



MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio

Profesor: Héctor Ramírez

Auxiliares: Sebastián Pincheira, Joaquín Márquez

Ayudante: Fraick Reyes

Estudiantes: Luciano Avegno, Diego Echeverría

Proyecto: Contraste en Imágenes de Resonancia Magnética

Introducción

El objetivo es poder analizar un modelo de magnetización para **Imágenes de Resonancia Magnética** (MRI), particularmente queremos obtener el máximo contraste posible entre dos tipos de tejidos aplicando un campo magnético, estos dos tejidos se representarán mediante los spins de sus partículas q_1 y q_2 .

El problema de control óptimo se puede formular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & |q_2(t_f)| \\ \text{s.a.} \quad & \dot{q} = f(q, u) \\ & |u(\cdot)| \leq 1 \\ & q_1(0) = q_2(0) = (0, 1) \\ & q_1(t_f) = 0 \end{aligned}$$

Donde definimos el vector de magnetización $q = (x, y, z)$ para una **partícula de spin**, $u = (u_1, u_2)$ el **campo de magnetización** y por último γ y Γ son **parámetros de relajación** que dependen del tejido que se está analizando. Con ello, tenemos que la dinámica del sistema está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\Gamma x + u_2 z \\ \dot{y} &= \Gamma y - u_1 z \\ \dot{z} &= \gamma(1 - z) + u_1 y - u_2 x \end{aligned}$$

Avances

Para abordar este problema, establecemos primero la dinámica del modelo 2D, asumiendo $u_2 = 0$ y un único control $u \equiv u_1$ con la restricción de amplitud $|u(t)| \leq 1$. Es crucial notar que la relajación transversal (T2), representada por Γ , es un fenómeno de decaimiento, por lo que su signo debe ser negativo.

Las dinámicas para cada partícula $i = 1, 2$ son:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= -\Gamma_i y_i - u z_i \\ \dot{z}_i &= \gamma_i(1 - z_i) + u y_i \end{aligned}$$

Analizando la dinámica de una partícula del modelo 2D estudiamos en su punto inicial de equilibrio $(0, 1)$ su **observabilidad** y **controlabilidad**. Tomando este punto vemos el nuevo sistema:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= -u \\ \dot{z}_i &= 0 \end{aligned}$$

Que nos lleva a que el control es constante de valor 0 para conservar el equilibrio. Con esto $u \equiv 0$. Ahora viendo la matriz A como el **Jacobiano** respecto a q y la matriz B como el Jacobiano respecto a u . Ambos en el punto $(0, 1)$, $u \equiv 0$ tenemos que:

$$A = \begin{bmatrix} -\Gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando el criterio de la **matriz de Kalman** se obtiene una matriz de determinante 0 por lo cual la dinámica no es localmente controlable en este punto. Asimismo probando con tanto la matriz de observabilidad $C = [0, 1]$ o $C = [1, 0]$ llegamos a que el sistema tampoco es localmente observable.

El estado del sistema completo es $q = (y_1, z_1, y_2, z_2)^T \in \mathbb{R}^4$ y el correspondiente vector adjunto es $p = (p_{y1}, p_{z1}, p_{y2}, p_{z2})^T$. Donde ambos spins parten del equilibrio $x(0) = (0, 1, 0, 1)$. Con ello, debemos maximizar los spins a tiempo final el cual será el múltiplo del tiempo mínimo que necesita la partícula q_1 para llegar al origen, i.e T_{min} para el q_1 da que $t_f = \lambda T_{min}$, $\lambda \geq 1$, con ello:

$$\text{máx } J = \|q_2(t_f)\| = \sqrt{y_2(t_f)^2 + z_2(t_f)^2}$$

Aplicamos el **Principio del Máximo de Pontryagin** (PMP). El **Hamiltoniano** $H = \langle p, \dot{q} \rangle = p^T \dot{q}$ se define como:

$$H(q, p, u) = \sum_{i=1}^2 [p_{yi}(\Gamma_i y_i - u z_i) + p_{zi}(\gamma_i(1 - z_i) + u y_i)]$$

Para encontrar el control óptimo, reordenamos H en términos de u :

$$\begin{aligned} H &= \underbrace{[p_{y1}\Gamma_1 y_1 + p_{z1}\gamma_1(1 - z_1) + p_{y2}\Gamma_2 y_2 + p_{z2}\gamma_2(1 - z_2)]}_{\text{Términos independientes de } u} \\ &+ u \cdot \underbrace{[-p_{y1}z_1 + p_{z1}y_1 - p_{y2}z_2 + p_{z2}y_2]}_{\phi(t) \text{ (Función de conmutación)}} \end{aligned}$$

Así:

$$H = H_0(x, p) + u \cdot \phi(x, p)$$

La condición de maximización por PMP nos dice que el control óptimo $u^*(t)$ debe maximizar H en cada instante:

$$u^*(t) = \arg \max_{v \in [0, 1]} \{H_0 + v \cdot \phi(t)\}$$

Derivamos respecto a v e igualamos a 0, así las soluciones son:

- Si $\phi(t) > 0$, $u^*(t) = 1$
- Si $\phi(t) < 0$, $u^*(t) = 0$

- Si $\phi(t) = 0$ el control se trivializa.

Con ello, podemos definir un control del tipo **bang-bang**:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \phi(t) > 0 \\ 0, & \phi(t) < 0 \end{cases}$$

Vemos las ecuaciones de la variable adjunta p con $\dot{p} = -\nabla_x H$ para luego ver el siguiente sistema acoplado:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= -\Gamma_i y_i - u^*(t) z_i \\ \dot{z}_i &= \gamma_i (1 - z_i) + u^*(t) y_i \\ \dot{p}_{y_i} &= \Gamma_i p_{y_i} - u^*(t) p_{z_i} \\ \dot{p}_{z_i} &= \gamma_i p_{z_i} + u^*(t) p_{y_i} \end{aligned}$$

La evolución del co-estado de las ecuaciones adjuntas $p = (p_{y1}, p_{z1}, p_{y2}, p_{z2})$ es:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{y1} &= \Gamma_1 p_{y1} - u^*(t) p_{z1} \\ \dot{p}_{z1} &= \gamma_1 p_{z1} + u^*(t) p_{y1} \\ \dot{p}_{y2} &= \Gamma_2 p_{y2} - u^*(t) p_{z2} \\ \dot{p}_{z2} &= \gamma_2 p_{z2} + u^*(t) p_{y2} \end{aligned}$$

A continuación vemos las **condiciones de Transversalidad**. Vemos las condiciones de borde donde tenemos tiempo inicial y final fijos. Tenemos posición inicial fija. Finalmente tenemos posición final libre con el vector $(0, 0, y_2(tf), z_2(tf))$

$$0 = p_0 dg + [\Theta(t)dt - p^T(t)dx_t]_{t=0}^{t=tf}$$

$$dg = |q_2|$$

Vamos a ver por coordenada:

$$\begin{aligned} p_0 \left(\frac{y_2(tf)}{\|q_2(tf)\|} + \frac{z_2(tf)}{\|q_2(tf)\|} \right) - p_{y2}(tf) - p_{z2}(tf) &= 0 \\ p_{y2}(tf) &= \frac{y_2(tf)}{\|q_2(tf)\|} p_0 \\ p_{z2}(tf) &= \frac{z_2(tf)}{\|q_2(tf)\|} p_0 \end{aligned}$$

Notamos que el vector (p_{y2}, p_{z2}) es paralelo al vector (y_2, z_2) . También notar que $p_2 = (p_{y2}, p_{z2})$ tenemos que $\|p_2\| = 1$ Con esto tenemos las condiciones finales:

$$\begin{aligned} y_1(tf) &= 0 \\ z_1(tf) &= 0 \\ p_{y2}(tf)z_2(tf) - p_{z2}(tf)y_2(tf) &= 0 \\ \|(p_{y2}, p_{z2})\|^2 &= 1 \end{aligned}$$

Usando *OptimalControl.jl* y usando los hiperparámetros:

$$\begin{aligned} q_1 : T_1 &= 2, T_2 = 0,3 \\ q_2 : T_1 &= 2,5, T_2 = 2,5 \\ T_{min} &= 0,000999 \\ \lambda &= 2 \\ q_0 &= [0, 1, 0, 1] \end{aligned}$$

Donde T_{min} fue calculando optimizando q_1 al origen en un problema de tiempo mínimo con *OptimalControl.jl*. Los resultados son los siguientes:

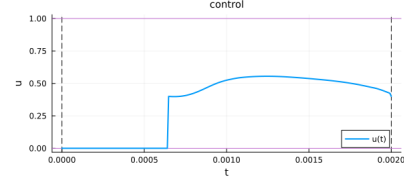


Figura 1: Valores del control

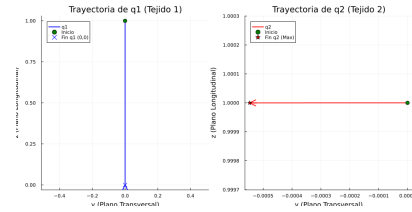


Figura 2: Trayectorias de partículas q_1 y q_2

Problemas

El principal problema ha sido la modelación del problema no lineal usando el método de tiro. Este problema ha traído dificultad para lograr resultados gráficos que cumplan las restricciones establecidas. El punto inicial de $(0, 1)$ causa problemas al ser un inicial de punto de equilibrio.

Temas Pendientes

Los temas a tocar para la entrega final del proyecto es analizar distintos puntos de partida para ver mejores resultados y variar con el valor del λ . También se va a estudiar más la teoría de lineal cuadrático con este problema y se buscarán mejores resultados con el método de tiro

Bibliografía

- Bonnard, B., Claeys, M., Cots, O., & Martinon, P. (2013). Comparison of numerical methods in the contrast imaging problem in NMR. *Hal Open Science*, 2, 4523-4528. <https://doi.org/10.1109/cdc.2013.6760586>
- Bonnard, B., Claeys, M., Cots, O., & Martinon, P. (2014). Geometric and Numerical Methods in the Contrast Imaging Problem in Nuclear Magnetic Resonance. *Acta Applicandae Mathematicae*, 135(1), 5-45. <https://doi.org/10.1007/s10440-014-9947-3>
- Cots, O. (2012). Contrôle optimal géométrique: méthodes homotopiques et applications. En HAL (Le Centre pour la Communication Scientifique Directe). <https://theses.hal.science/tel-00742927>