

# **Standortplanung und strategisches Supply Chain Management**

Ecko Tan

20. Februar 2018

*Don't panic!*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Volkswirtschaftliche und deskriptive Standortmodelle</b>	<b>7</b>
1.1 Volkswirtschaftliche Standortmodelle . . . . .	7
1.1.1 Die Wahl kostenminimaler Wohnstandorte . . . . .	7
1.1.2 Theorie der Boden- und Flächennutzung . . . . .	8
1.2 Deskriptive überbetriebliche Standortmodelle . . . . .	9
1.2.1 Prüflisten-Verfahren . . . . .	9
1.2.2 Rangfolge-Verfahren . . . . .	10
1.3 Standortplanung unter Wettbewerb . . . . .	11
1.3.1 Modelle mit vollständiger Zuordnung . . . . .	11
1.3.1.1 Voroni-diagramm . . . . .	11
1.3.2 Modelle mit partieller Aufteilung . . . . .	11
1.3.2.1 Gravitions-Modelle (Das Modell von Huff) . . . . .	11
1.3.3 Leader-Follower-Modelle . . . . .	13
1.3.3.1 Regeln . . . . .	13
1.3.3.2 Probleme / Herausforderungen . . . . .	13
1.3.3.3 Typische Strategien für Follower $F$ . . . . .	13
1.3.3.4 Verschiedene Strategien für Leader $L$ . . . . .	14
<b>2 Standortplanung in der Ebene</b>	<b>17</b>
2.1 Theorie der Standortplanung . . . . .	17
2.2 Begriffe und Notationen . . . . .	17
2.2.1 Distanzmessung . . . . .	17
2.2.2 $l_p$ -Metrik . . . . .	18
2.3 1-Medianprobleme . . . . .	18
2.3.1 Einleitung . . . . .	18
2.3.1.1 Aufgabe . . . . .	18
2.3.1.2 Dominanzkriterium . . . . .	18
2.3.2 1-Medianprobleme mit $l_1$ -Metrik . . . . .	19
2.3.2.1 Das 1-Medianproblem mit $l_1$ -Metrik auf der Linie . . . . .	19
2.3.3 1-Medianprobleme mit $l_2$ -Metrik . . . . .	20
2.3.4 1-Medianprobleme mit $l_\infty$ -Metrik . . . . .	21
2.4 1-Centerprobleme . . . . .	21
2.4.1 Aufgabe . . . . .	21
2.4.2 formel . . . . .	22
2.4.3 1-Centerprobleme mit $l_1$ -Metrik . . . . .	22
2.4.3.1 1-Centerprobleme mit $l_\infty$ -Metrik . . . . .	22
2.4.3.1.1 Der ungewichtete Fall . . . . .	22
2.4.3.1.2 Der allgemeine gewichtete Fall . . . . .	23

2.4.4	1-Centerprobleme mit $l_2$ -Metrik . . . . .	25
2.4.4.1	Zielfunktion . . . . .	25
2.4.4.2	Der ungewichtete Fall: Das Kreis-Überdeckungsproblem . . . . .	25
2.5	Mehrstandortprobleme . . . . .	26
2.5.1	Modelle mit Interaktion . . . . .	26
2.5.1.1	Annahmen . . . . .	26
2.5.1.2	Zielfunktion . . . . .	26
2.5.1.3	Notationen . . . . .	27
2.5.1.4	Das Interaktions-Modell mit $l_1$ -Metrik . . . . .	27
2.5.1.5	Das Interaktions-Modell mit $l_2$ -Metrik . . . . .	28
2.6	Zuordnungs-Modelle . . . . .	28
2.6.1	Das p-Median Zuordnungsproblem . . . . .	28
2.6.1.1	Das p-Median Zuordnungsproblem mit $l_1$ -Metrik . . . . .	28
2.6.1.2	Das Zuordnungsproblem mit $l_2$ -Metrik . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Standortplanung auf Netzwerken</b>	<b>31</b>
3.1	Graphentheorie . . . . .	31
3.2	1-Medianprobleme . . . . .	32
3.2.1	1-Medianprobleme auf allgemeinen Graphen . . . . .	33
3.2.1.1	Knotenbeschränktes 1-Medianproblem . . . . .	33
3.2.1.2	Absolutes 1-Medianproblem . . . . .	33
3.2.2	1-Medianprobleme auf Bäume . . . . .	34
3.3	1-Centerprobleme . . . . .	35
3.3.1	1-Centerprobleme auf allgemeinen Graphen . . . . .	35
3.3.2	1-Centerprobleme auf Bäume . . . . .	36
3.3.2.1	Das ungewichtete 1-Centerproblem . . . . .	36
3.4	Mehrstandortprobleme . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Diskrete Standortplanung</b>	<b>39</b>
4.1	Klassifikation diskreter Standortprobleme . . . . .	39
4.2	Das Warehouse Location Problem (WLP) . . . . .	40
4.2.1	Modellierung . . . . .	40
4.2.2	Heuristiken . . . . .	41
4.2.2.1	Greedy-Heuristik . . . . .	41
4.2.2.2	Interchange-Heuristik . . . . .	43
4.2.3	Das DUALOC-Verfahren . . . . .	43
4.2.4	Dual Ascent-Verfahren . . . . .	44
4.2.5	Konstruktionsheuristik . . . . .	48
4.2.5.1	Dual Adjustment-Verfahren . . . . .	49
4.3	Hub-Location-Probleme . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Gebietsplanung</b>	<b>53</b>
5.1	Basismodell . . . . .	53
5.1.1	Definitionen und Notationen . . . . .	53
5.1.2	Modell-Kriterien . . . . .	53
5.1.3	Ziel der Gebietsplanung . . . . .	54
5.2	Vorgehensweisen zur Gebietsplanung . . . . .	54
5.2.1	Notation . . . . .	54
5.2.2	LP-Formulierung . . . . .	55

5.3 Recursive-Partitioning-Algorithmus . . . . .	55
5.3.1 Definitionen . . . . .	55
5.3.2 Recursive-Partitioning . . . . .	55
5.3.3 Algorithmus . . . . .	56



# Kapitel 1

## Volkswirtschaftliche und deskriptive Standortmodelle

### 1.1 Volkswirtschaftliche Standortmodelle

#### 1.1.1 Die Wahl kostenminimaler Wohnstandorte standortbezogenen Kosten

$$C(d) = Q \cdot p(d) + V \cdot k(d) \quad (1.1)$$

- $d$ : die Entfernung des Standortes zum Stadtzentrum
- $C(d)$ : die gesamten Standortkosten
- $Q$ : die vorgegebene Größe der Wohnfläche
- $p(d)$ : die standortabhängigen Mietkosten pro Flächeneinheit (z.B. Quadratmeter)
- $V$ : die Anzahl der Fahrten ins Zentrum
- $k(d)$ : standortabhängige Fahrtkosten

#### Annahme

- $p(d)$  nehmen mit zunehmender Entfernung zum Stadtzentrum exponentiell ab:

$$p(d) = P_Z \cdot e^{-rd} \quad (1.2)$$

- $P_Z$ : der Mietpreis direkt im Zentrum
- $r$ : Verfallskonstante für die Entfernung
- die Fahrtkosten sind proportional zur Entfernung zum Zentrum

$$k(d) = K \cdot d \quad (1.3)$$

- $K$ : die Kosten pro Entfernungseinheit

Den kostenminimalen Standort findet man unter diesen Annahmen durch Minimierung der Funktion  $C(d)$ .

Ableiten der Funktion  $C$  nach  $d$  und anschließendem “Nullsetzen” der Ableitung  $\Rightarrow$

$$d^* = \frac{1}{r} (\ln[r \cdot P_Z \cdot Q] - \ln[V \cdot K]) \quad (1.4)$$

**Example 1.1.1.** [Aufgabe 1](#), [Aufgabe 2](#)

### 1.1.2 Theorie der Boden- und Flächennutzung

#### von Thünens Modell

- das zu untersuchende Gebiet ist eine kreisförmige, isolierte Fläche gleichmäßiger Produktivität
- es liegt ein einziger Absatzmarkt im Zentrum der Fläche vor
- die Transportverbindungen sind überall gleichmäßig gut
- die Produktion der Produkte ist überall und zu gleichen Kosten möglich
- die Transportkosten steigen proportional zur Entfernung
- es ist eine Menge von Produktions-Aktivitäten und deren Output-Mengen gegeben

Unter dem Gesichtspunkt der Gewinn-Maximierung stellt sich nun die Frage:

**“Welches der Produkte soll in welcher Entfernung vom Absatzmarkt hergestellt werden?”**

#### Algorithm 1 Verfahren (zur Bestimmung der oberen Einhüllenden)

1: Stelle für jede Produktions-Aktivität die zugehörige Profitfunktion auf:

$$R(d) = \max_i R_i(d) = \max_i (p_i - k_i d)$$

- 2: Setze  $d' = 0$  und  $I = 1, \dots, n, L = \emptyset$
- 3: Bestimme der max. Profit  $R_{i^*} = \max_{j=1, \dots, n} R_j(0)$  und damit die im Zentrum profitabelste Aktivität  $P_{i^*}$
- 4: **if** (das Maximum ist nicht eindeutig) **then**
- 5:     wähle unter den maximalen Aktivitäten diejenige mit dem kleinsten  $k_j$ .
- 6: **end if**
- 7:  $I = I \setminus \{i^*\}, L = L \cup \{i^*\}$
- 8: **while** (Es gibt Schnittpunkte ( $d_{ij} = \frac{P_i - P_j}{k_i - k_j}$ )  $\wedge (I \neq \emptyset)$ ) **do**
- 9:     Schneide  $R_{i^*}$  mit allen  $R_j(\cdot), j \in I$
- 10:    Bestimme  $S_{i^*j} = (d_{i^*j}, R_{i^* \setminus j}(d_{i^*j}))$  als den Schnittpunkt mit dem kleinsten Wert  $d_{i^*j} > d'$
- 11:    **if** (Schneiden sich mehrere Profitfunktionen bei  $d_{i^*j}$ ) **then**
- 12:       wähle unter den Aktivitäten diejenige mit dem kleinsten  $k$ .
- 13:    **end if**
- 14:     $d' = d_{i^*j}, i^* = j, I = I \setminus \{i^*\}$
- 15:    Füge  $d$  und  $i^*$  am Ende der Liste  $L$  an
- 16: **end while**
- 17: Füge  $d^{\max}$  am Ende von  $L$  ein

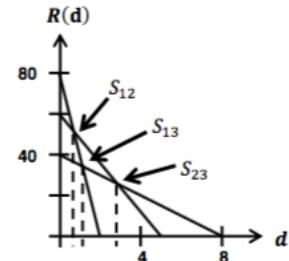
**Output:** Die Liste  $L$  enthält dann die gesuchten Entfernungsintervalle und die zugehörigen, profitablen Produktionsaktivitäten.

**Example 1.1.2.****Beispiel**

Gegeben seien drei Produktions-Aktivitäten für Produkte  $P_1, P_2$  und  $P_3$  mit den folgenden Charakteristika

- $p_1 = 80, k_1 = 40 \quad d_1^{\max} = 2$
- $p_2 = 60, k_2 = 12 \quad d_2^{\max} = 5$
- $p_3 = 40, k_3 = 5 \quad d_3^{\max} = 8$

Wir haben  $I = \{1, 2, 3\}$  und  $d' = 0$ .



Im Zentrum ist Aktivität  $P_1$  am profitabelsten, d.h.  $i^* = 1$ .

Setze  $I = I \setminus \{1\} = \{2, 3\}$  und  $L = \{1\}$ .

Schneide  $R_1$  mit  $R_2$  und  $R_3$ . Man erhält:  $S_{12} = \left(\frac{5}{7}, \frac{360}{7}\right)$  und  $S_{13} = \left(\frac{8}{7}, \frac{240}{7}\right)$

Da  $d' < \frac{5}{7} < \frac{8}{7}$ , haben wir  $i^* = j = 2$ ,  $d' = \frac{5}{7}$ ,  $I = I \setminus \{2\} = \{3\}$  und  $L = \left\{1, \frac{5}{7}, 2\right\}$ .

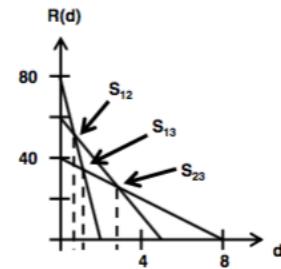
Schneide nun  $R_2$  mit  $R_3$ . Man erhält:  $S_{23} = \left(\frac{20}{7}, \frac{180}{7}\right)$

Da  $d' < \frac{20}{7}$ , haben wir  $i^* = j = 3$ ,  $d' = \frac{20}{7}$ ,  $I = I \setminus \{3\} = \emptyset$  und  $L = \left\{1, \frac{5}{7}, 2, \frac{20}{7}, 3\right\}$ .

Da  $I = \emptyset$ , füge  $d^{\max} = 8$  in  $L$  und beende das Verfahren.

Wir erhalten:  $L = \left\{1, \frac{5}{7}, 2, \frac{20}{7}, 3, 8\right\}$ .

Damit ist im Entfernungsbereich  $\left[0, \frac{5}{7}\right]$  Produkt 1 das profitabelste. Danach erzielt man mit Produkt 2 den größten Gewinn im Bereich  $\left[\frac{5}{7}, \frac{20}{7}\right]$ , und Produkt 3 ist schließlich im Bereich  $\left[\frac{20}{7}, 8\right]$  am profitabelsten.

**Example 1.1.3. Aufgabe 3**

## 1.2 Deskriptive überbetriebliche Standortmodelle

Sowohl Prüflisten- als auch Rangfolge-Verfahren bestimmen den besten Standort für eine neue Einrichtung basierend auf Standortfaktoren.

### 1.2.1 Prüflisten-Verfahren

Vorgehensweise:

- Zusammenstellung der dem jeweiligen Problem angemessenen Standortfaktoren. Bei dieser Aufstellung bedarf es großer Umsicht.
- Für jeden, der als relevant erachteten Standortfaktoren, ist zu überprüfen und entsprechend zu kennzeichnen, z. B. durch ein Kreuz, an welchem Standort der Faktor künftig am besten erfüllt wird.

Bei dieser Vorgehensweise werden einige Standorte mehrere Kennzeichnungen auf sich vereinen und deshalb als besonders günstig erscheinen, während andere möglicherweise leer ausgehen.

*Note 1.* Wähle den Standort mit meisten Kreuze

### Example 1.2.1.

#### Beispiel

Gegeben seien 6 Standorte, A – F, und 6 als relevant erkannte Faktoren (I – VI) zusammen mit den entsprechenden Markierungen, welche den höchsten Erfüllungsgrad unter allen Alternativen kennzeichnen.

Standort	relevante Standortfaktoren					
	I	II	III	IV	V	VI
A		X				
B	X			X		
C						X
D						
E					X	
F			X			

← Standort B ist der am besten geeignete

Abbildung 1.1: Prüflisten-Verfahren Bsp

### 1.2.2 Rangfolge-Verfahren

Vorgehensweise:

- Zusammenfassung der dem Problem angemessenen Standortfaktoren
- Ermittlung einer Gewichtungszahl für jeden Standortfaktoren
- Finde die höchste Gesamtwertigkeit

### Example 1.2.2.

### Beispiel

Gegeben seien 6 Standorte (A – F) sowie 2 Standortfaktoren (I und II) zusammen mit den entsprechenden **Gewichtungszahlen** (GZ), **Rangwerten** (RW) und den daraus resultierenden **Wertigkeitsziffern** (WZ).

Standort	Standortfaktor I			Standortfaktor II			Gesamt-wertigkeit
	RW	GZ	WZ	RW	GZ	WZ	
A	2	0.3	0.6	4	0.7	2.8	3.4
B	1	0.3	0.3	2	0.7	1.4	1.7
C	3	0.3	0.9	1	0.7	0.7	1.6
D	4	0.3	1.2	6	0.7	4.2	5.4
E	5	0.3	1.5	5	0.7	3.5	5.0
F	6	0.3	1.8	3	0.7	2.1	3.9

Standort D, welcher die **höchste Gesamtwertigkeit** aufweist, ist als optimal zu bezeichnen.

Abbildung 1.2: Rangfolge-Verfahren Bsp

## 1.3 Standortplanung unter Wettbewerb

Ziel: eine oder mehrere neue Einrichtung so zu platzieren, dass der Marktanteil und Gewinn der eigenen Firma maximiert wird.

### 1.3.1 Modelle mit vollständiger Zuordnung

Der Bedarf jedes Kunden wird von genau einer Einrichtung vollständig befriedigt. ( Bei diesen Modellen lässt sich für jeden Kunden eindeutig entscheiden, welche Einrichtung für ihn die Beste oder Attraktivste ist.)

#### Definition 1.3.1. Indifferenzmenge

die Menge aller Punkte, welche gleichweit von den beiden Standorten  $x_A$  und  $x_B$  entfernt liegen

$$IS_{AB} := \{x \in \mathbb{R} \mid l_2(x; x_A) = l_2(x; x_B)\} \quad (1.5)$$

#### 1.3.1.1 Voroni-diagramm

#### Example 1.3.1. Aufgabe 5

### 1.3.2 Modelle mit partieller Aufteilung

Bei diesen Modellen verteilen die Kunden ihre Nachfrage anteilig auf mehrere Einrichtungen.

#### 1.3.2.1 Gravitions-Modelle (Das Modell von Huff)

#### Definition 1.3.2. Anziehungskraft der Einrichtung E auf den Kunden K

$$A(E, K) = \frac{w_E}{d(K, E)^r} \quad (1.6)$$

- $w_E$ : Größe der Einrichtung  $E$  an diesem Standort
- $d(K, E)$ : die Entfernung vom Kunden  $K$  zum Standort der Einrichtung  $E$
- $r$ : eine Potenz (Verfallskonstante) für die Entfernung

**Die Wahrscheinlichkeit  $P$** , dass ein Kunde eine Einrichtung an einem bestimmten Standort besucht, berechnet sich nach diesem Modell folgendermaßen:

$$P(E, K) = \frac{A(E, K)}{\sum_{\text{alle } \bar{E}} A(\bar{E}, K)} \quad (1.7)$$

### Definition 1.3.3. Indifferenzmege zweier Einrichtungen

die Menge aller Punkte, welche beide Einrichtungen mit derselben Wahrscheinlichkeit aufsuchen.

**Der Anteil der Nachfrage eines Kunden**, welcher auf eine bestimmte Einrichtung entfällt, ergibt sich aus dem Produkt der Gesamtnachfrage des Kunden mit der „Besuchs“-Wahrscheinlichkeit

$$D(E, K) = D(K) \cdot P(K, E) \quad (1.8)$$

- $D(K)$ : Gesamtnachfrage des Kunden

**Gesamtnachfrage einer Einrichtung** = Summe aller Anteile von Kundennachfragen

$$D(E) = \sum_{\text{alle } K} D(E, K) \quad (1.9)$$

**gesamter Marktanteil der Einrichtung:**

$$MS(E) = \frac{D(E)}{\sum_{\text{alle } K} D(K)} \quad (1.10)$$

Kriterium für Standort einer neuen Einrichtung  $\bar{E}$ :

$$\underset{\bar{E}}{\operatorname{argmax}} \quad MS(\text{einige Firma}) = \frac{D(\bar{E}) + \sum_{\text{eigene, bereits exist. } E} D(E)}{\sum_{\text{alle } K} D(K)}$$

**Zusammenfassung**

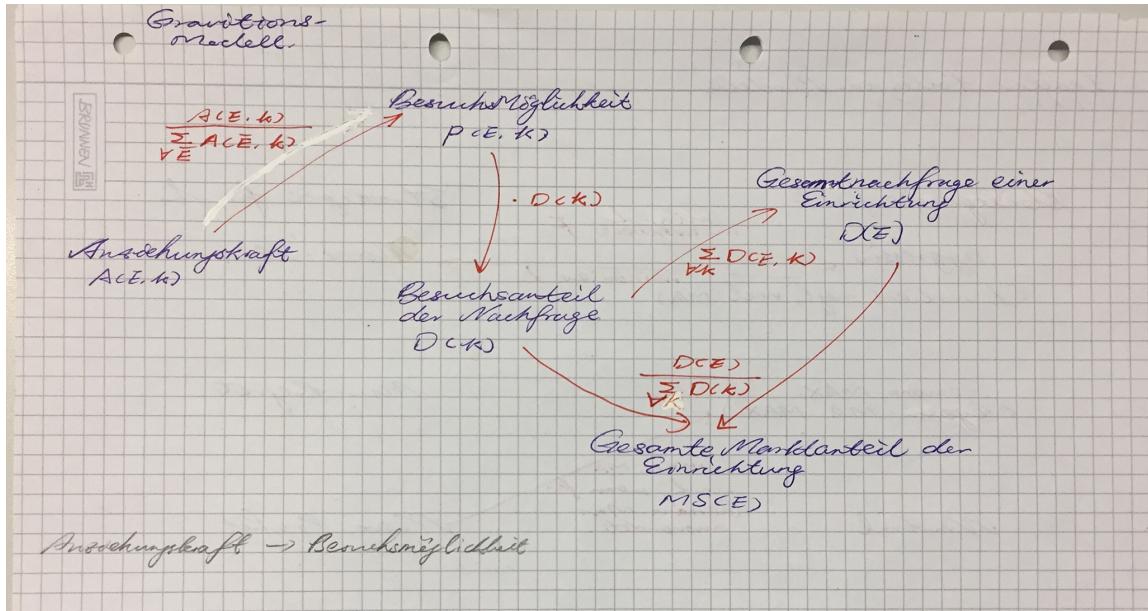


Abbildung 1.3: Gravitationsmodelle

### Example 1.3.2. Aufgabe 4

### 1.3.3 Leader-Follower-Modelle

#### 1.3.3.1 Regeln

- Bei diesen Modellen platzieren zwei Wettbewerber nacheinander neue Einrichtungen in einem (bisher unerschlossenen) Markt.
- Dabei wählt zuerst der Leader (Erstplatzierende)  $L$  Standorte für all seine neuen Einrichtungen und danach der Follower (Zweitplatzierende)  $F$ .
- Standortwahl von  $L$  und  $F$  beeinflussen sich gegenseitig.

#### 1.3.3.2 Probleme / Herausforderungen

- **Follower  $F$**

Braucht sich erst auf eine Platzierungsstrategie festlegen, wenn der Erstplatzierende  $L$  seine Standortwahl schon getroffen hat.

- **Leader  $L$**

Hat das Problem, dass er die Platzierungsstrategie von  $F$  nicht kennt.

#### 1.3.3.3 Typische Strategien für Follower $F$

- **Aggressiv**

Platziere neue Einrichtungen so, dass  $L$  möglichst viel Marktanteil verliert.

- **Gewinnmaximierend**

Platziere neue Einrichtungen so, dass der eigene Marktanteil maximal wird.

- **Neutral**

Platziere neue Einrichtungen nach anderen Kriterien.

### 1.3.3.4 Verschiedene Strategien für Leader $L$

- **Maxi-Min**

$L$  platziert neue Einrichtungen so, dass sein Marktanteil maximal wird, wenn  $F$  eine aggressive Strategie anwendet, d. h.  $F$  das Ziel hat den Marktanteil von  $L$  zu minimieren.

**Rechenweg:**

1. Bestimme zu jedem  $L$  denjenigen Follower-Standort  $\tilde{f}$ , der dem Leader den geringsten Gewinn bringt, wenn der Leader bei  $l$  platziert.
2. Berechne den daraus resultierenden Marktanteil des Leaders
3. Wähle den Standort, für den der Marktanteil des Leaders maximal wird

- **Min-Regret (minimales Bedauern)**

$L$  platziert neue Einrichtungen so, dass, egal welche Standortentscheidung  $F$  dann trifft, der Zugewinn an Marktanteil für  $L$  durch eine mögliche Andersplatzierung seiner Einrichtungen (nachdem  $F$  seine Wahl getroffen hat) minimal wird.

- **Max-Profit**

$L$  platziert neue Einrichtungen so, dass ein Marktanteil maximal wird, wenn  $F$  ebenfalls eine gewinnmaximierende Strategie anwendet.

**Rechenweg:**

1. Bestimme zu jedem  $L$  denjenigen Follower-Standort  $\tilde{f}$ , der dem Follower den größten Gewinn bringt, wenn der Leader bei  $l$  platziert.
2. Berechne den daraus resultierenden Marktanteil des Leaders
3. Wähle den Standort, für den der Marktanteil des Leaders maximal wird

### Zusammenfassung

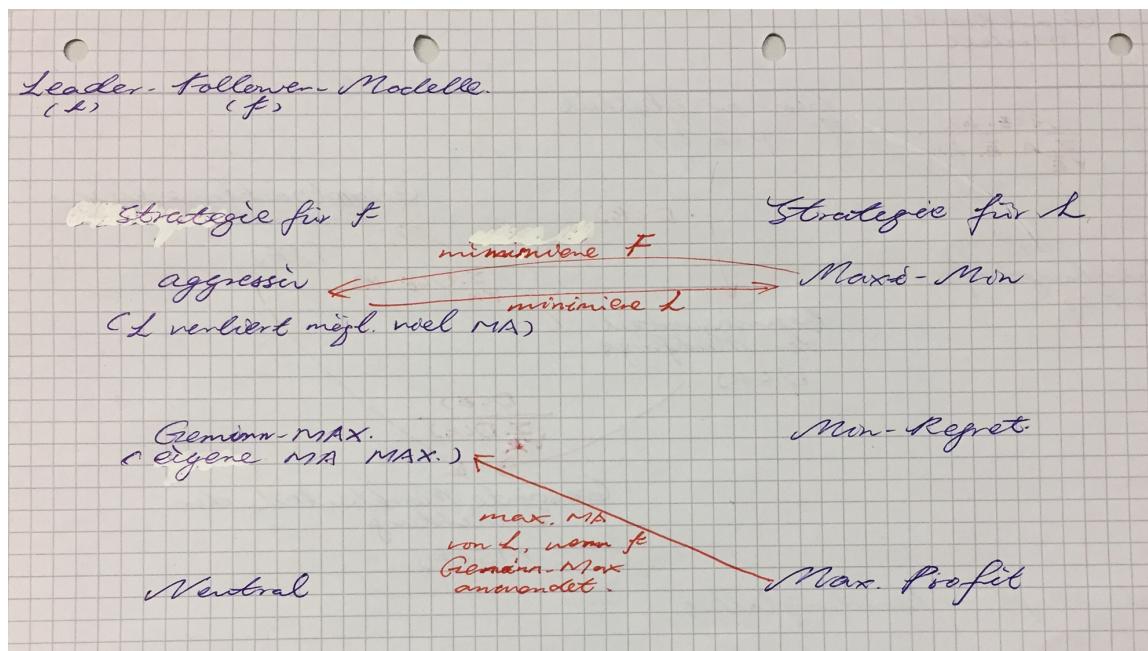


Abbildung 1.4: Leader-Follower-Modelle

**Example 1.3.3. Aufgabe 6**



# Kapitel 2

## Standortplanung in der Ebene

### 2.1 Theorie der Standortplanung

#### Grundlegende Aufgabenstellung

Platzierung ein oder mehrerer neuer Einrichtungen in Abhängigkeit bereits existierender Einrichtungen

Drei Klassen von Standortproblemen:

- **Standortprobleme in der Ebene** (Einfachste, allerdings auch unrealistischste Problemklasse)
- **Standortprobleme auf Netzwerken** (praxisbezug viel ausgeprägter als bei planaren Standortproblemen)
- **Diskrete Standortprobleme** (realistischste und flexibelste Klasse von Standortproblemen)

### 2.2 Begriffe und Notationen

**Definition 2.2.1.** Standorte als Punkte idealisiert

**Definition 2.2.2.** Neue Einrichtungen  $X = x_1, \dots, x_p, p \geq 1$

- dürfen überall in der Ebene platziert werden
- ihre Standorte werden durch Koordinaten repräsentiert

$$x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}) \in \mathbb{R}^2, \forall i = 1, \dots, p$$

**Definition 2.2.3.** Existierende Einrichtungen (Kunden)  $A = a_1, \dots, a_n$

- werden durch eine Menge von Punkten in der Ebene repräsentiert

$$a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}) \in \mathbb{R}^2, \forall i = 1, \dots, n$$

- Jedem Kunden  $a_i \in A$  wird ein positives Gewicht  $w_i > 0$  zugeordnet.

**Definition 2.2.4.** Kosten

Lediglich Transportkosten werden berücksichtigt. Sie sind proportional zur Menge und zur zurückgelegten Entfernung.

#### 2.2.1 Distanzmessung

**Definition 2.2.5.** Metrik / Distanzfunktion  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

welche für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$  folgende Eigenschaften erfüllt:

- Definitheit:  $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- Symmetrie:  $d(x, y) = d(y, x)$
- Dreiecks-Ungleichung:  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

### 2.2.2 $l_p$ -Metrik

$$l_p(x, y) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p}, p \geq 1 \quad (2.1)$$

**Rechtwinklige Entfernung ( $l_1$  – oder Manhatten-Metrik)**

$$l_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad (2.2)$$

**Euklidische Entfernung ( $l_2$  – oder Luftlinien-Metrik)**

$$l_2(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} \quad (2.3)$$

**Quadrierte euklidische Entfernung ( $l_2^2$  – Metrik)**

$$l_2(x, y) = |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 \quad (2.4)$$

**Tchebychev Entfernung ( $l_\infty$ -Metrik)**

$$l_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad (2.5)$$

## 2.3 1-Medianprobleme

### 2.3.1 Einleitung

#### 2.3.1.1 Aufgabe

Platziere eine neue Einrichtung so in der Ebene, dass die Summe der gewichteten Entfernungen von dem neuen Standort zu allen Kunden minimal wird.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) := \sum_{i=1}^n w_i d(x, a_i) \quad (2.6)$$

- $A = a_1, \dots, a_n$ : die  $n$  Kunden
- $w_i > 0, i = 1, \dots, n$ : die damit assoziierten Gewichte
- $x$ : der gesuchte Standort der neuen Einrichtung
- $d$ : eine Metrik

Nenne einen Punkt  $x^* \in \mathbb{R}^2$ , welcher die Funktion  $f(x)$  minimiert ( $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^2$ ), **optimal**. Bezeichne die Menge aller optimalen Punkte der Funktion  $f(\cdot)$  mit  $\mathcal{X}^*(f)$ .

#### 2.3.1.2 Dominanzkriterium

Gilt für einen Kunden  $a_k$  mit zugehörigem Gewicht  $w_k$ , dass

$$w_k \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i,$$

d. h. der Kunde vereinigt mindestens die Hälfte aller Gewichte auf sich, so ist der Standort des Kunden  $a_k$  eine optimale Lösung des Problems.

### 2.3.2 1-Medianprobleme mit $l_1$ -Metrik

#### Aufgabe 7

##### Zielfunktion

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{i=1}^n w_i l_1(x, a_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n w_i (|x_1 - a_{i,1}| + |x_2 - a_{i,2}|) \\
 &= \underbrace{\sum_{i=1}^n w_i (|x_1 - a_{i,1}|)}_{=:f_1(x_1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n w_i (|x_2 - a_{i,2}|)}_{=:f_2(x_2)}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

→ Die ursprüngliche Aufgabe reduziert sich auf das Lösen zweier 1-dimensionaler Probleme, sogenannter “Probleme auf der Linie”.

#### 2.3.2.1 Das 1-Medianproblem mit $l_1$ -Metrik auf der Linie

##### Zielfunktion

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) := \sum_{i=1}^n w_i |x - a_i|$$

---

##### Algorithm 2 Lösungsverfahren für das 1-Medianproblem mit $l_1$ -Metrik auf der Linie

---

- 1: Berechne die Summe  $W$  aller Gewichte  $W := \sum_{i=1}^n w_i$
- 2: **if** (Es exist. ein  $w_k \geq \frac{1}{2}W$ ) **then**
- 3:     Der Kundenstandort  $a_k$  ist eine optimale Lösung,  $x^* = a_k$
- 4:     Stopp
- 5: **else**
- 6:     Sortiere die Kundenstandorte  $a_1, \dots, a_n$  nach monoton wachsenden Koordinaten  $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_n}$
- 7:     Bestimme unter Berücksichtigung einer zu den Kundenstandorten analogen Sortierung der Gewichte dasjenige  $h$ , für welches folgendes gilt:

$$\sum_{j=1}^{h-1} w_{i_j} < \frac{1}{2}W \text{ und } \sum_{j=1}^h w_{i_j} \geq \frac{1}{2}W$$

(die Gewichte der Reihe nach so lange aufsummiert, bis diese Summe gerade eben mehr als die Hälfte der gesamten Gewichte umfasst.)

- 8:      $x^* = a_{i_h}$  ist die Koordinate eines optimalen Standorts, d.h.  $\mathcal{X}^*(f) = \{a_{i_h}\}$
  - 9: **end if**
- 

#### Example 2.3.1.

## 1-Medianprobleme mit $l_1$ -Metrik

### Beispiel: 2-dimensionales Problem

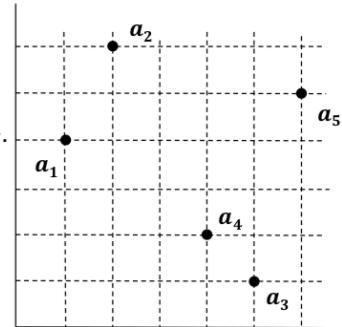
Sei  $A = \{(1,4), (2,6), (5,1), (4,2), (6,5)\}$  und  $w = \{2,3,1,1,2\}$ .

Kundenstandorte für das erste Teilproblem:

$$a_{1,1} = 1, a_{2,1} = 2, a_{3,1} = 5, a_{4,1} = 4, a_{5,1} = 6$$

#### Verfahren

1.  $W = 2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9$ .
2. Dominanzkriterium ist für keinen der Kunden erfüllt.
3. Sortierung der Kundenstandorte liefert  $a_{1,1} \leq a_{2,1} \leq a_{4,1} \leq a_{3,1} \leq a_{5,1}$
4. Aus 3.  $\Rightarrow$  Reihenfolge der aufzusummierenden Gewichte ist  $\{w_1, w_2, w_4, w_3, w_5\} = \{2, 3, 1, 1, 2\}$ .  
Man erhält  $w_1 = 2 < \frac{1}{2}W = 4.5$  und  $w_1 + w_2 = 5 > \frac{1}{2}W$ .
5.  $x_1 = a_{2,1} = 2$  ist der optimale Standort für das erste Teilproblem.



## 1-Medianprobleme mit $l_1$ -Metrik

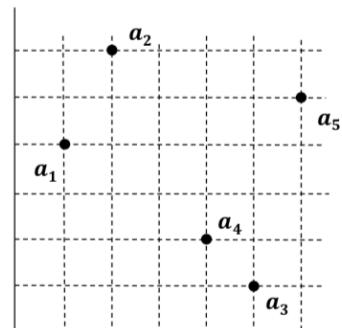
Kundenstandorte für das zweite Teilproblem:

$$a_{1,2} = 4, a_{2,2} = 6, a_{3,2} = 1, a_{4,2} = 2, a_{5,2} = 5$$

Schritte 1. und 2. gelten unverändert für das zweite Teilproblem.

#### Verfahren

3. Sortierung der Kundenstandorte liefert  $a_{3,2} \leq a_{4,2} \leq a_{1,2} \leq a_{5,2} \leq a_{2,2}$
4. Aus 3.  $\Rightarrow$  Reihenfolge der aufzusummierenden Gewichte  $\{w_3, w_4, w_1, w_5, w_2\} = \{1, 1, 2, 2, 3\}$   
Man erhält  $w_3 + w_4 + w_1 = 4 < \frac{1}{2}W$  und  $w_3 + w_4 + w_1 + w_5 = 6 > \frac{1}{2}W$ .
5. Damit ist  $x_2 = a_{5,2} = 5$  der optimale Standort für das zweite Teilproblem.



Optimale Lösung des Problems  $x^* = (2,5)$  mit Zielfunktionswert  $f(x^*) = 27$

Abbildung 2.1: das 1 medianproblem mit metrik auf der linie

### Restriktive Standortprobleme mit verbotenes Gebiet $R$

potentielle Standorte: Schnittpunkte der achsenparallelen Geraden durch Kunden mit verboten Gebiet

Example 2.3.2. Aufgabe 7(b)

### 2.3.3 1-Medianprobleme mit $l_2$ -Metrik

#### Zielfunktion

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1}^n w_i l_2^2(x, a_i) \\
&= \sum_{i=1}^n w_i l_2^2((x_1 - a_{i,1})^2 + (x_2 - a_{i,2})^2) \\
&= \sum_{i=1}^n w_i l_2^2(x_1 - a_{i,1})^2 + \sum_{i=1}^n w_i l_2^2(x_2 - a_{i,2})^2 \\
&=: f_1(x_1) + f_2(x_2)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$f_1(x_1)$  und  $f_2(x_2)$  sind differenzierbar.

Ableiten nach  $x_1$  bzw.  $x_2$  und Nullsetzen der jeweiligen Ableitung ergibt:

$$\underbrace{x^*}_{\text{Schwerpunkt}} = \left( \frac{\sum_{i=1}^n w_i a_{i,1}}{\sum_{i=1}^n w_i}, \frac{\sum_{i=1}^n w_i a_{i,2}}{\sum_{i=1}^n w_i} \right)$$

### 2.3.4 1-Medianprobleme mit $l_2$ -Metrik

#### Aufgabe 8

##### Zielfunktion

$$f(x) = \sum_{i=1}^n w_i l_2(x, a_i) = \sum_{i=1}^n w_i \sqrt{(x_1 - a_{i,1})^2 + (x_2 - a_{i,2})^2} \tag{2.9}$$

Die Zielfunktion ist nicht zerlegbar!

##### Verschärftes Dominanzkriterium

Der Standort  $a_j$  eines Kunden ist optimal, falls

$$\gamma(a_j) := l_2\left(\sum_{i=1, i \neq j}^n w_i \frac{a_j - a_i}{l_2(a_j, a_i)}, \mathbf{0}\right) \leq w_j, \mathbf{0} = (0, 0) \tag{2.10}$$

---

#### Algorithm 3 Das Approximations-Verfahren von Weiszfeld

---

```

1: if (Verschärftes Dominanzkriterium  $\gamma(a_j) \leq w_j$  erfüllt) then
2:    $x^* = a_j$ , STOPP!
3: else
4:    $k := 0$ 
5:    $x^{(0)} := \frac{\sum_{i=1}^n w_i a_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$  (Schwerpunkt)
6:   while ( $\delta^{(k+1)} := \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)})}{f(x^{(k)})} \leq \delta$ ) do
7:      $x^{(k+1)} := \frac{\sum_{i=1}^n w_i \frac{a_i}{l_2(x^{(k)}, a_i)}}{\sum_{i=1}^n w_i \frac{1}{l_2(x^{(k)}, a_i)}}$ 
8:      $k := k + 1$ 
9:   end while
10: end if

```

---

## 2.4 1-Centerprobleme

### 2.4.1 Aufgabe

Platziere eine neue Einrichtung so in der Ebene, dass die maximale gewichtete Entfernung von dem neuen Standort zu den Kunden minimal wird.

### 2.4.2 formel

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} g(x) \text{ mit } g(x) := \max_{i=1,\dots,n} w_i d(x, a_i) \quad (2.11)$$

### 2.4.3 1-Centerprobleme mit $l_1$ -Metrik

#### Zielfunktion

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{i=1,\dots,n} w_i l_1(x, a_i) \\ &= \max_{i=1,\dots,n} w_i (|x_1 - a_{i,1}| + |x_2 - a_{i,2}|) \end{aligned} \quad (2.12)$$

---

#### Algorithm 4 Lösungsverfahren für das $l_1$ -Centerproblem

---

1: Transformiere alle Kundenstandorte mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2: Finde eine optimale Lösung  $x_\infty^*$  des  $l_\infty$ -Problems mit den Kundenstandorten  $A'$   
 3: Erhalte eine optimale Lösung  $x^*$  des  $l_1$ -Problems:

$$x^* = x_\infty^* \cdot T^{-1}$$


---

### 2.4.3.1 1-Centerprobleme mit $l_\infty$ -Metrik

#### Zielfunktion

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{i=1,\dots,n} w_i l_\infty(x, a_i) \\ &= \max_{i=1,\dots,n} w_i (|x_1 - a_{i,1}|, |x_2 - a_{i,2}|) \end{aligned} \quad (2.13)$$

#### 2.4.3.1.1 Der ungewichtete Fall

Umformulierung des Problems:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \max_{i=1,\dots,n} l_\infty(x, a_i) \Leftrightarrow \min z, \text{ u.d.N } l_\infty(x, a_i) \leq z, \forall i = 1, \dots, n$$

$\Rightarrow$  Minimiere  $z$  unter der Nebenbedingung, dass die Entfernung von einem Punkt  $x$  zu allen Kundenstandorten kleiner oder gleich  $z$  ist ( $l_\infty(x, a_i) \leq z, \forall i = 1, \dots, n$ ).

**Algorithm 5** Lösungsverfahren für ungewichtete 1-Centrenprobleme mit  $l_\infty$ -Metrik

- 1: Berechne für die Kundenstandorte das umschreibende Rechteck  $R$ .  $R$  ist durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte ( $ul, or$ ) eindeutig bestimmt.
- 2: **if** ( $R$  ist ein Quadrat) **then**
- 3:      $x^* = \text{Mittelpunkt von } R$ , **STOPP!**
- 4: **else**
- 5:     Dehne das Rechteck  $R$  entlang der kürzeren Seiten in beide Richtungen jeweils zu einem Quadrat  $Q_1$  und  $Q_2$  aus.
- 6:     Die Verbindungsgeradenlinie zwischen den Mittelpunkten  $M_1$  und  $M_2$  der beiden Quadrate  $Q_1$  und  $Q_2$  ist die optimale Lösungsmenge

$$\mathcal{X}^*(g) = \overline{M_1 M_2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \lambda M_1 + (1 - \lambda) M_2, \forall \lambda \in [0, 1]\} \quad (2.14)$$

7: **end if**

**Example 2.4.1.****1-Medianprobleme mit  $l_1$ -Metrik**

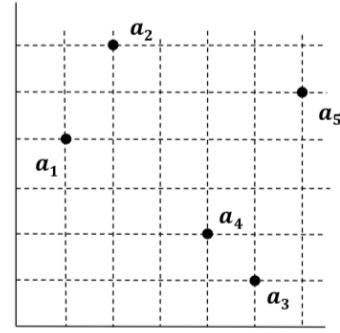
Kundenstandorte für das **zweite Teilproblem**:

$$a_{1,2} = 4, a_{2,2} = 6, a_{3,2} = 1, a_{4,2} = 2, a_{5,2} = 5$$

Schritte 1. und 2. gelten unverändert für das zweite Teilproblem.

**Verfahren**

3. Sortierung der Kundenstandorte liefert  
 $a_{3,2} \leq a_{4,2} \leq a_{1,2} \leq a_{5,2} \leq a_{2,2}$
4. Aus 3.  $\Rightarrow$  Reihenfolge der aufzusummierten Gewichte  
 $\{w_3, w_4, w_1, w_5, w_2\} = \{1, 1, 2, 2, 3\}$   
 Man erhält  $w_3 + w_4 + w_1 = 4 < \frac{1}{2}W$  und  $w_3 + w_4 + w_1 + w_5 = 6 > \frac{1}{2}W$ .
5. Damit ist  $x_2 = a_{5,2} = 5$  der **optimale Standort** für das **zweite Teilproblem**.



Optimale Lösung des Problems  $x^* = (2, 5)$  mit Zielfunktionswert  $f(x^*) = 27$

**2.4.3.1.2 Der allgemeine gewichtete Fall****Zielfunktion**

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{i=1,\dots,n} w_i \max\{|x_1 - a_{i,1}|, |x_2 - a_{i,2}|\} \\ &= \max\{\underbrace{\max_{i=1,\dots,n} w_i |x_1 - a_{i,1}|}_{g_1(x_1)}, \underbrace{\max_{i=1,\dots,n} w_i |x_2 - a_{i,2}|}_{g_2(x_2)}\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$\Rightarrow$  Das  $l_\infty$ -Centerproblem lässt sich in zwei voneinander unabhängige Teilprobleme zerlegen.

**Das 1-Centerproblem mit  $l_\infty$ -Metrik auf der Linie**

$$\min_{x \in \mathbb{R}} g(x) \text{ mit } g(x) := \max_{i=1,\dots,n} w_i |x - a_i|$$

**Algorithm 6** Lösungsverfahren für gewichtete 1-Centreprobleme mit  $l_\infty$ -Metrik auf der Linie

---

1: Berechne für jedes  $i$  und  $j$  mit  $i, j \in 1, \dots, n$

$$\delta_{ij} = \frac{w_i w_j}{w_i + w_j} (a_j - a_i)$$

(Es gilt:  $\delta_{ij} = -\delta_{ji} \Rightarrow$  Es reicht aus,  $\delta_{ij}$  oder  $\delta_{ji}$  zu berechnen; je nachdem ob  $a_i \leq a_j$  oder  $a_i > a_j$ )

2: Ermittle

$$\delta_{pq} = \max\{\delta_{ij} : i, j \in \{1, \dots, n\}\}$$

3: Optimal Lösung:

$$z^* = \delta_{pq} \text{ und } x^* = \frac{w_p a_p + w_q a_q}{w_p + w_q}$$


---

**Example 2.4.2.**

## 1-Centerprobleme mit $l_\infty$ -Metrik auf der Linie



### Beispiel

Sei  $A = \{1, 2, 5, 4, 6\}$  und  $w = \{2, 3, 1, 1, 2\}$ .

### Verfahren

1.	$i$	$j$	$a_i \leq a_j?$	$\delta_{ij}$
	1	2	$1 \leq 2$	$\delta_{12} = (a_2 - a_1) \cdot (w_1 \cdot w_2) / (w_1 + w_2) = (2 - 1) \cdot 2 \cdot 3 / (2 + 3) = 1.2$
		3	$1 \leq 5$	$\delta_{13} = (a_3 - a_1) \cdot (w_1 \cdot w_3) / (w_1 + w_3) = (5 - 1) \cdot 2 \cdot 1 / (2 + 1) = 2.66$
		4	$1 \leq 4$	$\delta_{14} = (a_4 - a_1) \cdot (w_1 \cdot w_4) / (w_1 + w_4) = (4 - 1) \cdot 2 \cdot 1 / (2 + 1) = 2.0$
		5	$1 \leq 6$	$\delta_{15} = (a_5 - a_1) \cdot (w_1 \cdot w_5) / (w_1 + w_5) = (6 - 1) \cdot 2 \cdot 2 / (2 + 2) = 5.0$
	2	3	$2 \leq 5$	$\delta_{23} = 2.25$
		4	$2 \leq 4$	$\delta_{24} = 1.5$
		5	$2 \leq 6$	$\delta_{25} = 4.8$
	3	4	$5 > 4$	$-\delta_{34} = \delta_{43} = 0.5$
		5	$5 \leq 6$	$\delta_{35} = 0.66$
	4	5	$4 \leq 6$	$\delta_{45} = 1.33$

2.  $\delta_{pq} = \delta_{15} = 5$ .

3.  $z^* = \delta_{15} = 5$  und  $x^* = (w_1 \cdot a_1 + w_5 \cdot a_5) / (w_1 + w_5) = (2 \cdot 1 + 2 \cdot 6) / (2 + 2) = 3.5$

Abbildung 2.2: Das 1-Centerproblem mit  $l_\infty$ -Metrik auf der Linie

### Kombination der Lösungen der Einzelprobleme

Seien  $(x_1^*, z_1^*)$  und  $(x_2^*, z_2^*)$  optimale Lösungen der zwei Teilprobleme.

Dann ist  $x^* := (x_1^*, x_2^*)$  eine optimale Lösungen mit  $z^* = g(x^*) = \max\{g(x_1^*), g(x_2^*)\} = \max\{z_1^*, z_2^*\}$ .

Menge aller optimalen Lösungen ist

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^*(g) &= \mathcal{X}^*(g_1) \times \mathcal{X}^*(g_2) \\ &= [A_1^-(z^*), A_1^+(z^*)] \times [A_2^-(z^*), A_2^+(z^*)] \end{aligned}$$

- $A^-(z) := \max_{i=1, \dots, n} a_i - \frac{z}{a_i}$
- $A^+(z) := \max_{i=1, \dots, n} a_i + \frac{z}{a_i}$

### 2.4.4 1-Centerprobleme mit $l_2$ -Metrik

#### 2.4.4.1 Zielfunktion

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{i=1,\dots,n} w_i l_2(x, a_i) \\ &= \max_{i=1,\dots,n} w_i \sqrt{(x_1 - a_{i,1})^2 + (x_2 - a_{i,2})^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

#### 2.4.4.2 Der ungewichtete Fall: Das Kreis-Überdeckungsproblem

Umformulierung des Problems:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \max_{i=1,\dots,n} w_i l_2(x, a_i) \Leftrightarrow \min z, \text{ u.d.N. } l_2(x, a_i) \leq z, \forall i = 1, \dots, n$$

⇒ **Das minimale Kreis-Überdeckungsproblem:** Minimiere  $z$  unter der Nebenbedingung, dass die Entfernung von einem Punkt  $x$  zu allen Kundenstandorten kleiner oder gleich  $z$  ist.

---

#### Algorithm 7 Enumerations-Verfahren

- 1: Berechne alle minimalüberdeckenden Kreise von zwei oder drei Kundenstandorten  $a_i, a_j$  und  $a_k \in A$
  - 2: Verwirf alle so gewonnenen minimalüberdeckenden Kreise, die nicht alle Kundenstandorten überdecken.
  - 3: Der verbleibende MÜK (Minimal Überdeckender Kreis) ist der MÜK für alle Kundenstandorten
- 

Komplexität:  $O(n^4) \rightarrow$  zu langsam!

---

#### Algorithm 8 Verfahren von Elzinga & Hearn

- 1: Starte mit dem MÜK zweier beliebiger Kundenstandorten  $a$  und  $b$
  - 2: Werden alle Kunden von dem Kreis überdeckt ⇒ Schritt 9
  - 3: Wähle einen Kunden  $c$ , der noch nicht überdeckt wird, und konstruiere den MÜK für diese drei Kunden.
  - 4: Werden alle Kunden von dem Kreis überdeckt ⇒ Schritt 9.
  - 5: Wird der MÜK von zwei Kunden  $a$  und  $b$  bestimmt ⇒ fahre mit  $a$  und  $b$  fort mit Schritt 3, ⇒ andernfalls fahre mit allen dreien fort mit Schritt 6.
  - 6: Wähle einen weiteren Kunden  $d$ , der noch nicht überdeckt wird, und konstruiere (mit Hilfe des Enumerations-Verfahrens) den MÜK für diese vier Kunden.
  - 7: Werden alle Kunden von dem Kreis überdeckt ⇒ Schritt 9
  - 8: Wird der MÜK von zwei Kunden  $a$  und  $b$  bestimmt ⇒ fahre mit  $a$  und  $b$  fort mit Schritt 3, ⇒ andernfalls fahre mit den drei MÜK-definierenden Kunden fort mit Schritt 6.
  - 9: Der momentane MÜK überdeckt alle Kundenstandorte und ist somit der optimale.
- 

#### Example 2.4.3.

## Ungewichtete 1-Centerprobleme mit $l_2$ -Metrik

### Beispiel

Sei wieder  $A = \{(1,1), (2,5), (3,3), (4,2)\}$  und  $w = \{1,1,1,1\}$ .

### Verfahren

1. Starte mit den Kunden  $a_1$  und  $a_3$ . **MÜK** =  $K((2,2), 1.41)$ .
2.  $a_2$  und  $a_4$  nicht überdeckt.
3. Wähle  $a_4$ . **MÜK** der Kunden  $a_1$ ,  $a_3$  und  $a_4$  =  $K((2.5, 1.5), 1.58) = K(a_1, a_4)$ .
4.  $a_2$  nicht überdeckt.
5. **Der MÜK wird von  $a_1$  und  $a_4$  bestimmt.**
6. Wähle  $a_2$ . **MÜK** der Kunden  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_4$  =  $K((2.05, 2.86), 2.14)$ .
7. **Alle Kunden überdeckt!**
9.  $K((2.05, 2.86), 2.14)$  ist der minimal überdeckende Kreis für alle Standorte.  
 $\Rightarrow x = (2.05, 2.86)$  ist der **optimale Standort** für das  $l_2$ -Centerproblem und  $r = 2.14$  der **optimale Zielfunktionswert**.

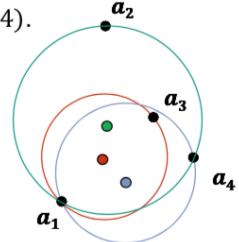


Abbildung 2.3: Verfahren von Elzinga & Hearn

## 2.5 Mehrstandortprobleme

Platziere  $p$  neue Einrichtungen  $X = x_1, \dots, x_p, p \geq 2$  in der Ebene

- Modelle mit Interaktion
  - Neue Einrichtungen bieten jeweils unterschiedlichen Service (verschiedene Güter) an.
  - Kunden haben Nachfrage nach unterschiedlichen Serviceleistungen (Gütern) von mehreren der neuen Einrichtungen.
  - Interaktion, z. B. Austausch von Gütern, zwischen neuen Einrichtungen erlaubt.
- Zuordnungs-Modelle (Standort-Einzugsbereichs-Modelle)
  - Neue Einrichtungen bieten alle gleichen Service (identische Güter) an.
  - Kunden befriedigen ihre Nachfrage von einem der neuen Standorte.

### 2.5.1 Modelle mit Interaktion

#### 2.5.1.1 Annahmen

**Nachfrage** des Kunden  $i$  nach einem Service der neuen Einrichtung  $k$ :  $w_{ik}$   
**Interaktion** zwischen zwei neuen Einrichtungen  $k$  und  $l$ :  $s_{kl}$

#### 2.5.1.2 Zielfunktion

$$\min_{X \subseteq \mathbb{R}^2, |X|=p} f(X) := \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p w_{ik} d(x_k, a_i) + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p s_{kl} d(x_k, x_l) \quad (2.17)$$

### 2.5.1.3 Notationen

$x_1, \dots, x_p$  sind nun Punkte mit Koordinaten  $x_{k,1}$  und  $x_{k,2}, k = 1, \dots, p$   
 $X_1 := x_{1,1}, \dots, x_{p,1}$  und  $X_2 := x_{1,2}, \dots, x_{p,2}$

### 2.5.1.4 Das Interaktions-Modell mit $l_1$ -Metrik

#### Zielfunktion

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p w_{ik}(|x_{k,1} - a_{i,1}| + |x_{k,2} - a_{i,2}|) + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p s_{kl}(|x_{k,1} - x_{l,1}| + |x_{k,2} - x_{l,2}|) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p w_{ik} |x_{k,1} - a_{i,1}|}_{=:f_1(X_1)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p s_{kl} |x_{k,1} - x_{l,1}|}_{f_2(X_2)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p w_{ik} |x_{k,2} - a_{i,2}|}_{=:f_1(X_1)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p s_{kl} |x_{k,2} - x_{l,2}|}_{f_2(X_2)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

→ Zielfunktion zerfällt in zwei voneinander unabhängige Funktionen.

#### Das Interaktions-Modell mit $l_1$ -Metrik auf der Linie

#### Zielfunktion

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p w_{ik} |x_k - a_i| + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p s_{kl} |x_k - x_l| \quad (2.19)$$

#### Umformulierung als lineares Programm

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $c, d \in \mathbb{R}_+$

Gilt:

$$c \cdot d = 0 \text{ und } a - b = c - d$$

Dann:

$$|a - b| = c + d$$

Ersetze:

$$|x_k - a_i| = \alpha_{ik} + \beta_{ik} \in \mathbb{R}_+, \text{ für } \alpha_{ik}, \beta_{ik} \in \mathbb{R}_+$$

und

$$|x_k - x_l| = \gamma_{kl} + \delta_{kl} \in \mathbb{R}_+, \text{ für } \gamma_{kl}, \delta_{kl} \in \mathbb{R}_+$$

Dann:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p w_{ik} (\alpha_{ik} + \beta_{ik}) + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p s_{kl} (\gamma_{kl} + \delta_{kl}) \\ \text{u.d.N} \quad & x_k - \alpha_{ik} + \beta_{ik} = a_i, \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p \\ & \alpha_{ik} \cdot \beta_{ik} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p \\ & x_k - x_l - \gamma_{kl} + \delta_{kl} = 0, \quad \forall k, l = 1, \dots, p, k < l \\ & \gamma_{kl} \cdot \delta_{kl} = 0, \quad \forall k, l = 1, \dots, p, k < l \\ & \alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{kl}, \delta_{kl} \geq 0, \quad \forall i, k, l \text{ und } x_k, x_l \in \mathbb{R}, \forall k, l \end{aligned} \quad (2.20)$$

#### Example 2.5.1.

## Mehrstandortprobleme mit Interaktion

### Beispiel für ein 2-dimensionales Problem

Sei  $A = \{(10,15), (20,25), (40,5)\}$ ,  $w_1 = \{2,4\}$ ,  $w_2 = \{1,0\}$ ,  $w_3 = \{0,5\}$ ,  $s_{k\ell} = 2$ .

**Teilproblem 1:** Kundenstandorte  $a_{1,1} = 10$ ,  $a_{2,1} = 20$ ,  $a_{3,1} = 40$

$$\begin{aligned} \min & 2(\alpha_{11} + \beta_{11}) + 4(\alpha_{12} + \beta_{12}) + 1(\alpha_{21} + \beta_{21}) + 5(\alpha_{32} + \beta_{32}) + 2(\gamma_{12} + \delta_{12}) \\ \text{u.d.N. } & x_1 \\ & -\alpha_{11} + \beta_{11} = 10 \\ & x_2 \\ & -\alpha_{12} + \beta_{12} = 10 \\ & x_1 \\ & -\alpha_{21} + \beta_{21} = 20 \\ & x_2 \\ & -\alpha_{32} + \beta_{32} = 40 \\ & x_1 - x_2 - \gamma_{12} + \delta_{12} = 0 \end{aligned}$$

### Optimale Lösung

$$x_{1,1}^*, x_{2,1}^* \in [10,20], f_1(X_1^*) = f_1(\{x_{1,1}^*, x_{2,1}^*\}) = 160$$

Abbildung 2.4: Mehrstandorten Problem mit Interaktion Umformulierung Bsp

#### 2.5.1.5 Das Interaktions-Modell mit $l_2$ -Metrik

## 2.6 Zuordnungs-Modelle

- Neue Einrichtungen bieten alle gleichen Service (identische Güter) an.
- Kunden befriedigen ihre Nachfrage von einem der neuen Standorte.

### Präferenzfunktion

Definiere eine Präferenzfunktion, welche jeden Kunden einer neuen Einrichtung zuordnet:

$$\text{Präf} : A \rightarrow X \quad \text{Präf}(a_i) = x_k \in X \text{ mit } d(x_k, a_i) = \min_{l=1, \dots, p} d(x_l, a_i)$$

( $a_i$  liegt näher bei  $x_k$  als bei allen anderen Lösungspunkten; die Nachfrage von  $a_i$  wird von der neuen Einrichtung  $x_k$  befriedigt.)

Menge aller Kunden, welche einem Standort  $x_l$  zugeordnet sind

$$A_k := \{a_i \in A | \text{Präf}(a_i) = x_k\} = \{a_i \in A | d(x_k, a_i) = d(X, a_i)\}$$

### 2.6.1 Das p-Median Zuordnungsproblem

#### Zielfunktion

$$f(X) = f(\{x_1, \dots, x_p\}) = \sum_{i=1, \dots, n} w_i d(X, a_i) \tag{2.21}$$

#### 2.6.1.1 Das p-Median Zuordnungsproblem mit $l_1$ -Metrik

#### Zielfunktion

$$f(X) = \sum_{i=1,\dots,n} w_i \min_{k=1,\dots,p} \{ |x_{k,1} - a_{i,1}| + |x_{k,2} - a_{i,2}| \}$$

Definiere

$$y_k := \begin{cases} 1 & \text{falls der Schnittpunkte } s_k \text{ Teil der optimalen Lösung ist, } k = 1, \dots, |S| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x_{ik} := \begin{cases} 1 & \text{falls Kunde } i \text{ dem Schnittpunkte } s_k \text{ zugeordnet ist., } i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, |S| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$c_{ik} := w_i l_1(a_i, s_k), i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, |S|$$

### Modell

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1,\dots,n} \sum_{k=1,\dots,|S|} c_{ik} x_{ik} \\ \text{u.d.N} \quad & \sum_{k=1,\dots,p} x_{ik} = 1, \forall i \quad \text{Jeder Kunde } i \text{ wird einem Schnittpunkte zugeordnet} \\ & \sum_{k=1,\dots,|S|} y_k = p \quad (\text{p Schnittpunkte werden ausgewählt}) \\ & x_{ik} \leq y_k, \forall i, \forall k \quad (\text{Kunde } i \text{ darf nur eineme ausgewählten Schnittpunkt } k \text{ zugeordnet werden}) \\ & x_{ik}, y_k \in \{0, 1\} \end{aligned} \tag{2.22}$$

Ganzzahliges lineares Programm

→ Lässt sich mit Branch & Bound-Verfahren lösen.

#### 2.6.1.2 Das Zuordnungsproblem mit $l_2$ -Metrik

##### Zielfunktion

$$f(X) = \sum_{i=1,\dots,n} w_i \min_{k=1,\dots,p} l_2(x_k, a_i) \tag{2.23}$$

---

##### Algorithm 9 Das Verfahren von Cooper

---

- 1: Wähle eine Startlösung  $X^0 = x_1^{(0)}, \dots, x_p^{(0)}$  setze  $l := 0$
  - 2: **while**  $(!(\delta^{(l+1)} := \frac{f(X^{(l)}) - f(X^{(l+1)})}{f(X^{(l)})} \leq \delta \text{ für ein } \delta > 0))$  **do**
  - 3:     **Zuordnungsschritt (allocation)**: Berechne für  $X^{(l)}$  die Partition  $Pa^{(l)} = \{A_1^{(l)}, \dots, A_p^{(l)}\}$  der Kundenstandorte
  - 4:     **Platzierungsschritt (location)**: Bestimme die optimale Lösung  $X_k^{(l+1)}$  des 1-Standortproblems mit Kunden  $A_k^{(l)}$ . Setze  $X^{(l+1)} := \{x_1^{(l+1)}, \dots, x_p^{(l+1)}\}$
  - 5:      $l := l + 1$
  - 6: **end while**
-



# Kapitel 3

## Standortplanung auf Netzwerken

### 3.1 Graphentheorie

**Gewichteter ungerichteteter Graph**  $G = (V, E)$

- $V = v_1, \dots, v_n$ : eine nichtleere Menge von Knoten
- $E = e_1, \dots, e_m$ : Menge von Kanten

**Ungerichtetes Netzwerk**  $N = (G, l)$

- $G = (V, E)$ : ein gewichteter ungerichteter Graphen
- $l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ :  $l(e) = [v_i, v_j]$ : Kantenbewertung (Länge der Kante)

**Wege**

$P(v_i, v_j) = (v_i = v_{i_1}, e_{j_1}, v_{i_2}, e_{j_2}, \dots, v_{i_{t-1}}, e_{j_{t-1}}, v_{i_t} = v_j)$

Kurz:  $P(v_i, v_j) = (v_1, v_2, \dots, v_{i_{t-1}}, v_j)$

Gilt  $v_i = v_j \Rightarrow$  Zyklus  $Z$

Länge eines Weges:

$$l(p) := \sum_{s=1, \dots, t-1} l(e_{j_s})$$

**Zusammenhang**

Ein Graph heißt zusammenhängend, falls je zwei Knoten durch einen Weg miteinander verbunden sind.

**Baum**

Ein Baum  $T = (V, E)$  ist ein zyklusfreier, zusammenhängender Graph, d. h. jedes Paar Knoten ist durch genau einen Weg miteinander verbunden.

Die Endknoten eines Baums nennt man Blatt-Knoten oder kurz Blätter. Ein Blatt ist mit genau einem anderen Knoten des Baums adjazent.

**Teilgraph**

$G' = (V', E')$  ist ein Teilgraph von  $G = (V, E)$ , falls  $V' \subseteq V$  und  $E' \subset E$  und für alle Kanten  $e = [v_i, v_j] \in E'$  gilt, dass  $v_i, v_j \in V'$

$G'$  heißt **spanneder Teilgraph**, falls  $V' = V$

**Distanz zwischen zwei Knoten**

Die Distanz  $d(v_i, v_j)$  zwischen zwei Knoten  $v_i$  und  $v_j \in V$  entspricht der Länge eines kürzesten Weges  $P'(v_i, v_j)$  zwischen  $v_i$  und  $v_j$

$$d(v_i, v_j) := l(P'(v_i, v_j)) := \min\{l(P(v_i, v_j)) \mid P(v_i, v_j) \text{ ein Weg von } v_i \text{ nach } v_j\}$$

- symmetrisch

- nicht-negativ
- $d(v_i, v_i) = 0$  für alle  $v_i \in V$

### Punkte des Netzwerks

Ein Punkt  $x$  auf einer Kante  $e = [v_i, v_j]$  ist definiert als Paar  $x = ([v_i, v_j], t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  mit  $d(x, v_i) = t \cdot l(e)$  und  $d(x, v_j) = (1 - t) \cdot l(e)$

- $([v_i, v_j], 0) = v_i$
- $([v_i, v_j], 1) = v_j$

$P(G)$ : die Menge aller Punkte  $\Rightarrow V \subseteq P(G)$

### Distanz zwischen Punkt und Knoten

Sei  $x = ([v_i, v_j], t) \in P(G)$  und  $v_k \in V$

Distanz zwischen  $x$  und  $v_k$  := Länge eines kürzesten Weges von  $x$  nach  $v_k$

### Bottleneck-Punkte

Ein Punkt  $x$  auf Kante  $e = [v_i, v_j]$  heißt **Bottleneck-Punkt (BNP) des Knoten  $v_k$** , falls

$$d(x, v_i) + d(v_i, v_k) = d(x, v_j) + d(v_j, v_k)$$

d.h. die kürzesten Wege von  $x$  nach  $v_k$  über  $v_i$  bzw.  $v_j$  haben identische Länge.

Bezeichnung:  $BN_{ij}^k$  Bottleneck-Punkt des Knotens  $v_k$  auf der Kante  $[v_i, v_j]$

Für einen Bottleneck-Punkt  $BN_{ij}^k$  des Knotens  $v_k$  auf der Kante  $[v_i, v_j]$  gilt

$$\begin{aligned} d(x, v_i) + d(v_i, v_k) &= d(x, v_j) + d(v_j, v_k) \\ \Leftrightarrow tl_{ij} + d_{ik} &= (1 - t)l_{ij} + d_{jk} \\ \Leftrightarrow 2tl_{ij} &= l_{ij} + d_{ik} - d_{jk} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{l_{ij} + d_{jk} - d_{ik}}{2l_{ij}} =: t_{ij}^k \end{aligned}$$

Bestimmung aller Bottleneck-Punkte einer Kante  $[v_i, v_j]$ : Berechne  $t_{ij}^k$  für alle Knoten  $v_k \in V$ . Gilt  $0 < t_{ij}^k < 1$ , so liegt ein BNP vor, sonst nicht.

## 3.2 1-Medianprobleme

Platziere eine neue Einrichtung so auf dem Netzwerk, dass die Summe der gewichteten Entfernungen von dem neuen Standort zu den Knoten minimal wird.

### Zielfunktion

$$f(x) := \sum_{i=1}^n w_i d(x, v_i), x \in P(G)$$

- Knotenbeschränktes:  $\min_{v \in V} f(v)$
- Absolutes:  $\min_{x \in P(G)} f(v)$

### Dominanzkriterium

Gilt für einen Knoten  $v_k$  mit zugehörigem Gewicht  $w_k$ , dass

$$w_k \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1, \dots, n} w_i$$

### 3.2.1 1-Medianprobleme auf allgemeinen Graphen

#### 3.2.1.1 Knotenbeschränktes 1-Medianproblem

1. Berechne die gewichtete Distanzmatrix

$$\text{diag}(w_1, \dots, w_n) \cdot D = \begin{pmatrix} w_1 d(v_1, v_1) & \cdots & w_1 d(v_n, v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1 d(v_1, v_n) & \cdots & w_1 d(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

(Zeile  $i$  enthält die gewichteten Entfernungen von  $v_i$  zu allen anderen Knoten  $v_j$ :  $w_i d(v_j, v_i)$ )

2. Die Spalte mit der **kleinsten Spaltensumme** liefert einen Median.

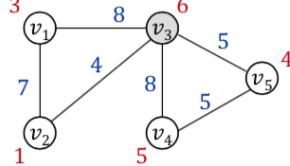
**Example 3.2.1.**

### Knotenbeschränkte 1-Medianprobleme



#### Beispiel

Folgendes Netzwerk



Berechne die gewichtete Distanzmatrix

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 16 & 13 \\ 7 & 0 & 4 & 12 & 9 \\ 8 & 4 & 0 & 8 & 5 \\ 16 & 12 & 8 & 0 & 5 \\ 13 & 9 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 21 & 24 & 48 & 39 \\ 7 & 0 & 4 & 12 & 9 \\ 48 & 24 & 0 & 48 & 30 \\ 80 & 60 & 40 & 0 & 25 \\ 52 & 36 & 20 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

Spaltensumme: 187 141 88 128 103

$\Rightarrow v^* = v_3$  ist der **Median des knotenbeschränkten Problems**.

Optimaler Zielfunktionswert  $f(v^*) = 88$ . Es ist:  $\chi^*(f(V)) = \{v_3\}$

**Bemerkung:** Es kann **mehr als einen Median** geben.

Abbildung 3.1: Knotenbeschränktes 1-Medianproblem Bsp

#### 3.2.1.2 Absolutes 1-Medianproblem

##### Zielfunktion

$$f(x) := \sum_{i=1}^n w_i d(x, v_i), x = (e, t), 0 \leq t \leq 1$$

**Hakimi-Knotendominanzkriterium** Man findet unter den Knoten bereits einen absoluten Median:

$$\chi^*(f(G)) \cap V \neq \emptyset$$

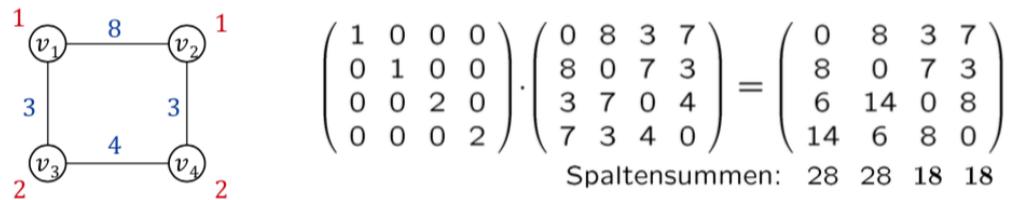
**Lösungsverfahren:** Verwende das Verfahren für das knotenbeschränkte Problem zur Bestimmung eines absoluten Medians.

- Ist die Summe aller Gewichte ungerade, d. h.  $\sum_{i=1, \dots, n} w_i$ , so gilt:  $\chi^*(f(G)) \subseteq V$

- Sind zwei adjazente Knoten optimal und ein beliebiger Punkt auf der Kante dazwischen ebenfalls, so ist die gesamte Kante optimal.

**Example 3.2.2.**

### Beispiel



$\Rightarrow v_3$  und  $v_4$  sind optimal. Zudem gilt  $f\left(\left([v_3, v_4], \frac{1}{2}\right)\right) = 18$

$\Rightarrow [v_3, v_4]$  ist optimal. Es gilt:  $\chi^*(f(G)) = \{[v_3, v_4]\}$

Abbildung 3.2: Absolut 1 Medianproblem Bsp

### 3.2.2 1-Medianprobleme auf Bäume

---

#### Algorithm 10 Einklapp Verfahren von Goldmann

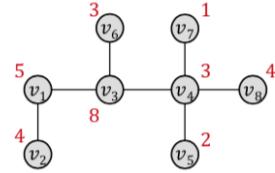
---

1. Berechne  $W = w(V)$
  2. Gilt  $T = \{v_i\}$ , so  $v^* := v_i \Rightarrow$  Stopp!
  - Sonst wähle eine Blatt-Kante  $e = [v_i, v_j]$  von  $T$  mit Blatt  $v_i$   
Falls  $w_i \geq \frac{W}{2}$ , so  $v^* := v_i \rightarrow$  Stopp! (Gilt  $w_i = \frac{W}{2}$ , so ist die komplette Kante  $[v_i, v_j]$  optimal.)
  3. Setze  $w_j := w_j + w_i$  und lösche  $v_i$  und  $[v_i, v_j]$  aus  $T$ .  
Gehe zu Schritt 2.
- 

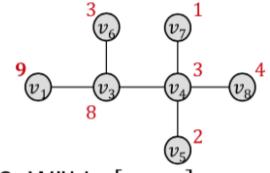
**Example 3.2.3.**

## 1-Medianprobleme auf Bäumen

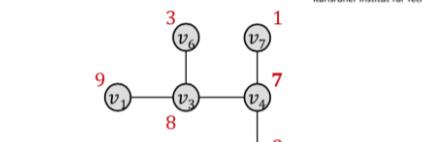
### Beispiel



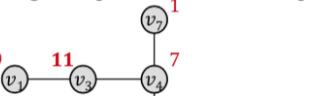
1.  $W = w(V) = 30$ .  $W/2 = 15$ .
2. Wähle  $[v_2, v_1]$ .  $w_2 = 4 < 15$ .
3.  $w_1 = w_1 + w_2 = 9$ . Lösche  $v_2$ .



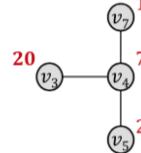
2. Wähle  $[v_8, v_4]$ .  $w_8 = 4 < 15$ .
3.  $w_4 = w_4 + w_8 = 7$ . Lösche  $v_8$ .



2. Wähle  $[v_6, v_3]$ .  $w_6 = 3 < 15$ .
3.  $w_3 = w_3 + w_6 = 11$ . Lösche  $v_6$ .



2. Wähle  $[v_1, v_3]$ .  $w_1 = 9 < 15$ .
3.  $w_3 = w_3 + w_1 = 20$ . Lösche  $v_1$ .



2. Wähle  $[v_3, v_4]$ .  $w_3 = 20 \geq 15$   
 $\Rightarrow v^* = v_3$  ist der Median

Abbildung 3.3: 1 Medianproblem auf Bäume

## 3.3 1-Centerprobleme

Platziere eine neue Einrichtung so auf dem Netzwerk, dass die maximale gewichtete Entfernung von dem neuen Standort zu den Knoten minimal wird.

### Zielfunktion

$$g(x) := \max_{i=1,\dots,n} w_i \cdot d(x, v_i), x \in P(G)$$

### 3.3.1 1-Centerprobleme auf allgemeinen Graphen

**Zielfunktion:**  $\min_{v \in V} g(v)$

**Lösungsverfahren**

1. Berechne die gewichtete Distanzmatrix

$$\text{diag}(w_1, \dots, w_n) \cdot D = \begin{pmatrix} w_1 d(v_1, v_1) & \cdots & w_1 d(v_n, v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1 d(v_1, v_n) & \cdots & w_1 d(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

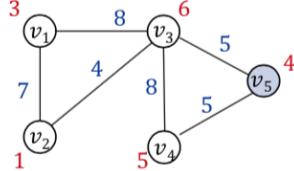
2. Bestimme für jede Spalte den **maximalen Eintrag** in der Spalte. Die Spalte mit dem **kleinsten maximalen Eintrag** liefert einen Center.

**Example 3.3.1.**

## Knotenbeschränkte 1-Centerprobleme

### Beispiel

Folgendes Netzwerk



Berechne die gewichtete Distanzmatrix

$$\begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 16 & 13 \\ 7 & 0 & 4 & 12 & 9 \\ 8 & 4 & 0 & 8 & 5 \\ 16 & 12 & 8 & 0 & 5 \\ 13 & 9 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 21 & 24 & 48 & 39 \\ 7 & 0 & 4 & 12 & 9 \\ 48 & 24 & 0 & 48 & 30 \\ 80 & 60 & 40 & 0 & 25 \\ 52 & 36 & 20 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

maximale Einträge: 80 60 40 48 39

⇒  $v^* = v_5$  ist der Center des knotenbeschränkten Problems.

Optimaler Zielfunktionswert:  $g(v^*) = 39$ .

### Bemerkung

Es kann mehr als einen Center geben.

Abbildung 3.4: Knotenbeschraenktes 1-Centerproblem Bsp

### 3.3.2 1-Centerprobleme auf Bäume

Sowohl das absolute als auch das knotenbeschränkte Problem auf Bäumen mit nicht-identischen Knotengewichten wird mit den Verfahren der vorherigen Abschnitte für allgemeine Graphen gelöst.

Für ungewichtete Probleme gibt es effizientere Verfahren.

#### 3.3.2.1 Das ungewichtete 1-Centerproblem

##### Zielfunktion

$$g(x) := \max_{i=1,\dots,n} d(x, v_i), x \in P(T)$$

Der absolute, ungewichtete Center eines Baums ist der Mittelpunkt eines längsten Weges zwischen zwei Knoten im Baum.

---

##### Algorithm 11 Verfahren für absolute 1-Centerprobleme auf Bäume

---

- 1: Wähle einen beliebigen Punkt  $x \in P(T), T = (V, E)$
- 2: Bestimme den am weitesten von  $x$  entfernt liegenden Knoten  $v$  in  $T$ .

$$d(v, x) := \max_{i=1,\dots,n} d(v_i, x)$$

- 3: Bestimme den am weitesten von  $v$  entfernt liegenden Knoten  $v'$  in  $T$

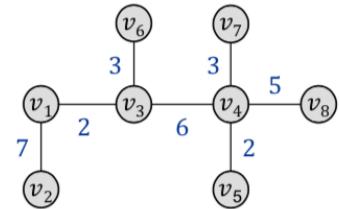
$$d(v', v) := \max_{i=1,\dots,n} d(v_i, v)$$

- 4:  $x^* = \text{Mittelpunkt von } P(v, v') : d(x^*, v) = d(x^*, v') = \frac{1}{2}d(v, v') = g(x^*)$
- 

Example 3.3.2.

### Beispiel

Betrachte den folgenden **Baum**  $T = (V, E)$ .



### Verfahren

1. Wähle  $x = v_6$ .
2.  $d(v, x) = \max\{5, 12, 3, 9, 11, 0, 12, 14\} = d(v_8, x) \rightarrow v = v_8$
3.  $d(v', v) = \max\{13, 20, 11, 5, 7, 14, 8, 0\} = d(v_2, v) \rightarrow v' = v_2$
4.  $\frac{1}{2}d(v, v') = 10 \Rightarrow x^* = ([v_3, v_4], 0.16)$ .

Abbildung 3.5: Absolute 1-Centerproblem auf ungewichtete Baeume Bsp

### Das knotenbeschränkte Problem

Sei  $x^* = ([v_i, v_j], t)$  ein absoluter Center auf der Kante  $e = [v_i, v_j]$

Dann ist einer der Endknoten der Kante  $[v_i, v_j]$  ein Center:

$$g(x^*) := \min\{g(v_i), g(v_j)\}$$

Example 3.3.3.

### Beispiel (Fort.):

$x^* = ([v_3, v_4], 0.16)$  ist ein **absoluter Center**.

Dann:

$$g(x^*) := \min\{g(v_3), g(v_4)\} = \min\{11, 15\} = 11$$

$\Rightarrow x^* = v_3$  ist ein **knotenbeschränkter Center**

Abbildung 3.6: Knotenbeschränktes 1-Centerproblem auf ungewichtete Baeume Bsp

## 3.4 Mehrstandortprobleme



# Kapitel 4

## Diskrete Standortplanung

### 4.1 Klassifikation diskreter Standortprobleme

#### **Planungshorizont**

Anzahl der Zeitperioden (z. B. Monate, Jahre) im Planungszeitraum.

- Statische (Ein-Perioden) Modelle  
Standortentscheidungen werden zu Beginn des Planungshorizontes getroffen
- Dynamische (Mehr-Perioden) Modelle  
Entscheide wo und wann, d. h. in welcher Periode, Einrichtungen platziert werden.

#### **Einrichtungstypen**

Unterscheide verschiedene Ausprägungen von Einrichtungen,

#### **Produkttaggregation**

Ist nur ein Produkt oder sind mehrere Produkte mit unterschiedlichen Charakteristiken zu planen?

#### **Stufigkeit**

Anzahl der Stufen des Distributionsnetzwerks.

- Einstufige Modelle  
Güterverteilung über eine Transportstufe (z. B. Lager→Händler). Standortentscheidung nur auf einer Ebene (z. B. Lager).
- Mehrstufige (hierarchische) Modelle  
Güterverteilung über mehrere Transportstufen (z. B. Werk→Lager→Händler).

#### **Interaktion**

Interaktion zwischen Einrichtungen desselben Typs möglich, z. B. Transporte zwischen Warenhäusern.

#### **Unsicherheit**

- Deterministische Modelle  
alle Daten und Parameter sind vollständig bekannt
- Probabilistische (stochastische) Modelle  
manche Daten und Parameter sind unsicher

#### **Flussrichtung**

- Distributionslogistik  
Waren fließen von Werken/Lieferanten zu den Lagern/Kunden
- Entsorgungslogistik (Reverse Logistics)  
Waren fließen von Kunden zu Recyclinganlagen, Deponien

#### **Kapazitätsrestriktionen**

Beschränken die Mengen, welche produziert, transportiert, umgeschlagen etc. werden können.

### Transportmodus

- Touren-Belieferungen  
Auslieferungen von einer übergeordneten Einrichtung zu untergeordneten Einrichtungen (oder umgekehrt) werden zu Touren gebündelt.
- Direkt-Belieferungen  
Auslieferungen von übergeordneten zu untergeordneten Ebenen geschehen direkt und ohne Umwege.

## 4.2 Das Warehouse Location Problem (WLP)

Auch als **Uncapacitated Facility Location Problem (UFLP)** oder **Simple Plant Location Problem (SPLP)** bekannt.

### Modell-Annahmen

- statisch, einstufig, unkapazitiert, deterministisch
- ein Produkt, Direkt-Belieferung, ein Einrichtungstyp, keine Interaktion

### Gegeben

- Menge von Kunden  $I = \{1, \dots, n\}$  mit Bedarfen  $b_i, i = 1, \dots, n$
- Menge potentieller Standorte  $J = \{1, \dots, m\}$  für neue Einrichtungen
- Kosten  $t_{ij}$  für den Transport einer Mengeneinheit vom potentiellen Standort  $j \in J$  zu einem Kunden  $i \in I$ . → Gesamtkosten zur Belieferung des Kunden  $i$  vom Standort  $j$ :  $c_{ij} = b_i \cdot t_{ij}$   
→ Kostenmatrix  $C = (c_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m}$
- Fixkosten  $f_j$  für die Errichtung einer neuen Einrichtung am Standort  $j$ .

### Entscheidungen

- Anzahl neuer Einrichtungen
- Standorte neuer Einrichtungen
- Zuordnung von Kunden zu neuen Einrichtungen

### 4.2.1 Modellierung

#### Standortentscheidung

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{falls am potentiellen Standort } j \text{ eine neue Einrichtung platziert wird, } j \in J \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

#### Zuordnungsentscheidung

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls Kunde } i \text{ einer neuen Einrichtung am Standort } j \text{ zugeordnet wird, } i \in I, j \in J \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

#### Mathematisches Modell

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^m f_k y_j \\
\text{u.d.N} \quad & \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \forall i \quad (\text{Jeder Kunde } i \text{ wird genau einer neuen Einrichtung an einem Standort } j \text{ zugeordnet}) \\
& x_{ij} \leq y_j, \forall i, \forall j \quad (\text{Kunde } i \text{ darf nur dann Standort } j \text{ zugeordnet werden, wenn an } j \text{ eine Einrichtung platziert}) \\
& x_{ij} \geq 0, y_j \in \{0, 1\}, \forall i, \forall j
\end{aligned} \tag{4.1}$$

### 4.2.2 Heuristiken

Methoden zur Bestimmung einer heuristischen Lösung  $X_H$  für ein Problem.

(Finden nicht notwendigerweise eine optimale Lösung.)

**Güte einer heuristischen Lösung  $X_H$ :** Relative Abweichung in Prozent

$$RPD(X_H, X^*) = \frac{f(X_H) - f(X^*)}{f(X^*)} * 100\% \leq \frac{f(X_H) - LB}{LB}$$

Es gibt zwei Klassen von Standort-Zuordnungs-Heuristiken:

- Konstruktionsheuristiken: Bestimmen „aus dem Nichts heraus“ eine Lösung des Problems.
  - Greedy (ADD-Heuristik)
  - Stingy (DROP-Heuristik)
- Verbesserungsheuristiken: Versuchen eine bereits vorhandene Lösung zu verbessern.
  - Interchange (ADD&DROP-Heuristik)
  - Metaheuristiken: Variable Neighborhood/Tabu Search, Genetic Algorithms

#### 4.2.2.1 Greedy-Heuristik

---

##### Algorithm 12 Greedy-Heuristik

---

```

1: Init:  $X^0 := \emptyset, J' := J, l := 1$ . Berechne  $u_i^0 = \max_{j=1,\dots,m} c_{ij}, F(X^0) = \sum_{i=1}^n u_i^0$ 
2: while ( $J \neq \emptyset$ ) do
3:   Berechne  $\Delta_j^l = \sum_{i=1}^n \max\{0, u_i^{l-1} - c_{ij}\}$  und  $\omega_j^l = \Delta_j^l - f_j = \sum_{i=1}^n \max\{0, u_i^{l-1} - c_{ij}\} - f_j, \forall j \in J'$ 
4:   Bestimme potentiellen Standort  $j \in J'$  mit
      
$$\tilde{\omega}_j^l = \max_{k \in J'} \{\omega_k^l : \omega_k^l > 0\}$$

5:    $X^l := X^{l-1} \cup \{j\}, J' := J' \setminus \{j\}, F(x^l) = F(X^{l-1}) - \tilde{\omega}_j^l$ 
6:   if ( $\omega_h^l \leq 0, h \in J'$ ) then
7:      $J := J' \setminus \{h\}$ 
8:   end if
9:   Aktualisiere geringste Kosten für alle Kunden  $i$ :  $u_i^l = \min\{c_{ij} | j \in X^l\}$ 
10:   $l := l + 1$ 
11: end while

```

**Output:** eine heuristische Lösung des Problems  $X^{l-1}$

---

**Example 4.2.1.**

## Greedy-Heuristik: Beispiel

### Beispiel

- Folg. Transport- und Errichtungskosten
- Iterationsschritt  $\ell = 1, J' = \{1,2,3,4\}$

				$u_i^0$
8	10	19	13	19
7	14	24	21	24
18	12	5	12	18
16	14	7	13	16
15	15	8	18	18
$(19 - 8) + (24 - 7) + (18 - 18) + (16 - 16) + (18 - 15) = 31$				$f_j$
				21 17 20 22
				95 = $F(X^0)$
				$\Delta_j^1 = 31$
				$\omega_j^1 = 10 \text{ 13 12 } -4$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 19 & 13 \\ 7 & 14 & 24 & 21 \\ 18 & 12 & 5 & 12 \\ 16 & 14 & 7 & 13 \\ 15 & 15 & 8 & 18 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 21 \\ 17 \\ 20 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_i^0 &= \max\{c_{ij} \mid j = 1, \dots, m\} \\ w_j^\ell &= \sum_{i=1}^n \max\{0, u_i^{\ell-1} - c_{ij}\} - f_j \\ &= \Delta_j^\ell - f_j \end{aligned}}$$

- Größte Kostenersparnis mit Standort 2:  $\tilde{\omega}_j^l = \omega_2^1 = 13$   
 $\Rightarrow X^1 = X^0 \cup \{2\}, J' = \{1,3,4\}$  und  $F(X^1) = F(X^0) - \omega_2^1 = 95 - 13 = 82$ .  
 Da  $\omega_4^1 < 0$ , lösche Standort 4 aus  $J' \Rightarrow J' = \{1,3\}$ .

## Greedy-Heuristik: Beispiel

- Iterationsschritt  $\ell = 2, J' = \{1,3\}$  und  $X^1 = \{2\}$ .
- |              |     |    |       | $u_i^0 \quad u_i^1$ |
|--------------|-----|----|-------|---------------------|
| $x_1 = 2$    | 8   | 10 | 19 13 | 19 10               |
|              | 7   | 14 | 24 21 | 24 14               |
|              | 18  | 12 | 5 12  | 18 12               |
|              | 16  | 14 | 7 13  | 16 14               |
|              | 15  | 15 | 8 18  | 18 15               |
| $f_j$        | 21  | 17 | 20 22 | 95                  |
| $\Delta_j^1$ | 31  | 30 | 32 18 |                     |
| $\omega_j^1$ | 10  | 13 | 12 -4 |                     |
| $\Delta_j^2$ | 9   | -  | 21 -  | 82                  |
| $\omega_j^2$ | -12 | -  | 1 -   |                     |
- Einige Kostenersparnis mit Standort 3:  $\tilde{\omega}_j^l = \omega_3^2 = 1$ .
  - $\Rightarrow X^2 = X^1 \cup \{3\}, J' = \{1\}$  und  $F(X^2) = 82 - 1 = 81$ .
  - Da  $\omega_1^2 < 0$ , lösche Standort 1 aus  $J' \Rightarrow J' = \emptyset \rightarrow \text{Stopp}$
  - Heuristische Lösung:  $X_H = X^2 = \{2,3\}$  und  $F(X_H) = 81$ .
  - Wert der LP-Relaxation:  $76 \Rightarrow X_H \text{ max. 6.6% schlechter als die optimale Lösung.}$

Abbildung 4.1: Greedy Heuristik Bsp

### Example 4.2.2. Aufgabe 14

#### 4.2.2.2 Interchange-Heuristik

#### 4.2.3 Das DUALOC-Verfahren

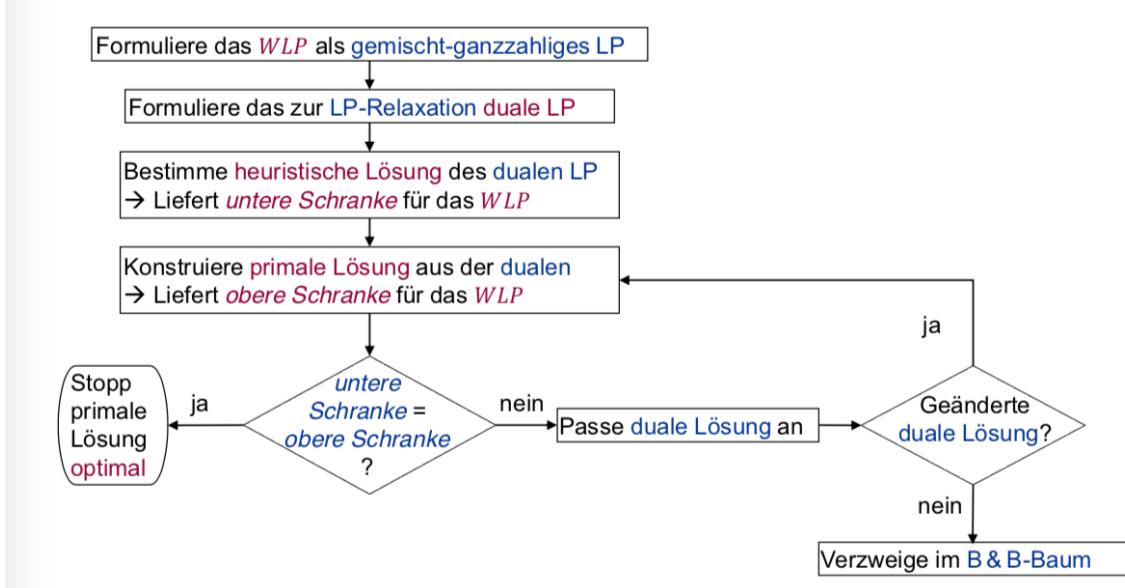


Abbildung 4.2: DUALOC-Verfahren

#### Example 4.2.3. Aufgabe 15, 16

##### 1. WLP als gemischt-ganzzahliges lineares Programm

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^m f_j y_j \\
 \text{u.d.N} \quad & \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \forall i \\
 & x_{ij} \leq y_j, \forall i, \forall j \\
 & x_{ij} \geq 0, y_j \in \{0, 1\}, \forall i, \forall j
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

**LP-Relaxation (LP)** des gemischt-ganzzahligen linearen Programms für das WLP

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^m f_j y_j \\
 \text{u.d.N} \quad & \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \forall i \\
 & x_{ij} \leq y_j, \forall i, \forall j \\
 & x_{ij} \geq 0, y_j \geq 0, \forall i, \forall j
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

##### 2. duale lineare Programm (DP) mit den Dual-Variablen $v_i$ und $w_{ij}$

$$\begin{aligned}
 D(v, w) = \max & \quad \sum_{i=1}^n v_i \\
 \text{u.d.N} & \quad \sum_{i=1}^n w_{ij} \leq f_j, \forall j \\
 & \quad v_i - w_{ij} \leq c_{ij}, \forall i, \forall j \\
 & \quad v_i \leq 0, \forall i \\
 & \quad w_{ij} \geq 0, \forall i, \forall j
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

### Reduziertes duales LP (RDP)

$$\begin{aligned}
 D(v, w) = \max & \quad \sum_{i=1}^n v_i \\
 \text{u.d.N} & \quad \sum_{i=1}^n \max\{0, v_i - c_{ij}\} \leq f_j, \forall j \\
 & \quad v_i \leq 0, y_j \geq 0, \forall i
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

3. Löse das (RDP) mit dem **Dual Ascent-Verfahren** und erhalte eine heuristische Lösung von (DP). → liefert die untere Schranke für das (WLP).

#### 4.2.4 Dual Ascent-Verfahren

##### Idee/Vorgehensweise

Erhöhe, ausgehend von einer Startlösung  $v$ , reihum jedes  $v_i$  solange um einen kleinen Wert, bis keines mehr erhöht werden kann.

Definiere:

- $J_i := \{j \in J | v_i \geq c_{ij}\}$
- $s_j := f_j - \sum_{i=1}^n \max\{0, v_i - c_{ij}\}, \forall j \in J$
- $k(i) := \min\{k | c_i^k \geq v_i\}$

**Algorithm 13** Dual Ascent-Verfahren

---

```

1: Init:
2: Sortiere die Kostenelemente  $c_{ij}$  jedes Kunden  $i \in I$  nach monoton zunehmenden Werten und bezeichne
   sie mit  $c_i^k: c_i^1 \leq c_i^2 \leq \dots \leq c_i^m \leq c_i^{m+1} := \infty$ 
3:  $I' := I, v_i := c_i^1$  für  $\forall i \in I$ 
4: Berechne  $J_i := \{j \in J | v_i \geq c_{ij}\}, \forall i \in I$  und  $s_j := f_j - \sum_{i=1}^n \max\{0, v_i - c_{ij}\}, \forall j \in J$ 
5: Bestimme  $k(i) := \min\{k | c_i^k \geq v_i\}, \forall i \in I$ 
6: if ( $v_i = c_i^{k(i)}$ ) then
7:    $k(i) := k(i) + 1$ 
8: end if
9: while ( $I' \neq \emptyset$ ) do
10:   Für  $\forall i \in I'$ : Bestimme  $\Delta_i := \min\{s_j | j \in J_i\}$ 
11:   if ( $\Delta_i = 0$ ) then
12:      $I' := I' \setminus \{i\}$ 
13:     Wähle das nächste  $i \in I'$ 
14:   end if
15:   Setze  $\Delta := \min\{\Delta_i, c_i^{k(i)} - v_i\}$ 
16:   if ( $\Delta = \Delta_i$ ) then
17:      $I' := I' \setminus \{i\}$ 
18:   else
19:      $k(i) := k(i) + 1$ 
20:   end if
21:   Setze  $v_i := v_i + \Delta$ 
22:   Für  $\forall j \in J_i$ , setze  $s_j := s_j - \Delta$ 
23:   Aktualisiere  $J_i$ 
24: end while

```

---

**Output:**eine heuristische Lösung von (RDP) (Untere Schranke für das (WLP))

**Example 4.2.4.**

## Dual Ascent-Verfahren: Beispiel

### Beispiel

- Folg. Transport- und Errichtungskosten d. h. 6 Kunden und 5 pot. Standorte.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 12 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & 10 & 12 & 8 \\ 6 & 0 & 12 & 3 & 7 \\ 9 & 12 & 0 & 3 & 8 \\ 12 & 8 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 9 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

### 1. Initialisierung

- Sortierung der Kostenelemente: z. B. für  $i = 1$
- $c_1^1 = 0 \leq c_1^2 = 3 \leq c_1^3 = 4 \leq c_1^4 = 6 \leq c_1^5 = 12 \leq c_1^6 = \infty$  usw.
- $I' := \{1, \dots, 6\}$  und  $v_1 = v_2 = v_4 = v_5 = v_6 = 0, v_3 = 4$
- $J_1 = \{1\}, J_2 = \{5\}, J_3 = \{1\}, J_4 = \{2\}, J_5 = \{3\}, J_6 = \{4\}$ .
- $s_1 = 12, s_2 = 6, s_3 = 9, s_4 = 9, s_5 = 12$ .
- $k(1) = k(2) = k(3) = k(4) = k(5) = k(6) = 2$ .
- Sammle all diese Daten in einem Tableau.

$$\begin{aligned} J_l &= \{j \in J \mid v_l \geq c_{ij}\} \\ s_j &:= f_j - \sum_{i=1}^n \max\{0, v_i - c_{ij}\} \\ k(i) &:= \min\{k \mid c_i^k \geq v_i\} \end{aligned}$$

Abbildung 4.3: Dual Ascent-Verfahren Bsp

## Dual Ascent-Verfahren: Beispiel

Die Sortierung der Kostenelemente wird der Einfachheit halber nicht explizit im Tableau durchgeführt.

Die Kostenelemente  $c_i^{k(i)}$  werden durch Unterstriche kenntlich gemacht.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	$v_i$	$J_i$
1	0	4	6	12	<u>3</u>	0	{1}
2	<u>2</u>	6	3	4	0	0	{5}
3	4	9	10	12	<u>8</u>	4	{1}
4	6	0	12	<u>3</u>	7	0	{2}
5	9	12	0	<u>3</u>	8	0	{3}
6	12	8	<u>4</u>	0	6	0	{4}
$s_j$	12	6	9	9	12		

### 2. Iteration: Starte mit $i = 1$ .

$$\Delta_1 = \min\{s_j \mid j \in J_1\} = s_1 = 12.$$

$$\Delta = \min\{\Delta_1, c_1^2 - v_1 = 3 - 0\} = 3.$$

$$\text{Da } \Delta = c_1^2 - v_1,$$

setze  $k(1) := k(1) + 1 = 2 + 1 = 3$ .

Setze  $v_1 := v_1 + \Delta = 0 + 3 = 3$  und für alle  $j \in J_1 = \{1\}$  setze  $s_j := s_j - \Delta$ , d. h.  $s_1 - \Delta = 12 - 3 = 9$ .

Aktualisiere  $J_1: J_1 = \{1, 5\}$ .

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	$v_i$	$J_i$	$v_i$	$J_i$
1	0	<u>4</u>	6	12	<u>3</u>	0	1	<u>3</u>	{1, 5}
2	<u>2</u>	6	3	4	0	0	5	0	{5}
3	4	9	10	12	<u>8</u>	4	1	4	{1}
4	6	0	12	<u>3</u>	7	0	2	0	{2}
5	9	12	0	<u>3</u>	8	0	3	0	{3}
6	12	8	<u>4</u>	0	6	0	4	0	{4}
$s_j$	12	6	9	9	12				
$s_j$	<u>9</u>	6	9	9	12				

Abbildung 4.4: Dual Ascent-Verfahren Bsp

## Dual Ascent-Verfahren: Beispiel

$i = 2$ :

- $\Delta_2 = \min\{s_j \mid j \in J_2\} = s_5 = 12$ .
- $\Delta = \min\{\Delta_i, c_2^2 - v_2 = 2 - 0\} = 2$ .
- Da  $\Delta = c_2^2 - v_2$ , setze  $k(2) := k(2) + 1 = 3$ .
- Setze  $v_2 := v_2 + \Delta = 2$   
und für alle  $j \in J_2 = \{5\}$   
setze  $s_j := s_j - \Delta$ , d.h.  $s_5 - \Delta = 12 - 2 = 10$ .
- Aktualisiere  $J_2$ :  $J_2 = \{1, 5\}$ .

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	$v_i$	$J_i$	$v_i$	$J_i$
1	0	4	6	12	3	0	1	3	{1, 5}
2	2	6	3	4	0	0	5	2	{1, 5}
3	4	9	10	12	8	4	1	8	{1, 5}
4	6	0	12	3	7	0	2	3	{2, 4}
5	9	12	0	3	8	0	3	3	{3, 4}
6	12	8	4	0	6	0	4	4	{3, 4}
$s_j$	12	6	9	9	12				
$s_j$	9	6	9	9	10				

$s_j$  | 12 6 9 9 12 |

$s_j$  | 9 6 9 9 10 |

■ Nach  $i = 3, \dots, 6$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	$v_i$	$J_i$	$v_i$	$J_i$
1	0	4	6	12	3	0	1	3	{1, 5}
2	2	6	3	4	0	0	5	2	{1, 5}
3	4	9	10	12	8	4	1	8	{1, 5}
4	6	0	12	3	7	0	2	3	{2, 4}
5	9	12	0	3	8	0	3	3	{3, 4}
6	12	8	4	0	6	0	4	4	{3, 4}
$s_j$	12	6	9	9	12				
$s_j$	5	3	6	5	10				
$s_j$	2	0	4	0	7				

Abbildung 4.5: Dual Ascent-Verfahren Bsp

## Dual Ascent-Verfahren: Beispiel

- $I' \neq \emptyset \Rightarrow$  starte neue Iteration. Tableau nach  $i = 1, \dots, 6$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	$v_i$	$J_i$	$v_i$	$J_i$	$v_i$	$J_i$
1	0	4	6	12	3	0	1	3	{1, 5}	4	{1, 2, 5}
2	2	6	3	4	0	0	5	2	{1, 5}	3	{1, 3, 5}
3	4	9	10	12	8	4	1	8	{1, 5}	9	{1, 2, 5}
4	6	0	12	3	7	0	2	3	{2, 4}	6	{1, 2, 4}
5	9	12	0	3	8	0	3	3	{3, 4}	5	{3, 4}
6	12	8	4	0	6	0	4	4	{3, 4}	4	{3, 4}
$s_j$	12	6	9	9	12						
$s_j$	5	3	6	5	10						
$s_j$	2	0	4	0	7						

### Bemerkungen

- $v_4$  wird zwar auf  $c_{41}$  erhöht, trotzdem ist  $\Delta_4 = \Delta$ .
- $v_5$  konnte nicht auf den drittgrößten Kostenwert 8 in Zeile 5 erhöht werden, da ansonsten  $s_4$  negativ würde. Also  $\Delta_5 = \Delta$ .
- Für  $v_6$  sogar  $\Delta_6 = 0$ .  
⇒ Änderung:  $I' = \{1, \dots, 3\}$

Abbildung 4.6: Dual Ascent-Verfahren Bsp

## Dual Ascent-Verfahren: Beispiel

- $I' \neq \emptyset \Rightarrow$  starte neue Iteration. Tableau nach  $i = 1, \dots, 3$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	$v_i$	$J_i$	$v_i$	$J_i$	$v_i$	$J_i$	$v_i$	$J_i$
1	0	4	6	12	3	0	1	3	{1, 5}	4	{1, 2, 5}	4	{1, 2, 5}
2	2	6	3	4	0	0	5	2	{1, 5}	3	{1, 3, 5}	4	{1, 3, 4, 5}
3	4	9	10	12	8	4	1	8	{1, 5}	9	{1, 2, 5}	9	{1, 2, 5}
4	6	0	12	3	7	0	2	3	{2, 4}	6	{1, 2, 4}	6	{1, 2, 4}
5	9	12	0	3	8	0	3	3	{3, 4}	5	{3, 4}	5	{3, 4}
6	12	8	4	0	6	0	4	4	{3, 4}	4	{3, 4}	4	{3, 4}
$s_j$	12	6	9	9	12								
$s_j$	5	3	6	5	10								
$s_j$	2	0	4	0	7								
$s_j$	1	0	3	0	6								

- Lediglich  $v_2$  konnte auf den viertgrößten Kostenwert 4 erhöht werden.
- Änderung:  $I' = \{2\}$
- $I' \neq \emptyset \Rightarrow$  starte neue Iteration.
- Allerdings kann  $v_2$  nicht weiter erhöht werden ( $s_2 = 0$ )  $\Rightarrow$  Stopp
- Lösung:  $v = (4, 4, 9, 6, 5, 4)$  mit  $RD(v) = 32$ .

Abbildung 4.7: Dual Ascent-Verfahren Bsp

4. Konstruiere primär Lösung ausgehend von einer zulässige Lösung  $v$  von (RDP) mit **Konstruktionsheuristik**  $\rightarrow$  liefert die obere Schranke für das (WLP)

### 4.2.5 Konstruktionsheuristik

---

#### Algorithm 14 Konstruktionsheuristik

---

- 1: **Init:** setze  $X = \emptyset$ , berechne  $J^+ = \{j \in J \mid s_j = 0\}$
  - 2: **Selektion von Standorten**
  - 3: Für  $\forall i \in I$ :
  - 4: **if** (Es gibt für Kunde  $i$  genau einen Standort  $j \in J^+$  mit  $c_{ij} \leq v_i$  und  $j \notin X$ ) **then**
  - 5:     Setze  $X = X \cup \{j\}$ ,  $y_j = 1$
  - 6: **else if** (Es gibt für Kunde  $i$  mehrere Standorte  $j \in J^+$  mit  $c_{ij} \leq v_i$  aber keines dieser  $j \in X$ ) **then**
  - 7:     setze  $X = X \cup \{j^*\}$ ,  $y_{j^*} = 1$  für das  $j^*$  mit  $c_{ij^*} = \min\{c_{ij} \mid c_{ij} \leq v_i\}$
  - 8: **end if**
  - 9: **Zuordnung**
  - 10: Ordne jeden Kunden  $i$  dem kostengünstigsten Standort  $j \in X$  zu:  $x_{ij^*} = 1$  für das  $j^*$  mit  $c_{ij^*} = \min\{c_{ij} \mid c_{ij} \leq v, j \in X\}$
- Output:primäre Lösung (obere Schranke für das (WLP))
- 

Example 4.2.5.

## Konstruktionsheuristik

### Beispiel

Zulässige duale Lösung  $v = (4, 4, 9, 6, 5, 4)$  des Dual Ascent-Verfahrens, mit  $s = (1, 0, 3, 0, 6)$  und  $RD(v) = 32$ .

#### 1. Initialisierung

$$X = \emptyset \text{ und } J^+ = \{j \in J \mid s_j = 0\} = \{2, 4\}.$$

#### 2. Selektion von Standorten

Genau ein Standort  $j \in J^+$  mit  $c_{ij} \leq v_i$  für Kunde  $i$ ?

$$i = 1: \text{ lediglich } c_{12} \leq v_1 \Rightarrow X := \{2\},$$

$$i = 2: \text{ lediglich } c_{24} \leq v_2 \Rightarrow X := \{2, 4\} = J^+.$$

Können schon stoppen, da alle erlaubten Standorte bereits ausgewählt.

$$\Rightarrow y_2 = y_4 = 1 \text{ und } y_1 = y_3 = y_5 = 0.$$

#### 3. Zuordnung

$$x_{12} = x_{24} = x_{32} = x_{42} = x_{54} = x_{64} = 1. \text{ Alle anderen } x_{ij} = 0.$$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	$v_i$
1	0	4	6	12	3	4
2	2	6	3	4	0	4
3	4	9	10	12	8	9
4	6	0	12	3	7	6
5	9	12	0	3	8	5
6	12	8	4	0	6	4
$s_j$	1	0	3	0	6	32

Abbildung 4.8: Konstruktionsheuristik Bsp

### 5. Optimalitätsbedingungen erfüllt?

- $s_j \geq 0 \Rightarrow y_j = 0; s_j = 0 \Rightarrow y_j > 0$
- $v_i < c_{ij} \Rightarrow x_{ij} = 0; v_i \geq c_{ij} \Rightarrow x_{ij} \geq 0$
- $v_i > c_{ij} \Rightarrow x_{ij} = y_j$

Falls die drei Bedingungen erfüllt sind  $\rightarrow$  Die beiden erhaltenen Lösung sind optimal

Sonst  $\rightarrow$  **Dual Adjustment Verfahren**, dann wieder Konstruktionsheuristik durchführen, bis die Optimalitätsbedingungen erfüllt werden.

#### 4.2.5.1 Dual Adjustment-Verfahren

##### Voraussetzung

zulässige Lösungen  $v$  von (RDP) und  $(x, y)$  von (WLP).

Definiere:

- $J_i^x := \{j \in X \mid v_i > c_{ij}\}$
- $c_{ij^*} = \min\{c_{ij} \mid j \in J_i^x\}$
- $c_{ij^{**}} = \min\{c_{ij} \mid j \in J_i^x, j \neq j^*\}$
- $I_j^x = \{i \in I \mid j \in X \text{ ist der einzige Standort mit } v_i \geq c_{ij}\}, j \in X$

**Algorithm 15** Dual Adjustment-Verfahren

**Input:** zulässige Lösungen  $v$  von (RDP) und  $(x, y)$  von (WLP). (Nur für die Spalten mit  $s_j = 0$  durchführen)

1: **Iteration**2: Für  $\forall i \in I$ :3: Gilt  $|J_i^x| \leq 1$  oder  $I_{j^*}^x \cup I_{j^{**}}^x = \emptyset$ , so fahre mit dem nächsten  $i$  fort.4: Bestimme das nächstkleinere  $c_{ij} : \Delta := \max\{c_{ij} | c_{ij} < v_i, j \in J\}$ 5: Setze  $s_j := s_j + (v_i - \Delta)$  für  $\forall j \in J_i^x$ 6: Setze  $v_i := \Delta$ 

7: Führe das Dual Ascent-Verfahren nacheinander aus mit

- $I' := I_{j^*}^x \cup I_{j^{**}}^x$
- $I' := I' \cup \{i\}$
- $I' := I$

**Example 4.2.6.****Dual Adjustment-Verfahren****Beispiel**

Zulässige duale Lösung  $v = (4, 4, 9, 6, 5, 4)$   
mit  $s = (1, 0, 3, 0, 6)$  und  $RD(v) = 32$ .

**Zulässige Lösung  $(x, y)$  von (WLP):**

- $y_2 = y_4 = 1$  und  $y_1 = y_3 = y_5 = 0$
- $x_{12} = x_{24} = x_{32} = x_{42} = x_{54} = x_{64} = 1$ .  
Alle anderen  $x_{ij} = 0$ .

$\Rightarrow X = \{2, 4\}$ ,  $F(x, y) = 35$ .

**Iteration**

- Für  $i = 1, \dots, 3$  gilt  $|J_i^x| \leq 1$ .
- $i = 4$ :  $|J_4^x| = 2$  ( $J_4^x = \{2, 4\}$ ) und  $I_2^x \cup I_4^x = \{1, 3\} \cup \{2, 5, 6\} \neq \emptyset$ .
- **Nächstkleineres**  $c_{4j}$ :  
 $\Delta := \max\{c_{4j} | c_{4j} < v_4, j \in J\} = c_{44} = 3$ .
- $s_2 := s_2 + (v_4 - \Delta) = 0 + 6 - 3 = 3$ ,  $s_4 = 3$ ,  $v_4 = 3$ .

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	$v_i$
1	0	4	6	12	3	4
2	2	6	3	4	0	4
3	4	9	10	12	8	9
4	6	0	12	3	7	6
5	9	12	0	3	8	5
6	12	8	4	0	6	4
$s_j$	1	0	3	0	6	32

$J_i^x = \{j \in X | v_i > c_{ij}\}$   
 $I_j^x = \left\{ \begin{array}{l} i \in I | j \in X \text{ ist der einzige} \\ \text{Standort mit } v_i \geq c_{ij} \end{array} \right\}$

Abbildung 4.9: Dual Adjustment-Verfahren Bsp

## Dual Adjustment-Verfahren

### Beispiel

Führe das Dual Ascent-Verfahren mit  $I' = \{1, 2, 3, 5, 6\}$  basierend auf folgendem Tableau aus.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	$v_i$
1	0	4	6	12	3	4
2	2	6	3	4	0	4
3	4	9	10	12	8	9
4	6	0	12	3	7	3
5	9	12	0	3	8	5
6	12	8	4	0	6	4
$s_j$	1	3	3	3	6	29

Man erhält:

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	$v_i$
1	0	4	6	12	3	5
2	2	6	3	4	0	4
3	4	9	10	12	8	9
4	6	0	12	3	7	3
5	9	12	0	3	8	8
6	12	8	4	0	6	4
$s_j$	0	2	0	0	5	33

Mit einer neuen dualen Lösung  $v = (5, 4, 9, 3, 8, 4)$  und verbessertem Zielfunktionswert 33.

Weitere Schritte bringen keine Verbesserung.

Abbildung 4.10: Dual Adjustment-Verfahren Bsp

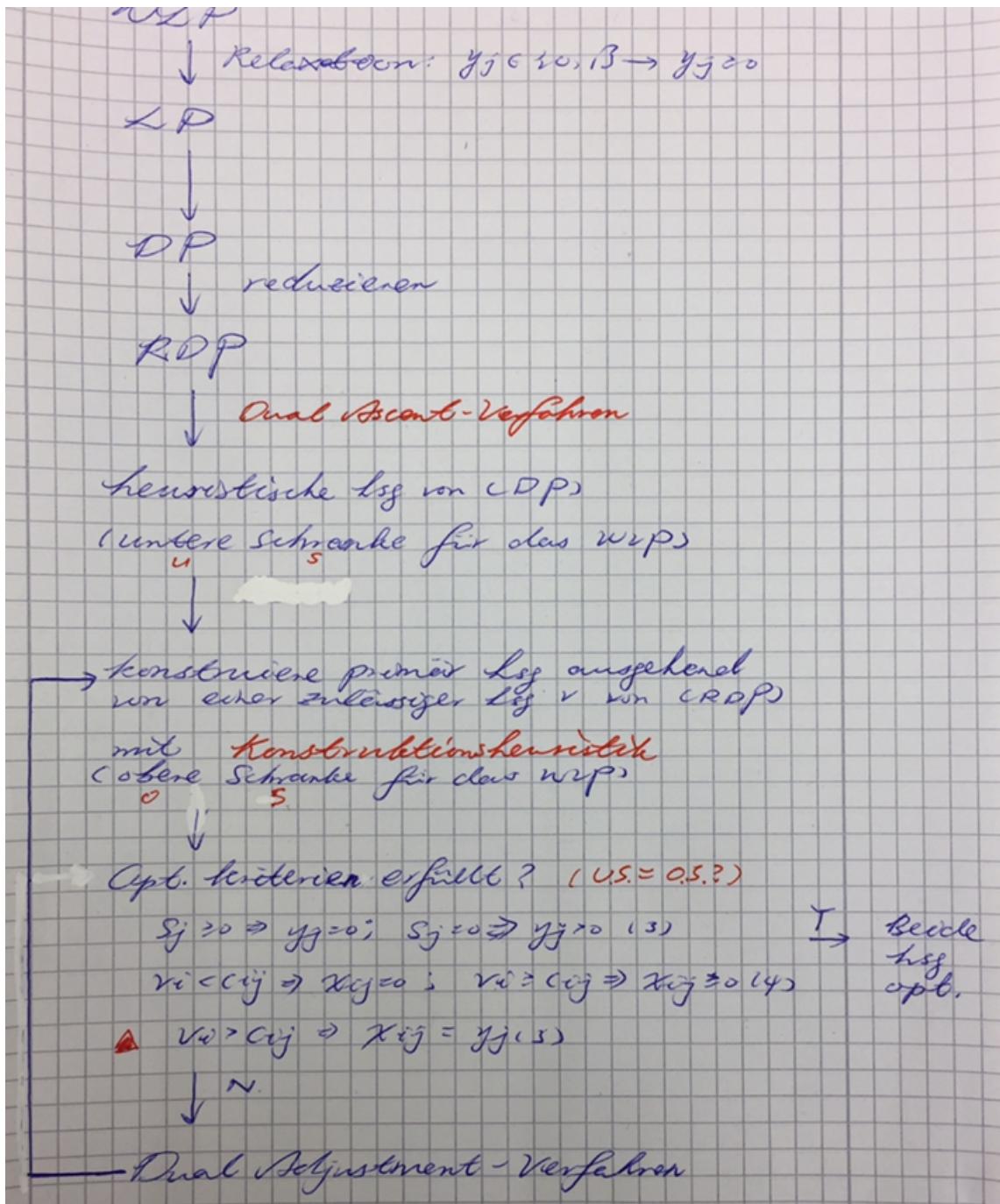


Abbildung 4.11: WLP

Note 2.

### 4.3 Hub-Location-Probleme

# Kapitel 5

## Gebietsplanung

Ziel: kleine geographische Einheiten (sogenannte Basisgebiete) zu über- geordneten Gebieten (häufig als Bezirke, Cluster oder Territorien bezeichnet) unter der Berücksichtigung verschiedener relevanter Planungskriterien zusammenzufassen.

### 5.1 Basismodell

#### 5.1.1 Definitionen und Notationen

Ein Gebietsplanungsproblem umfasst eine Menge  $V = \{1, \dots, M\}$  von Basisgebieten.

Ein **Basisgebiet**  $i \in V$  ist durch seinen Mittelpunkt  $b_i = (x_i, y_i)$  bestimmt.

Für jedes Basisgebiet  $i \in V$  ist eine einzelne quantifizierbare Eigenschaft, das sogenannte **Aktivitätsmaß**  $w_i$ , gegeben.

**Gebiet:**

- Gebiete  $D_1, \dots, D_p$  sind disjunkte Teilmengen der Basismenge, so dass jedes Basisgebiet in genau einem Gebiet enthalten ist:

$$D_1 \cup \dots \cup D_p = V \quad \text{und} \quad D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j, b < p$$

- Aktivitätsmaß oder die Größe eines Gebiets: die Summe der Aktivitätsmaße seiner Basisgebiete

$$w(D_j) = \sum_{i \in D_j} w_i$$

- **Zentrum** des Gebiets  $j$ :  $c_j$  (Im Allgemeinen entspricht  $c_j$  einem der Mittelpunkte der zum Gebiet  $j$  gehörenden Basisgebiete.)

**Zusammenhang:**

Basisgebiet  $b_i = (x_i, y_i) \in$  Menge der Basisgebiete  $V \supseteq$  Gebiet  $D_j$

#### 5.1.2 Modell-Kriterien

**Balance**

Alle Gebiete sollen balanciert sein, also möglichst gleich groß bzw. stark bezüglich der Aktivitätsmaße der Gebiete.

- **perfekt balanciert**  $\Leftrightarrow$  sein Aktivitätsmaß entspricht dem durchschnittlichen Aktivitätsmaß aller Gebiete  $\mu$

$$w(D_j) = \mu = \frac{w(V)}{p} \quad (5.1)$$

Auf Grund der diskreten Struktur des Problems können perfekt balancierte Vertriebsgebiete im Allgemeinen NICHT erzielt werden.

- **relative Abweichung** des Aktivitätsmaßes eines Gebiet

$$bal(D_j) = \frac{|w(D_j) - \mu|}{\mu}$$

### Kontiguität (Contiguity)

Zwei Basisgebiete werden als benachbart bezeichnet, wenn ihre geographischen Anordnungen nichtleere Schnittmengen besitzen.

### Kompaktheit (Compactness)

- Reock-Test: Bilde das Verhältnis der Fläche des Gebiets zur Fläche des kleinsten, das Gebiet umschließenden Kreises.

$$cp(D_j) = \frac{A_{A_j}}{A_{u_k}} \leq 1$$

- Schwartzberg-Test: Bilde das Verhältnis zwischen dem Umfang eines Kreises, der dadurch festgelegt ist, dass er den gleichen Flächeninhalt wie das Gebiet hat, und dem Umfang des Gebiets.

$$cp(D_j) = \frac{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot A_{D_j}}}{U_{D_j}} \leq 1$$

Je näher  $cp(D_j)$  an 1, umso kompakter ist das Gebiet.

### 5.1.3 Ziel der Gebietsplanung

Untergliedere alle Basisgebiete  $V$  in  $p$  Gebiete, welche die Planungskriterien der Balance, Kompaktheit, Kontiguität und Disjunktheit erfüllen.

## 5.2 Vorgehensweisen zur Gebietsplanung

### 5.2.1 Notation

- $V$ : Menge der Basisgebiete
- $w_u$ : Aktivitätsmaß des Basisgebiets  $u$
- $p$ : Anzahl der Gebiete
- $d_{uv}$ : Distanzen
- $\mu$ : Durchschnittsgröße bzgl.  $w$  ((5.1))
- $\tau$ : Toleranz der Balance
- $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls Basisgebiet } u \text{ einem Gebiet mit dem Zentrum } v \text{ zugeordnet wird.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

### 5.2.2 LP-Formulierung

$$\begin{aligned}
 & \min_{u,v \in V} d_{uv}^2 w_u x_{uv} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{v \in V} x_{uv} = 1 && (u \in V) \quad (\text{Vollst. Zuordnung}) \\
 & \mu(1 - \tau)x_{vv} \leq \sum_{u \in V} w_u x_{uv} \leq \mu(1 + \tau)x_{vv} && (v \in V) \quad (\text{Balance}) \\
 & \sum_{v \in V} x_{vv} = p && (p \text{ Gebiete}) \\
 & x_{uv} \in \{0, 1\} && (u, v \in V)
 \end{aligned}$$

## 5.3 Recursive-Partitioning-Algorithmus

(Bsp: Aufgabe 19)

**Grundidee:**

- Unterteile das Problem rekursiv auf geometrische Weise durch Linien in immer kleinere Teilprobleme.
- Wiederhole dies solange, bis eine elementare Größe erreicht ist, in welcher das Gebietsplanungsproblem in effizienter Zeit gelöst wird.

### 5.3.1 Definitionen

**Partitionsproblem**

$PP = (B, q)$  wird als Partitionsproblem bezeichnet, falls  $B \subseteq V$  und  $1 \leq q \leq p$  gilt.

**Linienpartition**

$LP = (B_l, B_r, q_l, q_r)$  wird als Linienpartition bezeichnet, falls:

1.  $B_l \cup B_r = B$  und  $B_l \cap B_r = \emptyset$
2.  $\exists$  Line  $L : B_l = B \cap H^{\leq}(L)$  und  $B_r = B \cap H^{>}(L)$
3.  $q \leq q_l, q_r \leq q$  und  $q_l + q_r = q$

### 5.3.2 Recursive-Partitioning

**Gleichmäßige Aufteilung:**

- $q_l = q_r = \frac{q}{2}$ , falls  $q$  gerade
- $q_l = \frac{q-1}{2}, q_r = \frac{q+1}{2}$  und  $q_l = \frac{q+1}{2}, q_r = \frac{q-1}{2}$ , falls  $q$  ungerade

**Balance:**

$$bal(LP) = \max\left\{\frac{\left|\frac{w(B_L)}{q_l} - \mu\right|}{\mu}, \frac{\left|\frac{w(B_r)}{q_r} - \mu\right|}{\mu}\right\}$$

**Partitionsposition:**

Bestimme  $k'$ , so dass  $\frac{w(B_l^{k'})}{q_l} < \frac{w(B)}{q}$  und  $\frac{w(B_l^{k'+1})}{q_l} \geq \frac{w(B)}{q}$

$$k^* = \begin{cases} k' & \text{falls } \frac{w(B)}{q} - \frac{w(B_l^{k'})}{q_l} \leq \frac{w(B_l^{k'+1})}{q_l} - \frac{w(B)}{q} \\ k' + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Kompaktheit:**

$$cp(LP) = d(c_1 \cdot c_2) = l_2(c_1, c_2)$$

### 5.3.3 Algorithmus

#### Algorithm 16 Recursive-Partitioning-Algorithmus

**Input:** Anzahl Suchrichtungen  $K, \beta, V, p$

- 1: Markiere Partitionsproblem  $PP = (V, p)$  als ungelöst
- 2: **while** es gibt ungelöste Probleme **do**:
- 3:     Wähle ein ungelöstes Problem  $PP = (B, q)$
- 4:     **if**  $q = 1$  **then**
- 5:         füge  $B$  der Lösungsmenge  $DL$  hinzu und markiere  $PP$  als gelöst
- 6:     **end if**
- 7:     **if**  $q > 1$  **then**
- 8:         Bestimme für jede Suchrichtung die Linienpartition  $LP(k^*)$  mit der besten Balance und füge sie einer Menge  $FLP$  hinzu.
- 9:         Bewerte alle Linienpartitionen  $LP$  der Menge  $FLP$  durch:

$$rk(LP) = \beta \frac{bal(LP)}{bal^{max}} + (1 - \beta) \frac{cp(LP)}{cp^{max}}$$

- 10:         Wähle  $LP^* = (B_l^*, B_r^*, q_l^*, q_r^*) = \min_{LP \in FLP} rk(FLP)$
- 11:         Erstelle Partitionsprobleme  $PP_l = (B_l^*, q_l^*)$  und  $PP_r = (B_r^*, q_r^*)$  und markiere sie als ungelöst, markiere  $PP$  als gelöst.
- 12:         **end if**
- 13:     **end while**

**Output:** Gebietslayout  $DL$

---