进阶书单

徐诩绫目初等研究所

日期：2023 年 1 月 16 日

摘　要

这篇文档是由徐诩绫目初等研究所的各位同心协力所完成的书单，书后的评价由推荐人自己给出，课程涵盖教育部指定的本科课程，希望对读者有所帮助。

这篇书单所述课程建议在完成初等书单相应大分类下所有课程的学习之后进行学习。

1　分析与方程

1.1　微分方程

Lawrence C.Evans：Partial Differential Equations 直接从 n 维开始讲起，足够经典。

Gilbarg&Trudinger：二阶椭圆型方程 重量级建议有一定 PDE 基础再研读，如果连 Sobolev 空间都没弄懂还是不要接触；此书讲法古典，虽然结论给的十分完整但很多证明过程都有所简略需要读者自己补全，没有一定分析功底根本还原不出来；整体偏向几何分析方向；version of Hartshorne，个人认为这本书对于学习 PDE 的意义和价值类似 Hartshorne(GTM52) 之于代数几何，十分经典应该多遍细读。两者都是写得十分扎实深厚的技术型工具书，适合那些已经有强烈学习动机，愿意下一番硬功夫的读者。至于 Hormander 则更加艰深晦涩，应该类比 EGA 了。

1.2 泛函分析

John.B.Conway：A Course in Functional Analysis=GTM96 中科院研究生教材，更偏向泛函本身，对测度论要求比较高，其实个人以为测度论如果只讲拓扑空间里的测度与积分的也不太合适。顺序是先积分后测度 (LCH 上 C_0 正线性泛函那一套) 因为纯粹所以少了一些应用。

1.3 调和分析（Fourier 分析）

Stein：Fourier Analysis Stein 的写书风格十分平易近人，他会讲解来龙去脉，非常适合自学。此书较数学分析教材中的傅立叶分析，自然定义得更加严谨、一般，材料也更多。

GTM249/250

1.4 算子代数/非交换几何（算子代数 K 与拓扑 K 理论）

Alain Valette：Introduction to the Baum-Connes Conjecture 这本书是介绍 BC 猜想的，是非交换几何的核心问题。感兴趣可以翻翻，看看就大概可以知道高指标的在做什么了。

Masoud Khalkhali：Basic Noncommutative Geometry 这本书可以算是非交换几何入门，就是讲循环上同调的。

Murphy：C*-algebra and operator theory 对初学相对比较友好的算子代数入门书。

2 代数

2.1 几何群论

Office Hours with a Geometric Group Theorist 一本几何群论的科普书，各个方面都有且没有讲得很深，可以帮助读者大体上了解几何群论这门学科的内容。

2.2 交换代数

A.Altman，S.Kleiman：A Term of Commutative Algebra MIT 教授的交换代数完全自学讲义/教材，涵盖经典 Atiyah–MacDonald，但是明显它的行文要更方便初学。习题全解（可能不是好事，但是不至于一头雾水了），习题真包含 AM 习题; 准素分解部分现代与古典讲法均有。两名教授的名字频繁出现在代数几何经典引文中，可见功力。

Micheal.Atiyah&I.G.MacDonald：Introduction to Commutative Algebra，简称 A&M 经典自不用多说，风格很形式化，虽然是薄书内容很干但思路明确，证明简洁但重要的思路都点到了，全书精华都浓缩在习题里，包括其在代数几何中的应用；当然如果要系统学习代数几何那么 atiyah 的交换代数是远远不够的。

***Hideyuki Matsumura：Commutative Ring Theory** 交换代数进阶，建议 A&M 结束再看，体系很整洁内容更深入；另一方面因为交换代数在代数几何里大量使用，所以还是应该和代数几何配合着一起学比较舒服，比如配合 GTM52 一起学，这本书就是很好的选择。

D.Eisenbud：Commutative Algebra With a View Towards Algebraic Geometry =GTM150 交换代数字典，大板砖。

2.3 范畴论

Emily Riehl：Category Theory in Context 相对比较基础的范畴论入门教材。看了这本书之后你会知道沿着米田嵌入的 Kan extension 很常用；gtm5 属于比较进阶的内容了，主要问题是太老了，里面用的那些概念现在都不用了，像 universal arrow 之类的。

Tom Leinster：Basic Category Theory Leinster 是把范畴论最基本的几个题目，比如 adjoin，representable，limit 都讲到了，讲得很细。我想可能专门做范畴方向才会需要这么细。毕竟大多方向，也只是因为同调代数的需要而作为一个语言 (当然 Riehl 后面也有很多内容，比如 monads、Kan extension 等等) 不过我个人其实挺喜欢这种讲法的，有种真正在学范畴论的感觉。

****Tom Leinster：Higher Operads，Higher Categories** 如果想系统学一下 n-category 可以看看这本书，其实一般范畴论最高就到 2-category，主要是更高阶的即使是专门做范畴论的方向一般也用不到。如果好奇对于 general 的 n-categories 有哪些重要的结论。毕竟范畴论光看构造总感觉看不出什么道道，n-category 你光看他的具体结构也是很 explicit 的。想了解一下现在研究领域里有哪些比较重要的拿 n-category theory 去做的事可以看看这本经典的书，里面例子也不少

https://arxiv.org/abs/math/0305049

****John.C.Baez：An Introduction to n-Categories** 如果想要更简明的介绍可以看这本

https://arxiv.org/abs/q-alg/9705009

****Cisinski：Higher Category and Higher Homotopy Theory** 如果对高阶范畴/无穷范畴感兴趣可以读一读，相比于 Lurie 可能更友好一些。

****Jacob Lurie：Higher Topos Theory**

Jacob Lurie：Higher Algebra

2.4 同调代数

M.Osborne：Basic Homological Algebra [GTM196] 作者声称他要对标 J.Rotman 的著名同调代数板砖 Introduction to Homological Algebra，实际个人阅读体验比标杆还好一点，因为始终围绕主线讲投射内射平坦、导出函子与范畴初步，没有像 Rotman 一样多加两章特殊的环与模（个人认为有点偏离同调代数主线），也没有后面的谱序列等内容，但是行文更亲切细致不烦躁。

***Charles A.Weibel：An Introduction to Homological Algebra** 比上面两本都要全面，谱序列、群上同调、单纯对象、导出范畴都有，正文中留习题可能会拖慢阅读进度。如果承认部分结果可以用此书学上面提到的各个专题。当然自学时个人不喜欢这书的写法，大概因为本人菜鸡。

ps.Weibel 作为同调代数来说确实是不错的，只是他没有讲层上同调。

Luc Illusie：Topics in Algebraic Geometry，Chapter 1 Homological Algebra 简洁明快地讲了导出范畴与几个常用导出函子，可以用于参考。

***Hartshorne：Algebraic Geometry=GTM52** 如果想学代数几何，那么所需要的同调代数看 Hartshorne 第三章差不多足够了，基本上自包含了。第三章的同调代数基本上就是把定义定理搬过去。不过没有讲谱序列，这方面具体的就要去看看同调代数。谱序列可以看 user's guide（比较长）还有 Weibel 的第六章，用 Stacks project 也未尝不可（lww 第二卷也有讲谱序列），但第一手应用肯定还是代数拓扑（谱序列还是写几个具体计算例子比较好，所以个人一直很倾向 Bott&Tu:GTM82）具体看自己的喜好和需求选择我这里没有试图在 abel 范畴上走 cohomology 的程序，但是首先在 sheaf 上走，所以自然就注意到一些关键的地方。

G.Harder：Lecture on Algebraic Geometry I 看起来是代数几何，但这一本主线是层上同调，前四章讲述了基本同调代数、群上同调、层上同调、层语言的代数拓扑。作者不求事无巨细，但求希望能直击核心，所以行文可能会略粗糙，不过常用的层

上同调工具与经典定理基本讲全了。第五章可以是黎曼曲面的学习材料。

2.5 代数表示论

Pavel etingof：Introduction to Representation Theory 快速全面，习题经典，当然不是特别容易做（大概因为本人菜）。

2.6 代数几何

S.Bosch：Algebraic Geometry and Commutative Algebra 这明显比大名鼎鼎的 GTM52 易读，前半交换代数，后半代数几何概形语言，比较容易上手。

Q.Liu：Algebraic Geometry and Arithmetic Curves 算术向的代数几何入门教材，相比普通代数几何会多一些数论常见的性质。

R.Vakil：The Rising Sea – Foundation of Algebraic Geometry Stanford MATH216 代数几何讲义，习题很多也很重要（多是重要例子与证明过程中的重要步骤，多半有路线提示，不太会一头雾水）讲述全面细致，讲义自身逻辑封闭，把 GTM52 的 2、3 两章的材料重新编排并加入一些经典结论。花费一年的心血与泪水吃透本讲义之后你就可以接触更高阶代数几何内容了（作者前言如是说）。

***Torsten Wedhorn&Ulrich Görtz：Algebraic Geometry I，Schemes with Examples and Exercises** 讲 scheme 最好的书应该是 W&G，这本书所有的结论都很一般而且具体例子不多，基本上集中在最后一章，不过例子都蛮有意思，开头很多节都是围绕一个内容层层深入的。另外他的习题给的很多完全做不完。最大的一个缺点就是讲的有些□嗦了（□嗦指把该留作习题的东西都给证明），除此之外各方面都写的很好。个人认为可以把 Wedhorn&G ortz 当词典，Vakil 当语法。

Miles Reid：Undergraduate algebraic geometry 适合本科生入门，如果不熟悉交换代数和代数几何，可以先读 Reid 的 undergraduate 版本的 CA 和 AG。另外 Kunz 写的

交换代数和代数几何也可以考虑。

***Hartshorne：AG=GTM52** 放在最后可能因为确实不是很适合初学。这本书不是传统的代数几何教材，总体上走的还是 EGA 的路线。在 EGA 系列横空出世之后极度缺少 (其实根本没有) 英文教材，后来因为解释 EGA 的需要，出版年代久远而闻名于世的代数几何圣经。个人只看过前三章，习题很不友善，真要刷做做二三章就好；缺点就是抽象废话过多，感觉不是很几何，建议和其他 AG 教材配合使用。

3 几何与拓扑

3.1 微分流形

Loring Tu：An Introduction to Manifolds 小白友好型，学习流形一定要用一本这样的书，数学分析里的流形都是欧氏空间中的曲面，其记号和处理方法因为欧氏空间的特殊性而变得有些混乱。这种流形导论的书一般都是巨细无遗、十分严谨的，帮助初学者理清概念。我个人认为流形的学习就是要把流形和坐标系分开，最后再拍在一起，这种书就是在完成第一个分开的阶段。它从欧氏空间版本的开始讲，然后引入流形，接着切空间、向量场、李群、微分形式、积分学、上同调，内容不算深刻，但是都讲透了。当然也有人会说这样讲太平淡（肤浅），似乎学了很多但是什么也没学到。

Frank W.Warner：Founations of Differential Manifords and Lie Gruops = GTM94 文风比较硬，内容精简，需要自己 check 的东西很多，相应地东西也深刻一些，能讲到层上同调及 Hodge 理论初步。

John.M.Lee：Introduction to Smooth Manifolds=GTM218 内容比较丰富。听到一个说法，这就是个睡前读物，每天三十页，细节 check 一轮，读完就够你用了。

3.2 黎曼几何

***Peter Petersen：Riemann Geometry** 可以作为工具书非常全面，讲解条理性/计算丰富性兼而有之，不过作为入门有点劝退。

Do Carmo 相对友善适合入门，选取的内容是黎曼几何中更为核心的内容，可以满足基本需求，只是有些顺序比较奇怪。可以配合 John M.Lee 的黎曼流形导论的一起使用（不过这里要注意 John M.Lee 的黎曼流形导论默认你对他的光滑流形导论极其熟悉，其中很多夹在正文中的 argument 和 exercise 都需要你有很好的流形基础），以 Do Carmo 为主。John M.Lee 写书细节极其详尽，而 Do Carmo 有部分地方省略了细节大部分都能在 John M.Lee 上找到，补充大量 Do Carmo 上没有的内容。

Chern 或许也可以值得考虑，很多例子很具体很有用，习题也很好。不过值得注意的是虽然已经是现代风格了但仍然没讲多少黎曼几何；其次就是初学的话语言上可能有些不熟悉。

3.3 代数拓扑

Hatcher：Algebraic Topology Hatcher 在这本书中给出了非常多的几何直观，并以此引入代数拓扑的各种工具，被称为代数拓扑的“圣经”。整体上是走的几何拓扑的风格，优点是全面，代数拓扑里该给你的结论/例子全都给你了；有人会觉得这本书不现代太几何了，也有人觉得不重要，几何性更重要；缺点是行文太冗繁，typo 比较多且没有范畴，如果书写的比较抽象/范畴化的话，错一个符号很容易看出来；但 Hatcher 这种大量文字/描述性说明又和符号混杂在一起的话，这时他再 typo 就可能看得非常累，因为你不知道是到底自己理解有问题还是他写错了，这也是这本书一直被人诟病的地方。

Bott&Tu：Differential Forms in Algebraic Topology=GTM82 很经典的书，从微分形式的角度速成。毕竟你只需要看同调群的一些计算，那么从微分形式出发能快速给

你直观感觉和一些计算方法，而后面碰到的同调群大多流形上面的同调群，直接看微分形式的版本基本不会带来什么问题。很适合非代数拓扑方向的用来了解上同调和示性类之类的。

***John Milnor 示性类** milnor 写的书和文章共同特点就是清楚。建议和 Milnor 那篇经典七维怪球论文配合一起使用。这本书相当于那篇文章的扩展版，而这篇文章就可以作为那本书的习题，所以联系很紧密。如果你看了那本书对应的部分，再看这篇文章，就会觉得都是一系列的。不过我当初看 milnor 示性类被他的叙述顺序击杀，虽然之后通过别的资料暂时稳住了。我不太能理解他第八章证明存在性使用了一个构造很复杂的叫 steenrod square 的东西。我本来以为这个概念在书里没有介绍，结果发现原来在原来附录里有，不过后来查了 Haynes Miller 的 note 绕开了这个构造也算 ok 了，但整个学习过程很曲折。正常来说 steenrod operator 可以接受它存在就好了，把它当做一个 black box 使用，会用即可。第一次读 Milnor 的时候我感觉也啥都没记住，有时间和精力最好还是要读几遍。

ps. 如果实在嫌这本太繁，或许 Peter.May 的 More concise course in algebraic topology 是个不错的选择，足够友善，可以配合 Hatcher 一起使用。

***Milnor&Stasheff：Characteristic Classes** 从代数拓扑的角度讲怎么构造示性类。建议看之前先了解一下 Steenrod operation，否则 Stiefel-Whitney classes 的构造就会完全看不懂。其次注意一下这本书篇幅不长相应的不会很全面，只讲了向量丛的示性类理论，没有涉及一般的纤维丛，即一般 Lie 群的 principal bundles。我们这学期讨论班讲过相关的内容，使我明白一件事：我们能在有限时间内讲完的内容是有限的。

4 数论

4.1 解析数论

Apostol：Introduction to Analytic Number Theory 这本书主要讲的是初等数论和一些简单的解析数论，如果要学初等数论的话也可以看这本书。

4.2 代数数论/类域论

Borevich，Shafarevich：Number Theory 这本书的代数数论讲法和其他代数数论的书不太一样，但是实际上是等价地把代数数论基本的东西都讲了，而且写的特别清楚（除了第五章最后几节有点跳），缺点是你和其他学过代数数论的人讨论的时候会感觉你好像没学过代数数论一样。

Neukirch：Algebraic Number Theory 这本书中的结果都极具一般性，所以也造成了过于抽象、艰深晦涩的问题。它的内容极其丰富，从最基本的代数数论的几个定理开始，一直讲到了赋值理论、Riemann-Roch 理论、类域论和 L 函数。另外，年代导致符号系统会有点别扭。

James Milne：Algebraic Number Theory Milne 讲义一贯好读，选材核心，篇幅不长没有板砖带来的压力，不贪多同时想快速入门的可以学这个。

A.Sutherland：MIT18.785 讲义 全面透彻现代。

Kazuya Kato：Number Theory 1 & 2

David Harari：Galois Cohomology and Class Field Theory 1/3 为群上同调以至 Galois 上同调，2/3 为上同调语言的类域论，讲法比较现代，核心的类域论结论都证过。很多取材于 Serre 的局部域书。比较容易读。

4.3 椭圆曲线和模形式

Silverman：The Arithmetic of Elliptic Curves [GTM106]基本是椭圆曲线必读读物。Silverman 写的书多半都读着很爽。前置虽然有 GTM52，但是默认之后就可以读。

J.Tate，J.Silverman：Rational Points on Elliptic Curves 是 GTM106 的初等版本，如果不想一头扎进理论则可以用这本书看看有理数域上的基本情形。初等但是内容足够。

J.Milne：Elliptic Curves 是当年 Milne 讲课的讲义，直通 Fermat 大定理的证明思想（但是其实你要接受一些没解释的名词），写得比 GTM106 随意，但是相对更" 轻"，当个科普入门其实挺好，GTM106 技术细节更全面一点。

Anton Deitmar：Automorphic Forms 标题很大，但是其实是挺方便入手的模形式以至自守形式的教材。他甚至会详细给你讲 p 进有理数域、加元环 [Adele]、理元群 [Idele]，然后讲了 Tate Thesis 的简单情形，最后才真正开始讲自守形式。此书可以用于入门模形式，之后就可以读模形式等主题的进阶教材。