第十六周作业?

洪艺中

2025 年 1 月 6 日

本文档仅提供 10.5 节部分习题的答案, 第十六周第二部分作业没做.

1 第一部分

习题 10.5 题目 13

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个正定矩阵, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^\top & a\end{pmatrix}$, 其中 $a\in\mathbb{R}$. 证明:

1. $\boldsymbol{B}$ 正定当且仅当 $a-\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}>0$;
2. $\boldsymbol{B}$ 半正定当且仅当 $a-\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\geqslant 0$.

解答.

1. 取 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^\top & y\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{\theta}$,

   $$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^\top & y\end{pmatrix}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^\top & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+y\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{x}+ay\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+y\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\alpha}+y\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{x}+ay^2, \tag{$*$}$$

   如果 $\boldsymbol{B}$ 正定, 那么 $(*)$ 式为正. 取 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$, $y=-1$ 得到

   $$\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}+a>0,$$

   即

   $$a-\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}>0;$$

   反过来, 如果上式成立. 因为我们知道 $\boldsymbol{B}$ 的前 $n-1$ 个顺序主子式是 $\boldsymbol{A}$ 的主子式, 已经是正的, 所以只需要证明 $\det\boldsymbol{B}>0$ 即可, 利用矩阵的分块初等变换

   $$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{\theta}\\ -\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{A} & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{\theta}\\ -\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{A} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^\top & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\theta}^\top & a-\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix},$$

   所以

   $$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|(a-\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}),$$

   因为 $\boldsymbol{A}$ 正定, 而条件又给出 $a-\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}>0$, 因此 $|\boldsymbol{B}|>0$, 即 $\boldsymbol{B}$ 正定.

2. 半正定的情况只需要把上面对应的 $>$ 改为 $\geqslant$ 即可.

题目 14

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个实对称矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是一个半正定矩阵. 证明: $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全为实数.

解答. 假设 λ 是 $\boldsymbol{AB}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\xi}$ 是对应的一个特征向量, $\boldsymbol{AB\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$. 根据定理 10.5.3, 半正定矩阵可以写成一个实矩阵与其转置的乘积, 即有矩阵 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{C}$. 则

$$\boldsymbol{CAB\xi}=\boldsymbol{CAC}^\top\boldsymbol{C\xi}=(\boldsymbol{CAC}^\top)(\boldsymbol{C\xi})=\lambda\boldsymbol{C\xi},$$

如果 $\boldsymbol{C\xi}\neq\boldsymbol{\theta}$, 说明 λ 是 $\boldsymbol{CAC}^\top$ 的特征值, 而这个矩阵是实对称矩阵, 所以它的特征值一定是实数; 如果 $\boldsymbol{C\xi}=\boldsymbol{\theta}$, 那么 $\boldsymbol{AB\xi}=\boldsymbol{\theta}$, 所以特征值是 0, 也是实数. Q.E.D.[1].

题目 15

设 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 是一个实对称矩阵, 其最小与最大的特征值分别为 a,b. 证明: 对任意的向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 有

$$a\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{Ax}\leqslant b\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x}.$$

解答. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称的, 所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 让 $\boldsymbol{A}$ 对角化 $\boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{AU}=\boldsymbol{\Lambda}:=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 那么设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Uy}$,

$$\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{\Lambda y}=\sum_{i=1}^n\lambda_i|y_i|^2,$$

因为 $a\leqslant\lambda_i\leqslant b$, 所以

$$a\sum_{i=1}^n|y_i|^2\leqslant\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{Ax}=\sum_{i=1}^n\lambda_i|y_i|^2\leqslant b\sum_{i=1}^n|y_i|^2.$$

而正交矩阵不改变向量的长度, 所以 $\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x}$, 用这一点替换上式的两边, 即得证.

题目 16

设 $f(\boldsymbol{x}):=\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{Ax}$ 是一个实二次型, 有 n 维向量 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$, 使得

$$\boldsymbol{x}_1{}^\top\boldsymbol{Ax}_1>0,\qquad\boldsymbol{x}_2{}^\top\boldsymbol{Ax}_2<0.$$

证明: 必存在 n 维向量 $\boldsymbol{x}_0$, 使 $\boldsymbol{x}_0{}^\top\boldsymbol{Ax}_0=0$.

解答. 思路: 我们假设 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{e}_2$, 且空间为 2 维. 那么就是说二次型在 $(1,0)$ 点为正, $(0,1)$ 点为负. 因为二次型是多元多项式, 是连续函数, 那么如果我们在 $(1,0)$ 点和 $(0,1)$ 点之间连一条线段, 根据连续函数的介值定理, 线段上一定有一个点取到 0.

设 $\boldsymbol{x}(t)=(1-t)\boldsymbol{x}_1+t\boldsymbol{x}_2$, 那么

$$g(t):=f(\boldsymbol{x}(t))$$

是关于 t 的连续函数, $g(0)>0$, $g(1)<0$, 所以由连续性, 存在 $t_0\in(0,1)$, 使 $f(t_0)=0$. 则取 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}(t_0)$ 即可.

[1] Q.E.D. 的意思是 “~~quite easily done~~ quod erat demonstrandum”, 意思是「证毕」

题目 17

设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$ 是一个正定矩阵. 证明:

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}_{11}$, $\boldsymbol{A}_{22}$, $\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ 也正定;
2. $|\boldsymbol{A}|\leqslant|\boldsymbol{A}_{11}||\boldsymbol{A}_{22}|$.

解答.

1. $\boldsymbol{A}_{11}$ 和 $\boldsymbol{A}_{22}$ 的正定性证明可以用题目 19(在后面) 的方法, 即说明他们所有的主子式都是正的. 第三个矩阵会让我们想到 72 页习题 4(1), 即有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \\ -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\\ & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \\ & \boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\end{pmatrix},$$

因为 $\boldsymbol{A}_{12}=\boldsymbol{A}_{21}^{\top}$, 所以上面是合同变换. 故右边的矩阵和正定矩阵合同, 那么它也是正定的. 所以用和判断前两个矩阵正定同样的理由, 得到 $\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ 也正定.

2. 这一题我们分成三步做

   a) 证明: 如果 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是两个实对称矩阵, $\boldsymbol{B}$ 正定, 则存在可逆的 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$, 且 $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ 是对角阵[2];

   b) 利用 a) 证明, 如果 $\boldsymbol{B}$ 正定, $\boldsymbol{C}$ 半正定, 且 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 是半正定的, 那么 $|\boldsymbol{B}|\geqslant|\boldsymbol{C}|$;

   c) 利用 b) 证明 (2).

   我们先证明前两项.

引理 1

如果 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是两个实对称矩阵, $\boldsymbol{B}$ 正定, 则存在可逆的 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$, 且 $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ 是对角阵.

证明. 首先由于 $\boldsymbol{B}$ 正定, 那么存在可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$ 使之合同于单位矩阵 $\boldsymbol{M}^{\top}\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}$, 此时 $\boldsymbol{M}^{\top}\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}$ 由合同关系, 依然是对称的. 因为后者是实对称矩阵, 可以相似对角化, 我们取正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 来让 $\boldsymbol{M}^{\top}\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}$ 对角化为对角阵 $\boldsymbol{U}^{\top}\boldsymbol{M}^{\top}\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\Lambda}$, 那么取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}$ 即可,

$$\boldsymbol{U}^{\top}\boldsymbol{M}^{\top}\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{E},\qquad \boldsymbol{U}^{\top}\boldsymbol{M}^{\top}\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\Lambda}.$$

□

[2]注意这个题目与 229 页题目 11 「同时可对角化」的区别, 这里是合同变换而非相似, 所以不需要两个矩阵可交换

引理 2
如果 $\boldsymbol{B}$ 正定, $\boldsymbol{C}$ 半正定, 且 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 是半正定的, 那么 $|\boldsymbol{B}| \geqslant |\boldsymbol{C}|$.[3]

证明. 利用引理 1, 存在 $\boldsymbol{P}$,

$$\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{C}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda},$$

那么 $\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}-\boldsymbol{\Lambda}$ 是半正定的. 由于经过 $\boldsymbol{P}$ 变化之后, 三个矩阵都是对角阵, 那么正定就是说它们的对角元都是正的, 半正定就是说它们的对角元是非负的. 所以 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元和 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元都是非负的, 即 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元在 $[0,1]$ 区间上.

所以 $1 = |\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}| \geqslant |\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}|$, 即 $|\boldsymbol{B}| \geqslant |\boldsymbol{C}|$. □

有了这两个引理, 我们就可以证明 (2) 了. 首先 $\boldsymbol{A}_{22}$ 和 $\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ 都正定, 而 $\boldsymbol{A}_{11}$ 正定, 所以 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{A}_{11}^{-1}(\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}) \geqslant 0$, 即 $\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ 是半正定的. 那么根据引理 2, $|\boldsymbol{A}_{22}| \geqslant |\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}|$, 因此

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}_{11}||\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}| \leqslant |\boldsymbol{A}_{11}||\boldsymbol{A}_{22}|.$$

题目 19

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是一个实对称矩阵. 证明:

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的任一个主子式都大于零;
2. 假设 $\boldsymbol{A}$ 正定, 对任意 $i \neq j$, 有 $|a_{ij}| \leqslant \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$;
3. 假设 $\boldsymbol{A}$ 正定, $\boldsymbol{A}$ 中所有元素中绝对值最大的元素一定在对角线上.

解答.

1. 假设主子阵 $\boldsymbol{A}'$ 由 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行和列决定, 那么取 $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_{i_1} + x_2\boldsymbol{e}_{i_2} + \cdots + x_k\boldsymbol{e}_{i_k}$, 如果 $\boldsymbol{x}' := (x_1, x_2, \cdots, x_k) \neq \boldsymbol{\theta}$,
$$\boldsymbol{x}'^\top \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0,$$
这说明主子阵 $\boldsymbol{A}'$ 正定. 故主子式大于零.
2. 考虑 i, j 行和列决定的二阶主子式, 由上面的结论, 它是正的, 所以有 $a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 > 0$, 因此 $|a_{ij}| \leqslant \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$.
3. 由第二个结论, a_{ii} 和 a_{jj} 中至少有一个大于等于 $|a_{ij}|$, 所以对任何一个非对角元, 都能找到一个对角元比它的绝对值大. 所以所有元素中绝对值最大的元素一定在对角线上.

[3]如果把这个引理换到实数上, 这个引理就是说: 如果 $b > 0$, $c \geqslant 0$ 且 $b - c \geqslant 0$, 那么 $|b| \geqslant |c|$. 可见正定矩阵某种程度上就像是「正数」一样.

题目 21

设分块实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^\top & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{B}_{m\times m}$ 正定, $\boldsymbol{C}_{m\times n}$ 列满秩. 证明二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数和负惯性指数分别为 m 和 n.

解答. 思路: 将这个矩阵合同为规范形.

因为 $\boldsymbol{B}$ 正定, 所以可以取 $\boldsymbol{M}$ 可逆, 使 $\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{E}_m$. 那么

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{M} & \\ & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}^\top\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^\top & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M} & \\ & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{M} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

然后, 用合同变换把次对角的两个矩阵消去

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{C}\\ & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}^\top\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{M} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{C}\\ & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \\ & -\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{M}$ 可逆, 所以 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^\top$ 正定. 而 $\boldsymbol{C}$ 列满秩, 所以 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{y}=0$, 因此

$$\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{y}=0,$$

即 $\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{C}$ 正定, 进而 $-\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{C}$ 负定. 因此有可逆矩阵 $\boldsymbol{N}$ 使之变为规范形 $\boldsymbol{N}^\top\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{E}_n$. 因此

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \\ & \boldsymbol{N}\end{pmatrix}^\top\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \\ & -\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^\top\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \\ & \boldsymbol{N}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \\ & -\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数是 m, 负惯性指数是 n.