# 第一次作业

洪艺中

2024 年 9 月 22 日

如无特殊说明, 本文中的 $t, t_1, t_2$ 等参数均为数域 $\mathbb{F}$ 中的任意数.

## 问题 1

(1) 方程是

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

首先, 用第二个方程去消掉其余两个方程的 $x_1$ 变量. 为此, 按如下步骤操作:

1. 交换第 1, 2 行的方程;
2. 交换后的第 2 行加上交换后的第 1 行之 $-2$ 倍;
3. 交换后的第 3 行加上交换后的第 1 行之 $-3$ 倍.

如此, 即得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_2 + 4x_3 = 5, \\ 4x_2 + 4x_3 = 8. \end{cases}$$

接着, 用第二个方程去消掉最后一个方程的 $x_2$ 变量. 为此, 第 3 行加上第 2 行之 $-4$ 倍. 如此, 即得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_2 + 4x_3 = 5, \\ -12x_3 = -12. \end{cases}$$

解这个阶梯形方程组, 得到

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

(5) 方程是

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \qquad\ = 2. \end{cases}$$

直接消元即可, 不过这里给出另一个算法.

观察方程组发现, $x_4$ 的系数皆为 $\pm 1$, 所以可以把 $x_4$ 换到第一位来消元, 让结果看起来更好. 为此, 按如下步骤操作:

1. 交换 $x_4$ 列到最前面;
2. 第 2, 3, 4 行分别加上第 1 行之 $-1$, $1$, $-1$ 倍.

如此, 即得

$$\begin{cases} -x_4 + \ \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ \qquad\quad 2x_1 + \qquad - 2x_3 = 0, \\ \qquad\quad 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 2, \\ \qquad\quad\ \ x_1 + \qquad - \ \ x_3 = 0, \\ \qquad\quad 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

观察发现, 第 2 和第 4 行方程只差了一个 2 倍, 所以其中一个可被消去为零. 我们用第 4 行去消元. 为此, 按如下步骤操作:

1. 交换第 4 行到第二行, 并把原来的第 2 行移动到方程的最后去, 得到

$$\begin{cases} -x_4 + \ \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ \qquad\quad\ \ x_1 + \qquad - \ \ x_3 = 0, \\ \qquad\quad 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 2, \\ \qquad\quad 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2, \\ \qquad\quad 2x_1 + \qquad - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

2. 第 3, 4, 5 行分别加上第 2 行的 $-3$, $-5$, $-2$ 倍. 如此, 即得

$$\begin{cases} -x_4 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ \qquad\quad x_1 \qquad\ - \ \ x_3 = 0, \\ \qquad\qquad\quad 5x_2 + 7x_3 = 2, \\ \qquad\qquad\quad 5x_2 + 7x_3 = 2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ \ 0 = 0. \end{cases}$$

最后, 我们发现第 3 与 4 行的方程是相同的. 因此可以消去一个, 即得

$$\begin{cases} -x_4 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ \qquad\quad x_1 \qquad\quad - \ x_3 = 0, \\ \qquad\qquad\quad 5x_2 + 7x_3 = 2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0. \end{cases}$$

消元得到阶梯形方程组后, 未知量有四, 非零方程有三, 且无矛盾方程. 因此方程组有无穷多解. 设 $x_1 = x_3 = t$, 得到

$$\begin{cases} x_1 = \qquad\qquad t, \\ x_2 = \quad -\dfrac{7}{5}t + \dfrac{2}{5}, \\ x_3 = \qquad\qquad t, \\ x_4 = \qquad \dfrac{6}{5}t - \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

## 问题 2

(2) 用第 3 个方程去消元最为方便. 把第 3 个方程换到第 1 行来消元, 消去后得到

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right),$$

解出

$$\begin{cases} x_1 = & 2-2t_1-t_2, \\ x_2 = & t_1, \\ x_3 = & 1+t_2, \\ x_4 = & t_2. \end{cases}$$

(4)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{7}{2} & \frac{-9}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-7}{2} \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{7}{2} & \frac{-9}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{-26}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-10}{7} & \frac{19}{7} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{7}{2} & \frac{-9}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{-26}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

因此方程组无解.

## 问题 3

用消元法. 记 $b_1=a_5+a_1$, $b_2=a_5+a_1+a_2$, $b_3=a_5+a_1+a_2+a_3$, $b_4=a_5+a_1+a_2+a_3+a_4$(为了排版), 则

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & & & & a_1\\
 & 1 & -1 & & & a_2\\
 & & 1 & -1 & & a_3\\
 & & & 1 & -1 & a_4\\
-1 & & & & 1 & a_5
\end{array}\right)
\xrightarrow{R_5+R_1}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & & & & a_1\\
 & 1 & -1 & & & a_2\\
 & & 1 & -1 & & a_3\\
 & & & 1 & -1 & a_4\\
 & -1 & & & 1 & b_1
\end{array}\right)
\xrightarrow{R_5+R_2}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & & & & a_1\\
 & 1 & -1 & & & a_2\\
 & & 1 & -1 & & a_3\\
 & & & 1 & -1 & a_4\\
 & & -1 & & 1 & b_2
\end{array}\right)
\xrightarrow{R_5+R_3}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & & & & a_1\\
 & 1 & -1 & & & a_2\\
 & & 1 & -1 & & a_3\\
 & & & 1 & -1 & a_4\\
 & & & -1 & 1 & b_3
\end{array}\right)
\xrightarrow{R_5+R_4}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & & & & a_1\\
 & 1 & -1 & & & a_2\\
 & & 1 & -1 & & a_3\\
 & & & 1 & -1 & a_4\\
 & & & & 0 & b_4
\end{array}\right),
$$

所以 $b_4=0$ 时方程有无穷多解, 而 $b_4\neq 0$ 时方程无解. 有解时, 方程的解为

$$
\begin{cases}
x_1= & a_1+a_2+a_3+a_4+t,\\
x_2= & a_2+a_3+a_4+t,\\
x_3= & a_3+a_4+t,\\
x_4= & a_4+t,\\
x_5= & t.
\end{cases}
$$

## 问题 4

为了避免因 $\lambda = 0$ 而不能除以 $\lambda$, 把第三个方程换到第一行来消元.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda^1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3 \end{array}\right),$$

1. 如果阶梯头 $\lambda - 1$ 和 $2 - \lambda - \lambda^2$ 都非零, 那么方程一定有唯一解. 其解为

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1+\lambda}{2+\lambda}, \\ x_2 = \dfrac{1}{2+\lambda}, \\ x_3 = \dfrac{(1+\lambda)^2}{2+\lambda}. \end{cases}$$

2. 如果阶梯头并非皆非零:

   (a) $\lambda = 1$. 此时方程组消元为

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

   可见方程有解, 且有无穷多解. 此时解为 $x_1 = 1 - x_2 - x_3$.

   (b) $\lambda = -2$. 此时方程组消元为

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

   可见方程无解.