第九周作业

洪艺中

2024 年 11 月 20 日

1 第一部分

习题 5.1 1 奇数

解答.

(1)
$$3x^2+3y^2+8xy-7=0, x\geqslant -y;$$

(3)
$$\boldsymbol{r}(\theta)=((a-b)\cos\theta+b\cos(\frac{b-a}{b}\theta),(a-b)\sin\theta+b\sin(\frac{b-a}{b}\theta));$$

(5)
$$\boldsymbol{r}(\theta)=((a+b)\cos\theta-b\cos(\frac{a+b}{b}\theta),(a+b)\sin\theta-b\sin(\frac{a+b}{b}\theta)).$$

注: (3) 和 (5) 的答案是认为小圆初始位置在大圆右边, 球心逆时针移动, 定点 P 初始位置为大圆和小圆的交点.

题目 2 偶数

解答.

(2) 设两点分别为 $(-c,0,0)$ 和 $(c,0,0)$. 到定点距离之和 (差) 为 $2a$. 如果 $c<a(c>a)$, 那么这个图形是椭圆 (双曲线) 绕 Ox 轴旋转得到的旋转体. 设 $r^2:=y^2+z^2$, 那么 x 和 r 满足椭圆 (双曲线) 方程, 即
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{r^2}{a^2-c^2}=1,$$
所以方程是
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{a^2-c^2}=1.$$
如果 $c=a$, 那么是和为定值时, 动点在两定点的中点处上, 即 $(0,0,0)$. 差为定值时, 动点在 Ox 轴上两点以外的部分, 即 $x=t, t\leqslant -c$或$t\geqslant c$. 其他情况下轨迹不存在.

(4) $(x-4)^2+y^2+(z-1)^2=1.$

题目 3

解答. 本题的答案按照 xOy, yOz, zOx 交线的顺序给出.

(2) $x^2+2y^2=6$ 椭圆; $2y^2-4z^2=6$ 双曲线; $x^2-4z^2=6$ 双曲线;

(4) $(0,0)$ 一个点; $y^2=z$, $z\geqslant 0$ 抛物线; $x^2=z$, $z\geqslant 0$ 抛物线;

(5) $(0,0)$ 一个点; $y^2=4z^2$ 两条相交的直线; $x^2=4z^2$ 两条相交的直线.

题目 5

解答. 关于 xOy, yOz, zOx 平面的射影柱面分别是

$$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{9}{4},$$
$$y^2+(z-\frac{5}{2})^2=\frac{9}{4},$$
$$z=x+2, x\in[-1,2].$$

题目 6

解答.

$$\begin{cases} y=2x, \\ 9x^2+z^2=1. \end{cases}$$

2 第二部分

习题 5.2 题目 1 偶数

解答.

(2) 坐标式参数方程是

$$\begin{cases} x=\lambda; \\ y=\lambda; \\ z=\mu. \end{cases}$$

一般方程是

$$x-y=0.$$

(4) 坐标式参数方程是

$$\begin{cases} x=3+\lambda+\mu, \\ y=-5+6\lambda-6\mu, \\ z=1+\lambda+3\mu. \end{cases}$$

一般方程是

$$12x-y-6z=35.$$

题目 2

解答. 截距方程

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1,$$

坐标式参数方程

$$\begin{cases} x=\lambda, \\ y=\mu, \\ z=6-2\lambda-3\mu. \end{cases}$$

题目 3

解答. 设截距式方程是

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

因为

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=k,$$

所以过定点 $(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\frac{1}{k})$.

题目 5

解答.

$$2x-y+z=4\pm\sqrt{6}.$$

题目 9

解答. 设平面上到原点最近的点是 P, 那么 OP 和平面垂直, 并且 $|OP|=p$. 因为平面的法向是 $(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$, 所以设

$$\overrightarrow{OP}=k(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}),$$

它在平面上, 所以

$$k(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})=1,$$

同时

$$|\overrightarrow{OP}|^2=k^2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})=p^2,$$

结合上述两个方程, 解出 $k=p^2$. 因此

$$p^2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})=1,$$

即

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}.$$

题目 10 (1)

解答.

$$-19x^2+14y^2+5z^2+44xy-10xz-20yz+70x-160y+50z-25=0.$$

题目 11

解答. 根据题目中的说法, 我们认为 P_0 在 P_1P_2 中间

$$\frac{|P_0P_1|}{|P_0P_2|} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{|Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D|} = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}.$$

习题 5.3 题目 1(2)

解答. 因为标准方程可以很容易地转化为参数方程和一般方程, 所以答案只给出标准方程.

(2)
$$\frac{x-2}{0} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{0};$$

(4)
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{x-1}{-3}.$$

题目 2(1)

解答.
$$\frac{x+6}{-7} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{5}.$$

题目 3 奇数

解答.

(1) $x + y - z - 2 = 0$;

(3) 关于 xOy, yOz, zOx 平面的射影平面分别是 $x - 11y + 4 = 0$, $7y + z - 3 = 0$, $7x + 11z - 5 = 0$.

题目 5 (2)

解答. $(-1, 2, 1)$.

题目 7

解答. 联立这些平面方程, 设系数矩阵是 A, 增广矩阵是 $\bar{A}$, 则这些平面通过同一条直线的充要条件是方程组有解, 且解至少有一个自由变量. 即 $r(A) = r(\bar{A}) \leqslant 2$.