第八周作业

洪艺中

2024 年 11 月 12 日

1 第一部分

106 页题目 2

设平行四边形的三个顶点的径向量分别为 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, 求第四个顶点的径向量和对角交点的径向量用 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ 表示的关系式.

解答. 平行四边形一共有四个顶点, 给出三个顶点之后还剩下一个需要确定的顶点. 因为题目中没有给定三个顶点的相对关系, 我们假设 $\boldsymbol{r}_\alpha$ ($\alpha \in \{1,2,3\}$) 在第四个顶点的对位, $\boldsymbol{r}_\beta$, $\boldsymbol{r}_\gamma$ ($\beta, \gamma \in \{1,2,3\}$ 且 $\{\alpha,\beta,\gamma\} = \{1,2,3\}$) 则在邻位. 那么第四个顶点的径向量可以表示为

$$\boldsymbol{r}_\alpha + (\boldsymbol{r}_\beta - \boldsymbol{r}_\alpha) + (\boldsymbol{r}_\gamma - \boldsymbol{r}_\alpha) = \boldsymbol{r}_\beta + \boldsymbol{r}_\gamma - \boldsymbol{r}_\alpha,$$

对角线的交点则是平行四边形的中心. 根据之前作业题 (习题 4.1 题目 5) 的结论, 其径向量为

$$\frac{1}{4}[\boldsymbol{r}_\alpha + \boldsymbol{r}_\beta + \boldsymbol{r}_\gamma + (\boldsymbol{r}_\beta + \boldsymbol{r}_\gamma - \boldsymbol{r}_\alpha)] = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_\beta + \boldsymbol{r}_\gamma).$$

题目 5

判断向量组是否共面. 题目略.

解答. 判断是否共面, 只需计算三个向量构成的平行六面体的体积:

(1)

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^\top & \boldsymbol{b}^\top & \boldsymbol{c}^\top \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -9.$$

因此三个向量不共面.

(2)

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^\top & \boldsymbol{b}^\top & \boldsymbol{c}^\top \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

因此三个向量共面.

题目 7

证明: 四面体每一顶点与对面中心所连的线段共点, 且这点到顶点的距离是它到对面中心距离的三倍.

解答. 根据之前作业题 (习题 4.1 题目 11) 的结论, 对于四面体 $OABC$, 如果 P 是 $\triangle ABC$ 的重心, 那么 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

任取两条顶点 - 中心的线段 (例如取 $O-ABC$, $A-OBC$), 我们假设它们相交, 那么存在 $k,l\in\mathbb{R}$,

$$\overrightarrow{OO}+\frac{k}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OA}+\frac{l}{3}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),$$

记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$, 将上式全部用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 表示, 得

$$\text{左侧}=\frac{k}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$

$$\begin{aligned}\text{右侧}&=\boldsymbol{a}+\frac{l}{3}[-\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})]\\&=(1-l)\boldsymbol{a}+\frac{l}{3}\boldsymbol{b}+\frac{l}{3}\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{k}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(1-l)\boldsymbol{a}+\frac{l}{3}\boldsymbol{b}+\frac{l}{3}\boldsymbol{c},$$

移项得到

$$(1-l-\frac{k}{3})\boldsymbol{a}+(\frac{l}{3}-\frac{k}{3})\boldsymbol{b}+(\frac{l}{3}-\frac{k}{3})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

因为三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面, 所以上述线性组合的系数必须全部为 0. 因此解出 $k=l=\dfrac{3}{4}$. 所以两个线段确实相交, 且交点关于 O 的径向量为

$$\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \tag{$*$}$$

同时 $k=l=\dfrac{3}{4}$ 说明这点到顶点的距离是它到对面中心距离的三倍.

最后, 我们要证明其他顶点 - 中心的线段也交于这个点. 由于结果的对称性, 如果当时我们选择的不是顶点 A 出发的线段, 而是顶点 B (或 C) 出发的, 那么可以交换点 A 和点 B (或 C) 的名字, 得到结果. 也就是交换结果中 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ (或 $\boldsymbol{c}$). 而交换之后这个结果 $(*)$ 是不变的. 所以 $O-ABC$ 与 $A-OBC$, $B-OCA$, $C-OAB$ 交于同一点. 由于两条不共线的线段只能有一个交点, 所以四条线段都交于这一点.

113 页题目 1

证明 $\text{射影}_{\boldsymbol{l}}(\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n)=\lambda_1\text{射影}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\text{射影}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\text{射影}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{a}_n$.

解答.

1. $n=1$ 时, 根据定理 4.3.2, 结论成立;
2. 假设 $n=k-1$ 时, 结论成立. 那么 $n=k$ 时,

$$\begin{aligned}&\text{射影}_{\boldsymbol{l}}(\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n)\\=&\text{射影}_{\boldsymbol{l}}(\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1})+\lambda_n\text{射影}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{a}_n && \text{(定理 4.3.1, 4.3.2)}\\=&\lambda_1\text{射影}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\text{射影}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_{n-1}\text{射影}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{a}_{n-1}+\lambda_n\text{射影}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{a}_n. && \text{(归纳假设)}\end{aligned}$$

综上, 根据数学归纳法, 结论得证.

题目 3

计算下列各项

(2) 已知等边三角形 ABC 的边长为 1, 且 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$;

(5) 在直角坐标下, 已知 $\boldsymbol{a}=(4,-3,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,-1,2)$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的射影.

解答.

(2)
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=0,$$
所以
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}.$$

(5) 射影$_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}/|\boldsymbol{b}|=\frac{7}{3}$.

题目 5 (3)

用向量法证明, 三角形各边的垂直平分线共点且这点到各顶点等距.

解答. 设三角形 ABC, $\boldsymbol{a}:=\overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{b}:=\overrightarrow{CA}$, $\boldsymbol{c}:=\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 此后以 A 为中心点.

如果三条垂直平分线交于同一点, 设这点关于 A 的径向量为 $\boldsymbol{p}$, 那么其应该在三条平分线上, 所以应该满足三个方程

$$(\boldsymbol{p}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}=0, \tag{AB}$$
$$(\boldsymbol{p}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0, \tag{CA}$$
$$(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=0. \tag{BC}$$

因为 $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}$ 是线性无关的, 所以可以表示 $\boldsymbol{p}$ 为 $\boldsymbol{p}=k\boldsymbol{c}+l\boldsymbol{b}$, $k,l\in\mathbb{R}$. 那么可以得到三个方程

$$\begin{aligned}k\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+l\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}&=\frac{1}{2}|\boldsymbol{c}|^2,\\ k\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}+l\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}&=-\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2,\\ k\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 三个方程加起来恰好是 0. 所以这个方程组等价于只有前两个方程的方程组. 而前两个方程构成的方程组的系数矩阵之行列式为

$$\begin{vmatrix}|\boldsymbol{c}|^2 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & |\boldsymbol{b}|^2\end{vmatrix}=|\boldsymbol{c}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}|^2>0,$$

所以方程组有唯一解. 这说明 $\boldsymbol{p}$ 可以存在. 那么三角形各边的垂直平分线共点.

接下来考虑到顶点的距离. 容易写出, 到三个顶点的距离分别为

$$\begin{aligned}|AP| &= |\boldsymbol{p}|,\\ |BP| &= |\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c}|,\\ |CP| &= |\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b}|.\end{aligned}$$

平方, 作差,

$$\begin{aligned}|CP|^2-|AP|^2 &= (\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}\\ &= 2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\ &= 2(\boldsymbol{p}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0;\\ |BP|^2-|CP|^2 &= (\boldsymbol{p}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b})\\ &= 2(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\\ &= 2(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}\\ &= 2(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=0.\end{aligned}$$

如果您疑惑这里为什么得到 0, 请看 $\boldsymbol{p}$ 满足的方程. 所以三条线段的长度相等. 即交点到三个顶点等距.

题目 9

设 P 是正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 外接圆上一点, 证明

$$|\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}| = \text{常数}.$$

解答. 根据之前作业题 (习题 4.1 题目 6), 设 O 是多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中心, 那么 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=0$. 所以

$$|\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}| = |n\overrightarrow{OP}| = nR,$$

其中 R 是外接圆的半径.

2 第二部分

119 页题目 2

解答.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{i}\times(5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\times(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\\
=&2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}\\
=&\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\\
=&\boldsymbol{k}+2\boldsymbol{i}.
\end{aligned}$$

题目 3 (2) (5)

证明

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2\leqslant\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$, 并证明在什么情形下等号成立;

(5) 设 P 是 $\triangle ABC$ 的重心, 试证明 $\triangle APB$, $\triangle BPC$, $\triangle CPA$ 的面积相等.

解答.

(2)

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\leqslant|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2,$$

取等时, $\sin^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=1$. 所以当且仅当两向量正交时取等.

(5) 即证明 $\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{PA}$. 取前两项作差

$$\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})\times\overrightarrow{PB},$$

因为 PB 在 B 到 AC 中点 M 连线上, 所以 P, B, M 在一条直线上, 因此 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{PB}$ 共线. 所以叉积是 0, 即前两项相等. 另外一个等号同理可得.

题目 4 (1)

求三角形 ABC 的面积.

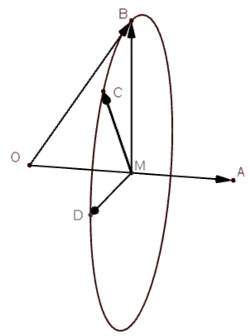
解答. 由于 $\overrightarrow{AB}=(-1,0,2)$, $\overrightarrow{AC}=(0,1,-3)$. 所以面积是

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

题目 7

给定不共线三点 O, A, B. 将 B 绕 $\overrightarrow{OA}$ 逆时针 (从 A 点往 O 点看) 旋转角度 θ 得到 C. 用 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 和 θ 来表示 $\overrightarrow{OC}$.

解答.



为了方便, 记 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, 记 $\alpha := \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

设 $\overrightarrow{OB}$ 投影到 $\overrightarrow{OA}$ 上的向量是 $\overrightarrow{OM}$. 将 $\overrightarrow{OB}$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到的向量为 $\overrightarrow{OD}$. 那么在 BMD 这个平面上, $\overrightarrow{MC}$ 可以轻松用 $\overrightarrow{MB}$ 和 $\overrightarrow{MD}$ 表示为

$$\overrightarrow{MC} = \cos\theta \overrightarrow{MB} + \sin\theta \overrightarrow{MD},$$

接下来只需要计算 $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MB}$ 和 $\overrightarrow{MD}$ 即可.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{MB} = \boldsymbol{b} - \overrightarrow{OM} = \boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}.$$

设 $\overrightarrow{MD} = k\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, 根据 $|\overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{MB}|$ 可以列出方程

$$k|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\alpha = |\overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{MB}| = |\boldsymbol{b}|\sin\alpha,$$

得到

$$k = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|},$$

所以

$$\overrightarrow{MD} = \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

那么

$$\overrightarrow{MC} = \cos\theta\left(\boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}\right) + \sin\theta\frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|},$$

因此

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a} + \cos\theta\left(\boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}\right) + \sin\theta\frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|},$$

即

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}(1 - \cos\theta)\boldsymbol{a} + \cos\theta\boldsymbol{b} + \sin\theta\frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

123 页题目 1(1) (4)

题目略

解答.

(1) $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})| = |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}| \leqslant |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}| \leqslant |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$. 几何意义就是说, 在三组边长固定了的所有平行六面体中, 长方体的体积最大.

(4) 我们先证明 (2), 即混合积关于第三个元素是线性的.

证明.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \lambda\boldsymbol{c} + \mu\boldsymbol{d}) &= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\lambda\boldsymbol{c} + \mu\boldsymbol{d}) \\ &= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \lambda\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \mu\boldsymbol{d} \\ &= \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \mu(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}).\end{aligned}$$

同时, 由于混合积交换后只变符号, 所以混合积对第一、第二位元素也是线性的. □

回到原题. 利用线性性将 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 展开, 一共有 9 项, 可以表示为

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} a_i b_j c_k (e_i, e_j, e_k),$$

而如果 i, j, k 中有两个一样, 那么 $(e_i, e_j, e_k) = 0$. 所以只有三个各不相同的时候, 才可能出现非零的求和式. 因此上述求和可以改为

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \sum_{ijk\text{是}3-\text{排列}} a_i b_j c_k (e_i, e_j, e_k),$$

因为 $(e_i, e_j, e_k) = (-1)^{\tau(ijk)}(e_1, e_2, e_3)$, 所以

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \sum_{ijk\text{是}3-\text{排列}} (-1)^{\tau(ijk)} a_i b_j c_k (e_1, e_2, e_3),$$

而 $\sum_{ijk\ 3-} (-1)^{\tau(ijk)} a_i b_j c_k$ 就是题目中的行列式, 因此

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_3 \\ b_1 & b_3 & b_3 \\ c_1 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} (e_1, e_2, e_3).$$

题目 2 (1)

已知四点坐标, 判断是否共面. 如果不共面, 求出四面体体积和从顶点 D 引出的高.

$$A(1, 0, 1), B(4, 4, 6), C(2, 2, 3), D(10, 14, 17).$$

解答. 作差

$$\overrightarrow{AB} = (3,4,5), \quad \overrightarrow{AC} = (1,2,2), \quad \overrightarrow{AD} = (9,14,16),$$

计算混合积 (行列式) 为

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 0,$$

为零, 所以共面.

题目 4 (2)

解答.

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} = 7\boldsymbol{b} - 20\boldsymbol{a} = (-46, 29, -12).$$

题目 5(1)(5)

解答.

(1)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} \cdot [(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a}] &= \boldsymbol{b} \cdot [(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}] \\ &= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 (1 - \cos^2 \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})) \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 \sin^2 \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \end{aligned}$$

(5) “$\Rightarrow$”: 如果三个向量共面, 那么他们的叉乘都和三个向量所在的那个平面垂直, 所以三个叉乘向量共线.(如果三个向量还是共线的, 那么叉乘为 0, 所以结论也成立); “$\Leftarrow$”: 如果三个叉乘共面, 那么

$$\begin{aligned} 0 = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) &= [(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})] \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \\ &= \{[\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})]\boldsymbol{c} - [\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})]\boldsymbol{b}\} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \\ &= [\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})]\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \\ &= (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\ &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 = 0, \end{aligned}$$

因此原来的三个向量共面.