第十五周作业

洪艺中*

2025 年 1 月 6 日

1　第一部分

习题 10.1 题目 1

解答.

(1)

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 - 3x_3^2,$$

做线性替换

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + x_2, \\ z_2 = x_2 + 2x_3, \\ z_3 = x_3, \end{cases}$$

得到

$$f(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 - 3z_3^2.$$

(3)

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 - x_2)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 + 4x_3^2,$$

做线性替换

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - x_2, \\ z_2 = x_2 + 2x_3, \\ z_3 = x_3, \end{cases}$$

得到

$$f(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^2 - z_2^2 + 4z_3^2.$$

*本学期的作业及源文件已经上传到 github: `https://github.com/Eclipse-desu/2024linear-algebra`

习题 10.2 题目 1

解答. 记 $\boldsymbol{M}$ 为第 k 列只有第 i_k 行的元素是 1, 其他元素皆 0 的矩阵. 则 $\boldsymbol{M}$ 每行每列都只有一个元素是 1, 并且当这个矩阵与单位向量 $\boldsymbol{e}_s$ 相乘时, 只有第 s 列为 1 的那一行乘出来才不是 0. 根据 $\boldsymbol{M}$ 的定义, 只有第 i_s 行的第 s 列元素是 1, 因此

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_s = \boldsymbol{e}_{i_s},$$

那么可以写出对一般的 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top$,

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_n} \end{pmatrix},$$

考虑用 $\boldsymbol{M}$ 做合同变换. 我们记题目中的第一个对角阵为 $\boldsymbol{A}$, 第二个为 $\boldsymbol{B}$, 那么

$$\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} & \cdots & x_{i_n} \end{pmatrix} \boldsymbol{B} \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_n} \end{pmatrix} = \sum_{t=1}^{n} \lambda_{i_t} x_{i_t}^2 = \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

因为两个矩阵都是对称的, 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 合同, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}$.

题目 2

解答. 二次型对应的矩阵是对称的, 所以只需要把 $\boldsymbol{A}$ 『变成』对称矩阵. 即

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top).$$

2 第二部分

习题 10.3 题目 2

解答. 在实数域上, 合同变换不改变惯性指数, 所以二者不合同. 在复数域上, 可以取 $\boldsymbol{M} = \mathrm{i}\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{E}\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{E}$.

题目 3

解答. 根据惯性定理, 正惯性指数 p 和矩阵的秩 r 相同的矩阵在同一个合同类里. 所以一共有 $(n+2)(n+1)/2$ 种.

题目 5

解答. 这个二次型对应的矩阵是

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

为了计算其规范形, 我们只需要了解其惯性指数. 为此, 计算其特征多项式, 为方便计算, 设 $u = \lambda + \frac{1}{2}$, 记所有位置都是 1 的向量为 $\boldsymbol{a} = (1, 1, \cdots, 1)^\top$, 利用秩一校正公式,

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = |u\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\top| = |u\boldsymbol{E}||1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^\top \frac{1}{u}\boldsymbol{E}\boldsymbol{a}| = u^{n-1}(u - \frac{n}{2}),$$

所以 $u = \frac{n}{2}$ 或 $u = 0(n-1$ 重$)$. 所以特征值 $\lambda = \frac{n-1}{2}$ 和 $\lambda = -\frac{1}{2}(n-1$ 重$)$. 故规范形是

$$f = z_1^2 - z_2^2 - \cdots - z_n^2.$$

习题 10.4 题目 2

解答. 记二次型对应的矩阵是

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

根据条件, 其合同于对角阵

$$\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(0, 1, 4),$$

因为 $\boldsymbol{P}$ 是正交替换对应的矩阵, 所以是正交矩阵, 因此上式同时也是相似变换. 故因为迹是相似变换的不变量, $1 + a + 1 = 5$, $a = 3$. 同时, $\boldsymbol{A}$ 的行列式为 0 可以解出 $b = 1$. $\boldsymbol{P}$ 可以取

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

习题 10.5 题目 1(2)

解答. 利用正交替换同时也是相似对角化,

$$\boldsymbol{P}^\top \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

解特征方程得到 $a = 2$,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

题目 2

解答. 取 $\boldsymbol{e}_i$, $a_{ii} = \boldsymbol{e}_i^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{e}_i \geqslant 0$.

题目 4(2)

解答. 写成矩阵

$$\begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 0 \\ 1 & t & -1 & 0 \\ 1 & -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

若要正定, 其顺序主子式皆正. 计算顺序主子式为 t, t^2-1, t^3-3t-2, t^3-3t-2. 四者都正, 得到 $t > 2$.

题目 6

解答. 取 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^\top \neq \boldsymbol{\theta}$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} &= \sum_{i=1}^n x_i \left((1 - \frac{1}{n}) x_i + \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} x_j \right) \\ &= (1 - \frac{1}{n}) \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} x_i x_j \\ &= (1 - \frac{1}{n}) \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 > 0, \end{aligned}$$

因此正定.

题目 7

解答.

1. 我们首先假设『任何绝对对角占优矩阵可逆』. 有此假设, 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分解为其对角部分 $\boldsymbol{B} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$ 和非对角部分 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$. 考虑矩阵函数 $\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{B} + t\boldsymbol{C}$. 在 $t \in [-1, 1]$ 时, $\boldsymbol{A}(t)$ 都是绝对对角占优的. 所以 $f(t) := \det \boldsymbol{A}(t)$ 在 $[-1, 1]$ 上非零. 由于 $f(t)$ 是关于 t 的多项式, 所以其连续. $f(0) = \det \boldsymbol{B} > 0$, 则由介值定理知 $\det \boldsymbol{A} = f(1) > 0$.

   下面证明这一假设. 为了证明可逆, 我们只需要证明 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$ 这个齐次方程组没有非零解. 不妨反设其有非零解 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^\top$, 且 x_k 是其中绝对值最大的下标, 即任取 i 都有 $|x_k| \geqslant |x_i|$. 那么考虑 $\boldsymbol{Ax}$ 的第 k 行

   $$a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = 0,$$

   把 $a_{kk}x_k$ 移动到右边, 取绝对值得到

   $$a_{kk}|x_k| = |a_{k1}x_1 + \cdots + a_{k,k-1}x_{k-1} + a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n| \leqslant \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_j| \leqslant \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_k|,$$

   所以得到

   $$a_{kk} \leqslant \sum_{j \neq k} |a_{kj}|,$$

   但这与绝对对角占优的条件矛盾. 故反设不成立, 原假设成立.

2. 注意到绝对对角占优矩阵的顺序主子阵也是绝对对角占优的. 所以如果 $\boldsymbol{A}$ 对称, 其顺序主子式也都正 (由 (1)), 那么其正定.

题目 8

解答.

$$\begin{array}{ll} & \boldsymbol{BAB}^\top \text{ 正定} \\ \Leftrightarrow & \text{任取 } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{BAB}^\top \boldsymbol{x} > 0 \\ \Leftrightarrow & \text{(由 } \boldsymbol{A} \text{ 的正定性) 任取 } \boldsymbol{x} \neq 0,\ \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\theta} \\ \Leftrightarrow & \boldsymbol{B}^\top \text{ 列满秩, 即 } \boldsymbol{B} \text{ 行满秩.} \end{array}$$

题目 9

解答. 因为实对称矩阵可对角化, 所以如果其行列式是负的, 那么一定有一个负特征值 $\lambda < 0$ 和对应的特征向量 α 满足 $\boldsymbol{A}\alpha = \lambda\alpha$. 那么 $\alpha^\top \boldsymbol{A}\alpha = \lambda\alpha^\top\alpha < 0$.