Standortplanung und strategisches SCM

Ecko Tan

18. Februar 2018

Don't panic!

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Volkswirtschaftliche und deskriptive Standortmodelle

1.1 Volkswirtschaftliche Standortmodelle

1.1.1 Die Wahl kostenminimaler Wohnstandorte

standortbezogenen Kosten

$$C(d) = Q \cdot p(d) + V \cdot k(d) \tag{1.1}$$

- d: die Entfernung des Standortes zum Stadtzentrum
- $C(d)$: die gesamten Standortkosten
- Q: die vorgegebene Größe der Wohnfläche
- $p(d)$: die standortabhängigen Mietkosten pro Flaâcheneinheit (z.B.Quadratmeter)
- V: die Anzahl der Fahrten ins Zentrum
- $k(d)$: standortabhängigen Fahrtkosten

Annahme

- $p(d)$ nehmen mit zunehmender Entfernung zum Stadtzentrum exponentiell ab:

$$p(d) = P_Z \cdot e^{-rd} \tag{1.2}$$

  – P_Z: der Mietpreis direkt im Zentrum
  – r: Verfallskonstante für die Entfernung

- die Fahrtkosten sind proportional zur Entfernung zum Zentrum

$$k(d) = K \cdot d \tag{1.3}$$

  – K: die Kosten pro Entfernungseinheit

Den kostenminimalen Standort findet man unter diesen Annahmen durch Minimierung der Funktion $C(d)$.

Ableiten der Funktion C nach d und anschließendem "Nullsetzen" der Ableitung ⇒

$$d^* = \frac{1}{r}(\ln[r \cdot P_Z \cdot Q] - \ln[V \cdot K]) \tag{1.4}$$

Example 1.1.1. Aufgabe 1, Aufgabe 2

1.1.2 Theorie der Boden- und Flächennutzung

von Thünens Modell

- das zu untersuchende Gebiet ist eine kreisförmige, isolierte Fläche gleichmäßiger Produktivität
- es liegt ein einziger Absatzmarkt im Zentrum der Fläche vor
- die Transportverbindungen sind überall gleichmäßig gut
- die Produktion der Produkte ist überall und zu gleichen Kosten möglich
- die Transportkosten steigen proportional zur Entfernung
- es ist eine Menge von Produktions-Aktivitäten und deren Output-Mengen gegeben

Unter dem Gesichtspunkt der Gewinn-Maximierung stellt sich nun die Frage:

"Welches der Produkte soll in welcher Entfernung vom Absatzmarkt hergestellt werden?"

Algorithm 1 Verfahren (zur Bestimmung der oberen Einhüllenden)

Stelle für jede Produktions-Aktivität die zugehörige Profitfunktion auf:

$$R(d) = \max_i R_i(d) = \max_i (p_i - k_i d)$$

Setze $d' = 0$ und $I = 1, \ldots, n, L = \varnothing$

Bestimme der max. Profit $R_{i^*} = \underset{j=1,\ldots,n}{max} R_j(0)$ und damit die im Zentrum profitabelste Aktivität P_{i^*}

if (das Maximum ist nicht eindeutig) **then**

    wähle unter den maximalen Aktivitäten diejenige mit dem kleinsten k_j.

end if

$I = I \backslash \{i^*\}, L = L \cup \{i^*\}$

while (Es gibt Schnittpunkte($d_{ij} = \frac{P_i - P_j}{k_i - k_j}$)) $\wedge (I \neq \varnothing)$ **do**

    Schneide R_{i^*} mit allen $R_j(\cdot), j \in I$

    Bestimme $S_{i^*j} = (d_{i^*j}, R_{i^*\backslash j}(d_{i^*j})$ als den Schnittpunkt mit dem kleinsten Wert $d_{i^{i^*j}} > d'$

    if (Schneiden sich mehrere Profitfunktionen bei $d_{i^{i^*j}}$) **then**

        wähle unter den Aktivitäten diejenige mit dem kleinsten k.

    end if

    $d' = d_{i^{i^*j}}, i^* = j, I = I \backslash \{i^*\}$

    Füge d und i^* am Ende der Liste L an

end while

Füge $d^{\max}$ am Ende von L ein

Output: Die Liste L enthält dann die gesuchten Entfernungsintervalle und die zugehörigen, profitablen Produktionsaktivitäten.

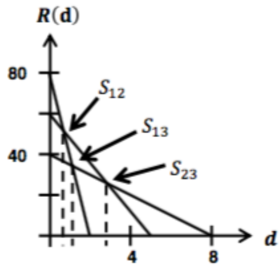
Example 1.1.2.

Beispiel

Gegeben seien drei Produktions-Aktivitäten für Produkte P_1, P_2 und P_3 mit den folgenden Charakteristika

- $p_1 = 80, k_1 = 40 \qquad d_1^{max} = 2$
- $p_2 = 60, k_2 = 12 \qquad d_2^{max} = 5$
- $p_3 = 40, k_3 = 5 \qquad d_3^{max} = 8$

Wir haben $I = \{1,2,3\}$ und $d' = 0$.

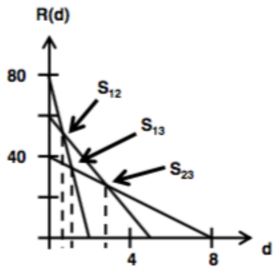


Im Zentrum ist Aktivität P_1 am profitabelsten, d.h. $i^* = 1$.
Setze $I = I \backslash \{1\} = \{2,3\}$ und $L = \{1\}$.

Schneide R_1 mit R_2 und R_3. Man erhält: $S_{12} = \left(\frac{5}{7}, \frac{360}{7}\right)$ und $S_{13} = \left(\frac{8}{7}, \frac{240}{7}\right)$
Da $d' < \frac{5}{7} < \frac{8}{7}$, haben wir $i^* = j = 2$, $d' = \frac{5}{7}$, $I = I \backslash \{2\} = \{3\}$ und $L = \left\{1, \frac{5}{7}, 2\right\}$.

Schneide nun R_2 mit R_3. Man erhält: $S_{23} = \left(\frac{20}{7}, \frac{180}{7}\right)$
Da $d' < \frac{20}{7}$, haben wir $i^* = j = 3$, $d' = \frac{20}{7}$, $I = I \backslash \{3\} = \{\}$ und $L = \left\{1, \frac{5}{7}, 2, \frac{20}{7}, 3\right\}$.

Da $I = \{\}$, füge $d^{max} = 8$ in L und beende das Verfahren.
Wir erhalten: $L = \left\{1, \frac{5}{7}, 2, \frac{20}{7}, 3, 8\right\}$.



Damit ist im Entfernungsbereich $\left[0, \frac{5}{7}\right]$ Produkt 1 das profitabelste. Danach erzielt man mit Produkt 2 den größten Gewinn im Bereich $\left]\frac{5}{7}, \frac{20}{7}\right]$, und Produkt 3 ist schließlich im Bereich $\left]\frac{20}{7}, 8\right]$ am profitabelsten.

Example 1.1.3. Aufgabe 3

1.2 Deskriptive überbetriebliche Standortmodelle

Sowohl Prülisten- als auch Rangfolge-Verfahren bestimmen den besten Standort für eine neue Einrichtung basierend auf Standortfaktoren.

1.2.1 Prüflisten-Verfahren

Vorgehensweise:

- Zusammenstellung der dem jeweiligen Problem angemessenen Standort- faktoren. Bei dieser Aufstellung bedarf es großer Umsicht.
- Für jeden, der als relevant erachteten Standortfaktoren, ist zu überprüfen und entsprechend zu kennzeichnen, z. B. durch ein Kreuz, an welchem Standort der Faktor küntig am besten erfüllt sein wird.

Bei dieser Vorgehensweise werden einige Standorte mehrere Kennzeichnungen auf sich vereinen und deshalb als besonders günstig erscheinen, während andere möglicherweise leer ausgehen.

Note 1. Wähle den Standort mit meisten Kreuze

Example 1.2.1.

Beispiel

Gegeben seien 6 Standorte, A – F, und 6 als relevant erkannte Faktoren (I – VI) zusammen mit den entsprechenden Markierungen, welche den höchsten Erfüllungsgrad unter allen Alternativen kennzeichnen.

Standort	relevante Standortfaktoren					
	I	II	III	IV	V	VI
A		X				
B	X			X		
C						X
D						
E					X	
F			X			

← Standort B ist der am besten geeignete

Abbildung 1.1: Prüflisten-Verfahren Bsp

1.2.2 Rangfolge-Verfahren

Vorgehensweise:

- Zusammenfassung der dem Problem angemessenen Standortfaktoren
- Ermittlung einer Gewichtungszahl für jeden Standortfaktoren
- Finde die höchste Gesamtwertigkeit

Example 1.2.2.

Beispiel

Gegeben seien 6 Standorte (A – F) sowie 2 Standortfaktoren (I und II) zusammen mit den entsprechenden Gewichtungszahlen (GZ), Rangwerten (RW) und den daraus resultierenden Wertigkeitsziffern (WZ).

Standort	Standortfaktor I			Standortfaktor II			Gesamt-wertigkeit
	RW	GZ	WZ	RW	GZ	WZ	
A	2	0.3	0.6	4	0.7	2.8	3.4
B	1	0.3	0.3	2	0.7	1.4	1.7
C	3	0.3	0.9	1	0.7	0.7	1.6
D	4	0.3	1.2	6	0.7	4.2	5.4
E	5	0.3	1.5	5	0.7	3.5	5.0
F	6	0.3	1.8	3	0.7	2.1	3.9

Standort D, welcher die höchste Gesamtwertigkeit aufweist, ist als optimal zu bezeichnen.

Abbildung 1.2: Rangfolge-Verfahren Bsp

1.3 Standortplanung unter Wettbewerb

Ziel: eine oder mehrere neue Einrichtung so zu platzieren, dass der Marktanteil und Gewinn der eigenen Firma maximiert wird.

1.3.1 Modelle mit vollständiger Zuordnung

Der Bedarf jedes Kunden wird von genau einer Einrichtung vollständig befriedigt. (Bei diesen Modellen lässt sich für jeden Kunden eindeutig entscheiden, welche Einrichtung für ihn die Beste oder Attraktivste ist.)

Definition 1.3.1. Indifferenzmenge
die Menge aller Punkte, welche gleichweit von den beiden Standorten x_A und x_B entfernt liegen

$$IS_{AB} := \{x \in \mathbb{R} | l_2(x; x_A) = l_2(x; x_B)\} \tag{1.5}$$

1.3.1.1 Voroni-diagramm

Example 1.3.1. Aufgabe 5

1.3.2 Modelle mit partieller Aufteilung

Bei diesen Modellen verteilen die Kunden ihre Nachfrage anteilig auf mehrere Einrichtungen.

1.3.2.1 Gravitions-Modelle (Das Modell von Huff)

Definition 1.3.2. Anziehungskraft der Einrichtung E auf den Kunden K

$$A(E,K) = \frac{w_E}{d(K,E)^r} \tag{1.6}$$

- w_E: Größe der Einrichtung E an diesem Standort
- $d(K,E)$: die Entfernung vom Kunden K zum Standort der Einrichtung E
- r: eine Potenz (Verfallskonstante) für die Entfernung

Die Wahrscheinlichkeit P, dass ein Kunde eine Einrichtung an einem bestimmten Standort besucht, berechnet sich nach diesem Modell folgendermaßen:

$$P(E,K) = \frac{A(E,K)}{\sum_{\text{alle}\bar{E}} A(\bar{E},K)} \tag{1.7}$$

Definition 1.3.3. Indifferenzmege zweier Einrichtungen
die Menge alle Punkte, welche beide Einrichtungen mit derselben Wahrscheinlichkeit aufsuchen.

Der Anteil der Nachfrage eines Kunden, welcher auf eine bestimmte Einrichtung entfällt, ergibt sich aus dem Produkt der Gesamtnachfrage des Kunden mit der „Besuchs"-Wahrscheinlichkeit

$$D(E,K) = D(K) \cdot P(K,E) \tag{1.8}$$

- $D(K)$: Gesammtnachfrage des Kunden

Gesamtnachfrage einer Einrichtung = Summe aller Anteile von Kundennachfragen

$$D(E) = \sum_{\text{alle } K} D(E,K) \tag{1.9}$$

gesamte Marktanteil der Einrichtung:

$$MS(E) = \frac{D(E)}{\sum_{\text{alle } K} D(K)} \tag{1.10}$$

Kriterium für Standort einer neuen Einrichtung $\bar{E}$:

$$\underset{\bar{E}}{\text{argmax}} \quad \text{MS(einige Firma)} = \frac{D(\bar{E}) + \sum_{\text{eigene, bereits exist. } E} D(E)}{\sum_{\text{alle } K} D(K)}$$

Zusammenfassung

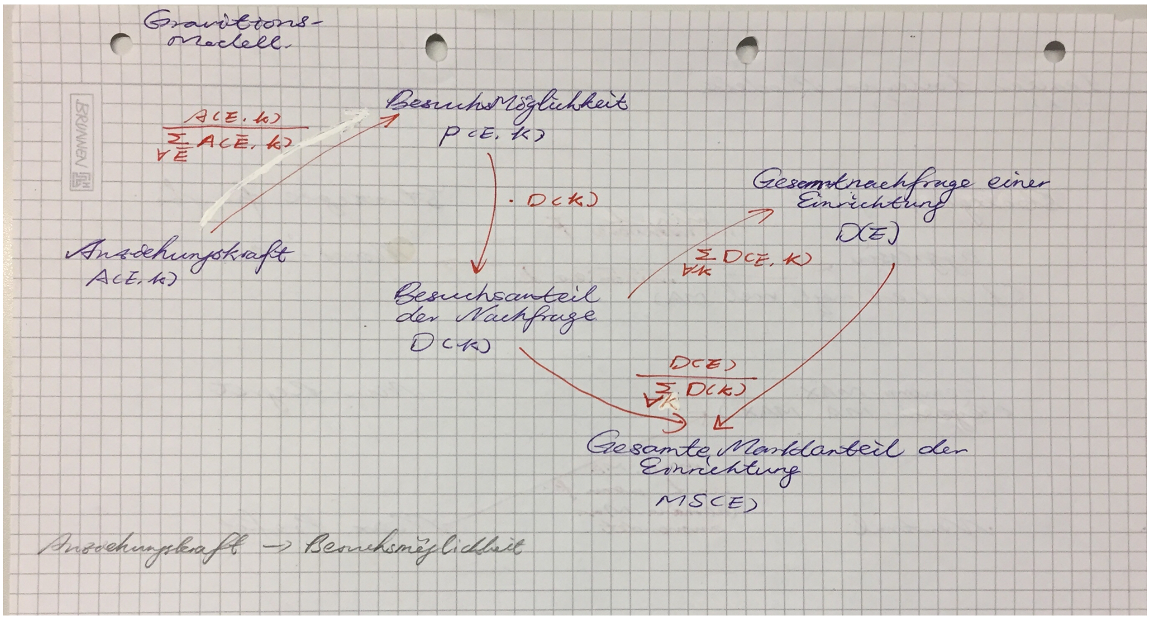


Abbildung 1.3: Gravitionsmodelle

Example 1.3.2. Aufgabe 4

1.3.3 Leader-Follower-Modelle

1.3.3.1 Regeln

- Bei diesen Modellen platzieren zwei Wettbewerber nacheinander neue Einrichtungen in einem (bisher unerschlossenen) Markt.
- Dabei wählt zuerst der Leader (Erstplatzierende) L Standorte für all seine neuen Einrichtungen und danach der Follower (Zweitplatzierende) F.
- Standortwahl von L und F beeinflussen sich gegenseitig.

1.3.3.2 Probleme / Herausforderungen

- **Follower** F
  Braucht sich erst auf eine Platzierungsstrategie festlegen, wenn der Erstplatzierende L seine Standortwahl schon getroffen hat.
- **Leader** L
  Hat das Problem, dass er die Platzierungsstrategie von F nicht kennt.

1.3.3.3 Typische Stategien für Follower F

- **Aggressiv**
  Platziere neue Einrichtungen so, dass L möglichst viel Marktanteil verliert.
- **Gewinnmaximierend**
  Platziere neue Einrichtungen so, dass der eigene Marktanteil maximal wird.
- **Neutral**
  Platziere neue Einrichtungen nach anderen Kriterien.

1.3.3.4 Verschiedene Strategien für Leader L

- **Maxi-Min**
  L platziert neue Einrichtungen so, dass sein Marktanteil maximal wird, wenn F eine aggressive Strategie anwendet, d. h. F das Ziel hat den Marktanteil von L zu minimieren.

> **Rechenweg**:
> 1. Bestimme zu jedem L denjenigen Follower-Standort $\tilde{f}$, der dem Leader den geringsten Gewinn bringt, wenn der Leader bei l platziert.
> 2. Berechne den daraus resultierenden Marktanteil des Leaders
> 3. Wähle den Standort, für den der Marktanteil des Leaders maximal wird

- **Min-Regret (minimales Bedauern)**
  L platziert neue Einrichtungen so, dass, egal welche Standortentscheidung F dann trifft, der Zugewinn an Marktanteil für L durch eine mögliche Andersplatzierung seiner Einrichtungen (nachdem F seine Wahl getroffen hat) minimal wird.
- **Max-Profit**
  L platziert neue Einrichtungen so, dass ein Marktanteil maximal wird. wenn F ebenfalls eine geweinnmaximierende Strategie anwendet.

> **Rechenweg**:
> 1. Bestimme zu jedem L denjenigen Follower-Standort $\tilde{f}$, der dem Follower den größten Gewinn bringt, wenn der Leader bei l platziert.
> 2. Berechne den daraus resultierenden Marktanteil des Leaders
> 3. Wähle den Standort, für den der Marktanteil des Leaders maximal wird

Zusammenfassung

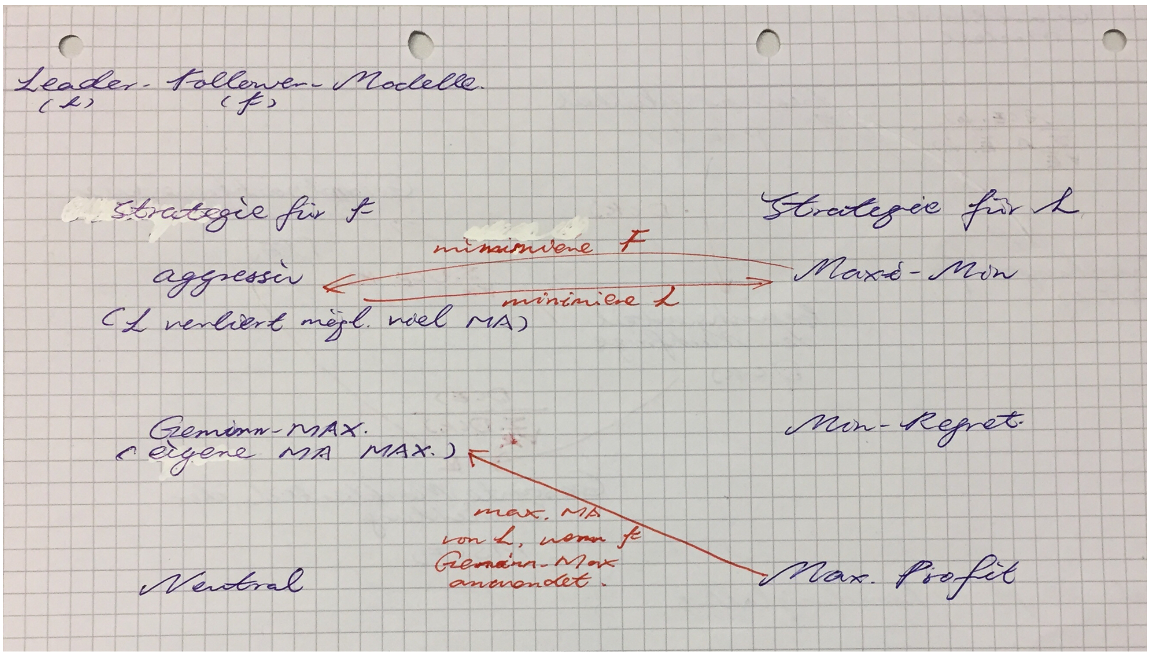


Abbildung 1.4: Leader-Follower-Modelle

Example 1.3.3. Aufgabe 6

Kapitel 2

Standortplanung in der Ebene

2.1 Theorie der Standortplanung

Grundlegende Aufgabenstellung

Platzierung ein oder mehrerer neuer Einrichtungen in Abhängigkeit bereits existierender Einrichtungen

Drei Klassen von Standortproblemen:

- **Standortprobleme in der Ebene** (Einfachste, allerdings auch unrealistichste Problemklasse)
- **Standortprobleme auf Netzwerken** (praxisbezug viel ausgeprägter als bei planaren Standortproblemen)
- **Diskrete Standortprobleme** (realistischste und flexibelste Klasse von Standortproblemen)

2.2 Begriffe und Notationen

Definition 2.2.1. Standorte als Punkte idealisiert

Definition 2.2.2. Neue Einrichtungen $X = x_1, \dots, x_p, p \geq 1$

- dürfen überall in der Ebene platziert werden
- ihre Standorte werden durch Koordinaten repräsentiert

$$x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}) \in \mathbb{R}^2, \forall i = 1, \dots, p$$

Definition 2.2.3. Existierende Einrichtungen (Kunden) $A = a_1, \dots, a_n$

- werden durch eine Menge von Punkten in der Ebene repräsentiert

$$a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}) \in \mathbb{R}^2, \forall i = 1, \dots, n$$

- Jedem Kunden $a_i \in A$ wird ein positives Gewicht $w_i > 0$ zugeordnet.

Definition 2.2.4. Kosten
Lediglich Transportkosten werden berücksichtigt. Sie sind proportional zur Menge und zur zurückgelegten Entfernung.

2.2.1 Distanzmessung

Definition 2.2.5. Metrik / Distanzfunktion $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

welche für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$ folgende Eigenschaften erfüllt:

- Definitheit: $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$
- Dreiecks-Ungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

2.2.2 l_p-Metrik

$$l_p(x, y) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p}, p \geq 1 \tag{2.1}$$

Rechtwinklige Entfernung (l_1- oder Manhatten-Metrik)

$$l_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \tag{2.2}$$

Euklidische Entfernung (l_2- oder Luftlinien-Metrik)

$$l_2(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} \tag{2.3}$$

Quadrierte euklidische Entfernung (l_2^2--Metrik)

$$l_2(x, y) = |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 \tag{2.4}$$

Tchebychev Entfernung (l_∞-Metrik)

$$l_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \tag{2.5}$$

2.3 1-Medianprobleme

2.3.1 Einleitung

2.3.1.1 Aufgabe

Platziere eine neue Einrichtung so in der Ebene, dass die Summe der gewichteten Entfernungen von dem neuen Standort zu allen Kunden minimal wird.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) := \sum_{i=1}^{n} w_i d(x, a_i) \tag{2.6}$$

- $A = a_1, \ldots, a_n$: die n Kunden
- $w_i > 0, i = 1, \ldots, n$: die damit assoziierten Gewichte
- x: der gesuchte Standort der neuen Einrichtung
- d: eine Metrik

Nenne einen Punkt $x^* \in \mathbb{R}^2$, welcher die Funktion $f(x)$ minimiert ($f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^2$), **optimal**. Bezeichne die Menge aller optimalen Punkte der Funktion $f(\cdot)$ mit $\mathcal{X}^*(f)$.

2.3.1.2 Dominanzkriterium

Gilt für einen Kunden a_k mit zugehörigem Geweicht w_k, dass

$$w_k \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i,$$

d. h. der Kunde vereinigt mindestens die Hälfte aller Gewichte auf sich, so ist der Standort des Kunden a_k eine optimale Lösung des Problems.

2.3.2 1-Medianprobleme mit l_1-Metrik

Zielfunktion

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{n} w_i l_1(x, a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i l_1(|x_1 - a_{i,1}| + |x_2 - a_{i,2}|) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} w_i l_1(|x_1 - a_{i,1}|)}_{=:f_1(x_1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} w_i l_1(|x_2 - a_{i,2}|}_{=:f_2(x_2)} \end{aligned} \tag{2.7}$$

→ Die ursprüngliche Aufgabe reduziert sich auf das Lösen zweier 1-dimensionaler Probleme, sogenannter "Probleme auf der Linie".

2.3.2.1 Das 1-Medianproblem mit $l1$-Metrik auf der Linie

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) := \sum_{i=1} n w_i \, |x - a_i|$$

Algorithm 2 Lösungsverfahren für das 1-Medianproblem mit $l1$-Metrik auf der Linie

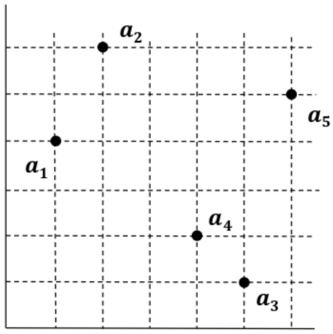
1: Berechne die Summe W aller Gewichte $W := \sum_{i=1} n w_i$
2: **if** (**then**Es exist. ein $w_k \geq \frac{1}{2}W$)
3: Der Kundenstandort a_k ist eine optimale Lösung, $x^* = a_k$
4: Stopp
5: **else**
6: Sortiere die Kundenstandorte $a_1, \ldots, a_n$ nach monoton wachsenden Koordinaten $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \cdots \leq a_{i_n}$
7: Bestimme unter Berücksichtigung einer zu den Kundenstandorten analogen Sortierung der Gewichte dasjenige h, für welches folgendes gilt:

$$\sum_{j=1}^{h-1} w_{i_j} < \frac{1}{2}W \text{ und } \sum_{j=1}^{h} w_{i_j} \geq \frac{1}{2}W$$

(die Gewichte der Reihe nach so lange aufsummiert, bis diese Summe gerade eben mehr als die Hälfte der gesamten Gewichte umfasst.)
8: $x^* = a_{i_h}$ ist die Koordinate eines optimalen Standorts, d.h. $\mathcal{X}^*(f) = \{a_{i_h}\}$
9: **end if**

Example 2.3.1.

1-Medianprobleme mit l_1-Metrik



Beispiel: 2-dimensionales Problem

Sei $A = \{(1,4),(2,6),(5,1),(4,2),(6,5)\}$ und $w = \{2,3,1,1,2\}$.
Kundenstandorte für das erste Teilproblem:

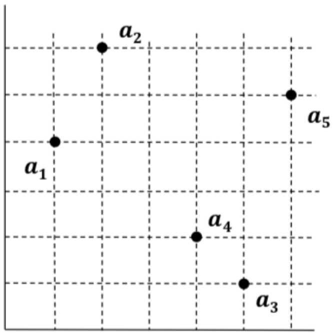
$a_{1,1} = 1,\ a_{2,1} = 2,\ a_{3,1} = 5,\ a_{4,1} = 4,\ a_{5,1} = 6$

Verfahren

1. $W = 2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9.$
2. Dominanzkriterium ist für keinen der Kunden erfüllt.
3. Sortierung der Kundenstandorte liefert $a_{1,1} \leq a_{2,1} \leq a_{4,1} \leq a_{3,1} \leq a_{5,1}$
4. Aus 3. ⇒ Reihenfolge der aufzusummierenden Gewichte ist $\{w_1, w_2, w_4, w_3, w_5\} = \{2,3,1,1,2\}$.

   Man erhält $w_1 = 2 < \frac{1}{2}W = 4.5$ und $w_1 + w_2 = 5 > \frac{1}{2}W$.
5. $x_1 = a_{2,1} = 2$ ist der optimale Standort für das erste Teilproblem.

1-Medianprobleme mit l_1-Metrik



Kundenstandorte für das zweite Teilproblem:

$a_{1,2} = 4,\ a_{2,2} = 6,\ a_{3,2} = 1,\ a_{4,2} = 2,\ a_{5,2} = 5$

Schritte 1. und 2. gelten unverändert für das zweite Teilproblem.

Verfahren

3. Sortierung der Kundenstandorte liefert
   $a_{3,2} \leq a_{4,2} \leq a_{1,2} \leq a_{5,2} \leq a_{2,2}$
4. Aus 3. ⇒ Reihenfolge der aufzusummierenden Gewichte
   $\{w_3, w_4, w_1, w_5, w_2\} = \{1,1,2,2,3\}$
   Man erhält $w_3 + w_4 + w_1 = 4 < \frac{1}{2}W$ und $w_3 + w_4 + w_1 + w_5 = 6 > \frac{1}{2}W$.
5. Damit ist $x_2 = a_{5,2} = 5$ der optimale Standort für das zweite Teilproblem.

Optimale Lösung des Problems $x^* = (2,5)$ mit Zielfunktionswert $f(x^*) = 27$

Abbildung 2.1: das 1 medianproblem mit metrik auf der linie

Restriktive Standortprobleme mit verbotenes Gebiet R

potentielle Standorte: Schnittpunkte der achsenparallelen Geraden durch Kunden mit verboten Gebiet

Example 2.3.2. Aufgabe 7(b)

2.3.3 1-Medianprobleme mit $l_2{}^2$-Metrik

Zielfunktion

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{n} w_i l_2^2(x, a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i l_2^2((x_1 - a_{i,1})^2 + (x_2 - a_{i,2})^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i l_2^2(x_1 - a_{i,1})^2 + \sum_{i=1}^{n} w_i l_2^2(x_2 - a_{i,2})^2 \\ &=: f_1(x_1) + f_2(x_2) \end{aligned} \tag{2.8}$$

$f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$ sind differenzierbar.

Ableiten nach x_1 bzw. x_2 und Nullsetzen der jeweiligen Ableitung ergibt:

$$\underbrace{x^*}_{Schwerpunkt} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n w_i a_{i,1}}{\sum_{i=1}^n w_i}, \frac{\sum_{i=1}^n w_i a_{i,2}}{\sum_{i=1}^n w_i} \right)$$

2.3.4 1-Medianprobleme mit l_2-Metrik

Zielfunktion

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i l_2(x, a_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i \sqrt{(x_1 - a_{i,1})^2 + (x_2 - a_{i,2})^2} \tag{2.9}$$

Die Zielfunktion ist nicht zerlegbar!

Verschärftes Dominanzkriterium

Der Standort a_j eines Kunden ist optimal, falls

$$\gamma(a_j) := l_2(\sum_{i=1, i \neq j} w_i \frac{a_j - a_i}{l2(a_j, a_i)}, \mathbf{0}) \leq w_j, \mathbf{0} = (0, 0) \tag{2.10}$$

Algorithm 3 Das Approximations-Verfahren von Weiszfeld

if (Verschärftes Dominanzkriterium $\gamma(a_j) \leq w_j$ erfüllt) **then**
  $x^* = a_j$, **STOPP!**
else
  $k := 0$
  $x^{(0)} := \frac{\sum_{i=1}^n w_i a_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$ (Schwerpunkt)
  while $(!(\delta^(k+1) := \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)})}{f(x^{(k)})} \leq \delta)$ **do**
    $x^{(k+1)} := \frac{\sum_{i=1}^n w_i \frac{a_i}{l_2(x^{(k)}, a_i)}}{\sum_{i=1}^n w_i \frac{1}{l_2(x^{(k)}, a_i)}}$
    $k := k + 1$
  end while
end if

2.4 1-Centerprobleme

2.4.1 Aufgabe

Platziere eine neue Einrichtung so in der Ebene, dass die maximale gewichtete Entfernung von dem neuen Standort zu den Kunden minimal wird.

2.4.2 formel

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} g(x) \text{ mit } g(x) := \max_{i=1,\ldots,n} w_i d(x,a_i) \tag{2.11}$$

2.4.3 1-Centerprobleme mit l_1-Metrik

Zielfunktion

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{i=1,\ldots,n} w_i l_1 x, a_i \\ &= \max_{i=1,\ldots,n} w_i(|x_1 - a_{i,1}| + |x_2 - a_{i,2}|) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Algorithm 4 Lösungsverfahren für das l_1-Centerproblem

1: Transformiere alle Kundenstandorte mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2: Finde eine optimale Lösung x^*_∞ des l_∞-Problems mit den Kundenstandorten A'

3: Erhalte eine optimale Lösimg x^* des l_1-Problems:

$$x^* = x^*_\infty \cdot T^{-1}$$

2.4.3.1 1-Centerprobleme mit l_∞-Metrik

Zielfunktion

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{i=1,\ldots,n} w_i l_\infty(x, a_i) \\ &= \max_{i=1,\ldots,n} w_i(|x_1 - a_{i,1}|, |x_2 - a_{i,2}|) \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.4.3.1.1 Der ungewichtete Fall

Umformulierung des Problems:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} \max_{i=1,\ldots,n} l_\infty(x,a_i) \Leftrightarrow \min z, \text{u.d.N } l_\infty(x,a_i) \leq z, \forall i = 1,\ldots,n$$

$\Rightarrow$ Minimiere z unter der Nebenbedingung, dass die Entfernung von einem Punkt x zu allen Kundenstandorten kleiner oder gleich z ist ($l_{\infty(x,a_i)} \leq z, \forall i = 1,\ldots,n$).

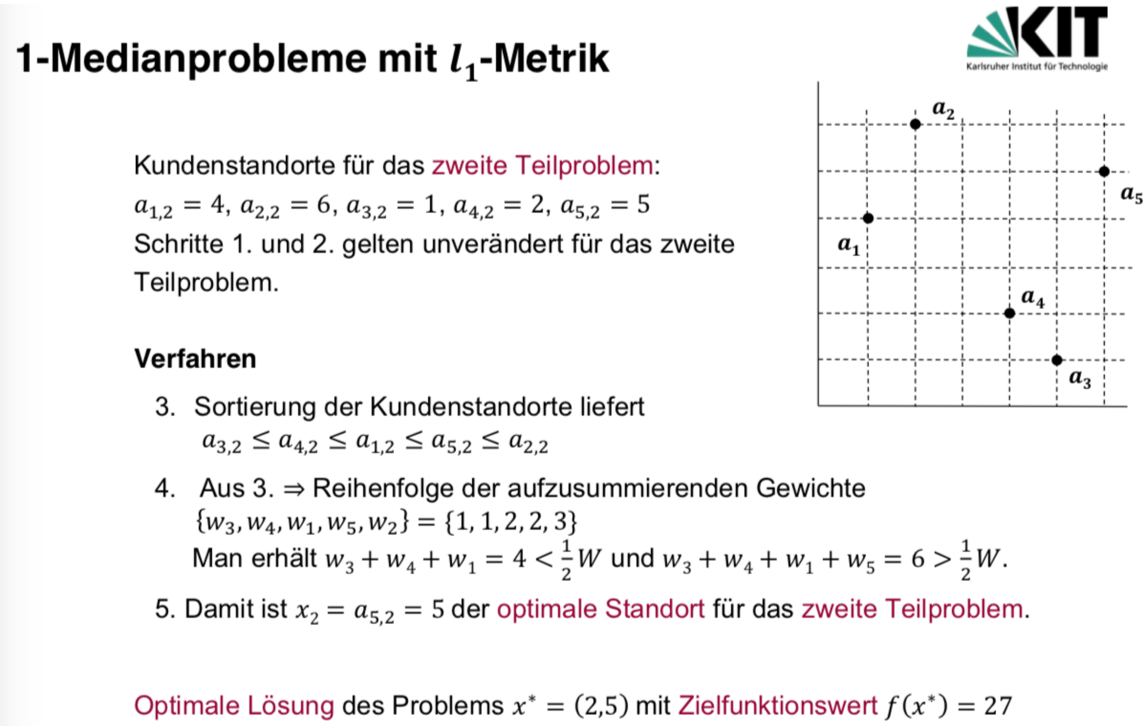
Algorithm 5 Lösungsverfahren für ungewichtete 1-Centreprobleme mit l_∞-Metrik

Berechne für die Kundenstandorte das umschreibende Rechteck R. R ist durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte (ul, or) eindeutig bestimmt.
if (R ist ein Quadrat) **then**
  x^* =Mittelpunkt von R, **STOPP!**
else
  Dehne das Rechteck R entlang der kürzeren Seiten in beide Richtungen jeweils zu einem Quadrat Q_1 und Q_2 aus.
  Die Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten M_1 und M_2 der beiden Quadrate Q_1 und Q_2 ist die optimale Lösungsmenge

$$\mathcal{X}^*(g) = \overline{M_1M_2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \lambda M_1 + (1-\lambda)M_2, \forall\lambda \in [0,1]\} \tag{2.14}$$

end if

Example 2.4.1.



2.4.3.1.2 Der allgemeine gewichtete Fall

Zielfunktion

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{i=1,\ldots,n} w_i \max\{|x_1 - a_{i,1}|, |x_2 - a_{i,2}|\} \\ &= \max\{\underbrace{\max_{i=1,\ldots,n} w_i|x_1 - a_{i,1}|}_{g_1(x_1}, \underbrace{\max_{i=1,\ldots,n} w_i|x_2 - a_{i,2}|}_{g_2(x_2}\} \end{aligned} \tag{2.15}$$

⇒ Das l_∞-Centerproblem lässt sich in zwei voneinander unabhängige Teilprobleme zerlegen.

Das 1-Centerproblem mit l_∞-Metrik auf der Linie

$$\min_{x\in\mathbb{R}} g(x) \text{ mit } g(x) := \max_{i=1,\ldots,n} w_i|x - a_i|$$

Algorithm 6 Lösungsverfahren für gewichtete 1-Centreprobleme mit l_∞-Metrik auf der Linie

1: Berechne für jedes i und j mit $i, j \in 1, \ldots, n$

$$\delta_{ij} = \frac{w_i w_j}{w_i + w_j}(a_j - a_i)$$

(Es gilt: $\delta_{ij} = -\delta ji \Rightarrow$ Es reicht aus, δ_{ij} oder δ_{ji} zu berechnen; je nachdem ob $a_i \leq a_j$ oder $a_i > a_j$)

2: Ermittle

$$\delta_{pq} = max\{\delta_{ij} : i, j \in \{1, \ldots, n\}\}$$

3: Optimal Lösung:

$$z^* = \delta_{pq} \text{ und } x^* = \frac{w_p a_p + w_q a_q}{w_p + w_q}$$

Example 2.4.2.

1-Centerprobleme mit l_∞-Metrik auf der Linie

Beispiel

Sei $A = \{1, 2, 5, 4, 6\}$ und $w = \{2,3,1,1,2\}$.

Verfahren

1.

i	j	$a_i \leq a_j$?	δ_{ij}
1	2	$1 \leq 2$	$\delta_{12} = (a_2 - a_1) \cdot (w_1 \cdot w_2)/(w_1 + w_2) = (2-1) \cdot 2 \cdot 3/(2+3) = 1.2$
	3	$1 \leq 5$	$\delta_{13} = (a_3 - a_1) \cdot (w_1 \cdot w_3)/(w_1 + w_3) = (5-1) \cdot 2 \cdot 1/(2+1) = 2.66$
	4	$1 \leq 4$	$\delta_{14} = (a_4 - a_1) \cdot (w_1 \cdot w_4)/(w_1 + w_4) = (4-1) \cdot 2 \cdot 1/(2+1) = 2.0$
	5	$1 \leq 6$	$\delta_{15} = (a_5 - a_1) \cdot (w_1 \cdot w_5)/(w_1 + w_5) = (6-1) \cdot 2 \cdot 2/(2+2) = 5.0$
2	3	$2 \leq 5$	$\delta_{23} = 2.25$
	4	$2 \leq 4$	$\delta_{24} = 1.5$
	5	$2 \leq 6$	$\delta_{25} = 4.8$
3	4	$5 > 4$	$-\delta_{34} = \delta_{43} = 0.5$
	5	$5 \leq 6$	$\delta_{35} = 0.66$
4	5	$4 \leq 6$	$\delta_{45} = 1.33$

2. $\boldsymbol{\delta_{pq} = \delta_{15} = 5.}$

3. $\boldsymbol{z^* = \delta_{15} = 5}$ **und** $\boldsymbol{x^* = (w_1 \cdot a_1 + w_5 \cdot a_5)/(w_1 + w_5) = (2 \cdot 1 + 2 \cdot 6)/(2+2) = 3.5}$

Abbildung 2.2: Das 1-Centerproblem mit l_∞-Metrik auf der Linie

Kombination der Lösungen der Einzelprobleme

Seien (x_1^*, z_1^*) und (x_2^*, z_2^*) optimale Lösungen der zwei Teilprobleme.

Dann ist $x^* := (x_1^*, x_2^*)$ eine optimale Lösungen mit $z^* = g(x^*) = \max\{g(x_1^*), g(x_2^*)\} = \max\{z_1^*, z_2^*\}$.

Menge aller optimalen Lösungen ist

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^*(g) &= \mathcal{X}^*(g_1) \times \mathcal{X}^*(g_2) \\ &= [A_1^-(z^*), A_1^+(z^*)] \times [A_2^-(z^*), A_2^+(z^*)] \end{aligned}$$

- $A^-(z) := \max\limits_{i=1,\ldots,n} a_i - \frac{z}{a_i}$
- $A^+(z) := \max\limits_{i=1,\ldots,n} a_i + \frac{z}{a_i}$

2.4.4 1-Centerprobleme mit l_2-Metrik

2.4.4.1 Zielfunktion

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{i=1,\dots,n} w_i l_2(x, a_i) \\ &= \max_{i=1,\dots,n} w_i \sqrt{(x_1 - a_{i,1})^2 + (x_2 - a_{i,2})^2} \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.4.4.2 Der ungewichtete Fall: Das Kreis-Überdeckungsproblem

Umformulierung des Problems:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \max_{i=1,\dots,n} w_i l_2(x, a_i) \Leftrightarrow \min z, \text{u.d.N. } l_2(x, a_i) \leq z, \forall i = 1, \dots, n$$

$\Rightarrow$ **Das minimale Kreis-Überdeckungsproblem**: Minimiere z unter der Nebenbedingung, dass die Entfernung von einem Punkt x zu allen Kundenstandorten kleiner oder gleich z ist.

Algorithm 7 Enumertations-Verfahren

1: Berechne alle minimalüberdeckenden Kreise von zwei oder drei Kundenstandorten a_i, a_j und $a_k \in A$
2: Verwirf alle so gewonnen minimalüberdeckenden Kreise, die nicht alle Kundenstandorten überdecken.
3: Der verbleibende MÜK (Minimal Überdeckender Kreis) ist der MÜK für alle Kundenstandorten

Komplexität:$O(n^4) \rightarrow$ zu langsam!

Algorithm 8 Verfahren von Elzinga & Hearn

1: Starte mit dem MÜK zweier beliebiger Kundenstandorten a und b
2: Werden alle Kunden von dem Kreis überdeckt $\Rightarrow$ Schritt 9
3: Wähle einen Kunden c, der noch nicht überdeckt wird, und konstruiere den MÜK für diese drei Kunden.
4: Werden alle Kunden von dem Kreis überdeckt $\Rightarrow$ Schritt 9.
5: Wird der MÜK von zwei Kunden a und b bestimmt $\Rightarrow$ fahre mit a und b fort mit Schritt 3, $\Rightarrow$ andernfalls fahre mit allen dreien fort mit Schritt 6.
6: Wähle einen weiteren Kunden d, der noch nicht überdeckt wird, und konstruiere (mit Hilfe des Enumerations-Verfahrens) den MÜK für diese vier Kunden.
7: Werden alle Kunden von dem Kreis überdeckt $\Rightarrow$ Schritt 9
8: Wird der MÜK von zwei Kunden a und b bestimmt $\Rightarrow$ fahre mit a und b fort mit Schritt 3, $\Rightarrow$ andernfalls fahre mit den drei MÜK-definierenden Kunden fort mit Schritt 6.
9: Der momentane MÜK überdeckt alle Kundenstandorte und ist somit der optimale.

Example 2.4.3.

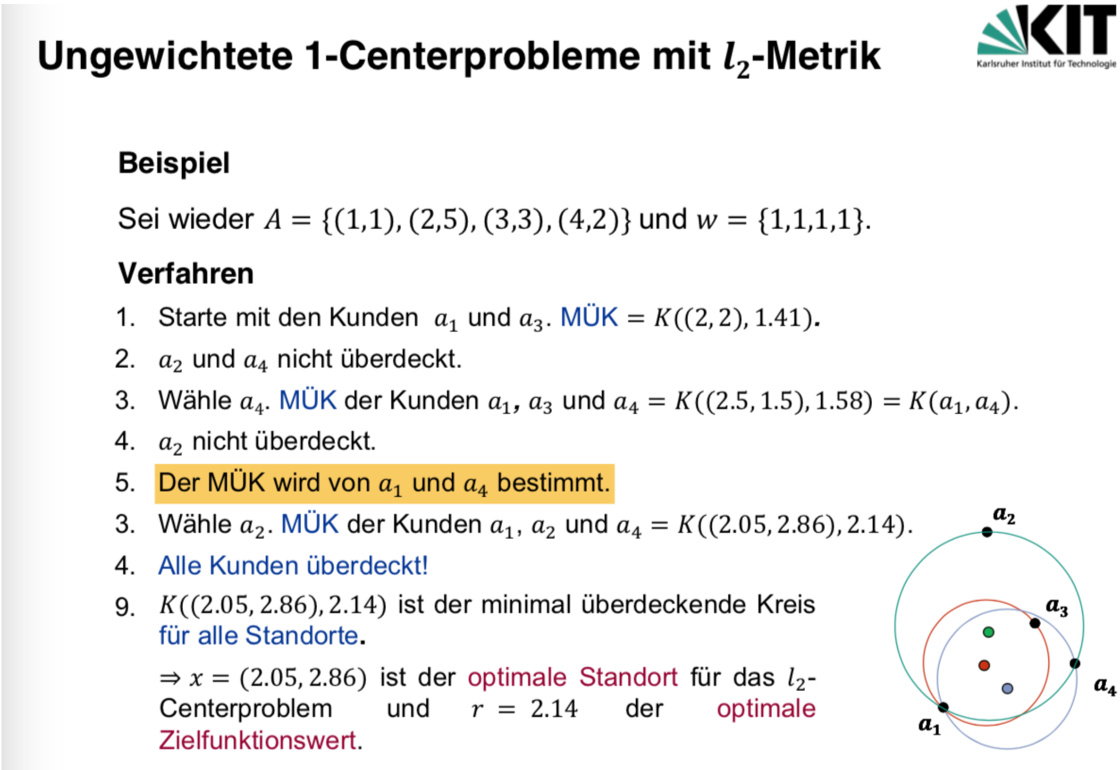


Abbildung 2.3: Verfahren von Elzinga & Hearn

2.5 Mehrstandortprobleme

Platziere p neue Einrichtungen $X = x_1, \dots, x_p, p \geq 2$ in der Ebene

- Modellen mit Interaktion
  - Neue Einrichtungen bieten jeweils unterschiedlichen Service (verschiedene Güter) an.
  - Kunden haben Nachfrage nach unterschiedlichen Serviceleistungen (Gütern) von mehreren der neuen Einrichtungen.
  - Interaktion, z. B. Austausch von Gütern, zwischen neuen Einrichtungen erlaubt.
- Zuordnungs-Modellen (Standort-Einzugsbereichs-Modellen
  - Neue Einrichtungen bieten alle gleichen Service (identische Güter) an.
  - Kunden befriedigen ihre Nachfrage von einem der neuen Standorte.

2.5.1 Modelle mit Interaktion

2.5.1.1 Annahmen

Nachfrage des Kunden i nach einem Service der neuen Einrichtung k: w_ik
Interaktion zwischen zwei neuen Einrichtungen k udn l: s_{kl}

2.5.1.2 Zielfunktion

$$\min_{X \subseteq \mathbb{R}^2, |X|=p} f(X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} wikd(x_k, a_i) + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^{p} s_{kl} d(x_k, x_l) \tag{2.17}$$

2.5.1.3 Notationen

$x_1, \dots, x_p$ sind nun Punkte mit Koordinaten $x_{k,1}$ und $x_{k,2}, k = 1, \dots, p$
$X_1 := x_{1,1}, \dots, x_{p,1}$ und $X_2 := x_{1,2}, \dots, x_{p,2}$

2.5.1.4 Das Interaktions-Modell mit l_1-Metrik

Zielfunktion

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} w_{ik}(|x_{k,1}-a_{i,1}|+|x_{k,2}-a_{i,2}|) + \sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=k+1}^{p} s_{kl}(|x_{k,1}-x_{l,1}|+|x_{k,2}-x_{l,2}|) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} w_{ik}|x_{k,1}-a_{i,1}| + \sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=k+1}^{p} s_{kl}|x_{k,1}-x_{l,1}|}_{=:f_1(X_1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} w_{ik}|x_{k,2}-a_{i,2}| + \sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=k+1}^{p} s_{kl}|x_{k,2}-x_{l,2}|}_{f_2(X_2)} \end{aligned} \tag{2.18}$$

$\rightarrow$Zielfunktion zerfällt in zwei voneinander unabhängige Funktionen.
Das Interaktions-Modell mit l_1-Metrik auf der Linie
Zielfunktion

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} w_{ik}|x_k-a_i| + \sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=k+1}^{p} s_{kl}|x_k-x_l| \tag{2.19}$$

Umformulierung als lineares Programm

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $c, d \in \mathbb{R}_+$

Gilt:

$$c \cdot d = 0 \text{ und } a - b = c - d$$

Dann:

$$|a-b| = c + d$$

Ersetze:

$$|x_k - a_i| = \alpha_{ik} + \beta_{ik} \in \mathbb{R}_+, \text{für } \alpha_{ik}, \beta_{ik} \in \mathbb{R}_+$$

und

$$|x_k - x_l| = \gamma_{kl} + \delta_{kl} \in \mathbb{R}_+, \text{für } \in \gamma_{kl}, \delta_{kl} \in \mathbb{R}_+$$

Dann:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} w_{ik}(\alpha_{ik}+\beta_{ik}) + \sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=k+1}^{p} s_{kl}(\gamma_{kl}+\delta_{kl}) \\ \text{u.d.N} \quad & x_k - \alpha_{ik} + \beta_{ik} = a_i, \quad \forall i = 1,\dots,n, k = 1,\dots,p \\ & \alpha_{ik} \cdot \beta_{ik} = 0, \quad \forall i = 1,\dots,n, k = 1,\dots,p \\ & x_k - x_l - \gamma_{kl} + \delta_{kl} = 0, \quad \forall k, l = 1,\dots,p, k < l \\ & \gamma_{kl} \cdot \delta_{kl} = 0, \quad \forall k, l = 1,\dots,p, k < l \\ & \alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{kl}, \delta_{kl} \geq 0, \quad \forall i, k, l \text{ und } x_k, x_l \in \mathbb{R}, \forall k, l \end{aligned} \tag{2.20}$$

Example 2.5.1.

Mehrstandortprobleme mit Interaktion

Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel für ein 2-dimensionales Problem

Sei $A = \{(10{,}15), (20{,}25), (40{,}5)\}$, $w_1 = \{2{,}4\}$, $w_2 = \{1{,}0\}$, $w_3 = \{0{,}5\}$, $s_{k\ell} = 2$.

Teilproblem 1: Kundenstandorte $a_{1,1} = 10$, $a_{2,1} = 20$, $a_{3,1} = 40$

$$\min\ 2(\alpha_{11} + \beta_{11}) + 4(\alpha_{12} + \beta_{12}) + 1(\alpha_{21} + \beta_{21}) + 5(\alpha_{32} + \beta_{32}) + 2(\gamma_{12} + \delta_{12})$$

$$\begin{array}{llllll}
\text{u.d.N.} & x_1 & & -\alpha_{11} & +\beta_{11} & = 10 \\
& x_2 & & -\alpha_{12} & +\beta_{12} & = 10 \\
& x_1 & & -\alpha_{21} & +\beta_{21} & = 20 \\
& x_2 & & -\alpha_{32} & +\beta_{32} & = 40 \\
& x_1 & -x_2 & -\gamma_{12} & +\delta_{12} & = 0
\end{array}$$

Optimale Lösung

$$x^*_{1,1},\ x^*_{2,1} \in [10{,}20],\ \ f_1(X^*_1) = f_1\left(\{x^*_{1,1}, x^*_{2,1}\}\right) = 160$$

Abbildung 2.4: Mehrstandorten Problem mit Interaktion Umformulierung Bsp

2.5.1.5 Das Interaktions-Modell mit l_2-Metrik

2.6 Zuordnungs-Modelle

- Neue Einrichtungen bieten alle gleichen Service (identische Güter) an.
- Kunden befriedigen ihre Nachfrage von einem der neuen Standorte.

Präferenzfunktion

Definiere eine Präferenzfunktion, welche jeden Kunden einer neuen Einrichtung zuordnet:

$$\text{Präf} : A \to X \qquad \text{Präf}(a_i) = x_k \in X \text{ mit } d(x_k, a_i) = \min_{l=1,\ldots,p} d(x_l.a_i)$$

(a_i liegt näher bei x_k als bei allen anderen Lösungspunkten; die Nachfrage vona_i wird von der neuen Einrichtung x_k befriedigt.)

Menge aller Kunden, welche einem Standort x_l zugeordnet sind

$$A_k := \{a_i \in A | \text{Präf}(a_i) = x_k\} = \{a_i \in A | d(x_k, a_i) = d(X, a_i)\}$$

2.6.1 Das p-Median Zuordnungsproblem

Zielfunktion

$$f(X) = f(\{x_1, \ldots, x_p\}) = \sum_{i=1,\ldots,n} w_i d(X, a_i) \tag{2.21}$$

2.6.1.1 Das p-Median Zuordnungsproblem mit l_1-Metrik

Zielfunktion

$$f(X) = \sum_{i=1,\dots,n} w_i \min_{k=1,\dots,p}\{|x_{k,1} - a_{i,1}| + x_{k,2} - a_{i,2}\}$$

Definiere

$$y_k := \begin{cases} 1 & \text{falls der Schnittpunkte } s_k \text{ Teil der optimalen Lösung ist}, k = 1,\dots,|S| \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$x_{ik} := \begin{cases} 1 & \text{falls Kunde } i \text{ dem Schnittpunkte } s_k \text{ zugeordnet ist.}, i = 1,\dots n, k = 1,\dots,|S| \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$c_{ik} := w_i l_1(a_i, s_k), i = 1,\dots n, k = 1,\dots,|S|$$

Modell

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1,\dots,n} \sum_{k=1,\dots,|S|} c_{ik} x_{ik} \\
\text{u.d.N} \quad & \sum_{k=1,\dots,p} x_{ik} = 1, \forall i \quad \text{Jeder Kunde i wird einem Schnittpunkte zugeordnet} \\
& \sum_{k=1,\dots,|S|} y_k = p \quad \text{(p Schnittpunkte werden ausgewählt)} \\
& x_{ik} \le y_k, \forall i, \forall k \quad \text{(Kunde i darf nur eineme ausgewählten Schnittpunkt k zugeordnet werden)} \\
& x_{ik}, y_k \in \{0,1\}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Ganzzahliges lineares Programm

$\rightarrow$ Lässt sich mit Branch & Bround-Verfahren lösen.

2.6.1.2 Das Zuordnungsproblem mit l_2-Metrik

Zielfunktion

$$f(X) = \sum_{i=1,\dots,n} w_i \min_{k=1,\dots,p} l_2(x_k, a_i) \tag{2.23}$$

Algorithm 9 Das Verfahren von Cooper

1: Wähle eine Startlösung $X^0 = x_1^{(0)}, \dots, x_p^{(0)}$ setze $l := 0$

2: **while** $(!(\delta^{(l+1)} := \frac{f(X^l) - f(X^{l+1})}{f(X^{(l)})} \le \delta$ für ein $\delta > 0))$ **do**

3: **Zuordnungsschritt (allocation)**: Berechne für $X^{(l)}$ die Partition $Pa^{(l)} = \{A_1^{(l)}, \dots, A_p^{(l)}\}$ der Kundenstandorte

4: **Platzierungsschritt (location)**: Bestimme die optimale Lösung $X_k^{(l+1)}$ des 1-Standortproblems mit Kunden $A_k^{(l)}$. Setze $X^{(l+1)} := \{x_1^{(l+1), \dots, x_p^{(l+1)}}\}$

5: $l := l + 1$

6: **end while**

Kapitel 3

Standortplanung auf Netzwerken

3.1 Graphentheorie

3.2 1-Medianprobleme

3.2.1 1-Medianprobleme auf allgemeinen Graphen

3.2.2 1-Medianprobleme auf Bäume

3.3 1-Centerprobleme

3.3.1 1-Centerprobleme auf allgemeinen Graphen

3.3.2 1-Centerprobleme auf Bäume

3.4 Mehrstandortprobleme

Kapitel 4

Diskrete Standortplanung

4.1 Klassifikation diskreter Standortprobleme

4.2 Das Warehouse Location Problem (WLP)

4.2.1 Modellierug

4.2.2 Heuristiken

4.2.2.1 Greedy-Heuristik

4.2.2.2 Interchange-Heuristik

4.2.3 Das DUALOC-Verfahren

4.3 Hub-Location-Probleme

Kapitel 5

Gebietsplanung

Ziel: kleine geographische Einheiten (sogenannte Basisgebiete) zu über- geordneten Gebieten (häufig als Bezirke, Cluster oder Territorien bezeichnet) unter der Berücksichtigung verschiedener relevanter Planungskriterien zusammenzufassen.

5.1 Basismodell

5.1.1 Definitionen und Notationen

Ein Gebietsplanungsproblem umfasst eine Menge $V = \{1, \dots, M\}$ von Basisgebieten.

Ein **Basisgebiet** $i \in V$ ist durch seinen Mittelpunkt $b_i = (x_i, y_i)$ bestimmt.

Für jedes Basisgebiet $i \in V$ ist eine einzelne quantifizierbare Eigenschaft, das sogenannte **Aktivitätsmaß** w_i, gegeben.

Gebiet:

- Gebiete $D_1, \dots, D_p$ sind disjunkte Teilmengen der Basismenge, so dass jedes Basisgebiet in genau einem Gebiet enthalten ist:

$$D_1 \cup \cdots \cup D_p = V \quad \text{und} \quad D_i \cap D_j = \varnothing, i \neq j, b < p$$

- Aktivitätsmaß oder die Größe eines Gebiets: die Summe der Aktivitätsmaße seiner Basisgebiete

$$w(D_j) = \sum_{i \in D_j} w_i$$

- **Zentrum** des Gebiets j: c_j (Im Allgemeinen entspricht c_j einem der Mittelpunkte der zum Gebiet j gehörenden Basisgebiete.)

Zusammenhang:
Basisgebiet $b_i = (x_i, y_i) \in$ Menge der Basisgebiete $V \supseteq$ Gebiet D_j

5.1.2 Modell-Kriterien

Balance

Alle Gebiete sollen balanciert sein, also möglichst gleich groß bzw. stark bezüglich der Aktivitätsmaße der Gebiete.

- **perfekt balnciert** $\Leftrightarrow$ sein Aktivitätsmaß entspricht dem durchschnittlichen Aktivitätsmaß aller Gebiete μ
$$w(D_j) = \mu = \frac{w(V)}{p} \tag{5.1}$$
Auf Grund der diskreten Struktur des Problems können perfekt balancierte Vertriebsgebiete im Allgemeinen NICHT erzielt werden.

- **relative Abweichung** des Aktivitätsmaßes eines Gebiet
$$bal(D_j) = \frac{|w(D_j) - \mu|}{\mu}$$

Kontiguität (Contiguity)

Zwei Basisgebiete werden als benachbart bezeichnet, wenn ihre geographischen Anordnungen nichtleere Schnittmengen besitzen.

Kompaktheit (Compactness)

- Reock-Test: Bilde das Verhältnis der Fläche des Gebiets zur Fläche des kleinsten, das Gebiet umschließenden Kreises.
$$cp(D_j) = \frac{A_{A_j}}{A_{uk}} \leq 1$$

- Schwartzberg-Test: Bilde das Verhältnis zwischen dem Umfang eines Kreises, der dadurch festgelegt ist, dass er den gleichen Flächeninhalt wie das Gebiet hat, und dem Umfangs des Gebiets.
$$cp(D_j) = \frac{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot A_{D_j}}}{U_{D_j}} \leq 1$$

Je näher $cp(D_j)$ an 1, umso kompakter ist das Gebiet.

5.1.3 Ziel der Gebietsplanung

Untergliedere alle Basisgebiete V in p Gebiete, welche die Planungskriterien der Balance, Kompaktheit, Kontiguität und Disjunktheit erfüllen.

5.2 Vorgehensweisen zur Gebietsplanung

5.2.1 Notation

- V: Menge der Basisgebiete
- w_u: Aktivitätsmaß des Basisgebiets u
- p: Anzahl der Gebiete
- d_{uv}: Distanzen
- μ: Durchschnittsgröße bzgl. w ((5.1))
- τ: Toleranz der Balance
- $$x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls Basisgebiet } u \text{ einem Gebit mit dem Zentrum } v \text{ zugeordnet wird.} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

5.2.2 LP-Formulierung

$$\begin{aligned}
\min_{u,v \in V} \quad & d_{uv}^2 w_u x_{uv} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{v \in V} x_{uv} = 1 && (u \in V) \quad \text{(Vollst. Zuordnung)} \\
& \mu(1-\tau)x_{vv} \leq \sum_{u \in V} w_u x_{uv} \leq \mu(1+\tau)x_{vv} && (v \in V) \quad \text{(Balance)} \\
& \sum_{v \in V} x_{vv} = p \qquad (p \text{ Gebiete}) \\
& x_{uv} \in \{0,1\} \qquad (u, v \in V)
\end{aligned}$$

5.3 Recursive-Partitioning-Algorithmus

(Bsp: Aufgabe 19)

Grundidee:

- Unterteile das Problem rekursiv auf geometrische Weise durch Linien in immer kleinere Teilprobleme.
- Wiederhole dies solange, bis eine elementare Größe erreicht ist, in welcher das Gebietsplanungsproblem in effizienter Zeit gelöst wird.

5.3.1 Definitionen

Partionsproblem
$PP = (B, q)$ wird als Partitionsproblem bezeichnet, falls $B \subseteq V$ und $1 \leq q \leq p$ gilt.

Linienpartition
$LP = (B_l, B_r, q_l, q_r)$ wird als Linienpartition bezeichnet, falls:

1. $B_l \cup b_r = B \text{und} B_l \cap B_r = \varnothing$
2. $\exists$ Line $L : B_l = B \cap H^{\leq}(L)$ und $B_r = B \cap H^{>}(L)$
3. $q \leq q_l, q_r \leq q$ und $q_l + q_r = q$

5.3.2 Recursive-Partitioning

Gleichmäßige Aufteilung:

- $q_l = q_r = \frac{q}{2}$, falls q gerade
- $q_l = \frac{q-1}{2}, q_r = \frac{q+1}{2}$ und $q_l = \frac{q+1}{2}, q_r = \frac{q-1}{2}$, falls q ungerade

Balance:

$$bal(LP) = \max\{\frac{|\frac{w(B_L)}{q_l} - \mu|}{\mu}, \frac{|\frac{w(B_r)}{q_r} - \mu|}{\mu}\}$$

Partionsposition:

Bestimme k', so dass $\frac{w(B_l^{k'})}{q_l} < \frac{w(B)}{q}$ und $\frac{w(B_l^{k'+1})}{q_l} \geq \frac{w(B)}{q}$

$$k^* = \begin{cases} k' & \text{falls } \frac{w(B)}{q} - \frac{w(B_l^{k'})}{q_l} \leq \frac{w(B_l^{k'+1})}{q_l} - \frac{w(B)}{q} \\ k'+1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Kompaktheit:

$$cp(LP) = d(c_1.c_2) = l_2(c_!, c_2)$$

5.3.3 Algorithmus

Algorithm 10 Recursive-Partitioning-Algorithmus

Input: Anzahl Suchrichtungen K, β, V, p

Markiere Partitionsproblem $PP = (V, p)$ als ungelöst
while es gibt ungelöste Probleme **do**:
  Wähle ein ungelöstes Problem $PP = (B, q)$
  if $q = 1$ **then**
    füge B der Lösungsmenge DL hinzu und markiere PP als gelöst
  end if
  if $q > 1$ **then**
    Bestimme für jede Suchrichtung die Linienpartition $LP(k^*)$ mit der besten Balance und füge sie einer Menge FLP hinzu.
    Bewerte alle Linienpartitionen LP der Menge FLP durch:

$$rk(LP) = \beta \frac{bal(LP)}{bal^{max}} + (1 - \beta) \frac{cp(LP)}{cp^{max}}$$

    Wähle $LP^* = (B_l^*, B_r^*, q_l^*, q_r^*) = \min_{LP \in FLP} rk(FLP)$
    Erstelle Partitionsprobleme $PP_l = (B_l^*, q_l^*)$ und $PP_r = (B_r^*, q_r^*)$ und markiere sie als ungelöst, markiere PP als gelöst.
  end if
end while

Output: Gebietslayout DL