第十周作业

洪艺中

2024 年 11 月 27 日

1　第一部分

习题 5.4 题目 7 (1)(2)

解答.

(1) 直线的方向与平面法向的内积是 $(-2,-7,3)\cdot(4,-2,-3)=-3$, 所以相交;

(2) 相交.

题目 9 (1)

解答. 法向内积非零, 所以相交.

题目 10

解答.

(1) $\cos\theta=|(1,1,0)\cdot(3,0,0)|/(|(1,1,0)||(3,0,0)|)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以角是 $\frac{\pi}{4}$;

(2) $\cos\theta=|(7,2,1)\cdot(15,8,-1)|/(|(7,2,1)||(15,8,-1)|)=\frac{4\sqrt{435}}{87}$.

2　第二部分

习题 5.4 题目 1

解答. 点向方程是

$$\boldsymbol{v}(t)=(0,1,2)t+(1,1,1).$$

题目 3 (1)(3)

解答.

(1) 平行;

(2) 相交.

题目 4 (2)(3)

解答.

(2) $d=\frac{4}{17}\sqrt{170}$, 公垂线

$$\begin{cases}61x-78y+15z+80=0,\\14x+3y-30z+25=0.\end{cases}$$

(3) $d=\frac{3}{7}\sqrt{35}$, 公垂线

$$\begin{cases}x-3z+1=0,\\37x+20y-11z+122=0.\end{cases}$$

题目 5

解答. 证明: 两条直线的公共法向是

$$(0,-b,c)\times(a,0,c)=(-bc,ac,ab),$$

两条直线上分别取点 $(0,b,0)$, $(a,0,0)$, 计算距离得到

$$2d=\frac{(a,-b,0)\cdot(-bc,ac,ab)}{|(-bc,ac,ab)|}=|\frac{-2abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}|,$$

平方得到

$$d^2=\frac{(abc)^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2},$$

取倒数即得

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

题目 6(2)

解答. 夹角的余弦是 $\cos\theta=\frac{17}{45}$.

习题 5.5 题目 1(1)

解答. 首先证明三个平面属于同一个平面束. 前两个平面法向量的内积是 $(2,-1,0)\times(1,2,1)=0$, 所以法方向正交, 因此两平面相交. 二者确定的平面束方程是

$$\lambda(2x-y+1)+\mu(x+2y+z+2)=0,$$

观察得到, 取 $\lambda=\mu=1$ 时, 得到的方程就是第三个方程. 因此三者在同一平面束上.

(1) 如果要过点 $(1,0,1)$, 代入解出 $\lambda=4$, $\mu=-3$, 方程是

$$5x-10y-3z-2=0.$$

题目 2 (2)(4)

解答.

(2) $12x+39y+3z-1=0$;

(4) 平面有两个, 分别是 $2x-9y-6z+4=0$ 和 $6x+3y+2z-8=0$.

题目 3

解答. 这条交线在 Ox 和 Oy 上的交点分别是 $(1,0,0)$ 和 $(0,2,0)$, 因为其与三坐标平面构成了一个体积为 2 的四面体, 所以其在 Oz 上的截距应该是 6. 因此可以写出截距式方程

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{\pm 6}=1.$$