

Resonancia Magnética

Contraste de Imágenes de Resonancia Magnética

Luciano Avegno y Diego Echeverría,



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

15 de noviembre de 2025

Índice

1 Introducción al Problema

2 Avances del Problema

3 Condiciones de Transversalidad

4 Resultados Numéricos

5 Discusión y Trabajo Futuro

6 Bibliografía

Introducción al Problema

El objetivo es poder analizar un modelo de magnetización para Imágenes de Resonancia Magnética (MRI), particularmente queremos obtener el máximo contraste posible entre dos tipos de tejidos, i.e. $\|q_2 - q_1\|$

Introducción al Problema

El objetivo es poder analizar un modelo de magnetización para Imágenes de Resonancia Magnética (MRI), particularmente queremos obtener el máximo contraste posible entre dos tipos de tejidos, i.e. $\|q_2 - q_1\|$

$$\begin{aligned} \max \quad & |q_2(t_f)| \\ \text{s.a.} \quad & \dot{q} = f(q, u) \\ & |u(\cdot)| \leq 1 \\ & q_1(0) = q_2(0) = (0, 1) \\ & q_1(t_f) = 0 \end{aligned}$$

Introducción al Problema

El objetivo es poder analizar un modelo de magnetización para Imágenes de Resonancia Magnética (MRI), particularmente queremos obtener el máximo contraste posible entre dos tipos de tejidos, i.e. $\|q_2 - q_1\|$

$$\begin{aligned} \max \quad & |q_2(t_f)| \\ \text{s.a.} \quad & \dot{q} = f(q, u) \\ & |u(\cdot)| \leq 1 \\ & q_1(0) = q_2(0) = (0, 1) \\ & q_1(t_f) = 0 \end{aligned}$$

Donde $q = (x, y, z) \in B(0, 1)$ para una partícula de spin, $u = (u_1, u_2)$ el campo de magnetización y γ y Γ son parámetros de relajación que dependen del tejido que se está analizando.

Índice

1 Introducción al Problema

2 Avances del Problema

3 Condiciones de Transversalidad

4 Resultados Numéricos

5 Discusión y Trabajo Futuro

6 Bibliografía

Simplificación del Modelo (2D)

Asumimos $u_2 = 0$ y un único control $u \equiv u_1$ con $|u(t)| \leq 1$.

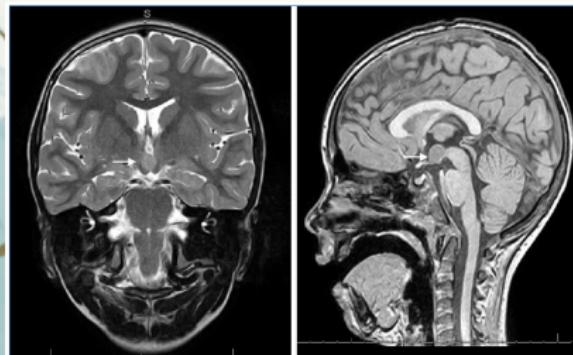
Simplificación del Modelo (2D)

Asumimos $u_2 = 0$ y un único control $u \equiv u_1$ con $|u(t)| \leq 1$.

Dinámicas 2D para cada Tejido ($i = 1, 2$)

$$\dot{y}_i = -\Gamma_i y_i - u z_i$$

$$\dot{z}_i = \gamma_i(1 - z_i) + u y_i$$



Análisis de Controlabilidad Local

Estudiamos el sistema en el punto de equilibrio inicial $(y, z) = (0, 1)$.

Análisis de Controlabilidad Local

Estudiamos el sistema en el punto de equilibrio inicial $(y, z) = (0, 1)$.

- En $(0, 1)$, la dinámica se vuelve:

$$\begin{aligned}\dot{y}_i &= -u \\ \dot{z}_i &= 0\end{aligned}$$

Análisis de Controlabilidad Local

Estudiamos el sistema en el punto de equilibrio inicial $(y, z) = (0, 1)$.

- En $(0, 1)$, la dinámica se vuelve:

$$\begin{aligned}\dot{y}_i &= -u \\ \dot{z}_i &= 0\end{aligned}$$

- Para conservar el equilibrio, se requiere $u \equiv 0$.

Análisis de Controlabilidad Local

Estudiamos el sistema en el punto de equilibrio inicial $(y, z) = (0, 1)$.

- En $(0, 1)$, la dinámica se vuelve:

$$\begin{aligned}\dot{y}_i &= -u \\ \dot{z}_i &= 0\end{aligned}$$

- Para conservar el equilibrio, se requiere $u \equiv 0$.

Calculamos el **Jacobiano** en $(q, u) = ((0, 1), 0)$:

$$A = \begin{bmatrix} -\Gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Criterio de Kalman

Resultado del Criterio de Kalman

La matriz de Kalman $[B, AB]$ tiene determinante 0.

Resultado del Criterio de Kalman

La matriz de Kalman $[B, AB]$ tiene determinante 0.

- Entonces el sistema **no es localmente controlable** en este punto de equilibrio.
- Similarmente, probando con matrices de observación $C = [0, 1]$ o $C = [1, 0]$, el sistema tampoco es **localmente observable**.
- Iniciar en el equilibrio $(0, 1)$ presenta desafíos numéricos y teóricos.

Aplicación del PMP

- **Estado del Sistema:** $q = (y_1, z_1, y_2, z_2)^T \in \mathbb{R}^4$

Aplicación del PMP

- **Estado del Sistema:** $q = (y_1, z_1, y_2, z_2)^T \in \mathbb{R}^4$
- **Co-estado Adjunto:** $p = (p_{y1}, p_{z1}, p_{y2}, p_{z2})^T$

Aplicación del PMP

- **Estado del Sistema:** $q = (y_1, z_1, y_2, z_2)^T \in \mathbb{R}^4$
- **Co-estado Adjunto:** $p = (p_{y1}, p_{z1}, p_{y2}, p_{z2})^T$
- **Cond. Inicial:** $q(0) = (0, 1, 0, 1)^T$

Aplicación del PMP

- **Estado del Sistema:** $q = (y_1, z_1, y_2, z_2)^T \in \mathbb{R}^4$
- **Co-estado Adjunto:** $p = (p_{y1}, p_{z1}, p_{y2}, p_{z2})^T$
- **Cond. Inicial:** $q(0) = (0, 1, 0, 1)^T$
- **Tiempo Final:** $t_f = \lambda T_{min}$, con $\lambda \geq 1$.

Aplicación del PMP

- **Estado del Sistema:** $q = (y_1, z_1, y_2, z_2)^T \in \mathbb{R}^4$
- **Co-estado Adjunto:** $p = (p_{y1}, p_{z1}, p_{y2}, p_{z2})^T$
- **Cond. Inicial:** $q(0) = (0, 1, 0, 1)^T$
- **Tiempo Final:** $t_f = \lambda T_{min}$, con $\lambda \geq 1$.

Objetivo (Función de Costo)

$$\max J = \|q_2(t_f)\| = \sqrt{y_2(t_f)^2 + z_2(t_f)^2}$$

Aplicamos el **Principio del Máximo de Pontryagin (PMP)**.

El Hamiltoniano

El Hamiltoniano $H = \langle p, \dot{q} \rangle = p^T \dot{q}$ es:

El Hamiltoniano

El Hamiltoniano $H = \langle p, \dot{q} \rangle = p^T \dot{q}$ es:

$$H(q, p, u) = \sum_{i=1}^2 [p_{yi}(\Gamma_i y_i - u z_i) + p_{zi}(\gamma_i(1 - z_i) + u y_i)]$$

El Hamiltoniano

El Hamiltoniano $H = \langle p, \dot{q} \rangle = p^T \dot{q}$ es:

$$H(q, p, u) = \sum_{i=1}^2 [p_{yi}(\Gamma_i y_i - u z_i) + p_{zi}(\gamma_i(1 - z_i) + u y_i)]$$

Reordenamos H en términos del control u :

El Hamiltoniano

El Hamiltoniano $H = \langle p, \dot{q} \rangle = p^T \dot{q}$ es:

$$H(q, p, u) = \sum_{i=1}^2 [p_{yi}(\Gamma_i y_i - uz_i) + p_{zi}(\gamma_i(1 - z_i) + uy_i)]$$

Reordenamos H en términos del control u :

$$H = H_0(x, p) + u \cdot \phi(x, p)$$

El Hamiltoniano

El Hamiltoniano $H = \langle p, \dot{q} \rangle = p^T \dot{q}$ es:

$$H(q, p, u) = \sum_{i=1}^2 [p_{yi}(\Gamma_i y_i - uz_i) + p_{zi}(\gamma_i(1 - z_i) + uy_i)]$$

Reordenamos H en términos del control u :

$$H = H_0(x, p) + u \cdot \phi(x, p)$$

Función de Comutación $\phi(t)$

$$\phi(t) = [-p_{y1}z_1 + p_{z1}y_1 - p_{y2}z_2 + p_{z2}y_2]$$

Ley de Control Óptimo

El PMP requiere maximizar H respecto al control:

Ley de Control Óptimo

El PMP requiere maximizar H respecto al control:

$$u^*(t) = \arg \max_{v \in [0,1]} \{H_0 + v \cdot \phi(t)\}$$

Ley de Control Óptimo

El PMP requiere maximizar H respecto al control:

$$u^*(t) = \arg \max_{v \in [0,1]} \{H_0 + v \cdot \phi(t)\}$$

Control Óptimo (Tipo Bang-Bang)

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \phi(t) > 0 \\ 0, & \phi(t) < 0 \end{cases}$$

Sistema Acoplado (BVP)

El PMP genera un Problema de Valor de Contorno (BVP) de 8D, uniendo el estado q y el co-estado p ($\dot{p} = -\nabla_q H$).

Sistema Acoplado (BVP)

El PMP genera un Problema de Valor de Contorno (BVP) de 8D, uniendo el estado q y el co-estado p ($\dot{p} = -\nabla_q H$).

Ecuaciones de Estado

$$\dot{y}_i = -\Gamma_i y_i - u^* z_i$$

$$\dot{z}_i = \gamma_i(1 - z_i) + u^* y_i$$

Sistema Acoplado (BVP)

El PMP genera un Problema de Valor de Contorno (BVP) de 8D, uniendo el estado q y el co-estado p ($\dot{p} = -\nabla_q H$).

Ecuaciones de Estado

$$\begin{aligned}\dot{y}_i &= -\Gamma_i y_i - u^* z_i \\ \dot{z}_i &= \gamma_i(1 - z_i) + u^* y_i\end{aligned}$$

Ecuaciones Adjuntas

$$\begin{aligned}\dot{p}_{y1} &= \Gamma_1 p_{y1} - u^* p_{z1} \\ \dot{p}_{z1} &= \gamma_1 p_{z1} + u^* p_{y1} \\ \dot{p}_{y2} &= \Gamma_2 p_{y2} - u^* p_{z2} \\ \dot{p}_{z2} &= \gamma_2 p_{z2} + u^* p_{y2}\end{aligned}$$

Índice

- 1 Introducción al Problema
- 2 Avances del Problema
- 3 Condiciones de Transversalidad
- 4 Resultados Numéricos
- 5 Discusión y Trabajo Futuro
- 6 Bibliografía

Derivación de Condiciones de Borde

- **En $t = 0$ (fijo):** $q(0) = (0, 1, 0, 1)^T$.
- **En $t = t_f$ (mixto):**
 - $q_1(t_f) = (y_1(t_f), z_1(t_f)) = (0, 0)$
 - $q_2(t_f)$ está libre, maximizando $J = \|q_2(t_f)\|$

Derivación de Condiciones de Borde

- **En $t = 0$ (fijo):** $q(0) = (0, 1, 0, 1)^T$.
- **En $t = t_f$ (mixto):**
 - $q_1(t_f) = (y_1(t_f), z_1(t_f)) = (0, 0)$
 - $q_2(t_f)$ está libre, maximizando $J = \|q_2(t_f)\|$

De la condición $p_0 dg - p(t_f)^T \delta q_f = 0$ (con $p_0 = 1$):

$$p_{y_2}(t_f) = \frac{y_2(t_f)}{\|q_2(t_f)\|}$$

$$p_{z_2}(t_f) = \frac{z_2(t_f)}{\|q_2(t_f)\|}$$

Resumen del BVP

4 Condiciones en $t = 0$

$$y_1(0) = 0$$

$$y_2(0) = 0$$

$$z_1(0) = 1$$

$$z_2(0) = 1$$

Resumen del BVP

4 Condiciones en $t = 0$

$$y_1(0) = 0$$

$$y_2(0) = 0$$

$$z_1(0) = 1$$

$$z_2(0) = 1$$

4 Condiciones en $t = t_f$

$$y_1(t_f) = 0$$

$$z_1(t_f) = 0$$

$$p_{y_2}(t_f)z_2(t_f) - p_{z_2}(t_f)y_2(t_f) = 0 \quad (\text{Paralelismo})$$

$$p_{y_2}(t_f)^2 + p_{z_2}(t_f)^2 = 1 \quad (\text{Normalización})$$

Índice

- 1 Introducción al Problema
- 2 Avances del Problema
- 3 Condiciones de Transversalidad
- 4 Resultados Numéricos
- 5 Discusión y Trabajo Futuro
- 6 Bibliografía

Configuración Numérica

Se utilizó OptimalControl.jl (Julia).

Configuración Numérica

Se utilizó OptimalControl.jl (Julia).

Hiperparámetros

- q_1 (Tejido 1): $T_1 = 2, T_2 = 0.3$
- q_2 (Tejido 2): $T_1 = 2.5, T_2 = 2.5$
- $q_0 = [0, 1, 0, 1]$
- $T_{min} = 0.000999$ (calculado numéricamente para $q_1 \rightarrow 0$)
- $\lambda = 2 \implies t_f \approx 0.002$

Resultados: Control Óptimo

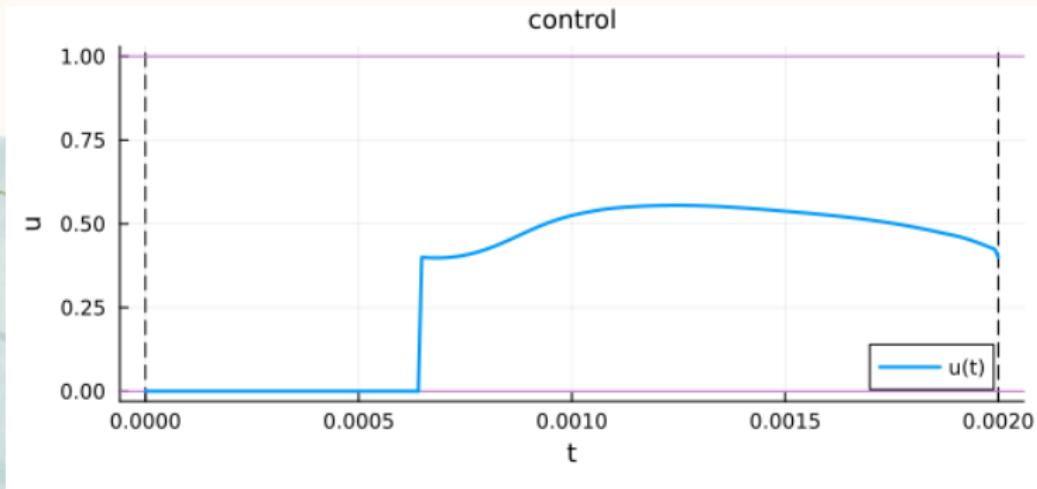


Figura 1: Perfil del control óptimo $u^*(t)$ en el intervalo $[0, t_f]$.

Resultados: Trayectorias

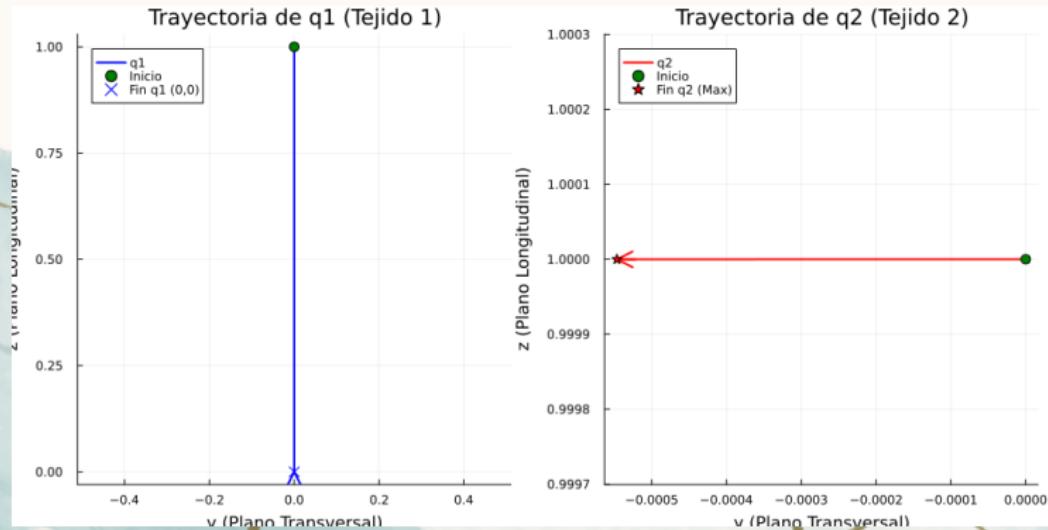


Figura 2: Trayectorias de los spins q_1 (llega a 0) y q_2 (maximiza norma).

Índice

1 Introducción al Problema

2 Avances del Problema

3 Condiciones de Transversalidad

4 Resultados Numéricos

5 Discusión y Trabajo Futuro

6 Bibliografía

Problemas y Desafíos

Problema Principal

Dificultad en la modelación del problema no lineal usando el **método de tiro** (shooting method).

Problema Principal

Dificultad en la modelación del problema no lineal usando el **método de tiro** (shooting method).

- Complicado obtener resultados gráficos que cumplan todas las restricciones simultáneamente.

Problema Principal

Dificultad en la modelación del problema no lineal usando el **método de tiro** (shooting method).

- Complicado obtener resultados gráficos que cumplan todas las restricciones simultáneamente.
- El punto inicial $(0, 1)$ es un punto de equilibrio, lo que causa problemas numéricos y de controlabilidad (como se vio en el análisis de Kalman).

Temas Pendientes

- Analizar distintos puntos de partida (que no sean de equilibrio) para mejorar los resultados.

Temas Pendientes

- Analizar distintos puntos de partida (que no sean de equilibrio) para mejorar los resultados.
- Variar el parámetro λ para estudiar la relación tiempo-contraste.

Temas Pendientes

- Analizar distintos puntos de partida (que no sean de equilibrio) para mejorar los resultados.
- Variar el parámetro λ para estudiar la relación tiempo-contraste.
- Buscar mejores resultados numéricos con el método de tiro, posiblemente ajustando la inicialización o el solver.

Bibliografía

- Bonnard, B., Claeys, M., Cots, O., & Martinon, P. (2013). Comparison of numerical methods in the contrast imaging problem in NMR. Hal Open Science, 2, 4523-4528. <https://doi.org/10.1109/cdc.2013.6760586>
- Bonnard, B., Claeys, M., Cots, O., & Martinon, P. (2014). Geometric and Numerical Methods in the Contrast Imaging Problem in Nuclear Magnetic Resonance. *Acta Applicandae Mathematicae*, 135(1), 5-45. <https://doi.org/10.1007/s10440-014-9947-3>
- Cots, O. (2012). Contrôle optimal géométrique: méthodes homotopiques et applications. En HAL (Le Centre pour la Communication Scientifique Directe). <https://theses.hal.science/tel-00742927>