

Wertekontinuierliche Lineare Systeme

1) Systemeigenschaften

Ein zeitdiskretes wertekontinuierliches System S wird durch die Differenzengleichung

$$y_k - 2^k \cdot y_{k+1} + 3 \cdot y_{k+2}^2 = 4 \cdot u_k - 2 \cdot u_{k+1}$$

beschrieben [3].

Hinweis: Für Definitionen von Systemeigenschaften zeitdiskreter Systeme siehe [1].

a) Ist das System S linear? (Begründung)

Das System S ist aufgrund des Terms y_{k+2}^2 nicht linear.

b) Ist das System S zeitinvariant? (Begründung)

Das System S ist wegen des zeitabhängigen Koeffizienten 2^k von y_{k+1} zeitvariant.

c) Ist das System S kausal? (Begründung)

Das System S ist kausal, da y_{k+2} nur von vergangenen Eingangswerten abhängt.

2) Anwendung: Korrelation und Kovarianz zweidimensionaler Signale – Statisches System

Es soll die 2D-Position eines Objektes geschätzt werden. Dazu wird zu drei unterschiedlichen Zeitpunkten ($k = 0, 1, 2$) mit Hilfe von vier Sensoren ($n = 1, 2, 3, 4$) jeweils eine Messung $\underline{x}_{n,k}$ durchgeführt. [2]

$$\underline{x}_{1,0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_{2,0} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.5 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_{3,0} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_{4,0} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_{2,1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4.5 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_{3,1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_{4,1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_{2,2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4.5 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_{3,2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_{4,2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Die Messungen können als Realisierungen eines Zufallsvektors $\underline{x}_{n,k}$ aufgefasst werden.

a) Stellen Sie die Beobachtungsmatrizen \mathbf{X}_k auf.

$$\mathbf{X}_k = [\underline{x}_{1,k} \quad \underline{x}_{2,k} \quad \underline{x}_{3,k} \quad \underline{x}_{4,k}]$$

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 3.5 & 0.5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4.5 & 1.5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4.5 & 1.5 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Schätzen Sie die Mittelwerte \hat{x}_k zu den Zeitpunkten $k = 0, 1, 2$.

Für diesen zweidimensionalen stochastischen Prozess haben wir die Werte von vier Realisierungen an drei Zeitpunkten gegeben. Gefragt ist nach dem Erwartungswert über die Realisierungen, separat für jeden Zeitschritt. Wir haben hier ein Zufallsexperiment mit $N = 4$ Wiederholungen.

Nach der Definition der Wahrscheinlichkeit von Laplace ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A gerade

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Elementarereignisse } \{\omega_n\} \subset A}{\text{Gesamtzahl der Elementarereignisse}}.$$

Wir können also bei der Erwartungswertbildung die einzelnen Messungen mit der Wahrscheinlichkeit $p_n = \frac{1}{4}$

gewichten.

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}_k &= E_{f_{\underline{x},k}}\{\underline{x}_k\} = \sum_{n=1}^N \underline{x}_{n,k} \cdot p_n = \sum_{n=1}^4 \underline{x}_{n,k} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \mathbf{X}_k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \hat{\underline{x}}_0 &= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}} \\ \hat{\underline{x}}_1 &= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}}} \\ \hat{\underline{x}}_2 &= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2.25 \\ 3 \end{bmatrix}}}\end{aligned}$$

- c) Schätzen Sie nun die Autokovarianzmatrizen $\text{Cov}_{f_{\underline{x},k}}\{\underline{x}_k\}$ jeweils zu den Zeitpunkten $k = 0, 1, 2$ aus den Beobachtungen $\underline{x}_{n,k}$, $n = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned}\text{Cov}_{f_{\underline{x},k}}\{\underline{x}_k\} &= E_{f_{\underline{x},k}}\left\{(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k)(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k)^\top\right\} \\ &= E_{f_{\underline{x},k}}\left\{\underline{x}_k \underline{x}_k^\top - \underline{x}_k \hat{\underline{x}}_k^\top - \hat{\underline{x}}_k \underline{x}_k^\top + \hat{\underline{x}}_k \hat{\underline{x}}_k^\top\right\} \quad \left| E_{f_{\underline{x},k}}\{\underline{x}_k\} = \hat{\underline{x}}_k \right. \\ &= E_{f_{\underline{x},k}}\left\{\underline{x}_k \underline{x}_k^\top\right\} - \hat{\underline{x}}_k \hat{\underline{x}}_k^\top - \hat{\underline{x}}_k \hat{\underline{x}}_k^\top + \hat{\underline{x}}_k \hat{\underline{x}}_k^\top \\ &= E_{f_{\underline{x},k}}\left\{\underline{x}_k \underline{x}_k^\top\right\} - \hat{\underline{x}}_k \hat{\underline{x}}_k^\top \\ &= \left(\sum_{n=1}^N \underline{x}_{n,k} \underline{x}_{n,k}^\top \cdot \frac{1}{N}\right) - \hat{\underline{x}}_k \hat{\underline{x}}_k^\top \\ \left[\text{Cov}_{f_{\underline{x},k}}\{\underline{x}_k\}\right]_{i,j} &= \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N [\underline{x}_{n,k}]_i \cdot [\underline{x}_{n,k}]_j\right) - [\hat{\underline{x}}_k]_i [\hat{\underline{x}}_k]_j \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N [\mathbf{X}_k]_{i,n} \cdot [\mathbf{X}_k]_{j,n}\right) - [\hat{\underline{x}}_k]_i [\hat{\underline{x}}_k]_j \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N [\mathbf{X}_k]_{i,n} \cdot [\mathbf{X}_k^\top]_{n,j}\right) - [\hat{\underline{x}}_k]_i [\hat{\underline{x}}_k]_j \\ \Rightarrow \text{Cov}_{f_{\underline{x},k}}\{\underline{x}_k\} &= \frac{1}{N} \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^\top - \hat{\underline{x}}_k \hat{\underline{x}}_k^\top\end{aligned}$$

Falls die Messungen normalverteilt sind, ist dies der Maximum Likelihood Schätzer.

Da der darin verwendete Mittelwert $\hat{\underline{x}}_k$ aus den gleichen Daten geschätzt wird und dementsprechend ungenau ist, ist anschaulich gesprochen die Unsicherheit im Mittel jedoch etwas größer. Man erhält den erwartungstreuen (unbiased) Schätzer durch "Bessel's correction", d.h. Multiplikation mit dem Faktor $\frac{N}{N+1}$

$$\frac{N}{N+1} \left(\sum_{n=1}^N (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k)(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k)^\top\right) = \frac{N}{N+1} \left(\frac{1}{N} \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^\top - \hat{\underline{x}}_k \hat{\underline{x}}_k^\top\right).$$

Mit dieser allgemeinen Formel zur Schätzung der Autokovarianzmatrix aus einer Reihe von Messungen können wir nun die konkreten Autokovarianzmatrizen berechnen.

$$\begin{aligned}\text{Cov}_{f_{\underline{x},0}}\{\underline{x}_0\} &= \frac{1}{N} \mathbf{X}_0 \mathbf{X}_0^\top - \hat{\underline{x}}_0 \hat{\underline{x}}_0^\top \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 3.5 & 0.5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3.5 \\ 3 & 0.5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 7 & 5.625 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1.625 \end{bmatrix} \\
 \text{Cov}_{f_{\underline{x}},1}\{\underline{x}_1\} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1.625 \end{bmatrix} \\
 \text{Cov}_{f_{\underline{x}},2}\{\underline{x}_2\} &= \begin{bmatrix} 1.1875 & 0.75 \\ 0.75 & 1.625 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Bzw. für die erwartungstreuen Schätzwerte jeweils noch mit $\frac{4}{3}$ multiplizieren.

Unter der Annahme, dass die Position des Objektes gleich bleibt und die Messungen zu den verschiedenen Zeitpunkten $k = 0, 1, 2$ unkorreliert sind, könnte man eine einzige Schätzung aus allen verfügbaren Daten berechnen.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X} &= [\mathbf{X}_0 \quad \mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2] \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 & 1 & 3 & 3 & 5 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3.5 & 0.5 & 3 & 2 & 4.5 & 1.5 & 4 & 2 & 4.5 & 1.5 & 4 \end{bmatrix} \\
 \hat{\underline{x}} &\approx \begin{bmatrix} 2.75 \\ 2.667 \end{bmatrix} \\
 \text{Cov}_{f_{\underline{x}}}\{\underline{x}\} &= \begin{bmatrix} 1.8542 & 0.8333 \\ 0.8333 & 1.8472 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Für den erwartungstreuen Schätzwert ist dies mit $\frac{12}{11}$ zu multiplizieren.

- d) Geben Sie ausgehend von $\text{Cov}_{f_{\underline{x},y}}\{\underline{x}, \underline{y}\}$ die Varianz und Standardabweichung der Messung entlang der beiden Dimensionen an. Berechnen Sie außerdem den Korrelationskoeffizienten ρ_{xy} .

$$\text{Cov}_{\underline{x},\underline{y}}\{\underline{x}, \underline{y}\} = \begin{bmatrix} 1.1875 & 0.75 \\ 0.75 & 1.625 \end{bmatrix}$$

$$\text{Varianz: Cov}_{\underline{x},\underline{x}}\{\underline{x}, \underline{x}\} = \text{Var}_{\underline{x}}\{\underline{x}\} = \sigma_x^2 = 1.1875$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \approx 1.0897$$

$$\text{Varianz: Cov}_{\underline{y},\underline{y}}\{\underline{y}, \underline{y}\} = \text{Var}_{\underline{y}}\{\underline{y}\} = \sigma_y^2 = 1.625$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} \approx 1.275$$

$$\begin{aligned}
 \text{Korrelationskoeffizient: } \rho_{xy} &= \frac{\text{Cov}_{f_{\underline{x},y}}\{(\underline{x} - \hat{x})(\underline{y} - \hat{y})\}}{\sigma_x \sigma_y} \\
 &= \frac{0.75}{\sqrt{1.1875 \cdot 1.625}} \approx \underline{\underline{+0.5399}}
 \end{aligned}$$

Kalman-Filter

3) Entwurf eines skalaren Kalman-Filters

Gegeben ist folgendes System im Zustandsraum:

$$\begin{aligned}
 \underline{x}_{k+1} &= \frac{1}{2} \underline{x}_k + (u_k + \underline{w}_k) \\
 \underline{y}_k &= \underline{x}_k + \underline{v}_k
 \end{aligned}$$

Dabei ist u_k die deterministische Eingangsgröße des Systems, w_k ist die Unsicherheit der Kenntnis der Eingangsgröße und v_k ist das Messrauschen. [2]

a) Geben Sie die „Matrizen“ der Systemabbildung \mathbf{A} und \mathbf{B} sowie der Messabbildung \mathbf{H} an.

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \frac{1}{2} \\ \mathbf{B} &= 1 \\ \mathbf{H} &= 1\end{aligned}$$

b) Wie lauten die Kalman-Rekursionsgleichungen für das System? Bezeichnen Sie dabei Varianz des Zustands x nach der Prädiktion mit $\mathbf{C}_k^p = C_k^p = (\sigma_k^p)^2$ und nach der Filterung mit $\mathbf{C}_k^e = C_k^e = (\sigma_k^e)^2$. Die Varianz der gemessenen Eingangssignale \hat{u}_k sei $\mathbf{C}_k^w = C_k^w = (\sigma_k^w)^2$ und die Varianz der Ausgangs-Messwerte \hat{y}_k sei $\mathbf{C}_k^v = C_k^v = (\sigma_k^v)^2$. Gesucht sind die Funktionen $f_{p,x}$, $f_{p,\sigma}$, $f_{e,K}$, $f_{e,x}$, $f_{e,\sigma}$ mit

Prädiktion:

$$\begin{aligned}\hat{x}_k^p &= f_{p,x}(\hat{x}_{k-1}^e, \hat{u}_{k-1}) \\ C_k^p &= f_{p,\sigma}(C_{k-1}^e, C_{k-1}^w)\end{aligned}$$

Filterung:

$$\begin{aligned}K_k &= f_{e,K}(C_{k-1}^e, C_{k-1}^w, C_k^v) \\ \hat{x}_k^e &= f_{e,x}(\hat{x}_{k-1}^e, \hat{u}_{k-1}, K_k, \hat{y}_k) \\ C_k^e &= f_{e,\sigma}(C_{k-1}^e, C_{k-1}^w, C_k^v) .\end{aligned}$$

Für die **Prädiktion** erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{x}_k^p &= \mathbf{A}_{k-1} \hat{x}_{k-1}^e + \mathbf{B}_{k-1} \hat{u}_{k-1} \\ \hat{x}_k^p &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \hat{x}_{k-1}^e + \hat{u}_{k-1}}} , \\ C_k^p &= \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{C}_{k-1}^e \mathbf{A}_{k-1}^\top + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{C}_{k-1}^w \mathbf{B}_{k-1}^\top \\ C_k^p &= \frac{1}{2} \cdot C_{k-1}^e \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot C_{k-1}^w \cdot 1 \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{4} \cdot C_{k-1}^e + C_{k-1}^w}} .\end{aligned}$$

Weiter ergibt sich für die Kalman-**Filterung**

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k &= \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^\top (\mathbf{C}_k^v + \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^\top)^{-1} \\ K_k &= C_k^p \cdot 1 \cdot (C_k^v + 1 \cdot C_k^p \cdot 1)^{-1} \\ &= \frac{C_k^p}{C_k^v + C_k^p} \\ &= \frac{1}{\frac{C_k^v}{C_k^p} + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{C_k^v}{\frac{1}{4} C_{k-1}^e + C_{k-1}^w} + 1} \\ \hat{x}_k^e &= \hat{x}_k^p + \mathbf{K}_k (\hat{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{x}_k^p) \\ \hat{x}_k^e &= \hat{x}_k^p + K_k (\hat{y}_k - \hat{x}_k^p) \\ &= \underline{\underline{\left(\frac{1}{2} \hat{x}_{k-1}^e + \hat{u}_{k-1} \right) + K_k \cdot \left(\hat{y}_k - \left(\frac{1}{2} \hat{x}_{k-1}^e + \hat{u}_{k-1} \right) \right)}} , \\ \mathbf{C}_k^e &= \mathbf{C}_k^p - \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^\top (\mathbf{C}_k^v + \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p \mathbf{H}_k^\top)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_k^e &= C_k^p - C_k^p (C_k^v + C_k^p)^{-1} C_k^p \\ &= C_k^p \cdot \left(1 - \frac{C_k^p}{C_k^v + C_k^p} \right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{C_k^p} + \frac{1}{C_k^v}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \cdot C_{k-1}^e + C_{k-1}^w} + \frac{1}{C_k^v}} \end{aligned}$$

Im Folgenden gilt für die Varianzen der Rauschprozesse $C_k^w = C_k^v = 1$.

c) Berechnen Sie K_k für $k = 1, 2, 3, 4$. Als Startwert ist $C_0^e = 10$ vorgegeben.

Im Falle von stationären Rauschprozessen C_k^w und C_k^v ist K_k direkt durch C_k^e gegeben. Daher berechnen wir zunächst die ersten C_k^e , die direkt rekursiv berechnet werden können.

$$\begin{aligned} C_k^e &= \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \cdot C_{k-1}^e + C_{k-1}^w} + \frac{1}{C_k^v}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} C_{k-1}^e + 1} + 1} \\ C_0^e &= 10 \\ C_1^e &= \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \cdot 10 + 1} + 1} = \frac{7}{9} \approx 0.777\,778 \\ C_2^e &= \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{9} + 1} + 1} = \frac{43}{79} \approx 0.544\,304 \\ C_3^e &= \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \cdot \frac{43}{79} + 1} + 1} = \frac{359}{675} \approx 0.531\,852 \\ C_4^e &= \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \cdot \frac{359}{675} + 1} + 1} = \frac{3059}{5759} \approx 0.531\,169 \end{aligned}$$

Nun können wir aus den C_k^e die K_k berechnen.

$$\begin{aligned} K_k &= \frac{1}{\frac{C_k^v}{\frac{1}{4} C_{k-1}^e + C_{k-1}^w} + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} C_{k-1}^e + 1} + 1} \\ &= C_k^e \\ K_1 &\approx 0.777\,778 \\ K_2 &\approx 0.544\,304 \\ K_3 &\approx 0.531\,852 \\ K_4 &\approx 0.531\,169 \end{aligned}$$

d) Da ein zeitinvariantes System und zeitinvariante Rauschprozesse vorliegen, konvergiert der Verstärkungsfaktor K_k für $k \rightarrow \infty$. Berechnen Sie den stationären Endwert.

$$\begin{aligned} C_k^e &= \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} C_{k-1}^e + 1} + 1} \\ \text{Stationärer Endwert: } C &= \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} C + 1} + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 0 &= C^2 + 7C - 4 \\ 0 &= \left(C + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 4 \\ \frac{65}{4} &= \left(C + \frac{7}{2}\right)^2 \\ \frac{\sqrt{65}}{2} &= \left|C + \frac{7}{2}\right| \\ C_{\infty,1}^e &= \frac{\sqrt{65} - 7}{2} \approx 0.531\,129 \\ C_{\infty,2}^e &= -\frac{\sqrt{65} + 7}{2} < 0 \quad (\text{keine Varianz}) \\ \Rightarrow K_{\infty} &= C_{\infty}^e = \underline{\underline{0.531\,129}}\end{aligned}$$

Eigentlich ist dies nur ein möglicher Kandidat für einen stationären Endwert. Um zu zeigen, dass die Rekursionsvorschrift wirklich konvergiert, kann man das **Monotoniekriterium** verwenden:

„Jede beschränkte und monotone Folge konvergiert“.

Zunächst zeigen wir mit vollständiger Induktion, dass die Folge monoton fallend ist.

Induktionsanfang

$$\begin{aligned}C_1^e &\leq C_0^e \\ 10 &\leq 0.777\,778\end{aligned}$$

Induktionsschritt

$$\begin{aligned}C_{k+1}^e &\leq C_k^e \\ \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4}C_k^e + 1} + 1} &\leq C_k^e \\ 0 &\leq (C_k^e)^2 + 7C_k^e - 4 \\ \frac{\sqrt{65} - 7}{2} &\leq C_k^e\end{aligned}$$

Für $C_k^e \geq \frac{\sqrt{65}-7}{2}$ ist die Folge also tatsächlich monoton fallend. Jetzt muss noch gezeigt werden, dass die Folge auch durch $\frac{\sqrt{65}-7}{2}$ nach unten beschränkt ist. Dafür verwenden wir ebenfalls vollständige Induktion.

Induktionsanfang

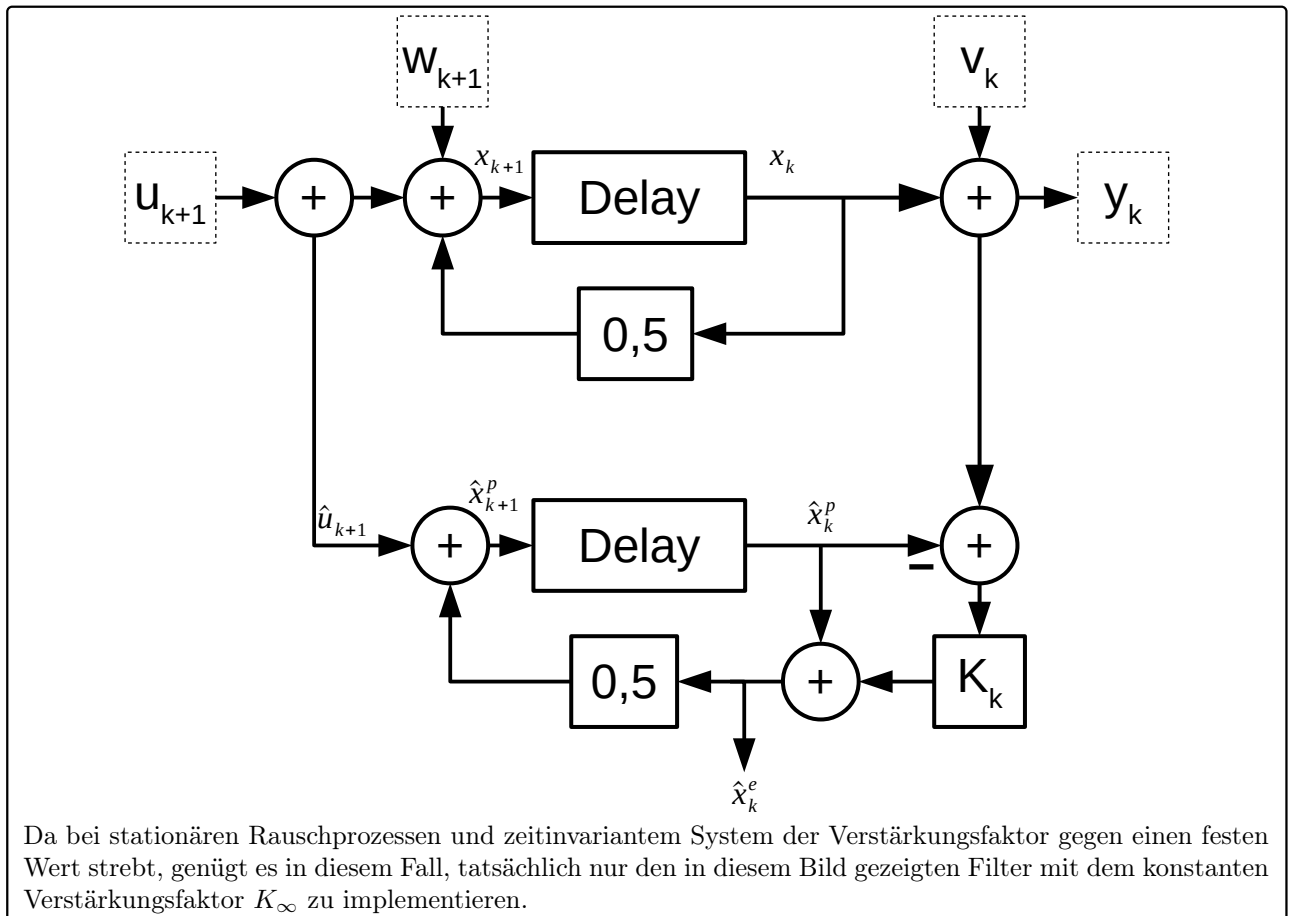
$$\begin{aligned}C_0^e &\geq \frac{\sqrt{65} - 7}{2} \\ C_0^e &= 10 > \frac{\sqrt{65} - 7}{2}\end{aligned}$$

Induktionsschritt

$$\begin{aligned}C_k^e \geq \frac{\sqrt{65} - 7}{2} &\Rightarrow C_{k+1}^e \geq \frac{\sqrt{65} - 7}{2} \\ C_{k+1}^e &= \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4}C_k^e + 1} + 1} \quad | \text{ nach unten abschätzen} \\ C_{k+1}^e &\geq \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{65}-7}{2}\right) + 1} + 1} \\ C_{k+1}^e &\geq \frac{\sqrt{65} + 1}{\sqrt{65} + 9} \quad | \text{ Erweitern mit } (\sqrt{65} - 9) \\ C_{k+1}^e &\geq \frac{\sqrt{65} - 7}{2}\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Folge durch $\frac{\sqrt{65}-7}{2}$ nach unten beschränkt ist. Zusammen mit der Monotonie ist hiermit die Konvergenz gegen $\frac{\sqrt{65}-7}{2}$ bewiesen.

- e) Zeichnen Sie ein Blockschaltbild für das gegebene System mit dem Kalman-Filter. Es genügt der Zusammenhang auf der Ebene der Erwartungswerte: der Verstärkungsfaktor K_k darf als fertiger Block verwendet werden. Verwenden Sie runde Knoten zur Summation und Blöcke zur Multiplikation mit einer Konstanten sowie Delay-Blöcke, die um einen Zeitschritt verzögern. Beschriften Sie alle Signale mit den entsprechenden Bezeichnungen u_{k+1} , w_{k+1} , x_{k+1} , x_k , v_k , y_k , \hat{x}_{k+1}^p , \hat{x}_k^p , \hat{x}_{k+1}^e , \hat{x}_k^e .



4) Anwendung: Entwurf eines Kalman-Filters zur Geschwindigkeitsschätzung

Anhand von verrauschten Positionsmessungen sollen eine skalare Geschwindigkeit s (speed) und eine skalare Position p durch ein Kalmanfilter mit dem zweidimensionalen Zustand

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} p \\ s \end{bmatrix}$$

geschätzt werden. Als Systemgleichung soll das „Constant Velocity“ Modell verwendet werden, d.h. man nimmt in der Prädiktion an, dass das Objekt sich von der letzten geschätzten Position p^e mit der letzten geschätzten Geschwindigkeit s^e weiterbewegt. Hinzu kommt noch additives Systemrauschen

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} w^p \\ w^s \end{bmatrix}$$

- a) Stellen Sie das Systemmodell, d.h. Systemgleichung und Messgleichung auf und bestimmen Sie \mathbf{A} und \mathbf{H} . Die Dauer zwischen aufeinanderfolgenden diskreten Zeitschritten sei T .

Zunächst die **Systemgleichung**. Es gilt laut Aufgabenstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_k &= \mathbf{p}_{k-1} + T \cdot \mathbf{s}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}^p, \\ \mathbf{s}_k &= \mathbf{s}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}^s. \end{aligned}$$

In Matrix-Vektorschreibweise wird dies zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{s}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{k-1} \\ \mathbf{s}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{k-1}^p \\ \mathbf{w}_{k-1}^s \end{bmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A} \underline{\mathbf{x}}_{k-1} + \underline{\mathbf{w}}_{k-1}.$$

Die Transitionsmatrix lautet also

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nun zur **Messgleichung**. Hier gilt laut Aufgabenstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &= \mathbf{p}_k + \mathbf{v}_k \\ \Leftrightarrow \mathbf{y}_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{s}_k \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k. \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der allgemeinen Form

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H} \underline{\mathbf{x}}_k$$

erhalten wir

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- b) Welche Werte müssen für die rekursive numerische Berechnung des Kalmanfilters gegeben sein? Legen Sie sich jeweils auf geeignete Zahlenwerte fest.

Man benötigt konkrete Zahlenwerte für den **Anfangszustands-Schätzwert** und die zugehörige **Kovarianzmatrix**, welche aufgrund fehlenden Vorwissens als besonders groß angenommen werden sollte. Wir verwenden hier eine Standardabweichung von 1000 m um den Nullpunkt

$$\underline{\mathbf{x}}_0^e = \begin{bmatrix} 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m/s} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0^e = \begin{bmatrix} (1000 \text{ m})^2 & 0 \\ 0 & (1000 \text{ m/s})^2 \end{bmatrix}.$$

In Worten drückt man damit aus, dass die Position mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % (Zwei-Sigma-Intervall) im Bereich -2000 m bis 2000 m liegt, und die Geschwindigkeit zwischen -2000 m/s und 2000 m/s . Durch die großen Werte in \mathbf{C}_0^e fließen die beliebig eingesetzten Null-Werte in $\underline{\mathbf{x}}_0^e$ kaum in die vom Filter produzierten Schätzungen mit ein.

Weiterhin benötigen wir den **Zeitschritt** T um die Transitionsmatrix \mathbf{A} vollständig angeben zu können. Sagen wir, es gibt 100 Zeitschritte pro Sekunde

$$T = 10 \text{ ms}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 \text{ s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann müssen wir die **Kovarianz des Systemrauschens** \mathbf{C}^w festlegen. Diese gibt an, inwieweit das beobachtete Objekt erfahrungsgemäß innerhalb der Zeit T von der idealen „Constant Velocity“ – Bewegungstrajektorie abweicht

$$\mathbf{C}^w = \text{Cov}\{\underline{\mathbf{w}}\} = \begin{bmatrix} (T \cdot 0.1 \text{ m/s})^2 & 0 \\ 0 & (T \cdot 0.1 \text{ m/s}^2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}^2 \end{bmatrix}$$

Auch die **Varianz der Messung** \mathbf{C}^y muss vorgegeben werden

$$\begin{aligned} \sigma_y &= 0.5 \text{ m} \\ \sigma_y^2 &= 0.25 \text{ m}^2 = \mathbf{C}^y = \mathbf{C}^y. \end{aligned}$$

- c) Dann fehlen uns nur noch die konkreten Messwerte \hat{y}_k , die in einem Echtzeitsystem in regelmäßigen Abständen erfasst würden. Für eine rein softwaremäßige Simulation können wir einen stochastischen Prozess gemäß der Systemgleichung Schritt für Schritt simulieren und erhalten dadurch eine „ground truth“ des Systemzustands \underline{x}_k . Anhand von diesem simulieren wir die entsprechenden Messungen gemäß dem Messmodell, d.h. es wird in jedem Schritt einfach eine entsprechende Zufallszahl v_k zur wahren Position hinzugefügt.
- d) Führen Sie die Kalman-Filterung anhand der simulierten Messwerte durch. Vergleichen Sie den Schätzfehler gegenüber der ground truth jeweils für Position und Geschwindigkeit mit „naiven“ Schätzmethoden, z.B. einfach dem Messwert als Schätzung für Position und die numerische Differentiation der Messwerte als Schätzung für die Geschwindigkeit.

Literatur

- [1] F. P. León and H. Jäkel. *Signale und Systeme*. De Gruyter Oldenbourg, Berlin, Boston, 02 Sep. 2019. ISBN 978-3-11-062632-2. doi: <https://doi.org/10.1515/9783110626322>. URL <https://www.degruyter.com/view/title/543041>.
- [2] F. Puente and P. Mesa. *Übungen zu Methoden der Signalverarbeitung (KIT)*, 2014.
- [3] F. Puente and M. Michelsburg. *Übungen zu Signale und Systeme (KIT)*, 2011.