「实对称矩阵可在实数域上相似对角化」的叙述与证明

洪艺中
数学与应用数学 3190105490

2022 年 6 月 27 日

由于实对称矩阵可以从二次型得到, 因此它是非常常见的矩阵. 证明实对称矩阵可对角化不仅给出了「矩阵能对角化」的一个必要条件, 也为将二次型化为标准形 (对角形) 给出了理论支撑. 在二次曲面、偏微分方程等领域皆有使用.

1 问题描述

元素全为实数的矩阵 $A := (a_{ij})_{n\times n}, a_{ij} \in \mathbb{R}$ 称为**实矩阵**, 如果它进一步满足 $\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}(a_{ij} = a_{ji})$, 那么它是一个**实对称矩阵**.

本文将要证明实对称矩阵必可在实数域上相似对角化. 或者确切地说, 如果 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是实对称矩阵, 一定存在 n 阶正交矩阵 U 使得 UAU^{T} 是对角阵 (即, 非对角元均为 0).

2 证明

证明. 设 A 是一个 n 阶实对称矩阵, 这里用归纳法证明存在 n 阶的正交矩阵使得 UAU^{T} 是对角阵.

若 $n = 1$, 结论显然, 取 $U = (1)$ 即可.

下面假设 $k = n - 1$ 时结论成立. 首先证明

引理 2.1. *A 有 n 个实特征值.*

证明. 设 λ 是 A 在 $\mathbb{C}$ 的特征值 (因为特征多项式一定有 n 个根, 所以一定存在 n 个复特征值), ξ 是对应的特征向量, 那么有

$$\bar{\xi}^{\mathsf{T}} A\xi = \lambda\bar{\xi}^{\mathsf{T}}\xi = \lambda\left|\xi\right|^2 \tag{1}$$

和

$$\bar{\xi}^{\mathsf{T}} A\xi = (\bar{\xi}^{\mathsf{T}}\bar{A}^{\mathsf{T}})\xi = \bar{\lambda}\bar{\xi}^{\mathsf{T}}\xi = \bar{\lambda}\left|\xi\right|^2 \tag{2}$$

比较 (1) 和 (2) 可见 $\lambda = \bar{\lambda}$. 因此 $\lambda \in \mathbb{R}$. 由取 λ 时的任意性可知 A 的所有特征值都是实数. □

根据引理 2.1, A 的特征值均为实数, 那么特征向量满足的方程组 $|\lambda I - A| = 0$ 是实系数的, 因此有实数解, 也就是说对每个实特征值存在对应的实特征向量. 取 λ 为其任意的特征值, ξ 是对应的实特征向量且 $|\xi| = 1$, 将 ξ 扩充成 R^n 的一组标准正交基 $\xi, \xi_2, \cdots, \xi_n$, 则

$$A(\xi\ \xi_2\ \cdots\ \xi_n) = (\xi\ \xi_2\ \cdots\ \xi_n)\begin{pmatrix}\lambda & \alpha \\ \mathbf{0} & A'\end{pmatrix} \tag{3}$$

其中 α 是 $n-1$ 维的实行向量, A' 是 $n-1$ 阶实矩阵. 设 $U_0 = (\xi\ \xi_2\ \cdots\ \xi_n$, 则有 U_0 是正交矩阵 (标准正交基) 并且 (3) 等价于

$$U_0^{\mathsf{T}} A U_0 = \begin{pmatrix}\lambda & \alpha \\ \mathbf{0} & A'\end{pmatrix} \tag{4}$$

因为左边是实对称矩阵, 所以右边也是实对称矩阵, 即 $\alpha = \mathbf{0}$, 并且 A' 也是实对称矩阵. 根据归纳假设, 存在正交矩阵 U' 满足 $(U')^{\mathsf{T}} A' U' = D'$ 是对角阵. 构造[1]

$$U := U_0\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U'\end{pmatrix} \tag{5}$$

显然 U 是正交矩阵, 并且

$$\begin{aligned} U^{\mathsf{T}} A U &= \begin{pmatrix}1 & \\ & (U')^{\mathsf{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & \\ & A'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & U'\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\lambda & \\ & D'\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{6}$$

是一个对角矩阵. 说明结论对 n 成立. 根据数学归纳法, 定理成立. □

[1] 我觉得这个构造不需要自动编号, 因为这是一个定义式, 但是作业要求所有公式都要编号就加上了