Paris-Maths

Simulation aléatoire

29/01/2019

Lecturer: Chenlin GU

1 On peut faire des simulations (sans ordinateur)

Exercise 1 (Pile ou face)**.** *Supposons que l'on dispose d'une pièce équilibrée. On écrit les événements ($\{X = 1\} = \{Pile\}$, $\{X = 0\} = \{Face\}$)*

$$\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[X = 1] = \frac{1}{2},$$

et que l'on peut réaliser une suite d'expérience indépendantes identiquement distribuée $(X_i)_{i\geqslant 1}$. En utilisant les variables $(X_i)_{i\geqslant 1}$:

1. *Comment simuler un événement E_1 tel que $\mathbb{P}[E_1] = \frac{1}{4}$?*
2. *Comment simuler un événement E_2 tel que $\mathbb{P}[E_2] = \frac{1}{3}$?*
3. *Pour $n \in \mathbb{N}$, comment simuler un événement E_3 tel que $\mathbb{P}[E_3] = \frac{1}{n}$?*
4. *Comment simuler une variable uniforme sur $[0, 1]$? C'est-à-dire vérifiant pour tout $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$*
$$\mathbb{P}[U \in [a, b]] = b - a. \tag{1}$$

Exercise 2. *Réciproquement, si l'on peut simuler une suite i.i.d de variable $(U_i)_{i\geqslant 1}$ et U_i suit la loi uniforme comme eq. (1).*

1. *Comment simuler une variable aléatoire X qui suit la loi $Ber(p)$ i.e*
$$\mathbb{P}[X = 1] = 1 - \mathbb{P}[X = 0] = p. \tag{2}$$
2. *Comment simuler une variable aléatoire Y qui suit la loi discrète $(a_k)_{k\geqslant 0}$ i.e*
$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}[Y = k] = a_k.$$

Exercise 3 (Une pièce injuste)**.** ($\bigstar$) *Si l'on dispose d'une pièce non équilibrée (à priori) X tel que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p mais qu'on connait pas la paramètre p. Comment simuler la loi des variables de loi $Ber\left(\frac{1}{2}\right)$ en utilisant seulement cette pièce ?*

2 Simulation entraine estimateur

Exercise 4 (Loi de grande nombre faible et estimateur)**.** *Le but de cette question est chercher un estimateur de p dans section 1*

1. *Proposer un estimateur sans justification.*
2. *(Inégalité de Markov) Soit Y une variable aléatoire, démontrer que*

$$\forall a > 0, \mathbb{P}[|Y| > a] \leqslant \frac{1}{a}\mathbb{E}[|Y|]. \tag{3}$$

3. *Soit $Y_1, Y_2 \cdots Y_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et $\mathrm{Var}[Y_i] < \infty$, démontrer que*

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[Y_i]. \tag{4}$$

4. *Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d qui suivent la loi $Ber(p)$, et on définit un estimateur*

$$\hat{p}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i,$$

démontrer que

$$\forall \delta > 0, \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[|\hat{p}_N - p| > \delta\right] = 0. \tag{5}$$

Exercise 5 (Chercher π)**.** *Utiliser la variable uniforme U pour simuler la constante de π.*

Exercise 6. *Soit $(X_i)_{i\geqslant}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, on définit $F_X(a) = \mathbb{P}[X \leqslant a]$. Chercher un estimateur pour $F_X(a)$.*

3 IA(intelligence artificielle) est maths

Rappelle sur chaîne de Markov et le temps de mélange. Pour deux variables aléatoires discretes X, Y, on difinit la distance entre eux

$$d_{TV}(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}} |\mathbb{P}[X = k] - \mathbb{P}[Y = k]| \,.$$

Exercise 7 (Voyage de RandomSkyWalker)**.** *(★) RandomSkyWalker voyage entre trois planètes $\{A, B, C\}$ au hasard. A chaque étape, il a probabilité $\frac{1}{2}$ de rester là où il est, et probabilité $\frac{1}{4}$ d'aller sur une autre planète. Démontrer qu'au sens de distance de variation totale que RandomSkyWalker va séjourner uniformément en $\{A, B, C\}$ dans longtemps.*

4 Simulation construit un espace de probabilité

Exercise 8. *On étudie quelques propriétés élémentaires de percolation : On considère un modèle de percolation de Bernoulli de paramètre* p *dans* $\mathbb{Z}^d (d \geqslant 2)$ *et on définit*

$$\theta_n(p) = \mathbb{P}_p[0 \leftrightarrow \partial(-n,n)^d]. \tag{6}$$

1. *Démontrer* $\forall n \in \mathbb{N}, \theta_{n+1}(p) \leqslant \theta_n(p),$*. Il est donc naturel de définir*

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p[0 \leftrightarrow \infty] = \lim_{n \to \infty} \theta_{n+1}(p).$$

2. *Démontrer que* $\forall 0 \leqslant p < p' \leqslant 1$*, on a* $\theta(p) \leqslant \theta(p')$*.*

3. ($\bigstar$) *Démontrer que* $\theta(p)$ *est continue à droite comme fonction de la variable* p*.*

Exercise 9 (Bonnus)**.** $\forall d \geqslant 2$*, le modèle fait apparaitre une transition de phase, c'est-à-dire il existe* $0 < p_c < 1$ *tel que*

$$\forall 0 < p < p_c, \theta(p) = 0. \qquad \forall p_c < p < 1, \theta(p) > 0.$$

Comment faire une simulation pour illustrer ce phénomène ?

References

[1] Levin, David A., and Yuval Peres. Markov chains and mixing times. Vol. 107. American Mathematical Soc., 2017.

[2] Duminil-Copin, Hugo. "Introduction to Bernoulli percolation." (2018).