Mandelbrot Set 的生成和探索

洪艺中
数学与应用数学 3190105490

2022 年 7 月 1 日

摘要

本文介绍 Mandelbrot 集的定义以及其与有理函数迭代中收缩循环的关系. 随后给出其图像的一种基于迭代法的生成方式, 并简要分析迭代次数对所得图像性质的影响, 以及其中不同区域的数学含义.

1 引言

Mandelbrot 集是最著名的分形图形之一. 在 1978 年, Robert W. Brooks 和 Peter Matelski 首次定义并画出了这个集合, 这也是他们克莱因群研究的一部分. Mandelbrot 集有一个无限复杂的分形边界, 在放大的过程中会逐渐显现更多自相似的细节. 在数学研究之外, Mandelbrot 集靠它无限递归的美感获得盛名, 它也是数学可视化和数学美学的最著名的例子之一 [5].

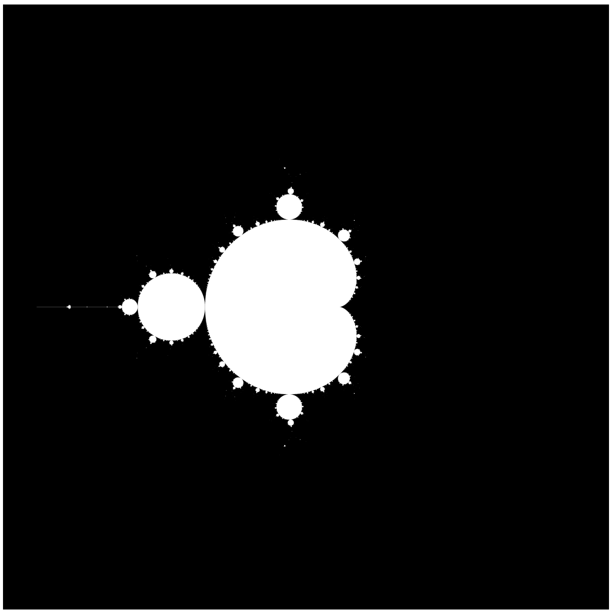


图 1: Mandelbrot 集图

2 问题的背景介绍

Mandelbrot 集的来源可以联系到有关有理函数的迭代问题上. 有理函数的迭代是许多迭代函数中十分常见的, 例如牛顿迭代法求解多项式 $f(x)$ 的零点时, 会用到

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

式. 其中右端项即是一个有理函数 $g(x) = x - f(x)/f'(x)$. 每次使用牛顿法时, 我们会选取一个初值来迭代, 因此就会有这样一个问题: 牛顿法对任何初值都收敛吗? 如果有不收敛的点, 选到这些点的概率是多少? 这两个问题的答案决定了我们能否自由地使用牛顿法 — 如果牛顿法由很高的概率选到一个不收敛的初值, 那么它就不好用了. 所以研究有理函数的迭代性质是很有意义的.

上述的问题可以推广到一般的有理函数 $g(x)$, 研究的初值空间也可以推广到复平面上: 我们希望研究迭代方程 $z_{n+1} = g(z_n)$ 的变化特点. 实际上有一些特殊点的迭代性质是容易掌握的, 例如方程 $z = g(z)$ 的根 (因为是有理函数, 所以必然存在) 是这个迭代方程的不动点, 那么自然是收敛的. 因此我们就可以研究, 不动点附近的点是会随着迭代趋近这个不动点, 还是会发散开呢? 实际上, 这可以通过计算 $g'(z)$ 的值来判定 [1].

除了不动点, 我们也可以考虑经过 n 次变化回到原点的 "循环点列", 即方程 $f(f(\cdots(f(z))\cdots)) = z$ 的零点. 如果初值选在这些点上, 那么显然迭代会出现循环因而不收敛. 如果只有这些点会导致不收敛其实是安全的, 因为选到它们的概率为 0. 但是我们还会担心, 这些点附近的点也会随着循环而动吗? 还是很快也会收敛到其他点呢?

如果一个循环点列附近的点也会一直随着循环而动 (更准确地说, 他们也会逐渐逼近那些循环点), 那么可以称之为一个**收缩循环**. 收缩循环意味着平面上有一些开集, 其中点作为初值是不收敛的, 也就说明算法可能会不收敛. 因此我们希望找到一些方法, 在算法陷入无限的循环之前就判定出函数 $g(x)$ 是否存在收缩循环.

幸运的是, Fatou[3, 4] 证明了: **如果有理函数 $g(z)$ 存在上述的收缩循环, 那么其稳定点, 即 $g'(z) = 0$ 的零点, 一定会收敛到这些收缩循环上.** 也就是说, 我们只需要检测稳定点在迭代中的表现, 就可以判定函数是否存在收缩循环.

因此如果我们希望知道 $g(z) = z^2 + c$ 这个最简单的有理函数 (之一) 是否存在收缩循环, 只需要检测 0 迭代的表现即可 — 这也就引出了本文中的 Mandelbrot 集, 它正是在研究 $g(z) = z^2 + c$ 从 0 开始迭代的表现. 它实际上也给出了关于 $g(z)$ 迭代性质的信息.

3 数学理论

本文着眼于研究 Mandelbrot 集图像的绘制而非不动点问题, 因此这一部分主要列出 Mandelbrot 自身的性质 [5].

Mandelbrot 集的定义为 $\{c \in \mathbb{C} : \text{以0 为初值的迭代} z_{n+1} = g(z_n) \text{ 始终有界}\}$. 当 $|c| > 2$ 时, 迭代一定会发散, 因此 Mandelbrot 集包含在原点为圆心, 半径为 2 的圆中.

此外还有一些有趣的性质, 例如 Mandelbrot 实际上是一个连通集 (虽然在计算机模拟中常常会因为精度问题而变得不连通), 并且其中中心的 "最大的" 部分的边界确实是一条心形线. 它对应了 $g(x)$ 的不动点满足第 2 节中所说的 "收缩" 性质的点集的边界 [1].

4 算法

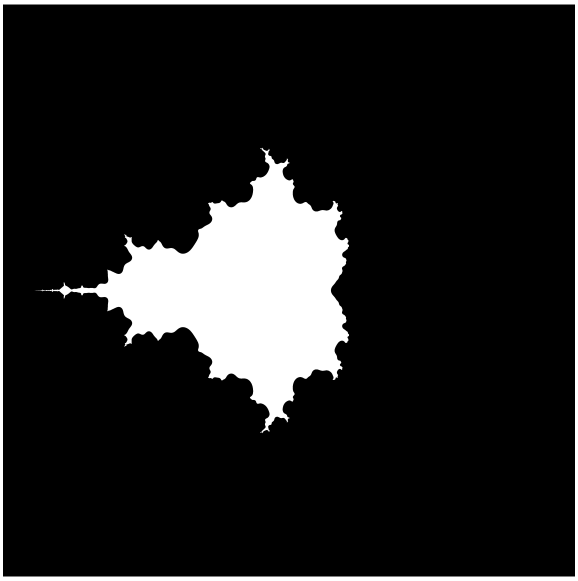
我们模拟迭代过程来判断点是否属于 Mandelbrot 集. 迭代次数越多, 图像越准确 (但连通性可能因为像素限制而破坏). 这个算法来自 [2].

```
for each pixel p of the image do
    c ← Complex Represented By p;
    z ← 0;
    flag ← true;
    while t < MAX ITERATION TIME do
        if |z| > 2 then
            flag ← false;
            Break;
        else
            z ← z^2 + c;
            t ← t + 1;
        end
    end
    Set color black if flag is true, white if false;
end
```

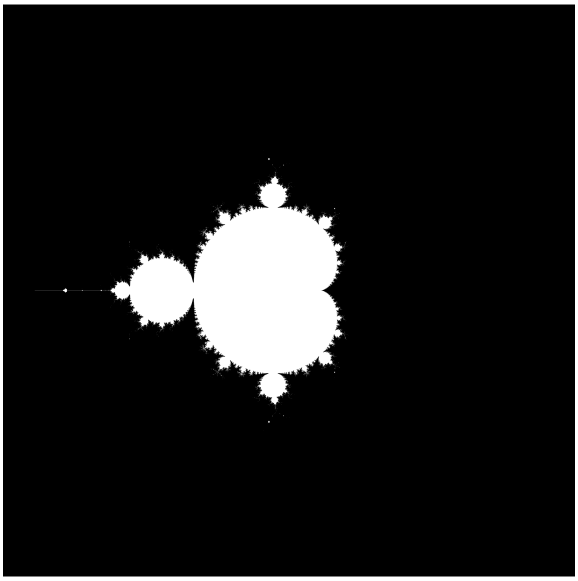
Algorithm 1: 判断点是否属于 Mandelbrot 集

5 数值算例

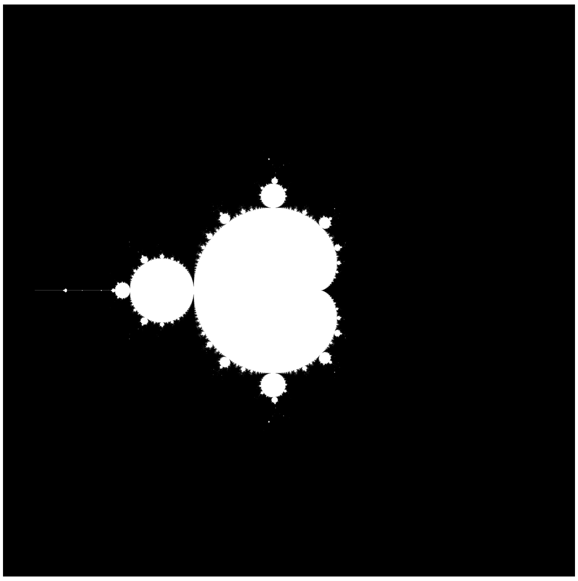
使用 c++ 实现上述的算法, 生成了不同迭代上限下的图片:



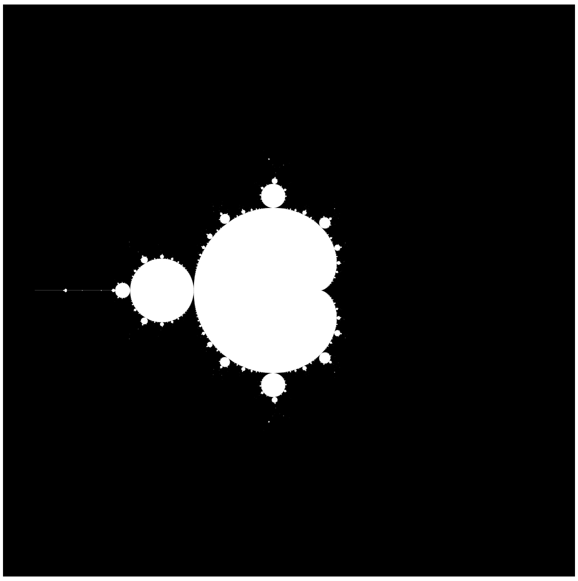
(a) 迭代 10 次



(b) 迭代 50 次



(c) 迭代 100 次



(d) 迭代 10000 次

图 2: 不同迭代次数得到的图像

可以看到, 随着迭代次数的增加, 图像边界的细节也逐渐增多. 但是迭代次数过多, 由于精度问题, 图像会变得不连通.

我们也记录其迭代次数, 并按照这个数目为 Mandelbrot 集外的点染色, 以期看出随着迭代整体的变化过程. 这样可以得到一幅有艺术气息的图片.

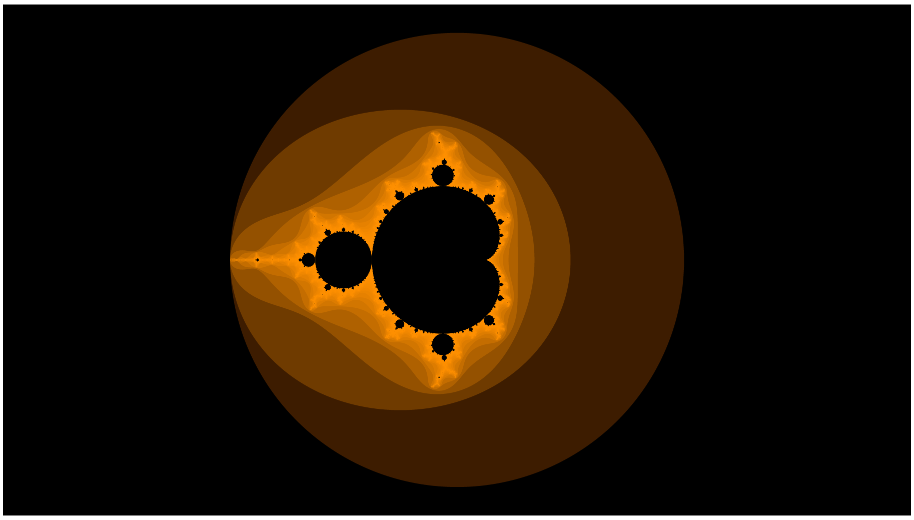


图 3: 按迭代次数染色

最后, 我们也对 Mandelbrot 的点做了循环测试, 即判定迭代有界的点趋向于怎样的循环. 结果由下图展示:

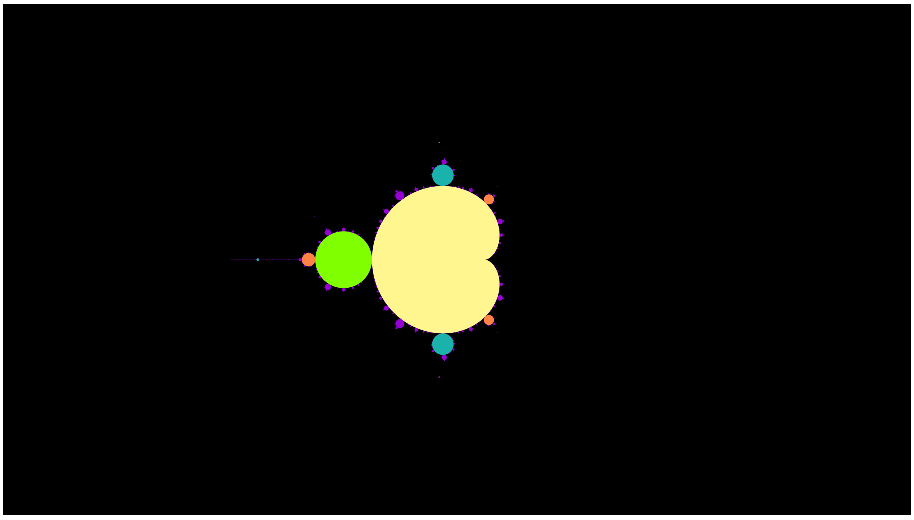


图 4: 按迭代次数染色

不同的颜色表示对应区域的循环为1-循环, **2-循环**, **3-循环**, 4-循环或是**5-循环及以上**. 这也呼应了我们第 2 节中介绍的关于迭代中收缩循环的判定, 通过这个图就可以判断对应的 z^2+c 的迭代有怎样的收缩循环.

6 结论

没啥可说的.

参考文献

[1] 3Blue1Brown. Beyond the mandelbrot set, an intro to holomorphic dynamics - youtube. `https://youtu.be/LqbZpur38nw`, 2021.

[2] Arnaud Cheritat. Mandelbrot set - techniques for computer generated pictures in complex dynamics. `http://www.math.univ-toulouse.fr/~cheritat/wiki-draw/index.php/Mandelbrot_set`, 2016. [Online; accessed 30-June-2022].

[3] James Curry, Lucy Garnett, and Dennis Sullivan. On the iteration of a rational function: Computer experiments with newton's method. *Communications in Mathematical Physics*, 91, 06 1983.

[4] Pierre Fatou. Sur les équations fonctionnelles. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 48:161–271, 1919.

[5] Wikipedia contributors. Mandelbrot set — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set`, 2022. [Online; accessed 30-June-2022].