

Standortplanung und strategisches SCM

Ecko Tan

16. Februar 2018

Don't panic!

Inhaltsverzeichnis

1 Volkswirtschaftliche und deskriptive Standortmodelle	5
1.1 Volkswirtschaftliche Standortmodelle	5
1.1.1 Die Wahl kostenminimaler Wohnstandorte	5
1.1.2 Theorie der Boden- und Flächennutzung	6
1.2 Deskriptive überbetriebliche Standortmodelle	7
1.2.1 Prüflisten-Verfahren	7
1.2.2 Rangfolge-Verfahren	8
1.3 Standortplanung unter Wettbewerb	9
1.3.1 Modelle mit vollständiger Zuordnung	9
1.3.1.1 Voroni-diagramm	9
1.3.2 Modelle mit partieller Aufteilung	9
1.3.2.1 Gravitions-Modelle (Das Modell von Huff)	9
1.3.3 Leader-Follower-Modelle	11
1.3.3.1 Regeln	11
1.3.3.2 Probleme / Herausforderungen	11
1.3.3.3 Typische Strategien für Follower F	11
1.3.3.4 Verschiedene Strategien für Leader L	12
2 Standortplanung in der Ebene	15
2.1 Theorie der Standortplanung	15
2.2 Begriffe und Notationen	15
2.2.1 Distanzmessung	15
2.2.2 l_p -Metrik	16
2.3 1-Medianprobleme	16
2.3.1 Einleitung	16
2.3.1.1 Aufgabe	16
2.3.1.2 Dominanzkriterium	16
2.3.2 1-Medianprobleme mit l_1 -Metrik	17
2.3.2.1 Das 1-Medianproblem mit l_1 -Metrik auf der Linie	17
2.3.3 1-Medianprobleme mit l_2 -Metrik	18
2.3.4 1-Medianprobleme mit l_∞ -Metrik	19
2.4 1-Centerprobleme	19
2.4.1 Aufgabe	19
2.4.2 formel	20
2.4.3 1-Centerprobleme mit l_1 -Metrik	20
2.4.3.1 1-Centerprobleme mit l_∞ -Metrik	20
2.4.3.1.1 Der ungewichtete Fall	20
2.4.3.1.2 Der allgemeine gewichtete Fall	21

2.4.4	1-Centerprobleme mit l_2 -Metrik	23
2.4.4.1	Zielfunktion	23
2.4.4.2	Der ungewichtete Fall: Das Kreis-Überdeckungsproblem	23
2.5	Mehrstandortprobleme	24
2.5.1	Modelle mit Interaktion	24
2.5.1.1	Annahmen	24
2.5.1.2	Zielfunktion	24
2.5.1.3	Notationen	25
2.5.1.4	Das Interaktions-Modell mit l_1 -Metrik	25
2.6	Zuordnungs-Modelle	25
3	Standortplanung auf Netzwerken	27
3.1	Graphentheorie	27
3.2	1-Medianprobleme	27
3.2.1	1-Medianprobleme auf allgemeinen Graphen	27
3.2.2	1-Medianprobleme auf Bäume	27
3.3	1-Centerprobleme	27
3.3.1	1-Centerprobleme auf allgemeinen Graphen	27
3.3.2	1-Centerprobleme auf Bäume	27
3.4	Mehrstandortprobleme	27
4	Diskrete Standortplanung	29
4.1	Klassifikation diskreter Standortprobleme	29
4.2	Das Warehouse Location Problem (WLP)	29
4.2.1	Modellierung	29
4.2.2	Heuristiken	29
4.2.2.1	Greedy-Heuristik	29
4.2.2.2	Interchange-Heuristik	29
4.2.3	Das DUALOC-Verfahren	29
4.3	Hub-Location-Probleme	29
5	Gebietsplanung	31
5.1	Basismodell	31
5.1.1	Definitionen und Notationen	31
5.1.2	Modell-Kriterien	31
5.1.3	Ziel der Gebietsplanung	32
5.2	Vorgehensweisen zur Gebietsplanung	32
5.2.1	Notation	32
5.2.2	LP-Formulierung	33
5.3	Recursive-Partitioning-Algorithmus	33
5.3.1	Definitionen	33
5.3.2	Recursive-Partitioning	33
5.3.3	Algorithmus	34

Kapitel 1

Volkswirtschaftliche und deskriptive Standortmodelle

1.1 Volkswirtschaftliche Standortmodelle

1.1.1 Die Wahl kostenminimaler Wohnstandorte standortbezogenen Kosten

$$C(d) = Q \cdot p(d) + V \cdot k(d) \quad (1.1)$$

- d : die Entfernung des Standortes zum Stadtzentrum
- $C(d)$: die gesamten Standortkosten
- Q : die vorgegebene Größe der Wohnfläche
- $p(d)$: die standortabhängigen Mietkosten pro Flächeneinheit (z.B. Quadratmeter)
- V : die Anzahl der Fahrten ins Zentrum
- $k(d)$: standortabhängige Fahrtkosten

Annahme

- $p(d)$ nehmen mit zunehmender Entfernung zum Stadtzentrum exponentiell ab:

$$p(d) = P_Z \cdot e^{-rd} \quad (1.2)$$

- P_Z : der Mietpreis direkt im Zentrum
- r : Verfallskonstante für die Entfernung
- die Fahrtkosten sind proportional zur Entfernung zum Zentrum

$$k(d) = K \cdot d \quad (1.3)$$

- K : die Kosten pro Entfernungsseinheit

Den kostenminimalen Standort findet man unter diesen Annahmen durch Minimierung der Funktion $C(d)$.

Ableiten der Funktion C nach d und anschließendem “Nullsetzen” der Ableitung \Rightarrow

$$d^* = \frac{1}{r}(\ln[r \cdot P_Z \cdot Q] - \ln[V \cdot K]) \quad (1.4)$$

Example 1.1.1. [Aufgabe 1](#), [Aufgabe 2](#)

1.1.2 Theorie der Boden- und Flächennutzung

von Thünens Modell

- das zu untersuchende Gebiet ist eine kreisförmige, isolierte Fläche gleichmäßiger Produktivität
- es liegt ein einziger Absatzmarkt im Zentrum der Fläche vor
- die Transportverbindungen sind überall gleichmäßig gut
- die Produktion der Produkte ist überall und zu gleichen Kosten möglich
- die Transportkosten steigen proportional zur Entfernung
- es ist eine Menge von Produktions-Aktivitäten und deren Output-Mengen gegeben

Unter dem Gesichtspunkt der Gewinn-Maximierung stellt sich nun die Frage:

“Welches der Produkte soll in welcher Entfernung vom Absatzmarkt hergestellt werden?”

Algorithm 1 Verfahren (zur Bestimmung der oberen Einhüllenden)

1: Stelle für jede Produktions-Aktivität die zugehörige Profitfunktion auf:

$$R(d) = \max_i R_i(d) = \max_i (p_i - k_i d)$$

- 2: Setze $d' = 0$ und $I = 1, \dots, n, L = \emptyset$
- 3: Bestimme der max. Profit $R_{i^*} = \max_{j=1, \dots, n} R_j(0)$ und damit die im Zentrum profitabelste Aktivität P_{i^*}
- 4: **if** (das Maximum ist nicht eindeutig) **then**
- 5: wähle unter den maximalen Aktivitäten diejenige mit dem kleinsten k_j .
- 6: **end if**
- 7: $I = I \setminus \{i^*\}, L = L \cup \{i^*\}$
- 8: **while** (Es gibt Schnittpunkte ($d_{ij} = \frac{P_i - P_j}{k_i - k_j}$) $\wedge (I \neq \emptyset)$) **do**
- 9: Schneide R_{i^*} mit allen $R_j(\cdot), j \in I$
- 10: Bestimme $S_{i^*j} = (d_{i^*j}, R_{i^* \setminus j}(d_{i^*j}))$ als den Schnittpunkt mit dem kleinsten Wert $d_{i^*j} > d'$
- 11: **if** (Schneiden sich mehrere Profitfunktionen bei d_{i^*j}) **then**
- 12: wähle unter den Aktivitäten diejenige mit dem kleinsten k .
- 13: **end if**
- 14: $d' = d_{i^*j}, i^* = j, I = I \setminus \{i^*\}$
- 15: Füge d und i^* am Ende der Liste L an
- 16: **end while**
- 17: Füge d^{\max} am Ende von L ein

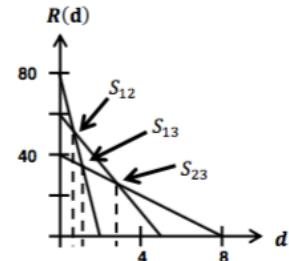
Output: Die Liste L enthält dann die gesuchten Entfernungsintervalle und die zugehörigen, profitablen Produktionsaktivitäten.

Example 1.1.2.**Beispiel**

Gegeben seien drei Produktions-Aktivitäten für Produkte P_1, P_2 und P_3 mit den folgenden Charakteristika

- $p_1 = 80, k_1 = 40 \quad d_1^{\max} = 2$
- $p_2 = 60, k_2 = 12 \quad d_2^{\max} = 5$
- $p_3 = 40, k_3 = 5 \quad d_3^{\max} = 8$

Wir haben $I = \{1,2,3\}$ und $d' = 0$.



Im Zentrum ist Aktivität P_1 am profitabelsten, d.h. $i^* = 1$.

Setze $I = I \setminus \{1\} = \{2,3\}$ und $L = \{1\}$.

Schneide R_1 mit R_2 und R_3 . Man erhält: $S_{12} = \left(\frac{5}{7}, \frac{360}{7}\right)$ und $S_{13} = \left(\frac{8}{7}, \frac{240}{7}\right)$

Da $d' < \frac{5}{7} < \frac{8}{7}$, haben wir $i^* = j = 2$, $d' = \frac{5}{7}$, $I = I \setminus \{2\} = \{3\}$ und $L = \left\{1, \frac{5}{7}, 2\right\}$.

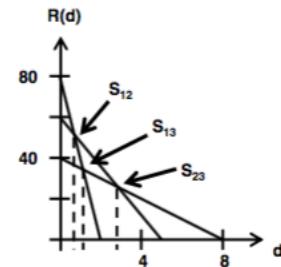
Schneide nun R_2 mit R_3 . Man erhält: $S_{23} = \left(\frac{20}{7}, \frac{180}{7}\right)$

Da $d' < \frac{20}{7}$, haben wir $i^* = j = 3$, $d' = \frac{20}{7}$, $I = I \setminus \{3\} = \emptyset$ und $L = \left\{1, \frac{5}{7}, 2, \frac{20}{7}, 3\right\}$.

Da $I = \emptyset$, füge $d^{\max} = 8$ in L und beende das Verfahren.

Wir erhalten: $L = \left\{1, \frac{5}{7}, 2, \frac{20}{7}, 3, 8\right\}$.

Damit ist im Entfernungsbereich $\left[0, \frac{5}{7}\right]$ Produkt 1 das profitabelste. Danach erzielt man mit Produkt 2 den größten Gewinn im Bereich $\left[\frac{5}{7}, \frac{20}{7}\right]$, und Produkt 3 ist schließlich im Bereich $\left[\frac{20}{7}, 8\right]$ am profitabelsten.

**Example 1.1.3. Aufgabe 3**

1.2 Deskriptive überbetriebliche Standortmodelle

Sowohl Prüflisten- als auch Rangfolge-Verfahren bestimmen den besten Standort für eine neue Einrichtung basierend auf Standortfaktoren.

1.2.1 Prüflisten-Verfahren

Vorgehensweise:

- Zusammenstellung der dem jeweiligen Problem angemessenen Standortfaktoren. Bei dieser Aufstellung bedarf es großer Umsicht.
- Für jeden, der als relevant erachteten Standortfaktoren, ist zu überprüfen und entsprechend zu kennzeichnen, z. B. durch ein Kreuz, an welchem Standort der Faktor künftig am besten erfüllt wird.

Bei dieser Vorgehensweise werden einige Standorte mehrere Kennzeichnungen auf sich vereinen und deshalb als besonders günstig erscheinen, während andere möglicherweise leer ausgehen.

Note 1. Wähle den Standort mit meisten Kreuze

Example 1.2.1.

Beispiel

Gegeben seien 6 Standorte, A – F, und 6 als relevant erkannte Faktoren (I – VI) zusammen mit den entsprechenden Markierungen, welche den höchsten Erfüllungsgrad unter allen Alternativen kennzeichnen.

Standort	relevante Standortfaktoren					
	I	II	III	IV	V	VI
A		X				
B	X			X		
C						X
D						
E					X	
F			X			

← Standort B ist der am besten geeignete

Abbildung 1.1: Prüflisten-Verfahren Bsp

1.2.2 Rangfolge-Verfahren

Vorgehensweise:

- Zusammenfassung der dem Problem angemessenen Standortfaktoren
- Ermittlung einer Gewichtungszahl für jeden Standortfaktoren
- Finde die höchste Gesamtwertigkeit

Example 1.2.2.

Beispiel

Gegeben seien 6 Standorte (A – F) sowie 2 Standortfaktoren (I und II) zusammen mit den entsprechenden **Gewichtungszahlen** (GZ), **Rangwerten** (RW) und den daraus resultierenden **Wertigkeitsziffern** (WZ).

Standort	Standortfaktor I			Standortfaktor II			Gesamt-wertigkeit
	RW	GZ	WZ	RW	GZ	WZ	
A	2	0.3	0.6	4	0.7	2.8	3.4
B	1	0.3	0.3	2	0.7	1.4	1.7
C	3	0.3	0.9	1	0.7	0.7	1.6
D	4	0.3	1.2	6	0.7	4.2	5.4
E	5	0.3	1.5	5	0.7	3.5	5.0
F	6	0.3	1.8	3	0.7	2.1	3.9

Standort D, welcher die **höchste Gesamtwertigkeit** aufweist, ist als optimal zu bezeichnen.

Abbildung 1.2: Rangfolge-Verfahren Bsp

1.3 Standortplanung unter Wettbewerb

Ziel: eine oder mehrere neue Einrichtung so zu platzieren, dass der Marktanteil und Gewinn der eigenen Firma maximiert wird.

1.3.1 Modelle mit vollständiger Zuordnung

Der Bedarf jedes Kunden wird von genau einer Einrichtung vollständig befriedigt. (Bei diesen Modellen lässt sich für jeden Kunden eindeutig entscheiden, welche Einrichtung für ihn die Beste oder Attraktivste ist.)

Definition 1.3.1. Indifferenzmenge

die Menge aller Punkte, welche gleichweit von den beiden Standorten x_A und x_B entfernt liegen

$$IS_{AB} := \{x \in \mathbb{R} \mid l_2(x; x_A) = l_2(x; x_B)\} \quad (1.5)$$

1.3.1.1 Voroni-diagramm

Example 1.3.1. Aufgabe 5

1.3.2 Modelle mit partieller Aufteilung

Bei diesen Modellen verteilen die Kunden ihre Nachfrage anteilig auf mehrere Einrichtungen.

1.3.2.1 Gravitions-Modelle (Das Modell von Huff)

Definition 1.3.2. Anziehungskraft der Einrichtung E auf den Kunden K

$$A(E, K) = \frac{w_E}{d(K, E)^r} \quad (1.6)$$

- w_E : Größe der Einrichtung E an diesem Standort
- $d(K, E)$: die Entfernung vom Kunden K zum Standort der Einrichtung E
- r : eine Potenz (Verfallskonstante) für die Entfernung

Die Wahrscheinlichkeit P , dass ein Kunde eine Einrichtung an einem bestimmten Standort besucht, berechnet sich nach diesem Modell folgendermaßen:

$$P(E, K) = \frac{A(E, K)}{\sum_{\text{alle } \bar{E}} A(\bar{E}, K)} \quad (1.7)$$

Definition 1.3.3. Indifferenzmege zweier Einrichtungen

die Menge aller Punkte, welche beide Einrichtungen mit derselben Wahrscheinlichkeit aufsuchen.

Der Anteil der Nachfrage eines Kunden, welcher auf eine bestimmte Einrichtung entfällt, ergibt sich aus dem Produkt der Gesamtnachfrage des Kunden mit der „Besuchs“-Wahrscheinlichkeit

$$D(E, K) = D(K) \cdot P(K, E) \quad (1.8)$$

- $D(K)$: Gesamtnachfrage des Kunden

Gesamtnachfrage einer Einrichtung = Summe aller Anteile von Kundennachfragen

$$D(E) = \sum_{\text{alle } K} D(E, K) \quad (1.9)$$

gesamter Marktanteil der Einrichtung:

$$MS(E) = \frac{D(E)}{\sum_{\text{alle } K} D(K)} \quad (1.10)$$

Kriterium für Standort einer neuen Einrichtung \bar{E} :

$$\underset{\bar{E}}{\operatorname{argmax}} \quad MS(\text{einige Firma}) = \frac{D(\bar{E}) + \sum_{\text{eigene, bereits exist. } E} D(E)}{\sum_{\text{alle } K} D(K)}$$

Zusammenfassung

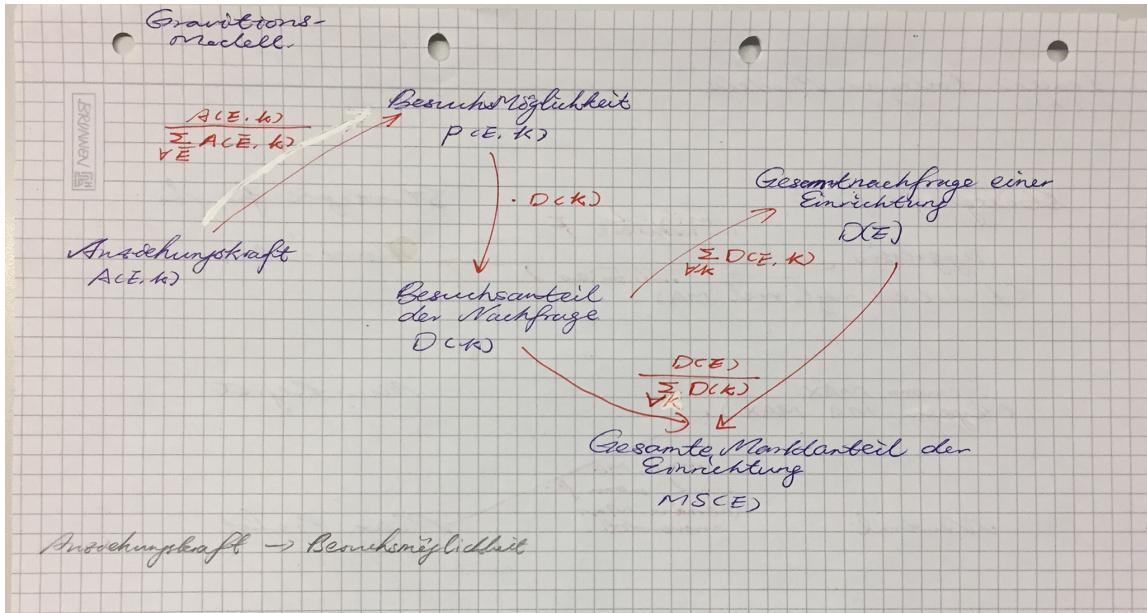


Abbildung 1.3: Gravitionsmodelle

Example 1.3.2. Aufgabe 4

1.3.3 Leader-Follower-Modelle

1.3.3.1 Regeln

- Bei diesen Modellen platzieren zwei Wettbewerber nacheinander neue Einrichtungen in einem (bis-her unerschlossenen) Markt.
- Dabei wählt zuerst der Leader (Erstplatzierende) L Standorte für all seine neuen Einrichtungen und danach der Follower (Zweitplatzierende) F .
- Standortwahl von L und F beeinflussen sich gegenseitig.

1.3.3.2 Probleme / Herausforderungen

• Follower F

Braucht sich erst auf eine Platzierungsstrategie festlegen, wenn der Erstplatzierende L seine Standortwahl schon getroffen hat.

• Leader L

Hat das Problem, dass er die Platzierungsstrategie von F nicht kennt.

1.3.3.3 Typische Strategien für Follower F

• Aggressiv

Platziere neue Einrichtungen so, dass L möglichst viel Marktanteil verliert.

• Gewinnmaximierend

Platziere neue Einrichtungen so, dass der eigene Marktanteil maximal wird.

• Neutral

Platziere neue Einrichtungen nach anderen Kriterien.

1.3.3.4 Verschiedene Strategien für Leader L

- **Maxi-Min**

L platziert neue Einrichtungen so, dass sein Marktanteil maximal wird, wenn F eine aggressive Strategie anwendet, d. h. F das Ziel hat den Marktanteil von L zu minimieren.

Rechenweg:

1. Bestimme zu jedem L denjenigen Follower-Standort \tilde{f} , der dem Leader den geringsten Gewinn bringt, wenn der Leader bei l platziert.
2. Berechne den daraus resultierenden Marktanteil des Leaders
3. Wähle den Standort, für den der Marktanteil des Leaders maximal wird

- **Min-Regret (minimales Bedauern)**

L platziert neue Einrichtungen so, dass, egal welche Standortentscheidung F dann trifft, der Zugewinn an Marktanteil für L durch eine mögliche Andersplatzierung seiner Einrichtungen (nachdem F seine Wahl getroffen hat) minimal wird.

- **Max-Profit**

L platziert neue Einrichtungen so, dass ein Marktanteil maximal wird, wenn F ebenfalls eine gewinnmaximierende Strategie anwendet.

Rechenweg:

1. Bestimme zu jedem L denjenigen Follower-Standort \tilde{f} , der dem Follower den größten Gewinn bringt, wenn der Leader bei l platziert.
2. Berechne den daraus resultierenden Marktanteil des Leaders
3. Wähle den Standort, für den der Marktanteil des Leaders maximal wird

Zusammenfassung

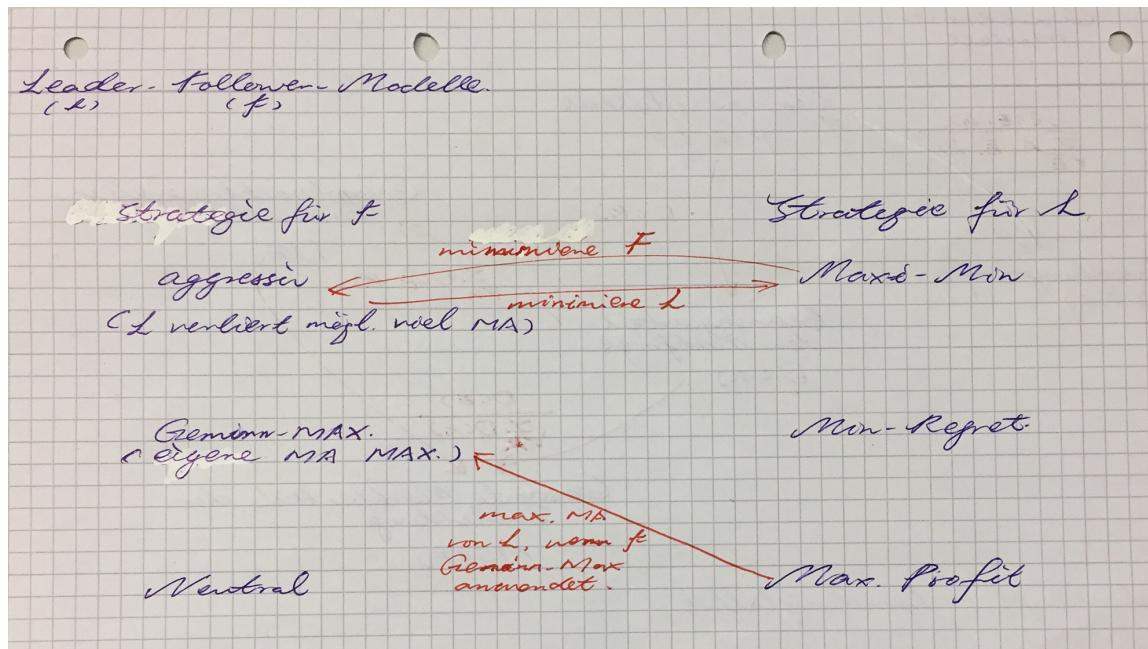


Abbildung 1.4: Leader-Follower-Modelle

Example 1.3.3. Aufgabe 6

Kapitel 2

Standortplanung in der Ebene

2.1 Theorie der Standortplanung

Grundlegende Aufgabenstellung

Platzierung ein oder mehrerer neuer Einrichtungen in Abhängigkeit bereits existierender Einrichtungen

Drei Klassen von Standortproblemen:

- **Standortprobleme in der Ebene** (Einfachste, allerdings auch unrealistischste Problemklasse)
- **Standortprobleme auf Netzwerken** (praxisbezug viel ausgeprägter als bei planaren Standortproblemen)
- **Diskrete Standortprobleme** (realistischste und flexibelste Klasse von Standortproblemen)

2.2 Begriffe und Notationen

Definition 2.2.1. Standorte als Punkte idealisiert

Definition 2.2.2. Neue Einrichtungen $X = x_1, \dots, x_p, p \geq 1$

- dürfen überall in der Ebene platziert werden
- ihre Standorte werden durch Koordinaten repräsentiert

$$x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}) \in \mathbb{R}^2, \forall i = 1, \dots, p$$

Definition 2.2.3. Existierende Einrichtungen (Kunden) $A = a_1, \dots, a_n$

- werden durch eine Menge von Punkten in der Ebene repräsentiert

$$a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}) \in \mathbb{R}^2, \forall i = 1, \dots, n$$

- Jedem Kunden $a_i \in A$ wird ein positives Gewicht $w_i > 0$ zugeordnet.

Definition 2.2.4. Kosten

Lediglich Transportkosten werden berücksichtigt. Sie sind proportional zur Menge und zur zurückgelegten Entfernung.

2.2.1 Distanzmessung

Definition 2.2.5. Metrik / Distanzfunktion

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

welche für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$ folgende Eigenschaften erfüllt:

- Definitheit: $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$
- Dreiecks-Ungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

2.2.2 l_p -Metrik

$$l_p(x, y) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p}, p \geq 1 \quad (2.1)$$

Rechtwinklige Entfernung (l_1 - oder Manhatten-Metrik)

$$l_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad (2.2)$$

Euklidische Entfernung (l_2 - oder Luftlinien-Metrik)

$$l_2(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} \quad (2.3)$$

Quadrierte euklidische Entfernung (l_2^2 -Metrik)

$$l_2(x, y) = |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 \quad (2.4)$$

Tchebychev Entfernung (l_∞ -Metrik)

$$l_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad (2.5)$$

2.3 1-Medianprobleme

2.3.1 Einleitung

2.3.1.1 Aufgabe

Platziere eine neue Einrichtung so in der Ebene, dass die Summe der gewichteten Entfernungen von dem neuen Standort zu allen Kunden minimal wird.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) := \sum_{i=1}^n w_i d(x, a_i) \quad (2.6)$$

- $A = a_1, \dots, a_n$: die n Kunden
- $w_i > 0, i = 1, \dots, n$: die damit assoziierten Gewichte
- x : der gesuchte Standort der neuen Einrichtung
- d : eine Metrik

Nenne einen Punkt $x^* \in \mathbb{R}^2$, welcher die Funktion $f(x)$ minimiert ($f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^2$), **optimal**. Bezeichne die Menge aller optimalen Punkte der Funktion $f(\cdot)$ mit $\mathcal{X}^*(f)$.

2.3.1.2 Dominanzkriterium

Gilt für einen Kunden a_k mit zugehörigem Gewicht w_k , dass

$$w_k \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i,$$

d. h. der Kunde vereinigt mindestens die Hälfte aller Gewichte auf sich, so ist der Standort des Kunden a_k eine optimale Lösung des Problems.

2.3.2 1-Medianprobleme mit l_1 -Metrik

Zielfunktion

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{i=1}^n w_i l_1(x, a_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n w_i l_1(|x_1 - a_{i,1}| + |x_2 - a_{i,2}|) \\
 &= \underbrace{\sum_{i=1}^n w_i l_1(|x_1 - a_{i,1}|)}_{=:f_1(x_1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n w_i l_1(|x_2 - a_{i,2}|)}_{=:f_2(x_2)}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

→ Die ursprüngliche Aufgabe reduziert sich auf das Lösen zweier 1-dimensionaler Probleme, sogenannter “Probleme auf der Linie”.

2.3.2.1 Das 1-Medianproblem mit l_1 -Metrik auf der Linie

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) := \sum_{i=1}^n n w_i |x - a_i|$$

Algorithm 2 Lösungsverfahren für das 1-Medianproblem mit l_1 -Metrik auf der Linie

- 1: Berechne die Summe W aller Gewichte $W := \sum_{i=1}^n n w_i$
- 2: **if** (**then** Es exist. ein $w_k \geq \frac{1}{2}W$)
- 3: Der Kundenstandort a_k ist eine optimale Lösung, $x^* = a_k$
- 4: Stopp
- 5: **else**
- 6: Sortiere die Kundenstandorte a_1, \dots, a_n nach monoton wachsenden Koordinaten $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_n}$
- 7: Bestimme unter Berücksichtigung einer zu den Kundenstandorten analogen Sortierung der Gewichte dasjenige h , für welches folgendes gilt:

$$\sum_{j=1}^{h-1} w_{i_j} < \frac{1}{2}W \text{ und } \sum_{j=1}^h w_{i_j} \geq \frac{1}{2}W$$

(die Gewichte der Reihe nach so lange aufsummiert, bis diese Summe gerade eben mehr als die Hälfte der gesamten Gewichte umfasst.)

- 8: $x^* = a_{i_h}$ ist die Koordinate eines optimalen Standorts, d.h. $\mathcal{X}^*(f) = \{a_{i_h}\}$
 - 9: **end if**
-

Example 2.3.1.

1-Medianprobleme mit l_1 -Metrik

Beispiel: 2-dimensionales Problem

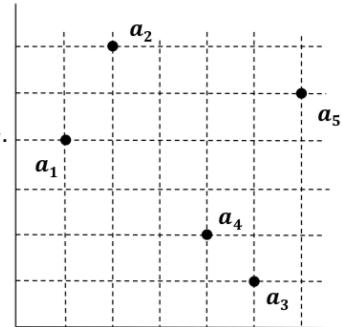
Sei $A = \{(1,4), (2,6), (5,1), (4,2), (6,5)\}$ und $w = \{2,3,1,1,2\}$.

Kundenstandorte für das erste Teilproblem:

$$a_{1,1} = 1, a_{2,1} = 2, a_{3,1} = 5, a_{4,1} = 4, a_{5,1} = 6$$

Verfahren

1. $W = 2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9$.
2. Dominanzkriterium ist für keinen der Kunden erfüllt.
3. Sortierung der Kundenstandorte liefert $a_{1,1} \leq a_{2,1} \leq a_{4,1} \leq a_{3,1} \leq a_{5,1}$
4. Aus 3. \Rightarrow Reihenfolge der aufzusummierenden Gewichte ist $\{w_1, w_2, w_4, w_3, w_5\} = \{2, 3, 1, 1, 2\}$.
Man erhält $w_1 = 2 < \frac{1}{2}W = 4.5$ und $w_1 + w_2 = 5 > \frac{1}{2}W$.
5. $x_1 = a_{2,1} = 2$ ist der optimale Standort für das erste Teilproblem.



1-Medianprobleme mit l_1 -Metrik

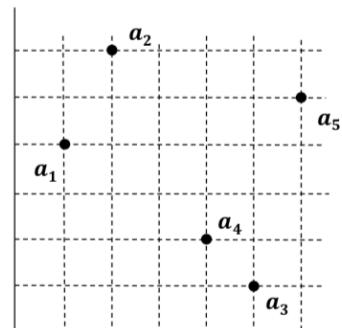
Kundenstandorte für das zweite Teilproblem:

$$a_{1,2} = 4, a_{2,2} = 6, a_{3,2} = 1, a_{4,2} = 2, a_{5,2} = 5$$

Schritte 1. und 2. gelten unverändert für das zweite Teilproblem.

Verfahren

3. Sortierung der Kundenstandorte liefert $a_{3,2} \leq a_{4,2} \leq a_{1,2} \leq a_{5,2} \leq a_{2,2}$
4. Aus 3. \Rightarrow Reihenfolge der aufzusummierenden Gewichte $\{w_3, w_4, w_1, w_5, w_2\} = \{1, 1, 2, 2, 3\}$
Man erhält $w_3 + w_4 + w_1 = 4 < \frac{1}{2}W$ und $w_3 + w_4 + w_1 + w_5 = 6 > \frac{1}{2}W$.
5. Damit ist $x_2 = a_{5,2} = 5$ der optimale Standort für das zweite Teilproblem.



Optimale Lösung des Problems $x^* = (2,5)$ mit Zielfunktionswert $f(x^*) = 27$

Abbildung 2.1: das 1 medianproblem mit metrik auf der linie

Restriktive Standortprobleme mit verbotenes Gebiet R

potentielle Standorte: Schnittpunkte der achsenparallelen Geraden durch Kunden mit verboten Gebiet

Example 2.3.2. Aufgabe 7(b)

2.3.3 1-Medianprobleme mit l_2 -Metrik

Zielfunktion

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1}^n w_i l_2^2(x, a_i) \\
&= \sum_{i=1}^n w_i l_2^2((x_1 - a_{i,1})^2 + (x_2 - a_{i,2})^2) \\
&= \sum_{i=1}^n w_i l_2^2(x_1 - a_{i,1})^2 + \sum_{i=1}^n w_i l_2^2(x_2 - a_{i,2})^2 \\
&=: f_1(x_1) + f_2(x_2)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$ sind differenzierbar.

Ableiten nach x_1 bzw. x_2 und Nullsetzen der jeweiligen Ableitung ergibt:

$$\underbrace{x^*}_{\text{Schwerpunkt}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n w_i a_{i,1}}{\sum_{i=1}^n w_i}, \frac{\sum_{i=1}^n w_i a_{i,2}}{\sum_{i=1}^n w_i} \right)$$

2.3.4 1-Medianprobleme mit l_2 -Metrik

Zielfunktion

$$f(x) = \sum_{i=1}^n w_i l_2(x, a_i) = \sum_{i=1}^n w_i \sqrt{(x_1 - a_{i,1})^2 + (x_2 - a_{i,2})^2} \tag{2.9}$$

Die Zielfunktion ist nicht zerlegbar!

Verschärftes Dominanzkriterium

Der Standort a_j eines Kunden ist optimal, falls

$$\gamma(a_j) := l_2\left(\sum_{i=1, i \neq j}^n w_i \frac{a_j - a_i}{l_2(a_j, a_i)}, \mathbf{0}\right) \leq w_j, \mathbf{0} = (0, 0) \tag{2.10}$$

Algorithm 3 Das Approximations-Verfahren von Weiszfeld

```

1: if (Verschärftes Dominanzkriterium  $\gamma(a_j) \leq w_j$  erfüllt) then
2:    $x^* = a_j$ , STOPP!
3: else
4:    $k := 0$ 
5:    $x^{(0)} := \frac{\sum_{i=1}^n w_i a_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$  (Schwerpunkt)
6:   while  $(!(\delta(k+1) := \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)})}{f(x^{(k)})}) \leq \delta)$  do
7:      $x^{(k+1)} := \frac{\sum_{i=1}^n w_i \frac{a_i}{l_2(x^{(k)}, a_i)}}{\sum_{i=1}^n w_i \frac{1}{l_2(x^{(k)}, a_i)}}$ 
8:      $k := k + 1$ 
9:   end while
10: end if

```

2.4 1-Centerprobleme

2.4.1 Aufgabe

Platziere eine neue Einrichtung so in der Ebene, dass die maximale gewichtete Entfernung von dem neuen Standort zu den Kunden minimal wird.

2.4.2 formel

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} g(x) \text{ mit } g(x) := \max_{i=1,\dots,n} w_i d(x, a_i) \quad (2.11)$$

2.4.3 1-Centerprobleme mit l_1 -Metrik

Zielfunktion

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{i=1,\dots,n} w_i l_1(x, a_i) \\ &= \max_{i=1,\dots,n} w_i (|x_1 - a_{i,1}| + |x_2 - a_{i,2}|) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Algorithm 4 Lösungsverfahren für das l_1 -Centerproblem

1: Transformiere alle Kundenstandorte mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2: Finde eine optimale Lösung x_∞^* des l_∞ -Problems mit den Kundenstandorten A'
 3: Erhalte eine optimale Lösung x^* des l_1 -Problems:

$$x^* = x_\infty^* \cdot T^{-1}$$

2.4.3.1 1-Centerprobleme mit l_∞ -Metrik

Zielfunktion

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{i=1,\dots,n} w_i l_\infty(x, a_i) \\ &= \max_{i=1,\dots,n} w_i (|x_1 - a_{i,1}|, |x_2 - a_{i,2}|) \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.4.3.1.1 Der ungewichtete Fall

Umformulierung des Problems:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \max_{i=1,\dots,n} l_\infty(x, a_i) \Leftrightarrow \min z, \text{ u.d.N } l_\infty(x, a_i) \leq z, \forall i = 1, \dots, n$$

\Rightarrow Minimiere z unter der Nebenbedingung, dass die Entfernung von einem Punkt x zu allen Kundenstandorten kleiner oder gleich z ist ($l_\infty(x, a_i) \leq z, \forall i = 1, \dots, n$).

Algorithm 5 Lösungsverfahren für ungewichtete 1-Centrenprobleme mit l_∞ -Metrik

- 1: Berechne für die Kundenstandorte das umschreibende Rechteck R . R ist durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte (ul, or) eindeutig bestimmt.
- 2: **if** (R ist ein Quadrat) **then**
- 3: $x^* = \text{Mittelpunkt von } R$, **STOPP!**
- 4: **else**
- 5: Dehne das Rechteck R entlang der kürzeren Seiten in beide Richtungen jeweils zu einem Quadrat Q_1 und Q_2 aus.
- 6: Die Verbindungsgeraden zwischen den Mittelpunkten M_1 und M_2 der beiden Quadrate Q_1 und Q_2 ist die optimale Lösungsmenge

$$\mathcal{X}^*(g) = \overline{M_1 M_2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \lambda M_1 + (1 - \lambda) M_2, \forall \lambda \in [0, 1]\} \quad (2.14)$$

7: **end if**

Example 2.4.1.**1-Medianprobleme mit l_1 -Metrik**

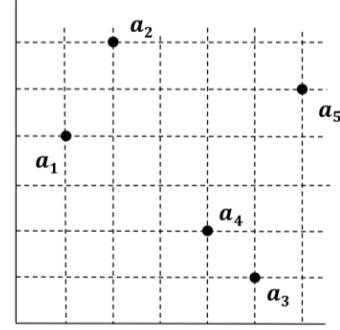
Kundenstandorte für das **zweite Teilproblem**:

$$a_{1,2} = 4, a_{2,2} = 6, a_{3,2} = 1, a_{4,2} = 2, a_{5,2} = 5$$

Schritte 1. und 2. gelten unverändert für das zweite Teilproblem.

Verfahren

3. Sortierung der Kundenstandorte liefert
 $a_{3,2} \leq a_{4,2} \leq a_{1,2} \leq a_{5,2} \leq a_{2,2}$
4. Aus 3. \Rightarrow Reihenfolge der aufzusummierten Gewichte
 $\{w_3, w_4, w_1, w_5, w_2\} = \{1, 1, 2, 2, 3\}$
 Man erhält $w_3 + w_4 + w_1 = 4 < \frac{1}{2}W$ und $w_3 + w_4 + w_1 + w_5 = 6 > \frac{1}{2}W$.
5. Damit ist $x_2 = a_{5,2} = 5$ der **optimale Standort** für das **zweite Teilproblem**.



Optimale Lösung des Problems $x^* = (2,5)$ mit Zielfunktionswert $f(x^*) = 27$

2.4.3.1.2 Der allgemeine gewichtete Fall**Zielfunktion**

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{i=1,\dots,n} w_i \max\{|x_1 - a_{i,1}|, |x_2 - a_{i,2}|\} \\ &= \max\{\underbrace{\max_{i=1,\dots,n} w_i |x_1 - a_{i,1}|}_{g_1(x_1)}, \underbrace{\max_{i=1,\dots,n} w_i |x_2 - a_{i,2}|}_{g_2(x_2)}\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

\Rightarrow Das l_∞ -Centerproblem lässt sich in zwei voneinander unabhängige Teilprobleme zerlegen.

Das 1-Centerproblem mit l_∞ -Metrik auf der Linie

$$\min_{x \in \mathbb{R}} g(x) \text{ mit } g(x) := \max_{i=1,\dots,n} w_i |x - a_i|$$

Algorithm 6 Lösungsverfahren für gewichtete 1-Centreprobleme mit l_∞ -Metrik auf der Linie

1: Berechne für jedes i und j mit $i, j \in 1, \dots, n$

$$\delta_{ij} = \frac{w_i w_j}{w_i + w_j} (a_j - a_i)$$

(Es gilt: $\delta_{ij} = -\delta_{ji} \Rightarrow$ Es reicht aus, δ_{ij} oder δ_{ji} zu berechnen; je nachdem ob $a_i \leq a_j$ oder $a_i > a_j$)

2: Ermittle

$$\delta_{pq} = \max\{\delta_{ij} : i, j \in \{1, \dots, n\}\}$$

3: Optimal Lösung:

$$z^* = \delta_{pq} \text{ und } x^* = \frac{w_p a_p + w_q a_q}{w_p + w_q}$$

Example 2.4.2.

1-Centerprobleme mit l_∞ -Metrik auf der Linie



Beispiel

Sei $A = \{1, 2, 5, 4, 6\}$ und $w = \{2, 3, 1, 1, 2\}$.

Verfahren

1.	i	j	$a_i \leq a_j?$	δ_{ij}
	1	2	$1 \leq 2$	$\delta_{12} = (a_2 - a_1) \cdot (w_1 \cdot w_2) / (w_1 + w_2) = (2 - 1) \cdot 2 \cdot 3 / (2 + 3) = 1.2$
		3	$1 \leq 5$	$\delta_{13} = (a_3 - a_1) \cdot (w_1 \cdot w_3) / (w_1 + w_3) = (5 - 1) \cdot 2 \cdot 1 / (2 + 1) = 2.66$
		4	$1 \leq 4$	$\delta_{14} = (a_4 - a_1) \cdot (w_1 \cdot w_4) / (w_1 + w_4) = (4 - 1) \cdot 2 \cdot 1 / (2 + 1) = 2.0$
		5	$1 \leq 6$	$\delta_{15} = (a_5 - a_1) \cdot (w_1 \cdot w_5) / (w_1 + w_5) = (6 - 1) \cdot 2 \cdot 2 / (2 + 2) = 5.0$
	2	3	$2 \leq 5$	$\delta_{23} = 2.25$
		4	$2 \leq 4$	$\delta_{24} = 1.5$
		5	$2 \leq 6$	$\delta_{25} = 4.8$
	3	4	$5 > 4$	$-\delta_{34} = \delta_{43} = 0.5$
		5	$5 \leq 6$	$\delta_{35} = 0.66$
	4	5	$4 \leq 6$	$\delta_{45} = 1.33$

2. $\delta_{pq} = \delta_{15} = 5$.

3. $z^* = \delta_{15} = 5$ und $x^* = (w_1 \cdot a_1 + w_5 \cdot a_5) / (w_1 + w_5) = (2 \cdot 1 + 2 \cdot 6) / (2 + 2) = 3.5$

Abbildung 2.2: Das 1-Centerproblem mit l_∞ -Metrik auf der Linie

Kombination der Lösungen der Einzelprobleme

Seien (x_1^*, z_1^*) und (x_2^*, z_2^*) optimale Lösungen der zwei Teilprobleme.

Dann ist $x^* := (x_1^*, x_2^*)$ eine optimale Lösungen mit $z^* = g(x^*) = \max\{g(x_1^*), g(x_2^*)\} = \max\{z_1^*, z_2^*\}$.

Menge aller optimalen Lösungen ist

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^*(g) &= \mathcal{X}^*(g_1) \times \mathcal{X}^*(g_2) \\ &= [A_1^-(z^*), A_1^+(z^*)] \times [A_2^-(z^*), A_2^+(z^*)] \end{aligned}$$

- $A^-(z) := \max_{i=1, \dots, n} a_i - \frac{z}{a_i}$
- $A^+(z) := \max_{i=1, \dots, n} a_i + \frac{z}{a_i}$

2.4.4 1-Centerprobleme mit l_2 -Metrik

2.4.4.1 Zielfunktion

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{i=1,\dots,n} w_i l_2(x, a_i) \\ &= \max_{i=1,\dots,n} w_i \sqrt{(x_1 - a_{i,1})^2 + (x_2 - a_{i,2})^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.4.4.2 Der ungewichtete Fall: Das Kreis-Überdeckungsproblem

Umformulierung des Problems:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \max_{i=1,\dots,n} w_i l_2(x, a_i) \Leftrightarrow \min z, \text{ u.d.N. } l_2(x, a_i) \leq z, \forall i = 1, \dots, n$$

⇒ **Das minimale Kreis-Überdeckungsproblem:** Minimiere z unter der Nebenbedingung, dass die Entfernung von einem Punkt x zu allen Kundenstandorten kleiner oder gleich z ist.

Algorithm 7 Enumerations-Verfahren

- 1: Berechne alle minimalüberdeckenden Kreise von zwei oder drei Kundenstandorten a_i, a_j und $a_k \in A$
 - 2: Verwirf alle so gewonnenen minimalüberdeckenden Kreise, die nicht alle Kundenstandorten überdecken.
 - 3: Der verbleibende MÜK (Minimal Überdeckender Kreis) ist der MÜK für alle Kundenstandorten
-

Komplexität: $O(n^4) \rightarrow$ zu langsam!

Algorithm 8 Verfahren von Elzinga & Hearn

- 1: Starte mit dem MÜK zweier beliebiger Kundenstandorten a und b
 - 2: Werden alle Kunden von dem Kreis überdeckt ⇒ Schritt 9
 - 3: Wähle einen Kunden c , der noch nicht überdeckt wird, und konstruiere den MÜK für diese drei Kunden.
 - 4: Werden alle Kunden von dem Kreis überdeckt ⇒ Schritt 9.
 - 5: Wird der MÜK von zwei Kunden a und b bestimmt ⇒ fahre mit a und b fort mit Schritt 3, ⇒ andernfalls fahre mit allen dreien fort mit Schritt 6.
 - 6: Wähle einen weiteren Kunden d , der noch nicht überdeckt wird, und konstruiere (mit Hilfe des Enumerations-Verfahrens) den MÜK für diese vier Kunden.
 - 7: Werden alle Kunden von dem Kreis überdeckt ⇒ Schritt 9
 - 8: Wird der MÜK von zwei Kunden a und b bestimmt ⇒ fahre mit a und b fort mit Schritt 3, ⇒ andernfalls fahre mit den drei MÜK-definierenden Kunden fort mit Schritt 6.
 - 9: Der momentane MÜK überdeckt alle Kundenstandorte und ist somit der optimale.
-

Example 2.4.3.

Ungewichtete 1-Centerprobleme mit l_2 -Metrik

Beispiel

Sei wieder $A = \{(1,1), (2,5), (3,3), (4,2)\}$ und $w = \{1,1,1,1\}$.

Verfahren

1. Starte mit den Kunden a_1 und a_3 . **MÜK** = $K((2,2), 1.41)$.
2. a_2 und a_4 nicht überdeckt.
3. Wähle a_4 . **MÜK** der Kunden a_1 , a_3 und a_4 = $K((2.5, 1.5), 1.58) = K(a_1, a_4)$.
4. a_2 nicht überdeckt.
5. **Der MÜK wird von a_1 und a_4 bestimmt.**
6. Wähle a_2 . **MÜK** der Kunden a_1 , a_2 und a_4 = $K((2.05, 2.86), 2.14)$.
7. **Alle Kunden überdeckt!**
9. $K((2.05, 2.86), 2.14)$ ist der minimal überdeckende Kreis für alle Standorte.
 $\Rightarrow x = (2.05, 2.86)$ ist der **optimale Standort** für das l_2 -Centerproblem und $r = 2.14$ der **optimale Zielfunktionswert**.

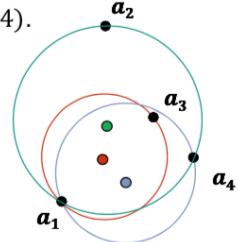


Abbildung 2.3: Verfahren von Elzinga & Hearn

2.5 Mehrstandortprobleme

Platziere p neue Einrichtungen $X = x_1, \dots, x_p, p \geq 2$ in der Ebene

- Modelle mit Interaktion
 - Neue Einrichtungen bieten jeweils unterschiedlichen Service (verschiedene Güter) an.
 - Kunden haben Nachfrage nach unterschiedlichen Serviceleistungen (Gütern) von mehreren der neuen Einrichtungen.
 - Interaktion, z. B. Austausch von Gütern, zwischen neuen Einrichtungen erlaubt.
- Zuordnungs-Modelle (Standort-Einzugsbereichs-Modelle)
 - Neue Einrichtungen bieten alle gleichen Service (identische Güter) an.
 - Kunden befriedigen ihre Nachfrage von einem der neuen Standorte.

2.5.1 Modelle mit Interaktion

2.5.1.1 Annahmen

Nachfrage des Kunden i nach einem Service der neuen Einrichtung k : w_{ik}
Interaktion zwischen zwei neuen Einrichtungen k und l : s_{kl}

2.5.1.2 Zielfunktion

$$\min_{X \subseteq \mathbb{R}^2, |X|=p} f(X) := \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p w_{ik} d(x_k, a_i) + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p s_{kl} d(x_k, x_l) \quad (2.17)$$

2.5.1.3 Notationen

x_1, \dots, x_p sind nun Punkte mit Koordinaten $x_{k,1}$ und $x_{k,2}, k = 1, \dots, p$
 $X_1 := x_{1,1}, \dots, x_{p,1}$ und $X_2 := x_{1,2}, \dots, x_{p,2}$

2.5.1.4 Das Interaktions-Modell mit l_1 -Metrik

Zielfunktion

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p w_{ik}(|x_{k,1} - a_{i,1}| + |x_{k,2} - a_{i,2}|) + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p s_{kl}(|x_{k,1} - x_{l,1}| + |x_{k,2} - x_{l,2}|) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p w_{ik}|x_{k,1} - a_{i,1}|}_{=:f_1(X_1)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p s_{kl}|x_{k,1} - x_{l,1}|}_{=:f_2(X_2)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p w_{ik}|x_{k,2} - a_{i,2}|}_{=:f_1(X_1)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p s_{kl}|x_{k,2} - x_{l,2}|}_{=:f_2(X_2)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

→ Zielfunktion zerfällt in zwei voneinander unabhängige Funktionen.

Das Interaktions-Modell mit l_1 -Metrik auf der Linie

Zielfunktion

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p w_{ik}|x_k - a_i| + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p s_{kl}|x_k - x_l| \quad (2.19)$$

Umformulierung

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $c, d \in \mathbb{R}_+$

Gilt:

$$c \cdot d = 0 \text{ und } a - b = c - d$$

Dann:

$$|a - b| = c + d$$

Ersetze:

$$|x_k - a_i| = \alpha_{ik} + \beta_{ik} \in \mathbb{R}_+, \text{ für } \alpha_{ik}, \beta_{ik} \in \mathbb{R}_+$$

und

$$|x_k - x_l| = \gamma_{kl} + \delta_{kl} \in \mathbb{R}_+, \text{ für } \gamma_{kl}, \delta_{kl} \in \mathbb{R}_+$$

2.6 Zuordnungs-Modelle

Kapitel 3

Standortplanung auf Netzwerken

3.1 Graphentheorie

3.2 1-Medianprobleme

3.2.1 1-Medianprobleme auf allgemeinen Graphen

3.2.2 1-Medianprobleme auf Bäume

3.3 1-Centerprobleme

3.3.1 1-Centerprobleme auf allgemeinen Graphen

3.3.2 1-Centerprobleme auf Bäume

3.4 Mehrstandortprobleme

Kapitel 4

Diskrete Standortplanung

4.1 Klassifikation diskreter Standortprobleme

4.2 Das Warehouse Location Problem (WLP)

4.2.1 Modellierung

4.2.2 Heuristiken

4.2.2.1 Greedy-Heuristik

4.2.2.2 Interchange-Heuristik

4.2.3 Das DUALOC-Verfahren

4.3 Hub-Location-Probleme

Kapitel 5

Gebietsplanung

Ziel: kleine geographische Einheiten (sogenannte Basisgebiete) zu über- geordneten Gebieten (häufig als Bezirke, Cluster oder Territorien bezeichnet) unter der Berücksichtigung verschiedener relevanter Planungskriterien zusammenzufassen.

5.1 Basismodell

5.1.1 Definitionen und Notationen

Ein Gebietsplanungsproblem umfasst eine Menge $V = \{1, \dots, M\}$ von Basisgebieten.

Ein **Basisgebiet** $i \in V$ ist durch seinen Mittelpunkt $b_i = (x_i, y_i)$ bestimmt.

Für jedes Basisgebiet $i \in V$ ist eine einzelne quantifizierbare Eigenschaft, das sogenannte **Aktivitätsmaß** w_i , gegeben.

Gebiet:

- Gebiete D_1, \dots, D_p sind disjunkte Teilmengen der Basismenge, so dass jedes Basisgebiet in genau einem Gebiet enthalten ist:

$$D_1 \cup \dots \cup D_p = V \quad \text{und} \quad D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j, b < p$$

- Aktivitätsmaß oder die Größe eines Gebiets: die Summe der Aktivitätsmaße seiner Basisgebiete

$$w(D_j) = \sum_{i \in D_j} w_i$$

- **Zentrum** des Gebiets j : c_j (Im Allgemeinen entspricht c_j einem der Mittelpunkte der zum Gebiet j gehörenden Basisgebiete.)

Zusammenhang:

Basisgebiet $b_i = (x_i, y_i) \in$ Menge der Basisgebiete $V \supseteq$ Gebiet D_j

5.1.2 Modell-Kriterien

Balance

Alle Gebiete sollen balanciert sein, also möglichst gleich groß bzw. stark bezüglich der Aktivitätsmaße der Gebiete.

- **perfekt balanciert** \Leftrightarrow sein Aktivitätsmaß entspricht dem durchschnittlichen Aktivitätsmaß aller Gebiete μ

$$w(D_j) = \mu = \frac{w(V)}{p} \quad (5.1)$$

Auf Grund der diskreten Struktur des Problems können perfekt balancierte Vertriebsgebiete im Allgemeinen NICHT erzielt werden.

- **relative Abweichung** des Aktivitätsmaßes eines Gebiet

$$bal(D_j) = \frac{|w(D_j) - \mu|}{\mu}$$

Kontiguität (Contiguity)

Zwei Basisgebiete werden als benachbart bezeichnet, wenn ihre geographischen Anordnungen nicht-leere Schnittmengen besitzen.

Kompaktheit (Compactness)

- Reock-Test: Bilde das Verhältnis der Fläche des Gebiets zur Fläche des kleinsten, das Gebiet umschließenden Kreises.

$$cp(D_j) = \frac{A_{A_j}}{A_{u_k}} \leq 1$$

- Schwartzberg-Test: Bilde das Verhältnis zwischen dem Umfang eines Kreises, der dadurch festgelegt ist, dass er den gleichen Flächeninhalt wie das Gebiet hat, und dem Umfang des Gebiets.

$$cp(D_j) = \frac{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot A_{D_j}}}{U_{D_j}} \leq 1$$

Je näher $cp(D_j)$ an 1, umso kompakter ist das Gebiet.

5.1.3 Ziel der Gebietsplanung

Untergliedere alle Basisgebiete V in p Gebiete, welche die Planungskriterien der Balance, Kompaktheit, Kontiguität und Disjunktheit erfüllen.

5.2 Vorgehensweisen zur Gebietsplanung

5.2.1 Notation

- V : Menge der Basisgebiete
- w_u : Aktivitätsmaß des Basisgebiets u
- p : Anzahl der Gebiete
- d_{uv} : Distanzen
- μ : Durchschnittsgröße bzgl. w ((5.1))
- τ : Toleranz der Balance
- $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls Basisgebiet } u \text{ einem Gebiet mit dem Zentrum } v \text{ zugeordnet wird.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

5.2.2 LP-Formulierung

$$\begin{aligned}
 & \min_{u,v \in V} d_{uv}^2 w_u x_{uv} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{v \in V} x_{uv} = 1 \quad (u \in V) \quad (\text{Vollst. Zuordnung}) \\
 & \mu(1 - \tau)x_{vv} \leq \sum_{u \in V} w_u x_{uv} \leq \mu(1 + \tau)x_{vv} \quad (v \in V) \quad (\text{Balance}) \\
 & \sum_{v \in V} x_{vv} = p \quad (p \text{ Gebiete}) \\
 & x_{uv} \in \{0, 1\} \quad (u, v \in V)
 \end{aligned}$$

5.3 Recursive-Partitioning-Algorithmus

(Bsp: Aufgabe 19)

Grundidee:

- Unterteile das Problem rekursiv auf geometrische Weise durch Linien in immer kleinere Teilprobleme.
- Wiederhole dies solange, bis eine elementare Größe erreicht ist, in welcher das Gebietsplanungsproblem in effizienter Zeit gelöst wird.

5.3.1 Definitionen

Partitionsproblem

$PP = (B, q)$ wird als Partitionsproblem bezeichnet, falls $B \subseteq V$ und $1 \leq q \leq p$ gilt.

Linienpartition

$LP = (B_l, B_r, q_l, q_r)$ wird als Linienpartition bezeichnet, falls:

1. $B_l \cup B_r = B$ und $B_l \cap B_r = \emptyset$
2. $\exists \text{ Line } L : B_l = B \cap H^{\leq}(L)$ und $B_r = B \cap H^{>}(L)$
3. $q \leq q_l, q_r \leq q$ und $q_l + q_r = q$

5.3.2 Recursive-Partitioning

Gleichmäßige Aufteilung:

- $q_l = q_r = \frac{q}{2}$, falls q gerade
- $q_l = \frac{q-1}{2}, q_r = \frac{q+1}{2}$ und $q_l = \frac{q+1}{2}, q_r = \frac{q-1}{2}$, falls q ungerade

Balance:

$$bal(LP) = \max\left\{\frac{\left|\frac{w(B_L)}{q_l} - \mu\right|}{\mu}, \frac{\left|\frac{w(B_r)}{q_r} - \mu\right|}{\mu}\right\}$$

Partitionsposition:

Bestimme k' , so dass $\frac{w(B_l^{k'})}{q_l} < \frac{w(B)}{q}$ und $\frac{w(B_l^{k'+1})}{q_l} \geq \frac{w(B)}{q}$

$$k^* = \begin{cases} k' & \text{falls } \frac{w(B)}{q} - \frac{w(B_l^{k'})}{q_l} \leq \frac{w(B_l^{k'+1})}{q_l} - \frac{w(B)}{q} \\ k' + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Kompaktheit:

$$cp(LP) = d(c_1 \cdot c_2) = l_2(c_1, c_2)$$

5.3.3 Algorithmus

Algorithm 9 Recursive-Partitioning-Algorithmus

Input: Anzahl Suchrichtungen K, β, V, p

- 1: Markiere Partitionsproblem $PP = (V, p)$ als ungelöst
- 2: **while** es gibt ungelöste Probleme **do**:
- 3: Wähle ein ungelöstes Problem $PP = (B, q)$
- 4: **if** $q = 1$ **then**
- 5: füge B der Lösungsmenge DL hinzu und markiere PP als gelöst
- 6: **end if**
- 7: **if** $q > 1$ **then**
- 8: Bestimme für jede Suchrichtung die Linienpartition $LP(k^*)$ mit der besten Balance und füge sie einer Menge FLP hinzu.
- 9: Bewerte alle Linienpartitionen LP der Menge FLP durch:

$$rk(LP) = \beta \frac{bal(LP)}{bal^{max}} + (1 - \beta) \frac{cp(LP)}{cp^{max}}$$

- 10: Wähle $LP^* = (B_l^*, B_r^*, q_l^*, q_r^*) = \min_{LP \in FLP} rk(FLP)$
- 11: Erstelle Partitionsprobleme $PP_l = (B_l^*, q_l^*)$ und $PP_r = (B_r^*, q_r^*)$ und markiere sie als ungelöst, markiere PP als gelöst.
- 12: **end if**
- 13: **end while**

Output: Gebietslayout DL
