MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre Primavera 2025
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Sebastián Pincheira y Joaquín Márquez **Ayudante:** Fraick Reyes

Contraste en imágenes de resonancia magnética

Descripción: El objetivo de este proyecto es analizar un modelo de magnetización para la obtención de imágenes médicas que busca obtener el máximo contraste posible.

Introducción: Las Imágenes de Resonancia Magnética (MRI en inglés) es una técnica de imágenes médicas que no expone al cuerpo a radiación ionica (como los rayos X). A diferencia de los otros métodos, el MRI se basa en la utilización de fuerte campo magnético para excitar a los átomos en los tejidos, más específicamente, los átomos de hidrógenos presentes en el agua (el agua representa el 70 % del cuerpo de las personas). Midiendo la razón a la cual los átomos vuelven a su estado de equilibrio se puede reconstruir la distribución espacial del agua, y por lo tanto se puede diferenciar los distintos tipos de tejidos. Encontrar el campo magnético que maximiza el contraste entre dos tipos de tejidos puede ser plateado como un problema de control óptimo. Ver, por ejemplo, [1, 2].

El vector de magnetización $q = (x, y, z) \in B(0, 1)$ para cada partícula de 1/2 spin sigue las ecuaciones de Bloch:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\Gamma x + u_2 z \\ \dot{y} &= -\Gamma y - u_1 z \\ \dot{z} &= \gamma(1-z) + u_1 y - u_2 x \end{aligned}$$

donde u es el campo magnético (control) y γ, Γ son parámetros de relajación que dependen de los tejidos. En el modelo simplificado de dos dimensiones, la formulación es:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\Gamma y - u_1 z \\ \dot{z} &= \gamma(1-z) + u_1 y \end{aligned}$$

Considerando dos partículas con spin q_1, q_2, el contraste al final de la fase de excitación está relacionado con $\big|\|q_1\| - \|q_2\|\big|$.

El modelo clásico de "saturación por contraste" consiste en llevar un spin al origen (saturación) y el otro tan lejos como sea posible. Asumiendo que ambos spin parten desde un punto de equilibrio en (0,1), el problema de control óptimo se modela como:

$$
\begin{aligned}
\text{máx}\, |q_1(t_f)| \\
\dot{q} = f(q,u) \\
|u(\cdot)| \leq 1 \\
q_1(0) = q_2(0) = (0,1) \\
q_1(t_f) = 0
\end{aligned}
$$

Aquí, el tiempo final múltiplo del tiempo mínimo de saturación T_{min} para q_1, es decir, $t_f = \lambda T_{min},\ \lambda \geq 1$.

Objetivos : La idea es utilizar las herramientas teóricas y numéricas de control óptimo estudiadas en el curso para analizar este problema. **Se le otorga cierta libertad a la hora de plantear el problema y en el formato del informe. Sin embargo, debe guiarse por la pauta siguiente que entrega los criterios mínimos a ser evaluados.**

- Investigar aspectos de controlabilidad y observabilidad de la dinámica.
- Aplique los conocimientos adquiridos en clases (Principio de Pontryagin, Teoría Lineal Cuadrática, etc.) para intentar caracterizar analíticamente la solución del problema planteado.
- Resolver el modelo anterior usando Julia. Puede utilizar los datos que aparecen en el artículo [2]. Analizar distintos puntos de partida, distintos valores del parámetro λ, etc.
- Investigar sobre los métodos de tiro y aplicarlo para resolver el problema numéricamente. Comparar con lo anterior.

Referencias

[1] B. Bonnard, M. Claeys, O. Cots and P. Martinon. Comparison of Numerical Methods in the Contrast Imaging Problem in NMR. In 52nd IEEE Conference on Decision and Control, Firenze, Italy, 2013.

[2] B. Bonnard, M. Claeys, O. Cots and P. Martinon. Geometric and numerical methods in the contrast imaging problem in the contrast imaging problem in nuclear magnetic resonance. Acta Applicandae Mathematicae, pages 1–41, 2015.

[3] O. Cots. Controle optimal geometrique: methodes homotopiques et applications. PhD thesis, 2012.