第十四周作业

洪艺中

2024 年 12 月 24 日

1 第一部分

习题 8.3 题目 1

解答.

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{-1}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}).$$

习题 8.4 题目 1

解答. 四个矩阵都可以相似对角化. 此处只给出用来相似对角化的矩阵 $\boldsymbol{M}$, 以及相似的对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$

(1)

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{17}+1}{2} & \frac{\sqrt{17}+1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{17}+5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{17}+5}{2} \end{pmatrix};$$

(3)

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix};$$

(5)

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

(7)

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{-1}{2} & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

题目 2

解答. 取 $\boldsymbol{A}$ 一组正交的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$, 分别对应特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$(可能重复). 因为这组向量两两正交, 所以这组向量线性无关. (证明: 如果线性组合 $\sum_{i=1}^n c_i\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\theta}$, 对等式两边内积上 $\boldsymbol{\xi}_j$ 可得 $c_j = 0$) 将这组向量单位化, 并合成一个矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\xi}_1}{|\boldsymbol{\xi}_1|} & \dfrac{\boldsymbol{\xi}_2}{|\boldsymbol{\xi}_2|} & \cdots & \dfrac{\boldsymbol{\xi}_n}{|\boldsymbol{\xi}_n|} \end{pmatrix},$$

那么 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵, $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^\top$, 同时由于每一列都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,

$$\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}\dfrac{\boldsymbol{\xi}_1}{|\boldsymbol{\xi}_1|} & \cdots & \boldsymbol{A}\dfrac{\boldsymbol{\xi}_n}{|\boldsymbol{\xi}_n|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\dfrac{\boldsymbol{\xi}_1}{|\boldsymbol{\xi}_1|} & \cdots & \lambda_n\dfrac{\boldsymbol{\xi}_n}{|\boldsymbol{\xi}_n|} \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),$$

所以 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\boldsymbol{P}^\top$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵.

题目 3

解答.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. $$\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & 1-(-1)^k & 1-(-1)^k \\ -1+3^k & -1+(-1)^k+3^k & -1+(-1)^k \\ 1-3^k & 1-3^k & 1 \end{pmatrix};$$

2. 记 $g(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 28$, 那么 $g(\boldsymbol{A})$ 的特征值为 $g(1) = 8$, $g(-1) = 54$, $g(3) = 10$;

3. $|g(\boldsymbol{A})| = 8 \times 54 \times 10 = 4320$;

4. $$g(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 8 & -46 & -46 \\ 2 & 56 & 46 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

题目 5

解答. $|\boldsymbol{A}| = -6$, 可以给原式乘上一个 $|A|$ 方便计算.

$$|\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}| = 25.$$

题目 7

解答. 首先 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值一定非零. 因此 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值也非零.

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\xi} = \lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi},$$

因此 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 $|\boldsymbol{A}|/\lambda_0$ 的一个特征向量, 利用这一点来列方程, 可得 $a = c = 2, b = -3, \lambda_0 = 1$.

题目 9

解答. 根据 Hamilton-Caylay 定理, 设 $g(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 那么 $g(A) = \boldsymbol{0}$, 并且因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $c_0 = g(0) = |\boldsymbol{A}| \neq 0$.

我们的目标是找到一个矩阵 $\boldsymbol{B} = f(\boldsymbol{A})$ 使得 $\boldsymbol{A}f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{0} = g(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^n + c_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + c_1\boldsymbol{A} + c_0\boldsymbol{E},$$

因为 $c_0 \neq 0$, 所以可以把常数项移到等式左边来创造一个 $\boldsymbol{E}$, 即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c_0}(\boldsymbol{A}^n + c_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + c_1\boldsymbol{A}) \\ &= \boldsymbol{A} \cdot -\frac{1}{c_0}(\boldsymbol{A}^{n-1} + c_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-2} + \cdots + c_1\boldsymbol{E}), \end{aligned}$$

所以取 $f(x) = -\frac{1}{c_0}(x^{n-1} + c_{n-1}x^{n-2} + \cdots + c_1)$, 即 $f(x) = -\frac{1}{c_0 x}(g(x) - c_0)$ 即可.

题目 13

解答.

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \times 5^{k-1} - 2 \times (-1)^k 5^{k-1} & -1 + 4 \times 5^{k-1} + (-1)^k 5^{k-1} \\ 0 & 5^{k-1} + 4 \times (-1)^k 5^{k-1} & 2 \times 5^{k-1} - 2 \times (-1)^k 5^{k-1} \\ 0 & 2 \times 5^{k-1} - 2 \times (-1)^k 5^{k-1} & 4 \times 5^{k-1} + (-1)^k 5^{k-1} \end{pmatrix}.$$

2 第二部分

习题 8.4 题目 10

解答. 证明, 因为 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 所以存在由特征向量组成的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}$, 这里 $\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, 那么

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{Q}^{-1}f(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{Q},$$

由对角矩阵的乘法性质, $f(\boldsymbol{\Lambda})=\mathrm{f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)}$ 也是对角矩阵. 所以 $f(\boldsymbol{A})$ 可对角化, 并且其所有特征值为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$.

题目 12

解答.

1. 设多项式 $g(x)=c_{n^2}x^{n^2}+c_{n^2-1}x^{n^2-1}+\cdots+c_1x+c_0$. 如果 $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$, 那么 $g(\boldsymbol{A})$ 这个矩阵的每个元素都为 0, 因此每个位置都给出了一个关于 $c_0,c_1,\cdots,c_{n^2}$ 的线性方程. 因为矩阵一共有 n^2 个元素, 所以一共有 n^2 个方程, 而待定的系数有 n^2+1 个, 所以方程组有非零解, 因此存在题目要求的多项式.

2. 1. 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 那么根据 (1), 存在非零的多项式 $f(x)$ 使 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$. 设其中次数最小的非零系数是 c_i, 即 $j<i$ 时, $c_j=0$. 那么多项式可以表示为

$$f(x)=x^i(c_i+c_{i+1}x+\cdots+c_{n^2}x^{n^2-i}),$$

记 $g(x)=f(x)/x^i$, 则

$$\boldsymbol{0}=f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^ig(\boldsymbol{A}),$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 所以 $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$. 而 g 的常数项不为 0, 因此前者可以推出后者;

2. 如果存在常数项不为 0 的多项式 $g(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0$, $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$, 那么类似第 9 题构造 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵:

$$\boldsymbol{0}=(a_k\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+a_1)\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E},$$

所以

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\cdot-\frac{1}{a_0}(a_k\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+a_1),$$

因为存在和 $\boldsymbol{A}$ 相乘是单位阵的矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

习题 8.5 题目 2

解答. $x=4,y=5$. $\boldsymbol{U}$ 可以取

$$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

对于特征值 5 的子空间, 取其他正交基也可以.

拓展题 2

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的两个 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{F}$ 中的 n 个特征值互异, 试证 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量恒为 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量的充要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

解答. 先证明前推后. 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互异, 所以其有一组特征向量组成空间的基, 因此可以相似对角化. 设 $\boldsymbol{Q}$ 是使 $\boldsymbol{A}$ 对角化的矩阵, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{Q}$. 因为 $\boldsymbol{Q}$ 列向量就是 $\boldsymbol{A}$ 的一组特征向量, 由条件, 其也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量. 所以存在 $\mu_1,\cdots,\mu_n$, 使得对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}_2$ 满足

$$\boldsymbol{BQ}=\boldsymbol{Q\Lambda}_2,$$

因此 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{Q}$. 故

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{QQ}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{BA}.$$

再证明后推前. 如果两个矩阵可交换, 设 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ 的特征向量, 那么

$$\lambda(\boldsymbol{B\xi})=\boldsymbol{BA\xi}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B\xi}),$$

所以 $\boldsymbol{B\xi}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ 的特征向量. 因为 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值, 所以每个特征子空间的维数是 1. 因此 $\boldsymbol{B\xi}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 共线, 即存在 μ 使得 $\boldsymbol{B\xi}=\mu\boldsymbol{\xi}$. 所以 $\boldsymbol{\xi}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

拓展题 7

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有完全相同的特征值, 证明存在 n 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与另一矩阵 $\boldsymbol{R}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{RQ}$.

解答. 由于二者有完全相同的特征值, 所以可以对角化为相同的对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$: 取可逆阵 $\boldsymbol{S},\boldsymbol{T}$, 使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S\Lambda S}^{-1},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{T\Lambda T}^{-1},$$

那么取 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{ST}^{-1}$, $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{T\Lambda S}^{-1}$, 则 $\boldsymbol{Q}$ 可逆, 并且

$$\boldsymbol{QR}=\boldsymbol{ST}^{-1}\boldsymbol{T\Lambda S}^{-1}=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{RQ}=\boldsymbol{T\Lambda S}^{-1}\boldsymbol{ST}^{-1}=\boldsymbol{B}.$$

拓展题 11

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可对角化. 证明: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 乘法可交换当且仅当存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{PAP}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{PBP}^{-1}$ 均为对角阵.

解答. 前推后的证明与拓展题 2 类似.

接下来证明后推前. 假设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, 重数分别为 $t_1, \cdots, t_k$. 与拓展题 2 类似, 我们可以用可交换性证明, 对 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个特征子空间 V_λ, $\boldsymbol{B}(V_\lambda) \subset V_\lambda$. 所以在 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量构成的基下, $\boldsymbol{B}$ 对应 (相似于) 一个分块对角矩阵: 具体来说, 就是取 $\boldsymbol{A}$ 特征向量构成的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 并且相同特征值的向量相邻, 即前 t_1 列是特征值 λ_1 的特征子空间的基, 接下来的 t_2 列是特征值 λ_2 的特征子空间的基, 以此类推. 那么

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q} \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{E}_{t_1} & & & \\ & \lambda_2 \boldsymbol{E}_{t_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \boldsymbol{E}_{t_k} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}^{-1}, \quad \boldsymbol{BQ} = \boldsymbol{Q} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_k \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{B}_i$ 是 $t_i \times t_i$ 的矩阵. 根据群里发的文档, 可以证明 $\boldsymbol{B}_i$ 都是可对角化的, 所以可以取 $\boldsymbol{S}_i$ 使 $\boldsymbol{S}_i \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{S}_i^{-1} = \boldsymbol{\Lambda}_i$ 是对角阵, 那么取

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{S}_1 & & & \\ & \boldsymbol{S}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{S}_k \end{pmatrix},$$

则计算得

$$\boldsymbol{SQ}^{-1}\boldsymbol{AQS}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{E}_{t_1} & & & \\ & \lambda_2 \boldsymbol{E}_{t_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \boldsymbol{E}_{t_k} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{SQ}^{-1}\boldsymbol{BQS}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_1 & & & \\ & \boldsymbol{\Lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{\Lambda}_k \end{pmatrix}.$$

因此取 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{SQ}^{-1}$ 即可同时对角化.

拓展题 16

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足对任意 i

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=b,$$

证明

1. b 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值;
2. 如果 $a_{ij}\geqslant 0$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的任一个实特征值都满足 $|\lambda|\leqslant b$.

解答. 第一问, 取 $(1,1,\cdots,1)^\top$ 即可证明.

第二问, 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$, 并取 ξ 中绝对值最大的元素 x_k, 满足对任何 i, $|x_k|\geqslant|x_i|$. 那么考虑 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 行,

$$a_{k1}x_1+\cdots+a_{kk}x_k+\cdots+a_{kn}x_n=\lambda x_k,$$

取绝对值, 并对左边从上面估计, 得到

$$|\lambda||x_k|=|a_{k1}x_1+\cdots+a_{kk}x_k+\cdots+a_{kn}x_n|\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_{ki}|x_i|\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_{ki}|x_k|=b|x_k|,$$

两边除以 $|x_k|$ 得到

$$|\lambda|\leqslant b,$$

得证.