第十二周作业

洪艺中

2024 年 12 月 10 日

1 第一部分

习题 6.6 题目 1

解答.

1.
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 由坐标可以写出
$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$
上面的过渡矩阵 $\boldsymbol{M}$ 满足
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix},$$
所以
$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{M}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
所以坐标是
$$\boldsymbol{M}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

题目 3

解答. 取一组系数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, 第一组向量在这组系数下的线性组合是向量
$$\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1 + \lambda_2 x + \cdots + \lambda_n x^{n-1},$$
如果这个向量是零向量 0, 那么说明对任意 x,
$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \cdots + \lambda_n x^{n-1} = 0,$$

所以每个系数都为 0[1]. 因此这组向量线性无关. 其个数等于 $\mathbb{F}[x]_n$ 的维数, 所以其是一组基. 对另一组基也同理.

从第一组到第二组基的过渡矩阵是 $\boldsymbol{M}=(c_{ij})$,

$$c_{ij}=\begin{cases}\binom{j-1}{i-1}(-a)^{j-i} & i\leqslant j,\\ 0, & i>j.\end{cases}$$

习题 6.7 题目 1(1)

解答. 记 $\boldsymbol{B}$ 的列为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots \boldsymbol{b}_t\end{pmatrix}$. 那么

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Ab}_1 & \boldsymbol{Ab}_2 & \cdots \boldsymbol{Ab}_t\end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 列满秩, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的列可以看作是其列空间的一组基. 因此 $\boldsymbol{b}_i$ 可以看作 $\boldsymbol{Ab}_i$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的列这组基下的坐标, 所以 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{Ab}_1 & \boldsymbol{Ab}_2 & \cdots \boldsymbol{Ab}_t\end{pmatrix}$ 这组向量和 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots \boldsymbol{b}_t\end{pmatrix}$ 这组向量是 $\boldsymbol{A}$ 列空间中的同一组向量, 其秩自然相等.

题目 3(1)

解答. 记 m 个向量组成的那个向量组为 (I), 取出的部分组为 (Ⅱ). 取 (Ⅱ) 的一组基 (r_1 个), 并将这组基扩张为 (I) 的一组基 (增加了 $r-r_1$ 个). 因为增加的向量必然在 (Ⅱ) 之外, 所以 $r-r_1\leqslant m-s$, 即 $r_1\geqslant r+s-m$.

题目 6

解答. "$\leftarrow$": 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{ab}^\top$, $\boldsymbol{a}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 列空间的极大线性无关组, 所以其秩为 1.

"$\rightarrow$": 利用 $\boldsymbol{A}$ 的标准形 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PE}_11\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Pe}_1\boldsymbol{e}_1^\top\boldsymbol{Q}$, 可以构造出 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{Pe}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{e}_1$.

题目 7

解答. 如果其中有一组向量线性相关, 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}$ 组线性相关 (如果是 $\boldsymbol{\beta}$ 组, 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 转置即可), 那么存在不全为 0 的系数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\theta},$$

由于系数不全为 0, 存在 t, $\lambda_t\neq 0$. 则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{\beta}_1-\frac{\lambda_1}{\lambda_t}\boldsymbol{\beta}_t)^\top+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r(\boldsymbol{\beta}_r-\frac{\lambda_r}{\lambda_t}\boldsymbol{\beta}_t),$$

说明 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为 $r-1$ 个秩至多为 1 的矩阵的和, 因此 $r(\boldsymbol{A})\leqslant r-1$, 与条件矛盾. 所以两组向量一定线性无关.

习题 6.8 题目 1

解答. 第一和第三个构成子空间, 第二个不是. 有反例 $(1,0)+(0,1)$ 不在子空间中. 不过如果底空间是 1 维的, 那么第二个条件给出的是零空间, 也是子空间.

[1]一种证明方法是: 如果多项式定义在复数域上, 则由代数基本定理可以证明 $f\equiv 0$; 如果不在复数域上, 则延拓多项式为复数域上的多项式, 利用复数域上的结论说明 $f\equiv 0$.

2 第二部分

题目 2

解答. 方案是证明两个空间互相包含. 如果能用 $\boldsymbol{\alpha}$ 组表示 $\boldsymbol{\beta}$ 组, 那么说明 $L_2 \subset L_1$; 反过来如果能用 $\boldsymbol{\beta}$ 组表示 $\boldsymbol{\alpha}$ 组, 那么 $L_1 \subset L_2$. 观察得到

$$\boldsymbol{\beta}_1 = -\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2, \qquad \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2;$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1 + 3\boldsymbol{\beta}_2), \qquad \boldsymbol{\alpha}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2).$$

题目 3

解答. 维数是 2, 可以取前两个向量作为一组基.

习题 6.9

解答. 基础解系是

$$\begin{pmatrix} -19 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

全部解为

$$t\begin{pmatrix} -19 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{F}.$$

题目 2

解答. 由行列式的性质容易验证这是一组解. 而这个方程组的系数矩阵的秩是 $n-1$, 这是因为 $|D| \neq 0$, 所以其有非零的 $n-1$ 阶子式. 那么解空间是 1 维的. 所以这个向量是方程组的一个基础解系 (注意必须说明解空间的维数, 不能只因为该向量是方程组的解就说它是基础解系).

题目 6

解答. 可以取

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

这个题目可以这样思考: 我们知道齐次线性方程组的解和系数矩阵的行向量垂直, 所以这里就是要找两个线性无关, 且与题目中两个向量垂直的向量. 那么可以变为解线性方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi_1}^\top \boldsymbol{x} = 0, \\ \boldsymbol{\xi_2}^\top \boldsymbol{x} = 0, \end{cases}$$

用这个方程组的基础解系 (必然是两个向量) 来构造题目中需要的方程组.

习题 7.1 1(1) 2(2)

解答.

1. 不是内积, 因为不满足正定性: $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 0$;
2. 不是内积, 因为不满足正定性: $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$ 只能说明 $\boldsymbol{\alpha}$ 的所有元素之和为零, 不能说明所有元素都是零. 但是在空间是 1 维时可以成为内积.