1. (20 分) 设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & a\end{pmatrix}$, 已知 -5 是 A 的重数为 2 的特征值。

   (1) 求 a 的值。

   (2) 求一个正交矩阵 Q, 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

2. (15 分) 令 $\alpha_1=(1,2,1,0), \alpha_2=(-1,1,1,1), \beta_1=(2,-1,0,1), \beta_2=(1,-1,3,7)$.
   求向量 α_1,α_2 生成的子空间与由向量 β_1,β_2 生成的子空间的交的基。

3. (15 分) 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的, 求 t 的取值范围。

4. (10 分) 设 A,B 分别为 $s\times n, n\times s$ 矩阵, 证明: $|I_s-AB|=|I_n-BA|$ 。

5. (10 分) 令 V 是域 k 上的 n-维线性空间, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基。
   定义 $\mathrm{Hom}_k\,(V,V)$ 到 $M_{n\times n}(k)$ 映射 σ, 对于任意线性变换 $\mathcal{A}\in \mathrm{Hom}_k\,(V,V)$ 都有

$$\begin{pmatrix}\mathcal{A}(\alpha_1)\\ \cdots\\ \mathcal{A}(\alpha_n)\end{pmatrix}=\sigma(\mathcal{A})\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}.$$

   证明:

   (i) σ 是线性同构。

   (ii) 判断对于任意 $\mathcal{A},\mathcal{B}\in \mathrm{Hom}_k\,(V,V)$ 是否满足 $\sigma(\mathcal{A}\mathcal{B})=\sigma(\mathcal{A})\sigma(\mathcal{B})$, 并给 出证明或反例。

6. (10 分) 设 A 为实数域中的任一个 m 行 n 列非零矩阵。证明一定存在 m 行 m 列 的正交矩阵 P 和 n 行 n 列的正交矩阵 Q, 使得

$$A=P\begin{bmatrix}D_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q$$

   其中的 D_r 为 r 行 r 列的对角矩阵, 对角元都是正数, $r=\mathrm{rank}\,(A)$; 三个 0 表示相应大小的零矩阵。

7. (10 分) 设 n-阶方阵 A 满足 $A^2=2A$, 证明: A 可以对角化。

8. (10 分) 令 V 是域 k 上维数大于 1 的线性空间, $V^*=\mathrm{Hom}_k\,(V,k)$ 是 V 到 k 上的所有线性映射的集合。对 $i=1,2$ 取集合 $V^*\times V$ 中的元素 (ϕ_i,w_i) 满足如下条件: $0\neq\phi_i\in V^*, 0\neq w_i\in V$ 且 $\phi_i(w_i)=0$. 定义 V 上的线性变换 $\tau_i(v)=v+\phi_i(v)w_i$. 证明:

   (i) τ_i 是可逆线性变换。

   (ii) 存在 V 上的可逆线性变换 g 使得 $g^{-1}\tau_1 g=\tau_2$ 。