



Informe del proyecto

Dentro de los algoritmos para obtener árboles generadores en un grafo conexo, los más conocidos son BFS y DFS, que se estudian en el curso de Algoritmos Combinatoriales. Ambos generan árboles con propiedades particulares que los diferencian entre sí: el primero agrega nodos en capas, con lo cual, habiendo elegido una raíz, siempre conectará los mismos nodos a esta; el segundo, en cambio, depende de cómo esté programado para determinar el árbol que genera. Por lo tanto, en ambos casos, el árbol generado depende en gran medida del algoritmo empleado.

Sin embargo, existe un algoritmo que tiene la capacidad de generar un árbol de forma uniforme entre todos los posibles, sin importar la raíz elegida ni la forma en que esté programado. Este algoritmo es conocido como el algoritmo de Wilson, en honor a su creador. Dado que este algoritmo posee dicha propiedad particular, resulta útil para generar muestras de otras estructuras que utilizan como base un árbol generador uniforme. Un ejemplo de estas aplicaciones son las curvas de Peano.

Existen diferentes formas de demostrar este resultado. La primera, presentada por Wilson en su artículo, asocia un stack infinito a cada nodo, indicando hacia dónde debe avanzar al ser visitado. Luego, al colorea las filas y demuestra que el orden en que se eliminan los ciclos no afecta la probabilidad de obtener un árbol generador. Por ello, todos los árboles posibles son generados de manera uniforme¹.

Otra demostración modela el algoritmo como una sucesión de cadenas de Markov armónicas y calcula directamente la probabilidad de que el algoritmo genere un árbol dado. Utilizando este modelo, junto con el teorema de Kirchhoff, se concluye que dicha probabilidad es $1/\kappa$, donde κ es la cantidad de árboles generadores en el grafo².

Con estos árboles generados de forma uniforme, es posible construir curvas de Peano, las cuales son curvas que llenan el espacio³. Finalmente, como ejemplo de los resultados ello se obtiene el grafo mostrado en la figura 1a es uno generado mediante el algoritmo de Wilson. A partir de este, se construyó la curva que aparece en la figura 1b.

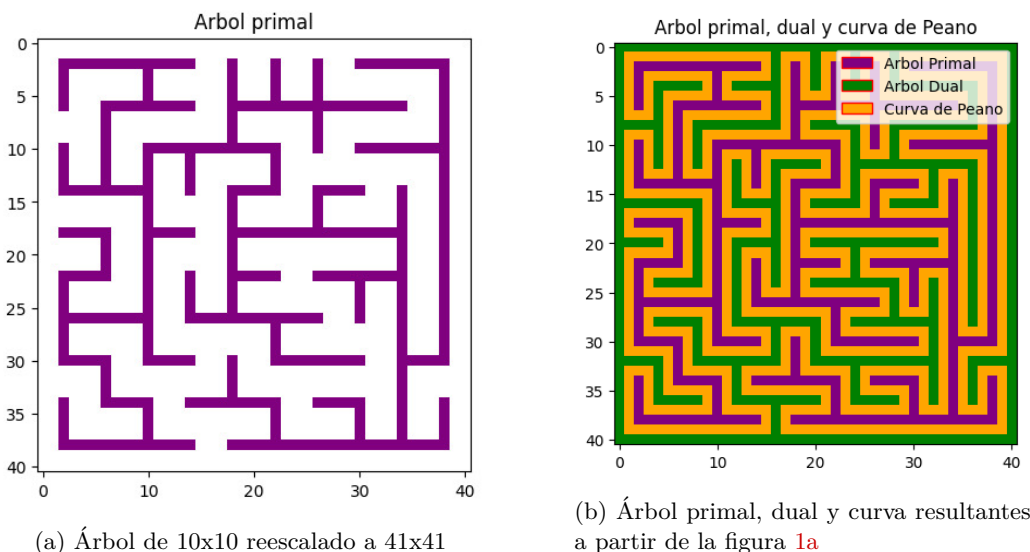


Figura 1: Grafos obtenidos al estudiar un Árbol generado por Wilson

¹La demostración de Wilson se encuentra en “Generating Random Spanning Trees”, mientras que Yuval Wigderson ofrece una explicación más detallada en “Uniform Spanning Trees and Determinantal Point Processes”.

²Más información en “A note on Kirchhoff’s formula and Wilson’s algorithm” de Ron Rosenthal.

³Revisar “Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees” de Lawler, Schramm y Werner.