北京大学线性代数 (B)
2021-2022 秋期末考试

整理者：林玖（这是个马甲）

January 2022

1 试题

Q1.（20 分）

设实对称矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & a \end{bmatrix}$$

已知 -5 是 A 的重数为 2 的特征值。

（1）求 a 的值

（2）求一个正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

Q2.（15 分）

令 $\alpha_1 = (1, 2, 1, 0), \alpha_2 = (-1, 1, 1, 1), \beta_1 = (2, -1, 0, 1), \beta_2 = (1, -1, 3, 7)$。

求向量 α_1, α_2 生成的子空间与由向量 β_1, β_2 生成的子空间的交的基。

Q3.（15 分）

若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$ 是正定的，求 t 的取值范围。

Q4.（10 分）

设 A, B 分别为 $s \times n, n \times s$ 矩阵，证明：$|I_s - AB| = |I_n - BA|$。

Q5.（10 分）

令 V 是域 k 上的 n 维线性空间，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的一组基。

定义 $Hom_k(V, V)$ 到 $M_{n\times n}(k)$ 的映射 σ，对于任意线性变换 $\mathcal{A} \in Hom_k(V, V)$ 都有

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}(\alpha_1) \\ \cdots \\ \mathcal{A}(\alpha_n) \end{pmatrix} = \sigma(\mathcal{A}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

证明：

(i)σ 是线性同构。

(ii) 判断对于任意 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in Hom_k(V, V)$，是否满足 $\sigma(\mathcal{AB}) = \sigma(\mathcal{A})\sigma(\mathcal{B})$，给出证明或反例。

Q6.（10 分）

设 A 为实数域中的任一个 m 行 n 列非零矩阵。

证明一定存在 m 行 m 列的正交矩阵 P 和 n 行 n 列的正交矩阵 Q，使得:

$$A = P\begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$$

其中的 D_r 为 r 行 r 列的对角矩阵，对角元都是正数，$r = rank(A)$；三个 0 表示相应大小的零矩阵。

Q7.（10 分）

设 A 是数域 k 上的 n 阶方阵，满足 $A^2 = 2A$。证明：A 可以对角化。

Q8.（10 分）

令 V 是域 k 上有限维线性空间，$dim_k(V) > 1$。

$V^* = Hom_k(V, k)$ 是 V 到 k 上的所有线性映射的集合。

对 $i = 1, 2$ 取集合 $V^* \times V$ 中的元素 (ϕ_i, w_i) 满足如下条件：$0 \neq \phi_i \in V^*, 0 \neq w_i \in V$ 且 $\phi_i(w_i) = 0$。

定义 V 上的线性变换 $\tau_i(v) = v + \phi_i(v)w_i$。

证明:

(i) τ_i 是可逆线性变换。

(ii) 存在 V 上的可逆线性变换 g 使得 $g^{-1}\tau_1 g = \tau_2$。

2 解答

写在前面

以下解答都是我个人给出的，不保证完全正确。有些解答只给出关键的思路。这套题给我的总体感觉是，后面几道题只要接触过相关背景，就是十分基础的，但没有学过的话，放到考场上确实对学线代（B）的同学不太友好。

− − − − − − − −

Q1. Solution:

（1）直接计算特征多项式是可行的，但计算量偏大。此题因为 A 总是实对称的，保证了几何重数等于代数重数，所以可以从 $(-5I - A)X = 0$ 的解空间维数去确定 a 的值，计算量小很多。一般情况下（比如 a 不在对角线上），要么利用“几何重数不超过代数重数”去控制一个范围再验算，要么老老实实算特征多项式。

$$2 = 3 - rank(-5I - A) = 3 - rank(\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -5-a \end{bmatrix}) = 3 - rank(\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-a \end{bmatrix})$$

推出 $a=-1$。

(2) 实对称矩阵的正交对角化过程是标准的。先计算特征向量，再将属于相同特征值的特征向量正交化（实对称矩阵属于不同特征值的特征向量自然正交）。再把每个特征向量归一化。写成列向量组成一个矩阵即为 Q。(注意题目的表述,Q 是在左边还是在右边，在左边还需要一个求转置（也就是求逆）的过程。)

答案不唯一，我也就不给答案了。(LaTeX 打矩阵实在不容易。)

− − − − − − − −

Q2. Solution:

一般而言，和的基是比交的基好确定的。于是可以先利用公式：

$$dim(V_1 \cap V_2) + dim(V_1 + V_2) = dim(V_1) + dim(V_2)$$

确定下所求子空间的维数，再利用几个生成向量的线性相关关系去找到具体的基。

主要的手段是利用“初等行变换不改变列向量线性相关性（以及线性表出关系）”这一性质。

$$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

记 $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = V_1, \langle \beta_1, \beta_2 \rangle = V_2$。从变换后的矩阵中得到：

$$dim(V_1) = 2, dim(V_2) = 2, dim(V_1 + V_2) = 3 \Longrightarrow dim(V_1 \cap V_2) = 1$$

从变换后的矩阵中又能得到 $\beta_2 = -\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_1$, 进而 $\alpha_1 - 4\alpha_2 = 3\beta_1 - \beta_2 = (5, -2, -3, -4)^T \in V_1 \cap V_2$，由于维数为 1，一个基就已经找到了。

答案可以差一个非零常数倍数。

− − − − − − − −

Q3. Solution:

做法有很多，都很简单，下面给几种：

法 1： 计算顺序主子式。

利用命题：“二次型正定的充分必要条件是矩阵所有顺序主子式大于 0”。

1 阶与 2 阶顺序主子式均不含 t，直接大于 0。3 阶顺序主子式计算出来为 $1 - \frac{t^2}{2}$，进而得 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$。

一般而言这是最好算的方法。

法 2： 直接可逆线性替换。

原二次型可写为 $2(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + tx_3)^2 + (1 - \frac{t^2}{2})x_3^2$，不难验证这个只有平方项的线性替换是可逆的。于是得正定的条件为 $1 - \frac{t^2}{2} > 0$，即 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$。

本题给的二次型很简单，更一般的情况计算量会大很多。

法 3： 计算特征值。

利用命题："二次型正定的充分必要条件是矩阵所有特征值大于 0"。

可行，但计算并不很简单，此题不推荐。（实际上特征值可以从法 2 给出的线性替换中看出。）

−−−−−−−−

Q4. Proof:

我记得这题证明有很多种，我给出比较简单的一种，利用分块矩阵的初等行列变换：

$$|I_s - AB| = \begin{vmatrix} I_s - AB & A \\ 0 & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_s & A \\ B & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_s & 0 \\ B & I_n - BA \end{vmatrix} = |I_n - BA|$$

这里用了两次列变换，先把第 2 列右乘 B 加到第 1 列，再把第 1 列右乘 $-A$ 加到第 2 列。

注意左乘是行变换，右乘是列变换，不要搞混了。

−−−−−−−−

Q5. Proof:

这道题差不多就是考察线性变换和它基下的矩阵的关系。不同点在于，我们定义线性变换的矩阵的时候，是"把矩阵放在右边"，是"横着定义的"：

$$(\mathcal{A}(\alpha_1), \cdots, \mathcal{A}(\alpha_n)) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)A$$

这道题是"把矩阵放在左边"，是"竖着定义的"，但我们只要对上面的式子进行一个转置：

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}(\alpha_1) \\ \cdots \\ \mathcal{A}(\alpha_n) \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

（可能有同学不太能接受直接这样转置，可以验算一下细节。）

利用基的性质，我们得到 $\sigma(\mathcal{A}) = A^T$。

（1）令 $f: Hom_k(V, V) \to M_{n\times n}(k)$ 是线性变换到它在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵的映射，令 $g: M_{n\times n}(k) \to M_{n\times n}(k)$ 为转置映射（把矩阵映为它的转置）。则 f, g 都是同构。

由于 $\sigma = g \circ f$，所以 σ 也是同构。（两个同构的复合还是同构。）

也可以按照同构的定义一步步验证。

（2）不成立。

注意到 $\sigma(\mathcal{AB}) = (AB)^T = B^T A^T = \sigma(\mathcal{B})\sigma(\mathcal{A})$，只要找两个不交换的矩阵就是反例。

注： 老师出这道题的目的可能就是为了让大家认识到，定义线性变换的矩阵时，"矩阵放在右边"是有其原因的。（虽然两种定义方式没有本质区别，只有写法上的区别，不过一般我们认为 $\sigma(\mathcal{AB}) = \sigma(\mathcal{A})\sigma(\mathcal{B})$ 的形式比 $\sigma(\mathcal{AB}) = \sigma(\mathcal{B})\sigma(\mathcal{A})$）的形式更令人舒适）。如果学了更多的代数知识，会知道前者将给出一个"环同态"；后者则给出一个"反环同态"。

— — — — — — — —

Q6. Proof:

本题的背景是奇异值分解，实际上就是证明奇异值分解 (对于实矩阵) 的存在性。

证明过程第一次接触确实不容易直接想到，大家可以自己动手写一遍。

考虑矩阵 A^TA。(AA^T 也可以，没有本质区别。)

直接给出一些结论（应该课本上都有）：A^TA 是 $n\times n$ 阶实对称半正定矩阵，且 $rank(A^TA)=rank(A)=r$。

由于实对称，可以正交相似对角化，即存在 $n\times n$ 的正交矩阵 Q，使得 $Q^TA^TAQ=H$，H 是 $n\times n$ 对角矩阵。由于 A^TA 半正定，秩为 r，知道 H 的对角元有 r 个为正，其余为零，无妨令从左上角起的前 r 个为正。

实际上 Q 已经构造出来了（差一个转置），现在考虑矩阵 Q^TA^T，这是个 $n\times m$ 的矩阵。由于 $Q^TA^T(Q^TA^T)^T=H$，可以推出 Q^TA^T 的行向量相互正交，并且除了前 r 个行向量不为 0，其余全为 0。将前 r 个行向量归一化，再扩充为 $\mathbb{R}^m$ 的一组单位正交基，得到一个 $m\times m$ 的正交矩阵，记为 P。

不难验证：$PAQ=\sqrt{H}$，这里 $\sqrt{H}$ 表示 H 的对角元开根所得的对角矩阵。

于是 $A=P^T\sqrt{H}Q^T$ 就是所求的奇异值分解。

矩阵的记号稍微调整一下就好。

— — — — — — — —

Q7. Proof:

本题考察数域上矩阵可对角化的条件。如果学习过最小多项式方面的知识的话此题是显然的，具体参见《高等代数（下册）》(丘维声著，第三版) 第 9 章第 7 节的内容。显然线性代数（B）讲不到这里，于是大部分同学只能相对麻烦的做法。

法 1:

如果直接承认幂等矩阵可对角化的话（这似乎是课本习题），此题是相当简单的。

令 $B=\frac{1}{2}A$，则 $B^2=\frac{1}{4}A^2=\frac{1}{2}A=B$，于是 B 是幂等矩阵，可以对角化，进而 $A=2B$ 可以对角化。

下面是幂等矩阵可对角化的证明梗概：

第一步，证明两个秩不等式：

(1) 设 A,B 均为 $s\times n$ 矩阵，则：$rank(A)+rank(B)\geq rank(A+B)$

此不等式的证明较简单，注意到 $A+B$ 的列空间（列向量张成的线性空间）是 A 的列空间与 B 的列空间的和的子空间即可。

(2)Sylvester 秩不等式，设 A 为 $s\times n$ 矩阵，B 为 $n\times t$ 矩阵，则 $rank(A)+rank(B)\leq n+rank(AB)$

Sylvester 秩不等式有一个利用分块矩阵初等变换的经典证明：

$$rank(A)+rank(B)=rank(\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix})\leq rank(\begin{bmatrix}A & 0\\ I_n & B\end{bmatrix})=rank(\begin{bmatrix}A & -AB\\ I_n & 0\end{bmatrix})=n+rank(AB)$$

中间做了一次第 1 列右乘 $-B$ 加到第 2 列的初等变换，最后一个等式考虑列向量组的秩就可得到。

第二步，考虑幂等矩阵 A，利用两个秩不等式得到：$rank(A)+rank(I-A)=n$，于是 $AX=0$ 与 $AX=X$ 的解空间的维数和为 n，于是 A 的特征值 0 和 1（不一定两个都是特征值，但至少一个是）的几何重数之和等于 n，于是 A 可以对角化。

（这里实际上同时证明了幂等矩阵的特征值只可能是 0 或 1，当然这个结论有更简单的证明方法就是了。）

（也可以不用幂等矩阵为媒介，直接将题目条件中的矩阵应用到两个不等式里即可。）

法 2：（最小多项式）

有 $A(A-2)=0$，故 A 的最小多项式只能为 x 或 $x-2$ 或 $x(x-2)$，每一种都是 $\mathbb{R}[x]$ 中互不相同一次因式的乘积，于是 A 可对角化。

注：其实利用最小多项式判别是否可以对角化的有关证明就是用类似法 1 中幂等矩阵可对角化的证明的拓展，当然，要复杂得多。

— — — — — — — —

Q8. Proof:

本题看着挺唬人，但第一问验证一下定义就能做出来。第二问也不太困难。个人觉得其实比 6,7 题简单（技巧性更弱）。

（1）由于对有限维线性空间上的线性变换而言，单与满是等价的，于是本题只用验证两点：τ_i 是线性的，并且是单的。以下只证 τ_1

线性：$\forall v_1,v_2\in V,k_1,k_2\in k$，有：

$$\tau_1(k_1v_1+k_2v_2)=k_1v_1+k_2v_2+\phi_1(k_1v_1+k_2v_2)w_1=k_1v_1+k_1\phi_1(v_1)w_1+k_2v_2+k_2\phi_1(v_2)w_1$$

$$=k_1\tau_1(v_1)+k_2\tau_1(v_2)$$

第二个等号利用 ϕ_1 的线性。

单：设 $\tau_1(v)=0$，即 $v+\phi_1(v)w_1=0$：

Case1：v 与 w_1 线性相关，即 $v=kw_1$，得 $v=kw_1=kw_1+\phi_1(kw_1)w_1=v+\phi_1(v)w_1=0$。

Case2：v 与 w_1 线性无关，由无关性立得 $v=0$。

综上，$ker\tau_1=0$，于是 τ_1 是单的。

（2）以下只给出了梗概，细节大家可以自己补全（其实是我写累了。。），引理给得比较强，做本题其实只用证明 (b)$\Longrightarrow$(a) 就够了。

引理：设有两个有限维线性空间 V 上的线性变换 σ_1,σ_2，则以下命题等价：

(a)σ_1,σ_2 之间差一个可逆线性变换 g（即 $g^{-1}\sigma_1 g=\sigma_2$）

(b) 存在两组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，$\beta_1,\cdots,\beta_n$，使得 σ_1 在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵与 σ_2 在 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 下的矩阵相同。

(c) 任意两组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，$\beta_1,\cdots,\beta_n$，σ_1 在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵与 σ_2 在 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 下的矩阵相似。

证明:

(a)$\Longrightarrow$(b): 取一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$，令 $\alpha_i=g(\beta_i)$ 即可。

(b)$\Longrightarrow$(c): 注意同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的。

(c)$\Longrightarrow$(b): 注意总可以取适当的基把线性变换的矩阵变成相似等价类里的任何矩阵。

(b)$\Longrightarrow$(a): 取可逆线性变换把一组基变成另一组基即可。

回到原题，我们证明 (b) 的条件即可。(如果域 k 是比较好的数域，比如 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$，那么考虑条件 (c)，用 Jordan 标准形或者有理标准形的知识做起来更快捷。)

将 w_1 扩充为 V 的一组基 $w_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则：$\phi_1(w_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(0,\phi_1(\alpha_2),\cdots,\phi_1(\alpha_n))$。

由于 $\phi_1\neq 0$，存在 α_i 使得 $\phi_1(\alpha_i)\neq 0$，无妨设为 α_2。

令 $\eta_1=w_1,\eta_2=\frac{\alpha_2}{\phi_1(\alpha_2)}$。对其余的 α_i，若 $\phi_1(\alpha_i)\neq 0$，则令 $\eta_i=\frac{\alpha_i}{\phi_1(\alpha_i)}$；若 $\phi_1(\alpha_i)=0$，则令 $\eta_i=\eta_2+\alpha_i$。

不难验证 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 构成 V 的一组基，并且 $\phi_1(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(0,1,\cdots,1)$。进而推出 τ_1 在 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵为：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$$

同样的办法可找一组基使 τ_2 的矩阵形如以上，由引理此问得证。