

第十六周作业?

洪艺中

2024 年 12 月 29 日

本文档仅提供 10.5 节部分习题的答案, 第十六周第二部分作业没做.

1 第一部分

习题 10.5 题目 13

设 A 是一个正定矩阵, $B = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^\top & a \end{pmatrix}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$. 证明:

1. B 正定当且仅当 $a - \alpha^\top A \alpha > 0$;
2. B 半正定当且仅当 $a - \alpha^\top A \alpha \geq 0$.

解答.

1. 取 $\begin{pmatrix} x^\top & y \end{pmatrix} \neq \theta$,

$$\begin{pmatrix} x^\top & y \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^\top & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ax + y\alpha \\ \alpha^\top x + ay \end{pmatrix} = x^\top Ax + yx^\top \alpha + y\alpha^\top x + ay^2, \quad (*)$$

如果 B 正定, 那么 $(*)$ 式为正. 取 $x = A^{-1}\alpha$, $y = -1$ 得到

$$\alpha^\top A^{-1}\alpha - 2\alpha^\top A^{-1}\alpha + a > 0,$$

即

$$a - \alpha^\top A^{-1}\alpha > 0;$$

反过来, 如果上式成立. 因为我们知道 B 的前 $n-1$ 个顺序主子式是 A 的主子式, 已经是正的, 所以只需要证明 $\det B > 0$ 即可, 利用矩阵的分块初等变换

$$\begin{bmatrix} E & \theta \\ -\alpha^\top A & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} E & \theta \\ -\alpha^\top A & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^\top & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \theta^\top & a - \alpha^\top A \alpha \end{bmatrix},$$

所以

$$|B| = |A|(a - \alpha^\top A \alpha),$$

因为 A 正定, 而条件又给出 $a - \alpha^\top A \alpha > 0$, 因此 $|B| > 0$, 即 B 正定.

2. 半正定的情况只需要把上面对应的 $>$ 改为 \geq 即可.

题目 14

设 A 是一个实对称矩阵, B 是一个半正定矩阵. 证明: AB 的特征值全为实数.

解答. 假设 λ 是 AB 的一个特征值, ξ 是对应的一个特征向量, $AB\xi = \lambda\xi$. 根据定理 10.5.3, 半正定矩阵可以写成一个实矩阵与其转置的乘积, 即有矩阵 C , $B = C^T C$. 则

$$CAB\xi = CAC^T C\xi = (CAC^T)(C\xi) = \lambda C\xi,$$

如果 $C\xi \neq \theta$, 说明 λ 是 CAC^T 的特征值, 而这个矩阵是实对称矩阵, 所以它的特征值一定是实数; 如果 $C\xi = \theta$, 那么 $AB\xi = \theta$, 所以特征值是 0, 也是实数. Q.E.D.¹.

题目 15

设 $A_{n \times n}$ 是一个实对称矩阵, 其最小与最大的特征值分别为 a, b . 证明: 对任意的向量 $x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$ax^T x \leq x^T Ax \leq bx^T x.$$

解答. 因为 A 是实对称的, 所以存在正交矩阵 U 让 A 对角化 $U^T AU = \Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. 那么设 $x = Uy$,

$$x^T Ax = y^T \Lambda y = \sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2,$$

因为 $a \leq \lambda_i \leq b$, 所以

$$a \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \leq x^T Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2 \leq b \sum_{i=1}^n |y_i|^2.$$

而正交矩阵不改变向量的长度, 所以 $y^T y = x^T x$, 用这一点替换上式的两边, 即得证.

题目 16

设 $f(x) := x^T Ax$ 是一个实二次型, 有 n 维向量 x_1 与 x_2 , 使得

$$x_1^T Ax_1 > 0, \quad x_2^T Ax_2 < 0.$$

证明: 必存在 n 维向量 x_0 , 使 $x_0^T Ax_0 = 0$.

解答. 思路: 我们假设 $x_1 = e_1$, $x_2 = e_2$, 且空间为 2 维. 那么就是说二次型在 $(1, 0)$ 点为正, $(0, 1)$ 点为负. 因为二次型是多元多项式, 是连续函数, 那么如果我们在 $(1, 0)$ 点和 $(0, 1)$ 点之间连一条线段, 根据连续函数的介值定理, 线段上一定有一个点取到 0.

设 $x(t) = (1-t)x_1 + tx_2$, 那么

$$g(t) := f(x(t))$$

是关于 t 的连续函数, $g(0) > 0$, $g(1) < 0$, 所以由连续性, 存在 $t_0 \in (0, 1)$, 使 $f(t_0) = 0$. 则取 $x_0 = x(t_0)$ 即可.

¹Q.E.D. 的意思是 “quite easily done quod erat demonstrandum”, 意思是「证毕」

题目 17

设分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ 是一个正定矩阵. 证明:

1. 矩阵 A_{11} , A_{22} , $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 也正定;
2. $|A| \leq |A_{11}||A_{22}|$.

解答.

1. A_{11} 和 A_{22} 的正定性证明可以用题目 19(在后面) 的方法, 即说明他们所有的主子式都是正的. 第三个矩阵会让我们想到 72 页习题 4(1), 即有

$$\begin{pmatrix} E & \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix},$$

因为 $A_{12} = A_{21}^T$, 所以上面是合同变换. 故右边的矩阵和正定矩阵合同, 那么它也是正定的. 所以用和判断前两个矩阵正定同样的理由, 得到 $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 也正定.

2. 这一题我们分成三步做

- a) 证明: 如果 B, C 是两个实对称矩阵, B 正定, 则存在可逆的 P 使 $P^T B P = E$, 且 $P^T C P$ 是对角阵²;
- b) 利用 a) 证明, 如果 B 正定, C 半正定, 且 $B - C$ 是半正定的, 那么 $|B| \geq |C|$;
- c) 利用 b) 证明 (2).

我们先证明前两项.

引理 1

如果 B, C 是两个实对称矩阵, B 正定, 则存在可逆的 P 使 $P^T B P = E$, 且 $P^T C P$ 是对角阵.

证明. 首先由于 B 正定, 那么存在可逆矩阵 M 使之合同于单位矩阵 $M^T B M$, 此时 $M^T C M$ 由合同关系, 依然是半正定的. 因为后者是实对称矩阵, 可以相似对角化, 我们取正交矩阵 U 来让 $M^T C M$ 对角化为对角阵 $U^T M^T C M U = \Lambda$, 那么取 $P = M U$ 即可,

$$U^T M^T B M U = E, \quad U^T M^T C M U = \Lambda.$$

□

²注意这个题目与 229 页题目 11 「同时可对角化」的区别, 这里是合同变换而非相似, 所以不需要两个矩阵可交换

引理 2

如果 B 正定, C 半正定, 且 $B - C$ 是半正定的, 那么 $|B| \geq |C|$.³

证明. 利用引理 1, 存在 P ,

$$P^T B P = E, \quad P^T C P = \Lambda,$$

那么 $P^T B - C P = E - \Lambda$ 是半正定的. 由于经过 P 变化之后, 三个矩阵都是对角阵, 那么正定就是说它们的对角元都是正的, 半正定就是说它们的对角元是非负的. 所以 Λ 的对角元和 $E - \Lambda$ 的对角元都是非负的, 即 Λ 的对角元在 $[0, 1]$ 区间上.

所以 $1 = |P^T B P| \geq |P^T C P|$, 即 $|B| \geq |C|$. \square

有了这两个引理, 我们就可以证明 (2) 了. 首先 A_{22} 和 $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 都正定, 而 A_{11} 正定, 所以 $x^T A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}x = (A_{12}x)^T A_{11}^{-1}(A_{12}x) \geq 0$, 即 $A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 是半正定的. 那么根据引理 2, $|A_{22}| \geq |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$, 因此

$$|A| = |A_{11}||A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}| \leq |A_{11}||A_{22}|.$$

题目 19

设 $A = (a_{ij})$ 是一个实对称矩阵. 证明:

1. 矩阵 A 正定当且仅当 A 的任一个主子式都大于零;
2. 假设 A 正定, 对任意 $i \neq j$, 有 $|a_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$;
3. 假设 A 正定, A 中所有元素中绝对值最大的元素一定在对角线上.

解答.

1. 假设主子阵 A' 由 i_1, i_2, \dots, i_k 行和列决定, 那么取 $x = x_1 e_{i_1} + x_2 e_{i_2} + \dots + x_k e_{i_k}$, 如果 $x' := (x_1, x_2, \dots, x_k) \neq \theta$,

$$x'^T A' x' = x^T A x > 0,$$

这说明主子阵 A' 正定. 故主子式大于零.

2. 考虑 i, j 行和列决定的二阶主子式, 由上面的结论, 它是正的, 所以有 $a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 > 0$, 因此 $|a_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$.
3. 由第二个结论, a_{ii} 和 a_{jj} 中至少有一个大于等于 $|a_{ij}|$, 所以对任何一个非对角元, 都能找到一个对角元比它的绝对值大. 所以所有元素中绝对值最大的元素一定在对角线上.

³如果把这个引理换到实数上, 这个引理就是说: 如果 $b > 0$, $c \geq 0$ 且 $b - c \geq 0$, 那么 $|b| \geq |c|$. 可见正定矩阵某种程度上就像是「正数」一样.

题目 21

设分块实矩阵 $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^\top & O \end{pmatrix}$, 其中 $B_{m \times m}$ 正定, $C_{m \times n}$ 列满秩. 证明二次型 $f(x) = x^\top A x$ 的正惯性指数和负惯性指数分别为 m 和 n .

解答. 思路: 将这个矩阵合同为规范形.

因为 B 正定, 所以可以取 M 可逆, 使 $M^\top B M = E_m$. 那么

$$\begin{pmatrix} M & \\ & E \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} B & C \\ C^\top & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & \\ & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & M^\top C \\ C^\top M & O \end{pmatrix},$$

然后, 用合同变换把次对角的两个矩阵消去

$$\begin{pmatrix} E_m & -M^\top C \\ & E_n \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} E_m & M^\top C \\ C^\top M & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & -M^\top C \\ & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & \\ & -C^\top M M^\top C \end{pmatrix}$$

M 可逆, 所以 $M M^\top$ 正定. 而 C 列满秩, 所以 $C y = 0 \Leftrightarrow y = 0$, 因此

$$y^\top C^\top M M^\top C y = 0 \Leftrightarrow C y = 0 \Leftrightarrow y = 0,$$

即 $C^\top M M^\top C$ 正定, 进而 $-C^\top M M^\top C$ 负定. 因此有可逆矩阵 N 使之变为规范形 $N^\top C^\top M M^\top C N = E_n$. 因此

$$\begin{pmatrix} E & \\ & N \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} E_m & \\ & -C^\top M M^\top C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \\ & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & \\ & -E_n \end{pmatrix},$$

即 A 的正惯性指数是 m , 负惯性指数是 n .