第七周作业

洪艺中

2024 年 11 月 5 日

1　第一次作业

89 页题目 2

设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{F}$, 证明 $r(\boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) + n = r(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}) + m$.

解答. 构造

$$\boldsymbol{M} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix},$$

利用分块矩阵的初等变换, 可以得到

$$\begin{aligned} r(\boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) + n =& r\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \\ & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}\right) \\ =& r\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}\right) \\ =& r\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \\ & \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \end{pmatrix}\right) = r(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}) + m, \end{aligned}$$

所以命题得证.

题目 3

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 矩阵, 且 $n \geqslant m$. 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_m$, 证明 $r(\boldsymbol{A}) = m = r(\boldsymbol{B})$.

解答. 因为 $n \geqslant m$, 并且矩阵的秩不超过其行列规模的较小值. 所以 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant m$, $r(\boldsymbol{B}) \leqslant m$. 利用乘积秩的不等式

$$m = r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \leqslant \min\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\} \leqslant m,$$

所以上面的 $\leqslant$ 必须取到相等. 因此 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = m$. 命题得证.

题目 4

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵 $(n \geqslant 2)$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵. 证明

$$r(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A}) = n, \\ 1, & r(\boldsymbol{A}) = n-1, \\ 0, & r(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2. \end{cases}$$

解答.

1. $r(\boldsymbol{A}) = n$ 时, $\boldsymbol{A}$ 可逆, 所以 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆. 因此 $r(\boldsymbol{A}^*) = n$;
2. $r(\boldsymbol{A}) = n-1$ 时, 借助 Sylvester 不等式,

   $$r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) \geqslant r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{A}^*) - n,$$

   因为 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$. 因此代入 $r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) = 0$, $r(\boldsymbol{A}) = n-1$ 得到

   $$0 \geqslant n - 1 + r(\boldsymbol{A}^*) - n = r(\boldsymbol{A}^*) - 1,$$

   所以 $r(\boldsymbol{A}^*) \leqslant 1$. 同时, 因为 $r(\boldsymbol{A}) = n-1$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 中有非零的 $n-1$ 阶子式. 因此 $\boldsymbol{A}^*$ 中有非零元素. 所以 $r(\boldsymbol{A}^*) > 0$. 因此有 $0 < r(\boldsymbol{A}^*) \leqslant 1$, 所以 $r(\boldsymbol{A}^*) = 1$.
3. $r(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式都是 0. 故 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$, 所以 $r(\boldsymbol{A}^*) = 0$.

题目 7

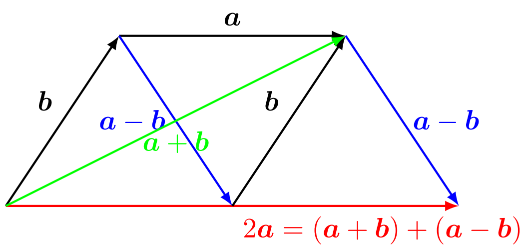
证明: 若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$, 那么 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$.

解答. 用 Sylvester 不等式立即可得.

100 页题目 2 (1)

用作图法证明 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}$.

解答.



题目 3 偶数

向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 需要满足什么条件, 以下各式才成立?

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;

(4) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;

(6) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$;

解答.

(2) 移项得到 $(\lambda-1)\boldsymbol{a}=(\lambda+1)\boldsymbol{b}$. 所以 $\lambda\neq 1$ 时, $\boldsymbol{a}=(\lambda+1)\boldsymbol{b}/(\lambda-1)$, $\lambda=1$ 时, $\boldsymbol{b}=0$ 即可;

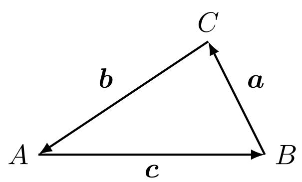
(4) 存在 $k,l\in\mathbb{R}$, $k\boldsymbol{a}=l\boldsymbol{b}$ 且 $kl\geqslant 0$;

(6) 存在 $k,l\in\mathbb{R}$, $k\boldsymbol{a}=l\boldsymbol{b}$ 且 $kl\leqslant 0$.

题目 4

用向量法证明任意三角形两边中点的连线平行于第三边, 而且它的长等于第三边长的一半.

解答. 设三角形为 ABC 如下图. 对于这个问题, 不妨选择 CA, BC 两边, 若非如此, 只需要变换字母标



记即可. 这两条边中点的连线为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/2$. 第三边 $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, 二者成倍数, 所以平行. 中线的长度是 $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/2|=|-\boldsymbol{c}/2|=|\boldsymbol{c}|/2$, 所以长度是第三边的一半.

题目 5

设 P 是平行四边形 $ABCD$ 的中心, O 是任意一点. 证明 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OP}$.

解答. 首先, 平行四边形的中心是其两个对角线的交点. 根据平面几何的知识, 中点关于 A 的方位向量是 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. 因此

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\\=&4\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\\=&4\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AC}\\=&4\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{AP}=4\overrightarrow{OP}.\end{aligned}$$

题目 6

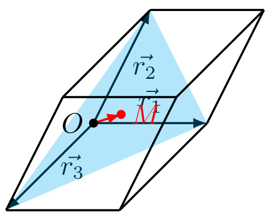
设 O 是平面上多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心, 证明 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=0$.

解答. 因为正多边形绕 O 旋转 $2\pi/n$ 后与原来重合, 所以旋转前后 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}$ 是不变的. 如果一个向量旋转 $\alpha(0<\alpha<\pi)$ 之后和自己相等, 说明它只能是 $\mathbf{0}$. (否则一个向量旋转 α 之后与自己不共线, 但是相等又说明共线, 产生矛盾) 因此 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=0$.

题目 8

已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_1$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_2$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}_3$ 是以原点 O 为顶点的平行六面体的三条边, 设过点 O 的对角线与平面 ABC 的交点为 M, 求向量 $\overrightarrow{OM}$.

解答. 点 M 在平面 ABC 上, 就是说 $\overrightarrow{AM}$ 可以用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 线性表示. 所以设 $\overrightarrow{OM}=k(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)$,



就存在 $a,b\in\mathbb{R}$,

$$\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC},$$

即

$$k(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)-\boldsymbol{r}_1=a(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)+b(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1),$$

合并同类项, 得到

$$(k-1+a+b)\boldsymbol{r}_1+(k-a)\boldsymbol{r}_2+(k-b)\boldsymbol{r}_3=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ 线性无关, 所以三个系数都必须是 0. 因此 $k=a=b=\dfrac{1}{3}$. 即

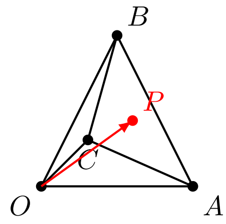
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3).$$

2 第二次作业

问题 11

在四面体 $OABC$ 中, 设点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心. 求向量 $\overrightarrow{OP}$ 关于向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 的分解式.

解答. 利用例 4.1.5 的结论, 中心到顶点的距离相当于这个顶点所引中线长的 $\frac{2}{3}$. 所以



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\end{aligned}$$

题目 15

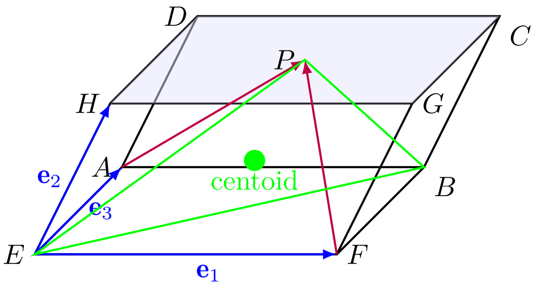
证明三个向量 $a\boldsymbol{e}_1 - b\boldsymbol{e}_2, b\boldsymbol{e}_2 - c\boldsymbol{e}_3, c\boldsymbol{e}_3 - a\boldsymbol{e}_1$ 共面.

解答. 因为 $(a\boldsymbol{e}_1 - b\boldsymbol{e}_2) + (b\boldsymbol{e}_2 - c\boldsymbol{e}_3) + (c\boldsymbol{e}_3 - a\boldsymbol{e}_1) = \mathbf{0}$, 所以三个向量线性相关. 根据推论 4.1.8, 三个向量共面.

106 页题目 1

在平行六面体 $ABCD-EFGH$ 中, 平行四边形 $CGHD$ 的中心为 P, 并设 $\overrightarrow{EF}=\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{EH}=\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{EA}=\boldsymbol{e}_3$. 试求向量 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{FP}$ 关于标架 $\{A;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 以及 $\triangle BEP$ 三个顶点及其重心关于 $\{A;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 的坐标.

解答.



用前面的题目 5, $\overrightarrow{EP}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED})$. 因此

$$\overrightarrow{EP}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{e}_2+(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)+(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)+(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3))=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3,$$

所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3=(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{FP}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3=(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$.

B 的坐标由 $\overrightarrow{AB}$ 决定, 为 $(1,0,0)$, 同理可以写出 $E=(0,0,-1)$, $P=(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})$. 因此 $\triangle BEP$ 的重心是 $(\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{2})$.