第十三周作业

洪艺中

2024 年 12 月 17 日

1 第一部分

习题 7.1 题目 5

解答. 度量矩阵是

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

习题 7.1 题目 6(思考题)

解答. 内积在不同基下的度量矩阵是合同的, 可以利用过渡矩阵与坐标的关系来说明这一点.

习题 7.2 题目 5

解答. 证明: 考虑任意线性组合

$$c_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{\beta}_s,$$

与 $\boldsymbol{\alpha}$ 内积得到

$$(\boldsymbol{\alpha}, c_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{\beta}_s) = c_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1) + \cdots + c_s(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_s) = 0,$$

所以正交.

习题 6

解答. 证明: 对称性

$$\boldsymbol{H}^\top = (\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top)^\top = \boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top = \boldsymbol{H},$$

正交的证明需要用到 $\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x} = 1$,

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^\top = \boldsymbol{H}^2 = \boldsymbol{E} - 4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top + 4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top = \boldsymbol{E},$$

所以是正交的.

题目 8

解答.

1. 由于 $\boldsymbol{\gamma}$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性表示 $\boldsymbol{\gamma} = c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{\alpha}_n$, 所以 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = c_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}_1) + \cdots + c_n(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}_n) = 0$. 由正定性, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\theta}$;

2. 题目的条件说明 $(\boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\alpha}) = 0$, 代入 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_i$, 由 (1) 的结论, $\boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{\theta}$, 即二者相等.

题目 9

解答.

可以看到 Gram 行列式对应的矩阵 $\boldsymbol{G}$ (我们称为 Gram 矩阵) 和度量矩阵的区别是构造其的向量组未必是一组基. 但是这不影响我们得到

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{G} \boldsymbol{x} = (x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n, x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n),$$

由内积的正定性,

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{G} \boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\theta},$$

所以如果 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{G} \boldsymbol{x} = 0$, 就说明 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\theta}$, 那么代入 $\boldsymbol{G}$ 的定义计算可得 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} = 0$; 而 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} = 0$ 时, 显然有 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{G} \boldsymbol{x} = 0$, 所以

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{G} \boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{G}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta},$$

回到题目, 我们可以证明: $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 存在不全为 0 的系数 x_i, $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\theta}$ $\Leftrightarrow$ 存在非零向量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{G} \boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{G}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ Gram 行列式为 0.

题目 11

解答.

1. 利用 $|\boldsymbol{A}^2| = |\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top| = 1$ 可知 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^\top|$, 同样地也有 $|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B}^\top|$. 所以 $|\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}^\top||\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = 1$, 其他类似;

2. $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^\top||\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^\top||\boldsymbol{A}|$, 通过类似的运算可得 $|\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^\top||\boldsymbol{B}|$, 而 $|\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^\top| = |(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^\top)^\top| = |\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^\top|$, $|\boldsymbol{A}|$ 和 $|\boldsymbol{B}|$ 异号, 所以 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}|$, 即 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = 0$.

2 第二部分

习题 8.1 题目 1 偶数

解答.

1. 特征值 1, 特征向量 $\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\end{pmatrix}^\top$;
2. 特征值 $1, 2, -3-\mathrm{i}\sqrt{5}, -3+\mathrm{i}\sqrt{5}$, 对应的特征向量分别是

$$\begin{pmatrix}\frac{-1}{6}\\ \frac{-1}{2}\\ \frac{-1}{2}\\ 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\ \frac{-1}{3}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\frac{\mathrm{i}\sqrt{5}+2}{3}\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\frac{-\mathrm{i}\sqrt{5}+2}{3}\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix};$$

3. 特征值 $0, \mathrm{i}\sqrt{14}, -\mathrm{i}\sqrt{14}$, 对应的特征向量分别是

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{-1}{2}\\ 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\frac{-\mathrm{i}\sqrt{14}-6}{10}\\ \frac{-\mathrm{i}3\sqrt{14}+2}{10}\\ 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\frac{\mathrm{i}\sqrt{14}-6}{10}\\ \frac{\mathrm{i}3\sqrt{14}+2}{10}\\ 1\end{pmatrix}.$$

题目 2

解答. 计算

$$\boldsymbol{A\xi} = (-4, a+10, -2b)^\top = \lambda(1, -2, 3)^\top,$$

所以 $\lambda = -4$, $a = -2$, $b = 6$.

习题 8.2 题目 1

解答. 证明: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\xi}$ 是其对应的特征向量. 则 $\lambda\xi = \boldsymbol{A}\xi = \boldsymbol{A}^2\xi = \lambda^2\xi$, 由于 $\xi \neq \boldsymbol{\theta}$, $\lambda = \lambda^2$, 所以 $\lambda = 0$ 或 1.

题目 4

解答. 直接设特征向量为

$$\begin{pmatrix}x\\ \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}$$

计算, 解出特征值为 $0, |\boldsymbol{\alpha}|, -|\boldsymbol{\alpha}|$, 对应的特征子空间是

$$V_0 = \left\{\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix} :\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}^\top\boldsymbol{\beta} = 0\right\},$$

$$V_{|\boldsymbol{\alpha}|} = L\left\{\begin{pmatrix}1\\ \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}\end{pmatrix}\right\},$$

$$V_{-|\boldsymbol{\alpha}|} = L\left\{\begin{pmatrix}1\\ -\frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}\end{pmatrix}\right\},$$

题目 5

解答. 设 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$, 所以

$$\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\begin{pmatrix}3+k\\2+2k\\3+k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix},$$

那么 $k=1$ 或 $k=-2$.