Criterio de la raíz enésima (Cauchy)

Criterio de la raíz enésima (Cauchy)

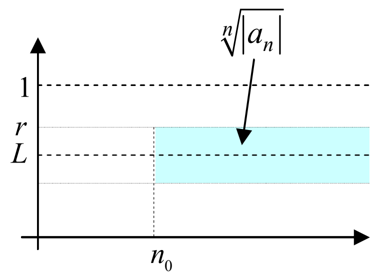
a. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente

b. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

c. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L = 1$ el criterio no sirve para decidir.

Demostración

Es casi un caso particular del criterio de comparación.



a. Si $L < 1$ entonces podemos afirmar que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r < 1 \text{ para } n \geq n_0$$

Entonces

$$|a_n| < r^n$$

que genera una serie geométrica convergente. Entonces, por comparación, la serie converge absolutamente.

b. Si $L > 1$ entonces

$$\sqrt[n]{|a_n|} > r > 1 \text{ para } n \geq n_0$$

Luego $|a_n| > r^n$. De modo que $|a_n| \to +\infty$ con lo cual la serie es divergente.

c. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente mientras que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. En ambos casos, si aplicamos el criterio de la raíz obtenemos límite igual a 1. Esto muestra que el criterio no sirve en este caso para decidir sobre la convergencia de la serie.

Criterio del cociente (D´Alembert)

Criterio del cociente (D´Alembert)

a. Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente

b. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

c. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L = 1$ el criterio no sirve para decidir.

Demostración

Veamos el caso **a.** El caso **b**. es similar y para el caso **c.** sirven los mismos ejemplos que en el criterio de Cauchy..

Supongamos pues que $L < 1$. Al igual que en la otra demostración podemos afirmar que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r < 1$$

Usamos el criterio de comparación con un múltiplo de la serie geométrica convergente de término general $c_n = r^n$. Es decir, queremos mostrar que el cociente $b_n = \frac{|a_n|}{r^n}$. está acotado superiormente. Para ello, alcanza con ver que b_n es decreciente. Veamos eso pues

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{|a_{n+1}|}{r^{n+1}}\frac{r^n}{|a_n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\frac{1}{r} < 1$$

Luego, b_n es decreciente y, por lo tanto, acotada superiormente por lo que

$$\frac{|a_n|}{r^n} < k$$

Es decir $|a_n| < kr^n$. Por el criterio de comparación se concluye que la serie es absolutamente convergente.

Ejercicio. Estudiar la convergencia de las series

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 8^n\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$

Soluciones

(1) El factorial se lleva mal con la raíz de modo que usaremos el criterio del cociente.

Para ello, armamos el cociente de D´Alembert para $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ y luego tomamos límite. Al resultado obtenido lo comparamos con 1.

Como $a_n > 0$ podemos omitir el módulo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \frac{2 \cdot 2^n}{n!(n+1)} \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1$$

Entonces $\boxed{\text{la serie es convergente}}$.

(2) Otra vez, aplicamos el criterio del cociente, con $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n!n^n}{(n+1)(n+1)^n n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to e^{-1} < 1$$

Como el límite del cociente de D´Alembert es menor que 1, $\boxed{\text{la serie es convergente}}$.

(3) En este caso, el criterio de la raíz es el más cómodo:

$$\sqrt[n]{8^n \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}} = 8\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \to 8e^{-2} > 1$$

Como el límite resulta ser mayor que 1, el criterio asegura que $\boxed{\text{la serie es divergente}}$.

Ahora es el momento de hacer el ejercicio 8 de la práctica.

6. Series de potencias

La representación de funciones por medio de series de potencias es un capítulo en sí mismo de la matemática. Aquí sólo nos proponemos dar respuesta al siguiente problema

Problema. ¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ es convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$? ¿Cuándo la convergencia es absoluta? ¿Cuándo es condicional?

Para atacar este problema seguiremos la siguiente estrategia:

1. Con los dos criterios para convergencia absoluta (el de la raíz enésima o el del cociente) determinamos los valores de $x \in \mathbb{R}$ donde hay convergencia absoluta. Los mismos criterios nos dicen donde la serie diverge.
2. Para los puntos donde los criterios no deciden $(L = 1)$ usamos la colección de criterios de convergencia que estuvimos viendo (comparación, paso al límite, criterio integral y criterio de Leibniz)

Ejercicios. Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales las siguientes series son convergentes. Establecer cuándo la convergencia es absoluta y cuándo es condicional

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n x^n}{n^2+1}$

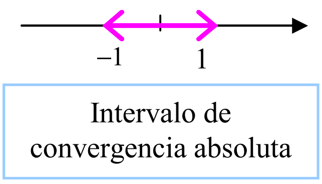
(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3 5^n}$

Soluciones

(1) Aplicamos el criterio de la raíz enésima:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} \to |x|$$

El criterio nos asegura entonces que si $|x| < 1$ la serie converge absolutamente y si $|x| > 1$ la serie diverge. El criterio es inútil cuando $|x| = 1$. Tenemos clasificados todos los números reales en puntos de convergencia o de divergencia, salvo los casos $x = -1$ y $x = 1$.



Caso $x = -1$. Evaluamos la serie de potencias en este punto y obtenemos la serie numérica alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ que ya vimos que es convergente (usando el Criterio de Leibniz)

Caso $x = 1$. En este caso la serie numérica resultante es la serie armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que vimos (Criterio integral, por ejemplo) que es divergente.

En consecuencia, estamos en condiciones de dar una respuesta al problema:

En $-1 \le x < 1$ la serie converge, en cualquier otro punto es divergente. En $x = -1$ la convergencia es condicional, en $-1 < x < 1$, la convergencia es absoluta.

(2) Otra vez, el criterio de la raíz enésima parece adecuado:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2^n n x^n}{n^2+1}\right|} = \frac{2\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^2+1}}|x| \to 2|x|$$

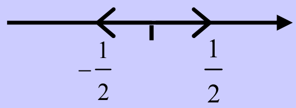
$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt[n]{n} \to 1 \\ \sqrt[n]{n^2+1} \to 1 \end{array}}$$

El criterio nos dice que para $2|x| < 1$ la serie converge absolutamente. El criterio también nos dice que para $2|x| > 1$ la serie diverge. Es decir

Para $|x| < \frac{1}{2}$ la serie converge absolutamente

Para $|x| > \frac{1}{2}$ la serie diverge

El valor $\frac{1}{2}$ es el llamado ***radio de convergencia***



Nos queda por analizar los “bordes” del intervalo de convergencia: $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$.

Caso $x = \frac{1}{2}$. La serie resultante en este caso es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

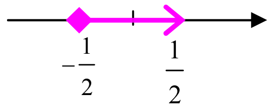
El término general “se parece” a $\frac{1}{n}$ que genera una serie divergente. Usamos comparación con paso al límite:

$$\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n^2+1} \to 1 \neq 0$$

Luego en $x = \frac{1}{2}$ la serie es divergente.

Caso $x = -\frac{1}{2}$. En este caso resulta la serie alternada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$$



Esta serie la estudiamos en oportunidad de ilustrar el Criterio de Leibniz. En ese momento probamos que $\frac{n}{n^2+1} \searrow 0$ (tiende a cero en forma decreciente). Entonces hay convergencia condicional en este punto. En síntesis la serie es convergente solo en $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$

(3) El factorial no se lleva bien con el criterio de la raíz enésima. Aplicamos el criterio del cociente.

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

El criterio nos dice que la serie converge absolutamente para todo x. Abusando de la definición, decimos que el radio de convergencia es infinito.

No es difícil probar, vía el desarrollo de Taylor que vale la elegante fórmula

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(4) La serie está expresada en potencias de $(x-2)$.

Aplicamos el criterio de la raíz enésima

$$\sqrt[n]{\left| \frac{(x-2)^n}{n^3 5^n} \right|} = \frac{|x-2|}{\sqrt[n]{n^3}\, 5} \to \frac{|x-2|}{5}$$

Entonces hay convergencia absoluta si $|x-2| < 5$ (5 es el radio de convergencia)

Para $|x-2| > 5$ el criterio nos asegura que la serie diverge.

Veamos qué pasa cuando $|x-2| = 5$. Es decir $x = -3$ o $x = 7$.

Si $x = 7$ la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ que acabamos de decir que es convergente.

Entonces la serie converge en el intervalo $[-3, 7]$ y en todos los valores la convergencia es absoluta.

Si $x = -3$, la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n^3 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}.$$