\in U$（对乘法封闭）

    则称U是K^n的一个线性子空间，简称子空间
19. 齐次线性方程组的解集是K^n的一个子空间，称作方程组的解空间。$\{0\}$（零子空间）和K^n称为平凡的子空间，其余的子空间称为非平凡的
20. 基础解系定义：齐次线性方程组有非零解时，如果它有有限多个解：$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$满足：
    1. $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$线性无关
    2. 方程组的每一个解都可由$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$线性表出

    则称$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是该齐次线性方程组的一个基础解系
21. 解集$W=\{k_1\eta_1+\cdots+k_t\eta_t|k_i\in K,i=1,2,\cdots,t\}$的代表元素$k_1\eta_1+\cdots+k_t\eta_t$称为齐次线性方程组的通解
22. 数域K上n元齐次线性方程组的系数矩阵A的秩小于未知量个数n时，它一定有基础解系；并且它的每一个基础解系所含的解向量的个数等于$n-rank(A)$
23. 对于n元非齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$我们把$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+cdost+x_n\alpha_n=0$称为该非齐次线性方程组的导出组
24. 如果数域K上n元非齐次线性方程组有解，则它的解集U为$U=\{\gamma_0+\eta|\eta\in W\}$其中$\gamma_0$是非齐次线性方程组的一个解（称$\gamma_0$是特解），$W$是方程组导出组的解集
25. n元非齐次线性方程组有解，则解唯一的充要条件是它的导出组只有零解
26. $\gamma_0+k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$称为非齐次线性方程组的通解
27. 基的定义：设U是K^n的一个子空间，U中的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$如果满足下述两个条件：
    1. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关
    2. U中的每一个向量都可以由它们线性表出

    则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$U$的一个基
28. 设U施K^n的一个非零子空间，U的一个基所含的向量个数称为U的维数记作$\dim_K U$或简记作$\dim U$
29. 系数矩阵为A的n元齐次线性方程组有非零解时，解空间W的维数为$\dim W=n-rank(A)$
30. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是$K^n$的任意一个向量组，令$U=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s|k_1,k_2,\cdots,k_s\in K\}$我们把$U$称为由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$生成的子空间，记作$\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle$
31. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩等于由它生成的子空间的维数

四、矩阵的运算

1. 矩阵乘法：设$A=(a_{ij})_{s\times n}, B=(b_{ij})_{n\times m}$令$C=(c_{ij})_{s\times m}$其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}, i=1,2,\cdots,s, j=1,2,\cdots,m$则矩阵$C$称为矩阵$A$与$B$的乘积。要点：
   1. 左矩阵的列数=右矩阵的行数才能相乘
   2. 乘积矩阵的(i,j)元等于左矩阵的第i行与右矩阵的第j列对应元素的乘积之和
   3. 乘积矩阵的行数等于左矩阵的行数，乘积矩阵的列数等于右矩阵的列数
2. 矩阵乘法的性质：
   1. 适合结合律
   2. 适合分配律
   3. 左乘或右乘单位矩阵都等于本身
   4. $k(AB)=(kA)B=A(kB)$
   5. 如果$AB=BA$则称A与B可交换，有$(AB)^k=A^kB^k$
3. 主对角线上全是同一个数，其余全是0的n级矩阵称为数量矩阵(kI)
4. 转置关系：
   1. $(A+B)^T=A^T+B^T$
   2. $(kA)^T=kA^T$
   3. $(AB)^T=B^TA^T$
5. 对角矩阵：主对角线以外的元素全为零的方阵称为对角矩阵，形如$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$简记作$diag\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$
6. 用一个对角矩阵去左（右）乘一个矩阵A，就相当于用对角矩阵的主对角元分别去乘A的相应的行（列）
7. 两个n级上三角矩阵A和B的乘积仍为上三角矩阵，并且AB的主对角元等于A和B的相应主对角元的乘积
8. 基本矩阵：只有一个元素是1，其余元素全为零的矩阵称为基本矩阵。(i,j)元为1的基本矩阵记作E_{ij}
9. 用E_{ij}左（右）乘一个矩阵A，就相当于把A的第j行搬到第i行的位置（把A的第i列搬到第j列的位置），而乘积矩阵的其余行（列）全为0
10. 初等矩阵：由单位矩阵经过一次初等行（列）变换得到的矩阵称为初等矩阵。用初等矩阵左（右）乘一个矩阵A，就相当于对A作了一次相应的初等行（列）变换
11. 对称矩阵：$A^T=A$
12. 斜（反）对称矩阵：$A^T=-A$
13. $rank(AB)\leqslant \min\{rank(A),rank(B)\}$
14. $rank(A^TA)=rank(AA^T)=rank(A)$
15. 设A，B都是n级矩阵，则$|AB|=|A||B|$

16. Binet-Cauchy公式：设A是$s\times n$矩阵，B是$n\times s$矩阵，如果$s>n$，则$|AB|=0$；如果$s\leqslant n$，则$|AB|$等于A的所有s阶子式与B的相应子式的乘积之和，即：
    $|AB|=\sum_{1\leqslant v_1<v_2<\cdots<v_s\leqslant n} A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,s\\ v_1,v_2,\cdots,v_s\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}v_1,v_2,\cdots,v_s\\ 1,2,\cdots,s\end{pmatrix}$
17. $rank(A+B)\leqslant rank(A)+rank(B)$
18. 可逆矩阵：对于数域K上的矩阵A。如果存在数域K上的矩阵B，使得$AB=BA=I$则称A是可逆矩阵（或非奇异矩阵，将B成为A的逆矩阵，记为A^{-1}。可逆矩阵一定是方阵
19. 如果A是可逆矩阵，则$|A|\neq 0$
20. 伴随矩阵：把n级矩阵A的第i行元素的代数余子式写成第i列，组成一个矩阵
    $\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\ A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$称它为$A$的伴随矩阵，记成$A^*$
21. 数域K上n级矩阵A可逆的充要条件为$|A|\neq 0$,当A可逆时$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$（伴随矩阵法）
22. n级矩阵A可逆的充要条件是A满秩
23. 可逆矩阵的性质
    1. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
    2. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
    3. 可逆矩阵经过初等行变换化成的简化行阶梯矩阵一定是单位矩阵
    4. 矩阵A可逆的充要条件是它可以表示成一些初等矩阵的乘积
    5. 用一个可逆矩阵去左（右）乘一个矩阵不改变这个矩阵的秩
24. 初等变换法：可将(A,I)经过初等行变换变成(I,A^{-1})求矩阵的逆矩阵
25. 子矩阵：由矩阵A的若干行、若干列的交叉位置按原来顺序排成的矩阵称为A的一个子矩阵
26. 把一个矩阵A的行分成若干组，列也分成若干组，从而A被分成若干个子矩阵，把A看成是由这些子矩阵组成的，这称为矩阵的分块。这种由子矩阵组成的矩阵称为分块矩阵
27. 类似的有分块对角矩阵、分块上三角矩阵、分块初等矩阵
28. 对于两个分块矩阵，只要它们的分发满足下述条件，则它们的乘法就可以按照普通矩阵的乘法定义进行：
    1. 左矩阵的列数等于右矩阵的行数
    2. 左矩阵的每个列组所含列数等于右矩阵的相应行组所含行数
29. 分块矩阵的初等行变换：
    1. 把一个块行的左P倍（P是矩阵）加到另一个块行上
    2. 两个块行互换位置
    3. 用一个可逆矩阵左乘某一块行
30. 类似的有分块矩阵的初等列变换，这时1.3.都要右乘
31. 设A,B分别是$s\times n,n\times s$矩阵，则$\begin{vmatrix}I_n&B\\ A&I_s\end{vmatrix}=|I_s-AB|$
32. 设A,B分别是$s\times n,n\times m$矩阵，如果$AB=0$，则$rank(A)+rank(B)\leqslant n$

33. 对合矩阵：n级矩阵A满足$A^2=I$则称A是对合矩阵
34. 幂等矩阵：n级矩阵A满足$A^2=A$则称A是幂等矩阵
35. 正交矩阵：实数域上的方阵A如果满足$AA^T=I$则称A是正交矩阵（任意两列向量正交，且每列向量的模为1；组成一个标准正交基）
36. Kronecker记号（克罗内克记号）：$\delta_{ij}=\begin{cases}1,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$
37. 内积：在R^2中任给$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$规定
$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$这个二元实值函数称为$R^n$的一个内积，通常称它为$R^n$的标准内积。也可写成$(\alpha,\beta)=\alpha\beta^T$
38. 内积的性质：
    1. $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$（对称性）
    2. $(\alpha+\gamma,\beta)=(\alpha,\beta)+(\gamma,\beta)$（线性性之一）
    3. $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$（线性性之二）
    4. $(\alpha,\alpha)\geqslant 0$，等号成立当且仅当$\alpha=0$（正定性）
39. n维向量空间R^n有了标准内积后，称R^n为一个欧几里得空间
40. 欧几里得空间中由非零向量组成的向量组如果其中每两个不同的向量都正交，则称它们是正交向量组
41. 标准正交基：n个单位向量组成的正交向量组称为R^n的一个标准正交基
42. 施密特（Schmidt）正交化过程：设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是欧几里得空间$R^n$的一个线性无关的向量组，令
$\beta_1=\alpha_1,$
$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$
$\cdots$
$\beta_s=\alpha_s-\sum_{j=1}^{s-1}\frac{(\alpha_s,\beta_j)}{\beta_j,\beta_j)}\beta_j$

    则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$是正交向量组，并且与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价

五、矩阵的相抵与相似

1. 如果矩阵A可以经过一系列初等行变换与初等列变换变成矩阵B，则称A与B是相抵的（或等价）
2. 设$s\times n$矩阵A的秩为r，如果$r\neq 0$，则A相抵于矩阵$\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}$，该矩阵称为$A$的相抵标准形；如果$r=0$，则$A=0$，此时称$A$的相抵标准形是零矩阵
3. 两个$s\times n$矩阵相抵的充要条件是$rank(A)=rank(B)$
4. 设$s\times n$矩阵A的秩为$r(r\neq 0)$，则存在s级可逆矩阵P与n级可逆矩阵Q使得$A=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q$
5. 一个求A^m的方法：先求$U^{-1}AU=D$且D容易计算
6. 相似：设A与B都是数域K上n级矩阵，如果存在数域K上的一个n级可逆矩阵U，使得$U^{-1}AU=B$则称A与B是相似的，记作$A\sim B$
7. 相似的性质：
    1. 反身性

   2. 对称性
   3. 传递性
   4. 相似的矩阵行列式相同
   5. 相似的矩阵或者都可逆，或者都不可逆；当它们可逆时，它们的逆矩阵也相似
   6. 相似矩阵有相同的秩
8. 迹：n级矩阵A的主对角线上元素的和称为A的迹，记作$tr(A)$
9. 迹的性质：
   1. $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$
   2. $tr(kA)=ktr(A)$
   3. $tr(AB)=tr(BA)$
10. 相似的矩阵有相同的迹
11. 数域K上的n级矩阵A能够相似于对角矩阵的充要条件是：K^n中有n个线性无关的列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，以及$K$中有$n$个数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$使得$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2,\cdots,A\alpha_n=\lambda_n\alpha_n$这时，令$U=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$则$U^{-1}AU=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$
12. 相似标准形：如果一个n级矩阵A能够相似于对角矩阵D，则称A可对角化，把对角矩阵D称为A的相似标准形
13. 幂零矩阵：$\exists l\in N^*,A^l=0$，则A称为幂零矩阵；最小正整数l称为A的幂零指数
14. 特征值，特征向量：设A是数域K上的n级矩阵，如果K^n中有非零列向量α，使得$A\alpha=\lambda_0\alpha,\lambda_0\in K$则称$\lambda_0$是$A$的一个特征值，称$\alpha$是$A$的属于特征值$\lambda_0$的一个特征向量。零向量不是特征向量。
15. 歪个楼，我们是怎样想到用特征值、特征向量来将矩阵对角化的捏？说道对角矩阵，最简单的对角矩阵自然是I，而I又可以写成$U^{-1}U$，要得到一般的对角矩阵，可以将每一列单位向量α乘一个系数λ，而矩阵左乘一个矩阵，相当于将矩阵的每一列与这个矩阵左乘，这就诱导我们研究能否将$A\alpha$等效成不同的$\lambda\alpha$啦~吐槽教材按照逻辑顺序编排不按认知顺序编排结果让人感觉内容无中生有不知所云的行为
16. 当$k\neq 0$时，$k\alpha$也是A的属于特征值λ_0的特征向量，零向量不是特征向量
17. 特征多项式：$|\lambda I-A|$
18. λ_0是A的一个特征值当且仅当λ_0是$|\lambda I-A|=0$的一个根
19. α是A的属于特征值λ_0的一个特征向量当且仅当α是齐次线性方程组$(\lambda_0 I-A)X=0$的一个非零解
20. 特征子空间：设λ_j是A的一个特征值，将齐次线性方程组$(\lambda_j I-A)X=0$的解空间称为A的属于λ_j的特征子空间。
21. 设A是数域K上的n级矩阵，则A的特征多项式$|\lambda I-A|$是λ的n次多项式，且λ^n的系数为1，λ^{n-1}的系数为$-tr(A)$，常数项为$(-1)^n|A|$
22. 相似矩阵有相同的特征多项式，有相同的特征值（包括重数相同），特征多项式相同的矩阵不一定相似
23. 周期矩阵：方阵A如果满足$A^m=I$（m是某个正整数），则称A是周期函数，满足条件的最小的m称为A的周期

24. 数域K上n级矩阵A可对角化的充要条件是A有n个线性无关的特征向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，此时令$U=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$则有$U^{-1}AU=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$
25. n级矩阵A的属于不同特征值的特征向量是线性无关的
26. 数域K上n级矩阵A可对角化的充要条件是：A的属于不同特征值的特征子空间的维数之和等于n
27. 数域K上如果有n个不同的特征值，则A可对角化
28. 实数域上的矩阵称为实矩阵，实数域上的对称矩阵称为实对称矩阵（下面这一部分是在为二次型做铺垫）
29. 实对称矩阵的特征多项式在复数域的每一个根都是实数
30. 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的
31. 实对称矩阵一定正交相似于对角矩阵；因此，对于n级实对称矩阵A，一定能找到正交矩阵T，使得$T^{-1}AT$为对角矩阵，具体做法，只需将U斯密特正交化即可

六、二次型·矩阵的合同

1. n元二次型：$f(x_1.x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2a_{ij}x_ix_j$其中$a_{ij}=aji$
2. 把A称为二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵，$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$，令$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}$则二次型可以写成$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$
3. 非退化线性替换：令$Y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{bmatrix}$，设$C$是数域$K$上的一个$n$级可逆矩阵，则关系式$X=CY$称为变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$到变量$y_1,y_2,\cdots,y_n$的一个非退化线性替换
4. 数域K上两个n元二次型X^TAX与Y^TBY，如果存在一个非退化线性替换$X=CY$，把X^TAX变成Y^TBY，则称二次型X^TAX与Y^TBY等价，记作$X^TAX\cong Y^TBY$
5. 合同：数域K上两个n级矩阵A与B，如果存在K上的一个可逆矩阵C，使得$C^TAC=B$，则称A与B合同，记作$A\simeq B$（就是说能通过成对的初等行列变换变过去，对I只做其中的初等列变化，即可得到C，即：矩阵的成对初等行、列变换法）
6. 数域K上两个n元二次型X^TAX与Y^TBY等价当且仅当n级矩阵A与B合同
7. 标准形：如果二次型等价于一个只含平方项的二次型，则这个二次型称为它的一个标准形
8. 合同标准形：如果对称矩阵A合同与一个对角矩阵，则称这个对角矩阵是A的合同标准型
9. 能够哦找到正交矩阵T，使得经过变量替换$X=TY$，把二次型X^TAX化成一个标准形：$\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中λ是$A$的全部特征值，此替换称为正交替换
10. 还可用配方法将二次型化为标准形，此时线性替换的系数矩阵行列式可能不为0，可能是非退化的
11. 数域K上的任一对称矩阵都合同于一个对角矩阵；数域K上的任一个二次型都等价于一个只含平方项的二次型

12. 求标准型的方法：
    1. 正交替换法
    2. 配方法
    3. 矩阵的成对初等行、列变换法
13. 将X^TAX的矩阵A的秩称为二次型X^TAX的秩
14. 实数域上的二次型简称为实二次型
15. 经过适当的线性替换可将二次型变为$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$称它为$X^TAX$的规范型；其中，系数为+1的平方项个数$p$称为$X^TAX$的正惯性指数，系数为-1的平方项个数$r-p$称为$X^TAX$的负惯性指数，正惯性指数减去负惯性指数所得的差$2p-r$称为$X^TAX$的符号差
16. 惯性定理：n元实二次型X^TAX的规范型是唯一的
17. 两个n元实二次型等价⇔它们的规范型相同⇔它们的秩相等，并且正惯性指数也相等
18. 合同规范形:任一n级实对称矩阵A合同于一个主对角元只有$1,-1,0$的对角矩阵$diag\{1,1,\cdots,-1,-1,\cdots,0,0,\cdots,0\}$其中1的个数为正惯性指数，$-1$的个数为负惯性指数（分别把它们称为$A$的正惯性指数、负惯性指数），这个对角矩阵称为$A$的合同规范形
19. 两个n级实对称矩阵合同$\Longleftrightarrow$它们的秩相等，并且正惯性指数也相等
20. 正定：n元实二次型X^TAX称为正定的，如果对于R^n中任意非零列向量α都有$\alpha^TA\alpha>0$
21. n元实二次型X^TAX正定的充要条件是它的正惯性指数等于n
22. n元实二次型X^TAX正定⇔它的规范形为$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$⇔它的标准形中n个系数全大于0
23. 实对称矩阵A称为正定的如果n元实二次型X^TAX正定；正定的实对称矩阵简称为正定矩阵
24. n级实对称矩阵A是正定的⇔A的正惯性指数等于$n A\simeq I$⇔A的合同标准形中，主对角元全大于0
25. n级实对称矩阵A是正定的当且仅当A的特征值全大于0
26. 与正定矩阵合同的实对称矩阵也是正定矩阵
27. 非退化线性替换不改变实二次型的正定性
28. 正定矩阵的行列式大于0
29. 主子式：设A是一个n级矩阵，A的一个子式称为主子式，如果它的行指标与列指标相同，即它形如$A\begin{pmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_k\\i_1,i_2,\cdots,i_k\end{pmatrix}$注意这是一个行列式！
30. A的下述主子式$A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,k\\1,2,\cdots,k\end{pmatrix}$称为$A$的$k$阶顺序主子式
31. 实对称矩阵A是正定的充分必要条件为A的所有顺序主子式全大于0
32. 实二次型X^TAX是正定的充分必要条件为A的所有顺序主子式全大于0
33. 实对称矩阵A称为半正定（负定，半负定）的，如果对于R^n中任一非零列向量α都有$\alpha^TA\alpha\geqslant 0(<0,\leqslant 0)$，如果都不是，则称它为不定的
34. 类似地X^TAX也可定义半正定、负定、半负定、不定

七、线性空间的结构

1. 设S和S'是两个集合，如果存在一个法则f，使得S中的每一个元素a，都有S'中唯一确定的元素b与它对应，则称f是S到S'的一个映射，记作$f: S \to S' \ a \mapsto b$，其中$b$称为$a$在$f$下的像，$a$称为$b$在$f$下的一个原像，$a$在$f$下的像用符号$f(a)$或$fa$表示，于是映射也可记成$f(a) = b, \ a \in S$
2. 设V是一个非空集合，令$V \times V \xlongequal{def} \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in V\}$集合$V \times V$到$V$的一个映射成为$V$上的一个代数运算
3. 线性空间：设V是一个非空集合，K是一个数域。在V上定义了一种代数运算：$(\alpha, \beta) \mapsto \gamma$，叫做加法，吧$\gamma$称为$\alpha$ 和β的和记作$\gamma = \alpha + \beta$。在K与V之间定义了一种运算，即$K \times V$到V的一个映射：$(k, \alpha) \mapsto \delta$，叫做数量乘法，把$\delta$称为$k$与$\alpha$的数量乘积，记作$\delta = k\alpha$。如果加法和数量乘法满足下述8条运算法则：对任意的$\alpha, \beta, \gamma \in V$，任意的$k, l \in K$，有：
    1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$（加法交换律）
    2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
    3. V中有一个元素，记作0，它使得$\alpha + 0 = \alpha, \forall \alpha \in V$，具有这个性质的元素0称为$V$的零元素
    4. 对于$\alpha \in V$，存在$\beta \in V$，使得$\alpha + \beta = 0$，具有这个性质的元素β称为α的负元素
    5. $1\alpha = \alpha$
    6. $(kl)\alpha = k(l\alpha)$
    7. $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$
    8. $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

    则称V是数域K上的一个线性空间
4. 借助几何语言，把线性空间的元素称为向量，线性空间又可称为向量空间，数域K上的线性空间V的加法与数量乘法运算统称为线性运算
5. 数域K上所有$s \times n$矩阵组成的集合，对于矩阵的加法与数量乘法运算，成为数域K上的一个线性空间，记作$M_{s \times n}(K)$
6. 数域K上所有一元多项式组成的集合记作$K[x]$，它对于多项式的加法，以及K中元素与多项式的数量乘法，成为K上一个线性空间
7. 设W施V的任一无限子集，如果W有一个有限子集是线性相关的，则称W是线性相关的，如果W的任一有限子集都是线性无关的，则称W是线性无关的
8. 元素个数大于或等于2的向量集W线性无关当且仅当W中至少有一个向量可以有其余向量中的有限个线性表出
9. 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关，则向量$\beta$可以有$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出的充分必要条件是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$线性相关
10. 设W_1, W_2都是V的非空子集，如果W_1中的每一个向量都可以由W_2中有限多个向量线性表出，则称W_1可以由W_2线性表出，如果W_1与W_2可以互相线性表出，则称W_1与W_2是等价的
11. 设向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出，如果$r > s$，那么向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$线性相关；如果$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$线性无关，则$r \leqslant s$
12. 等价的线性无关的向量组所含向量个数相等
13. 向量组（集）的一个部分组（子集）称为一个极大线性无关组（集），如果这个部分组（子集）本身是线性无关的，但是从这个向量组（集）的其余向量（如果还有的话）中任取一个添进去，得到的新的部分组（子集）都线性无关
14. 向量组（集）与它的极大线性无关组（集）等价

15. 向量组的任意两个极大线性无关组所含向量个数相等
16. 向量组的一个极大线性无关组所含向量个数称为这个向量组的秩
17. 向量组线性无关的充要条件是它的秩等于它所含向量的个数
18. 如果向量组（1）可以由向量组（2）线性表出，则（1）的秩⩽（2）的秩
19. 等价的向量组有相同的秩
20. 基：V中的向量集S如果满足下述两个条件：
    1. 向量集S是线性无关的
    2. V中每一个向量可以由S中有限多个向量线性表出

    则称S是V的一个基
21. V称为有限维的，如果V有一个基包含有限多个向量，否则，V称为无限维的
22. 如果V是有限维的，则V的任意两个基所含向量个数相等
23. 设V是有限维的，则V的一个基所含向量的个数称为V的维数，记作$\dim_K V$
24. 如果$\dim V = n$，则V中任意$n+1$个向量都线性相关
25. 如果$\dim V = n$，则V中任意n个线性无关的向量都是V的一个基
26. 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是$V$的一个基，则$V$中的每一个向量都可以唯一地表示成$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的线性组合
27. 我们把α由基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表出的系数组成的$n$元有序数组$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$称为$\alpha$在基$\alpha_2, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的坐标，通常将它写成列向量的形式
28. 过渡矩阵：称A是基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$到$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$的过渡矩阵，如果有$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$
29. 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是$V$的一个基，且$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$，则$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$是$V$的一个基当且仅当$A$是可逆矩阵
30. 线性子空间：数域K上线性空间V的一个非空子集U如果对于V的加法与数量乘法也形成K上的线性空间，则称U是V的一个线性子空间，简称子空间
31. 数域K上线性空间V的非空子集U是V的一个子空间当且仅当U对于V的加法与数量乘法都封闭，即：
    1. $u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$
    2. $u \in U, k \in K \Rightarrow ku \in U$
32. 设U是数域K上n维线性空间V的一个子空间，则$\dim U \leqslant \dim V$
33. 设U是数域K上n维线性空间V的一个子空间，如果$\dim U = \dim V$，则$U = V$
34. 设U是数域K上n维线性空间V的一个子空间，则U的一个基可以扩充成V的一个基
35. 在数域K上的线性空间V中，如果$U = \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \rangle$则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的一个极大线性无关组是$U$的一个基，从而$\dim U = rank\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$
36. 设V_1, V_2都是数域K上线性空间V的子空间，则$V_1 \cap V_2$也是V的子空间
37. 和：设V_1, V_2都是数域K上线性空间V的子空间，则V的子集$\{\alpha_1 + \alpha_2 | \alpha_1 \in V, \alpha_2 \in V\}$是$V$的一个子空间，称它是$V_1$与$V_2$的和，记作$V_1 + V_2$

38. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$是数域$K$上线性空间$V$的两个向量组，则
$\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle+\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\rangle=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\rangle$
39. 子空间的维数公式：$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$
40. 设V_1,V_2都是数域K上n维xianxingkongjian$V$的子空间，则
$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2\Leftrightarrow V_1\cap V_2=0$
41. 直和：设V_1,V_2是数域K上线性空间V的子空间，如果V_1+V_2中每个向量α能唯一地表示为
$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$则称$V_1+V_2$是直和，记作$V_1\oplus V_2$
42. 一些等价的命题：
    1. V_1+V_2是直和
    2. V_1+V_2中零向量表法唯一
    3. $V_1\cap V_2=0$
    4. $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$
    5. V_1的一个基与V_2的一个基合起来是V_1+V_2的一个基
43. 补空间：设V_1,V_2都是线性空间V的子空间，如果它们满足：
    1. $V_1+V_2=V$
    2. V_1+V_2是直和

    则称V是V_1与V_2的直和，记作$V=V_1\oplus V_2$，此时称V_1是V_2的一个补空间
44. 设$V_1,V_2,\cdot,V_s$都是数域K上线性空间V的子空间，如果$V_1+V_2+\cdots+V_s$中每一个向量α可以唯一地表示成$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\alpha_i\in V_i,i=1,2,\cdots,s$则称$V_1+V_2+\cdots+V_s$是直和，记作$V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$或$\bigoplus_{i=1}^s V_i$
45. 互相等价的命题：
    1. $V_1+V_2+\cdots+V_s$是直和
    2. $V_1+V_2+\cdots+V_s$中零向量表法唯一
    3. $V_i\cap(\sum_{j\neq i}V_j)=0,i=1,2,\cdots s$
    4. $\dim(V_1+V_2+\cdots+V_s)=\dim V_1+\dim V_2+\cdots+\dim V_s$
    5. $V_i(i=1,2,\cdots,s)$的一个基，合起来是$V_1+V_2+\cdots+V_s$的一个基
46. 同构映射：设V与V'都是数域K上的线性空间，如果在V于V'的元素之间存在一个一一对应σ，使得对于任意$\alpha,\beta\in V,k\in K$有$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$那么称$\sigma$是$V$到$V'$的一个同构映射，简称同构。如果$V$到$V'$有一个同构映射，则称$V$与$V'$是同构的，记作$V\cong V'$
47. 同构的性质：
    1. $\sigma(0)$是V'的零元素$0'$
    2. 对于任意的$\alpha\in V$，有$\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$
    3. 对于V中任一向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$K$中任意一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，有
       $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2),\cdots+k_s\sigma(\alpha_s)$
    4. V中向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关当且仅当$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_s)$是$V'$中线性相关的向量组
    5. 如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$的一个基，则$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)$是$V'$的一个基
48. 数域K上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们的维数相同

49. 设V施数域K上n维线性空间，U是V的一个子空间。V中取一个基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\sigma$把$V$中每一个向量$\alpha$对应到它在基$\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标，令$\sigma(U)\xlongequal{def}\{\sigma(\alpha)|\alpha\in U\}$，则$\sigma(U)$是$K^n$的一个子空间，且$\dim U=\dim\sigma(U)$

八、线性映射

1. 设f是集合S到集合S'的一个映射，则把S叫做映射f的定义域，把S'叫做f的陪域，S的所有元素在f下的像组成的集合叫做f的值域或f的像，记作$f(S)$或$\mathrm{Im}f$，即$f(S)\xlongequal{\text{def}}\{f(a)|a\in S\}$
2. 单射：如果定义域S中不同的元素在映射f下的像也不同，则称f是单射
3. 满射：如果f的值域$f(S)$与陪域S'相等，则称f是满射
4. 双射：如果映射f既是单射又是满射，则称f是双射（或f是S到S'的一一对应）
5. 映射f与映射g相等，如果它们的定义域相等，陪域相等，并且对应法则相同（即$\forall x\in S$，有$f(x)=g(x)$）
6. 集合S到自身的每一个映射，通常称为S上的一个变换
7. 集合S到数集（数域K的任一非空子集）的每一个映射，通常称为S上的一个函数
8. 陪域S'中的元素b在映射f下的所有原像组成的集合称为b在f下的原像集，记作$f^{-1}(b)$
9. 恒等映射：映射$f:S\to S$如果把S中的每一个元素对应到它的自身，即$\forall x\in S$，有$f(x)=x$，则称f是恒等映射（或V上的恒等变换），记作1_S
10. 乘积：相继施行映射$g:S\to S'$和$f:S\to S''$，得到一个S到S''的映射，称为f与g的乘积（或合成），记作fg，即$(fg)(a)\xlongequal{\text{def}}f(g(a)),\forall a\in S$
11. 逆映射：设$f:S\to S'$，如果存在一个映射$g:S'\to S$，使得$fg=1_{S'},gf=1_S$则称映射f是可逆的，此时称g是f的一个逆映射。如果f是可逆的，则它的逆映射是唯一的，记作f^{-1}
12. 映射$f:S\to S'$是可逆映射的充要条件是f是双射
13. 线性空间和线性映射是线性代数研究的基本对象
14. 线性映射：设V与V'是数域K上的两个线性空间，V到V'的一个映射$\boldsymbol{A}$如果保持加法运算和数乘运算，即：$\boldsymbol{A}(\alpha+\beta)=\boldsymbol{A}(\alpha)+\boldsymbol{A}(\beta),\forall\alpha,\beta\in V,\boldsymbol{A}(k\alpha)=k\boldsymbol{A}(\alpha),\forall\alpha\in V,k\in K$则称$\boldsymbol{A}$是$V$到$V'$的一个线性映射
15. 线性变换：线性空间V到自身的线性映射通常称为V上的线性变换
16. 线性函数：数域K上的线性空间V到K的线性映射称为V上的线性函数
17. 线性空间V到V'的零映射($\boldsymbol{A}(\alpha)=0,\forall\alpha\in V$)是线性映射，记作$\mathbf{0}$
18. 线性空间V上的恒等变换1_V是V上的一个线性变换，也可记成$\boldsymbol{I}$
19. 给定$k\in K$，K上线性空间V到自身的一个映射$\boldsymbol{k}(\alpha)=k\alpha$，称为$V$上由$k$决定的数乘变换
20. σ是线性空间V到V'的一个同构映射当且仅当σ是V到V'的一个可逆线性映射
21. 如果$\boldsymbol{A}$是数域K上线性空间V到V'的线性映射，则$\boldsymbol{A}$有下述性质：
    1. $\boldsymbol{A}(0)=0'$，其中$0'$是V'的零向量
    2. $\boldsymbol{A}(-\alpha)=-\boldsymbol{A}(\alpha),\forall\alpha\in V$
    3. $\boldsymbol{A}(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1\boldsymbol{A}(\alpha_1)+\cdots+k_s\boldsymbol{A}(\alpha_s)$

4. 如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是V的一个线性相关的向量组，则$\boldsymbol{A}(\alpha_1),\cdots,\boldsymbol{A}(\alpha_s)$是$V'$的一个线性相关的向量组，但反之不成立
5. 如果V是有限维的，且$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是V的一个基，则对于V中任一向量$\alpha=a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n$有$\boldsymbol{A}(\alpha)=a_1\boldsymbol{A}(\alpha_1)+\cdots+a_n\boldsymbol{A}(\alpha_n)$

22. 设V,U,W都是数域K上的线性空间，$\boldsymbol{A}$是V到U的一个线性映射，$\boldsymbol{B}$是U到W的一个线性映射，则$\boldsymbol{BA}$是V到W的一个线性映射

23. 设$\boldsymbol{A}$是线性空间V到V'的一个线性映射，如果$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{A}^{-1}$是V'到V的一个线性映射

24. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是数域$K$上线性空间$V$到$V'$的线性映射，$k\in K$，令$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\alpha\xlongequal{\text{def}}\boldsymbol{A}\alpha+\boldsymbol{B}\alpha,\forall\alpha\in V;(k\boldsymbol{A})\alpha\xlongequal{\text{def}}k(\boldsymbol{A}\alpha),\forall\alpha\in V$则$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},k\boldsymbol{A}$都是$V$到$V'$的线性映射，称$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的和，称$k\boldsymbol{A}$是$k$与$\boldsymbol{A}$的数量乘积

25. 数域K上的线性空间V上的所有线性变换组成的集合为V上的一个线性空间，记作$\mathrm{Hom}(V,V)$，此外，$\mathrm{Hom}(V,V)$有乘法运算

26. $\boldsymbol{A}$是V上的一个线性变换$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是V的一个基，$(\boldsymbol{A}\alpha_1,\cdots,\boldsymbol{A}\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$，把$A$称为线性变换$\boldsymbol{A}$在基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的矩阵，$A$的第$\boldsymbol{j}$**列**（不是行！）是$\boldsymbol{A}\alpha_j$在基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的坐标

27. $\boldsymbol{A}$是V到V'的一个线性映射$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是V的一个基，$\eta_1,\cdots,\eta_s$是V'的一个基，$(\boldsymbol{A}\alpha_1,\cdots,\boldsymbol{A}\alpha_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)A$，把$A$称为线性映射$\boldsymbol{A}$在$V$的基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$和$V'$的基$\eta_1,\cdots,\eta_s$下的矩阵，$A$的第$j$列是$\boldsymbol{A}\alpha_j$在基$\eta_1,\cdots,\eta_n$下的坐标

28. 设V和V'分别是数域K上n维、s维线性空间，则$\mathrm{Hom}(V,V')\cong M_{s\times n}(K),\dim\mathrm{Hom}(V,V')=\dim M_{s\times n}(K)=sn=(\dim V)(\dim V')$

29. 可逆变换相关的等价命题：
    1. 线性变换$\boldsymbol{A}$可逆
    2. 存在V上的线性变换$\boldsymbol{B}$使得$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$
    3. 存在V上的线性变换$\boldsymbol{B}$使得$\sigma(\boldsymbol{A})\sigma(\boldsymbol{B})=\sigma(\boldsymbol{B})\sigma(\boldsymbol{A})=\sigma(\boldsymbol{I})$其中$\sigma:\mathrm{Hom}(V,V')\to M_{s\times n}(K),\boldsymbol{A}\mapsto A$
    4. 存在数域K上n级矩阵B使得$AB=BA=I$
    5. 矩阵A可逆

30. 设V是数域K上n维线性空间，V上的一个线性变换$\boldsymbol{A}$在V的两个基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$与$\eta_1,\cdots,\eta_n$下的矩阵分别为A,B，从基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$到基$\eta_1,\cdots,\eta_n$的过渡矩阵是S，则$B=S^{-1}AS$

31. 同一个线性变换$\boldsymbol{A}$在V的不同基下的矩阵是相似的

32. 把线性变换$\boldsymbol{A}$在V的一个基下的矩阵A的行列式、秩、迹、特征多项式、特征值称为线性变换$\boldsymbol{A}$的行列式、秩、迹、特征多项式、特征值

33. ξ是$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ_0的一个特征向量$\Leftrightarrow\xi$的坐标X是A的属于特征值λ_0的一个特征向量

34. 令$V_{\lambda_0}=\{\alpha|\boldsymbol{A}\alpha=\lambda_0\alpha,\alpha\in V\}$，称$V_{\lambda_0}$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_0$的特征子空间，其中全部非零向量就是$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda_0$的全部特征值

35. 如果V中存在一个基，使得线性变换$\boldsymbol{A}$在这个基下的矩阵是对角矩阵，则称$\boldsymbol{A}$可对角化

36. 设$\boldsymbol{A}$是数域K上n为线性空间V上的一个线性变化，有等价的命题：
    1. $\boldsymbol{A}$可对角化
    2. $\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量

   3. V中存在由$\boldsymbol{A}$的特征向量组成的一个基
   4. $\boldsymbol{A}$的属于不同特征值的特征子空间的维数之和等于n
   5. $V=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$

37. 将$\mathbf{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$称为线性变换$\boldsymbol{A}$的标准形（$\lambda_i$是$\boldsymbol{A}$的全部特征值）

九、欧几里得空间和酉空间

1. 内积：设V是实数域R上的任一线性空间。V上的一个二元函数记作(α,β)，如果它满足下述4条性质：$\forall\alpha,\beta,\gamma\in\boldsymbol{V},\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{R}$有：
   1. $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$（对称性）
   2. $(\alpha+\gamma,\beta)=(\alpha,\beta)+(\gamma,\beta)$（线性性之一）
   3. $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$（线性性之二）
   4. $(\alpha,\alpha)\geqslant 0$，等号成立当且仅当$\alpha=0$（正定性）

   则称这个二元函数(α,β)是V上的一个内积
2. 实内积空间：实数域R上的线性空间V如果给定了一个内积，则称V是一个实内积空间
3. 有限维的实内积空间V称为欧几里得空间，此时把线性空间V的维数叫做欧几里得空间V的维数
4. 向量的长度：非负实数$\sqrt{(\alpha,\alpha)}$称为向量α的长度，记作$|\alpha|$或者$||\alpha||$
5. 长度为1的向量称为单位向量，把非零向量α变为$\frac{1}{|\alpha|}\alpha$称为把α单位化
6. Cauchy-Buniakowski不等式：在实内积空间V中，对于任意向量α,β有$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha||\beta|$等号成立当且仅当$\alpha,\beta$线性相关
7. 实内积空间中，两个非零向量α,β的夹角$\langle\alpha,\beta\rangle$规定为：$\langle\alpha,\beta\rangle\xlongequal{\text{def}}\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$
8. 如果$(\alpha,\beta)=0$，则称α与β正交，记为$\alpha\perp\beta$
9. 在实内积空间V中，三角形不等式成立，即对于任意$\alpha,\beta\in V$，有$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$
10. 在实内积空间中勾股定理成立，即如果α与β正交，则$|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$
11. 向量的距离：在实内积空间V中，对于任意$\alpha,\beta\in V$规定$d(\alpha,\beta)\xlongequal{\text{def}}|\alpha-\beta|$称$d(\alpha,\beta)$是$\alpha$与$\beta$的距离
12. 在欧几里得空间V中，由两两正交的非零向量组成的向量组称为正交向量组，由两两正交的单位向量组成的向量组称为正交单位向量组
13. 在欧几里得空间V中，正交向量组一定线性无关
14. 在n为欧几里得空间V中，n个向量组成的正交向量组一定是V的一个基，称它为正交基，n个单位向量组成的正交向量组称为V的一个标准正交基
15. 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是欧几里得空间V的一个线性无关的向量组，令

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \\
&\cdots \\
\beta_s &= \alpha_s - \sum_{j=1}^{s-1}\frac{(\alpha_s, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)}\beta_j
\end{aligned}
$$

则$\beta_1, \cdots, \beta_s$是正交向量组，并且$\beta_1, \cdots, \beta_s$与$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$等价，将此过程称为施密特(Schmidt)正交化

16. n维欧几里得空间V中，向量组$\eta_1, \cdots, \eta_n$是V的一个标准正交基当且仅当$(\eta_i, \eta_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, n$，利用标准正交基容易计算向量的内积
17. 设α, β在V的标准正交基$\eta_1, \cdots, \eta_n$下的坐标分别是$X = (x_1, \cdots, x_n)^T, Y = (y_1, \cdots, y_n)^T$，则$(\alpha, \beta) = X^T Y$
18. 利用标准正交基，向量的坐标分量可以用内积表达，在标准正交基$\eta_1, \cdots, \eta_n$下向量α可以表示为$\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha, \eta_i)\eta_i$，此式称为$\alpha$的傅里叶(Fourier)展开，其中每个系数$(\alpha, \eta_i)$都称为$\alpha$的傅里叶系数
19. 欧几里得空间V中，标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵
20. n维欧几里得空间V中，设$\eta_1, \cdots, \eta_n$是V的一个标准正交基，向量组$\beta_1, \cdots, \beta_n$满足$(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\eta_1, \cdots, \eta_n)P$其中$P$是正交矩阵，则$\beta_1, \cdots, \beta_n$是$V$的一个标准正交基
21. 设V和V'都是实内积空间，如果存在V到V'的一个双射σ，使得对于任意$\alpha, \beta \in V, k \in R$有$\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta), \sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha), (\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$则称$\sigma$是实内积空间$V$到$V'$的一个同构映射，此时称$V$与$V'$是同构的，记作$V \cong V'$
22. 两个欧几里得空间同构的充要条件是它们的维数相同
23. 正交补：欧几里得空间中，设U是过原点O的一个平面，l是过原点O且与平面U垂直的直线，则l的每一个向量与平面U的每一个向量都正交，我们称l是U的正交补
24. 设V是实内积空间，S是V的一个非空子集。我们把V中与S的每一个向量都正交的所有向量组成的集合叫做S的正交补，记作$S^\perp$，即$S^\perp \xlongequal{\text{def}} \{\alpha \in V | (\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in S\}$
25. 设U是n维欧几里得空间V的一个子空间，则$V = U \oplus U^\perp$
26. V是它的任一子空间U与$U^\perp$的直和，于是V中每个向量α可以唯一地分解成$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in U, \alpha_2 \in U^\perp$，从而有$V$上的线性变换$P_U : \alpha \mapsto \alpha_1$，我们把$P_U$称为$V$在$U$上的正交投影，把$\alpha_1$称为$\alpha$在$U$上的正交投影
27. $\alpha_1 \in U$是α在U上的正交投影当且仅当$\alpha - \alpha_1 \in U^\perp$
28. 设U是欧几里得空间V的一个子空间，对于$\alpha \in V, \alpha_1 \in U$是$\alpha$在$U$上的正交投影当且仅当$d(\alpha, \alpha_1) \leqslant d(\alpha, \gamma), \forall \gamma \in U$
29. 最小二乘解：实际问题中从观测数据列出的线性方程组$AX = \beta$可能无解，其中，$A = (a_{ij})_{s \times n}, \beta = (b_1, \cdots, b_s)^T$，把$A$的行向量组记作$\gamma_1, \cdots, \gamma_s$，当$AX = \beta$无解时，由于实际问题的需要，我们想找到一个列向量$\alpha = (c_1, \cdots, c_n)^T$，使得当$x_1 = c_1, \cdots, x_n = c_n$时，下式$\sum\limits_{i=1}^{s}[(a_{i1}c_1 + \cdots + a_{in}c_n) - b_i]^2$达到最小值，这个列向量$\alpha$称为线性方程组的最小二乘解

30. 求线性方程组$AX=\beta$的最小二乘解的问题可以归结为求线性方程组$(A^TA)X=A^T\beta$
31. 正交变换：实内积空间V到自身的满射$\boldsymbol{A}$如果保持向量的内积不变，即$(\boldsymbol{A}\alpha,\boldsymbol{A}\beta)=(\alpha,\beta),\forall\alpha,\beta\in V$则称$\boldsymbol{A}$是$V$上的一个正交变换
32. 实内积空间V上的正交变换保持向量长度不变
33. 实内积空间V上的正交变换$\boldsymbol{A}$一定是线性变换
34. 实内积空间V上的正交变换$\boldsymbol{A}$一定是单射，从而$\boldsymbol{A}$一定是线性变换
35. 实内积空间V上的一个变换$\boldsymbol{A}$是正交变换当且仅当$\boldsymbol{A}$是V到自身的一个同构映射
36. 几个等价命题：
    1. n维欧几里得空间V上的线性变换$\boldsymbol{A}$是正交变换
    2. $\boldsymbol{A}$把V的标准正交基映成标准正交基
    3. $\boldsymbol{A}$在V的标准正交基下的矩阵A是正交矩阵
37. 行列式等于1的正交变换称为第一类的（或旋转），行列式等于-1的正交变换称为第二类的
38. 设V是n维欧几里得空间，η是V中的一个单位向量，设$\boldsymbol{P}$是V在$\langle\eta\rangle$上的正交投影，令$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{P}$则称$\boldsymbol{A}$为关于超平面$\langle\eta\rangle^{\perp}$的镜面反射（$n$维线性空间的任一$(n-1)$维子空间称为一个超平面）
39. 实内积空间V上的线性变换$\boldsymbol{A}$如果满足$(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\boldsymbol{A}\beta),\forall\alpha,\beta\in V$则称$\boldsymbol{A}$是对称变换
40. 酉空间：复数域上线性空间V上的一个二元函数记作(α,β)，如果它满足下述4条性质：$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V,k\in C$有
    1. $(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$（埃尔米特性）
    2. $(\alpha+\gamma,\beta)=(\alpha,\beta)+(\gamma,\beta)$（线性性之一）
    3. $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$（线性性之二）
    4. (α,α)是非负实数，$(\alpha,\alpha)=0$当且仅当$\alpha=0$（正定性）

    则称这个二元函数(α,β)是V上的一个内积，复线性空间V上如果指定了一个内积，则称V是酉空间
41. C^n中，对于任意$X=(x_1,\cdots,x_n),Y=(y_1,\cdots,y_n)$，规定$(X,Y)\xlongequal{\text{def}}x_1\overline{y_1}+\cdots+x_n\overline{y_n}$，则$(X,Y)$是$C^n$上的一个内积，这个内积称为$C^n$上的标准内积，$C^n$装备了这个标准内积，便成为了一个酉空间
42. 酉空间也具有实内积空间中相似的性质
43. 复数域上n级矩阵P如果满足$P^*P=I$则称P是酉矩阵
44. 几个等价命题：
    1. n级复矩阵P是酉矩阵
    2. $P^*P=I$
    3. P可逆，且$P^{-1}=P^*$
    4. $PP^*=I$
45. n维酉空间V中，标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是酉矩阵，反之，如果向量组$\beta_1,\cdots,\beta_n$满足$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)P$，且$P$是酉矩阵，则$\beta_1,\cdots,\beta_n$是$V$的一个标准正交基
46. 酉变换：酉空间V到自身的满射$\boldsymbol{A}$如果保持内积不变，即$(\boldsymbol{A}\alpha,\boldsymbol{A}\beta)=(\alpha,\beta),\forall\alpha,\beta\in V$则称$\boldsymbol{A}$是$V$上的一个酉变换
47. 酉空间V上的酉变换一定是线性变换，并且是单射，从而是可逆的

48. 等假命题：

    1. n维酉空间V上的线性变换$\boldsymbol{A}$是酉变换
    2. $\boldsymbol{A}$把V的标准正交基映成标准正交基
    3. $\boldsymbol{A}$在V的标准正交基下的矩阵是酉矩阵

49. n级复矩阵A如果满足$A^* = A$，则称A是埃尔米特矩阵（或者自伴矩阵）