第六周作业

洪艺中

2024 年 10 月 30 日

1 第一次作业

72 页题目 4 (1)

设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, 矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{m\times m}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{F}^{n\times m}$, $\boldsymbol{D} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 如果 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{D}$ 可逆, 证明

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}||\boldsymbol{D}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|.$$

解答. 构造

$$\boldsymbol{M} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 借助分块矩阵的初等行变换, 用第一行的 $\boldsymbol{A}$ 消掉第二行的 $\boldsymbol{C}$ 得到

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ & \boldsymbol{D}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix},$$

所以

$$|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|.$$

由于 $\boldsymbol{D}$ 可逆, 借助分块矩阵的初等行变换, 用第二行的 $\boldsymbol{D}$ 消掉第一行的 $\boldsymbol{B}$ 得到

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix},$$

所以

$$|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}||\boldsymbol{D}|.$$

综上可知

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}||\boldsymbol{D}|.$$

题目 5

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是两个 n 元列向量. 证明:

$$\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\top}\right| = |\boldsymbol{A}|(1+\boldsymbol{\beta}^{\top}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}).$$

解答. 利用上一个题的结论. 取题目 4 中的 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 分别为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}^{\top}$、$\boldsymbol{E}_1$. 所以

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{\beta}^{\top}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}|,$$

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}||\boldsymbol{D}| = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\top}|,$$

所以

$$\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\top}\right| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{\beta}^{\top}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}|.$$

右边项里, $\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{\beta}^{\top}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个 1×1 的矩阵. 根据矩阵的加法、乘法以及数乘的法则, 可以构造 1×1 矩阵空间 $\mathbb{F}^{1\times 1}$ 和数域 $\mathbb{F}$ 之间的一个双射 $\mathrm{i}\colon \mathbb{F}^{1\times 1}\to\mathbb{F}$, 把矩阵 (a) 映射到 a. 这个映射不仅是双射, 它还保持了两个空间上的加法、乘法运算以及所有的运算性质, 例如交换律、分配律等等. 这说明 1×1 矩阵空间可以视为与数域等同的, 即 $\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{\beta}^{\top}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$ 也可以看成一个数 $1+|\boldsymbol{\beta}^{\top}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}|$. 有了这种观念, 我们就可以自由地混用 1×1 矩阵和数了. 因此可以把结论写成

$$\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\top}\right| = |\boldsymbol{A}|(1+\boldsymbol{\beta}^{\top}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}).$$

76 页题目 1

1. 2;
2. 4;
3. 5;
4. $$\begin{cases} 3 & k \neq 2 \\ 2 & k = 2 \end{cases}.$$

题目 2

设 n 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中每行元素之和都等于常数 c, 证明 $c \neq 0$ 且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 中每行元素之和都等于 c^{-1}.

解答. 首先如果 $c = 0$, 那么矩阵的行列式为 0, 则矩阵不可逆. 因此 $c \neq 0$.

接着考虑 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 中元素的和. $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^*/|\boldsymbol{A}|$, 那么第 i 行元素的和可以表示为

$$\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{A}_{ji}, \tag{$*$}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ji}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式. 这个形式让我们想到利用 Cramer 法则.

设

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

并且设 $\boldsymbol{B}_i$ 表示用 $\boldsymbol{b}$ 替换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列得到的矩阵. 那么线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解可以表示为

$$x_i = \frac{|\boldsymbol{B}_i|}{|\boldsymbol{A}|}. \tag{$**$}$$

而 $\boldsymbol{A}$ 每行的所有元素之和为 c, 所以

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} c^{-1} \\ c^{-1} \\ \vdots \\ c^{-1} \end{pmatrix}$$

是方程的一个解, 同时因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 其也是唯一解. 因此根据 $(**)$ 式, 对任何 i,

$$c^{-1} = \frac{|\boldsymbol{B}_i|}{|\boldsymbol{A}|},$$

而

$$\frac{|\boldsymbol{B}_i|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{A}_{ji},$$

观察上式和 $(*)$ 式, 可见两者是一样的. 所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 每行元素的和就是 c^{-1}.

2 第二部分

80 页题目 1(3)

首先可以很容易验证这样的结论:

性质 2.1

对于二阶矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 其可逆的充要条件是 $ad - bc = 0$. 如果可逆, 那么其逆为

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

也就是经过以下三步得到

1. 交换主对角的两个元素 a, d 的位置;
2. 给副对角的两个元素 b, c 加上负号;
3. 乘上行列式 $ad - bc$ 的倒数.

回到题目. 有了刚才的工具, 可以瞬间算出

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

题目 2

$$\boldsymbol{A}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{-3}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

83 页题目 2

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{F}^{r\times r}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{F}^{s\times s}$, $\boldsymbol{C}\in\mathbb{F}^{s\times r}$, 证明 $r\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\right)\leqslant r\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\right)$.

证明. 右边矩阵的秩是 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$. 为了证明这个不等式, 我们只需要在右边的矩阵中找到一个 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$ 阶的非零子式. 记 $s:=r(\boldsymbol{A})$, $t=r(\boldsymbol{B})$. 设 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_s\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 s 阶非零子式, $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_t\\ l_1 & l_2 & \cdots & l_t\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的一个 t 阶非零子式. 那么取不等式右边矩阵 (记为 $\boldsymbol{M}$) 的 $r+s$ 阶子式 $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_s & r+k_1 & r+k_2 & \cdots & r+k_t\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s & r+l_1 & r+l_2 & \cdots & r+l_t\end{pmatrix}$ 这个子式可以表示为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{r\times r} & \boldsymbol{O}_{r\times s}\\ \boldsymbol{C}_{s\times r} & \boldsymbol{B}_{s\times s}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{r\times r}$ 和 $\boldsymbol{B}_{s\times s}$ 就是从 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中选取的那两个子式. 而 $\boldsymbol{C}_{s\times r}$ 中的元素都来自 $\boldsymbol{C}$. 根据分块矩阵的行列式计算规律, 这个子式的行列式为 $|\boldsymbol{A}_{r\times r}||\boldsymbol{B}_{s\times s}|\neq 0$. 所以这就说明了 $r(\boldsymbol{M})\geqslant r+s$. 因此原不等式得证. $\square$

题目 3

证明

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\geqslant r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\geqslant \max\{r(\boldsymbol{A},r(\boldsymbol{B}))\}.$$

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m_1\times n$ 的, $\boldsymbol{B}$ 是 $m_2\times n$ 的. 并记 $\boldsymbol{M}:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$.

先证明右边的不等号. 因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的子式都是 $\boldsymbol{M}$ 的子式, 所以 $r(\boldsymbol{M})\geqslant r(\boldsymbol{A})$ 且 $r(\boldsymbol{M})\geqslant r(\boldsymbol{B})$. 因此 $r(\boldsymbol{M})\geqslant\max\{r(\boldsymbol{A},r(\boldsymbol{B}))\}$.

再证明左边的不等号. 利用初等变换可以把 $\boldsymbol{M}$ 中的 $\boldsymbol{B}$ 部分变为标准形, 即若

$$\boldsymbol{PBQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E_s}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

那么

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_{m_1}&\\&\boldsymbol{P}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{AQ}}\\\boldsymbol{E}_s&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}_{(m_2-s)\times s}&\boldsymbol{O}_{(m_2-s)\times(n-s)}\end{pmatrix}$$

因为添加一个零行, 不会出现更高阶的非零子式, 所以矩阵的秩不会变化. 因此上面这个矩阵的最后 m_2-s 行去掉也不会影响矩阵的秩. 因此 $\boldsymbol{M}$ 的秩相比 $\boldsymbol{A}$ 的秩最多增加 s. 所以其秩不大于 $r(\boldsymbol{A})+s=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$. 即

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\geqslant r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}.$$

因此不等式得证. □

86 页题目 3

题目略.

证明. 记这个方程组为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 则题目中的条件等于是说

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^\top & 0 \end{pmatrix}$$

的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩. 那么 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ 作为 $\boldsymbol{B}$ 的子阵, 其秩不超过 $\boldsymbol{B}$ 的秩, 所以 $r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \leqslant r(\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A})$; 而 $\boldsymbol{A}$ 又是 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ 的子阵, 所以 $r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \geqslant r(\boldsymbol{A})$. 综上 $r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = r(\boldsymbol{A})$, 因此方程组有解. □

题目 4

题目略.

证明. 考虑方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1x_{n+1} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2x_{n+1} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_nx_{n+1} = 0 \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \cdots + a_{n+1,n}x_n + b_{n+1}x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

这是一个 $n+1$ 个方程构成的关于 $n+1$ 个未知数的齐次线性方程组, 所以其一定有解. 而如果原方程组有解, x_1 到 x_n 取原方程组的解, 并取 $x_{n+1} = -1$, 就成了这个线性方程组的一组非零解. 这说明这个线性方程组至少有两组解: 零解和 $x_{n+1} = -1$ 的解. 所以这个方程组没有唯一解, 因此其系数矩阵不可逆, 行列式为 0. □

不充分的例子: $n = 1$, $a_{11} = a_{21} = 0$, $b_1 = b_2 = 1$. 那么

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

但是方程组是两个 $0 = 1$ 的方程, 没有解.

89 页题目 8

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n>2)$ 阶方阵. 证明 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

证明. 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 那么 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$; 如果 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 那么如果 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$, 就存在 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$. 而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$, 所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 而此时 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$, 与假设 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$ 矛盾. 所以 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时, $|\boldsymbol{A}^*|=0=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$. 命题得证. $\square$