第四～五周作业

洪艺中

2024 年 10 月 23 日

1　第一次作业

51 页题目 8

题目 1.　设 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, 计算 $n+1$ 阶行列式的值.

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

解答.

注意到[1]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{pmatrix},$$

因此要求的行列式的值即为左边两个矩阵之行列式的乘积. 所以题目中的行列式等于

$$\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)\prod_{j>i}(x_j - x_i)^2.$$

[1] 当然, 如果注意不到, 也可以通过分拆的方式算出同样的结果.

58 页题目 1 单号

(1)

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix};$$

(2)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{16} & \frac{1}{32} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 19 & -30 & 3 & -5 \\ -7 & 11 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

题目 2

题目 2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶反对称矩阵. 证明:

1. 如果 n 是奇数, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 是一个对称矩阵; 如果 n 是偶数, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 是一个反对称矩阵.
2. 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是一个反对称矩阵.

解答.

1. 设 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 去掉第 i 行和第 j 列得到的子方阵, 即 $(-1)^{i+j}\det(B_{ij})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 处的代数余子式, $(\boldsymbol{A}^*)_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\boldsymbol{B}_{ji})$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是反对称的, 所以 $\boldsymbol{B}_{ij}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{B}_{ji}$. 因此 $\det(\boldsymbol{B}_{ij}) = (-1)^{n-1}\det(\boldsymbol{B}_{ji})$.

   因此如果 n 是奇数, 那么 $\det(\boldsymbol{B}_{ij}) = \det(\boldsymbol{B}_{ji})$, 即 $(\boldsymbol{A}^*)_{ij} = (\boldsymbol{A}^*)_{ji}$, 所以 $\boldsymbol{A}^*$ 是对称矩阵; 如果 n 是偶数, 那么 $\det(\boldsymbol{B}_{ij}) = -\det(\boldsymbol{B}_{ji})$, 所以 $\boldsymbol{A}^*$ 是反对称矩阵.

2. 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 那么 $\boldsymbol{A}^{-1} = |\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}^*$. 如果 n 为偶数, 由 (1) 的结论, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆; 而如果 n 为奇数, 那么由 $\det(\boldsymbol{A}) = \det(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = (-1)^n\det(\boldsymbol{A}) = -\det(\boldsymbol{A})$ 可知, **奇数规模的反对称矩阵, 行列式为** 0. 因此这种情况下 $\boldsymbol{A}$ 不可能可逆. 命题得证.

题目 3

题目 3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵. 若存在正整数 $k \geqslant 2$ 使得 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{O}$ 成立, 证明 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^{k-1}$.

解答.

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^{k-1}) \\
=& \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^{k-1} \\
&- \left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^k\right) \\
=& \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^k \\
=& \boldsymbol{E},
\end{aligned}
$$

所以根据定理 3.1.3, $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^{k-1}$.

题目 4

题目 4. 设 $\boldsymbol{J}_n$ 为所有元素全为 1 的 $n(n > 1)$ 阶方阵. 证明 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J}_n$ 可逆, 且其逆为 $\boldsymbol{E} - \dfrac{1}{n-1}\boldsymbol{J}_n$.

解答.

1. 方案一: 因为 $\boldsymbol{J}_n^2 = n\boldsymbol{J}_n$, 所以

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J}_n)(\boldsymbol{E} - \frac{1}{n-1}\boldsymbol{J}_n) &= \boldsymbol{E} - \frac{1}{n-1}\boldsymbol{J}_n - \boldsymbol{J}_n + \frac{1}{n-1}\boldsymbol{J}_n^2 \\
&= \boldsymbol{E} - \frac{1}{n-1}\boldsymbol{J}_n - \boldsymbol{J}_n + \frac{n}{n-1}\boldsymbol{J}_n \\
&= \boldsymbol{E},
\end{aligned}
$$

   用题目 3 中一样的理由, 我们可以说明命题成立.

2. 方案二, 用之前介绍的 Sherman-Morrison 公式. 取 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$, 那么 $\boldsymbol{J}_n = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = n$. 所以

$$
(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J}_n)^{-1} = \boldsymbol{E} - \frac{1}{1 - \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{n-1}\boldsymbol{J}_n.
$$

2 第二部分

64 页题目 1

(1)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{O}_{2\times 1} \\ \boldsymbol{O}_{1\times 2} & 0 \end{pmatrix};$$

(2)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_3 & \boldsymbol{O}_{3\times 2} \end{pmatrix}.$$

题目 2 (1)

题目 5. 把矩阵 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ 表示为 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 1 & \\ y & 1 \end{pmatrix}$ 类型矩阵的乘积.

解答. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix},$$

题目要求我们用行、列相加的初等矩阵来表示 $\boldsymbol{A}$, 所以我们可以考虑怎么从单位阵开始通过行、列相加的初等变换变成 $\boldsymbol{A}$. 从

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

出发, 选择 $t, s \in \mathbb{R}$. 第 1 行加上 $t\times$ 第 2 行, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

第 1 列加上 $s\times$ 第 2 列, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ s & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ts & t \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

取 $ts = a-1$ 且 $t \neq 0$. 那么上面说明

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ \frac{a-1}{t} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & t \\ \frac{a-1}{t} & 1 \end{pmatrix}.$$

再用 1, 1 处的 a 消去 1, 2 和 2, 1 处的元素, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ \frac{1-a}{at} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & t \\ \frac{a-1}{t} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{t}{a} \\ & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$$

所以

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ \frac{1-a}{at} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ \frac{a-1}{t} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{t}{a} \\ & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$$

72 页题目 1

$$
\begin{pmatrix}
3 & -6 & 21 & 30 & 36 \\
-3 & 9 & 18 & 38 & 46 \\
-9 & 6 & -15 & -22 & -28 \\
0 & 0 & 0 & 13 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 25 & 5
\end{pmatrix}
$$

题目 3(1)

题目 6. 证明

$$
\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = |\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{BA}|.
$$

解答. 利用之前介绍的分块矩阵的初等变换, 可知

$$
\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ & \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{AB} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{AB}|,
$$

以及

$$
\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{B} \\ & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{BA} & \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = |\boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{BA}|.
$$