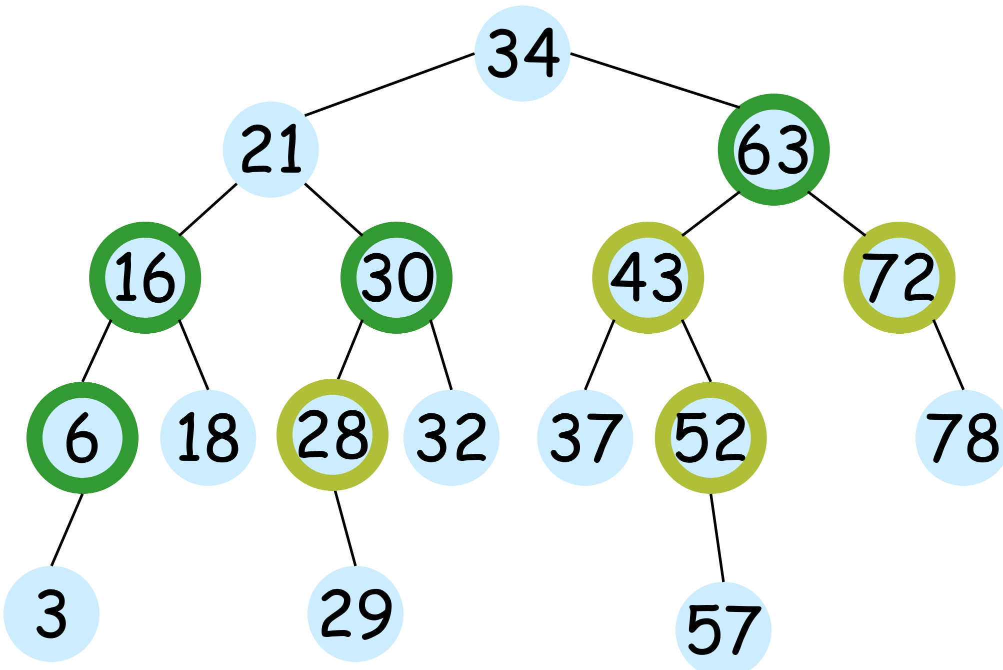
Balanceo en altura

- Un árbol se dice balanceado en altura si las alturas de los subárboles izquierdo y derecho de cada nodo difieren en a lo sumo una unidad
- Los árboles balanceados en altura se llaman árboles *AVL*
  - Por sus creadores Adel'son-Vel'skii & Landis

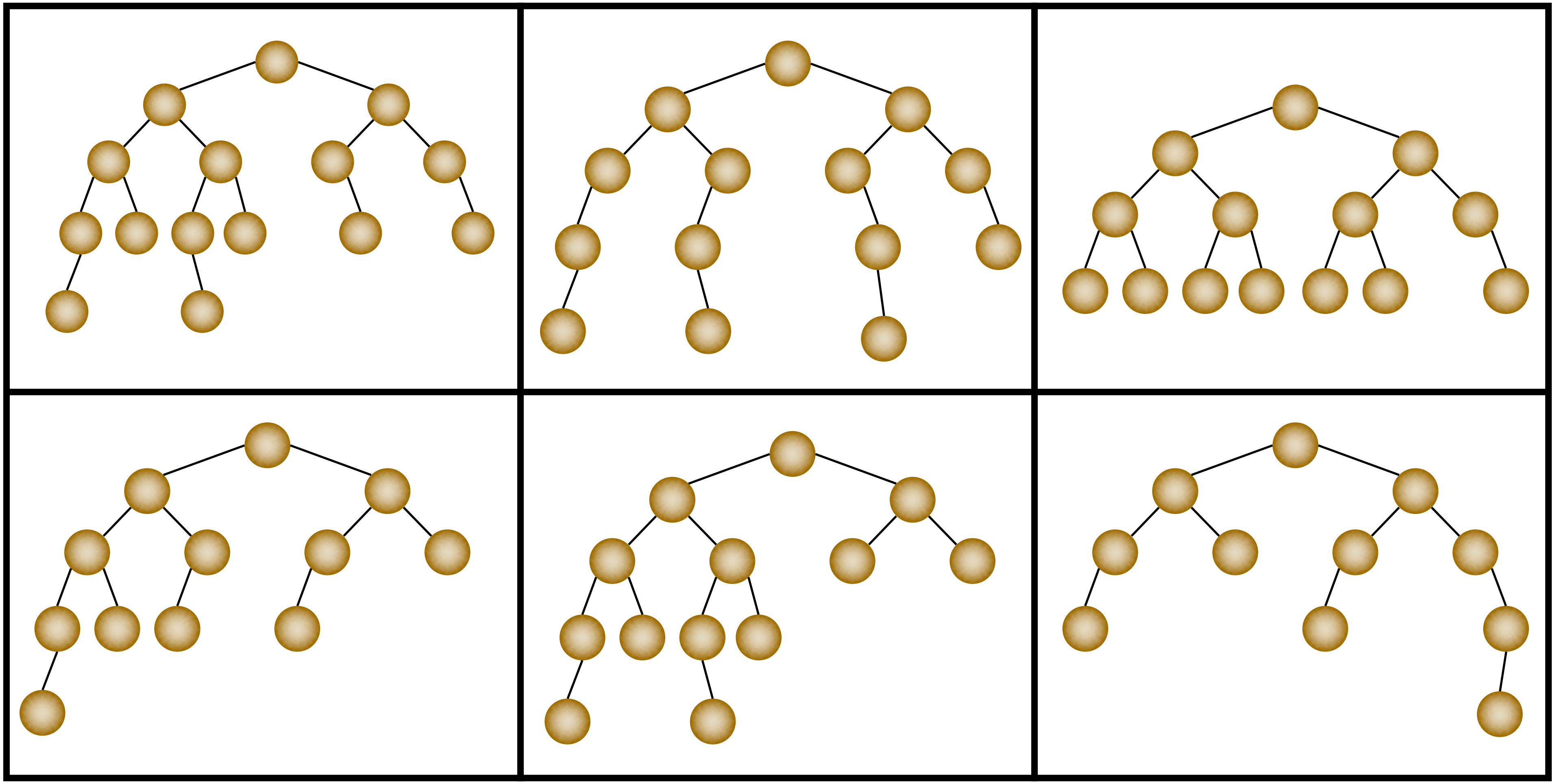
Factor de balanceo



factor de balanceo (FDB):
altura subárbol Der –
altura subárbol Izq

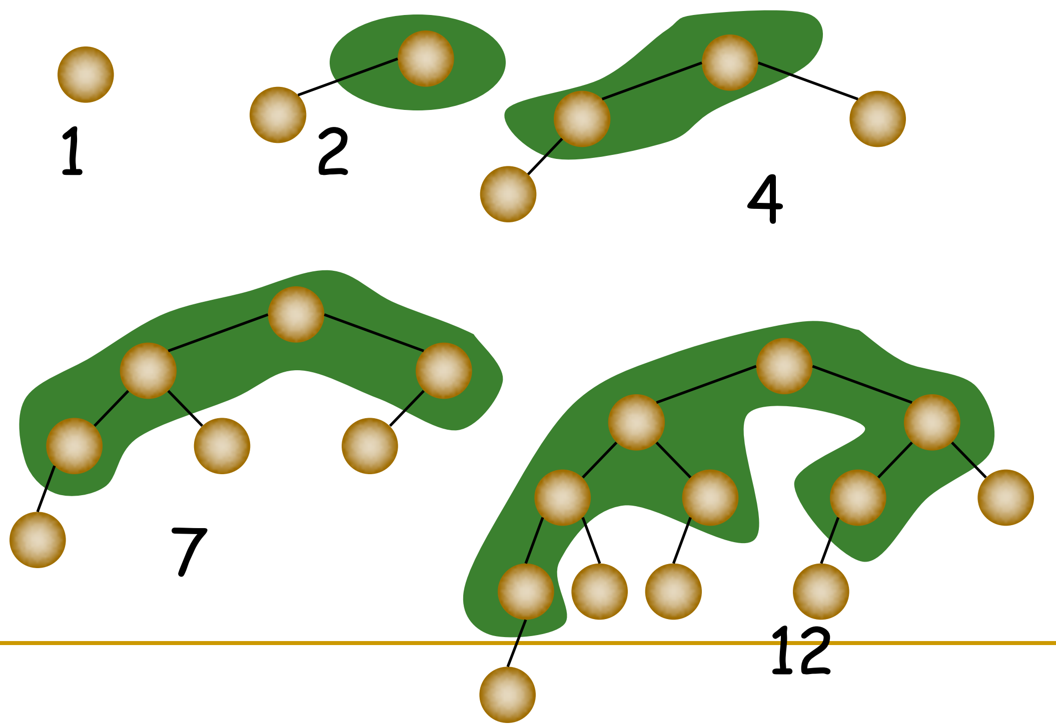
en un árbol balanceado en altura
|FDB| ≤ 1, para cada nodo

Árboles AVL?



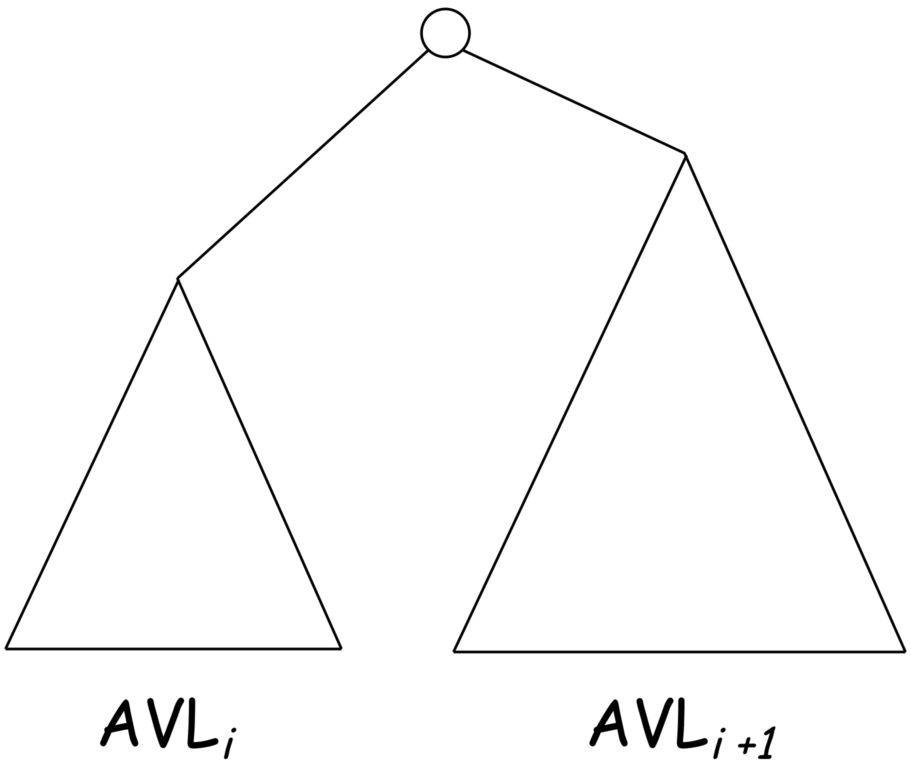
árboles de Fibonacci

- árboles AVL con el mínimo numero de nodos (dada la altura)



h	F_h	AVL_h
0	0	0
1	1	1
2	1	2
3	2	4
4	3	7
5	5	12
6	8	20
7	13	33

árboles de Fibonacci/2



árboles de Fibonacci

árboles balanceados de altura *i* con mínimo numero de nodos

AVL_{i+2}

<u>Relaciones</u>

$AVL_{i+2} = AVL_i + AVL_{i+1} + 1$

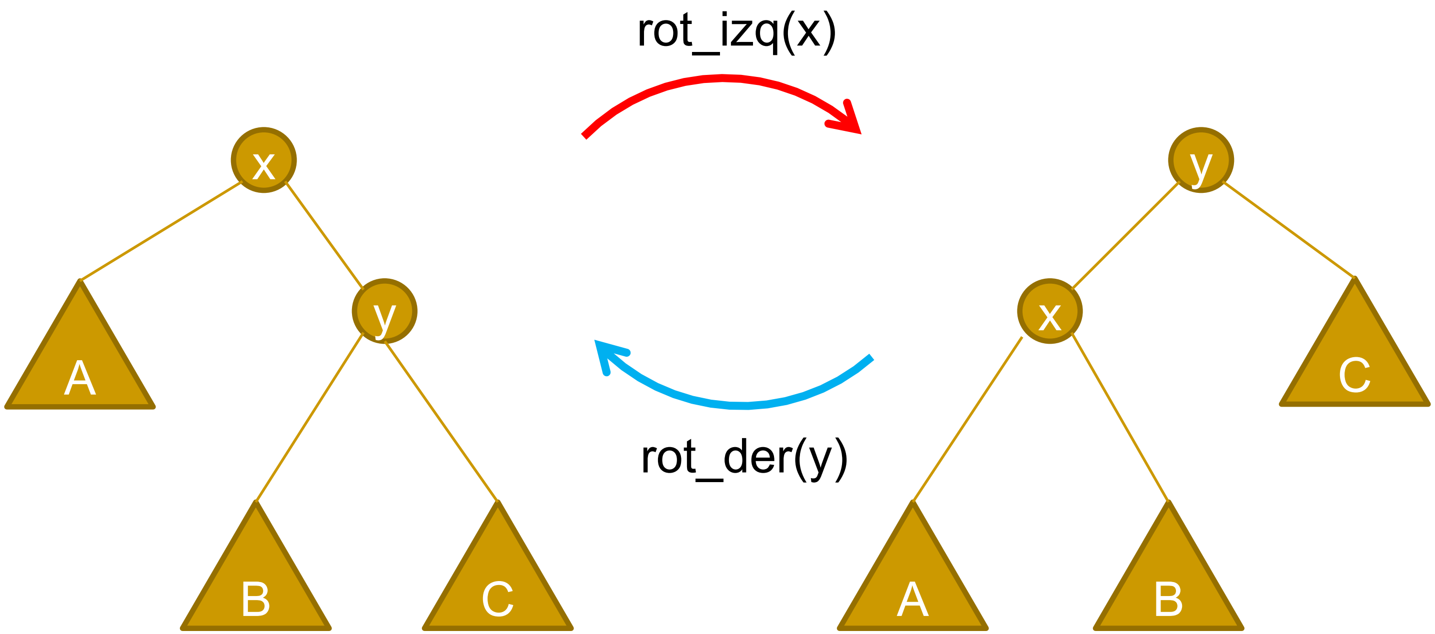
$F_{i+2} = F_i + F_{i+1}$

$AVL_i = F_{i+2} - 1$

árboles de Fibonacci/3

- un árbol de Fibonacci tiene todos los factores de balanceo de sus nodos internos ± 1
  - Es el árbol balanceado más cercano a la condición de no-balanceo
- un árbol de Fibonacci con *n* nodos tiene altura < 1.44 lg(*n* +2) – 0.328
  - demostrado por Adel'son-Vel'skii & Landis
  - ⇒ un AVL de *n* nodos tiene altura $\Theta(\lg n)$

rotaciones



AxByC

AxByC

inserción en AVL

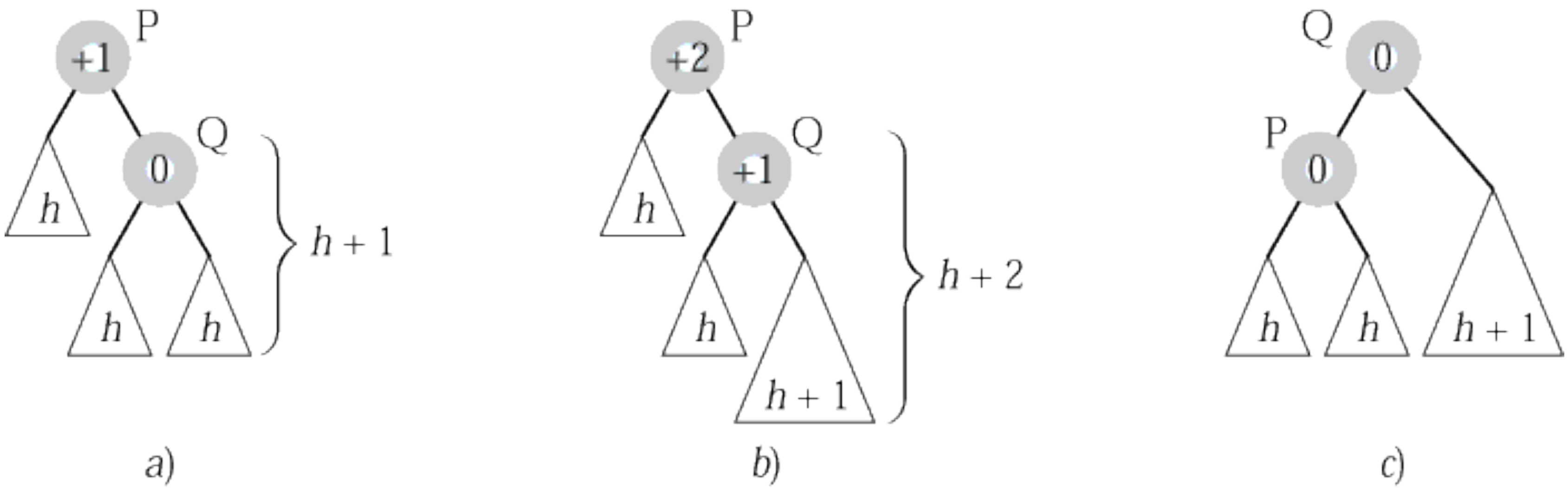
1. Insertar el nuevo nodo como en un ABB “clásico”
   - el nuevo nodo es una hoja
2. Recalcular los factores de balanceo que cambiaron por la inserción
   - sólo en la rama en la que ocurrió la inserción (los otros factores no pueden cambiar!), de abajo hacia arriba
3. Si en la rama aparece un factor de balanceo de ±2 hay que rebalancear
   - A través de “rotaciones”

rotaciones en los AVL

casos posibles

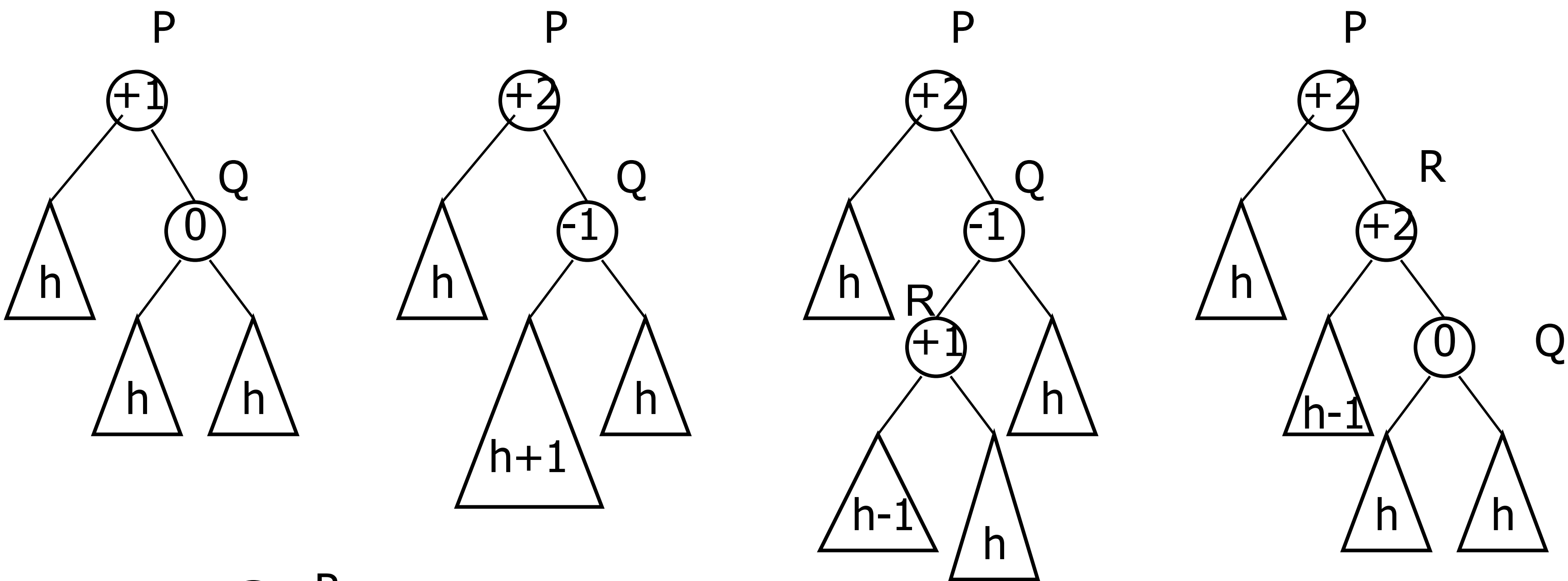
- RR: inserción en el subárbol derecho de un hijo derecho (del nodo que se desbalancea)
- LR: inserción en el subárbol izquierdo de un hijo derecho (del nodo que se desbalancea)
- RL: inserción en el subárbol derecho de un hijo izquierdo (del nodo que se desbalancea)
- LL: inserción en el subárbol izquierdo de un hijo izquierdo (del nodo que se desbalancea)

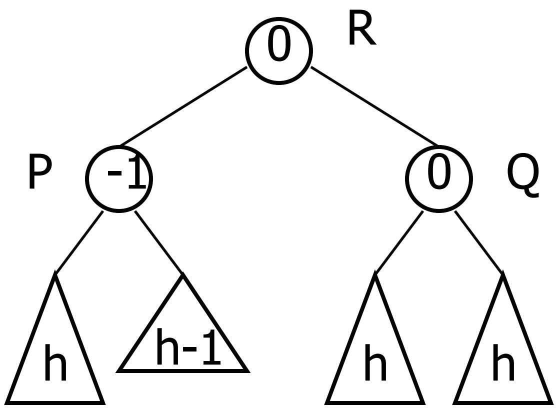
rotación simple (caso RR)



- La inserción no influye en los antepasados de P porque luego de la rotación recuperan su factor de balanceo anterior

rotación doble (caso LR)





- la inserción no influye en los antepasados de P
- ¿Cómo sería el subcaso en que el FDB de R es -1?

inserción en los AVL/costo

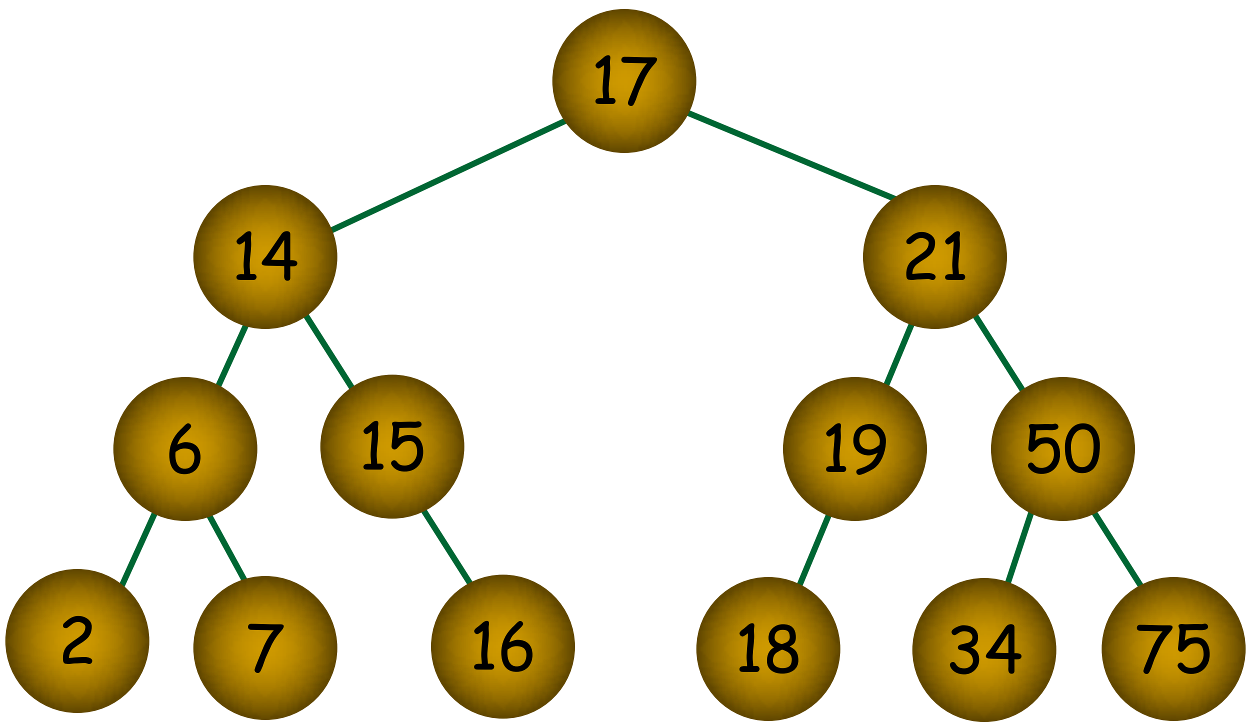
- paso 1: proporcional a la altura del árbol $\Theta(\lg n)$
- paso 2: proporcional a la altura del árbol $\Theta(\lg n)$
- paso 3: $O(1)$ (se hace una o dos rotaciones por inserción)

En total: $\Theta(\lg n)$

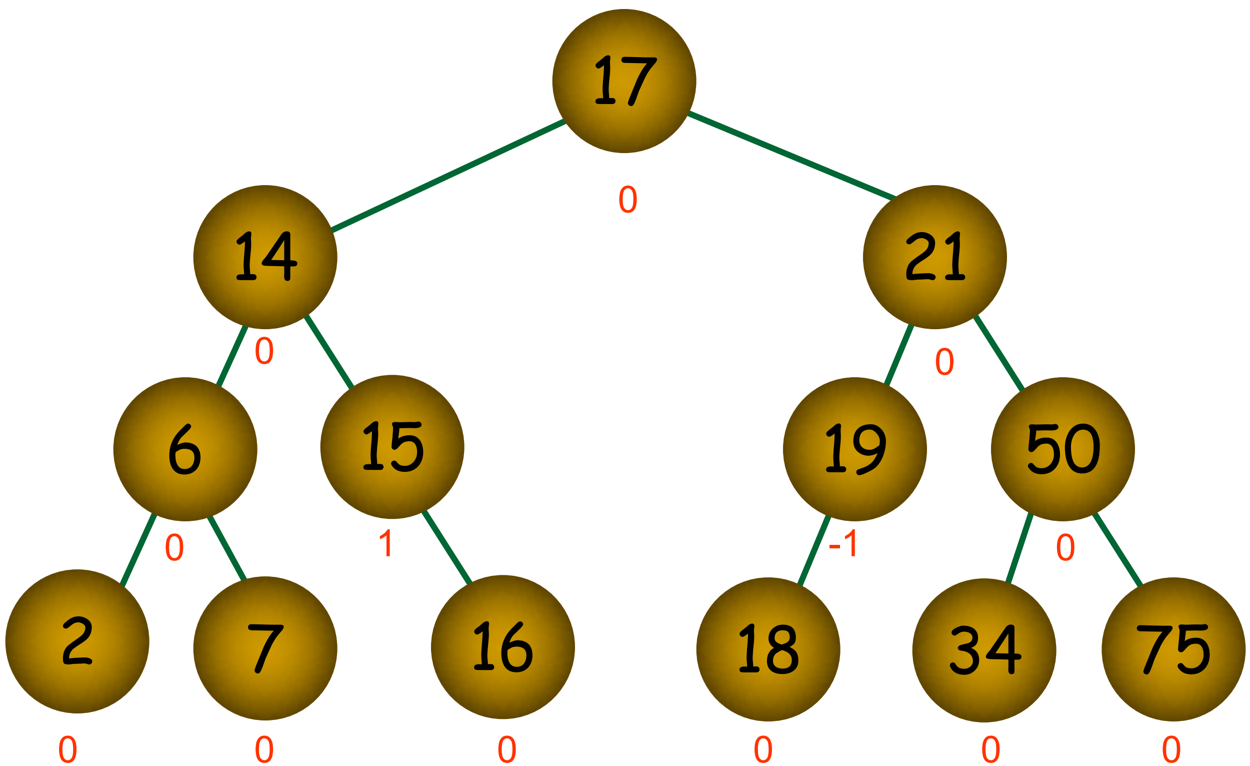
borrado en los AVL

1. Borrar el nodo como en un ABB "clásico"
2. recalcular los factores de balanceo que cambiaron por el borrado
   - sólo en la rama en que ocurrió el borrado, de abajo hacia arriba
3. <u>para cada nodo</u> con factor de balanceo ± 2 hay que hacer una rotación simple o doble
   - O(lg *n)* rotaciones en el caso peor

borrado en los AVL

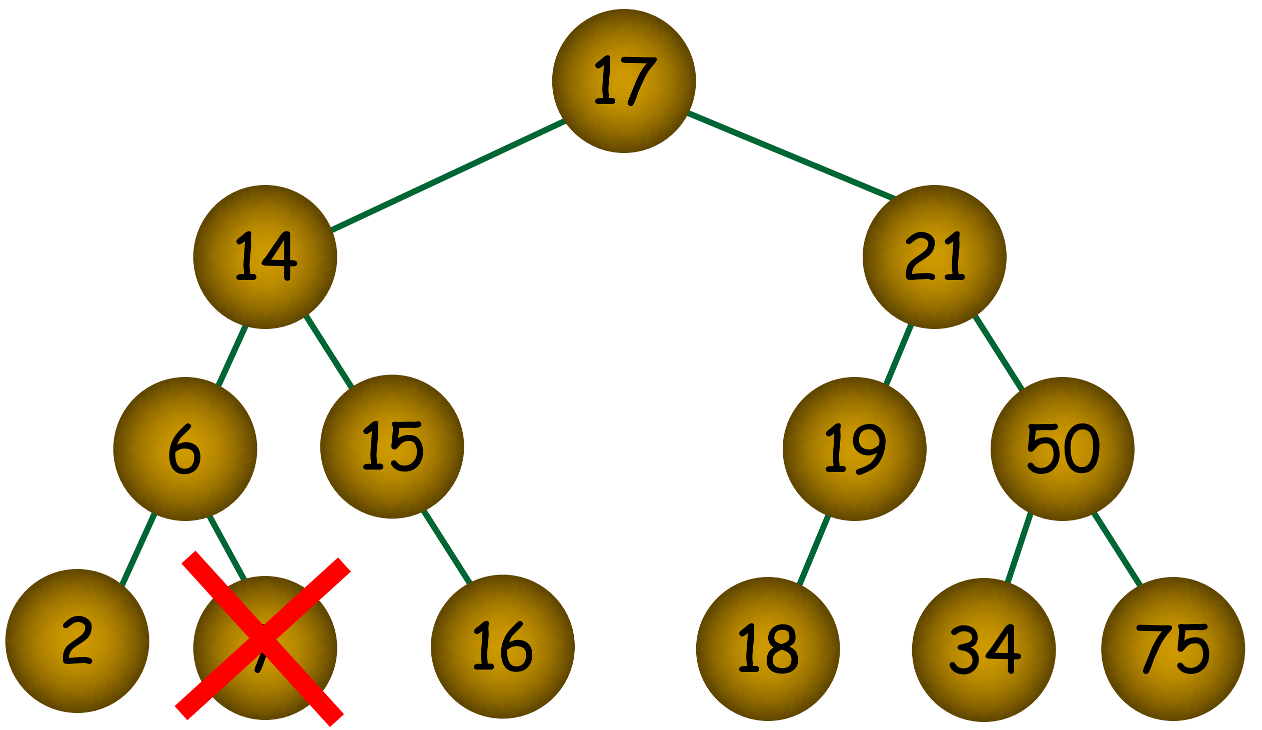


borrado en los AVL

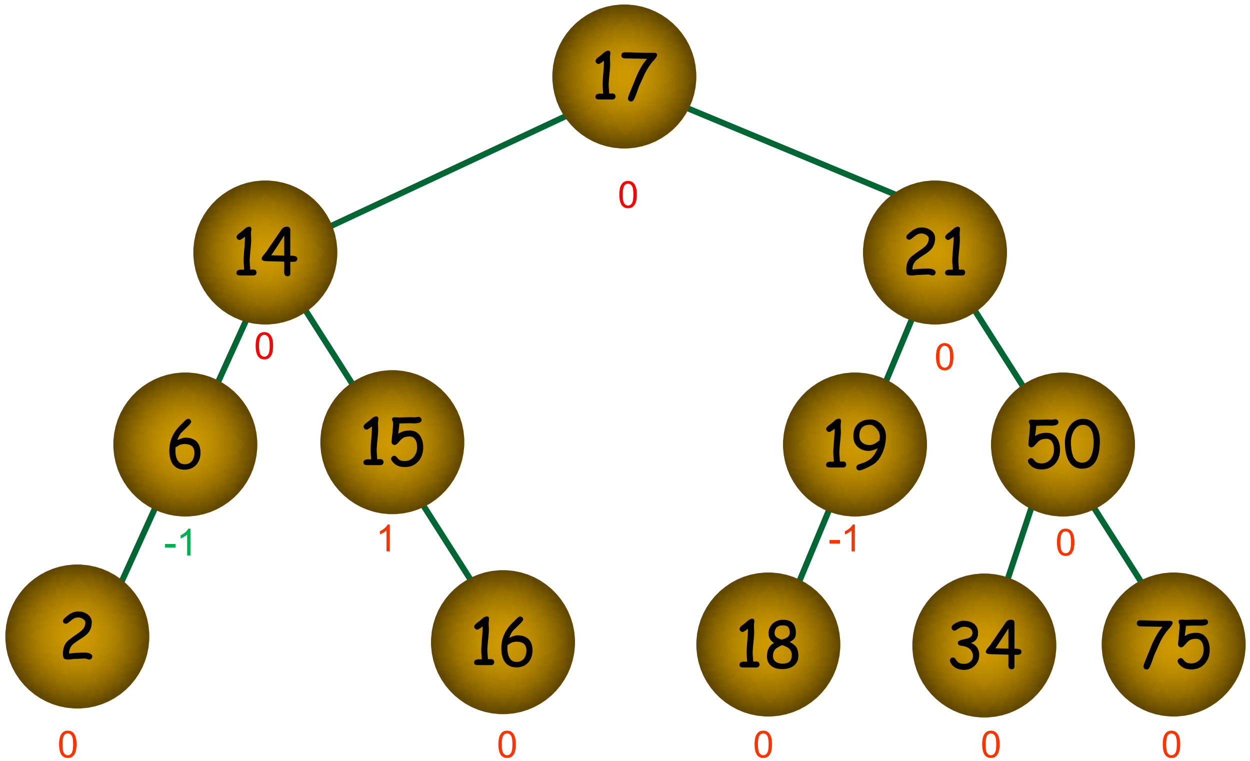


borrado en los AVL

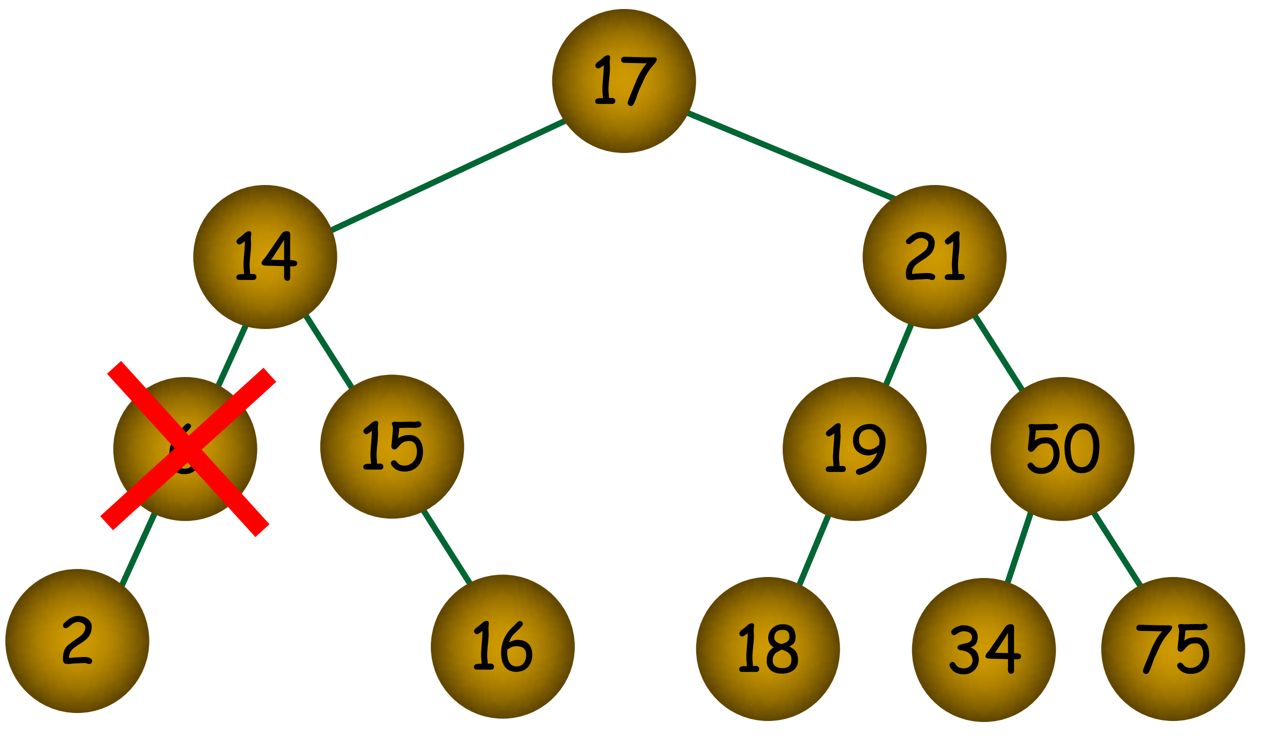
Borrar 7



borrado en los AVL

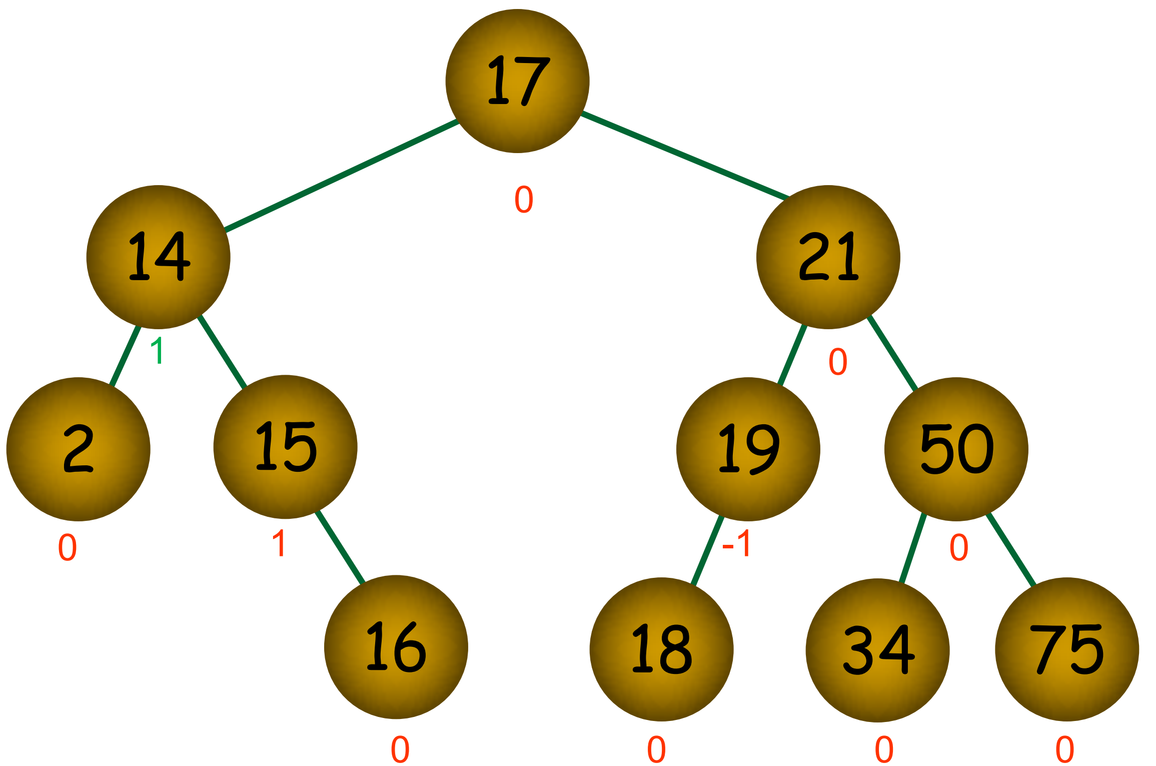


borrado en los AVL



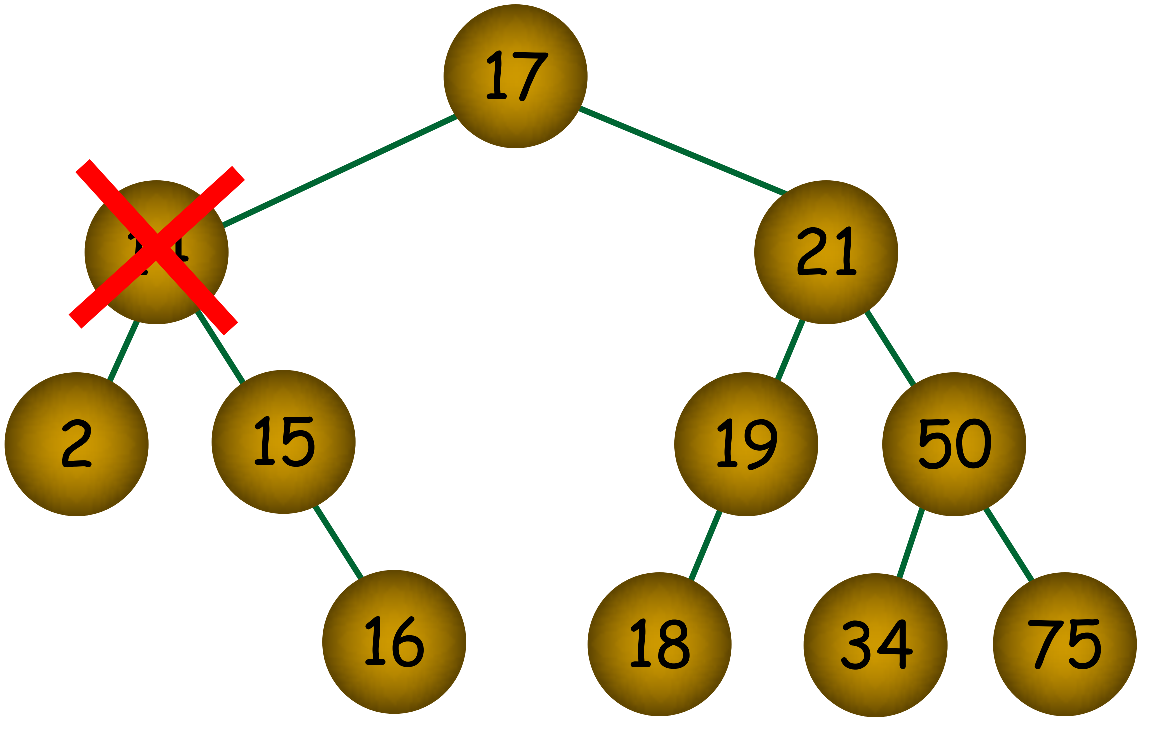
Borrar 6

borrado en los AVL

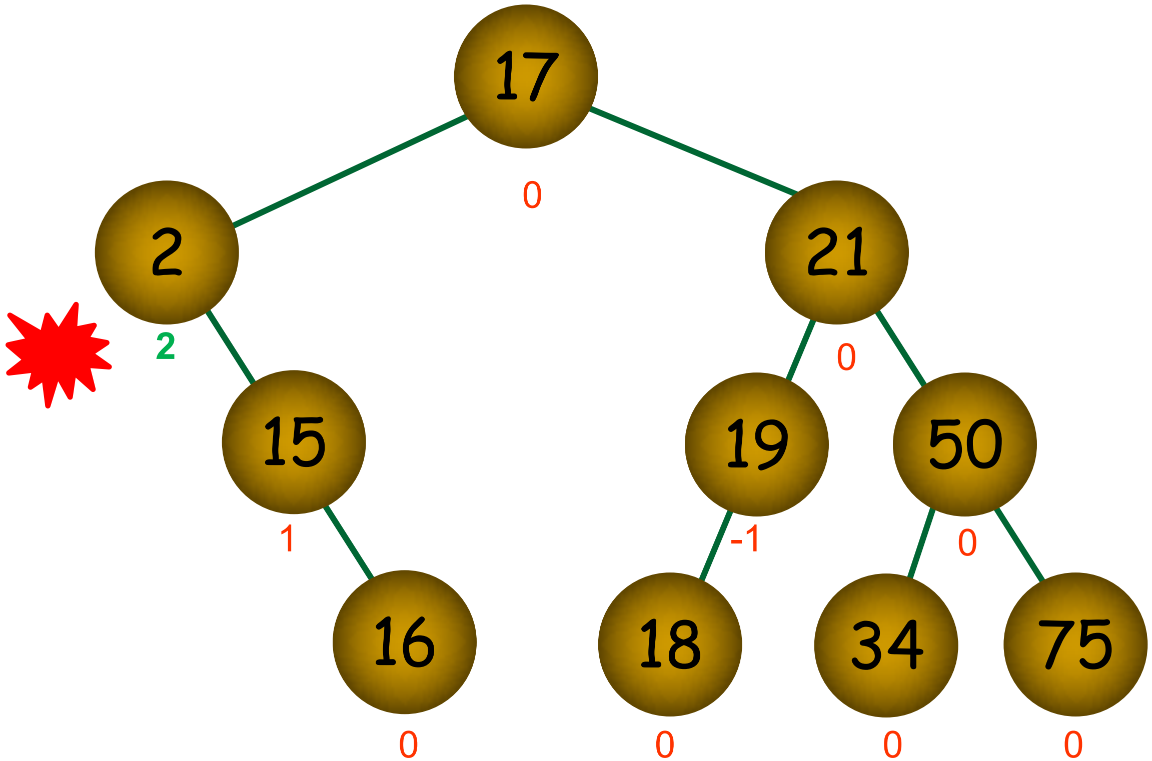


borrado en los AVL

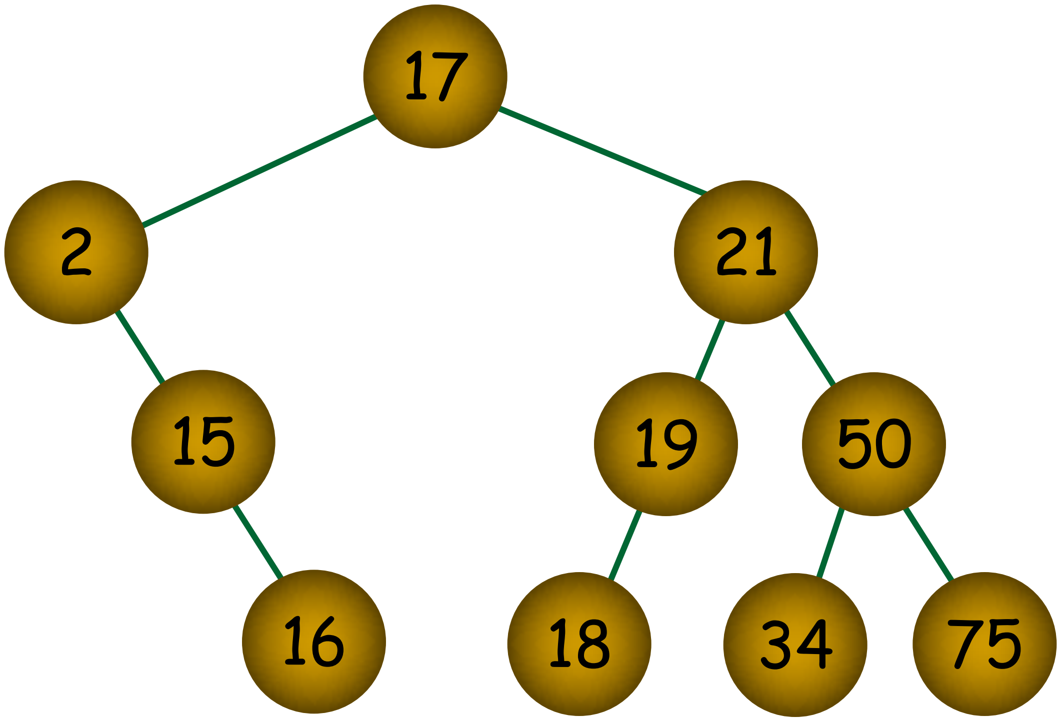
Borrar 14



borrado en los AVL

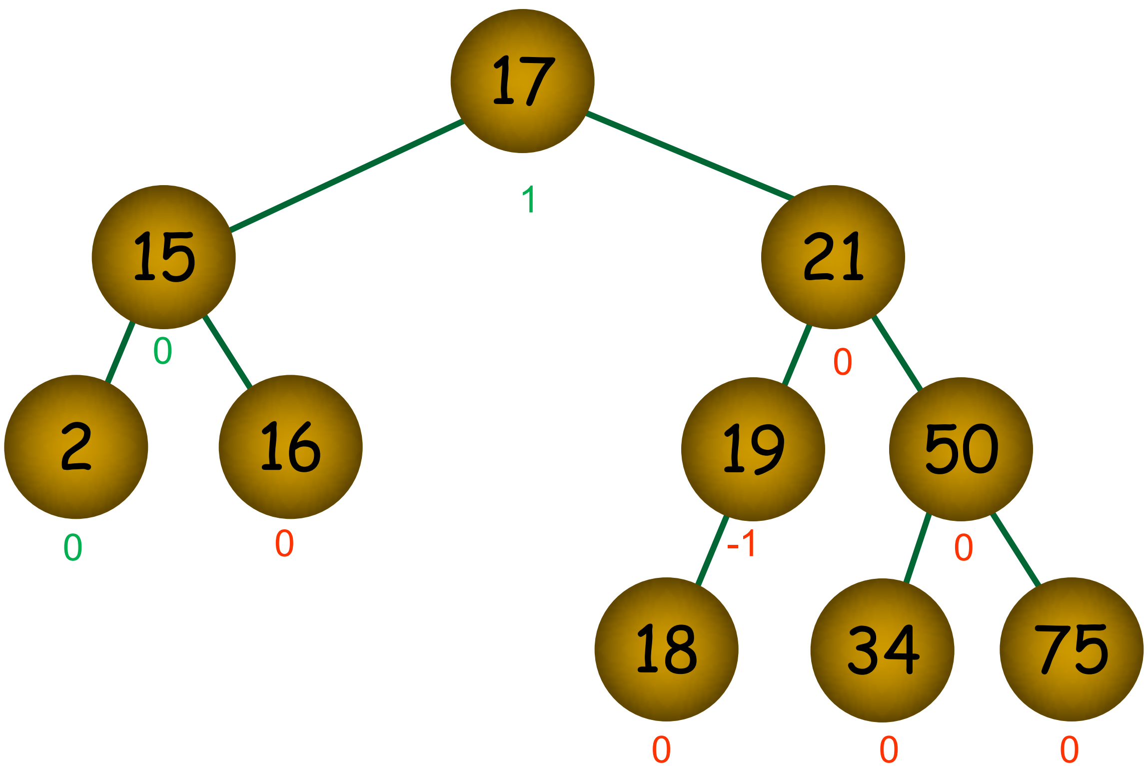


borrado en los AVL



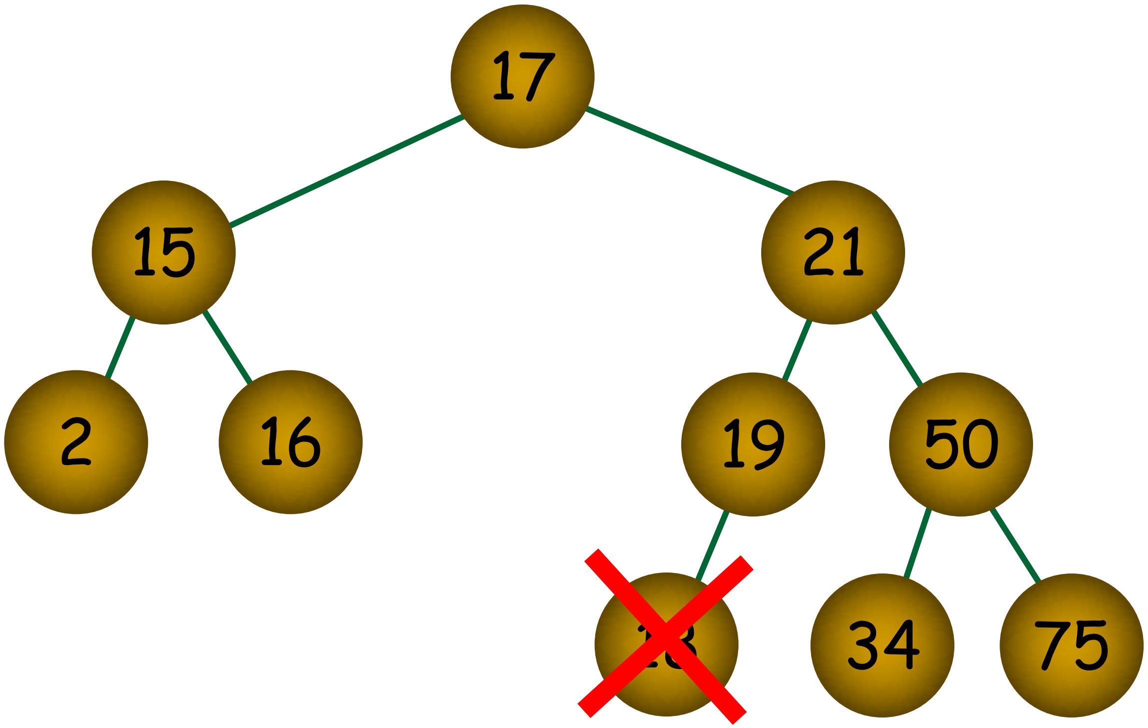
Balanceo RR:
rotación a izquierda(2)

borrado en los AVL

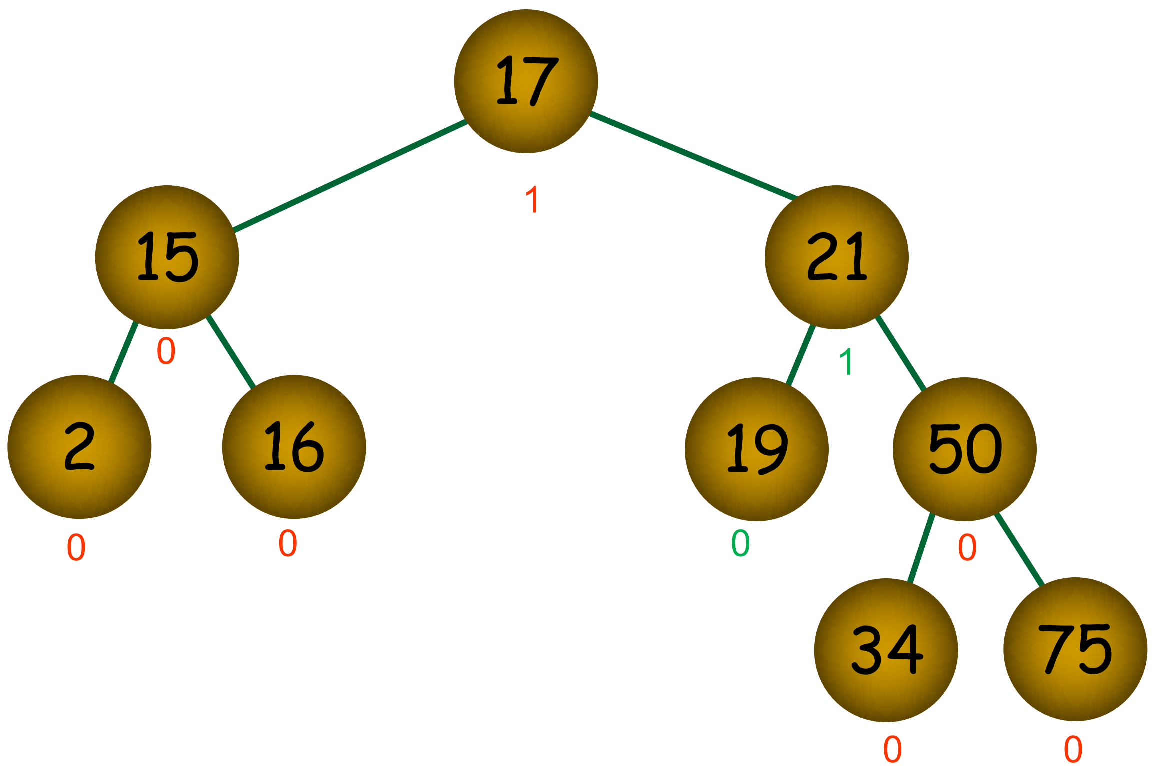


borrado en los AVL

Borrar 18

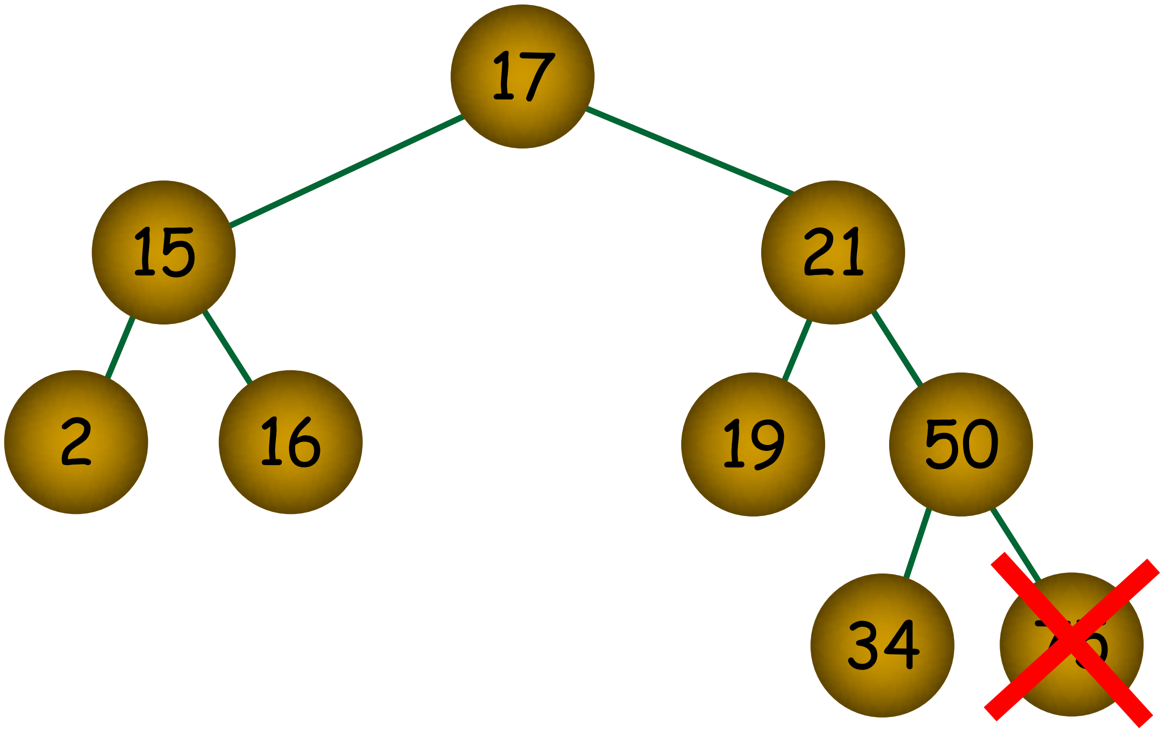


borrado en los AVL

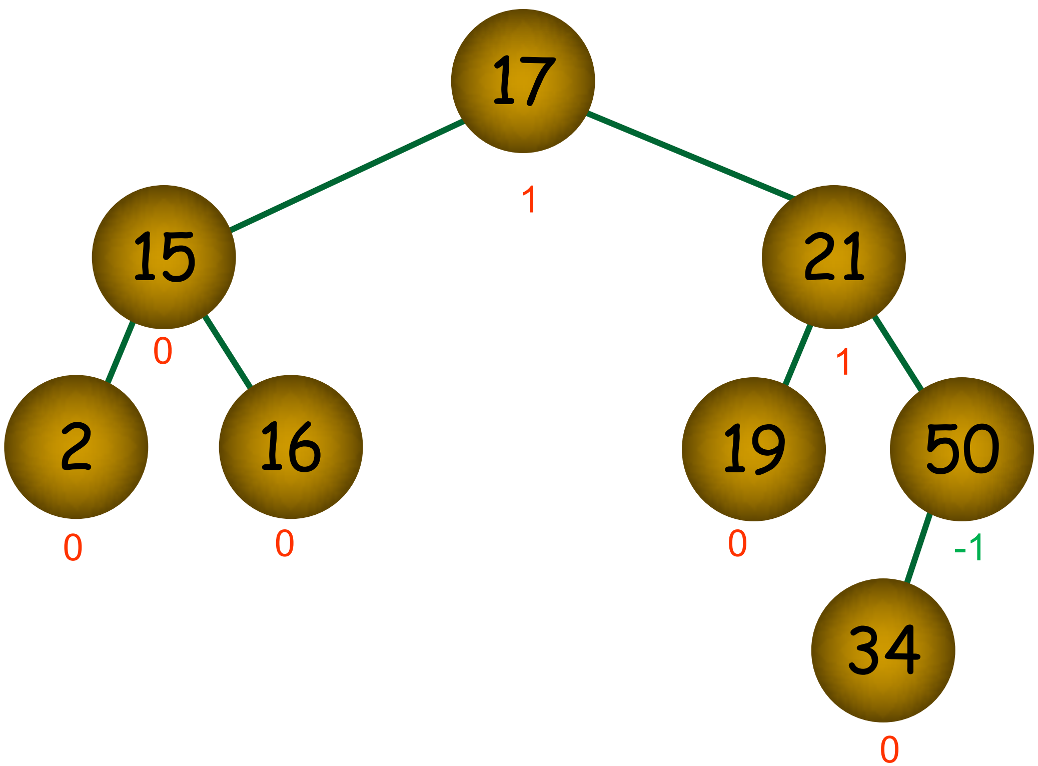


borrado en los AVL

Borrar 75

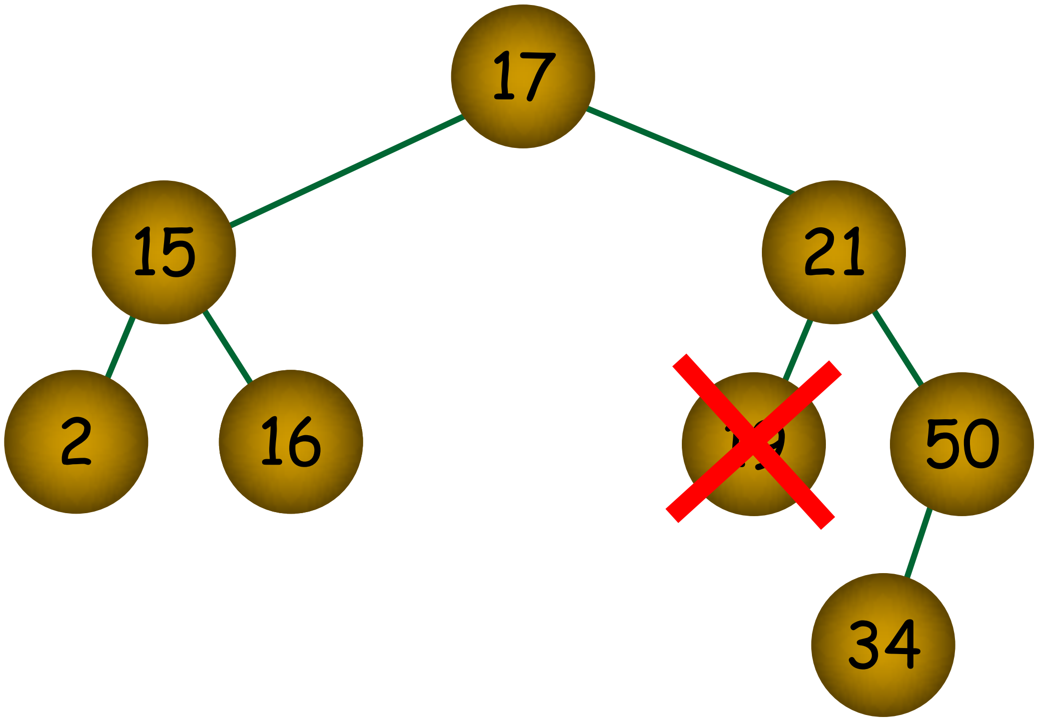


borrado en los AVL

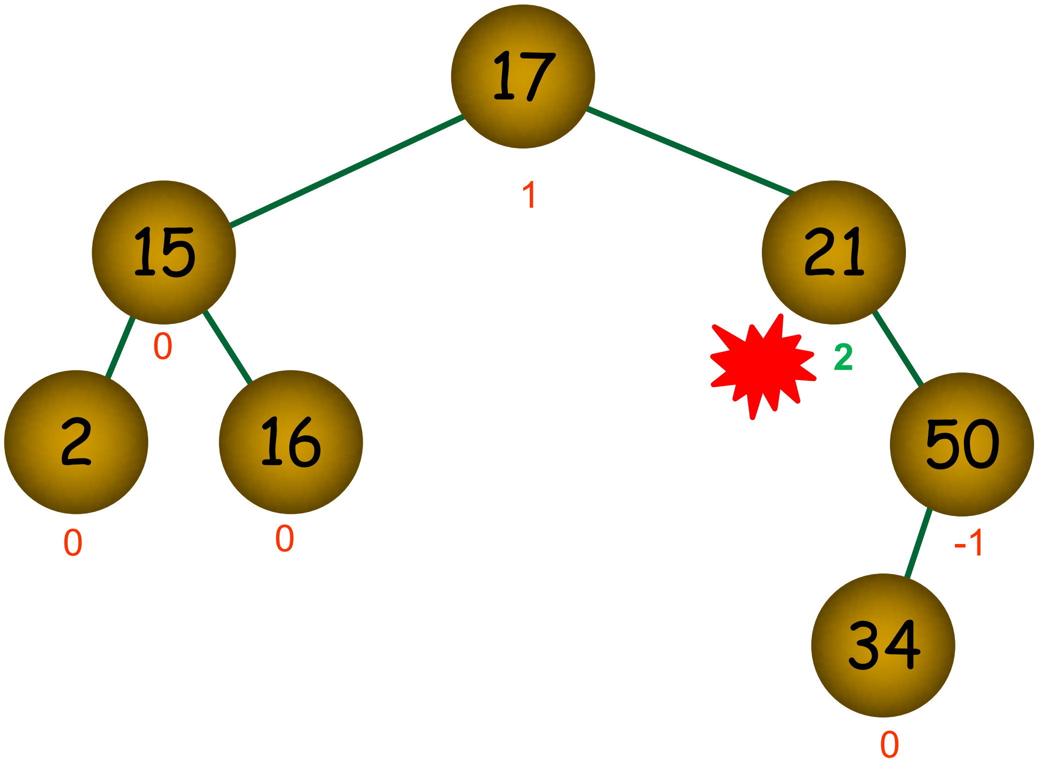


borrado en los AVL

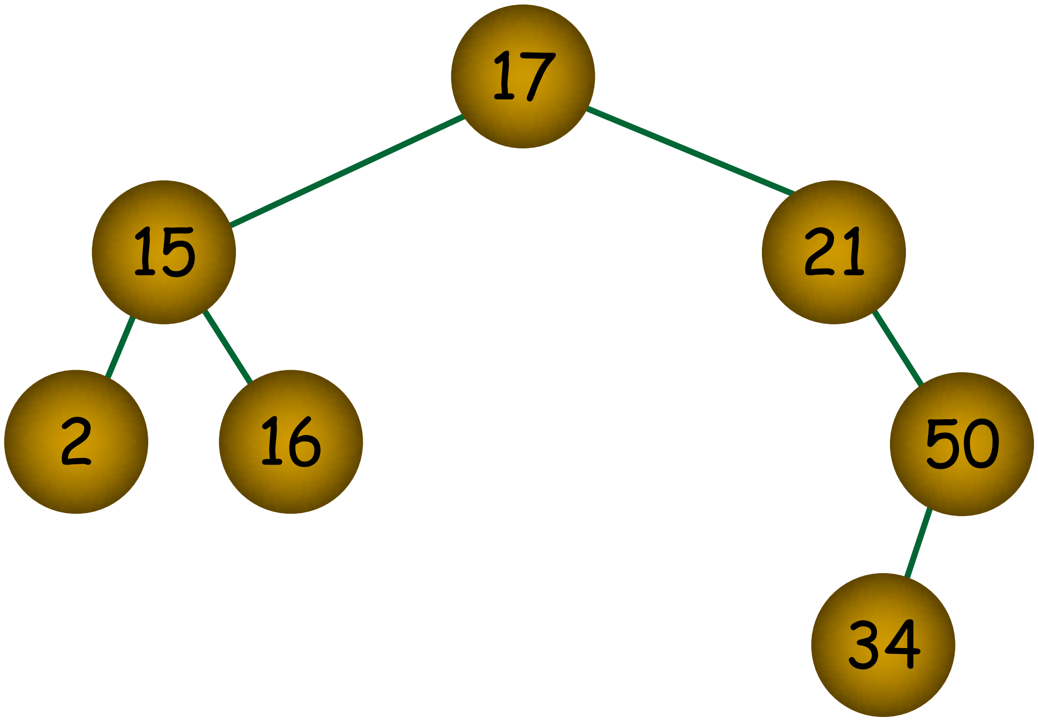
Borrar 19



borrado en los AVL

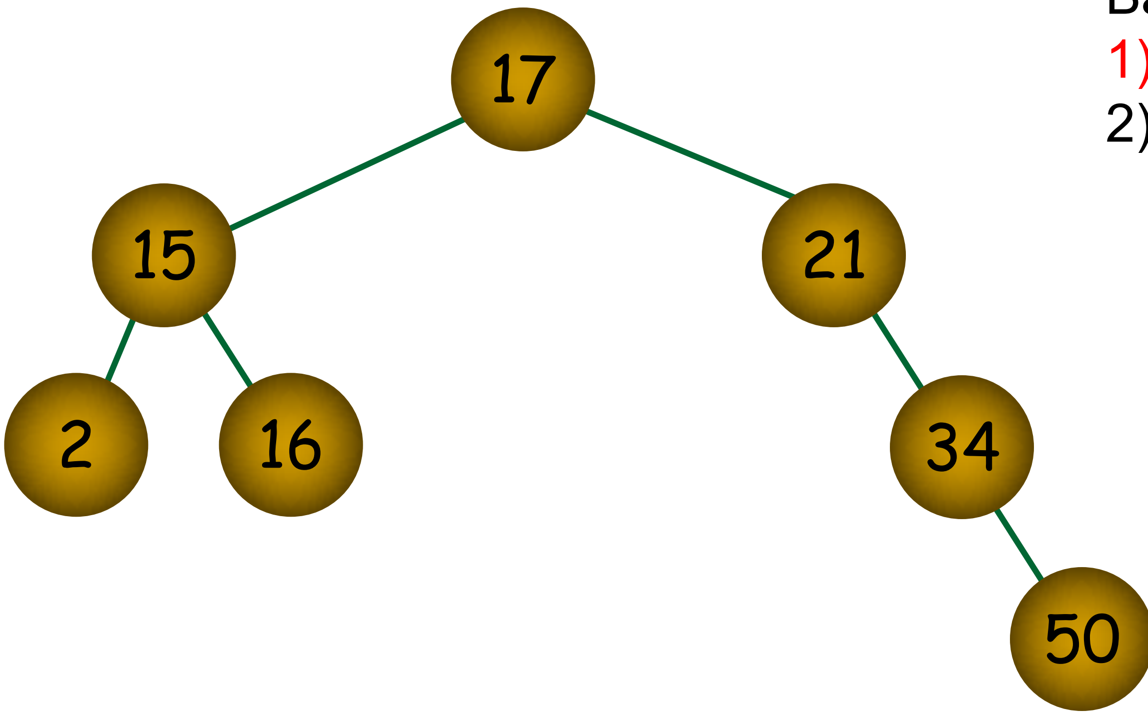


borrado en los AVL



Balanceo LR:
1) rotación a derecha(50)
2) rotación a izquierda(21)

borrado en los AVL

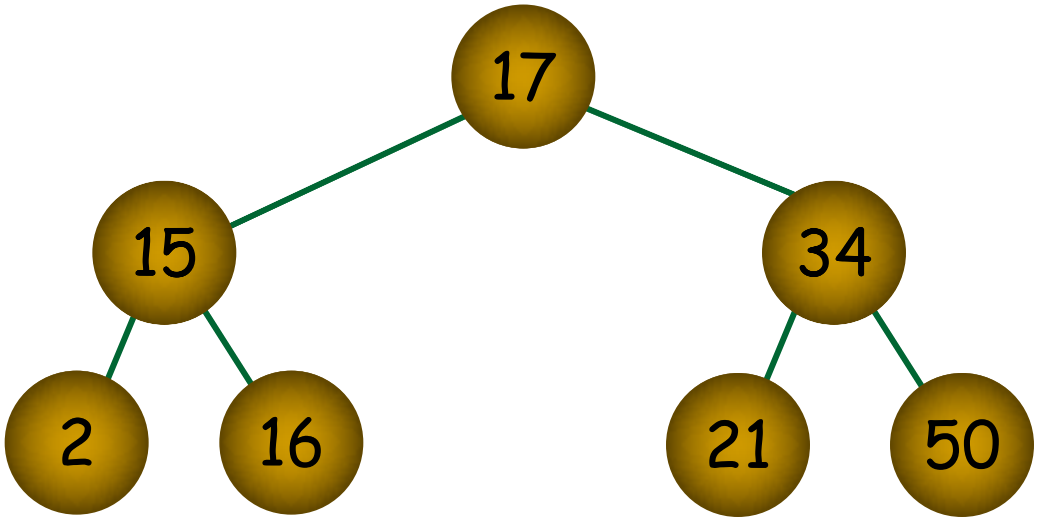


Balanceo LR:

1) rotación a derecha(50)

2) rotación a izquierda(21)

borrado en los AVL

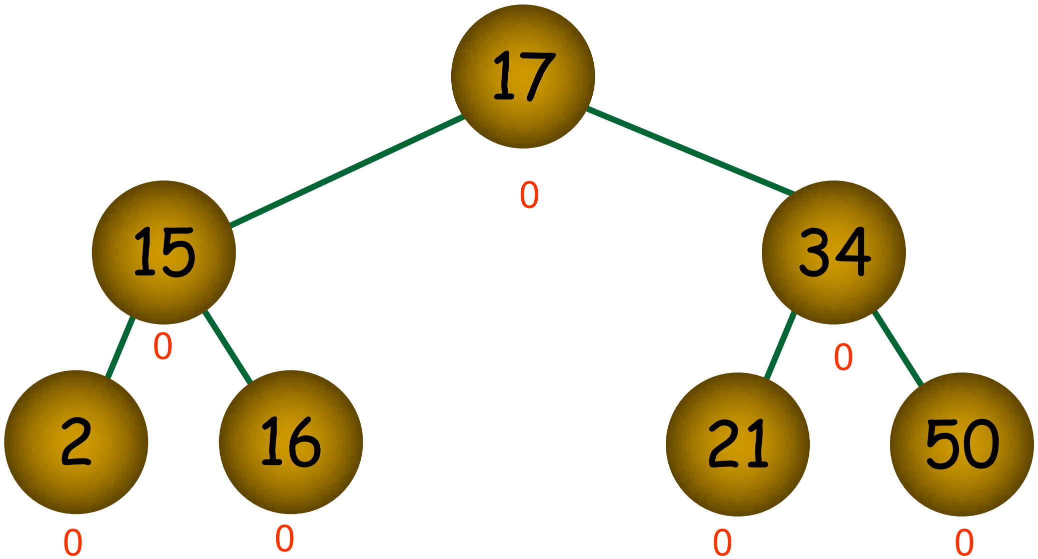


Balanceo LR:

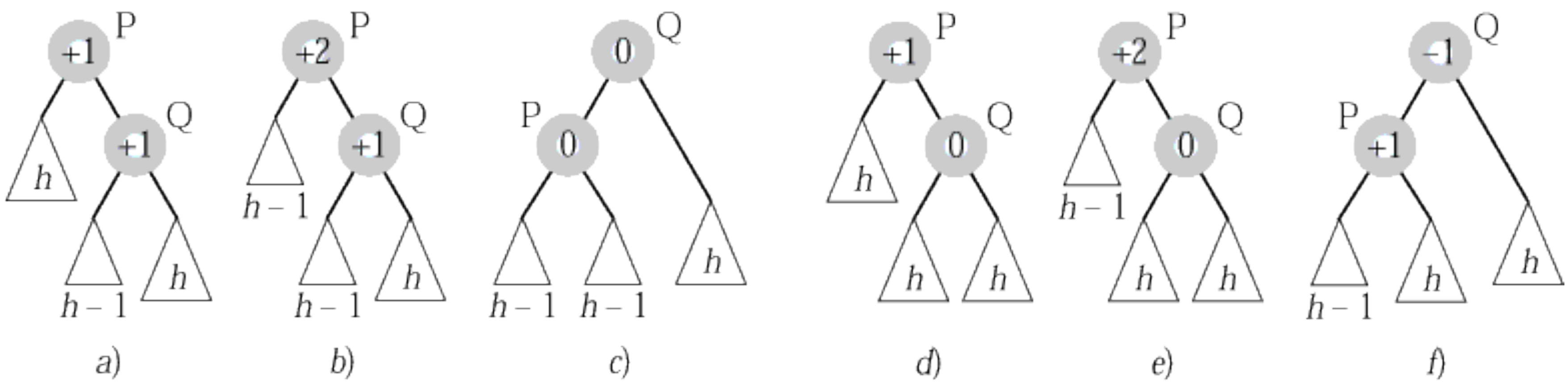
1) rotación a derecha(50)

2) rotación a izquierda(21)

borrado en los AVL

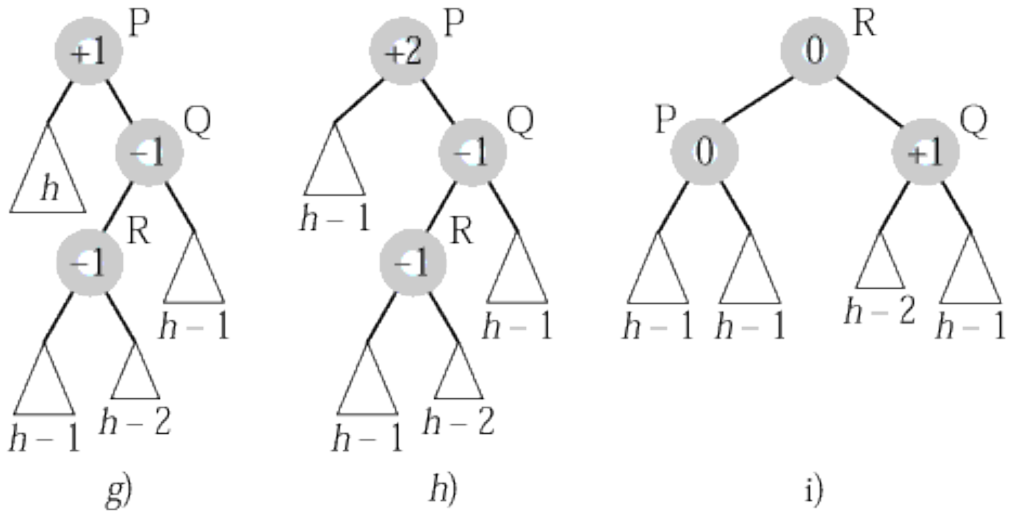


rotación simple



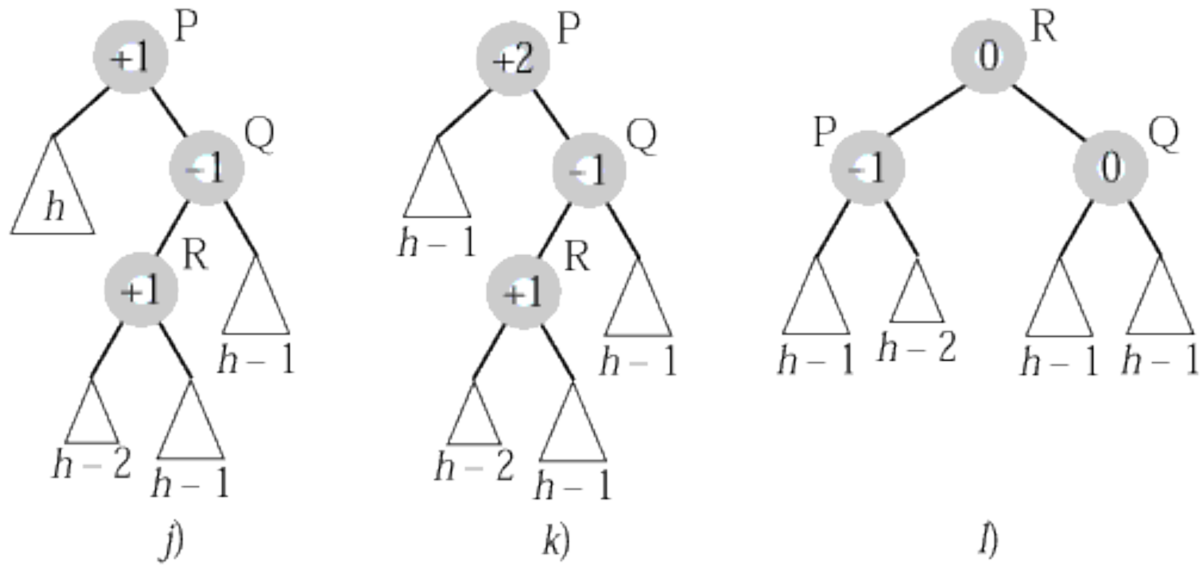
- Eliminación de una hoja de un subárbol izquierdo de P
  - el hijo derecho tiene FDB +1; a), b) y c)
  - el hijo derecho tiene FDB 0; d), e) y f)

rotación doble



- Eliminación de una hoja del subárbol izquierdo de P
  - FDB(Q) = –1 y FDB(R)= –1; g), h) e i)
  - rotación R-Q (P queda en +2, R y Q pasan a +1) y rotación P-R

rotación doble/2



- Eliminación de una hoja del subárbol izquierdo de P
  - FDB(Q) = -1, FDB(R)=+1, j), k) y l)
- rotación R-Q (P queda en +2, R pasa a +2 y Q pasa a 0) y rotación P-R

borrado en los AVL/costo

- en el caso peor hay que hacer rotaciones (simples o dobles) a lo largo de toda la rama
- paso 1: proporcional a la altura del árbol $\Theta(\lg n)$
- paso 2: proporcional a la altura del árbol $\Theta(\lg n)$
- paso 3: $\Theta(\lg n) \cdot \Theta(1)$

En total: $\Theta(\lg n)$